

Un algorithme pour le déploiement des réseaux FTTH

Sébastien Imbrosciano^{1 †} and Alexandre Laugier^{1 ‡} and Yann Vaxès^{2 §}

¹ France Telecom/R&D/BIZZ/DIAM 905, rue Albert Einstein, F-06921 Sophia-Antipolis Cedex, France

² LIF - UFR Sciences Luminy, 163 avenue de Luminy, 13288 Marseille Cedex 9, France

Le problème de déploiement optimal d'un réseau FTTH (Fiber To The Home) consiste à concevoir un plan d'installation de fibres optiques de coût minimal permettant de connecter un ensemble de clients à un nœud de raccordement via un ensemble de coupleur. Nous présentons une modélisation de ce problème basée sur le concept de flot avec multiplicateurs et nous montrons comment obtenir par génération de colonnes une solution optimale fractionnaire du programme linéaire correspondant. Cette approche nécessite de résoudre à chaque itération un problème de plus court chemin généralisé multi-contraint. Pour cela, nous décrivons un algorithme pseudo-polynomial qui généralise au cas avec multiplicateurs l'algorithme de plus court chemin multi-contraint introduit dans [DS88].

Keywords: networks, routing, multi-constrained generalized flow, multi-constrained shortest path

1 Introduction

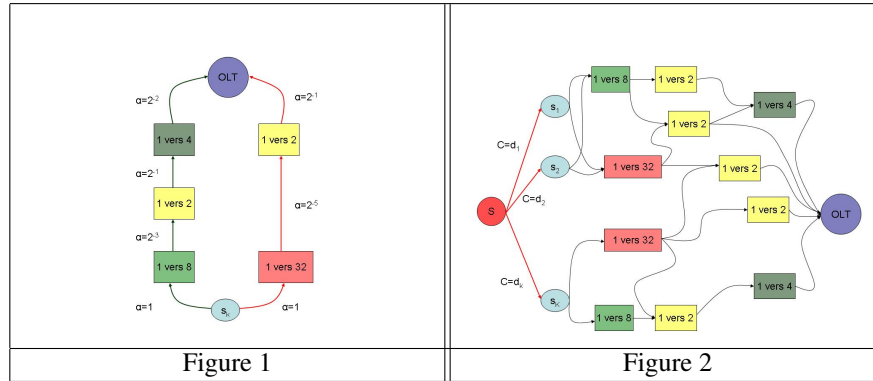
Nous considérons un problème d'optimisation qui apparait lorsqu'un opérateur de télécommunication souhaite déployer de manière efficace un réseau de fibres optiques pour connecter un ensemble de clients \mathcal{K} . Ce problème consiste à déterminer un plan d'installation de fibres optiques permettant de connecter chacun des clients à un nœud de raccordement appelé *OLT* (Optical Line Termination). Pour cela, l'opérateur dispose de sites accueillants des coupleurs qui permettent d'éclater le flux issu d'une fibre optique sur plusieurs fibres. Ici, nous supposons que les coupleurs sont déjà localisés dans le réseau et que leur facteur de concentration de ces derniers est connu. Nous supposons également connus l'ensemble des liaisons qui peuvent être équipées de fibres optiques ainsi que le coût de déploiement d'une fibre sur chacune de ces liaisons. Les facteurs de concentration des coupleurs sont des puissances de 2. Plus précisément, chaque coupleur est caractérisé par un entier $t \in \{1, 2, 3, 5\}$ et permet de réémettre le flux issu d'une fibre sur 2^t fibres. L'architecture réseau impose que sur chaque chemin utilisé pour connecter un client à OLT, le produit des facteurs de concentration soit égal à 64 (voir Fig.1). Finalement, on connaît pour chaque liaison l'affaiblissement subi par le signal optique sur cette liaison et on souhaite également pouvoir garantir que l'affaiblissement subi par le signal sur le chemin entre le client et OLT (i.e. la somme des affaiblissements sur les liaisons du chemin) ne dépasse pas un certain seuil, noté *NdB*.

Pour modéliser ce problème, nous proposons d'utiliser la notion de flot avec multiplicateurs (voir par exemple [AMO93] pour une définition formelle et des applications). Cette notion se distingue de la notion usuelle de flot par l'existence de multiplicateurs α_e pour chaque arc e qui indique que si une unité de flot entre dans l'arc e alors α_e unités de flot en ressortent. Ces multiplicateurs permettent de prendre en compte la présence des coupleurs en appliquant à tous les flots passant via un coupleur, un multiplicateur égal à l'inverse du facteur de concentration du coupleur (le flot est orienté des clients vers l'OLT, voir Fig.1).

[†]e-mail : Sebastien.Imbrosciano@orange-ftgroup.com

[‡]e-mail : Alexandre.Laugier@orange-ftgroup.com

[§]e-mail : Yann.Vaxes@lif.univ-mrs.fr



2 Modélisation

L'ensemble des liaisons sur lesquels des fibres optiques peuvent être déployées est représenté par un graphe orienté $G = (V, E)$ dont les nœuds sont OLT, les coupleurs, les clients et une super-source S reliée à tous les clients (voir Fig. 2). A chaque arc est assigné une capacité C_e représentant le nombre de fibres que la liaison peut accueillir, un coût d'installation unitaire l_e , un affaiblissement linéique γ_e et un multiplicateur $\alpha_e \leq 1$ qui est égal 1 si l'origine de l'arc e n'est pas un coupleur et à l'inverse du facteur de concentration du coupleur sinon (voir Fig. 1). La super-source S est reliée à chaque client s_k , $k \in \mathcal{X}$ par un arc dont la capacité est égale aux nombres de fibres d_k demandées par le client s_k de coût nul et de multiplicateur unitaire. On note $d := \sum_{k \in \mathcal{X}} d_k$ le nombre total de fibres demandées par les clients et \mathcal{P} l'ensemble des chemins p (considérés comme des listes d'arcs) allant de S à OLT respectant les contraintes technologiques, i.e. (i) le produit des facteurs de concentrations des coupleurs traversés par p est égal à 64 (ii) la somme des affaiblissements sur les arcs du chemin est inférieur ou égal la valeur seuil Ndb . Une unité de flot entrant dans un arc représente le déploiement d'une fibre optique entre l'origine et l'extrémité de cet arc. Pour chaque chemin $p \in \mathcal{P}$, la variable de décision ϕ_p représente la quantité de flot envoyée par S en direction de OLT via le chemin p . Pour chaque arc $e_q \in p := (e_1, e_2, \dots, e_r)$, on note $x_p(e_q) := \prod_{i=1}^{q-1} \alpha_{e_i}$ la quantité de flot qui arrive dans l'arc e_q lorsqu'une unité de flot est émise à partir de S et transite sur les arcs e_1, e_2, \dots, e_{q-1} . On remarque que le flot étant porté par des chemins dont le facteur total de concentration est 64, une unité de flot arrivant à OLT correspond exactement à 64 unités de flot émises par S . Nous supposons par la suite que d est divisible par 64. En effet, dans le cas contraire, on peut introduire un client fictif relié à tous les coupleurs par une liaison de coût nul dont la demande complète d pour en faire un multiple de 64.

Le problème FTTH revient à calculer une solution optimale entière du problème de flot généralisé multi-contraint suivant.

$$FTTH = \begin{cases} \text{Min} & \sum_{p \in \mathcal{P}} \sum_{e \in p} l_e x_p(e) \phi_p \\ & \sum_{p \in \mathcal{P}} \phi_p = d & : \lambda & (1) \\ & \sum_{p \in \mathcal{P}: e \in p} x_p(e) \phi_p \leq C_e, \forall e \in E & : \beta_e & (2) \\ & \phi_p \in \mathbb{N}, \forall p \in \mathcal{P} \end{cases}$$

La quantité $x_p(e) \phi_p$ représente le nombre de fibres optiques induits sur l'arc e par l'émission à partir de S de ϕ_p unités de flot sur le chemin p . La fonction objectif consiste donc à minimiser le coût total d'installation des fibres optiques. La contrainte (1) assure que chaque client reçoit le nombre de fibres optiques demandées. Les contraintes (2) assurent que le nombre de fibres déployées sur chaque liaison e ne dépasse pas le nombre de fibres qu'elle peut accueillir. Les contraintes technologiques sont prises en compte implicitement dans la définition de l'ensemble \mathcal{P} .

Ce modèle introduit une variable entière ϕ_p pour chaque chemin $p \in \mathcal{P}$ qui vérifie les contraintes technologiques. Ce nombre de variables est en général très grand (non-polynomial par rapport à la taille du réseau). La relaxation linéaire associée à ce programme linéaire en nombres entiers est obtenue en remplaçant

Algorithme pour le FTTH

chaque contrainte d'intégrité $\phi_p \in \mathbb{N}$ par $\phi_p \geq 0$. Ici, nous nous intéressons uniquement à la résolution optimale de cette relaxation linéaire, nous garderons FTTH comme notation pour ce programme linéaire. Dans la section suivante, nous montrons comment calculer efficacement une solution optimale de cette relaxation en montrant comment identifier un nombre réduit de chemins qui supportent une solution optimale.

3 Résolution par génération de colonnes

Nous allons résoudre une succession de programmes linéaires $FTTH(\overline{\mathcal{P}})$, portant sur les variables associées à un sous-ensemble de chemins $\overline{\mathcal{P}} \subseteq \mathcal{P}$. A chaque itération, la solution optimale duale de $FTTH(\overline{\mathcal{P}})$ permet d'identifier un nouveau chemin dont l'ajout à $\overline{\mathcal{P}}$ permet d'améliorer le plan de déploiement courant. Pour mettre en évidence un critère permettant d'identifier ces chemins, on peut considérer le programme linéaire dual de $FTTH(\overline{\mathcal{P}})$ portant sur les variables duales λ et β_e associées aux contraintes (1) et (2) :

$$FTTH^* = \begin{cases} \text{Max} & \lambda d - \sum_{e \in E} C_e \beta_e \\ & \lambda - \sum_{e \in p} x_p(e) \beta_e \leq \sum_{e \in p} x_p(e) l_e, \quad \forall p \in \mathcal{P} \quad : \phi_p \\ & \beta_e \geq 0, \quad \forall e \in E \end{cases}$$

Soit $(\lambda, \beta_e : e \in E)$ une solution optimale de $FTTH(\overline{\mathcal{P}})$. Trouver un chemin $p \in \mathcal{P} \setminus \overline{\mathcal{P}}$ tel que la solution optimale de $FTTH(\mathcal{P} \cup p)$ soit meilleure que celle $FTTH(\mathcal{P})$ revient à identifier une contrainte du dual $FTTH^*(\mathcal{P})$ violée par la solution duale $(\lambda, \beta_e : e \in E)$, i.e. un chemin $p \in \mathcal{P}$ tel que $\sum_{e \in p} x_p(e)(\beta_e + l_e) < \lambda$.

Ce problème de plus court chemin généralisé multi-contraint revient à trouver parmi l'ensemble des chemins respectant les contraintes technologiques, un plus court chemin généralisé qui permet de faire transiter une unité de flot de S à OLT à moindre coût en prenant $dist(e) := (\beta_e + l_e)$ comme coût de transit d'une unité de flot entrant dans l'arc e . Si le chemin p calculé a un coût $\sum_{e \in p} x_p(e)(\beta_e + l_e)$ strictement inférieur à λ , on l'ajoute à \mathcal{P} et on réitère. Sinon, la solution duale courante $(\lambda, \beta_e : e \in E)$ du programme linéaire $FTTH^*(\overline{\mathcal{P}})$ est également valide pour $FTTH^*(\mathcal{P})$ et donc également optimale pour ce problème. Par dualité, la solution primale courante de $FTTH(\overline{\mathcal{P}})$ est également optimale pour le programme linéaire complet $FTTH = FTTH(\mathcal{P})$ justifiant ainsi la proposition suivante.

Proposition 1 L'algorithme 1 calcule une solution optimale de la relaxation linéaire du problème FTTH.

Données : $G = (V, E)$; $(s_k, d_k) \in V(G) \times \mathbb{R}_+$ pour $k \in \mathcal{K}$; $OLT \in V(G)$; $l \in \mathbb{R}_+^{E(G)}$; $C, 1/\alpha, \gamma \in \mathbb{N}^{E(G)}$

Résultat : $(\phi_p : p \in \mathcal{P})$ une solution optimale de FTTH

$\overline{\mathcal{P}} \leftarrow$ un ensemble arbitraire de chemins valides;

répéter

 Résoudre le programme linéaire dual $FTTH^*(\overline{\mathcal{P}})$;

 Soit $(\lambda, \beta_e : e \in E)$ une solution optimale $FTTH^*(\overline{\mathcal{P}})$;

 Calculer un plus court chemin généralisé $p \in \mathcal{P}$ avec $dist(e) = (\beta_e + l_e)$ comme coût de l'arc e ;

si $\sum_{e \in p} x_p(e)(\beta_e + l_e) < \lambda$ **alors**

 | $\overline{\mathcal{P}} \leftarrow \overline{\mathcal{P}} \cup \{p\}$;

fin

jusqu'à $\sum_{e \in p} x_p(e)(\beta_e + l_e) \geq \lambda$;

Renvoyer la solution optimale $(\phi_p : p \in \mathcal{P})$ de $FTTH(\overline{\mathcal{P}})$;

Algorithme 1: Résolution de FTTH par génération de colonnes

4 Plus court chemin généralisé multi-contraint

Le problème du plus court chemin généralisé multi-contraint est NP-Complet, même dans le cas d'une seule contrainte avec tous les multiplicateurs à un [GJ79]. L'algorithme pseudo-polynomial que nous proposons pour résoudre ce problème est basé sur la programmation dynamique au même titre que l'algorithme de label-setting classique décrit dans [DS88] qui résout ce problème lorsque les multiplicateurs sont tous égaux à un. On utilise des *labels* associés à des chemins entre S et un sommet du graphe. Chaque label L est constitué de quatre attributs : un sommet $u(L)$ auquel il fait référence et qui est l'extrémité du chemin

représenté par L , un label $prec(L)$ à partir duquel L a été étendu, un coût $c(L)$, un affaiblissement $\Gamma(L)$ et une concentration $\tau(L)$ qui ensemble caractérisent le chemin en construction.

On dit qu'un label L_1 domine un label L_2 si (i) ils concernent le même sommet $u(L_1) = u(L_2)$, (ii) ils correspondent à des chemins ayant la même concentration $\tau(L_1) = \tau(L_2)$, (iii) le coût et l'affaiblissement du chemin associé à L_1 sont inférieurs ou égaux à ceux du chemin représenté par L_2 , i.e. $c(L_1) \leq c(L_2)$ et $\Gamma(L_1) \leq \Gamma(L_2)$. Dans ce cas, en remplaçant le sous-chemin représenté par L_2 par celui de L_1 dans un chemin entre S et OLT , on préserve le facteur de concentration sans détériorer les autres critères. Par conséquent, il est inutile de conserver le label L_2 .

L'algorithme que nous proposons utilise une file pour stocker l'ensemble des labels. Initialement, cette file contient un seul label L_S dont les attributs sont $u(L_S) = S$, $prec(L_S) = \emptyset$, $\tau(L_S) = 1$, $c(L_S) = 0$, $\Gamma(L_S) = 0$ et qui correspond à un chemin réduit au seul sommet S . Tant que la file n'est pas vide, à chaque itération de l'algorithme, on retire le label L situé en tête de la file. On parcourt l'ensemble des voisins v de $u = u(L)$ et on ajoute à la file le label L' avec $u(L') = v$, $c(L') = (c(L) + dist(uv))/\alpha_{uv}$, $\Gamma(L') = \Gamma(L) + \gamma_{uv}$, $\tau(L') = \tau(L)/\alpha_{uv}$ si les trois conditions suivantes sont vérifiées : (i) L' n'est dominé par aucun autre label L'' tel que $u(L'') = v$, (ii) $\Gamma(L') \leq Ndb$, (iii) $\tau(L') = 64$ si $v(L') = OLT$ et $\tau(L') < 64$ sinon. La mise à jour du coût s'explique par le fait que si une unité de flot en $u(L)$ coûte $c(L)$ alors on peut faire arriver α_{uv} unité de flot en v avec un coût $c(L) + dist(uv)$. En mettant à l'échelle, on obtient une unité de flot en v avec un coût de $(c(L) + dist(uv))/\alpha_{uv}$, voir [FW99] pour une justification plus détaillée. A la fin du processus de marquage, si OLT n'a reçu aucun label, il n'existe aucun chemin respectant les contraintes technologiques entre S et OLT . Dans le cas contraire, le label L^* de OLT dont l'attribut coût est minimum correspond à un plus court chemin généralisé multi-contraint.

La correction de cet algorithme est basée sur les deux observations suivantes. D'une part, si on omet la condition de non-dominance l'algorithme considère tous les chemins élémentaires entre S et OLT respectant les contraintes de concentration et d'affaiblissement. D'autre part, ignorer les labels dominés n'élimine aucun chemin optimal. Par ailleurs, chaque sommet reçoit au plus $Ndb \times \log_2 64$ labels non-dominés et chacun de ces labels est considéré un nombre de fois proportionnel au degré sortant du sommet. Cet algorithme s'exécute donc en temps pseudo-polynomial $O(|E(G)| \times 6 \times Ndb)$ justifiant ainsi la proposition suivante.

Proposition 2 *L'algorithme 2 calcule en temps pseudo-polynomial $O(|E(G)| \times 6 \times Ndb)$ un plus court chemin généralisé multi-contraint entre S et OLT .*

<p>Données : $G = (V, E)$; $S, OLT \in V(G)$; $dist \in \mathbb{R}_+^{E(G)}$; $1/\alpha, \gamma \in \mathbb{N}^{E(G)}$ Résultat : Un plus court chemin généralisé multi-contraint de S à OLT $Q.put(L_S)$ avec $u(L_S) = s$, $prec(L_S) = \emptyset$, $\tau(L_S) = 1$, $c(L_S) = 0$, $\Gamma(L_S) = 0$; tant que $Q \neq \emptyset$ faire $L \leftarrow Q.pop()$; pour tous les voisins v de $u(L)$ dont un label L' peut être étendu à partir de L faire $Q.put(L')$ avec $u(L') = v$, $prec(L') = L$, $c(L') = (c(L) + dist(uv))/\alpha_{uv}$, $\Gamma(L') = \Gamma(L) + \gamma_{uv}$ et $\tau(L') = \tau(L)/\alpha_{uv}$; $Q.remove(L'')$, pour tout L'' dominé par L' ; fin fin Renvoyer le chemin associé au label L^* de OLT dont l'attribut coût est minimum.</p>
--

Algorithme 2: Plus court chemin généralisé multi-contraint de S à OLT

Références

- [AMO93] R.K. Ahuja, T.L. Magnanti, and J.B. Orlin. *Network Flows : Theory, Algorithms, and Applications*. Prentice Hall, 1993.
- [DS88] M. Desrochers and F. Soumis. A generalized permanent labeling algorithm for the shortest path problem with time windows. *Information Systems and Operations Research*, 26 :191–212, 1988.
- [FW99] L.K. Fleischer and K.D. Wayne. Fast and simple approximation schemes for generalized flow. *Proceedings of the 10th annual ACM-SIAM Symposium on Discrete Mathematics*, 1999.
- [GJ79] M.R. Garey and D.S. Johnson. *Computers and Intractability : A Guide to the Theory of NP-Completeness*. W. H. Freeman & Co., 1979.