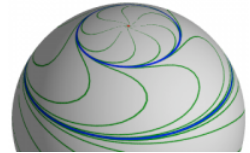


Le théorème de Bennequin II

Le 22 décembre 2010, par **Patrick Massot**

Maître de conférences à l'Université Paris Sud 11 (Orsay) ([page web](#))

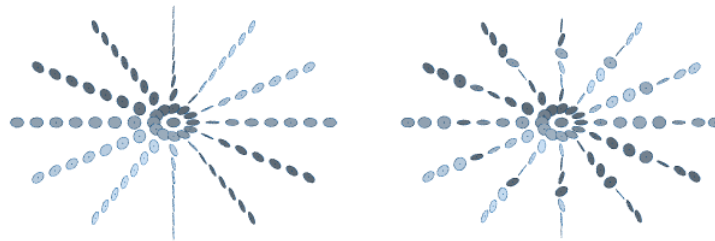


CET article est la suite de l'article **Le théorème de Bennequin I** qui présentait l'énoncé du théorème de Bennequin. Dans cette suite, nécessairement plus difficile, nous présentons quelques idées qui sous-tendent une démonstration de ce théorème. Cette démonstration n'est pas la démonstration publiée en 1982 par Daniel Bennequin mais une démonstration publiée par Emmanuel Giroux en 2000.



Il existe en fait bien d'autres démonstrations mais toutes les autres nécessitent des outils plus compliqués et un passage par des objets à 4 dimensions. La richesse des approches possibles de ce théorème est, comme souvent en mathématiques, un signe de sa profondeur.

Rappelons que le but est de montrer que les deux champs de plans suivants ne sont reliés par aucune déformation de l'espace.



La structure commune à ces deux exemples est la suivante. D'abord tous deux sont invariants par déplacement vertical, on a donc représenté des échantillons à altitude constante. Le long de l'axe vertical passant par le centre de la figure, les deux exemples sont perpendiculaires à cet axe. Par ailleurs, tous les rayons perpendiculaire à l'axe sont tangents aux deux champs de plans. La seule différence entre ces deux exemples est que celui de droite tourne plus vite lorsqu'on s'éloigne de l'axe le long d'un rayon. Alors qu'aucun des plans de gauche n'est vertical, le champ de plans de droite effectue un grand nombre de tours le long de chaque rayon. On dira que le premier est standard alors que le second est vrillé.

Des formules pour ces champs de plans

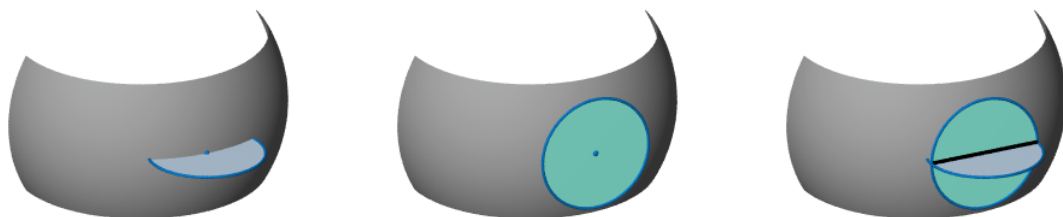
Pour ceux qui aiment les formules, on peut décrire ces exemples de la façon suivante. Pour celui de gauche, en un point de l'espace de coordonnées cylindriques (r, θ, z) , les vecteurs de coordonnées cylindriques (u, v, w) qui font partie du plan sont les solutions de l'équation $w + r^2 v = 0$. Pour celui de droite, on peut remplacer cette équation par $\cos(r)w + r \sin(r)v = 0$.

On peut remarquer que, dans les deux cas, l'équation ne fait pas intervenir la coordonnée z du point, en accord avec l'invariance par déplacement vertical des exemples. Elle ne fait pas non plus intervenir la coordonnée radiale u du vecteur, en accord avec le fait que tous les rayons partant de l'axe des coordonnées sont tangents aux champs de plans.

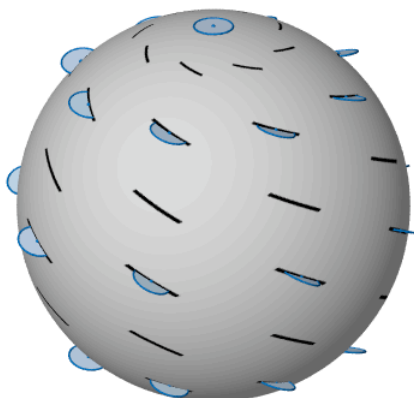
Ces formules, réclamées par certains relecteurs, peuvent effectivement aider à s'assurer que l'on a bien compris les exemples mais ne sont absolument pas utilisées dans la démonstration qui est purement géométrique.

Feuilletages caractéristiques

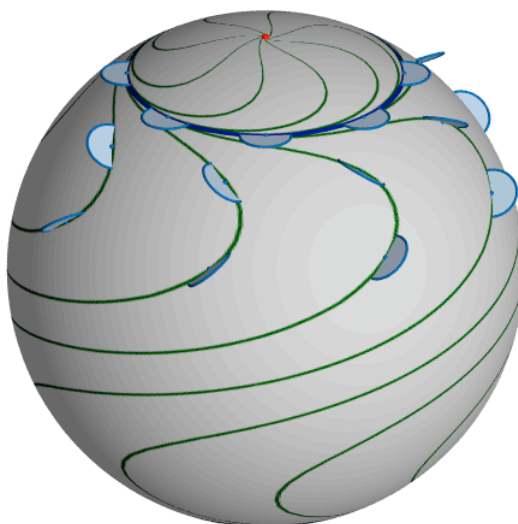
La démonstration d'Emmanuel Giroux en 2000 est, tout comme la démonstration originelle de Bennequin, basée sur un balayage de l'espace par des surfaces. Considérons une surface dans l'espace. En chaque point de la surface nous avons maintenant deux plans : celui de notre champ de plans et le plan tangent à la surface (c'est à dire le plan qui est le plus proche possible de la surface près du point considéré). La plupart du temps, ces deux plans sont différents et s'intersectent le long d'une droite comme sur la figure suivante.



On obtient ainsi un champ de droites tangent à la surface. Sur le dessin suivant on a dessiné quelques plans et quelques droites. Il faut bien sûr imaginer qu'en chaque point de la surface il y a un plan et une droite.



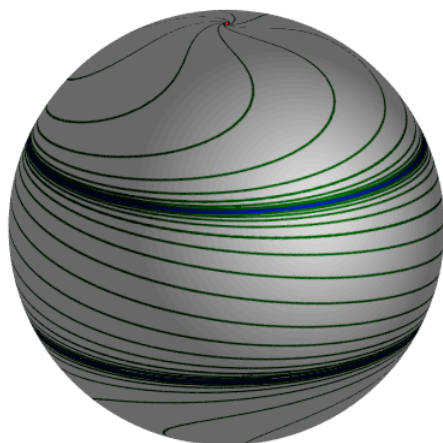
Comme expliqué dans la partie concernant les champs de plans intégrables de l'article précédent, tout champ de droites sur une surface est tangent à une famille de courbes. Lorsque par accident le champ de plans ambiant est tangent à la surface, on remplace ces courbes par un point car il n'y a plus de direction privilégiée. Dans la figure suivante, on a dessiné quelques courbes en vert (et bleu) et un point accidentel en rouge.



On dit qu'on a tracé le feuilletage caractéristique de la surface par rapport au champ de plans ambiant. Le mot feuilletage vient du fait que les courbes tracées sont disposées côté à côté sur la surface comme des feuilles de papier empilées. Ces courbes sont d'ailleurs appelées feuilles.

Le long de la courbe bleue, le champ de plans est parfaitement horizontal, ce qui permet à la courbe bleue de se refermer comme un cercle. Les courbes vertes, elles, ne se referment pas. Certaines vont d'un accident à une courbe fermée, d'autres encore spiralent entre deux feuilles fermées. De façon générale les feuilles fermées seront dessinées en bleu ou en rose (selon une distinction introduite plus loin) et les autres feuilles en vert.

À la fin de cet article on omettra de dessiner le champ de plans pour se concentrer sur les feuilletages, comme dans le dessin suivant.



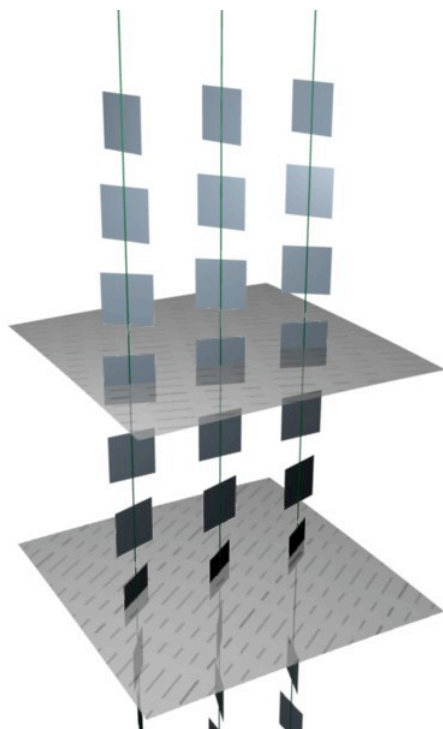
Rotation de type main gauche

On a vu qu'un champ de plans dépose sur toute surface un feuilletage. Lorsqu'on a une famille de surfaces empilées, on obtient une famille de feuilletages que Giroux appelle un film.

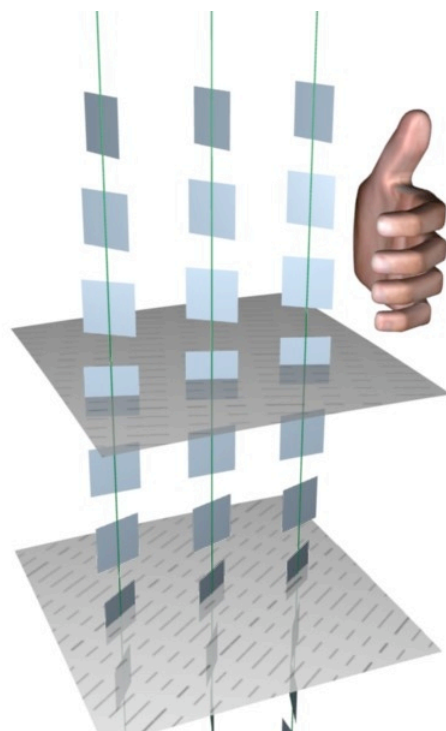
On peut se servir de cela pour raffiner un tout petit peu la discussion de l'existence ou non de surfaces tangentes au champ de plans. On considère dans une petite zone autour d'un point de l'espace les ingrédients suivant :

- une famille de courbes serrées les unes contre les autres comme une botte d'asperges vertes et tangentes au champ de plans
- une famille de surfaces empilées comme un jeu de cartes et transpercées par la botte d'asperges

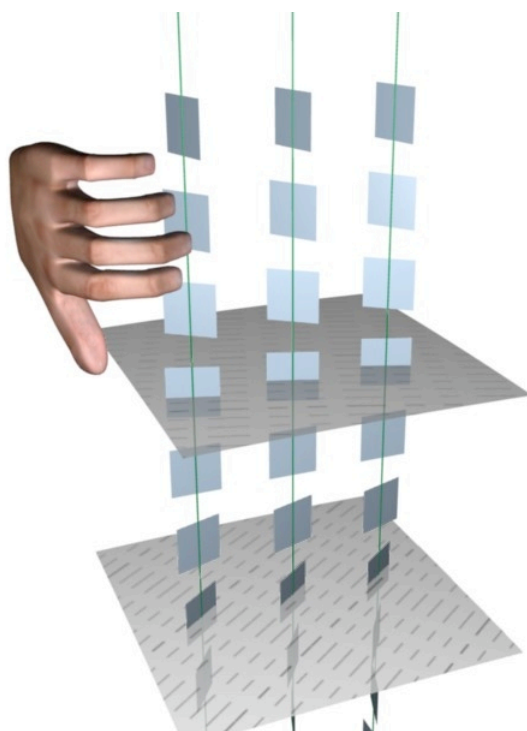
Dans la figure suivante, les asperges sont verticales et les cartes sont horizontales.



On peut démontrer que de tels ingrédients existent toujours, quitte à tordre et tourner la situation, par exemple en mettant les asperges horizontales et les cartes verticales. On regarde ensuite le film correspondant au champ de plans et aux surfaces empilées. Si le champ de plans n'est pas intégrable alors les feuilletages observés tournent autour des asperges. Il y a deux sens de rotation possibles. On fait le test avec ses deux mains légèrement refermées. On pointe chaque pouce dans la direction des asperges et on regarde si le champ de droites dessiné sur les surface suit la direction des doigts de la main gauche ou de la main droite. Dans la figure suivante, la rotation est de type main gauche car le champ de droites noir tourne dans le sens indiqué par la main gauche dessinée.



Le type de rotation ne dépend pas du sens de parcours des asperges comme le montre la figure suivante où le pouce pointe de l'autre côté mais, lorsqu'on se déplace dans le sens indiqué par le pouce, le champ de droites tourne toujours dans le sens indiqué par les autres doigts.



Le type de rotation d'un champ de plans non intégrable est le même autour de tout point de l'espace et on montre facilement qu'il n'existe pas de déformation de l'espace qui transforme un type de rotation en l'autre. Nous avons donc trouvé une nouvelle caractéristique locale qui raffine la notion de champ de plans non intégrable. Dans les deux exemples distingués par le théorème de Bennequin, nous avons une rotation de type main gauche. Nous ne sommes donc pas plus avancés pour les distinguer mais ce type de rotation commun sera bon à savoir dans la suite.

Films de feuilletages caractéristiques

On va maintenant utiliser des films plus intéressants. Regardons par exemple le film imprimé par le premier champ de plans qui nous intéresse sur la famille des sphères centrées en l'origine de notre espace.



Remarquons que ces films ne doivent pas être confondus avec les animations de déformations de champs de plans. Ici c'est la surface qu'on modifie mais le champ de plans est toujours le même. Dans les films suivants on omettra souvent de dessiner le champ de plans pour se concentrer uniquement sur le film de feuilletages en dessinant soit le champ de droites soit les courbes. Lorsqu'on représente les droites il est souvent commode de montrer le film sur une surface fixe comme dans la version ci-dessous :

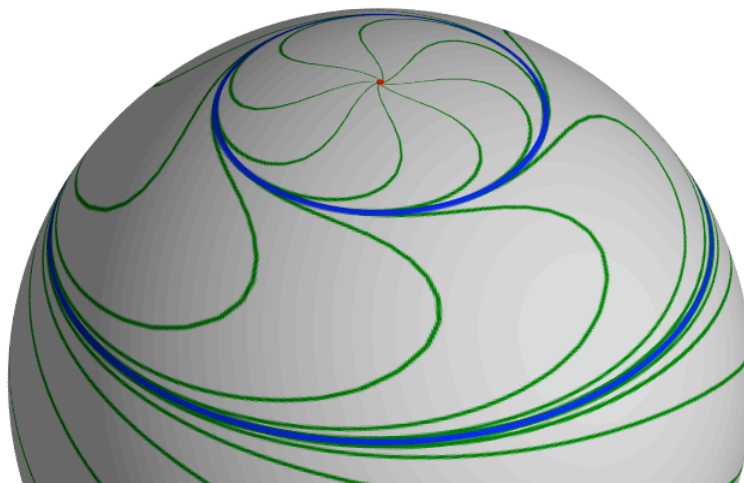


La famille de courbes correspondantes, représentées sur les sphères grossissantes est

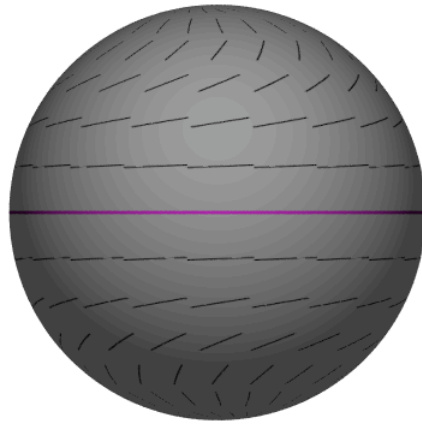


Le lemme de naissance/mort

Comme annoncé dans **la première partie**, la propriété caractéristique du champ de plans vrillé que l'on va utiliser est la présence d'un disque vrillé. Son influence sur le film est l'apparition de feuilles fermées. Étudions donc de plus près ces feuilles fermées. Il en existe de deux types qu'on peut décrire grossièrement selon le comportement des feuilles voisines. Pour toute feuille fermée, on peut choisir arbitrairement un sens de parcours puis parcourir les feuilles voisines dans le même sens. Si toutes les feuilles voisines s'éloignent de la feuille fermée ou bien si toutes s'en rapprochent alors on dit que la feuille fermée est non dégénérée. C'est le cas sur les deux feuilles fermées (en bleu) de l'exemple suivant (déjà montré plus haut). Si on choisit de parcourir les feuilles bleues dans le sens des aiguilles d'une montre, alors toutes les feuilles voisines s'en rapprochent.



Si le comportement des feuilles voisines dépend du côté duquel on se trouve par rapport à la feuille fermée alors on dit que cette dernière est dégénérée et on la dessinera en rose. Dans ce cas on lui attribue un signe : on dit qu'elle est positive si les feuilles voisines à droite se rapprochent et négatives si ce sont celles de gauche qui se rapprochent. On observe alors toujours que les feuilles voisines ont presque la même direction que la feuille fermée, ce qui rend leur dessin difficile. Il est alors préférable de dessiner le champ de droites correspondant. Sur le dessin suivant la feuille fermée est horizontale (et rose) et les droites voisines de cette feuille sont presque horizontale mais de pente strictement positive. Le signe attribué est positif.



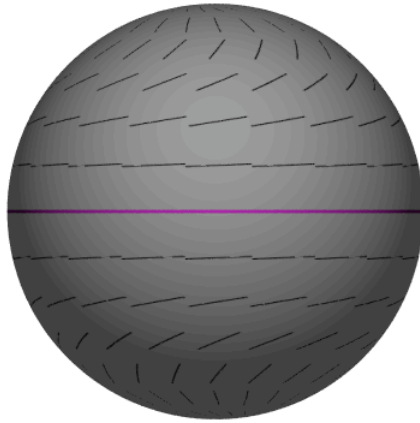
Le lecteur peut vérifier que ce signe ne dépend pas du sens de parcours choisi [1].

Dans le film du champ de plans vrillé (l'avant dernière animation ci-dessus) on constate que les feuilles fermées apparaissent de la façon suivante :

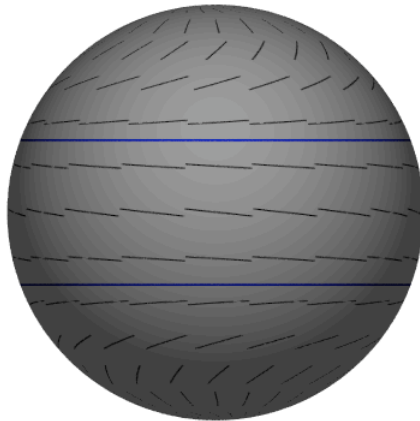
- d'abord il n'y a pas de feuille fermée



- puis une feuille dégénérée apparaît sur exactement une surface



- ensuite cette feuille se scinde en deux feuilles non dégénérée



Vous pouvez maintenant regarder à nouveau les deux dernières animations de la section précédente où ce phénomène est bien visible.

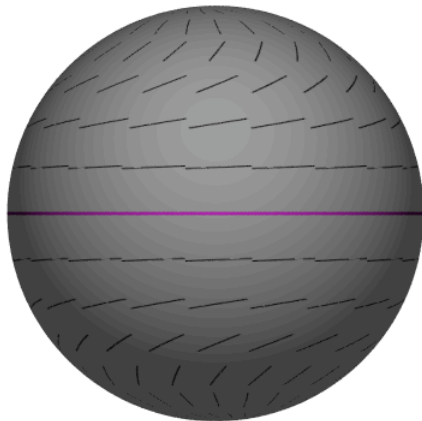
On pourrait de même observer sur d'autres exemples la disparition de deux feuilles non dégénérées via une feuille dégénérée. Emmanuel Giroux a montré qu'à chaque fois qu'un film venant d'un champ de plans qui n'est pas intégrable présente une feuille fermée dégénérée, celle-ci marque ainsi la naissance ou la mort de deux feuilles fermées non dégénérées. Il ne peut y avoir persistance d'une feuille dégénérée. Remarquez bien que cette persistance est tout à fait possible pour un champ de plans intégrable.

Mais surtout il a montré que le type de rotation du champ de plans et le signe de la feuille dégénérée indique le destin des deux feuilles non dégénérées. Pour une rotation de type main gauche, c'est une naissance pour les feuilles positives et une mort sinon.



Un explication du lemme de naissance/mort

Essayons de comprendre cela sur notre dessin de feuille fermée dégénérée :



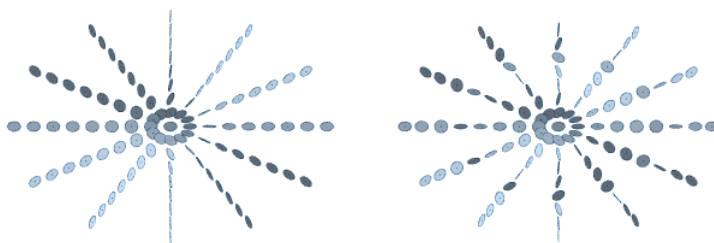
Près de la feuille fermée les droites noires sont presque horizontales avec une pente très légèrement positive (et ce des deux côtés de la feuille fermée). Puisque le champ de plans a une rotation de type main gauche, ces pentes vont diminuer lors du déroulement du film. Ainsi il y aura, tout de suite après la surface présentant une feuille dégénérée, deux hauteurs pour lesquelles les droites noires seront parfaitement horizontales (pente nulle) donc deux nouvelles feuilles fermées. On voit aussi qu'au voisinage de ces feuilles, la pente change de signe donc elles sont non dégénérées. À l'inverse, si on parcourt le film à l'envers, les pentes qui étaient légèrement positives deviennent encore plus positives et il n'y a pas de feuille fermée. On a donc bien une naissance instantanée de deux feuilles fermées non dégénérées.

Résumons l'énoncé du lemme de naissance/mort de Giroux : dans un film venant d'un champ de plans non intégrable dont la rotation est de type main gauche,

1. il n'y a pas de feuille dégénérée persistante
2. une feuille dégénérée indique, selon qu'elle est positive ou négative, la naissance ou la mort de deux feuilles non dégénérées.

Familles de films

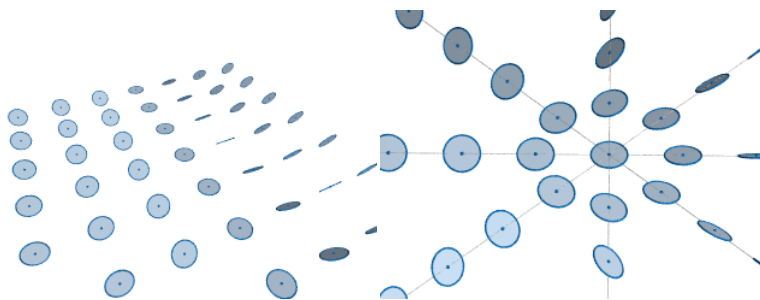
Dans la démonstration du théorème de Bennequin, on considère des sphères concentriques dont le rayon varie. On obtient ainsi, pour chaque champ de plans, un film de feuilletages sur une sphère. Rappelons que l'objectif de tout cela est de démontrer qu'il n'existe pas de déformation de l'espace qui transforme le champ de plans standard (à gauche ci-dessous) en champ de plans vrillé (à droite). La seule différence entre les deux étant le fait que le premier n'est jamais vertical alors que les plans du deuxième font plusieurs tours le long de chaque rayon dessiné.



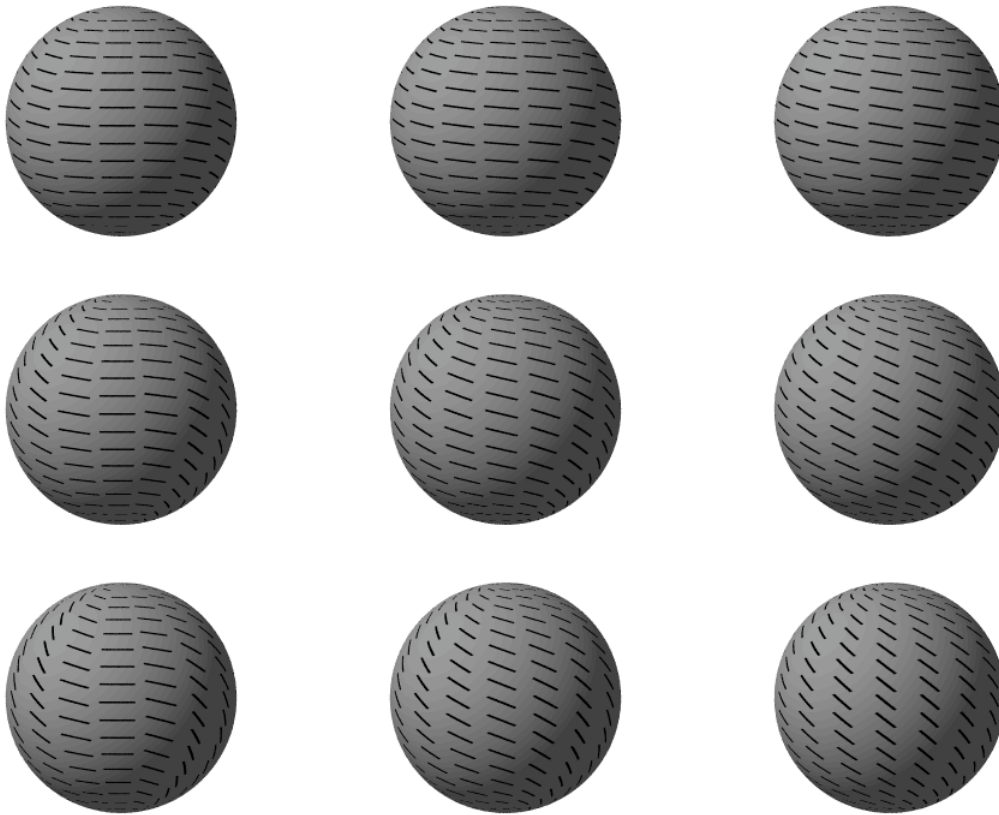
Le film du champ de plans standard est assez barbant. Pour chaque rayon il y a deux accidents (aux pôles) et toutes les feuilles vont de l'un à l'autre comme dans la première animation ci-dessus. Dans le deuxième film en revanche, il y a apparition de feuilles fermées selon le mécanisme prédit par le lemme de naissance/mort.

On va supposer un instant que, contrairement à ce qu'affirme le théorème, il existe une déformation de l'espace qui envoie le champ de plans standard sur le champ de plans vrillé. Après un examen attentif de la situation, on va aboutir à une contradiction. On aura donc démontré qu'aucune déformation de ce genre n'existe. Nous aurons donc deux quantités variables (les topologues disent deux paramètres) : le rayon de la sphère et le temps écoulé depuis le début de la déformation de l'espace, tout cela pour une déformation qu'on ne connaît pas puisqu'on veut montrer qu'elle est impossible ! Pour comprendre ce point délicat, observons ce qui se passe avec une déformation qui existe effectivement et que nous avons déjà montrée plus haut.

On considère les deux champs de plans suivants



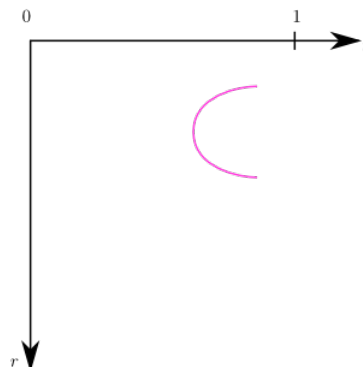
Il existe une déformation de l'espace qui envoie l'un sur l'autre. Dans l'image suivante chaque colonne correspond à un temps de la déformation (0, 1/2 et 1) et chaque ligne à un rayon de sphère. La première colonne correspond au premier champ de plans (à $t=0$ la déformation ne fait rien). On voit bien en particulier, pour tous les rayons, des droites noires parfaitement horizontales correspondant aux plans parfaitement horizontaux du champ de plans. La dernière colonne correspond au deuxième champ de plans (à $t=1$ la déformation est terminée). On voit bien que ce champ de plans est invariant par rotation autour de l'axe passant par les deux pôles des sphères. La colonne du milieu correspondant à un champ de plans intermédiaire ($t = 1/2$).



Démonstration du théorème de Bennequin

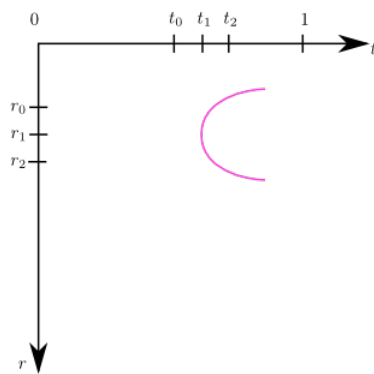
Voici maintenant la démonstration du théorème. Rappelons qu'on a supposé provisoirement l'existence d'une déformation de l'espace, entre le temps 0 et le temps 1, qui envoie le champ de plans standard sur le champ de plans vrillé. On dessine dans un plan (qui n'a rien à voir avec les plans du champs de plans !) deux axes : l'axe des rayons et l'axe des temps.

Dans ce plan des rayons et du temps, on considère l'ensemble des points correspondant à des feuilletages présentant une feuille fermée dégénérée. Comme ces feuilles ne persistent jamais dans un film, cet ensemble n'intersecte qu'un nombre fini de fois chacun des segments verticaux correspondants à un temps fixé. On a donc un ensemble qui ressemble à une réunion de courbes. Le point crucial est que le lemme de naissance/mort implique que ces courbes ne font jamais demi-tour en passant par la direction verticale comme dans la figure suivante.

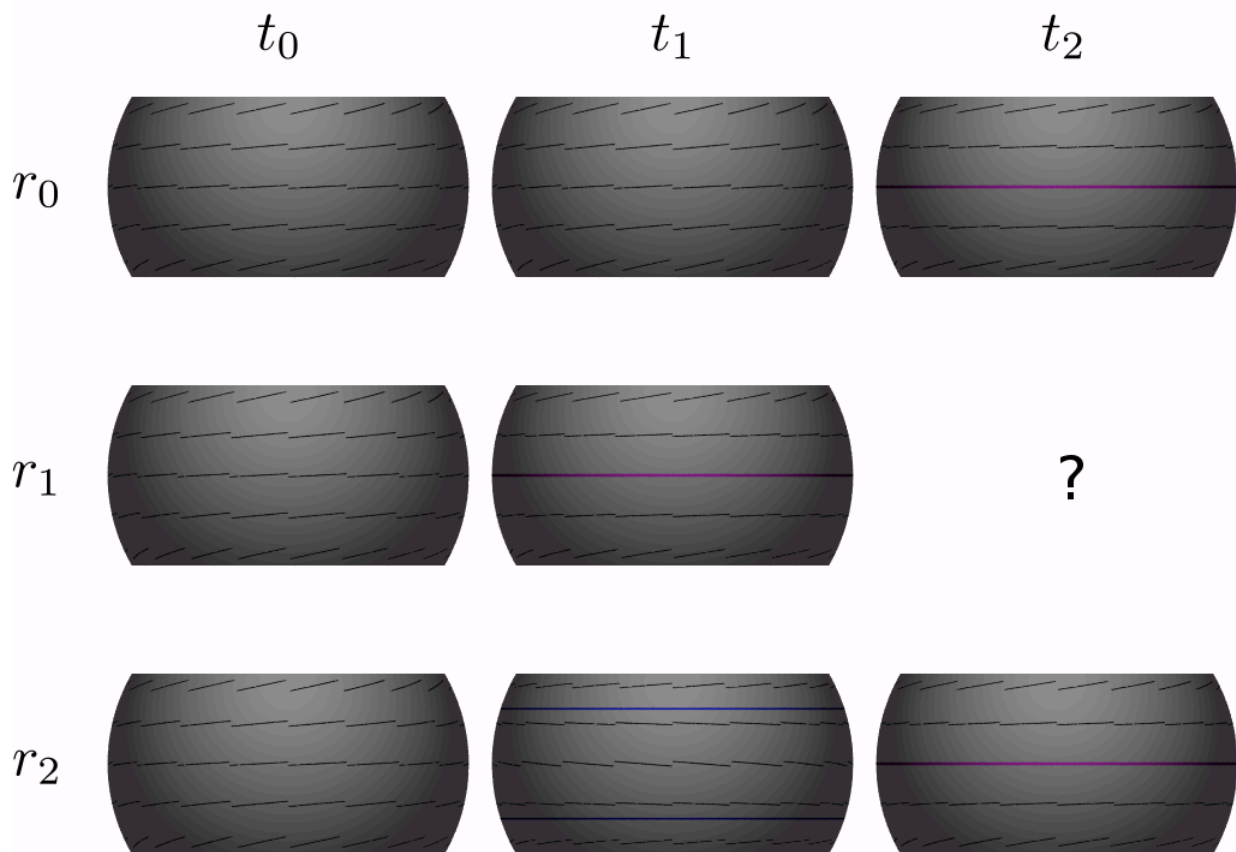


Démonstration de l'absence de demi-tour

Supposons par l'absurde qu'il existe un rayon et un temps où la courbe étudiée est verticale et fait demi-tour. Par exemple on a la situation suivante où la courbe fait demi-tour au point de coordonnées (r_1, t_1) et n'est dessinée que dans un voisinage de ce point.



On considère une étroite bande contenant les feuilles dégénérées correspondantes. On peut se convaincre que toutes les feuilles dégénérées concernées sont du même signe, disons positives pour fixer les idées (l'autre cas étant tout à fait analogue). Le dessin ci-dessus signifie qu'on a la situation suivante :

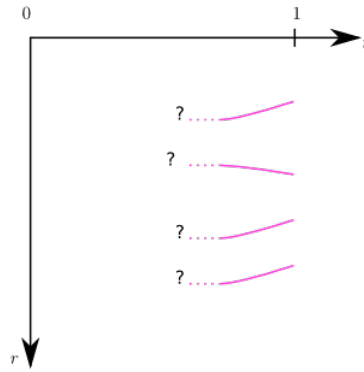


Il est impossible de compléter la colonne de droite en tenant compte du fait que toutes les feuilles dégénérées doivent indiquer une naissance lorsqu'on regarde la colonne de haut en bas. La situation du demi-tour vertical est donc impossible.

Nous avons donc maintenant les informations suivantes sur les courbes des feuilles dégénérées :

- aucune de ces courbes n'atteint le segment $t = 0$ car il n'y a pas de feuille fermée dans le film du champ de plans standard
- il y a des courbes qui touchent le segment $t = 1$ car il y a des feuilles dégénérées dans le film du champ de plans vrillé
- aucune courbe ne fait demi-tour en devenant verticale

on a donc la situation suivante



Il semble bien que ce dessin est impossible à compléter en respectant les trois contraintes ci-dessus. Une telle impossibilité montre comme souhaité qu'il n'existe pas de déformation de l'espace qui relie nos deux champs de plans.

Bien que cet argument rende compte du coeur de la démonstration de Giroux, il est malheureusement incomplet car rien n'empêche une des courbes étudiées de s'arrêter en rase campagne. La démonstration complète demande de pister, en plus des feuilles dégénérées, un autre phénomène rare appelé connexion de selles rétrograde et qui obéit à un lemme de croisement analogue au lemme de naissance/mort. Le lecteur frustré lira avec plaisir l'article de Giroux contenant la fin de cette histoire...

P.S. :

La rédaction d'Images des maths, ainsi que l'auteur, remercient pour leur relecture attentive, les relecteurs dont le pseudonyme est le suivant : Jacques Lafontaine, vernicos, Rémi Coulon et Ilies Zidane.

Notes

[▲ 1] En effet, lorsqu'on change de sens de parcours, les côtés droit et gauche sont inversés.

► **Crédits images**

Pour citer cet article : **Patrick Massot, Le théorème de Bennequin II.** *Images des Mathématiques*, CNRS, 2010. En ligne, URL : <http://images.math.cnrs.fr/Le-theoreme-de-Bennequin-II.html>