

Et si les nombres pouvaient être infinis à gauche de la virgule plutôt qu'à droite...

Une présentation des nombres 5-adiques

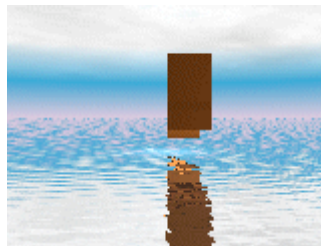
Le 23 avril 2009, par **Sylvain Barré**

Maître de conférence, Université de Bretagne-Sud ([page web](#))



ON utilise communément la *base 10* pour compter. Bien souvent, on ne dit même pas qu'il existe d'autres façons de représenter les nombres.

Je vous propose ici de considérer la base 5. Vous vous demandez sûrement pourquoi je parle de base 5 et que je ne reste pas avec les nombres de tout le monde, en base 10 ? Eh bien, je vais vous demander de me faire confiance quelques instants. J'espère que tout deviendra clair à la fin de l'article.



Rappelons pour commencer le sens de l'écriture usuelle des nombres en base 10. Le nombre 307 représente 7 unités + 0 dizaine + 3 centaines. En base 5, il en est de même en remplaçant les « paquets » (les *puissances*) de 10 par des paquets ou puissances de 5. Bien sûr, il convient alors de n'utiliser que les chiffres 0, 1, 2, 3 et 4. Ainsi, le nombre 1034 représente 4 unités + 3 cinquaines + 1 cinquaine de cinquaines de cinquaines, c'est-à-dire $5 \times 5 \times 5 + 3 \times 5 + 4 = 144$ (ou une « grosse » comme on disait dans le temps pour compter les œufs). Pour les chiffres après la virgule, c'est pareil avec les puissances négatives de la base : 4,23 en base 5 représente $4 + 2/5 + 3/(5 \times 5)$.

Pour éviter toute confusion dans les écritures, on mettra un petit 5 en indice quand on écrit en base 5. En base 10, on ne mettra rien. On pourra donc écrire : $20_5 = 10$.

On verra qu'avoir pour base un nombre premier donne davantage de liberté. La couleur de la piste de cet article rougit un peu dans le dernier paragraphe. Je remercie ma complice Katia pour ses suggestions et illustrations.

L'addition

$$\begin{array}{r} 12,41_5 \\ + 0,3_5 \\ \hline 13,21_5 \end{array}$$

addition

On sait tous écrire les entiers, et même les additionner ! On sait aussi faire cela avec des nombres qui ont quelques chiffres après la virgule. Généralement, on pose un nombre au-dessus d'un autre, les virgules bien alignées ; et surtout, on fait attention aux retenues !

Dans l'exemple de l'addition posée ici (en commençant par la droite !),

1 et 0 font 1,

3 et 4 font 7, mais $7 = 5 + 2 = 12_5$, je pose 2 et je retiens 1, etc.

La soustraction

C'est là que commencent les difficultés. Tout le monde sait soustraire à un gros nombre, un nombre plus petit que lui. Il se trouve que parfois on a envie de retrancher un gros à un plus petit ! En général, puisqu'on ne sait pas faire, on se ramène à ce qu'on sait faire (le gros moins le petit) et on signale le problème rencontré en plaçant devant le résultat un petit tiret, symbole de la soustraction.

Pourquoi faire cela ?

Essayons de réfléchir à une nouvelle façon de retrancher 27 à 30 (avec les nombres de tous les jours). Je possède 27 « trucs » et j'en dois 30 à Brigitte... Je veux donc « calculer » 27-30. J'emprunte donc 100 « trucs » à Jean, j'en ai maintenant 127 et je peux en donner 30 à Brigitte. Il m'en reste 97. Mais j'en dois 100 à Jean ! J'en emprunte 1000... à force d'emprunter toujours plus, je vais écrire un nombre infini à gauche [1].

Recommençons, en retranchant 2 à 1 par exemple, en base 5 cette fois. Posons la soustraction et faisons comme on a appris à l'école :

2 ôté de 11_5 il reste 4 et je retiens 1 ;

1 ôté de 5 il reste 4 et je retiens 1 ;

1 ôté de 5 il reste 4 et je retiens 1...

$$\begin{array}{r} \text{Retenues} \\ - \quad \dots 11 2_5 \\ \hline \dots 444_5 \end{array}$$

Le résultat est donc $\dots 444444_5$: un nombre infini à gauche. Voilà construit notre premier

nombre 5-adique. On n'abandonnera pas complètement l'usage d'un signe, non pas pour construire de nouveaux nombres, mais plutôt pour donner un autre nom à un nombre déjà construit : ainsi, on écrira $\dots 444444_5 = -1_5$.

On sait toujours ajouter et soustraire ; il suffit seulement d'accepter les nombres infinis à gauche.

La multiplication et la division

Dès qu'on sait additionner les nombres et multiplier les chiffres, alors on sait multiplier ! Il suffit de prendre bien soin de décaler la virgule comme il faut pour se ramener à ne multiplier que des nombres sans virgule (éventuellement infinis à gauche). On peut aussi se contenter de multiplier des nombres qui ne se terminent pas par des zéros (comme on l'apprend à l'école).

$$\begin{array}{r} \times \quad 31_5 \\ \quad 31_5 \\ \hline \quad 143_5 \\ \hline 2011_5 \end{array}$$

Pour diviser, on se débarrasse des virgules et des zéros à droite, comme précédemment. Oublions maintenant l'ordre entre les nombres qui nous guide dans la division qu'on apprend à l'école. Ici, il n'y a plus de plus petit ou de plus grand (joli monde !).

Commençons par diviser 1 par 2. Quel chiffre (1, 2, 3 ou 4) multiplié par 2 aura un dernier chiffre dans son écriture en base 5 qui vaut 1 ? C'est 3. Puis on fait 1 moins $2 \times 3 (= 11_5)$, il reste $\dots 44440_5$. Il y va maintenant 2 fois : $\dots 4444_5 - 4$ il reste $\dots 4440_5$: comme avant ! Le résultat (le quotient dans la division de 1 par 2) est donc $\dots 2223_5$. Bien sûr, le quotient est obtenu par le calcul de droite à gauche, ne pas oublier cela quand on pose une division.

$$\begin{array}{r|l} 1_5 & 2_5 \\ \hline 11_5 & \dots 223_5 \\ \hline \dots 4440_5 & \\ \quad 4_5 & \\ \hline \dots 44400_5 & \end{array}$$

On a vu que même en divisant des nombres entiers, on peut obtenir, en cours de calcul, des nombres infinis à gauche. Ils ne sont pas plus difficiles à manipuler que les nombres entiers (surtout ceux qui finissent par se répéter). Le seul point important est de trouver le chiffre qui, multiplié par le chiffre des unités du diviseur, va donner un nombre dont le chiffre des unités est celui du dividende. Il suffit de se faire une table une fois pour toutes ! Simple non ? Vous savez maintenant diviser ou multiplier des nombres finis à droite et éventuellement infinis à gauche.

Si vous avez compris, il vous est aisé de vérifier que 1 divisé par 3 est représenté par $\dots 1313132_5$.

$$\begin{array}{r|l}
 1_5 & 3_5 \\
 \hline
 11_5 & \dots 13132_5 \\
 \hline
 \dots 4440_5 & \\
 14_5 & \\
 \hline
 \dots 44300_5 & \\
 \dots 440_5 &
 \end{array}$$

À retenir

Pour faire des calculs en 5-adique, il faut :

- connaître sa table de cinq dans tous les sens : 2 fois combien finit par 3 ? (réponse 4) ;
- oublier l'ordre et les signes ;
- s'autoriser à écrire des nombres infinis à gauche.

X ↗	0	1	2	3	4
0	0	0	0	0	0
1	0	1	2	3	4
2	0	2	4	1	3
3	0	3	1	4	2
4	0	4	3	2	1

Le coin des petites questions.

- 1- Histoire de voir que l'on sait faire les calculs aussi dans une autre base, dresser le tableau de la table de multiplication des chiffres en base 7 (ne garder que les unités).

X	0	1	2	3	4	5	6
0	0	0	0	0	0	0	0
1	0	1	2	3	4	5	6
2	0	2	4	6	1	3	5
3	0	3	6	2	5	1	4
4	0	4	1	5	2	6	3
5	0	5	3	1	6	4	2
6	0	6	5	4	3	2	1

- 2- Vous savez bien que lorsqu'on s'autorise à écrire des nombres infinis à droite il y a de gros problèmes causés par des écritures du type $0,99999\dots$. En effet, si on note x ce nombre alors $10 \times x = 9,99999\dots$ et donc $10 \times x - x = 9$. Ce qui donne $9 \times x = 9$ et donc $x = 1 = 0,999999\dots$ et deux écritures différentes pour un même nombre. La même chose arrive en base 5, comme dans toutes les bases : $0,444444\dots_5 = 1$.

Ce problème n'arrive jamais avec les nombres infinis à gauche : les développements sont uniques. Il suffit de poser la soustraction entre deux écritures différentes pour constater qu'on ne peut pas trouver 0. Les additions et soustractions sur des nombres infinis à droite sont plus délicates que sur les nombres infinis à gauche. Pour calculer on « remonte » les nombres de la droite vers la gauche. En ce sens il est plus naturel de compléter à gauche plutôt qu'à droite. On pourra noter que si on connaît les trois premiers chiffres (en partant de la droite bien sûr) de deux nombres sans rien après la virgule (des entiers 5-adiques) ; alors on connaît les trois premiers chiffres de leur somme, de leur produit ou de leur quotient. Pour les nombres infinis à droite compris entre 0 et 1, on n'a pas l'analogue en renversant : l'éventuelle retenue vient perturber.

- 3- On appellera racine carrée d'un nombre y , un nombre x tel que $x \times x = y$. Vérifions que 2 n'a pas de racine carrée dans les 5-adiques. Il suffit de constater que sur la diagonale dans la table de multiplication des chiffres, on ne trouve que 0, 1 ou 4. Pas de 2, ni de 3. Par contre, on peut calculer une racine carrée de 2 dans les 7-adiques. Il suffit de la calculer à tâtons, chiffre par chiffre. Pour le premier, il y a deux possibilités : 3 ou 4. En effet : $3 \times 3 = 12_7$ et $4 \times 4 = 22_7$. Pour les autres chiffres, une fois le premier choix fait, il y a unicité. On trouve $\dots 213_7$ ou $\dots 454_7$, on notera que la somme de ces deux nombres est nulle (ils sont opposés l'un de l'autre). Cette méthode est exactement la méthode de Newton décrite par Tan Lei dans son article.

$$\begin{array}{r}
 \dots 454_7 \\
 \times \dots 454_7 \\
 \hline
 \dots 512_7 \\
 \dots 66_7 \\
 \dots 2_7 \\
 \hline
 \dots 002_7
 \end{array}$$

- 4- Reconnaître la fraction : $q = \dots 131313_5$, c'est-à-dire trouver deux entiers tels que la division de l'un par l'autre donne ce nombre. On peut calculer facilement $q - 100_5 \times q = 13_5$ et donc on obtient $-44_5 \times q = 13_5$. On peut simplifier car $44_5 = 3_5 \times 13_5$ on trouve donc $q = -\frac{1}{3}$. C'est bien cohérent avec le $\frac{1}{3}$ trouvé plus haut.
- 5- Pourquoi la division qui amène à des nombres infinis à gauche ne fonctionne plus quand on utilise une base qui n'est pas un *nombre premier* ? Si par exemple on a la malheureuse idée de choisir 10, dans les lignes ou les colonnes correspondant à 2 ou 5, on ne trouve pas tous les chiffres. Essayez de répondre à la question : 2 fois combien fini par 3 en base 10 ?

Je vous l'avais bien dit que ça ne marcherait pas en base 10 ! On aurait pu considérer la base 2 ou 3 à la place de la base 5, mais le trop peu de chiffres aurait engendré de la confusion. Plus généralement, vous l'avez compris le choix d'un nombre premier est nécessaire pour pouvoir faire toutes les divisions. On a choisi $p = 5$ car c'est un nombre premier ni trop gros ni trop petit, et qu'accessoirement c'est le nombre de doigts par main.

X	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
⋮				...						
2	0	2	4	6	8	0	2	4	6	8
⋮				...						
5	0	5	0	5	0	5	0	5	0	5

- 6- On a vu sur un exemple que les nombres périodiques à partir d'un certain rang étaient des fractions. La réciproque est aussi vraie : les rationnels sont périodiques à partir d'un certain rang. On pourra essayer de le vérifier sur un exemple. On aura ainsi une idée de démonstration en général.

Plusieurs sortes de nombres ?

Ce que nous venons de décrire c'est un ensemble de nombres qui est plus gros que l'ensemble de tous les nombres rationnels, dans lequel toutes les opérations $+$ $-$ \times \div sont possibles. Cet ensemble est même strictement plus grand. Il contient aussi des nombres dont le développement est infini à gauche, non périodique à partir d'un certain rang. Cet ensemble est appelé *corps* des nombres 5-adiques, on le note \mathbf{Q}_5 . Plus généralement \mathbf{Q}_p est le **corps des nombres p -adiques** (pour un autre choix de nombre premier p), c'est un exemple de *corps local*.

Il existe un autre corps qui contient toutes les fractions, c'est l'ensemble des nombres infinis à droite. On l'appelle le **corps des réels**, on le note \mathbf{R} . On peut montrer qu'en un certain sens il n'y a que ces deux façons de compléter le corps des fractions. On exploite ces diverses manières de compléter dans certains théorèmes qui montrent que des équations possèdent des solutions parmi les nombres rationnels. Pour certains systèmes d'équations polynomiales, si on démontre l'existence de solutions dans les corps p -adiques et dans les réels alors il y en aura aussi dans les rationnels. On dit que ces systèmes vérifient le **principe de Hasse**.

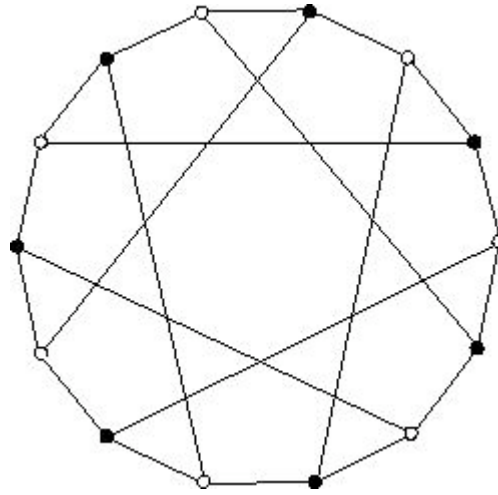
On fait de la géométrie avec ça ?

Ces deux corps servent de base pour construire des objets géométriques de natures à priori très différentes. Avec le corps des réels, on peut par exemple, fabriquer des cercles et étudier l'ensemble des transformations qui préservent ces cercles (le groupe des rotations qu'on notera G_0).

Tout le problème de la géométrie se trouve là : faut-il partir d'un cercle et étudier ses transformations ou bien définir par des procédés algébriques un groupe G_0 et tâcher de le faire agir sur un bon espace à inventer (le cercle est un bon espace dans cet exemple).

Avec les corps p -adiques, on construit des *groupes*. Voir **l'article** de Gilbert Levitt sur ce site pour une introduction aux groupes. Par exemple l'ensemble $G = \{f : x \mapsto ax + b\}$ des transformations affines du corps \mathbf{Q}_p est un groupe. Le produit de $f : x \mapsto ax + b$ par $g : x \mapsto cx + d$ donne $f \circ g : x \mapsto acx + (b + ad)$.

Jacques Tits a montré (il y a 30 ans) que de bons objets géométriques associés à des groupes comme G sont des arbres ou plus généralement, des espaces appelés **immeubles**. La figure suivante représente un « cercle » p -adique. Il s'agit d'un immeuble particulier.



En donnant une définition générale de ces espaces, Tits a ouvert tout un univers, qui ne se limitait pas seulement à l'étude des groupes issus de constructions algébriques à partir des corps \mathbf{Q}_p . Des géométries exotiques sont apparues. On ne les comprend toujours pas très bien...

L'an passé Jacques Tits a reçu le prix [Abel](#) pour ses travaux en théorie des groupes. Il a en particulier montré de nombreux théorèmes sur les immeubles. Mais il reste encore beaucoup de questions sur le sujet : les allers-retours entre nombres p-adiques et immeubles n'ont pas encore donné tous leurs fruits.

- Un exemple d'article fondateur sur le sujet :

François Bruhat & Jacques Tits « Schémas en groupes et immeubles des groupes classiques sur un corps local. » Bull. Soc. Math. France 112 (1984), no.2, 259-301.

Notes

[▲1] Écrire les nombres infinis à gauche, c'est pouvoir emprunter toujours plus.

► Crédits images

Pour citer cet article : **Sylvain Barré, Et si les nombres pouvaient être infinis à gauche de la virgule plutôt qu'à droite...** *Images des Mathématiques*, CNRS, 2009. En ligne, URL : <http://images.math.cnrs.fr/Et-si-les-nombres-pouvaient-etre.html>