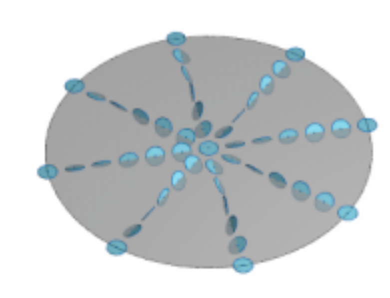
Le théorème de Bennequin I



Le 20 décembre 2010, par **Patrick Massot**
Maître de conférences à l'Université Paris Sud 11 (Orsay) (**page web**)

> « Faire des mathématiques, c'est donner le même nom à des choses différentes »

PAR cette phrase déjà discutée dans l'article **Égalité** d'**Étienne Ghys**, le mathématicien français **Henri Poincaré** expliquait qu'une grande force des mathématiques consiste à faire émerger de problèmes et objets en apparence disparates des structures et propriétés communes. Ainsi on peut souvent résoudre beaucoup de questions d'un seul coup en ayant oublié un certain nombre de caractéristiques pour se concentrer sur l'essentiel. Par exemple lorsqu'on applique à un triangle particulier un théorème portant sur tous les triangles, on oublie toutes les caractéristiques individuelles de ce triangle (longueurs des côtés, angles...), on ne le distingue plus des autres triangles mais on retient qu'il a trois côtés. Lorsqu'on s'autorise ainsi à considérer comme égaux une large classe d'objets, il n'est parfois pas évident de savoir quelles caractéristiques sont conservées.

Lorsqu'on oublie ainsi beaucoup de caractéristiques, comment alors distinguer deux choses qui sont vraiment différentes ?

Le but de cet article est d'illustrer cette difficulté par deux exemples faisant actuellement l'objet de nombreuses recherches. Ces deux exemples font partie du vaste monde de la topologie, le domaine des maths où l'on considère comme égales deux choses que l'on peut déformer l'une en l'autre.

Nous allons décrire un théorème fondamental datant de 1982 et dû à Daniel Bennequin, professeur à l'Université de Paris 7.

Déformations de l'espace

On considère des déformations du plan ou de l'espace. Il s'agit de déplacements assez arbitraires de l'ensemble des points du plan ou de l'espace mais sous la contrainte que deux points distincts restent distincts. On peut imaginer un plan en tissu élastique (stretch ou lycra par exemple) qu'on peut déformer. La trame du tissu se déforme comme dans l'exemple suivant :

Toute figure géométrique dans le plan est entraînée par la déformation :

On peut donc regarder l'effet d'une déformation du plan sur des courbes formant une figure géométrique, indépendamment de l'effet de la déformation sur les autres courbes.

Remarquons que les déformations du plan considérées ne sont pas autorisées à le déchirer ni à en souder des parties distantes. En conséquence, les courbes entraînées par cette déformation ne sont jamais coupées ni collées.

De façon analogue une courbe dans l'espace est modifiée par une déformation de celui-ci sans jamais être coupée ou collée.

Une courbe dans l'espace qui se referme comme dans l'animation précédente est appelée *nœud* par les mathématiciens. Le nœud que l'on voit à la fin de l'animation est tellement simple qu'on l'appelle le nœud trivial.

Si on considère que deux nœuds dans l'espace sont équivalents lorsqu'il existe une déformation de l'espace qui transforme l'une en l'autre alors il peut être difficile d'affirmer avec certitude que deux nœuds ne sont pas équivalents. Par exemple, que penser des deux exemples suivants ?

En fait on peut trouver une déformation et il est plaisant d'y réfléchir avant de regarder l'animation suivante.

Les deux images précédentes montrent donc en fait deux nœuds équivalents, on peut donc leur donner le même nom (inspiré par la première image) : le nœud de trèfle.

Cet exemple montre qu'il n'est pas facile du tout de mettre le doigt sur une propriété d'un nœud qui ne change pas lorsqu'on déforme l'espace.

Le premier nœud que nous avons montré, le nœud trivial, est tout à fait remarquable car il s'agit du bord d'un disque. Lorsque ce nœud est transformé par une déformation de l'espace, le disque l'est aussi et on a toujours un nœud qui borde un disque, même si ce disque est déformé comme le montre l'animation suivante.

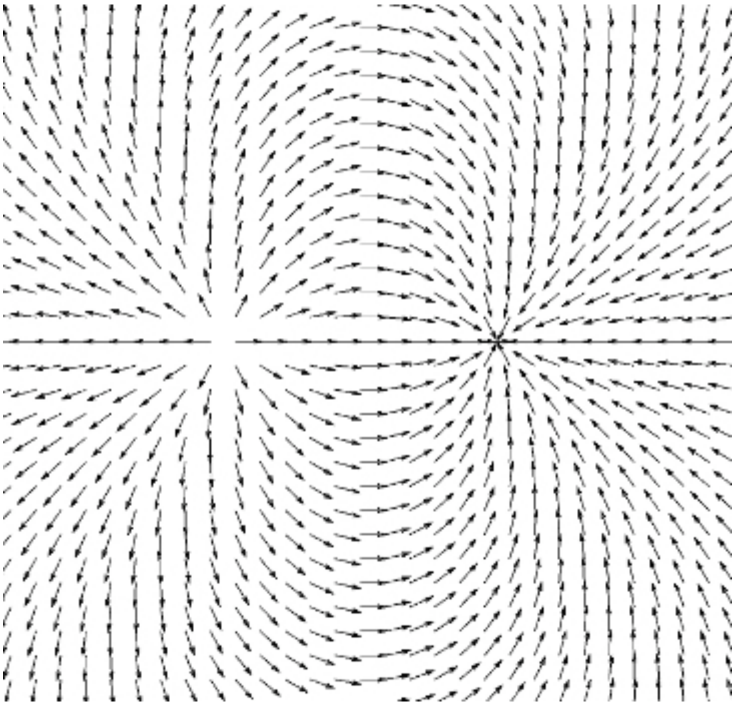
Ainsi, montrer qu'un nœud de trèfle ne peut pas être transformé en nœud trivial par une déformation de l'espace revient à montrer qu'il n'est le bord d'aucun disque, même déformé.

Champs de plans

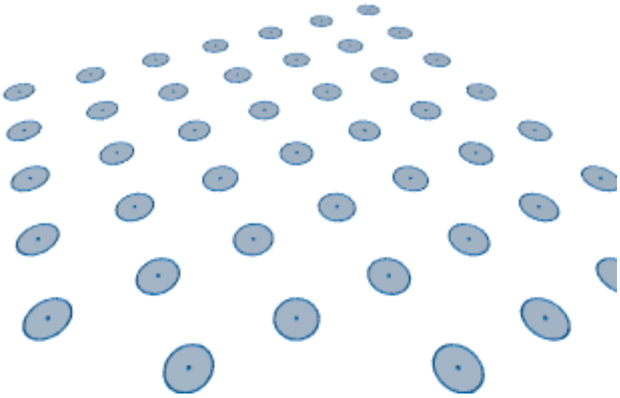
On va maintenant considérer l'effet de déformation du plan ou de l'espace sur des objets un peu plus compliqués : des champs de plans.

Pour comprendre ces objets, on peut voir, d'une façon idéalisée, un champ de blé comme un plan avec, pour chacun des points du plan, un épi de blé planté en ce point. En physique on rencontre assez rapidement la notion analogue de champ de vecteurs qui est la donnée d'un vecteur accroché à chaque point du plan ou de l'espace.

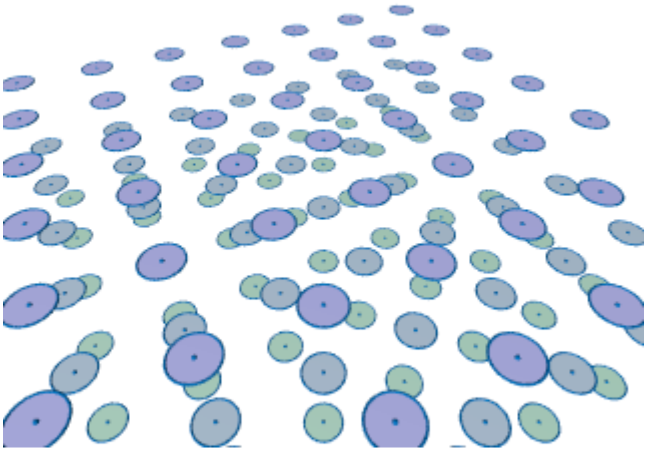
Bien sûr, de même que les épis de blés des véritables champs ne sont pas présents en tous les points du sol, on ne peut pas dessiner tous les vecteurs d'un champ de vecteurs. On dessine donc un échantillon comme sur la figure suivante, qui représente le champ magnétique crée par un aimant.



On va s'intéresser ici à la notion proche de champ de plans dans l'espace. Un champ de plans est la donnée d'un plan accroché en chaque point de l'espace. On peut dessiner une partie (disons un disque) des plans accrochés à un échantillon de points. Dans l'exemple suivant on commence par un échantillon de points qui sont tous à la même hauteur dans l'espace.



Dans l'image suivante on a représenté un échantillon de plans à trois altitudes différentes en changeant légèrement de couleur pour chaque altitude. Malgré ce changement, on perd un peu en lisibilité par rapport à un échantillon à altitude constante. Il suffit donc de retenir que l'image précédente montre un champ de plans qui est le même à toutes les hauteurs.



Expliquons maintenant comment un champ de plans réagit à une déformation de l'espace. Chacun des plans est envoyé sur une surface qui n'est pas nécessairement un plan mais on peut la redresser en plan. L'animation suivante montre une telle déformation. On y voit un échantillon de plans sur les branches d'une étoile. L'étoile et le champ de plans sont transformés par une déformation de l'espace.

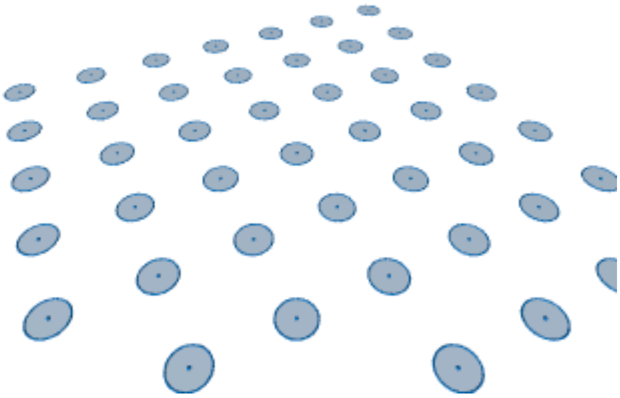
Comment montrer que deux champs de plans ne sont pas reliés par une déformation de l'espace ?

On a donc introduit une classe d'objets, les champs de plans, et une relation entre eux : on dit que deux champs de plans sont équivalents s'il existe une déformation de l'espace envoyant l'un sur l'autre. Ainsi tous les champs de plans de l'animation précédente sont équivalents.

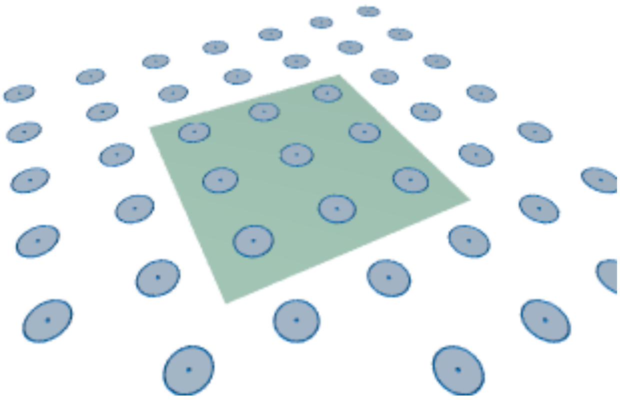
La question qui nous intéresse est alors, comment peut-on garantir que deux champs de plans donnés ne sont pas équivalents ?

Un phénomène local : l'intégrabilité

On a commencé l'étude des nœuds par différencier le nœud le plus simple (le nœud trivial) d'un autre (par exemple le nœud de trèfle) en trouvant une propriété caractéristique du nœud trivial (être le bord d'un disque tordu). On va chercher à distinguer le champ de plans ci-dessous, qui le plus simple, de certains autres en en cherchant une propriété spéciale.

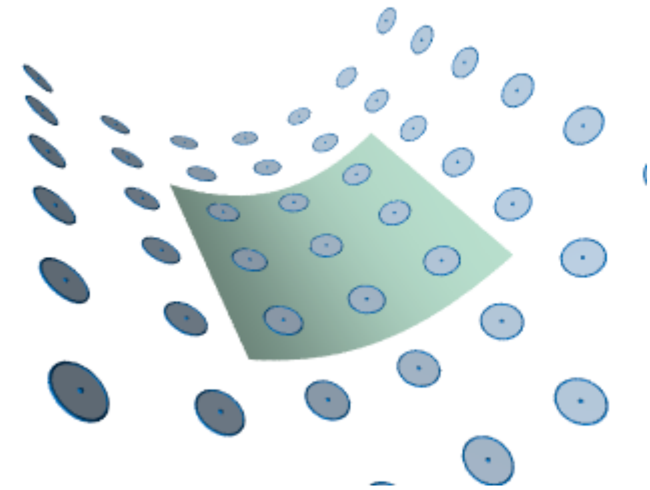


Les propriétés locales d'un champ de plans sont, par définition, les propriétés que l'on observe quelle que soit l'échelle à laquelle on regarde. Dans le cas de la figure précédente, une propriété locale remarquable est l'existence de surfaces partout tangentes au champ de plans comme la surface verte de la figure suivante :

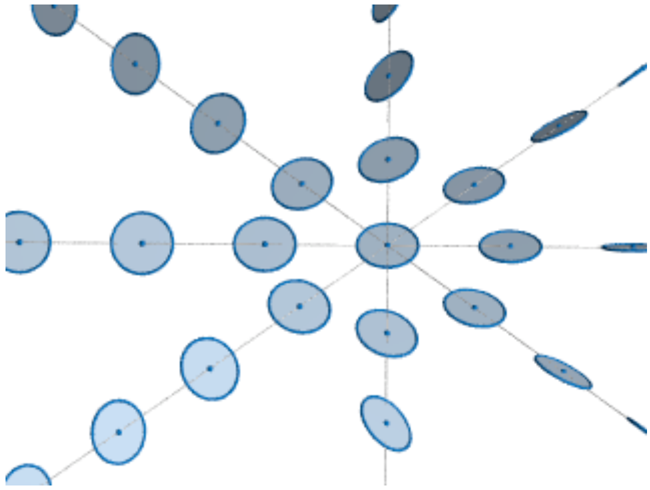


On dit que ce champ de plans est intégrable. Cette propriété est invariante par déformation de l'espace. En effet, si on déforme l'espace, le champ de plans se déforme mais la surface aussi. La surface déformée est tangente au champ de plans déformé, presque par définition de la façon dont une déformation de l'espace entraîne une déformation des champs de plans.

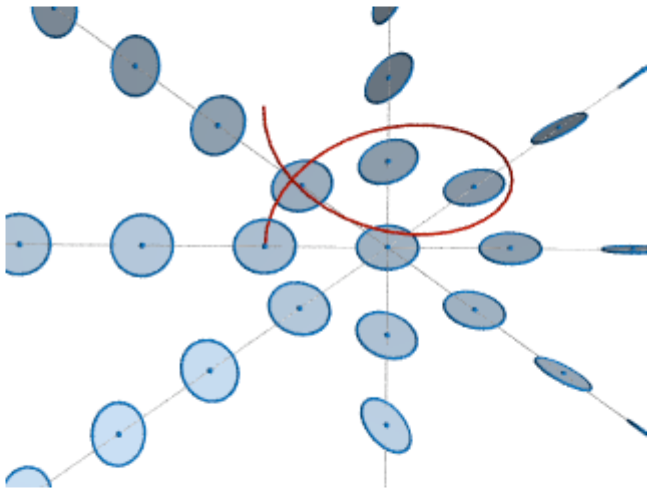
Par exemple, voici l'effet d'une déformation simple sur l'exemple précédent.

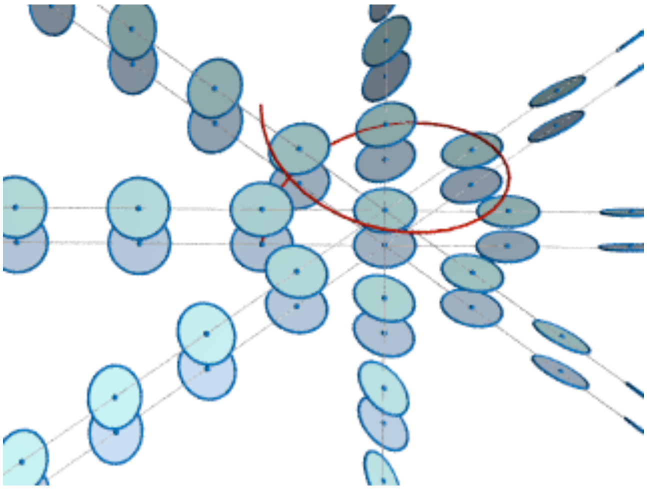


Cette propriété d'intégrabilité n'est pas vérifiée par le champ de plans de la figure suivante :



En effet, toute surface passant par le centre de l'image et tangente au champ de plans en ce point doit y être horizontale. Si on essaie ensuite d'imaginer à quoi ressemble la surface au-dessus d'un petit cercle autour de ce point, on arrive au paradoxe suivant : la surface doit monter au fur à mesure que l'on tourne autour du centre et elle ne peut donc pas se refermer.

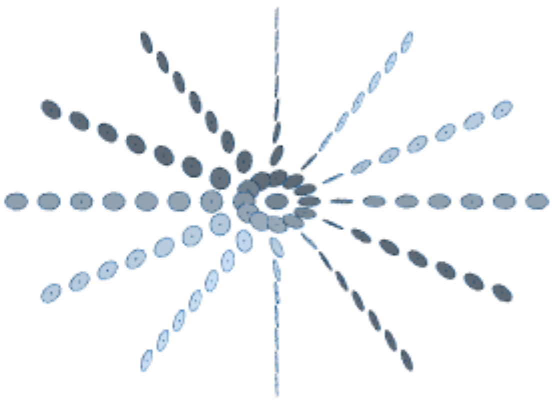


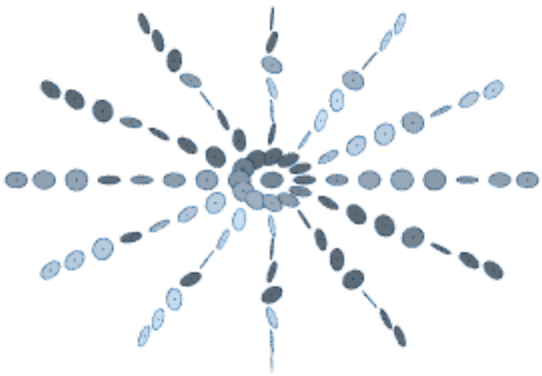


Il est important de remarquer pour la suite que cette distinction entre les champs de plans intégrables et non intégrables dans l'espace n'a pas d'analogue pour les champs de droites dans un plan. Un champ de droite sur un plan ou sur une surface plus générale est la donnée d'une droite accrochée en chaque point. Pour tout point du plan il existe toujours une courbe passant par ce point et partout tangente au champ de droites.

Un phénomène global : le disque vrillé

L'intégrabilité est un phénomène local qui assure parfois que deux champs de plans ne sont pas reliés par une déformation de l'espace, même dans une toute petite zone autour d'un point. On peut montrer qu'aucun phénomène local n'empêche les deux champs suivants d'être déformables l'un en l'autre.

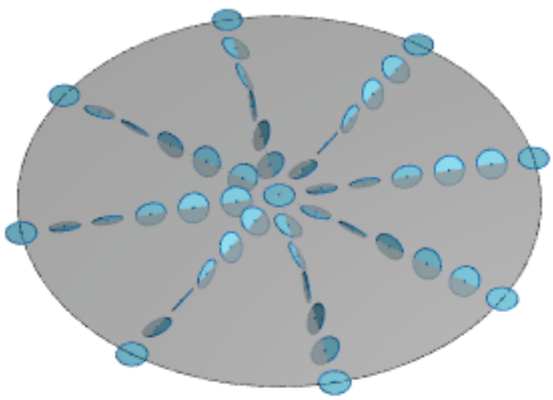




La structure commune à ces deux exemples est la suivante. D'abord tous deux sont invariants par déplacement vertical, on a donc représenté des échantillons à altitude constante. Le long de l'axe vertical passant par le centre de la figure, les deux exemples sont perpendiculaires à cet axe. Par ailleurs, tous les rayons perpendiculaire à l'axe sont tangents aux deux champs de plans. La seule différence entre ces deux exemples est que celui de droite tourne plus vite lorsqu'on s'éloigne de l'axe le long d'un rayon. Alors qu'aucun des plans de gauche n'est vertical, le champ de plans de droite effectue un grand nombre de tours le long de chaque rayon.

En fait, autour de chaque point de l'espace, il existe une petite zone dans laquelle les deux champs de plans peuvent être déformés l'un dans l'autre. Le théorème de Bennequin (1982) affirme qu'il n'existe cependant pas de déformation de tout l'espace qui transforme globalement ces champs de plans l'un en l'autre.

Plus précisemment, il existe une obstruction globale à cette déformation. Dans la figure suivante, on voit un disque qui est tangent au champ de plans au centre et le long du bord (mais pas partout car ce champ de plans n'est pas intégrable), on dit qu'il est vrillé.



Il s'agit d'un phénomène global et non local car si on observe le champ de plans à toute petite échelle, on ne voit aucun disque vrillé.

Bennequin a montré qu'aucun disque de ce type, même déformé, n'existe dans la figure où aucun plan n'est vertical. C'est analogue, mais beaucoup plus difficile, à l'absence de disque déformé dont le bord est un nœud de trèfle. En effet, même si, par construction, il n'existe pas de disque vrillé qui soit parfaitement horizontal, il est très ardu de montrer qu'aucun disque déformé n'est vrillé.

Cette difficulté fait l'objet de la suite de cet article : **Le théorème de Bennequin II**

P.S. :

La rédaction d'Images des maths, ainsi que l'auteur, remercient pour leur relecture attentive, les relecteurs dont le pseudonyme est le suivant : chil, vernicos, Gilles Damamme, Ilies Zidane, Etienne Bernard et Chloé.

Crédits images

Pour citer cet article : **Patrick Massot**, **Le théorème de Bennequin I**. *Images des Mathématiques*, CNRS, 2010. En ligne, URL : **http://images.math.cnrs.fr/Le-theoreme-de-Bennequin-I.html**