

# Position philosophique et pratique mathématique : l'exemple de L. Kronecker



Le 12 mai 2010, par **Jacqueline Boniface**

Université de Nice

*Comment la position philosophique d'un mathématicien peut-elle imprégner sa pratique mathématique et la manière dont il façonne les concepts qu'il introduit ? L'article aborde cette question, en décrivant les choix du mathématicien berlinois Léopold Kronecker.*

**I**L peut paraître surprenant de s'interroger sur le rapport entre position philosophique et pratique mathématique, alors que les mathématiques sont communément considérées comme essentiellement objectives, et donc indépendantes de la subjectivité de leur auteur, en particulier d'une éventuelle « position philosophique » de celui-ci. Cela peut paraître d'autant plus surprenant aujourd'hui où la plupart des mathématiciens sont plus intéressés par le développement de leur discipline que par une réflexion sur celle-ci et ont laissé cette réflexion aux philosophes. Mais il n'en fut pas toujours ainsi, et au XIXe siècle, par exemple, des différences de conception des mathématiques, dues à des positions philosophiques différentes, suscitèrent des controverses entre certains mathématiciens.

L. Kronecker fut parmi ceux-là. Nous nous proposons de montrer à travers son exemple l'influence que peut avoir la position philosophique d'un mathématicien sur sa pratique mathématique. Il apparaîtra notamment que le contenu des mathématiques n'est pas absolument objectif, mais qu'une part de la subjectivité de son auteur s'y introduit. Cette part de subjectivité permettra de comprendre que le développement des mathématiques ne suit pas toujours une voie unique, mais peut emprunter des chemins différents. Il restera à déterminer alors ce qui cependant constitue l'objectivité de la discipline.

---

## La place de Kronecker dans le milieu mathématique du XIXe siècle

---



Kronecker fut, aux côtés de Kummer et de Weierstrass, un membre influent de l'Académie de Berlin, de 1860 jusqu'en 1891 (année de sa mort). Le triumvirat contribua à faire de l'Université de Berlin, nouvellement créée (en 1810), le grand centre des mathématiques, et à ravir sa primauté à l'école française, considérée jusqu'alors comme la meilleure du monde.

Toutefois les relations entre Kronecker et Weierstrass se dégradèrent à partir du milieu de l'année 1870 et le conflit s'accrut après le départ de Kummer, en 1883. L'antagonisme, encore exacerbé par

l'imminence de la succession de Weierstrass et par l'influence que pouvait avoir Kronecker dans le choix du candidat, ne prit fin qu'à la mort de Kronecker, en 1891. Cet antagonisme fut essentiellement motivé par la divergence de conception des mathématiques des deux mathématiciens. Weierstrass avait un goût fondamental pour l'Analyse, alors que Kronecker était un pur arithméticien. Afin de mieux comprendre cette divergence, il convient d'avoir à l'esprit l'histoire de ces deux disciplines.

L'arithmétique est étymologiquement la science des nombres. Elle apparaît comme discipline dans la Grèce ancienne aux seuls côtés de la géométrie et a alors pour objet les nombres entiers positifs supérieurs à 1. La difficulté concernant les limites à donner à cette science vient de l'ambiguïté qui s'est progressivement attachée au mot « nombre ».

La conception qu'a Kronecker de l'arithmétique et du nombre est à peu près celle des Grecs anciens ; pour lui, le concept de nombre doit être réduit au nombre entier positif et l'arithmétique est l'étude de ces seuls nombres. L'analyse n'apparut que beaucoup plus tard et fut d'abord une simple méthode utilisée en géométrie. Elle se développa au XVIIIe siècle comme discipline, d'abord liée à la géométrie et se détacha de cette dernière au XIXe siècle avec le mouvement dit d'« arithmétisation de l'Analyse ».

Ce mouvement, dont Weierstrass fut le chef de file, consistait à donner à l'Analyse un fondement arithmétique en définissant tous les concepts analytiques, comme ceux de continuité ou de limite, en termes de nombres entiers. Pour Weierstrass, il s'agissait donc d'utiliser l'arithmétique au service de l'Analyse ; pour Kronecker, il fallait au contraire expurger l'arithmétique de tous les concepts qui n'étaient pas purement arithmétiques, comme celui de nombre irrationnel, et les renvoyer à la géométrie. En suivant Weierstrass, l'arithmétique perdait sa primauté pour devenir une simple partie de l'Analyse, tandis qu'en suivant Kronecker, c'est l'Analyse qui disparaissait purement et simplement comme discipline autonome pour se retrouver incluse, aux côtés de l'algèbre, dans une arithmétique généralisée. Nous verrons plus loin en quoi l'intérêt de Kronecker pour l'arithmétique était lié à sa position philosophique.



*Weierstrass*

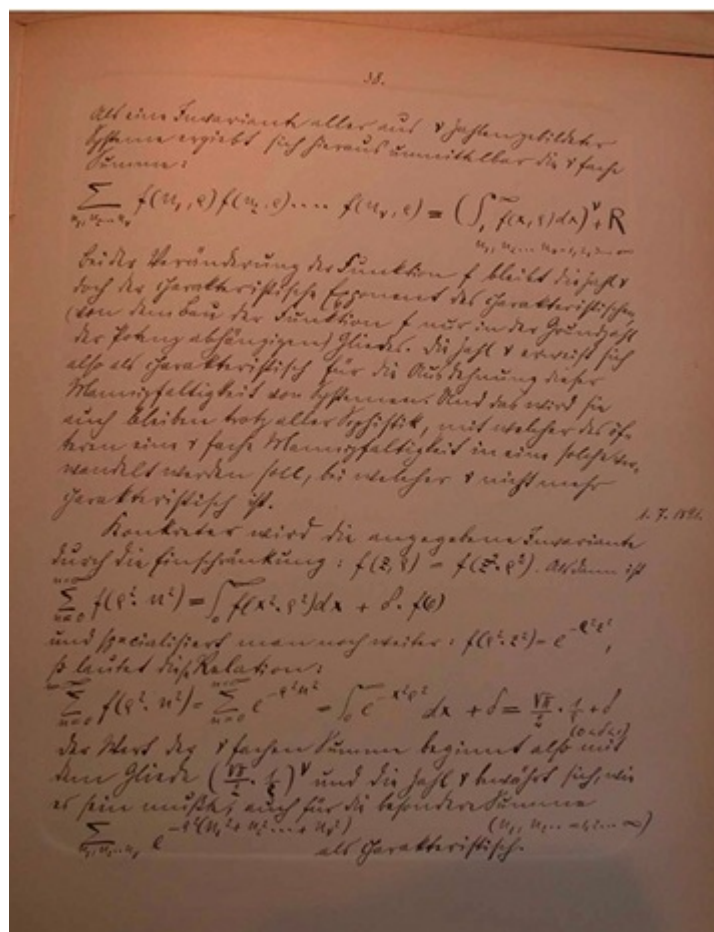


Un autre mathématicien, G. Cantor, se trouva impliqué dans le conflit qui opposait Weierstrass et Kronecker. Sous l'influence de Heine qui était son collègue à l'université de Halle, Cantor [1] participa au mouvement d'arithmétisation de l'Analyse en suivant la voie de Weierstrass. Ses recherches sur l'infini, plus encore que ses travaux dans la lignée de ceux de Weierstrass, représentèrent pour Kronecker l'innovation à combattre.

Dans tous ces conflits, la position de Kronecker apparaissait le plus souvent comme rétrograde, alors que ses opposants représentaient les mathématiques nouvelles. Aujourd'hui, cependant le point de vue de Kronecker commence à être réévalué.

## La philosophie des mathématiques de Kronecker

La philosophie des mathématiques de Kronecker est principalement exprimée dans un article intitulé "Sur le concept de nombre", paru en 1887 dans le *Journal de Crelle* [2], et surtout dans le dernier cours que Kronecker professa à Berlin au semestre d'été 1891 [3]. Dans ce cours, Kronecker énonce quatre thèses qui résument ses idées philosophiques. L'une de ces thèses affirme que la mathématique doit être considérée comme une science de la nature.



La mathématique, écrit plus précisément Kronecker, est « à traiter comme une science de la nature, car ses objets sont aussi réels [4] que ceux de ses sciences-soeurs », ou, ainsi qu'il le dit encore, elle est une science expérimentale [5]. Cette conception des mathématiques implique une certaine idée du rôle du mathématicien, inspirée des thèses du physicien Kirchhoff. Tout comme Kirchhoff pour les sciences de la nature, Kronecker considère qu'au fondement des mathématiques il y a des *phénomènes*. La tâche de la mécanique et des sciences de la nature, énonce Kirchhoff, est généralement *de décrire simplement et complètement les phénomènes*. « Or les mathématiques, complète Kronecker, ne sont rien d'autre qu'une science de la nature, et il leur revient donc aussi de « décrire simplement et complètement » les phénomènes. Le fondement s'ensuit alors de lui-même » [6].

Quels sont ces phénomènes à placer au fondement des mathématiques selon Kronecker ? Ce sont des concepts et principes de base *fournis par l'expérience*, et en premier lieu les nombres entiers naturels. La fameuse phrase attribuée à Kronecker : « Dieu créa les nombres, le reste est l'œuvre de l'homme » peut être explicitée ainsi : les nombres (entiers naturels) nous ont été donnés ; à partir de ces nombres et de lettres considérées comme des indéterminées, le mathématicien œuvre, c'est-à-dire construit des expressions algébriques qui constituent les phénomènes qu'il aura pour tâche de décrire.

Contrairement à ce que suggère la comparaison établie par Kronecker entre les mathématiques et les sciences de la nature, la réalité des objets mathématiques n'est pas pour lui celle des objets de la nature. Kronecker n'est pas un empiriste au sens étroit du terme. La mathématique qui l'intéresse n'est pas une science empirique mais une science pure ; elle n'est pas à proprement parler une science de la nature, elle est seulement à *traiter comme* une science de la nature. Kronecker établit en fait une analogie entre science mathématique et sciences de la nature, toutes étant des sciences fondées sur l'expérience. Mais si les objets mathématiques ne sont pas pour lui des objets du monde physique, ce ne sont pas non plus de simples productions de notre esprit. Bien qu'il cite dans l'article de 1887 la fameuse phrase de Gauss : « le nombre est une production de notre esprit seul », la conception que Kronecker a du nombre et de la mathématique diffère considérablement de celle de Gauss, dans laquelle on trouve les premiers signes d'une mathématique conceptuelle, « pure création de l'esprit humain », comme le diront, à la suite de Gauss, Dedekind et Cantor.



Pour Gauss, en effet, les élargissements successifs du concept de nombre, aux nombres entiers négatifs d'abord, puis aux nombres fractionnaires et enfin aux nombres irrationnels et aux nombres complexes, sont le moteur du développement des mathématiques pures. On trouve ainsi chez Gauss à la fois la conception d'une arithmétique limitée aux seuls entiers positifs et celle d'un concept de nombre élargi aux nombres rationnels, irrationnels et complexes, et qui concerne donc non seulement l'arithmétique, mais aussi l'algèbre et l'analyse. C'est cette conception d'un développement conceptuel des mathématiques, c'est-à-dire notamment

par élargissement du concept de nombre, qui sera reprise par Dedekind et Cantor.

Pour Kronecker, au contraire, le concept de nombre doit être strictement limité aux nombres entiers positifs, alors que l'arithmétique est élargie à l'algèbre et à l'analyse. S'il est aussi important, selon Kronecker, de conserver au concept de nombre, et plus généralement aux concepts fondamentaux, leur sens initial, c'est qu'en les élargissant pour les adapter aux autres domaines scientifiques, on en dilue le sens [7].

Les concepts fondamentaux des mathématiques ont ainsi pour Kronecker un sens fixe, déterminé par l'expérience, et qu'il convient de conserver. On voit que ce point de vue interdit une généralisation du concept de nombre et donc un développement des mathématiques par extension du domaine de ses objets [8]. Pour Kronecker, par ailleurs, l'arithmétique tient son statut de science pure au fait que n'y interviennent ni le temps, ni l'espace :

« Je considère comme disciplines spéciales de notre science nommément : la mécanique, qui opère avec le concept de temps, la géométrie, qui recherche des rapports spatiaux où n'intervient pas le temps, et la mathématique pure, dans laquelle n'interviennent ni le temps, ni l'espace, et que je souhaite désigner par "arithmétique" ». [9]

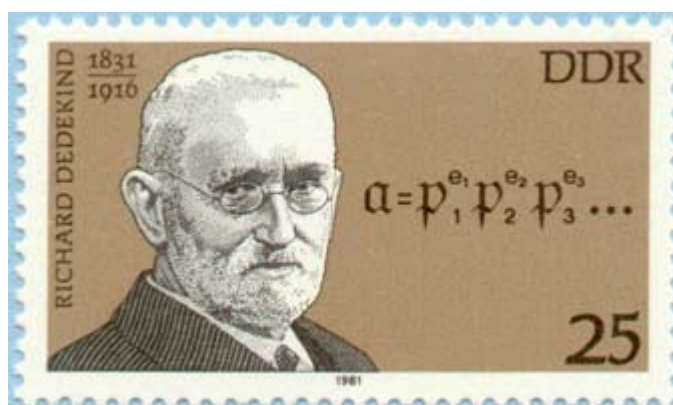
Kronecker s'accorde donc avec Gauss sur ce point, mais la pureté des mathématiques, dans la perspective du premier, ne nécessite pas de faire de celle-ci une science conceptuelle. Nous avons vu que la mathématique, comme les sciences de la nature, doit, selon Kronecker, s'ancrer dans l'expérience – expérience mathématique pour la première. La mathématique de Kronecker est donc une science pure, mais, de façon apparemment paradoxale, fondée sur l'expérience - le paradoxe étant levé par le fait que l'expérience n'est autre que la pratique mathématicienne. Les objets mathématiques sont ainsi, pour Kronecker, des phénomènes mathématiques, le plus souvent des expressions algébriques concrètes, qui ne se trouvent donc ni dans la nature ni dans l'esprit humain.

---

## L'influence des idées philosophiques de Kronecker sur sa pratique mathématique

---

Afin de donner une idée plus précise de l'influence des idées philosophiques de Kronecker sur sa pratique mathématique, nous allons comparer deux concepts mathématiques équivalents, celui de domaine de rationalité, introduit par Kronecker, et celui de corps, introduit par un des mathématiciens qui furent à l'origine des mathématiques conceptuelles, R. Dedekind.



On considère généralement que Dedekind est à l'origine d'un certain nombre de concepts nouveaux qui constitueront la base de l'algèbre moderne : les concepts d'idéal, de corps, de module, d'anneau. Ces concepts sont déterminés aujourd'hui comme étant des structures algébriques. La notion de structure algébrique, et plus généralement, de structure mathématique, a été théorisée pour la première fois de façon rigoureuse par Nicolas Bourbaki [10] dans ses *Éléments de mathématique* à partir des années 1930. Afin de mieux faire comprendre cette notion, Bourbaki lui-même l'explique de la façon suivante :

« On peut maintenant faire comprendre ce qu'il faut entendre, d'une façon générale, par *structure mathématique*. Le trait commun des diverses notions désignées par ce nom générique, est qu'elles s'appliquent à des ensembles d'éléments dont la nature *n'est pas spécifiée* ; pour définir une structure, on se donne une ou plusieurs relations, où interviennent ces éléments (dans le cas des groupes, c'était la relation  $Z = XTY$  entre trois éléments arbitraires) ; on postule ensuite que la ou les relations données satisfont à certaines conditions (qu'on énumère) et qui sont les *axiomes* de la structure envisagée. Faire la théorie axiomatique d'une structure donnée, c'est déduire les conséquences logiques des axiomes de la structure, en s'interdisant toute autre hypothèse sur les éléments considérés (en particulier, toute hypothèse sur leur « nature » propre). » [11]

Dedekind introduit ces concepts par une définition, qui ouvre d'emblée la section concernée, sans explication ou motif préalablement donnés. Cette présentation, conforme au style euclidien, est considérée comme typique du style mathématique moderne ; elle n'est pas adoptée par la plupart des autres mathématiciens de son époque, notamment pas par Kronecker. Voici la définition que Dedekind donne d'un corps.

« Par corps nous entendons tout système infini de nombres réels ou complexes en lui-même si fermé et complet que l'addition, la soustraction, la multiplication et la division de toute paire de nombres lui appartenant produit toujours un nombre appartenant également au système. Le plus petit corps est formé par tous les nombres rationnels, le plus grand par tous les nombres. » [12]

C'est là, véritablement la définition d'un objet mathématique - définition que l'on utilise d'ailleurs encore aujourd'hui, à quelques détails près, en particulier une abstraction et une formalisation plus grandes (Dedekind se limite aux corps de nombres réels ou complexes). Certes, pour Dedekind, les seuls objets véritables ne sont encore que les nombres, et un corps n'est pas à proprement parler un objet, mais un instrument ; les structures mathématiques ne sont pas encore étudiées en tant qu'objets, mais le terrain est préparé et le passage sera accompli par la génération suivante. En note (note 2, p. 40) du texte de Bourbaki que nous avons cité plus haut, ce dernier précisait, après un bref historique de la question, qu'« à la lumière des récentes recherches sur le formalisme logique, [...] les structures mathématiques deviennent, à proprement parler, *les seuls « objets » de la mathématique* ». Ce qui apparaissait dans l'explication donnée par Bourbaki pour faire comprendre ce qu'est une structure mathématique, c'est qu'une structure est construite *indépendamment* d'un domaine ou d'une théorie particulière, de façon absolument formelle, c'est-à-dire sans contenu particulier, alors que la définition d'un corps donnée par Dedekind était d'emblée appliquée à un ensemble de nombres (réels ou complexes) et donc n'est qu'un instrument pour l'étude de ces nombres.

Dans la perspective de Bourbaki, ce n'est qu'ensuite que ces structures seront appliquées à des domaines particuliers ou à des êtres mathématiques particuliers. Dans ce dernier cas, le mouvement va donc de la structure au domaine ou à la théorie. Par exemple, la structure algébrique de groupe s'applique (ou appartient, pour reprendre les termes de Bourbaki) à la fois à l'ensemble des entiers muni de l'addition, qu'à celui des rationnels non nuls muni de la multiplication, ou encore à l'ensemble des permutations d'un ensemble  $E$  muni de la loi de composition. La structure est première, et chaque structure est étudiée en tant qu'objet mathématique.

À la différence du concept de corps introduit par Dedekind en 1871, le concept « domaine de rationalité » introduit par Kronecker dans un grand article paru en 1881 [13] n'est pas présenté comme un concept nouveau ; il est utilisé pour « rassembler conceptuellement » toutes les fonctions rationnelles de certaines grandeurs. Un domaine de rationalité est donc le rassemblement, l'ensemble, de toutes les fonctions rationnelles des grandeurs qui le définissent. Cette notion de domaine de rationalité correspond en fait à la notion actuelle d'extension de corps [14]. Kronecker part en effet d'un corps de base (le corps des nombres rationnels) et adjoint à ce corps certaines grandeurs, par exemple des indéterminées (il obtient dans ce cas un ensemble de fractions rationnelles). Le regroupement conceptuel ainsi effectué doit, selon Kronecker, contrairement à ce que préconisait Dedekind, être suivi de la représentation [15], par une expression concrète, de l'ensemble des grandeurs regroupées.

Kronecker représente par exemple un domaine de rationalité en plaçant entre parenthèses les grandeurs qui ont été adjointes au corps de base, qui est toujours pour lui le corps des rationnels. Pour représenter, par exemple, l'ensemble des fractions rationnelles à une indéterminée, il écrirait simplement  $(X)$ . Cette notation indique que Kronecker ne conçoit pas un corps (ou un domaine de rationalité selon sa terminologie) comme un *tout* fermé pour les quatre opérations arithmétiques, à la manière de Dedekind, mais bien, ainsi que nous l'avons remarqué plus haut, comme une extension de corps, mettant ainsi en avant, au contraire de Dedekind, l'aspect dynamique de cette notion. De cette manière, en adjoignant successivement des éléments à l'ensemble des nombres rationnels, on obtient toute une suite de corps emboîtés les uns dans les autres, le plus petit étant l'ensemble des rationnels, le plus grand l'ensemble des fonctions rationnelles.



La représentation des domaines de rationalité que propose Kronecker, contrairement à la notation très générale de Dedekind par une simple lettre ( $K$  pour Körper), indique à un mathématicien de quoi est constitué le domaine en question. On le voit, la représentation est considérée par Kronecker comme essentielle, alors que, selon Dedekind, il est au contraire important d'éviter d'introduire une représentation particulière, qui réduirait la généralité. C'est cette seconde étape, celle de la représentation, en effet, qui permet d'accéder à une certaine réalité, sinon on reste dans l'abstraction. Certes, Dedekind recherche cette dernière, mais selon Kronecker elle nous met dans le « brouillard de la généralité ». Et c'est donc au niveau de la seconde étape que se situe l'aspect algorithmique qui caractérise la mathématique de Kronecker, car l'expression concrète doit autant que possible indiquer ou symboliser les opérations à effectuer pour obtenir les éléments du domaine en question, ici le corps (domaine de rationalité).

Dans l'exemple donné précédemment, la notation  $(X)$  symbolise les opérations à effectuer pour obtenir l'extension de l'ensemble des nombres rationnels engendrée par l'indéterminée  $X$ , c'est-à-dire l'ensemble des fractions rationnelles à une indéterminée [16].

Pour d'autres concepts introduits par Kronecker, celui de diviseur, par exemple, qui peut être considéré comme l'équivalent algorithmique du concept dedekindien d'idéal, la notation indique de façon plus explicite encore les opérations à effectuer [17]. On ne trouve pas chez Kronecker de définition intrinsèque de l'ensemble lui-même, pas de propriétés caractéristiques de cet ensemble, pas de concept spécifique qui pourrait évoquer l'introduction d'un objet nouveau, pas de symbole représentant cet objet, mais plutôt une écriture qui indique les éléments regroupés, ou qui symbolise les opérations à effectuer pour exprimer ces éléments.

---

## Conclusion

---

Par la comparaison entre les deux concepts mathématiquement équivalents de domaine de rationalité et de corps, nous pensons avoir donné une idée de l'influence de la position philosophique sur la pratique d'un mathématicien. Cette comparaison nous permet en outre de concevoir qu'il n'y a pas une seule manière possible de « faire des mathématiques », mais que des concepts différents et des méthodes différentes peuvent conduire à des résultats équivalents.

Ces différences de pratique mathématique rendent compte de la part de subjectivité qui apparaît nécessairement dans toute pratique humaine. Elles n'entachent cependant pas l'objectivité qui caractérise les mathématiques et qui se manifeste par le fait que ces pratiques différentes produisent cependant des résultats équivalents. Cette objectivité des mathématiques est ainsi à chercher dans les résultats obtenus et non dans les méthodes, toujours contingentes, utilisées [18].

---

## Références

---

**J. Boniface**, *Kronecker. Sur le concept de nombre*, La Gazette des mathématiciens, Société Mathématique de France, juillet 1999, n°81, 49-70. (**Voir ici**).

**J. Boniface**, *Hilbert et la notion d'existence en mathématiques*, éd. Vrin, coll. Mathesis, 2004.

**J. Boniface**, *From the arithmetic of Gauss to that of Kronecker*, Catherine Goldstein, Norbert Schappacher, Joachim Schwermer (éds.), *Shaping of Arithmetic: Number Theory After Carl Friedrich Gauss Disquisitiones Arithmeticae*, Springer-Verlag, Heidelberg, Berlin, New York, Tokyo, 2007.

**J. Boniface**, **N. Schappacher**, *Sur le concept de nombre dans la mathématique*. Cours inédit de Leopold Kronecker à Berlin (1891), *Revue d'Histoire des mathématiques*, juillet 2001.

**L. Kronecker**, *Über den Zahlbegriff* *Journal für die reine und angewandte Mathematik* **1887**, vol. 101, 337-355, *Werke* vol. 3, 249-74, introduction et traduction in Boniface 1999.

**L. Kronecker**, *Cours du semestre d'été 1891*, Strasbourg, Bibliothèque Université L. Pasteur, publication in Boniface & Schappacher 2001.

## Notes

[▲1] On connaît surtout Cantor pour sa théorie des nombres transfinis ; mais il donna aussi une définition arithmétique des nombres irrationnels comme limites de suites de rationnels.

[▲2] Kronecker 1887.

[▲3] Kronecker 1891, in Boniface/Schappacher 2001.

[▲4] Sur le sens à donner à ce terme, cf. plus bas.

[▲5] Cf. Kronecker 1891, p. 28, in Boniface/Schappacher 2001, p. 240.

[▲6] Kronecker 1891, p. 9, in Boniface/Schappacher 2001, p. 226.

[▲7] Cf. Kronecker 1891, leçon 3 : “Si nous formons de manière complètement générale, explique Kronecker, par exemple le concept de grandeur, pour qu’il soit encore aussi valable pour la géométrie et la mécanique, alors il doit devenir de plus en plus flou. (...). On ne peut pas fixer le concept [de nombre] de façon tout à fait univoque, parce qu’il n’y a pas en général de concept univoque au sens mathématique, mais la plurivocité doit être aussi faible que possible. Si ce n’est pas le cas, alors le nombre ressemble à une pièce de monnaie usée, dont la frappe n’est plus très facile à reconnaître - je peux encore comparer la possession d’un tel concept de nombre à celui de la monnaie dans une ville où il n’y a plus d’étalon d’or ou d’argent, mais seulement des étalons de papier”.

[▲8] Sur les rapports entre Gauss et Kronecker, et leur différence de conception des mathématiques, nous renvoyons à notre article dans Boniface 2007.

[▲9] Kronecker 1891, p. 10, in Boniface/Schappacher 2001, p. 227.

[▲10] Sous le nom Nicolas [Bourbaki](#) fut publiée une présentation systématique des mathématiques, appuyée sur la notion de structure, dans une série d’ouvrages intitulée *Éléments de mathématique*.

[▲11] « L’architecture des mathématiques », in F. Le Lyonnais (éd.), *Les grands courants de la pensée mathématique*, Cahiers du Sud, 1948, réédité par Rivages, 1986, p. 40-41.

[▲12] Dedekind 1871 : *Über die Komposition der binären quadratischen Formen, Supplement X von Dirichlets Vorlesungen über Zahlentheorie*, 2ème éd., p. 423-462, *Werke*, vol. 3, p. 223-261. *Werke*, p. 224.

[▲13] Cet article s’intitule « Grundzüge einer arithmetischen Theorie der algebraischen Grössen » ; il ne fut écrit qu’en 1881 et parut en 1882, mais Kummer atteste que Kronecker travaillait sur ces questions depuis 1858.

[▲14] L’extension d’un corps  $K$  est un corps  $L$  qui contient  $K$  comme sous-corps. Par exemple, le corps des nombres complexes est une extension du corps des nombres réels, lequel est lui-même une extension du corps des nombres rationnels.

[▲15] J’utilise ce terme au sens courant.

[▲16] On note actuellement  $\mathbb{Q}$  l’ensemble des nombres rationnels, et  $\mathbb{Q}(X)$  l’ensemble des fractions rationnelles à une indéterminée à coefficients rationnels – écriture qui est proche de celle de Kronecker.

[▲17] Pour plus de détail sur ce concept, cf. Boniface 2004, chap.3, III, « La théorie des diviseurs de Kronecker ».

[▲18] Sur cette question de l’objectivité des mathématiques, nous nous permettons de renvoyer à notre

article « Les mathématiques : une science sans histoire », à paraître cette année dans la revue *Noesis*.

► **Crédits images**

Pour citer cet article : **Jacqueline Boniface**, **Position philosophique et pratique mathématique : l'exemple de L. Kronecker**. *Images des Mathématiques*, CNRS, 2010. En ligne, URL : <http://images.math.cnrs.fr/Position-philosophique-et-pratique.html>