# THÈSE EN-COTUTELLE

pour l'obtention du titre de

**DOCTEUR DE L'UNIVERSITÉ DE VERSAILLES SAINT-QUENTIN
ET DE DOCTEUR DE LA FACULTÉ DES SCIENCES DE BIZERTE**

présentée devant

**L'UNIVERSITÉ DE VERSAILLES SAINT-QUENTIN**

PAR

**HAMDI FATHALLAH**

**Mention :** Mathématiques et Applications

TITRE DE LA THÈSE :

# THÉORÈMES LIMITES POUR DES MARTINGALES VECTORIELLES EN TEMPS CONTINU ET APPLICATIONS STATISTIQUES

soutenue le 19 février 2010, devant le jury :

| | |
|---|---|
| Bernard | BERCU (Rapporteur) |
| Faouzi | CHAÂBANE (Directeur de thèse) |
| Mohamed Raouf | JAIBI (Examinateur) |
| Oleksiy | KHORUNZHIY (Examinateur) |
| Faiza | MAÂOUIA (Rapporteur) |
| Abdelkader | MOKKADEM (Directeur de thèse) |
| Emmanuel | RIO (Examinateur) |

## Remerciements

Il m'est agréable, avant de commencer la partie purement mathématique de ma thèse, d'adresser quelques remerciements aux personnes sans lesquelles je ne serai pas là où j'en suis.

Je remercie chaleureusement le Professeur Faouzi Chaâbane, qui a guidé mes premiers pas dans la recherche, qui m'a proposé ce sujet et qui a dirigé ce travail avec beaucoup de patience, gentillesse, grande générosité et disponibilité (la distance qui nous séparait n'était d'ailleurs pas un obstacle pour avancer, Skype faisait souvent l'affaire). Sa compétence et son dynamisme m'ont beaucoup appris.

Je remercie également le Professeur Abdelkader Mokkadem, qui a contribué à ma formation en deuxième année de Master, qui a accepté de m'encadrer et m'a proposé de travailler avec Faouzi Chaâbane. Il n'a pas cessé de me conseiller et de suivre de près l'avancement de ma thèse, toujours avec une naturelle gentillesse.

J'adresse toute ma gratitude aux Professeurs Faiza Maâouia et Bernard Bercu, qui ont accepté la lourde tâche de rapporter ma thèse. Je remercie vivement les Professeurs Mohamed Raouf Jaibi, Emmanuel Rio et Oleksiy Khorunzhiy de m'honorer de faire partie de mon jury.

Je ne peux pas oublier le rôle précieux du Professeur Abderrahmen Touati, qui a commencé depuis ma maîtrise à la Faculté des Sciences de Bizerte. Je le remercie infiniment pour ses conseils scientifiques et ses discussions enrichissantes.

Un merci spécial à Ahmed Kebaier, qui n'était pas qu'un simple collaborateur, il est plutôt un ami cher qui m'a beaucoup appris et n'a pas cessé de me soutenir dans les moments difficiles. Je remercie par la même occasion toute l'équipe de proba-stats de l'université Paris 13, particulièrement Mohamed Ben Alaya.

Je remercie vivement Mariane Pelletier, particulièrement d'avoir eu la gentillesse et la patience d'écouter mes répétitions et d'enrichir mes idées afin de mettre au point mon exposé.

Mes sincères remerciements à Luc Robbiano, à qui je dois tout le respect et à qui je serai infiniment reconnaissant de tout ce qu'il a fait pour moi, mais aussi pour ma famille.

Un grand merci à tous les membres du département de mathématiques de Versailles, qui m'ont offert d'excellentes conditions de travail. Je cite particulièrement Guillermo (notammant pour son assistance quand mon ordinateur m'a abondonné au « bon » moment), Yvan Martel et Mohamed Krir (pour leurs efforts pour faciliter l'accueil des membres du jury), Julien (pour ses critiques constructives, ses conseils et surtout

les soirées jeux). Merci à Ariane, Aurélie, Aude, Christine, Alexis, Mourad, Tahar, Jean,...Je remercie aussi Chantal, Laura et Liliane (qui, entre autres, prennent à cœur l'organisation de mon pot), Fatima et Marie-France (qui est plutôt une amie de la famille). Une mention spéciale pour tous les thésards : Réda (qui me présente toujours ses services avec un grand cœur), Abdoul (avec qui la discussion a un sens), Hussein (le second papa), Pascal (qui a grandi), Vianney (qui a tout lu et corrigé), Jérémy. Je n'oublie évidement pas les anciens : Yousri, Baba, Clémence, Slim, Jean-Maxime, Sylvain et Éric (le chef qui n'a pas de successeur).

Je tiens également à remercier l'ensemble des membres du département de mathématiques de Bizerte, qui ont contribué à ma formation et à l'élaboration de cette thèse. Merci à Seifallah Cherif, Nabila Hamza, Nasser Mennaii, Belgesem Selmi, Hichem Rameh, Hammadi Ammar, Mohammed Mounir Nessibi...Merci à Sami Karmous pour ses efforts pour faciliter mes inscriptions à la Faculté des Sciences de Bizerte à distance.

Je remercie tous les membres du département de mathématiques de Paris 2 où j'ai bénéficié d'un environnement de travail instructif et sympathique. Je salue ici l'équipe de statistique : Maurice Lethielleux, Jean-Pierre Lecoutre, Liliane Bel, Maylis Irigoyen, Guy Pardalier, Antoine Auberger, etc...

J'adresse un énorme merci à mes amis : Yosr, Ramzi, Raoudha, Karim, Ahlem, Wissem, Kaouthar, Taoufik, Walid, Mourad, Monsef, Bessem, Haithem, qui ont éclairé ma vie et m'ont toujours inspiré courage et confiance. Je remercie aussi chaleureusement mes beaux-frères et belles-sœurs : Rania et Amine, Dhouha et Khaled, Leila et Bechir, Neziha et Seif que, je chéris infiniment.

J'aimerais également témoigner ma reconnaissance à ma famille en France : mes oncles Bakar et Rédha, mes tantes Khadija et Fatima, mes cousins et mes cousines auprès de qui j'ai toujours trouvé réconfort et soutien. Merci pour tout ce qu'ils ont fait pour moi.

Avant de finir, une tendre pensée à ma chère famille, la source où je puisais les forces pour aller toujours de l'avant ; mes parents, mes beaux-parents : qu'ils soient assurés de mon affection ; ma femme et ma petite Emna : mes amours éternels ; ma petite sœur Khadija : toujours dans mon cœur ; et mes frères Faouzi, Moez et Wissem : mon soutien sincère et durable.

Enfin, je remercie tous ceux dont l'oubli du nom n'est pas celui du cœur.

# Dédicaces

*À qui je dois ce que je suis :*

*À mes très chers parents Zoubeida et Mohamed Elhedi,*

Rien de ce que je peux écrire n'est assez suffisant pour vous exprimer tout mon amour ainsi que mon respect à votre égard. En vous remerciant pour tout ce que vous avez fait pour moi, pour tous les sacrifices auxquels vous avez consenti et pour tous les conseils que vous m'avez prodigués, je vous dédie ce modeste travail, qu'il soit pour vous l'exaucement de vos prières.

Vous serez toujours le phare qui me guide et le refuge qui me soulage…

Je vous aime...

*À ma chère et tendre femme Ines,*

Ta tendresse, ta générosité, ta patience, ta gentillesse et ton sens de responsabilité font de toi la femme idéale...

Que ce travail, que je te dédie, soit le témoignage de ma profonde gratitude et de mon amour éternel.

Merci d'être toujours là pour moi, à m'épauler, à me soutenir et à me pousser vers l'avant...

Merci pour tout ce que tu as fait pour moi...

Merci d'être ma femme ; d'être mon amour...

Je t'aime et j'ai besoin de toi dans toute ma vie...

*À mon petit ange Emna,*

Depuis le 26 février 2008, tu as déplacé le centre de mon monde, tu as égayé ma vie, tu m'as fait découvrir le vrai bonheur.

Tu es le rayon de soleil quand il fait noir.

Tu es la source de chaleur quand il fait froid.

Tu es mon refuge, mon havre de paix...

Que ce travail soit l'expression de mon amour perpétuel, de mon bonheur de t'avoir et de ma gratitude pour tout ce que tu m'as apporté...

Que Dieu te bénisse.

*À mes beaux-parents Faouzia et Mohamed, parents...*

Au nom de tout l'amour, le respect et la reconnaissance que je vous porte, je vous dis merci pour chaque mot d'encouragement, pour chaque conseil, pour chaque geste de tendresse et de soutien dans les moments difficiles.

Je ferai de mon mieux pour ne jamais vous décevoir.

Avec ma gratitude infinie, je vous aime...

# Table des matières

# Chapitre 1

# Introduction

## 1.1 Théorèmes limites par moyennisation logarithmique

Les théorèmes limites par moyennisation logarithmique ont fait l'objet d'une littérature étendue durant la décennie passée. Nous apportons dans ce travail notre contribution à cette littérature aussi bien sur le plan théorique que sur le plan des applications statistiques.

### 1.1.1 Problématique

Soit $\mathrm{M} = (M_t,\, t \in \mathbb{I})$ une famille de variables aléatoires (v.a.) vectorielles, indexée par $\mathbb{I} = \mathbb{N}^*$ dans le cas discret ou $\mathbb{I} = \mathbb{R}_+$ dans le cas continu, adaptée à une bonne filtration $\mathbb{F} = (\mathcal{F}_t \in \mathbb{I})$ et satisfaisant au principe faible appelé théorème de la limite centrale généralisé :

$$(TLCG) \quad Z_t := V_t^{-1} M_t \Longrightarrow Z_\infty,$$

où « $\Longrightarrow$ » dénote la convergence en loi des variables aléatoires ou la convergence étroite des mesures et $V = (V_t,\, t \in \mathbb{I})$ est une normalisation scalaire ou matricielle.
La problématique est de montrer un théorème analogue au théorème de Birkhoff pour $Z = (Z_t,\, t \in \mathbb{I})$. Plus précisément, il s'agit de résoudre les trois problèmes suivants :

1. Montrer l'existence d'une échelle $A = (A_t,\, t \in \mathbb{I})$ sur $\mathbb{I}$ telle que les mesures aléatoires $\mu_T$ données par

$$\mu_T = \begin{cases} \dfrac{1}{A_T} \displaystyle\sum_{s=1}^{T} a_s\, \delta_{Z_s}, & \text{(cas discret)} \quad \text{où} \quad a_s = A_s - A_{s-1}, \\[2ex] \dfrac{1}{A_T} \displaystyle\int_1^T \delta_{Z_s}\, d\, A_s, & \text{(cas continu)}, \end{cases}$$

vérifient le principe fort appelé théorème de la limite centrale presque-sûre :

$$(TLCPS) \quad \mu_T \Longrightarrow \mu_\infty \quad p.s.,$$

où $\delta_x$ est la mesure de Dirac en $x$, et $\mu_\infty$ est la loi de la v.a $Z_\infty$.

2. Étudier la convergence des moments du second ordre des mesures $\mu_T$ vers $\mu_\infty$ : la Loi forte quadratique

$$(LFQ) \quad \int_{\mathbb{R}^d} xx^* d\mu_T(x) \longrightarrow \int_{\mathbb{R}^d} xx^* d\mu_\infty(x) \quad p.s.$$

3. Rechercher des vitesses de convergence en loi et au sens presque-sûr associées à la LFQ. Il s'agit de dégager un théorème de la limite centrale logarithmique (TLCL) et une loi du logarithme itéré logarithmique (LLIL).

Les exemples suivants illustrent l'intérêt des solutions relatives à ces problèmes posés et donnent un aperçu de leurs applications en statistiques.

**Exemple 1**

Considérons le processus autorégressif d'ordre 1 défini sur un espace de probabilité $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$, muni d'une filtration $\mathbb{F} = (\mathcal{F}_n, n \in \mathbb{N})$, par

$$X_n = \theta X_{n-1} + \epsilon_n,$$

où $\epsilon = (\epsilon_n, n \in \mathbb{N}^*)$ est une suite de variables aléatoires réelles indépendantes et de même loi de carré intégrable, $\mathbb{F}$-adaptée et indépendante de la variable aléatoire $X_0$, $\mathcal{F}_0$ mesurable appelée bruit et $\theta$ un paramètre réel inconnu. On sait que l'estimateur des moindres carrés $\widehat{\theta}_n$ de $\theta$ défini par

$$\widehat{\theta}_n = \Big(\sum_{i=1}^{n} X_{i-1}^2\Big)^{-1} \sum_{i=1}^{n} X_{i-1}X_i$$

possède de bonnes propriétés asymptotiques. En particulier, dans le cas stable ($|\theta| < 1$), $\widehat{\theta}_n$ est fortement consistant et vérifie la propriété de normalité asymptotique suivante :

$$\sqrt{n}(\widehat{\theta}_n - \theta) \Longrightarrow \mathcal{N}(0, 1-\theta^2).$$

Grâce aux théorèmes limites par moyennisation logarithmique, on montre les propriétés suivantes :

1. Un théorème de la limite centrale presque-sûre

$$(\log N)^{-1} \sum_{n=1}^{N} \frac{1}{n}\, \delta_{\{\sqrt{n}(\widehat{\theta}_n - \theta)\}} \Longrightarrow \mathcal{N}(0, 1-\theta^2).$$

2. Une loi forte quadratique sur les erreurs d'estimation

$$(\log N)^{-1} \sum_{n=1}^{N} (\widehat{\theta}_n - \theta)^2 \longrightarrow 1 - \theta^2, \quad (N \longrightarrow \infty).$$

3. Une loi forte quadratique sur les erreurs de prédiction

$$\widehat{\sigma}_N^2 = \frac{1}{N} \sum_{n=1}^{N} (X_n - \widehat{\theta}_{n-1} X_{n-1})^2 \longrightarrow \sigma^2, \quad (N \longrightarrow \infty),$$

où $\sigma^2 = \mathbb{E}(\epsilon_n^2)$.

4. Une loi de logarithme itéré

$$\limsup_{N\to\infty} \sqrt{\frac{N}{2\log\log N}}|\widehat{\theta}_N - \theta| = \sqrt{1-\theta^2} \quad p.s.$$

**Exemple 2**
Soit $S = (S_t,\, t \geq 0)$ un processus à accroissements indépendants et stationnaires (PAIS) dont la mesure de Lévy des sauts $\nu(dt, dx) = dt\, F(dx)$ vérifie :

$$\int |x|^{2p} F(dx) < \infty, \quad \text{pour un } p > 1,$$

$F$ étant une mesure positive sur $\mathbb{R}^*$. On note :

$$m = \mathbb{E}S_1, \quad \sigma^2 = \mathbb{E}S_1^2 - m^2 \quad \text{et} \quad \hat{m}_t = \frac{S_t}{t}.$$

La loi forte quadratique permet de dégager un estimateur fortement consistant de $\sigma^2$. En effet, on a le résultat suivant :

$$\hat{\sigma}_t^2 := (\log(1+t))^{-1} \int_0^t \frac{(Sr - mr)^2}{(1+r)^2}\, dr \longrightarrow \sigma^2 \quad p.s., \quad (t \longrightarrow \infty).$$

Si de plus pour un $\rho > 1/2$ on a

$$\left|(1+t)^{-1} \sum_{r\leq t} (\Delta S_r)^2 - \int_{\mathbb{R}} |x|^2 F(dx)\right| \leq c^{te} \left((\log(1+t))^{-\rho}\right) \quad p.s.,$$

alors grâce au théorème de la limite centrale associé à la loi forte quadratique, on obtient la propriété suivante :

$$\sqrt{\log(1+t)}(\hat{\sigma}_t^2 - \sigma^2) \Longrightarrow \mathcal{N}\left(0, 4\sigma^4\right).$$

### 1.1.2 Aperçu historique

**Marches aléatoires**

Les premiers travaux sur le TLCPS pour les marches aléatoires ont été menés par Brosamler [6] et Schatte [24, 25] suivant deux schémas de démonstration différents. Plus précisément, ils ont montré, pour une marche aléatoire $S_n = X_1 + X_2 + \cdots + X_n$ dont les accroissements $(X_n,\, n \geq 1)$ sont des v.a indépendantes centrées et identiquement distribuées selon une loi $F$ sur $\mathbb{R}$, que les mesures empiriques logarithmiques associées aux v.a $\left(n^{-1/2} S_n\right)$ données par

$$\mu_N = (\log N)^{-1} \sum_{n=1}^{N} n^{-1}\, \delta_{\{n^{-1/2} S_n\}}$$

vérifient

$$\mu_N \Longrightarrow \mu_\infty, \quad p.s.,$$

où $\mu_\infty$ est la loi gaussienne centrée de variance $\sigma^2$.
Schatte [24] a obtenu ce résultat lorsque $F$ a un moment d'ordre 3, tandis que Brosamler a prouvé une version fonctionnelle de ce résultat sous l'hypothèse suivante :

$$\mathbb{E}(|X_k|^{2b}) < \infty, \quad \text{pour un} \quad b > 1.$$

Dans ce cadre, on cite aussi les travaux de Lacey et Philipp [17], Touati [26], Berkes et Dehling [5] et Rodzik et Rychlik [23].

**Mouvement brownien**

Brosamler a commencé par établir le théorème de la limite centrale presque-sûre pour le mouvement brownien :

$$\text{(TLCPS)} \quad (\log T)^{-1} \int_1^T \frac{ds}{s} \delta_{\{\frac{B_s}{\sqrt{s}}\}} \Longrightarrow G \quad p.s., \quad \text{où} \quad G = \mathcal{N}(0,1).$$

Il en a déduit par la méthode de plongement de Skorokhod le résultat relatif à la marche aléatoire. Pour ce faire, il a considéré $Y = (Y_t,\, t \geq 0)$ le processus d'Ornstein-Uhlenbeck défini à partir du mouvement brownien $B$ par le changement de temps suivant :

$$Y_t = e^{-t/2} B_{e^t}.$$

Les théorèmes limites classiques vérifiés par ce processus et transférés au mouvement brownien $B$ donnent les propriétés suivantes :

1. Une loi forte logarithmique

$$\text{(LFL)} \quad \forall f \in L^1(G), \quad (\log T)^{-1} \int_1^T f\left(\frac{B_s}{\sqrt{s}}\right) \frac{ds}{s} \longrightarrow \int f dG \quad p.s., \ (T \longrightarrow \infty).$$

2. Un théorème de la limite centrale logarithmique

$$\text{(TLCL)} \quad \forall f \in L_0^2(G), \quad (\log T)^{-\frac{1}{2}} \int_1^T f\left(\frac{B_s}{\sqrt{s}}\right) \frac{ds}{s} \Longrightarrow \mathcal{N}(0, \sigma_f^2),$$

où $L_0^2(G) = \left\{ f \in L^2(G) / \int f dG = 0 \right\}$ et $\sigma_f^2$ est une constante qui dépend de $f$.

3. Une loi du logarithme itéré

$$\text{(LLIL)} \quad \forall f \in L_0^2(G), \quad \limsup_{T \to \infty} \Big( 2 \log T \log\log T \Big)^{-\frac{1}{2}} \left| \int_1^T f\left(\frac{B_s}{\sqrt{s}}\right) \frac{ds}{s} \right| = \sigma_f \quad p.s.$$

Le TLCPS est une conséquence immédiate de la relation LFL.

#### Martingales et processus de Markov réels

L'exploitation de la méthode de plongement ainsi que des techniques de changement de temps et de contiguïté ont permis de transférer les résultats obtenus pour le mouvement brownien aux :
- martingales fonctionnelles additives d'un processus de Markov : Maâouia [19] ;
- martingales discrètes réelles : Chaâbane [7] et Lifshits [18] ;
- martingales continues à temps continu réelles : Chaâbane [8] ;
- processus ponctuels : Chabchoub et Manoubi [14],

répondant ainsi aux trois problèmes posés dans chacun des cas considérés.

#### Martingales vectorielles et modèles statistiques

La généralisation de ces résultats aux martingales vectorielles discrètes est dûe à Chaâbane *et al* [12] pour le TLCPS et à Chaâbane et Maâouia [11] pour la LFQ et ses vitesses de convergence. En exploitant la méthode de la fonction caractéristique conditionnelle pour établir le TLCPS et en distingant deux types de normalisation : une normalisation régulière et une normalisation explosive vérifiant respectivement les conditions $(\mathcal{C}) = \{\mathcal{C}_1, \mathcal{C}_2, \mathcal{C}_3\}$ et $(\mathcal{C}') = \{\mathcal{C}_1, \mathcal{C}'_2, \mathcal{C}'_3\}$ définies ci-dessous :

**Conditions $(\mathcal{C})$ et $(\mathcal{C}')$ pour la normalisation $(V_n)$**

- $(\mathcal{C}_1)$ $V_n V_n^* \leq V_{n+1} V_{n+1}^*$ (au sens des matrices réelles symétriques semi-définies positives).

- $(\mathcal{C}_2)$ pour $\Lambda_n = V_{n+1}^{-1} V_n$, on a

$$a_n = \mathrm{tr}(I - {\Lambda_n}^* \Lambda_n) \longrightarrow 0 \quad \text{et} \quad A_n = \sum_{k=1}^{n} a_k \longrightarrow \infty \quad (n \longrightarrow \infty).$$

- $(\mathcal{C}'_2)$ $\Lambda_n \longrightarrow \Lambda_\infty \quad (n \longrightarrow \infty)$.

- $(\mathcal{C}_3)$ $\limsup_{n\to\infty} a_n^{-1} \left(1 - \|\Lambda_n\|^2\right) > 0$.

- $(\mathcal{C}'_3)$ $\|\Lambda_\infty\| < 1$.

Sous ces conditions, pour une martingale $M = (M_n,\, n \in \mathbb{N})$ vectorielle, localement de carré intégrable, associée à une normalisation matricielle $V = (V_n,\, n \in \mathbb{N})$ vérifiant le TLCG suivant :

$$Z_n := V_n^{-1} M_n \Longrightarrow Z_\infty,$$

les mesures aléatoires logarithmiques associées aux v.a. $(Z_n)$ données par :

$$\begin{cases} \mu_N^1 := (\log(\det V_N)^2)^{-1} \displaystyle\sum_{n=1}^{N} \left(1 - \left(\frac{\det V_n}{\det V_{n+1}}\right)^2\right) \delta_{Z_n} \quad \text{(cas régulier)} \\ \\ \mu_N^1 := \dfrac{1}{N} \displaystyle\sum_{n=1}^{N} \delta_{Z_n} \quad \text{(cas explosif)} \end{cases}$$

convergent étroitement vers $\mu_\infty$, loi de $Z_\infty$.

En exploitant le TLCPS et en utilisant des techniques de décomposition, Chaâbane et Maâouia [11] ont établi la LFQ ainsi que ses vitesses de convergence pour des martingales vectorielles discrètes à croissances régulière, explosive et mixte. Notons aussi que d'autres travaux étaient menés concernant le TLCPS et des lois sous-jacentes. Pelletier [22] a montré qu'une large classe d'algorithmes stochastiques vérifie le TLCPS. Cénac [21] a également établi un TLCPS pour des algorithmes stochastiques d'approximation et une LFQ associée au TLCPS ainsi que sa vitesse de convergence. Maâouia et Touati [20] ont établi, pour un processus de branchement multitype, un TLCPS et une LFQ ainsi que les vitesses de convergences en loi et au sens presque-sûr de la LFQ. Dans [13], Chaâbane et Touati ont appliqué le TLCPS et la LFQ dans le cadre des martingales vectorielles discrètes pour l'identification d'un modèle de régression linéaire. Bercu et Fort [3], ont proposé une nouvelle approche du TLCPS pour des martingales en utilisant le théorème de Carleman. Bercu *et al* [4], ont établi un TLCPS pour des intégrales stochastiques multiples. Dans [1, 2], Bercu *et al* ont montré que sous certaines conditions de régularité du processus croissant et sous certaines conditions de moments, il y a convergence des moments normalisés de tout ordre pair associés au TLCPS pour des martingales réelles et vectorielles.

Récemment, Chaâbane et Kebaier [10] se sont intéressés aux martingales vectorielles quasi-continues à gauche en temps continu, associées à une normalisation régulière : la normalisation $V$ vérifie la condition $(\mathcal{C}) = \{\mathcal{C}_1, \mathcal{C}_2, \mathcal{C}_3\}$ ci-dessous :
- $(\mathcal{C}_1)$ $t \longmapsto V_t$ est de classe $\mathscr{C}^1$.
- $(\mathcal{C}_2)$ Il existe $s_0 \geq 0$ tel que pour tous $t \geq s \geq s_0$, on a $V_s V_s^* \leq V_t V_t^*$ (au sens des matrices réelles symétriques semi-définies positives).
- $(\mathcal{C}_3)$ Il existe une fonction $a = (a_t)$ continue sur $\mathbb{R}_+$, décroissante vers 0 à l'infini, telle que
$$A_t = \int_0^t a_s ds \longrightarrow \infty, \quad (t \longrightarrow \infty)$$

et une matrice $U_1$ vérifiant :

$$\begin{cases} a_t^{-1} V_t^{-1} \dfrac{dV_t}{dt} - U_1 = \Delta_{t,1}, \quad \text{avec } \|\Delta_{t,1}\| = \mathcal{O}(A_t^{-\beta}), \quad \beta > 1, \\ \\ U_1 + U_1^* = S_1, \quad \text{où} \;\; S_1 \;\; \text{est une matrice inversible.} \end{cases}$$

Ils ont donné une réponse aux différents problèmes posés, établissant ainsi le TLCPS, la LFQ et le TLCL dans ce cadre d'étude.

## 1.2 Présentation de la thèse

Cette thèse se compose de trois chapitres. Dans le premier chapitre, en utilisant les théorèmes limites par moyennisation logarithmique pour des martingales continues en temps continu, on construit un estimateur du couple $(\theta, \sigma^2)$ pour un modèle autorégressif gaussien stable à temps continu et on montre que cet estimateur est asymptotiquement distribué comme un couple de variables aléatoires gaussiennes indépendantes quelle que soit la loi de l'état initial $X_0$. Ce chapitre a fait l'objet d'une publication (voir [9]). Le second chapitre est consacré à établir des résultats autour du théorème limite presque-sûre pour des martingales vectorielles quasi-continues à gauche en temps continu et à croissance explosive ou mixte. On applique les résultats obtenus au modèle d'Ornstein-Uhlenbeck bivarié utilisé en modélisation biologique et en mathématiques financières. Ce chapitre est la version détaillée d'un travail soumis en collaboration avec Ahmed Kebaier (voir [16]). Dans le dernier chapitre, on établit pour l'estimateur des moindres carrés $\hat{\theta}$ de $\theta$ d'un modèle autorégressif gaussien à temps continu non nécessairement stable, un TLCPS, une loi forte quadratique associée au TLCPS et un théorème de la limite centrale logarithmique. Dans le cas stable, on propose d'utiliser l'estimateur des moindres carrés pondéré $\tilde{\theta}$ de $\theta$ pour améliorer les vitesses de convergence logarithmique dans les théorèmes obtenus. Dans le cas instable, on établit, pour l'estimateur des moindres carrés $\hat{\theta}$, les mêmes type de propriétés asymptotiques avec une vitesse de convergence arithmétique (voir [15]).

Décrivons plus précisément les résultats obtenus dans chaque chapitre de cette thèse.

### 1.2.1 Chapitre 2

On considère le processus d'Ornstein-Uhlenbeck $X = (X_t,\, t \geq 0)$ défini par l'équation différentielle stochastique suivante :

$$dX_t = \theta X_t dt + \sigma dB_t, \quad t \geq 0,$$

où $B = (B_t,\, t \geq 0)$ est un mouvement brownien standard réel et $(\theta, \sigma) \in \mathbb{R}_-^* \times \mathbb{R}_+^*$ sont deux paramètres inconnus. Il s'agit de construire une région de confiance asymptotique du couple $(\theta, \sigma^2)$ sans recours à une méthode de discrétisation de la diffusion $X$. La diffusion $X$ est récurrente, positive et de loi invariante $\mathcal{N}(0, \sigma^2/2|\theta|)$, ce qui nous permet de montrer aisément que l'estimateur du maximum de vraisemblance de $\theta$ défini par

$$\widehat{\theta}_t = \Big(\int_0^t X_s^2 ds\Big)^{-1} \int_0^t X_s dX_s$$

est fortement consistant et vérifie

$$\sqrt{t}(\widehat{\theta}_t - \theta) \Longrightarrow \mathcal{N}(0, 2|\theta|),$$

quelle que soit la loi de $X_0$.

L'application des théorèmes limites par moyennisation logarithmique à cet estimateur conduit à des propriétés asymptotiques associées à la vitesse $\log t$. Afin d'améliorer cette vitesse, on définit l'estimateur du maximum de vraisemblance pondéré $\tilde{\theta}_t$ de $\theta$ par

$$\tilde{\theta}_t = P_t^{-1} \int_0^t \omega_s X_s dX_s,$$

correspondant au poids $(\omega_s)$ donné par

$$\omega_s = (1+s)^{-(\alpha+\gamma)/2} \exp\left\{\frac{2}{(1-\alpha)}(1+s)^{1-\alpha}\right\} \quad ; \quad s \geq 0 \quad \text{avec} \quad \frac{1}{2} < \alpha < \gamma < 1,$$

avec $P_t = \displaystyle\int_0^t \omega_s X_s^2 ds$.

On montre entre autres :

1. Un théorème de la limite centrale presque-sûre

$$\text{(TLCPS)} \qquad \frac{1-\alpha}{t^{1-\alpha}} \int_1^t \frac{ds}{s^\alpha}\, \delta_{\{s^{\frac{\alpha}{2}}(\tilde{\theta}_s - \theta)\}} \Longrightarrow \mathcal{N}(0, 2|\theta|) \quad p.s.$$

2. Une loi forte quadratique

$$\text{(LFQ)} \qquad \frac{1-\alpha}{t^{1-\alpha}} \int_1^t (\tilde{\theta}_s - \theta)^2 ds \longrightarrow 2|\theta| \quad p.s., \quad (t \longrightarrow \infty).$$

3. Une indépendance asymptotique du couple $(\bar{\theta}_t,\, \bar{\sigma}_t^2)$

$$(\sqrt{t}(\bar{\theta}_t - \theta), \sqrt{t}(\bar{\sigma}_t^2 - \sigma^2)) \Longrightarrow \mathcal{N}(0, 2|\theta|) \otimes \mathcal{N}(0, 2\sigma^4/|\theta|).$$

où $\bar{\theta}_t = \dfrac{1}{t}\displaystyle\int_0^t \tilde{\theta}_s ds$ et $\bar{\sigma}_t^2 = \dfrac{1}{t}\displaystyle\int_0^t \tilde{\sigma}_s^2 ds$, avec $\tilde{\sigma}_t^2 = -2\tilde{\theta}_t I_t$.

### 1.2.2 Chapitre 3

Le but de ce chapitre est d'étendre les résultats pour des martingales locales vectorielles quasi-continues à gauche à croissance régulière au cas d'une martingale à croissance explosive : la normalisation $V$ satisfaisant la condition $(\mathcal{C}_3)$ avec $a_t = 1$ et au cas mixte : la martingale $M$ s'écrit $M = (M_1, M_2)$ où $M_1$ désigne une martingale associée à une normalisation régulière $V_1$ et $M_2$ une martingale associée à une normalisation explosive $V_2$.

#### Martingales à croissance explosive

Une normalisation $V$ est dite explosive si elle vérifie la condition $(\mathcal{C}') = \{\mathcal{C}_1, \mathcal{C}_2, \mathcal{C}'_3\}$ suivante :

- $(\mathcal{C}_1)$ $t \longmapsto V_t$ est de classe $\mathscr{C}^1$.
- $(\mathcal{C}_2)$ Il existe $s_0 \geq 0$ tel que pour tous $t \geq s \geq s_0$, on a $V_s V_s^* \leq V_t V_t^*$ (au sens des matrices réelles symétriques semi-définies positives).
- $(\mathcal{C}'_3)$ Il existe une matrice $U_2$ vérifiant :

$$\begin{cases} V_t^{-1} \dfrac{dV_t}{dt} - U_2 = \Delta_{t,2}, \quad \text{avec } \|\Delta_{t,2}\| = \mathcal{O}(t^{-\beta}), \quad \beta > 1, \\ \\ U_2 + U_2^* = S_2, \quad \text{où } \ S_2 \ \text{ est une matrice inversible.} \end{cases}$$

Soit $M = (M_t,\, t \geq 0)$ une martingale locale $d$-dimensionnelle nulle en zéro et quasi-continue à gauche et $V = (V_t,\, t \geq 0)$ une famille déterministe de matrices inversibles vérifiant la condition $(\mathcal{C}')$. Si le couple $(M, V)$ vérifie le TLCG et l'hypothèse suivante :

$$(\mathcal{H}_1) \qquad V_t^{-1} \langle M \rangle_t (V_t^*)^{-1} \longrightarrow C \quad p.s., \quad (t \longrightarrow \infty),$$

où $C$ est une matrice aléatoire ou non, alors on montre que le couple $(M, V)$ vérifie le théorème de la limite centrale presque-sûre, à savoir

$$(TLCPS) \qquad \mu_t := t^{-1} \int_0^t \delta_{\{V_s^{-1} M_s\}} \, ds \Longrightarrow \mu_\infty \quad p.s.,$$

où $\mu_\infty$ est la loi de $Z_\infty$.

Si de plus, le couple $(M, V)$ vérifie les hypothèses suivantes :

$$(\mathcal{H}_2) \qquad V_t^{-1} [M]_t (V_t^*)^{-1} \longrightarrow C \quad p.s., \quad (t \longrightarrow \infty)$$

et

$$(\mathcal{H}_3) \qquad C = \int xx^* d\mu_\infty(x),$$

alors on montre qu'il vérifie la loi forte quadratique, à savoir

$$(LFQ) \qquad t^{-1}\int_0^t V_s^{-1}M_sM_s^*(V_s^*)^{-1}ds \longrightarrow C \quad p.s., \quad (t \longrightarrow \infty)$$

et une loi du logarithme

$$(LL) \qquad \|V_t^{-1}M_t\| = \mathbf{o}(\sqrt{t}) \quad p.s.$$

Enfin, grâce à la décomposition suivante :

$$Z_tZ_t^* = \int_0^t V_s^{-1}M_sdM_s^*(V_s^*)^{-1} - \int_0^t V_s^{-1}M_sM_s^*(V_s^*)^{-1}dV_s^*(V_s^*)^{-1}$$

$$-\int_0^t V_s^{-1}dV_sV_s^{-1}M_sM_s^*(V_s^*)^{-1} + \int_0^t V_s^{-1}dM_sM_s^*(V_s^*)^{-1} + \int_0^t V_s^{-1}d[M]_s(V_s^*)^{-1},$$

où $Z_t = V_t^{-1}M_t$, en renforçant $(\mathcal{H}_2)$ de la manière suivante :

$$(\mathcal{H''}_2) \qquad \exists\, p \in [1,2] \text{ tel que } \quad \int_0^\infty \int_{\mathbb{R}^d} (1+s)^{-p/2}\|V_s^{-1}x\|^{2p}\nu^M(ds,dx) < \infty \quad p.s.$$

et en supposant que la condition $(\mathcal{C'}_3)$ est obtenue avec $\beta = 3/2$, on établit un théorème de la limite centrale associé à la loi forte quadratique, à savoir

$$(TLCL) \qquad t^{-1/2}\int_0^t \{U_2\tilde{D}_s + \tilde{D}_sU_2^*\}ds \Longrightarrow \nu_\infty, \quad (t \longrightarrow \infty),$$

où $\tilde{D}_s = V_s^{-1}(M_sM_s^* - \langle M\rangle_s)(V_s^*)^{-1}$ et $\nu_\infty$ est la loi d'une variable aléatoire de la forme $\mathscr{C}^{\frac{1}{2}}G$, $G$ étant un vecteur gaussien standard d-dimensionnel et indépendant de $\mathscr{C}$ avec

$$\mathscr{C} = (tr(S_2))^{-1}\{2C \otimes C + 2[(\mathrm{Vect}(C))(\mathrm{Vect}(C))^*]^\perp\}.$$

### Martingales à croissance mixte

On dit qu'une normalisation $V = (V_t,\, t \geq 0) \in \mathbb{R}^{d\times d}$ est mixte si elle est de la forme $V = \mathrm{Diag}(V_1, V_2)$ où $V_1$ (resp. $V_2$) est une famille déterministe de matrices inversibles de $\mathbb{R}^{d_1\times d_1}$(resp. $\mathbb{R}^{d_2\times d_2}$) satisfaisant aux conditions de croissance régulière $(\mathcal{C})$ (resp. aux conditions de croissance explosive $(\mathcal{C}')$). On désigne par $M = (M_1, M_2)$ une martingale locale $d$-dimensionnelle, quasi-continue à gauche, nulle en zéro avec $M_1 \in \mathbb{R}^{d_1}$ et $M_2 \in \mathbb{R}^{d_2}$, où $d = d_1 + d_2$. Dans ce cadre et sous des hypothèses combinées entre le cas régulier et le cas explosif, on établit un TLCPS, une LFQ et deux formes différentes du TLCL. Ces résultats seront appliqués au modèle d'Ornstein-Uhlenbeck bivarié défini par

$$\begin{cases} dX_t = \theta_1 X_t dt + \theta_2 Y_t dt + dB_t, & X_0 = x, \\ \\ dY_t = \theta_3 Y_t dt + dW_t, & Y_0 = y, \end{cases}$$

où $\theta = (\theta_1, \theta_2, \theta_3) \in \mathbb{R}^3$ avec $0 < \theta_3 < \theta_1$ et $(B, W)$ est un mouvement brownien plan nul en 0. Pour $V_t = \mathrm{Diag}(e^{t\theta_1},\, e^{t\theta_3},\, e^{t\theta_3})$ et

$$I_t = \begin{pmatrix} e^{-2t\theta_1} \displaystyle\int_0^t X_s^2 ds & e^{-t(\theta_1+\theta_3)} \displaystyle\int_0^t X_s Y_s ds & 0 \\ e^{-t(\theta_1+\theta_3)} \displaystyle\int_0^t X_s Y_s ds & e^{-2t\theta_3} \displaystyle\int_0^t Y_s^2 ds & 0 \\ 0 & 0 & e^{-2t\theta_3} \displaystyle\int_0^t Y_s^2 ds \end{pmatrix},$$

on montre que l'estimateur du maximum de vraisemblance $\hat{\theta}$ de $\theta$ vérifie :

1. $(TLCPS)$ $$t^{-1} \int_0^t \delta_{\{I_s V_s(\hat{\theta}_s - \theta)\}} ds \Longrightarrow \mathcal{N}_{3\times 3}\left(0, I_\infty\right) \quad p.s.$$
2. $(LFQ)$ $$t^{-1} \int_0^t I_s V_s(\widehat{\theta}_s - \theta)(\widehat{\theta}_s - \theta)^* V_s^* I_s^* ds \longrightarrow I_\infty \quad p.s., \quad (t \longrightarrow \infty).$$

   Pour $\tilde{D}_s = I_s V_s(\widehat{\theta}_s - \theta)(\widehat{\theta}_s - \theta)^* V_s^* I_s^* - I_s$, on a :
3. $(TLCL)$ $$t^{-1/2} \int_0^t (U_2 \tilde{D}_s + \tilde{D}_s U_2)\, ds \Longrightarrow \nu_\infty,$$

   où $\nu_\infty$ est la loi d'une variable aléatoire de la forme $\mathscr{C}^{\frac{1}{2}} G$, $G$ étant un vecteur gaussien standard d-dimensionnel et indépendant de $\mathscr{C}$ avec
   $$\mathscr{C} = (2\theta_1 + 4\theta_3)^{-1} \{2 I_\infty \otimes I_\infty + 2[(\mathrm{Vect}(I_\infty))(\mathrm{Vect}(I_\infty))^*]^\perp\}.$$

### 1.2.3 Chapitre 4

Soit $W = (W_t,\, t \geq 0)$ un mouvement brownien réel standard. On définit le processus $X = (X^1, \ldots, X^p)^*$ avec $X_0 = 0$ par

$$dX_t = B_\theta X_t dt + b\, dW_t, \quad t \geq 0, \tag{1.1}$$

où $b^* = (0, \ldots, 0, \sigma) \in \mathbb{R}^p$ et

$$B_\theta = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \ddots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \ddots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 \\ \theta_1 & \theta_2 & \theta_3 & \cdots & \theta_{p-1} & \theta_p \end{pmatrix}.$$

Le processus $X = (X_t,\, t \geq 0)$ défini par (1.1) est un processus gaussien dont la $p$-ième composante $X^p$ est un processus autorégressif d'ordre $p$ ($AR(p)$) vérifiant l'équation différentielle stochastique suivante :

$$dX_t^p = \theta^* X_t dt + \sigma dW_t, \tag{1.2}$$

où $\theta = (\theta_1, \ldots, \theta_p) \in \mathbb{R}^p$. Désignons par $\mathfrak{m}$ (resp. $\mathfrak{M}$) la plus petite (resp. la plus grande) valeur propre de $B_\theta$. Le processus $X$ défini par (1.2) est dit stable ou régulier (resp. instable ou explosif) si $\mathfrak{M}$ est strictement négative (resp. $\mathfrak{m}$ est strictement positive). L'estimateur des moindres carrés $\hat{\theta}$ de $\theta$, défini par

$$\hat{\theta}_t = \left[\int_0^t X_s {X_s}^* ds\right]^{-1} \int_0^t X_s d{X_s}^p, \tag{1.3}$$

a fait l'objet de plusieurs études donnant sa consistance forte et sa normalité asymptotique. Le but de ce travail est d'exploiter les théorèmes limites par moyennisation logarithmique pour les martingales vectorielles en temps continu afin de dégager pour cet estimateur d'autres propriétés asymptotiques. On distingue deux cas d'étude, le cas stable et le cas instable. Dans le premier cas, on applique les résultats relatifs aux martingales associées à une normalisation régulière et, afin d'améliorer les vitesses de convergence, on utilise comme dans le chapitre 2 la méthode de pondération. Dans le cas instable, l'exploitation des théorèmes limites par moyennisation logarithmique établis dans le chapitre 3 pour le cas explosif nous a permis de montrer que l'estimateur $\hat{\theta}$ de $\theta$ vérifie entre autres les propriétés asymptotiques suivantes :

1. Un théorème de la limite centrale presque-sûre

   $$\text{(TLCPS)} \quad \frac{1}{t}\int_0^t ds\, \delta_{\{e^{B_\theta^* s}(\hat{\theta}_s - \theta)\}} \Longrightarrow \mu_\infty \quad p.s.,$$

   où $\mu_\infty$ est la loi de la variable aléatoire $\sigma I_{\infty,2}^{-1/2} G$ avec $G$ désignant un vecteur gaussien standard et indépendant de la v.a $I_{\infty,2}$ donnée par

   $$I_{\infty,2} := \sigma^4 \int_0^{+\infty} e^{-B_\theta s} Z Z^* e^{-B_\theta^* s} ds$$

   et $Z$ désignant le vecteur aléatoire gaussien centré, donné par

   $$Z = \int_0^{+\infty} e^{-B_\theta s} dW_s.$$

2. Une loi forte quadratique

   $$\text{(LFQ)} \quad \frac{1}{t}\int_0^t e^{B_\theta^* s}(\hat{\theta}_s - \theta)(\hat{\theta}_s - \theta)^* e^{B_\theta s}\, ds \longrightarrow \sigma^2 I_{\infty,2}^{-1} \quad p.s., \quad (t \longrightarrow \infty).$$

3. Un théorème de la limite centrale logarithmique

$$\text{(TLCL)} \quad 2t^{-1/2} tr \left\{ \frac{1}{t} \int_0^t e^{B_\theta^* s} (\hat{\theta}_s - \theta)(\hat{\theta}_s - \theta)^* e^{B_\theta s} \, ds - \sigma^2 I_{\infty,2}^{-1} \right\} \Longrightarrow \nu_\infty \quad p.s.,$$

où $\nu_\infty$ est la loi d'une variable aléatoire de la forme $\mathscr{C}^{\frac{1}{2}} G$, $G$ étant un vecteur gaussien standard d-dimensionnel et indépendant de $\mathscr{C}$ avec

$$\mathscr{C} = \sigma^{-12} \mathrm{tr} \left\{ (2\mathrm{tr}(B_\theta))^{-1} I_{\infty,2}^{-2} \left\{ 2 I_{\infty,2} \otimes I_{\infty,2} + 2[(\mathrm{Vect}(I_{\infty,2}))(\mathrm{Vect}(I_{\infty,2}))^*]^{\perp} \right\} I_{\infty,2}^{-2} \right\}.$$

# Bibliographie


[1] B. Bercu. On the convergence of moments in the almost sure central limit theorem for martingales with statistical applications. *Stochastic Process. Appl.*, 111(1) :157–173, 2004.

[2] B. Bercu, P. Cénac, and G. Fayolle. On the almost sure central limit theorem for vector martingales : convergence of moments and statistical applications. *J. Appl. Probab.*, 46(1) :151–169, 2009.

[3] B. Bercu and J. C. Fort. A moment approach for the almost sure central limit theorem for martingales. *Studia Sci. Math. Hungar.*, 45(1) :139–159, 2008.

[4] B. Bercu, Ivan N., and Murad S. T. A multiple stochastic integral criterion for almost sure limit theorems. *arXiv :0904.2094v1 [math.PR] 14 Apr 2009.*

[5] I. Berkes and H. Dehling. Some limit theorems in log density. *Ann. Probab.*, 21(3) :1640–1670, 1993.

[6] G. A. Brosamler. An almost everywhere central limit theorem. *Math. Proc. Cambridge Philos. Soc.*, 104(3) :561–574, 1988.

[7] F. Chaâbane. Version forte du théorème de la limite centrale fonctionnel pour les martingales. *C. R. Acad. Sci. Paris Sér. I Math.*, 323(2) :195–198, 1996.

[8] F. Chaâbane. Invariance principles with logarithmic averaging for continuous local martingales. *Statist. Probab. Lett.*, 59(2) :209–217, 2002.

[9] F. Chaâbane and H. Fathallah. Identification of a stable Gaussian autoregressive process by an averaging method. *J. Appl. Probab. Stat.*, 2(2) :211–226, 2007.

[10] F. Chaâbane and A. Kebaier. Théorèmes limites avec poids pour les martingales vectorielles à temps continu. *ESAIM Probab. Stat.*, 12 :464–491, 2008.

[11] F. Chaâbane and F. Maâouia. Théorèmes limites avec poids pour les martingales vectorielles. *ESAIM Probab. Statist.*, 4 :137–189 (electronic), 2000.

[12] F. Chaâbane, F. Maâouia, and A. Touati. Généralisation du théorème de la limite centrale presque-sûre pour les martingales vectorielles. *C. R. Acad. Sci. Paris Sér. I Math.*, 326(2) :229–232, 1998.

[13] F. Chaâbane and A. Touati. On averaging methods for identification of linear regression models. *C. R. Acad. Sci. Paris Sér. I Math.*, 333(2) :133–138, 2001.

[14] A. Chebchoub and R. Manoubi. Sur le théorème de la limite centrale presque-sûre pour les processus ponctuels. *C. R. Acad. Sci. Paris Sér. I Math.*, 325(1) :83–86, 1997.

[15] H. Fathallah. Propriétés asymptotiques de l'estimateur des moindres carrés d'un processus autorégressif gaussien par une méthode de moyennisation logarithmique. *Prépublication de l'université de Versailles*, 2009.

[16] H. Fathallah and A. Kebaier. Weigthed limit theorems for continuous-time vector martingales with explosive and mixed growth and statistical applications. *Prépublication de l'université de Versailles*, 2009.

[17] M. T. Lacey and W. Philipp. A note on the almost sure central limit theorem. *Statist. Probab. Lett.*, 9(3) :201–205, 1990.

[18] M. A. Lifshits. Almost sure limit theorem for martingales. In *Limit theorems in probability and statistics, Vol. II (Balatonlelle, 1999)*, pages 367–390. János Bolyai Math. Soc., Budapest, 2002.

[19] F. Maâouia. Principes d'invariance par moyennisation logarithmique pour les processus de Markov. *Ann. Probab.*, 29(4) :1859–1902, 2001.

[20] F. Maaouia and A. Touati. Identification of multitype branching processes. *Ann. Statist.*, 33(6) :2655–2694, 2005.

[21] Cénac P. On the convergence of moments in the almost sure central limit theorem for stochastic approximation algorithms. *Prépublication, MAP5*, 2007.

[22] M. Pelletier. An almost sure central limit theorem for stochastic approximation algorithms. *J. Multivariate Anal.*, 71(1) :76–93, 1999.

[23] B. Rodzik and Z. Rychlik. An almost sure central limit theorem for independent random variables. *Ann. Inst. H. Poincaré Probab. Statist.*, 30(1) :1–11, 1994.

[24] P. Schatte. On strong versions of the central limit theorem. *Math. Nachr.*, 137 :249–256, 1988.

[25] P. Schatte. On the central limit theorem with almost sure convergence. *Probab. Math. Statist.*, 11(2) :237–246 (1991), 1990.

[26] A. Touati. Sur les versions fortes du théorème de la limite centrale. *Prépublication de l'université de Marne-La-Vallée, n°* 23, 1995.

# Chapitre 2

# Identification d'un processus autorégressif gaussien stable par une méthode de moyennisation logarithmique

## 2.1 Introduction

Dans ce chapitre, nous proposons une nouvelle approche pour identifier les paramètres d'un processus d'Ornstein-Uhlenbeck (O.U.) unidimensionnel. Plus précisément, pour un mouvement brownien standard réel $B = (B_t,\, t \geq 0)$, on considère le processus d'O.U. $X = (X_t, t \geq 0)$ défini par l'équation différentielle stochastique suivante (E.D.S.) :

$$dX_t = \theta X_t dt + \sigma dB_t, \quad t \geq 0, \tag{2.1}$$

où $\sigma > 0$ et $\theta < 0$ sont des paramètres inconnus, l'état initial $X_0$ étant choisi indépendamment de $B$.

Il s'agit de construire une région de confiance asymptotique du couple $(\theta, \sigma^2)$ sans recours à une méthode de discrétisation de la diffusion $X$. Il est à remarquer que dans différents travaux antérieurs, l'asymptotique de la discrétisation est exploitée pour identifier les coefficients d'une diffusion continue dans un contexte plus général que le nôtre (voir par exemple [1],[3],[4],[5],[6],[7],...). Rappelons aussi que la diffusion $X$ est récurrente, positive et de loi invariante $\mathcal{N}(0, \sigma^2/2|\theta|)$, ce qui nous permet de montrer aisément que l'estimateur du maximum de vraisemblance de $\theta$, défini par

$$\widehat{\theta}_t = \Big( \int_0^t X_s^2 ds \Big)^{-1} \int_0^t X_s dX_s \tag{2.2}$$

est fortement consistant et vérifie

$$\sqrt{t}(\widehat{\theta}_t - \theta) \Longrightarrow \mathcal{N}(0, 2|\theta|),$$

quelle que soit la loi de $X_0$ (« $\Longrightarrow$ » dénote la convergence en loi ou étroite des mesures). En effet, on a

$$\widehat{\theta}_t - \theta = \Big( \sigma \int_0^t X_s dB_s \Big) \Big( \int_0^t X_s^2 ds \Big)^{-1}$$

et la variation quadratique prévisible de la martingale continue $M = (M_t, t \geq 0)$ définie par

$$M_t = \sigma \int_0^t X_s dB_s,$$

vérifiant

$$t^{-1} \langle M \rangle_t = \sigma^2 I_t,$$

avec

$$I_t = \frac{1}{t} \int_0^t X_s^2 ds$$

et quelle que soit la loi de $X_0$, on a

$$I_t \longrightarrow I_\infty := \frac{\sigma^2}{2|\theta|} \quad p.s., \quad (t \longrightarrow \infty).$$

Vu que $\sigma^2 = -2\theta I_\infty$, alors $\widehat{\sigma}_t^2 = -2\widehat{\theta}_t I_t$ est un estimateur fortement consistant de $\sigma^2$. En outre, on a

$$\Big(\sqrt{t}(\widehat{\theta}_t - \theta)\,,\, t(\sigma^2 - \widehat{\sigma}_t^2)\Big) \Longrightarrow \mathcal{N}(0, 2|\theta|) \otimes (\frac{\sigma^2}{2|\theta|}\mathcal{X}^2(1) * \nu), \tag{2.3}$$

où $\nu$ est la loi de la variable aléatoire $-X_0^2$. En effet, la solution de l'E.D.S. (2.1) est donnée par

$$X_t = e^{\theta t}(X_0 + \rho_t),$$

où $\rho = (\rho_t,\, t \geq 0)$ est la martingale continue définie par

$$\rho_t = \sigma \int_0^t e^{-\theta s} dB_s$$

et sa variation quadratique prévisible vérifie

$$e^{2|\theta| t}\langle \rho \rangle_t = I_\infty(1 - e^{-2|\theta| t}) \longrightarrow I_\infty, \quad (t \longrightarrow \infty).$$

D'autre part, la formule d'Itô donne

$$t(\sigma^2 - \widehat{\sigma}_t^2) = X_t^2 - X_0^2. \tag{2.4}$$

On obtient donc la convergence (2.3), puisque

$$\begin{aligned} |t^{-\frac{1}{2}} e^{\theta t}\langle M\,,\,\rho\rangle_t| &= \sigma^2 \Big|\frac{e^{\theta t}}{\sqrt{t}} \int_0^t e^{-\theta s} X_s ds\Big| \\ &\leq \sigma^2 t^{-\frac{1}{2}} \sup_{s \leq t} |X_s| \Big(\frac{e^{|\theta| t} - 1}{|\theta|}\Big) e^{\theta t} \longrightarrow 0 \quad p.s., \quad (t \longrightarrow \infty). \end{aligned}$$

## 2.2 Énoncés des résultats

Soit $\tilde{\theta}_t$ l'estimateur du maximum de vraisemblance pondéré de $\theta$ défini par

$$\tilde{\theta}_t = P_t^{-1} \int_0^t \omega_s X_s dX_s, \tag{2.5}$$

correspondant au poids $(\omega_s)$ donné par

$$\omega_s = (1+s)^{-(\alpha+\gamma)/2} \exp\Big\{\frac{2}{(1-\alpha)}(1+s)^{1-\alpha}\Big\}, \quad \text{avec} \quad s \geq 0, \quad \frac{1}{2} < \alpha < \gamma < 1, \tag{2.6}$$

et $P_t = \displaystyle\int_0^t \omega_s X_s^2 ds$. On note de plus $\bar{\theta}_t = \displaystyle\frac{1}{t}\int_0^t \tilde{\theta}_s ds$ son moyennisé.
Une estimation de la variance $\sigma^2$ peut être obtenue à l'aide de l'estimateur du maximum

de vraisemblance pondéré $\tilde{\theta}_t$ de $\theta$. Plus précisément, on définit $\tilde{\sigma}_t^2$ l'estimateur donné par

$$\tilde{\sigma}_t^2 = -2\tilde{\theta}_t I_t$$

et son moyennisé $\bar{\sigma}_t^2$ donné par

$$\bar{\sigma}_t^2 = \frac{1}{t}\int_0^t \tilde{\sigma}_s^2 ds.$$

**Théorème 2.2.1** *Soit $X = (X_t,\, t \geq 0)$ le processus autorégressif gaussien stable à temps continu défini par l'équation (2.1). Alors l'estimateur du maximum de vraisemblance pondéré $\tilde{\theta}_t$ de $\theta$ donné par la relation (2.5) ainsi que son moyennisé $\bar{\theta}_t$ convergent au sens presque-sûr. De façon précise, on a les propriétés suivantes :*

1. *Consistance forte de $\tilde{\theta}_t$ :*

$$|\tilde{\theta}_t - \theta| = \mathcal{O}\Big(\sqrt{\frac{\log t}{t^\alpha}}\Big) \quad p.s.$$

2. *Consistance forte de $\bar{\theta}_t$ :*

$$|\bar{\theta}_t - \theta| = \mathcal{O}\Big(\sqrt{\frac{\log\log t}{t}}\Big) \quad p.s.$$

*De plus, l'estimateur $\tilde{\sigma}_t^2$ de $\sigma^2$ converge au sens presque-sûr. Plus précisément, on a la propriété suivante :*

3. *Consistance forte de $\tilde{\sigma}_t^2$ :*

$$|\tilde{\sigma}_t^2 - \sigma^2| = \mathcal{O}\Big(\sqrt{\frac{\log t}{t^\alpha}}\Big) \quad p.s.$$

**Théorème 2.2.2** *Soit $X = (X_t,\, t \geq 0)$ le processus autorégressif gaussien stable à temps continu défini par l'équation (2.1). Alors on a les résultats suivants :*

1. *Normalité asymptotique de l'estimateur pondéré $(\tilde{\theta}_t)$ :*

$$t^{\frac{\alpha}{2}}(\tilde{\theta}_t - \theta) \Longrightarrow \mathcal{N}(0, 2|\theta|).$$

2. *Normalité asymptotique de l'estimateur $(\bar{\theta}_t)$ :*

$$\sqrt{t}(\bar{\theta}_t - \theta) \Longrightarrow \mathcal{N}(0, 2|\theta|).$$

3. *Théorème de la limite centrale presque-sûre :*

$$\text{(TLCPS)} \qquad \frac{1-\alpha}{t^{1-\alpha}}\int_1^t \frac{ds}{s^\alpha}\,\delta_{\{s^{\frac{\alpha}{2}}(\tilde{\theta}_s - \theta)\}} \Longrightarrow \mathcal{N}(0, 2|\theta|) \quad p.s.$$

4. *La loi forte quadratique :*

$$\text{(LFQ)} \qquad \frac{1-\alpha}{t^{1-\alpha}} \int_1^t (\tilde{\theta}_s - \theta)^2 ds \longrightarrow 2|\theta| \quad p.s., \quad (t \longrightarrow \infty).$$

**Théorème 2.2.3** *Soit $X = (X_t,\, t \geq 0)$ le processus autorégressif gaussien à temps continu satisfaisant l'équation* (2.1)*. Alors on a les résultats suivants :*

1. *Normalité asymptotique de l'estimateur pondéré $(\tilde{\sigma}_t^2)$ :*

   $t^{\frac{\alpha}{2}}(\tilde{\sigma}_t^2 - \sigma^2) \Longrightarrow \mathcal{N}(0, 2\sigma^4/|\theta|).$
2. *Normalité asymptotique de l'estimateur $(\bar{\sigma}_t^2)$ :*

   $\sqrt{t}(\bar{\sigma}_t^2 - \sigma^2) \Longrightarrow \mathcal{N}(0, 2\sigma^4/|\theta|).$
3. *Indépendance asymptotique du couple $(\bar{\theta}_t, \bar{\sigma}_t^2)$ :*

   $(\sqrt{t}(\bar{\theta}_t - \theta), \sqrt{t}(\bar{\sigma}_t^2 - \sigma^2)) \Longrightarrow \mathcal{N}(0, 2|\theta|) \otimes \mathcal{N}(0, 2\sigma^4/|\theta|).$

## 2.3 Preuves des résultats

On introduit la martingale continue $\tilde{M} = (\tilde{M}_t,\, t \geq 0)$ définie par

$$\tilde{M}_t = \sigma \int_0^t \omega_s X_s dB_s,$$

dont la variation quadratique prévisible $\langle \tilde{M} \rangle = (\langle \tilde{M} \rangle_t, t \geq 0)$ est donnée par

$$\langle \tilde{M} \rangle_t = \sigma^2 \int_0^t \omega_s^2 X_s^2 ds. \tag{2.7}$$

D'après les propriétés (2.1) et (2.5), il vient

$$\tilde{M}_t = P_t(\tilde{\theta}_t - \theta), \tag{2.8}$$

et d'après les propriétés (2.1) et (2.2), on obtient

$$M_t = tI_t(\widehat{\theta}_t - \theta). \tag{2.9}$$

Afin de simplifier les preuves des principaux résultats, nous donnerons quelques propriétés de la pondération $(\omega_t)$ regroupées dans le Lemme 2.3.1, ainsi que les comportements asymptotiques des processus $(\langle \tilde{M} \rangle_t,\, t \geq 0)$ et $(P_t,\, t \geq 0)$ dans le Lemme 2.3.2 ci-dessous.

**Lemme 2.3.1** *Posons* $u_t = \displaystyle\int_0^t \omega_s ds$, $v_t = \Big(\displaystyle\int_0^t \omega_s^2 ds\Big)^{\frac{1}{2}}$ *et* $a_t = v_t^{-1}\dfrac{dv_t}{dt}$. *On a alors*

$P_1)$ $t^{\alpha}\dfrac{\omega_t}{u_t} = 2 + \mathcal{O}(t^{-(1-\alpha)}), \quad (t \longrightarrow \infty).$

$P_2)$ $t^{\alpha}\dfrac{\omega_t^2}{v_t^2} = 4 + \mathcal{O}(t^{-(1-\alpha)}), \quad (t \longrightarrow \infty).$

$P_3)$ $t^{-\frac{\alpha}{2}}\dfrac{u_t}{v_t} = 1 + \mathcal{O}(t^{-(1-\alpha)}), \quad (t \longrightarrow \infty).$

$P_4)$ $t^{\frac{\alpha}{2}} a_t^{\frac{1}{2}} = \sqrt{2} + \mathcal{O}(t^{-(1-\alpha)}), \quad (t \longrightarrow \infty).$

**Lemme 2.3.2** *On suppose que le processus* $X$ *vérifie l'équation (2.1). On a alors*

*i)* $u_t^{-1}P_t = I_\infty + \mathcal{O}\Big(\sqrt{\dfrac{\log\log t}{t^{2\alpha-1}}}\Big) \quad p.s., \quad (t \longrightarrow \infty).$

*ii)* $v_t^{-2}\langle \tilde{M}\rangle_t = \sigma^2 I_\infty + \mathcal{O}\Big(\sqrt{\dfrac{\log\log t}{t^{2\alpha-1}}}\Big) \quad p.s., \quad (t \longrightarrow \infty).$

Les preuves de ces deux lemmes sont données à la fin du chapitre.

### 2.3.1 Preuve du Théorème 2.2.1

D'après la loi du logarithme itéré appliquée à la martingale continue $\tilde{M}$ (voir par exemple [8]), on a

$$\frac{\tilde{M}_t}{v_t} = \mathcal{O}\Big((\log\log v_t)^{\frac{1}{2}}\Big) \quad p.s. \tag{2.10}$$

Vu la relation (2.8), la propriété ($P_2$) du Lemme 2.3.1 et la propriété ii) du Lemme 2.3.2, il vient

$$|\tilde{\theta}_t - \theta| = \mathcal{O}\Big(\Big(\frac{\log t}{t^{\alpha}}\Big)^{\frac{1}{2}}\Big) \quad p.s., \tag{2.11}$$

et par suite la première assertion du théorème.
Par ailleurs, on a

$$t(\bar{\theta}_t - \theta) = \int_0^t (\tilde{\theta}_s - \theta)\, ds.$$

Grâce à (2.8), on obtient pour $\tilde{Z}_t = \tilde{M}_t/v_t$

$$t(\bar{\theta}_t - \theta) = \int_0^t \frac{\tilde{M}_s}{P_s}\, ds = \int_0^t \Big(\frac{u_s}{v_s}\Big)^{-1} (u_s^{-1}P_s)^{-1}\tilde{Z}_s\, ds.$$

En écrivant

$$t(\bar{\theta}_t - \theta) = \int_0^t \left( s^{\frac{\alpha}{2}} \left( \frac{u_s}{v_s} \right)^{-1} - 1 \right) (u_s^{-1} P_s)^{-1} s^{-\frac{\alpha}{2}} \tilde{Z}_s \, ds$$
$$+ I_\infty^{-1} \int_0^t s^{-\frac{\alpha}{2}} \tilde{Z}_s \, ds + \int_0^t \Big( (u_s^{-1} P_s)^{-1} - I_\infty^{-1} \Big) s^{-\frac{\alpha}{2}} \tilde{Z}_s \, ds,$$

on a

$$t(\bar{\theta}_t - \theta) - I_\infty^{-1} \int_0^t s^{-\frac{\alpha}{2}} \tilde{Z}_s \, ds = \int_0^t \delta_s s^{-\frac{\alpha}{2}} \tilde{Z}_s \, ds, \tag{2.12}$$

avec

$$\delta_s = \left( s^{\frac{\alpha}{2}} \left( \frac{u_s}{v_s} \right)^{-1} - 1 \right) (u_s^{-1} P_s)^{-1} + (u_s^{-1} P_s)^{-1} - I_\infty^{-1} \longrightarrow 0, \quad (s \longrightarrow \infty).$$

Par ailleurs, on a

$$d\tilde{Z}_s = -\frac{dv_s}{v_s^2} \tilde{M}_s + \frac{d\tilde{M}_s}{v_s}.$$

Ainsi

$$a_s \tilde{Z}_s ds = -d\tilde{Z}_s + \frac{d\tilde{M}_s}{v_s},$$

avec $\quad a_s = v_s^{-1} \dfrac{dv_s}{ds} = \dfrac{1}{2} \dfrac{d(\log v_s^2)}{ds} > 0$ (la fonction $s \longmapsto v_s^2$ est strictement croissante).
Il vient

$$\int_0^t a_s^{-\frac{1}{2}} \frac{d\tilde{M}_s}{v_s} - \int_0^t a_s^{\frac{1}{2}} \tilde{Z}_s ds = \int_0^t a_s^{-\frac{1}{2}} d\tilde{Z}_s.$$

Grâce à une intégration par parties, on obtient

$$\int_0^t a_s^{-\frac{1}{2}} \frac{d\tilde{M}_s}{v_s} - \int_0^t a_s^{\frac{1}{2}} \tilde{Z}_s ds = a_t^{-\frac{1}{2}} \tilde{Z}_t + \frac{1}{2} \int_0^t \tilde{Z}_s a_s^{-\frac{3}{2}} da_s. \tag{2.13}$$

D'après la relation (2.10), on obtient

$$\tilde{Z}_s = \mathcal{O}(\sqrt{\log s}) \quad p.s. \tag{2.14}$$

La propriété $(P_4)$ implique

$$a_s \sim 2 s^{-\alpha}, \quad (s \longrightarrow \infty). \tag{2.15}$$

En tenant compte de (2.13), (2.14) et (2.15), on obtient

$$\int_0^t a_s^{-\frac{1}{2}} \frac{d\tilde{M}_s}{v_s} - \sqrt{2} \int_0^t s^{-\frac{\alpha}{2}} \tilde{Z}_s ds = \mathcal{O}(\sqrt{t^\alpha \log t}) \quad p.s.$$

Par conséquent, on a

$$\frac{1}{\sqrt{t}}\int_0^t s^{-\frac{\alpha}{2}}\tilde{Z}_s ds = \frac{1}{\sqrt{2}}\frac{L_t}{\sqrt{t}} + \mathcal{O}(\sqrt{t^{\alpha-1}\log t}) \quad p.s., \tag{2.16}$$

où $L = (L_t,\, t \geq 0)$ est la martingale continue définie par

$$L_t = \int_0^t a_s^{-\frac{1}{2}}\frac{d\tilde{M}_s}{v_s}.$$

En combinant (2.12) et (2.16), on obtient

$$\sqrt{t}(\bar{\theta}_t - \theta) - \frac{I_\infty^{-1}}{\sqrt{2}}\frac{L_t}{\sqrt{t}} = \mathcal{O}(\sqrt{t^{\alpha-1}\log t}) \quad p.s. \tag{2.17}$$

En tenant compte du fait que

$$\frac{d\langle\tilde{M}\rangle_s}{v_s^2} = \sigma^2\frac{\omega_s^2}{v_s^2}X_s^2 ds$$

et que la variation quadratique prévisible de la martingale continue $L$ vérifie

$$\langle L\rangle_t \sim \frac{1}{2}\int_0^t s^\alpha\frac{d\langle\tilde{M}\rangle_s}{v_s^2}, \quad (t \longrightarrow \infty),$$

et en utilisant la propriété $(P_2)$, à savoir

$$t^\alpha\frac{\omega_t^2}{v_t^2} = 4 + \mathcal{O}(t^{-(1-\alpha)}), \quad (t \longrightarrow \infty),$$

on montre que

$$\frac{\langle L\rangle_t}{t} \longrightarrow 2\sigma^2 I_\infty \qquad p.s., \quad (t \longrightarrow \infty). \tag{2.18}$$

Ainsi la LLI, appliquée à la martingale continue $L$, donne

$$L_t = \mathcal{O}\Big(\sqrt{t\log\log t}\Big) \quad p.s.$$

La seconde assertion du Théorème 2.2.1 découle de la dernière propriété et de la propriété (2.17). Par ailleurs, on a

$$\begin{aligned}\tilde{\sigma}_t^2 - \sigma^2 &= -2\tilde{\theta}_t I_t + 2\theta I_\infty \\ &= -2(\tilde{\theta}_t - \theta)I_\infty - 2\tilde{\theta}_t(I_t - I_\infty),\end{aligned}$$

donc

$$\tilde{\sigma}_t^2 - \sigma^2 = -2(\tilde{\theta}_t - \theta)I_\infty - 2(\tilde{\theta}_t - \theta)(I_t - I_\infty) - 2\theta(I_t - I_\infty). \tag{2.19}$$

En utilisant la formule d'Itô, on obtient

$$\begin{aligned} X_t^2 &= X_0^2 + 2\theta \int_0^t X_s^2 ds + 2\sigma \int_0^t X_s dB_s + \sigma^2 t \\ &= X_0^2 + 2\theta t I_t + 2M_t - 2\theta t I_\infty, \end{aligned}$$

ce qui implique

$$-\theta(I_t - I_\infty) = \frac{M_t}{t} - \frac{X_t^2 - X_0^2}{2t}. \qquad (2.20)$$

En tenant compte du fait que la variation quadratique prévisible de la martingale continue $M$ vérifie

$$\frac{\langle M \rangle_t}{t} \longrightarrow \sigma^2 I_\infty \quad p.s., \quad (t \longrightarrow \infty),$$

et en appliquant la LLI à la martingale continue $M$, on obtient

$$M_t = \mathcal{O}\Big(\sqrt{t \log\log t}\Big) \quad p.s.$$

Ainsi, en utilisant la dernière propriété et la propriété (2.20), on obtient

$$I_t - I_\infty = \mathcal{O}\Big(\sqrt{\frac{\log\log t}{t}}\Big) \quad p.s. \qquad (2.21)$$

Vu que l'on a

$$|\tilde{\theta}_t - \theta| = \mathcal{O}\Big(\sqrt{\frac{\log t}{t^\alpha}}\Big) \quad p.s.,$$

et grâce aux propriétés (2.19) et (2.21), la dernière assertion du théorème est établie.

### 2.3.2 Preuve du Théorème 2.2.2

1. La relation (2.8), à savoir

$$\tilde{M}_t = P_t(\tilde{\theta}_t - \theta),$$

implique

$$\tilde{\theta}_t - \theta = \left(\frac{u_t}{v_t}\right)^{-1} (u_t^{-1} P_t)^{-1} \tilde{Z}_t.$$

Vu la deuxième assertion du Lemme 2.3.2, d'après le TLC appliqué à la martingale réelle continue $\tilde{M}$, on obtient

$$\tilde{Z}_t \Longrightarrow \mathcal{N}(0, \sigma^2 I_\infty) \quad p.s. \qquad (2.22)$$

Vu la propriété $(P_3)$, à savoir

$$\left(\frac{u_t}{v_t}\right)^{-1} = t^{-\frac{\alpha}{2}} + \mathcal{O}(t^{-1}), \quad (t \longrightarrow \infty), \qquad (2.23)$$

et comme la première assertion du Lemme 2.3.2 donne

$$(u_t^{-1}P_t)^{-1} = I_\infty^{-1} + \mathcal{O}\Big(\sqrt{\frac{\log\log t}{t^{2\alpha-1}}}\Big) \quad p.s., \quad (t \longrightarrow \infty), \tag{2.24}$$

on obtient l'équivalence suivante :

$$t^{\frac{\alpha}{2}}(\tilde{\theta}_t - \theta) \sim I_\infty^{-1}\tilde{Z}_t, \quad (t \longrightarrow \infty). \tag{2.25}$$

La première assertion du théorème découle des relations (2.22), (2.24) et (2.25).

2. Vu la propriété (2.18), le TLC appliqué à la martingale continue réelle $L$ implique

$$\frac{L_t}{\sqrt{t}} \Longrightarrow \mathcal{N}(0, 2\sigma^2 I_\infty) \quad p.s.$$

En tenant compte de la propriété (2.17), on obtient

$$\sqrt{t}(\bar{\theta}_t - \theta) \Longrightarrow \frac{I_\infty^{-1}}{\sqrt{2}}\mathcal{N}(0, 2\sigma^2 I_\infty) \quad p.s.,$$

et parsuite la seconde assertion du Théorème 2.2.2.

3. En appliquant le théorème de la limite centrale presque-sûre pour le couple $(\tilde{M}, v)$ avec $v_t^2 = \int_0^t \omega_s^2 ds$ (voir Théorème 1 dans [2]), on obtient

$$(\log v_t^2)^{-1}\int_1^t \delta_{\{\tilde{M}_s/v_s\}} d(\log v_s^2) \Longrightarrow \mathcal{N}(0, \sigma^2 I_\infty) \quad p.s.$$

Grâce à la propriété $(P_2)$, on obtient l'équivalence suivante :

$$\log v_t^2 \;\sim\; \frac{4}{1-\alpha}t^{1-\alpha}, \quad (t \longrightarrow \infty).$$

Ainsi, pour $\tilde{Z}_s = \dfrac{\tilde{M}_s}{v_s}$, on a

$$\frac{1-\alpha}{t^{1-\alpha}}\int_1^t \delta_{\tilde{Z}_s}\frac{ds}{s^\alpha} \Longrightarrow \mathcal{N}(0, \sigma^2 I_\infty) \quad p.s.$$

Posons, pour une fonction lipschitzienne $\varphi$ continue bornée sur $\mathbb{R}$,

$$\Delta_t = \int_1^t \varphi(\tilde{Z}_s)\frac{ds}{s} - \int_1^t \varphi(I_\infty s^{\frac{\alpha}{2}}(\tilde{\theta}_s - \theta))\frac{ds}{s}.$$

L'équivalence (2.25) implique

$$t^{-(1-\alpha)}|\Delta_t| \;\longrightarrow\; 0 \quad p.s., \quad (t \longrightarrow \infty).$$

Par conséquent, on obtient

$$\frac{1-\alpha}{t^{1-\alpha}}\int_1^t \frac{ds}{s^\alpha}\,\delta_{\{I_\infty s^{\frac{\alpha}{2}}(\tilde{\theta}_s-\theta)\}} \Longrightarrow \mathcal{N}(0,\sigma^2 I_\infty) \quad p.s.$$

Ainsi, la troisième assertion du Théorème 2.2.2 est établie.

4. D'après la loi forte quadratique appliquée à la martingale $\tilde{M}$ normalisée par le processus $v_t^2 = \displaystyle\int_0^t \omega_s^2 ds$ (voir Théorème 3 dans [2]), on obtient

$$(\log v_t^2)^{-1}\int_1^t \frac{\tilde{M}_s^2}{v_s^2}\frac{dv_s^2}{v_s^2} \longrightarrow \sigma^2 I_\infty \quad p.s., \quad (t\longrightarrow\infty).$$

En tenant compte de la propriété $(P_2)$, à savoir

$$t^\alpha \frac{\omega_t^2}{v_t^2} = 4+\mathcal{O}(t^{-(1-\alpha)}), \quad (t\longrightarrow\infty),$$

il vient

$$\frac{1-\alpha}{t^{1-\alpha}}\int_1^t \tilde{Z}_s^2 s^{-\alpha}ds \longrightarrow \sigma^2 I_\infty \quad p.s., \quad (t\longrightarrow\infty). \tag{2.26}$$

La relation (2.8) implique

$$\tilde{M}_t^2 = P_t^2(\tilde{\theta}_t-\theta)^2. \tag{2.27}$$

En utilisant la propriété ii) du Lemme 2.3.2, à savoir

$$v_t^{-2}\langle\tilde{M}\rangle_t = \sigma^2 I_\infty + \mathcal{O}\Big(\sqrt{\frac{\log\log t}{t^{2\alpha-1}}}\Big) \quad p.s., \quad (t\longrightarrow\infty),$$

et la propriété $(P_2)$ du Lemme 2.3.1, on obtient les équivalences suivantes :

$$(u_s^{-1}P_s)^{-2}\sim I_\infty^{-2} \quad \text{et} \quad \left(\frac{u_s}{v_s}\right)^{-2}\sim s^{-\alpha}, \quad (s\longrightarrow\infty).$$

Par suite, on a

$$I_\infty^2(\tilde{\theta}_s-\theta)^2\sim s^{-\alpha}\tilde{Z}_s^2, \quad (s\longrightarrow\infty),$$

et donc

$$\Big|\frac{1-\alpha}{t^{1-\alpha}}\int_1^t \tilde{Z}_s^2 s^{-\alpha}ds - \frac{I_\infty^2(1-\alpha)}{t^{1-\alpha}}\int_1^t(\tilde{\theta}_s-\theta)^2ds\Big| \longrightarrow 0, \quad (t\longrightarrow\infty).$$

En tenant compte de la convergence (2.26), on obtient

$$\frac{1-\alpha}{t^{1-\alpha}}\int_0^t I_\infty^2(\tilde{\theta}_s-\theta)^2ds \longrightarrow \sigma^2 I_\infty \quad p.s., \quad (t\longrightarrow\infty). \tag{2.28}$$

D'où la dernière assertion du théorème. Le Théorème 2.2.2 est établi.

### 2.3.3 Preuve du Théorème 2.2.3

1. Vu la propriété suivante :

$$|\tilde{\theta}_t - \theta| = \mathcal{O}\Big(\sqrt{\frac{\log t}{t^\alpha}}\Big) \quad p.s.,$$

la relation (2.21), à savoir

$$I_t - I_\infty = \mathcal{O}\Big(\sqrt{\frac{\log\log t}{t}}\Big) \quad p.s.,$$

et en tenant compte de la relation (2.19), à savoir

$$\tilde{\sigma}_t^2 - \sigma^2 = -2(\tilde{\theta}_t - \theta)I_\infty - 2(\tilde{\theta}_t - \theta)(I_t - I_\infty) - 2\theta(I_t - I_\infty),$$

il vient

$$\tilde{\sigma}_t^2 - \sigma^2 = -2(\tilde{\theta}_t - \theta)I_\infty + \mathcal{O}\Big(\frac{\log t}{\sqrt{t}}\Big) \quad p.s.$$

Par ailleurs, de la relation (2.8), on en déduit

$$\tilde{\sigma}_t^2 - \sigma^2 = -2I_\infty(u_t^{-1}P_t)^{-1}\Big(\frac{u_t}{v_t}\Big)^{-1}\tilde{Z}_t + \mathcal{O}\Big(\frac{\log t}{\sqrt{t}}\Big) \quad p.s.$$

Par conséquent, les familles de v.a. $\Big(t^{\frac{\alpha}{2}}(\tilde{\sigma}_t^2 - \sigma^2)\Big)_t$ et $(-2\tilde{Z}_t)_t$ ont le même comportement asymptotique en loi. La première assertion du Théorème 2.2.3 découle du fait que la martingale $\tilde{Z}_t$ vérifie le TLC suivant :

$$\tilde{Z}_t \Longrightarrow \mathcal{N}(0, \sigma^2 I_\infty) \quad p.s.$$

2. L'estimateur $\bar{\sigma}_t^2$ vérifie

$$t(\bar{\sigma}_t^2 - \sigma^2) = \int_0^t (\tilde{\sigma}_s^2 - \sigma^2)\, ds.$$

En tenant compte de la relation (2.19), on obtient

$$t(\bar{\sigma}_t^2 - \sigma^2) = -2\int_0^t (\tilde{\theta}_s - \theta)(I_s - I_\infty)\, ds - 2\theta\int_0^t (I_s - I_\infty)\, ds - 2I_\infty t(\bar{\theta}_t - \theta).$$

En posant

$$\bar{I}_t = \frac{1}{t}\int_0^t I_s\, ds,$$

on a alors

$$t(\bar{\sigma}_t^2 - \sigma^2) = -2\int_0^t (\tilde{\theta}_s - \theta)(I_s - I_\infty)\, ds - 2\theta t(\bar{I}_t - I_\infty) - 2I_\infty t(\bar{\theta}_t - \theta).$$

En utilisant le fait que

$$|\tilde{\theta}_t - \theta| = \mathcal{O}\Big(\sqrt{\frac{\log t}{t^\alpha}}\Big) \quad p.s.$$

et

$$I_t - I_\infty = \mathcal{O}\Big(\sqrt{\frac{\log \log t}{t}}\Big) \quad p.s.,$$

on obtient

$$\sqrt{t}(\bar{\sigma}_t^2 - \sigma^2) = -2I_\infty\sqrt{t}(\bar{\theta}_t - \theta) - 2\theta\sqrt{t}(\bar{I}_t - I_\infty) + \mathcal{O}\Big(t^{-\frac{\alpha}{2}}\log t\Big) \quad p.s. \tag{2.29}$$

Par ailleurs, d'après la relation (2.20), on a

$$2\theta t(I_t - I_\infty) = -2M_t + \mathbf{o}(t^\beta) \quad p.s., \quad \text{avec } 0 < \beta < \frac{1}{2},$$

d'où

$$2\theta\sqrt{t}(\bar{I}_t - I_\infty) = -\frac{2}{\sqrt{t}}\int_0^t \frac{M_s}{s}\, ds + \mathbf{o}(1) \quad p.s. \tag{2.30}$$

En insérant (2.17) et (2.30) dans (2.29), on en déduit

$$\sqrt{t}(\bar{\sigma}_t^2 - \sigma^2) = 2\Gamma_t + \mathbf{o}(1) \quad p.s., \tag{2.31}$$

où $\Gamma = (\Gamma_t,\, t \geq 0)$ est le processus défini par

$$\Gamma_t = \frac{1}{\sqrt{t}}\int_0^t \frac{M_s}{s}\, ds - \sqrt{2}\frac{L_t}{\sqrt{t}}.$$

Afin d'étudier le comportement asymptotique du processus $\Gamma$, nous considérons le TLC fonctionnel suivant :

$$\Big(\frac{M_{\lambda t}}{\sqrt{\lambda}},\ 0 \leq t \leq 1\Big) \Longrightarrow \Big(W_t,\ 0 \leq t \leq 1\Big), \quad (\lambda \longrightarrow \infty),$$

où $(W_t)$ est un PAI gaussien de covariance $\sigma^2 I_\infty$. On en déduit que, pour tout $T > 0$, on a la convergence en loi du couple

$$\Big(\int_0^T \frac{M_{\lambda s}}{\sqrt{\lambda}}\frac{ds}{s}\,,\, \frac{M_{\lambda T}}{\sqrt{\lambda}}\Big) \Longrightarrow \Big(\int_0^T \frac{W_s}{s}\, ds\,,\, W_T\Big), \quad (\lambda \longrightarrow \infty). \tag{2.32}$$

En particulier, pour $T = 1$, on observe que

$$\left(\frac{1}{\sqrt{\lambda}}\int_0^\lambda \frac{M_u}{u}\,du\,,\,\frac{M_\lambda}{\sqrt{\lambda}}\right) \Longrightarrow \left(\int_0^1 \frac{W_s}{s}\,ds\,,\,W_1\right), \quad (\lambda \longrightarrow \infty).$$

Grâce à une intégration par parties, on obtient

$$\int_0^1 \frac{W_s}{s}\,ds = -\int_0^1 \log s\,dW_s.$$

En tenant compte de la relation (2.31), on en déduit

$$\sqrt{t}(\bar{\sigma}_t^2 - \sigma^2) \Longrightarrow -2\int_0^1 (1 + \log s) dW_s.$$

combiné avec l'identité

$$\int_0^1 (1 + \log s)^2\,ds = 1$$

et le fait que $(W_t)$ est un PAI gaussien de covariance $\sigma^4/2|\theta|$, la seconde assertion du Théorème 2.2.2 est établie.

3. De la convergence (2.32), on en déduit

$$(\sqrt{t}(\bar{\theta}_t - \theta), \sqrt{t}(\bar{\sigma}_t^2 - \sigma^2)) \Longrightarrow (W_1, -2\int_0^1 (1 + \log s) dW_s).$$

En tenant compte du fait que $(W_t)$ est un PAI gaussien de covariance $\sigma^4/2|\theta|$ et que la matrice de covariance de la limite est donnée par

$$\frac{\sigma^4}{2|\theta|}\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 4 \end{bmatrix},$$

il vient

$$(\sqrt{t}(\bar{\theta}_t - \theta), \sqrt{t}(\bar{\sigma}_t^2 - \sigma^2)) \Longrightarrow \mathcal{N}(0, 2|\theta|) \otimes \mathcal{N}\left(0, 2\frac{\sigma^4}{|\theta|}\right),$$

et donc la dernière assertion du théorème.

Cela achève la preuve du Théorème 2.2.3.

### 2.3.4 Preuves des lemmes

**Preuve du Lemme 2.3.1**

1. D'après l'expression du poids $(\omega_t)$, à savoir

$$\omega_s = (1+s)^{-(\alpha+\gamma)/2} \exp\left\{\frac{2}{(1-\alpha)}(1+s)^{1-\alpha}\right\} \quad \text{avec} \quad \frac{1}{2} < \alpha < \gamma < 1,$$

   il vient

$$u_t = \int_0^t w_s ds = \frac{1}{2}\int_0^t (1+s)^{-(\gamma-\alpha)/2} d\left(\exp\left\{\frac{2}{1-\alpha}(1+s)^{1-\alpha}\right\}\right).$$

   Grâce à une intégration par parties, on obtient

$$u_t = \frac{1}{2}(1+t)^{\alpha}\omega_t + \frac{\gamma-\alpha}{4}\int_0^t (1+s)^{-(1-\alpha)} du_s - \frac{1}{2}\exp\left\{\frac{2}{1-\alpha}\right\},$$

   et on en déduit que

$$2-(1+t)^{\alpha}\frac{\omega_t}{u_t} = -\frac{1}{u_t}\exp\left\{\frac{2}{1-\alpha}\right\} + \frac{\gamma-\alpha}{2u_t}\int_0^t (1+s)^{-(1-\alpha)} w_s\, ds.$$

   Par ailleurs, on a

$$\frac{1}{u_t}\int_0^t (1+s)^{-(1-\alpha)} w_s\, ds = \mathcal{O}((1+t)^{-(1-\alpha)}), \quad (t \longrightarrow \infty).$$

   Par conséquent,

$$2-(1+t)^{\alpha}\frac{\omega_t}{u_t} = \mathcal{O}((1+t)^{-(1-\alpha)}), \quad (t \longrightarrow \infty),$$

   d'où la propriété $(P_1)$.

2. De la même façon que pour $(P_1)$, on montre que

$$v_t^2 = \frac{1}{4}\int_0^t (1+s)^{-\gamma} d\left(\exp\left\{\frac{4}{1-\alpha}(1+s)^{1-\alpha}\right\}\right).$$

   Par une intégration par parties, on obtient

$$v_t^2 = \frac{1}{4}(1+t)^{\alpha}\omega_t^2 + \frac{\gamma}{4}\int_0^t (1+s)^{-(1-\alpha)} dv_s^2 - \frac{1}{4}\exp\left\{\frac{4}{1-\alpha}\right\},$$

   et on en déduit que

$$4-(1+t)^{\alpha}\frac{\omega_t^2}{v_t^2} = -\frac{1}{v_t^2}\exp\left\{\frac{4}{1-\alpha}\right\} + \frac{\gamma}{v_t^2}\int_0^t (1+s)^{-(1-\alpha)} w_s^2 ds.$$

Par ailleurs, on a

$$\frac{1}{v_t^2}\int_0^t (1+s)^{-(1-\alpha)} w_s^2 ds = \mathcal{O}((1+t)^{-(1-\alpha)}), \quad (t \longrightarrow \infty).$$

Par conséquent,

$$4-(1+t)^{\alpha}\frac{\omega_t^2}{v_t^2} = \mathcal{O}((1+t)^{-(1-\alpha)}), \quad (t \longrightarrow \infty),$$

d'où la propriété $(P_2)$.

3. D'après la propriété $(P_2)$, on a

$$t^{\frac{\alpha}{2}}\frac{w_t}{v_t} = 2+\mathcal{O}(t^{-(1-\alpha)}). \tag{2.33}$$

La propriété $(P_3)$, à savoir

$$t^{-\frac{\alpha}{2}}\frac{u_t}{v_t} = 1+\mathcal{O}(t^{-(1-\alpha)}), \quad (t \longrightarrow \infty),$$

découle de la propriété $(P_1)$ et de la relation (2.33).

4. En remarquant que

$$a_t = \frac{1}{2}\frac{d\log v_t^2}{dt} = \frac{1}{2}\frac{w_t^2}{v_t^2}$$

et en utilisant la propriété $(P_2)$, on obtient

$$a_t = 2t^{-\alpha}+\mathcal{O}(t^{-1}).$$

La propriété $(P_4)$, à savoir

$$t^{\frac{\alpha}{2}}a_t^{\frac{1}{2}} = \sqrt{2}+\mathcal{O}(t^{-(1-\alpha)}), \quad (t \longrightarrow \infty),$$

découle directement de la relation suivante :

$$a_t^{\frac{1}{2}} = \sqrt{2}\; t^{-\frac{\alpha}{2}}\{1+\mathcal{O}(t^{-(1-\alpha)})\}^{\frac{1}{2}}.$$

Le Lemme 2.3.1 est donc établi.

**Preuve du Lemme 2.3.2**

1. Vu que $P_t = \int_0^t \omega_s X_s^2 ds$, on obtient

$$P_t = \int_0^t w_s d(sI_s) = \int_0^t w_s I_s ds + \int_0^t s w_s dI_s.$$

Grâce à une intégration par parties, il vient

$$P_t - u_t I_\infty = t w_t (I_t - I_\infty) + \int_0^t w_s (I_s - I_\infty) ds - \int_0^t (I_s - I_\infty) d(s w_s).$$

Par suite, on a la majoration suivante :

$$|u_t^{-1} P_t - I_\infty| \le \sup_{s \le t} |I_s - I_\infty| \Big( 1 + 2t \frac{w_t}{u_t} \Big).$$

En utilisant la propriété $(P_1)$, on obtient

$$|u_t^{-1} P_t - I_\infty| = \sup_{s \le t} |I_s - I_\infty| \Big( 1 + \mathcal{O}(t^{(1-\alpha)}) \Big). \tag{2.34}$$

Par ailleurs, de la propriété (2.21), à savoir

$$I_t - I_\infty = \mathcal{O}\Big( \sqrt{\frac{\log \log t}{t}} \Big) \quad p.s.,$$

on en déduit que

$$|u_t^{-1} P_t - I_\infty| = \mathcal{O}\Big( \sqrt{\frac{\log \log t}{t^{2\alpha - 1}}} \Big) \quad p.s.,$$

d'où la première assertion du lemme.

2. D'après la relation (2.7), à savoir

$$\langle \tilde{M} \rangle_t = \sigma^2 \int_0^t \omega_s^2 X_s^2 ds,$$

il vient

$$\begin{aligned} \langle \tilde{M} \rangle_t &= \sigma^2 \int_0^t \omega_s^2 d(s I_s) \\ &= \sigma^2 \int_0^t \omega_s^2 I_s ds + \sigma^2 \int_0^t s \omega_s^2 d I_s. \end{aligned}$$

On peut alors écrire

$$\langle \tilde{M} \rangle_t = \sigma^2 v_t^2 I_\infty + \sigma^2 \int_0^t \omega_s^2 (I_s - I_\infty) ds + \sigma^2 \int_0^t s \omega_s^2 d I_s.$$

Grâce à une intégration par parties, on obtient

$$\langle \tilde{M} \rangle_t = \sigma^2 v_t^2 I_\infty + \sigma^2 \int_0^t \omega_s^2 (I_s - I_\infty) ds + \sigma^2 t \omega_t^2 (I_t - I_\infty) - \sigma^2 \int_0^t (I_s - I_\infty) d(s \omega_s^2).$$

Par suite, on obtient la majoration suivante :

$$\left| v_t^{-2} \langle \tilde{M} \rangle_t - \sigma^2 I_\infty \right| \leq \sigma^2 \sup_{s \leq t} |I_s - I_\infty| \Big( 1 + 2t \frac{w_t^2}{v_t^2} \Big).$$

La propriété $(P_2)$ implique

$$\left| v_t^{-2} \langle \tilde{M} \rangle_t - \sigma^2 I_\infty \right| \leq \sigma^2 \sup_{s \leq t} |I_s - I_\infty| \Big( 1 + \mathcal{O}(t^{(1-\alpha)}) \Big).$$

En appliquant la propriété (2.21), il vient

$$\left| v_t^{-2} \langle \tilde{M} \rangle_t - \sigma^2 I_\infty \right| = \mathcal{O} \left( \sqrt{\frac{\log \log t}{t^{2\alpha - 1}}} \right) \quad p.s.$$

La seconde assertion du lemme est établie, ce qui achève la preuve du Lemme 2.3.1.

# Bibliographie


[1] P. Brugière. Estimation de la variance d'un processus de diffusion dans le cas multidimensionnel. *C. R. Acad. Sci. Paris Sér. I Math.*, 312(13) :999–1004, 1991.

[2] F. Chaabane. Invariance principles with logarithmic averaging for martingales. *Studia Sci. Math. Hungar.*, 37(1-2) :21–52, 2001.

[3] D. Florens-Zmirou. Estimation de la variance d'une diffusion à partir d'une observation discrétisée. *C. R. Acad. Sci. Paris Sér. I Math.*, 309(3) :195–200, 1989.

[4] D. Florens-Zmirou. On estimating the diffusion coefficient from discrete observations. *J. Appl. Probab.*, 30(4) :790–804, 1993.

[5] V. Genon-Catalot. Maximum contrast estimation for diffusion processes from discrete observations. *Statistics*, 21(1) :99–116, 1990.

[6] M. Kessler. Estimation of an ergodic diffusion from discrete observations. *Scand. J. Statist.*, 24(2) :211–229, 1997.

[7] M. Kessler and A. Rahbek. Identification and inference for multivariate cointegrated and ergodic Gaussian diffusions. *Stat. Inference Stoch. Process.*, 7(2) :137–151, 2004.

[8] D. Revuz and M. Yor. *Continuous martingales and Brownian motion*, volume 293 of *Grundlehren der Mathematischen Wissenschaften [Fundamental Principles of Mathematical Sciences]*. Springer-Verlag, Berlin, second edition, 1994.

# Chapitre 3

# Théorèmes limites pour des martingales vectorielles à croissance explosive et mixte en temps continu et applications statistiques

## 3.1 Introduction

### Motivation

Soit $B = (B_t,\, t \geq 0)$ un mouvement brownien réel standard. Le processus $Y$ défini par $Y_t = e^{-t/2} B_{e^t}$ est un processus d'Ornstein-Uhlenbeck récurrent positif et de mesure invariante la loi gaussienne centrée réduite $G = \mathcal{N}(0,1)$. La traduction des théorèmes limites classiques vérifiés par le processus $Y$ au mouvement brownien $B$ fournit les premiers théorèmes limites par moyennisation logarithmique. En effet, l'une des propriétés les plus classiques, vérifiée par le mouvement brownien $B$, est un théorème limite avec moyennisation logarithmique. Plus précisément, on a la loi forte des grands nombres logarithmique, donnée par

$$(LFL) \qquad \forall f \in L^1(G), \quad (\log t)^{-1} \int_1^t f\left(\frac{B_s}{\sqrt{s}}\right) \frac{ds}{s} \longrightarrow \int f dG \quad p.s.$$

Une conséquence immédiate de la propriété (LFL) est le fameux théorème de la limite centrale presque-sûre

$$(TLCPS) \qquad (\log t)^{-1} \int_1^t \frac{ds}{s} \delta_{\{\frac{B_s}{\sqrt{s}}\}} \Longrightarrow G \quad p.s.$$

(où $\Longrightarrow$ dénote la convergence étroite), établi dans une forme plus générale par Brosamler [2]. Le théorème de la limite centrale presque-sûre ainsi que la détermination des vitesses de convergence de la loi forte quadratique sous-jacente ont mené à une littérature étendue durant la décennie passée. En effet, ces propriétés ont été généralisées aux martingales discrètes unidimensionnelles par Chaâbane [3] et Lifshits [13], puis aux martingales discrètes $d$-dimensionnelles par Chaâbane *et al.* [7] et Bercu [1], ensuite aux martingales continues par Chaâbane [4]. Les résultats de Chaâbane [3, 4] ont été obtenus grâce à une approximation forte de la martingale $M$ par une trajectoire brownienne, alors que les résultats de Chaâbane *et al.* [7] et de Chaâbane et Maaouia [6] ont été obtenus en reprenant la technique de la fonction caractéristique utilisée par Touati [17] pour démontrer une extension du théorème de la limite centrale pour les martingales. Plus récemment, Chaâbane et Kebaier [5] ont étendu ce type de théorème pour des martingales quasi-continues à gauche à normalisation régulière.

Le but de ce travail est de généraliser ces propriétés à des martingales quasi-continues à gauche à normalisation explosive et mixte (régulière et explosive) (voir paragraphe 2). Nous exploitons l'ensemble des résultats obtenus dans le cadre d'applications statistiques (voir paragraphe 4) où nous produisons des vitesses de convergence de type fonctionnel pour le modèle d'Ornstein-Uhlenbeck bivarié, utilisé dernièrement pour modéliser le tissu microvasculaire dans certaines thérapies contre le cancer (voir Favetto et Samson [8]) et en mathématiques financières (voir les récents travaux de

Krämer et Richter [11] et Lo et Wang [14]).

## Préliminaires

On note $\|.\|$ la norme euclidienne sur $\mathbb{R}^d$. Pour une matrice réelle carrée $A$, $A^*$, tr$A$ et $\det(A)$ désignent respectivement la matrice transposée, la trace et le déterminant de la matrice $A$. $\mathcal{I}_d$ dénote la matrice identité $d \times d$. La norme de la matrice $A$ est définie par : $\|A\| = \sqrt{\mathrm{tr}(AA^*)}$. On note Vect$(A)$ le vecteur obtenu en empilant les vecteurs colonnes de la matrice $A$, et on note $[\mathrm{Vect}(A)\mathrm{Vect}(A)^*]^{\perp}$ la matrice par blocs dont le bloc d'indice $1 \leq i, j \leq d$ est $A_j A_i^*$, où $A_1, \ldots, A_d$ sont les vecteurs colonnes de $A$. Le symbole $\otimes$ désigne le produit tensoriel de mesures ou de matrices.

Rappelons que toute martingale locale $M$ admet une décomposition unique en $M^c + M^d$, où $M^c$ est la partie martingale locale continue alors que $M^d$ est une somme compensée de sauts nulle en zéro. La variation quadratique de $M$, notée $[M]$, est le processus défini par

$$[M]_t = \langle M^c \rangle_t + \sum_{0<s\leq t} \Delta M_s \Delta M_s^*,$$

où $\langle M^c \rangle_t$ est l'unique processus croissant continu adapté tel que $MM^* - \langle M^c \rangle_t$ soit une martingale locale nulle en zéro. Le compensateur prévisible du processus $[M]$ est noté par $\langle M \rangle$.

Dans la suite, on considère une martingale quasi-continue à gauche $M = (M_t,\, t \geq 0)$ $d$-dimensionnelle, localement de carré intégrable et définie sur un espace de probabilité filtré $(\Omega, \mathcal{F}, (\mathcal{F})_{t\geq 0}, \mathbb{P})$ (voir Jacod et Shiryaev [10]) et un processus déterministe $V = (V_t,\, t \geq 0)$ à valeurs dans l'ensemble des matrices inversibles. Pour $u \in \mathbb{R}^d$, on définit

$$\phi_t(u) := \exp\left( -\frac{1}{2} u^* \langle M^c \rangle_t u + \int_0^t \int_{\mathbb{R}^d} (\exp\{i\langle u, x\rangle\} - 1 - i\langle u, x\rangle) \nu^M(ds, dx) \right),$$

où $\nu^M$ est la mesure de Lévy des sauts de la martingale $M$. Le théorème de la limite centrale pour les martingales (voir Touati [16]) donné ci-dessous est une version généralisée du TLC utilisant non pas la condition *classique* de Lindeberg mais plutôt une hypothèse portant sur les fonctions caractéristiques valable même dans le cas non gaussien.

**Théorème 3.1.1** *(Théorème limite central généralisé pour des martingales) Soit $M = (M_t,\, t \geq 0)$ une martingale locale $d$-dimensionnelle nulle en zéro et quasi-continue à gauche. Soit $V = (V_t,\, t \geq 0)$ une famille déterministe de matrices inversibles. Soit $\mathcal{Q}$ une probabilité sur l'espace $\mathrm{C}(\mathcal{X}, \mathbb{R}^d)$ des fonctions continues de $\mathcal{X}$ dans $\mathbb{R}^d$ (où $\mathcal{X}$ désigne un espace vectoriel de dimension finie). On suppose que le couple $(M, V)$ vérifie* *l'hypothèse suivante :*

$$(\mathcal{H}) \qquad \begin{cases} \phi_t((V_t^*)^{-1}u) \longrightarrow \phi_\infty(\eta, u) \quad p.s., \quad (t \longrightarrow \infty), \\ \\ \phi_\infty(\eta, u) \;\; \textit{non nulle} \quad p.s., \end{cases}$$

*où $\eta$ désigne une v.a., éventuellement dégénérée à valeurs dans $\mathcal{X}$. Pour $(z, u) \in \mathcal{X} \times \mathbb{R}^d$,*

$$\phi_\infty(z, u) = \int_{\mathbb{R}^d} \exp\{i\langle u, \xi\rangle\}\pi(z, d\xi)$$

*désigne la transformée de Fourier des lois conditionnelles unidimensionnelles $(\pi(x, .), x \in \mathcal{X})$ de la probabilité $\mathcal{Q}$. Alors*

$$(TLCG) \qquad Z_t := V_t^{-1} M_t \Longrightarrow Z_\infty := \Sigma(\eta),$$

*de manière stable, où $(\Sigma(z), z \in \mathcal{X})$ est un processus de loi $\mathcal{Q}$ indépendant de la v.a. $\eta$.*

Sous des hypothèses de régularité pour la normalisation $V$, nous pouvons obtenir des résultats de type TLCPS à partir du TLCG ci-dessus. Une normalisation $V$ est dite *régulière* si elle vérifie la condition $(\mathcal{C}) = \{\mathcal{C}_1, \mathcal{C}_2, \mathcal{C}_3\}$ suivante :

- $(\mathcal{C}_1)$ $t \longmapsto V_t$ est de classe $\mathscr{C}^1$.
- $(\mathcal{C}_2)$ il existe $s_0 \geq 0$ tel que pour tout $t \geq s \geq s_0$, on a $V_s V_s^* \leq V_t V_t^*$ (au sens des matrices réelles symétriques semi-définies positives).
- $(\mathcal{C}_3)$ il existe une fonction $a = (a_t)$ continue sur $\mathbb{R}_+$, décroissante vers 0 à l'infini, telle que
$$A_t = \int_0^t a_s ds \longrightarrow \infty, \quad (t \longrightarrow \infty),$$
et une matrice $U_1$ vérifiant :
$$\begin{cases} a_t^{-1} V_t^{-1} \dfrac{dV_t}{dt} - U_1 = \Delta_{t,1}, \quad \text{avec } \Delta_{t,1} \longrightarrow 0, \quad (t \longrightarrow \infty), \\ \\ U_1 + U_1^* = S_1, \quad \text{où } \; S_1 \; \text{ est une matrice inversible.} \end{cases}$$

Récemment, Chaâbane et Kebaier [5] ont montré, pour une normalisation $V$ de type régulière et dans le cadre d'obtention du TLCG renforcé par certaines hypothèses, que le couple $(M, V)$ vérifie les résultats ci-dessous. Plus précisément, sous les hypothèses $(\mathcal{H})$,

$$(\mathcal{H}_1) \qquad V_t^{-1}\langle M\rangle_t (V_t^*)^{-1} \longrightarrow C \quad p.s., \quad (t \longrightarrow \infty),$$

où $C$ est une matrice aléatoire ou non ; et si de plus la condition $(\mathcal{C}_3)$ est obtenue avec

$$\|\Delta_{t,1}\| = \mathcal{O}(A_t^{-\beta}), \quad (t \to \infty), \quad \text{avec } \beta > 1,$$

ils démontrent un théorème de la limite centrale presque-sûre généralisé

$$(TLCPSG) \qquad (\log(\det V_t^2))^{-1}\int_0^t \delta_{Z_s}\, d(\log(\det V_s^2)) \Longrightarrow \mu_\infty \quad p.s., \quad (t \longrightarrow \infty),$$

où $\mu_\infty$ est la loi de $Z_\infty$.

Si de plus le couple $(M, V)$ vérifie les hypothèses

$$(\mathcal{H}_2) \qquad V_t^{-1}[M]_t(V_t^*)^{-1} \longrightarrow C \quad p.s., \quad (t \longrightarrow \infty),$$

et

$$(\mathcal{H}_3) \qquad C = \int xx^* d\mu_\infty(x),$$

alors ils démontrent une loi forte quadratique

$$(LFQ) \quad (\log(\det V_t^2))^{-1}\int_0^t V_s^{-1}M_sM_s^*(V_s^*)^{-1}d(\log(\det V_s^2)) \longrightarrow C \quad p.s., \quad (t \longrightarrow \infty),$$

et une loi du logarithme

$$(LL) \qquad \|V_t^{-1}M_t\| = \mathbf{o}(\sqrt{\log(\det V_t^2)}) \quad p.s.$$

Notons que les relations LFQ et LL restent vraies, en remplaçant $(\mathcal{H}_2)$ par

$$(\mathcal{H}'_2) \qquad \exists\, p \in [1, 2] \text{ tel que } \quad \int_0^\infty \int_{\mathbb{R}^d} (1+A_s)^{-p}\|V_s^{-1}x\|^{2p}\nu^M(ds, dx) < \infty \quad p.s.$$

Enfin, en renforçant $(\mathcal{H}'_2)$ de la manière suivante :

$$(\mathcal{H}''_2) \qquad \exists\, p \in [1, 2] \text{ tel que } \quad \int_0^\infty \int_{\mathbb{R}^d} (1+A_s)^{-p/2}\|V_s^{-1}x\|^{2p}\nu^M(ds, dx) < \infty \quad p.s.$$

et en supposant que la condition $(\mathcal{C}_3)$ est obtenue avec $\beta = 3/2$, c'est-à-dire :

$$\|\Delta_{t,1}\| = \mathcal{O}(A_t^{-\frac{3}{2}}), \quad (t \to \infty),$$

ils démontrent le théorème de la limite centrale de la loi forte quadratique

$$(TLCL) \qquad (\log(\det V_t^2))^{-1/2}\int_0^t \{U\tilde{D}_s + \tilde{D}_sU^*\}d(\log(\det V_s^2)) \Longrightarrow \nu_\infty,$$

où $\tilde{D}_s = V_s^{-1}(M_sM_s^* - \langle M\rangle_s)(V_s^*)^{-1}$ et $\nu_\infty$ est la loi d'une variable aléatoire de la forme $\mathscr{C}^{\frac{1}{2}}G$, $G$ étant un vecteur gaussien standard d-dimensionnel et indépendant de

$\mathscr{C}$ avec

$$\mathscr{C} = 2C \otimes C + 2[(\mathrm{Vect}(C))(\mathrm{Vect}(C))^*]^{\perp}.$$

**Remarque 3.1.2** *Notons que le TLC classique s'obtient sous l'hypothèse* $(\mathcal{H}_1)$ *et la condition de Lindeberg*

$$(\mathcal{H}') \qquad \forall \delta > 0, \int_{\mathbb{R}^d} \int_0^1 \|V_t^{-1}x\|^2 \mathbf{1}_{\{\|V_t^{-1}x\| > \delta\}}\, \nu^M(ds, dx) \longrightarrow 0 \;\; p.s., \quad (t \longrightarrow \infty),$$

*lesquelles impliquent l'hypothèse* $(\mathcal{H})$ *avec*

$$\eta = C^{1/2} \quad et \quad \Phi_\infty(\eta, u) = \exp\left(-\frac{1}{2}u^* C u\right),$$

*et que les preuves sont plus faciles à mener sous* $(\mathcal{H}')$ *que sous* $(\mathcal{H})$.

Le but de ce chapitre est d'étendre ces résultats au cas explosif, c'est-à-dire à une normalisation $V$ satisfaisant la condition $(\mathcal{C}_3)$ ci-dessus avec $a_t = 1$, et au cas mixte, c'est-à-dire lorsque la martingale $M$ s'écrit $M = (M_1, M_2)$ où $M_1$ désigne une martingale avec une normalisation régulière $V_1$ et $M_2$ une martingale avec une normalisation explosive $V_2$.

## 3.2 Énoncés des résultats

### 3.2.1 Martingales à croissance explosive

Soit $M = (M_t,\, t \geq 0)$ une martingale locale $d$-dimensionnelle nulle en zéro et quasi-continue à gauche. Soit $V = (V_t,\, t \geq 0)$ une famille déterministe de matrices inversibles. Une normalisation $V$ est dite *explosive* si elle vérifie la condition $(\mathcal{C}') = \{\mathcal{C}_1, \mathcal{C}_2, \mathcal{C}'_3\}$ suivante :

- $(\mathcal{C}_1)$ $t \longmapsto V_t$ est de classe $\mathscr{C}^1$.
- $(\mathcal{C}_2)$ il existe $s_0 \geq 0$ tel que pour tout $t \geq s \geq s_0$, on a $V_s V_s^* \leq V_t V_t^*$ (au sens des matrices réelles symétriques semi-définies positives).
- $(\mathcal{C}'_3)$ il existe une matrice $U_2$ vérifiant :

$$\begin{cases} V_t^{-1}\dfrac{dV_t}{dt} - U_2 = \Delta_{t,2}, \quad \text{avec } \Delta_{t,2} \longrightarrow 0, \quad (t \longrightarrow \infty), \\[2ex] U_2 + U_2^* = S_2, \quad \text{où } \; S_2 \; \text{ est une matrice inversible.} \end{cases}$$

Ces conditions sont notamment vérifiées dans le cas où $V_t$ est une normalisation scalaire de type $V_t = v_t I_d$, avec $v_t$ une fonction scalaire donnée par $v_t = c\, e^{bt}$ où $c$ et $b$ sont deux réels.

### Théorème de la limite centrale presque-sûre généralisé

**Théorème 3.2.1** *Soit $M = (M_t,\, t \geq 0)$ une martingale locale d-dimensionnelle nulle en zéro et quasi-continue à gauche. Soit $V = (V_t,\, t \geq 0)$ une famille déterministe de matrices inversibles satisfaisant la condition $(\mathcal{C}')$ et telle que la condition $(\mathcal{C}'_3)$ est obtenue avec*

$$\|\Delta_{t,2}\| = \mathcal{O}(t^{-\beta}), \quad (t \to \infty), \quad \beta > 1.$$

*Si le couple $(M, V)$ satisfait aux hypothèses $(\mathcal{H})$ et $(\mathcal{H}_1)$, alors on a*

$$(TLCPSG) \qquad \mu_t = t^{-1} \int_0^t \delta_{Z_s}\, ds \Longrightarrow \mu_\infty \quad p.s.,$$

*où $\mu_\infty$ est la loi limite de $Z_\infty$.*

### Loi forte quadratique associée au TLCPS

**Théorème 3.2.2** *On se place sous les hypothèses du théorème précédent. Si de plus le couple $(M, V)$ vérifie $(\mathcal{H}_2)$ et $(\mathcal{H}_3)$, alors on a*

$$(LFQ) \qquad t^{-1} \int_0^t V_s^{-1} M_s M_s^* (V_s^*)^{-1} ds \longrightarrow C \quad p.s., \quad (t \longrightarrow \infty),$$

*et*

$$(LL) \qquad \|V_t^{-1} M_t\| = \mathbf{o}(t^{1/2}) \quad p.s.$$

### Vitesses de convergence de la LFQ

**Théorème 3.2.3** *Soit $M = (M_t,\, t \geq 0)$ une martingale locale d-dimensionnelle nulle en zéro et quasi-continue à gauche, telle que $M_0 = 0$. Soit $V = (V_t,\, t \geq 0)$ une famille déterministe de matrices inversibles vérifiant la condition $(\mathcal{C}')$ et telle que la condition $(\mathcal{C}'_3)$ soit obtenue avec $\beta = 3/2$, c'est-à-dire*

$$\|\Delta_{t,2}\| = \mathcal{O}(t^{-\frac{3}{2}}), \quad (t \longrightarrow \infty).$$

*Si le couple $(M, V)$ satisfait aux hypothèses $(\mathcal{H})$, $(\mathcal{H}_1)$, $(\mathcal{H}''_2)$ et $(\mathcal{H}_3)$ avec*

$$(\mathcal{H}''_2) \qquad \exists\, p \in [1, 2] \ \ \text{tel que} \quad \int_0^\infty \int_{\mathbb{R}^d} (1+s)^{-p/2} \|V_s^{-1} x\|^{2p} \nu^M(ds, dx) < \infty \quad p.s.,$$

*alors on a*

$$(TLCL) \qquad t^{-1/2}\int_0^t \{U_2\tilde{D}_s + \tilde{D}_s U_2^*\}ds \Longrightarrow \nu_\infty, \quad (t \longrightarrow \infty),$$

*où* $\tilde{D}_s = V_s^{-1}(M_sM_s^* - \langle M\rangle_s)(V_s^*)^{-1}$ *et* $\nu_\infty$ *est la loi d'une variable aléatoire de la forme* $\mathscr{C}^{\frac{1}{2}}G$*,* $G$ *étant un vecteur gaussien standard d-dimensionnel et indépendant de* $\mathscr{C}$ *avec*

$$\mathscr{C} = (\mathrm{tr}(S_2))^{-1}\{2C \otimes C + 2[(\mathrm{Vect}(C))(\mathrm{Vect}(C))^*]^\perp\}.$$

### 3.2.2 Martingales à croissance mixte

On dit qu'une normalisation $V = (V_t, t \geq 0) \in \mathbb{R}^{d\times d}$ est *mixte* si elle est de la forme $V = \mathrm{Diag}(V_1, V_2)$ où $V_1$ (resp. $V_2$) est une famille déterministe de matrices inversibles de $\mathbb{R}^{d_1\times d_1}$(resp. $\mathbb{R}^{d_2\times d_2}$) satisfaisant la condition de croissance régulière $(\mathcal{C})$ (resp. la condition de croissance explosive $(\mathcal{C}')$). Dans tout ce paragraphe, on désigne par $M = (M_1, M_2)$ une martingale locale $d$-dimensionnelle, quasi-continue à gauche et nulle en zéro, avec $M_1 \in \mathbb{R}^{d_1}$ et $M_2 \in \mathbb{R}^{d_2}$ où $d = d_1 + d_2$, et on pose $Z_t := V_t^{-1}M_t$.

#### Théorème de la limite centrale presque-sûre généralisé

**Théorème 3.2.4** *Soit* $M$ *une martingale locale, d-dimensionnelle, nulle en zéro et quasi-continue à gauche. Soit* $V$ *une normalisation mixte de matrices inversibles avec*

$$\|\Delta_{t,1}\| = \mathcal{O}(A_t^{-\beta}) \quad et \quad \|\Delta_{t,2}\| = \mathcal{O}(t^{-\beta}), \quad (t \to \infty), \quad où\ \beta > 1.$$

*Si le couple (M,V) vérifie les hypothèses* $(\mathcal{H})$ *et* $(\mathcal{H}_1)$ *avec* $C = \mathrm{Diag}(C_1, C_2)$ *une matrice aléatoire ou non, où* $C_k \in \mathbb{R}^{d_k\times d_k}$*,* $k \in \{1, 2\}$*,*
*alors les mesures aléatoires* $\mu_t = A_t^{-1}\int_0^t \delta_{Z_s}\, dA_s$ *vérifient la version généralisée du TLCPS suivante :*

$$(TLCPSG) \qquad \mu_t \Longrightarrow \mu_\infty \quad p.s., \quad (t \longrightarrow \infty),$$

*où* $A_t$ *est la fonction définie dans la condition* $(\mathcal{C}_3)$*.*

#### Loi forte quadratique associée au TLCPS

**Théorème 3.2.5** *On se place sous les hypothèses du théorème précédent. Si le couple (M,V) vérifie de plus les hypothèses* $(\mathcal{H}_2)$ *et* $(\mathcal{H}_3)$ *et si on renforce la condition* $(\mathcal{C})$ *par*

$$(\mathcal{C}_4)\ \exists\, \alpha \in ]0,1]\ tel\ que\ \frac{ta_t}{A_t} \longrightarrow 1-\alpha \quad et \quad \frac{ta_t'}{a_t} \longrightarrow -\alpha, \quad (t \longrightarrow \infty),$$

*alors on a*

$$(LFQ) \qquad A_t^{-1}\int_0^t V_s^{-1}M_sM_s^*(V_s^*)^{-1}dA_s \longrightarrow C \quad p.s., \quad (t\longrightarrow\infty).$$

**Remarque 3.2.6** *1. Le résultat reste vrai en remplaçant l'hypothèse* $(\mathcal{H}_2)$ *par*

$$(\tilde{\mathcal{H}'}_2) \qquad \exists\, p\in[1,2] \ \ \textit{tel que} \ \ \int_0^\infty\int_{\mathbb{R}^d}\|(\tilde{A}_sV_s)^{-1}x\|^{2p}\nu^M(ds,dx)<\infty \quad p.s.,$$

*avec* $\tilde{A}_s = \mathrm{Diag}((1+A_s)\mathcal{I}_{d_1},(1+s)\mathcal{I}_{d_2})$, *laquelle implique*

$$\int_0^t V_{1,s}^{-1}(d[M_1]_s - d\langle M_1\rangle_s)(V_{1,s}^*)^{-1} = \mathbf{o}(A_t) \quad p.s.$$

*et*

$$\int_0^t V_{2,s}^{-1}(d[M_2]_s - d\langle M_2\rangle_s)(V_{2,s}^*)^{-1} = \mathbf{o}(t) \quad p.s.$$

*2. Notons que* $(\mathcal{H}_3)$ *est automatiquement vérifiée sous les hypothèses* $(\mathcal{H}')$ *et* $(\mathcal{H}_1)$*, car dans ce cas* $Z_\infty = C^{1/2}G_d$ *où* $G_d$ *est une variable d-dimensionnelle standard gaussienne indépendante de* $C$*.*

## TLC de la LFQ

Afin d'obtenir un TLC précisant la vitesse de convergence en loi de la LFQ établie ci-dessus, on renforce l'hypothèse $(\tilde{\mathcal{H}'}_2)$ de la façon suivante :

$$(\tilde{\mathcal{H}''}_2) \qquad \exists\, p\in[1,2] \ \text{tel que} \ \ \int_0^\infty\int_{\mathbb{R}^d}\|(\tilde{A}_s^{1/2}V_s)^{-1}x\|^{2p}\nu^M(ds,dx)<\infty \quad p.s.$$

**Remarque 3.2.7** *Notons que sous* $(\tilde{\mathcal{H}''}_2)$*, on a*

$$\int_0^t V_{1,s}^{-1}(d[M_1]_s - d\langle M_1\rangle_s)(V_{1,s}^*)^{-1} = \mathbf{o}(A_t^{1/2}) \quad p.s.$$

*et*

$$\int_0^t V_{2,s}^{-1}(d[M_2]_s - d\langle M_2\rangle_s)(V_{2,s}^*)^{-1} = \mathbf{o}(t^{1/2}) \quad p.s.$$

**Théorème 3.2.8** *Soit* $M$ *une martingale locale, d-dimensionnelle, nulle en zéro et quasi-continue à gauche. Soit* $V$ *une normalisation mixte de matrices inversibles. On suppose que la condition* $(\mathcal{C})$ *est renforcée par* $(\mathcal{C}_4)$ *et que*

$$\|\Delta_{t,1}\| = \mathcal{O}(A_t^{-3/2}) \quad et \quad \|\Delta_{t,2}\| = \mathcal{O}(t^{-3/2}), \quad (t\to\infty).$$

*Si le couple (M,V) vérifie les hypothèses* $(\mathcal{H})$, $(\mathcal{H}_1)$, $(\tilde{\mathcal{H}''}_2)$ *et* $(\mathcal{H}_3)$*, alors on a*

$$tr\left\{t^{-1/2}\int_0^t \{V_s^{-1}(M_sM_s^* - \langle M\rangle_s)(V_s^*)^{-1}\}V_s^{-1}dV_s\right\} \Longrightarrow \sqrt{tr\{\tilde{C}_2 \otimes C_2\}}\, G,$$

*où* $\tilde{C}_2 = U_2C_2 + C_2U_2^*$.

Dans la suite, on suppose que la normalisation mixte $V = \mathrm{Diag}(V_1, V_2)$ est telle que $V_1$ est de type scalaire, à savoir $V_{1,t} = v_t\mathcal{I}_{d_1}$.

**Théorème 3.2.9** *Soit $M$ une martingale locale, d-dimensionnelle, nulle en 0 et quasi-continue à gauche. Soit $V$ une normalisation mixte de matrices inversibles vérifiant de plus*

$$v_t^{-1}\frac{dv_t}{dt} = r^2t^{-\alpha} + \mathbf{o}(t^{-(1+\alpha)}) \quad \textit{avec } r > 0 \textit{ et } \alpha \in [3/4, 1[,$$

*et*

$$\|\Delta_{t,2}\| = \mathcal{O}(t^{-\beta}), \quad (t \to \infty), \quad \textit{avec } \beta > 1.$$

*Si le couple $(M,V)$ vérifie les hypothèses $(\mathcal{H})$, $(\mathcal{H}_1)$, $(\mathcal{H}''_2)$ et $(\mathcal{H}_3)$, alors on a*

$$tr\left\{t^{-(1-\alpha)/2}\int_1^t s^{-\alpha}V_s^{-1}(M_sM_s^* - \langle M\rangle_s)(V_s^*)^{-1}\tilde{S}\, ds\right\} \Longrightarrow \frac{\sqrt{2}}{r\sqrt{1-\alpha}}\, tr\{C_1\}\, G,$$

*où* $\tilde{S} = \mathrm{Diag}(\mathcal{I}_{d_1}, S_2)$.

**Remarque 3.2.10** *Le premier TLC associé à la LFQ (Théorème 2.2.3) découle de l'application des TLC de la LFQ associés aux deux martingales $M_1$ et $M_2$. Ainsi, la normalisation exponentielle tue la partie régulière. La covariance de la limite s'exprime donc uniquement en fonction de la covariance limite associée à $M_2$. Dans le second TLC (Théorème 2.2.4), on change la pondération, et de ce fait, le résultat obtenu s'exprime en fonction de la covariance limite associée à $M_1$.*

## 3.3 Application statistique : modèle d'Ornstein-Uhlenbeck bivarié

Cette application concerne le modèle d'Ornstein-Uhlenbeck bidimensionnel. Ce modèle, plus connu sous le nom de modèle d'Ornstein-Uhlenbeck bivarié, est souvent utilisé, notamment en mathématiques financières (voir par exemple Lo et Wang [14] et Krämer et Richter [11]), mais aussi en biologie où il a permis de modéliser le tissu microvasculaire dans certaines thérapies contre le cancer (voir Favetto et Samson [8]). Ainsi, les énoncés ci-dessous viennent compléter les résultats d'estimation des paramètres de ce modèle établis dans [8] et [11].

Soit $Z = \{\Omega,\, \mathcal{F},\, (P_z,\, z \in \mathbb{R}^2),\, F = (\mathcal{F}_t,\, t \geq 0),\, (Z_t,\, t \geq 0)\}$ une version canonique de la diffusion sur $\mathbb{R}^2$, solution du système différentiel stochastique suivant :

$$\left\{ \begin{array}{ll} dX_t = \theta_1 X_t dt + \theta_2 Y_t dt + dB_t, & X_0 = x, \\ \\ dY_t = \theta_3 Y_t dt + dW_t, & Y_0 = y, \end{array} \right. \tag{3.1}$$

où $\theta = (\theta_1, \theta_2, \theta_3) \in \mathbb{R}^3$ avec $0 < \theta_3 < \theta_1$, $F$ est la filtration naturelle de $Z_t = (X_t, Y_t)$, $P_z$ est la loi de $Z$ partant de $z = (x, y)$ et $\Gamma = (B, W)$ est un $(F, P_z)$ mouvement brownien plan nul en 0.
En posant $A(\theta) = \begin{pmatrix} \theta_1 & \theta_2 \\ 0 & \theta_3 \end{pmatrix}$, le système (3.1) s'écrit sous la forme vectorielle

$$dZ_t = A(\theta) Z_t dt + d\Gamma_t; t \geq 0, \quad Z_0 = z. \tag{3.2}$$

On notera $P_{\theta,z}$ la loi de $Z$ partant de $z$, pour bien marquer sa dépendance en fonction de $\theta$, et $P_{0,z}$ la loi du mouvement brownien $\Gamma$. Notons $P^t_{\theta,z}$ et $P^t_{0,z}$ les restrictions de $P_{\theta,z}$ et $P_{0,z}$ à la tribu $\mathcal{F}_t$. D'après le théorème de Cameron-Martin- Girsanov (voir [15]), on a

$$\frac{dP^t_{\theta,z}}{dP^t_{0,z}} = \exp \mathcal{V}_t(\theta),$$

où

$$\mathcal{V}_t(\theta) = \int_0^t (\theta_1 X_s + \theta_2 Y_s) dX_s + \theta_3 \int_0^t Y_s dY_s - \frac{1}{2} \int_0^t (\theta_1 X_s + \theta_2 Y_s)^2 ds - \frac{\theta_3^2}{2} \int_0^t Y_s^2 ds.$$

Soit $D^{(1)}\mathcal{V}_t(\theta)$ la dérivée première de $\mathcal{V}_t(\theta)$ par rapport à $\theta$. On a

$$D^{(1)}\mathcal{V}_t(\theta) = \begin{pmatrix} \int_0^t X_s dX_s - \theta_1 \int_0^t X_s^2 ds - \theta_2 \int_0^t X_s Y_s ds \\ \int_0^t Y_s dX_s - \theta_1 \int_0^t X_s Y_s ds - \theta_2 \int_0^t Y_s^2 ds \\ \int_0^t Y_s dY_s - \theta_3 \int_0^t Y_s^2 ds \end{pmatrix}.$$

L'estimateur du maximum de vraisemblance $\hat{\theta}$ de $\theta$ est une solution de l'équation $D^{(1)}\mathcal{V}_t(\theta) = 0$, vérifiant la relation matricielle suivante :

$$M_t = \langle M \rangle_t (\hat{\theta}_t - \theta), \tag{3.3}$$

où $M_t$ est une $(F, P_{\theta,z})$ martingale définie par

$$M_t = \left( \int_0^t X_s dB_s, \int_0^t Y_s dB_s, \int_0^t Y_s dW_s \right),$$

dont la variation quadratique prévisible est donnée par

$$\langle M\rangle_t = \begin{pmatrix} \int_0^t X_s^2 ds & \int_0^t X_s Y_s ds & 0 \\ \int_0^t X_s Y_s ds & \int_0^t Y_s^2 ds & 0 \\ 0 & 0 & \int_0^t Y_s^2 ds \end{pmatrix}.$$

Dans [16], Touati a déterminé le comportement asymptotique du crochet de $M_t$, à savoir

$$I_t := V_t^{-1}\langle M\rangle_t (V_t^*)^{-1} \longrightarrow I_\infty \quad p.s., \quad (t \longrightarrow \infty),$$

où

$$V_t = \begin{pmatrix} e^{t\theta_1} & 0 & 0 \\ 0 & e^{t\theta_3} & 0 \\ 0 & 0 & e^{t\theta_3} \end{pmatrix}$$

et

$$I_\infty = \begin{pmatrix} \frac{1}{2\theta_1} X^2(\theta) & \frac{1}{\theta_1+\theta_3} X(\theta)Y(\theta) & 0 \\ \frac{1}{\theta_1+\theta_3} X(\theta)Y(\theta) & \frac{1}{2\theta_1} Y^2(\theta) & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2\theta_1} Y^2(\theta) \end{pmatrix}.$$

Par conséquent, on a $I_t V_t(\hat{\theta}_t - \theta) \Longrightarrow \mathcal{N}(0, I_\infty)$. Comme $I_\infty$ est inversible, le TLC précédent s'écrit aussi

$$(TLC) \qquad V_t(\hat{\theta}_t - \theta) \Longrightarrow \mathcal{N}\left(0, I_\infty^{-1}\right).$$

**Vitesses de convergence pour des fonctionnelles de l'estimateur $\hat{\theta}$ de $\theta$ :**

La normalisation $V_t$ vérifie la condition $(\mathcal{C}')$ avec $U_2 = \mathrm{Diag}(\theta_1, \theta_3, \theta_3)$ et $\Delta_{t,2} = 0$. Le Théorème 3.2.1, appliqué au couple $(M, V)$ défini ci-dessus, permet de déduire que l'estimateur $\hat{\theta}$ de $\theta$ vérifie les propriétés asymptotiques données par la proposition suivante :

**Proposition 3.3.1** *L'estimateur $\hat{\theta}$ de $\theta$ vérifie*

1. $(TLCPS)$ $$t^{-1}\int_0^t \delta_{\{I_s V_s(\hat{\theta}_s - \theta)\}} ds \Longrightarrow \mathcal{N}_{3\times 3}(0, I_\infty) \quad p.s.$$
2. $(LFQ)$ $$t^{-1}\int_0^t I_s V_s(\widehat{\theta}_s - \theta)(\widehat{\theta}_s - \theta)^* V_s^* I_s^* ds \longrightarrow I_\infty \quad p.s., \quad (t \longrightarrow \infty).$$

   *Pour* $\tilde{D}_s = I_s V_s(\widehat{\theta}_s - \theta)(\widehat{\theta}_s - \theta)^* V_s^* I_s^* - I_s$, *on a*

*3.* $(TLCL)\quad t^{-1/2}\displaystyle\int_0^t (U_2\tilde{D}_s + \tilde{D}_s U_2)\, ds \Longrightarrow \nu_\infty,$

*où $\nu_\infty$ est la loi d'une variable aléatoire de la forme $\mathscr{C}^{\frac{1}{2}}G$, $G$ étant un vecteur gaussien standard d-dimensionnel et indépendant de $\mathscr{C}$ avec*

$$\mathscr{C} = (2\theta_1 + 4\theta_3)^{-1}\{2I_\infty \otimes I_\infty + 2[(\mathrm{Vect}(I_\infty))(\mathrm{Vect}(I_\infty))^*]^\perp\}.$$

## 3.4 Preuves des résultats

### 3.4.1 Martingales à croissance explosive

Le lemme technique suivant, utile pour la suite des preuves, donne une équivalence de $\log(\det V_t^2))$.

**Lemme 3.4.1** *Sous la condition $(\mathcal{C'}_3)$, on obtient l'équivalence suivante :*

$$\log(\det V_t^2)) \sim \mathrm{tr}(S_2)t, \quad (t \longrightarrow \infty).$$

**Preuve :**

Notons que la différentielle de la fonction $X \longmapsto \det X$, où $X$ est une matrice inversible, est donnée par

$$d(\det X) = \det X\, tr\{X^{-1}dX\}.$$

Alors, pour $t \geq 0$, on a

$$d(\log\det V_t^2) = tr\left\{(V_tV_t^*)^{-1}d(V_tV_t^*)\right\}.$$

En supposant que $V_0 = I_d$, on obtient

$$\begin{aligned} \log\det V_t^2 &= \int_0^t tr\left\{(V_sV_s^*)^{-1}\frac{d}{ds}(V_sV_s^*)\right\} ds \\ &= 2\int_0^t tr\left\{V_s^{-1}\frac{dV_s}{ds}\right\} ds. \end{aligned}$$

Vu l'hypothèse $(\mathcal{C'}_3)$, on obtient

$$\begin{aligned} \log\det V_t^2 &= 2\int_0^t tr\left\{U_2 + \Delta_{s,2}\right\} ds \\ &= 2t\, tr\left\{U_2\right\} + \mathbf{o}(t), \quad (t \longrightarrow \infty), \end{aligned}$$

ce qui implique

$$\frac{\log\det V_t^2}{t} - 2tr\{U_2\} \longrightarrow 0, \quad (t \longrightarrow \infty).$$

Par conséquent, on obtient

$$\frac{\log\det V_t^2}{2t\,tr\{U_2\}} = \frac{\log\det V_t^2}{t\,tr\{S_2\}} \longrightarrow 1, \quad (t \longrightarrow \infty),$$

d'où le résultat du Lemme 3.4.1.

## Preuve du théorème 3.2.1

Pour montrer le résultat annoncé, il suffit de montrer que pour $u \in \mathbb{R}^d$, on a

$$(\log(\det V_T^2))^{-1} \int_0^T \exp\{i\langle u, Z_t\rangle\} d\log(\det V_t^2) \longrightarrow \phi_\infty(\eta, u), \quad (T \longrightarrow \infty),$$

où $\phi_\infty(\eta, u)$ est la fonction caractéristique associée à la mesure limite $\mu_\infty$, loi limite de $Z_\infty$.

En vue de simplifier la preuve, on étudiera le comportement asymptotique de la fonction caractéristique de la mesure $\mu_T$ donnée par

$$\psi_T(u) = (\log(\det V_T^2))^{-1} \int_0^T \exp\{i\langle u, Z_t\rangle\} d\log(\det V_t^2).$$

**Comportement asymptotique de** $(\psi_T)$

Posons, pour $u \in \mathbb{R}^d$,

$$\lambda_T(u) = \psi_T(u) - \alpha_T(u), \tag{3.4}$$

avec

$$\alpha_T(u) = T^{-1} \int_0^T \exp\{i\langle u, Z_t\rangle\} dt.$$

On décompose l'expression de $(\lambda_T)$ comme suit :

$$\lambda_T(u) = \lambda_T^1(u) + \lambda_T^2(u),$$

où

$$\lambda_T^1(u) = (\log(\det V_T^2))^{-1} \int_0^T \exp\{i\langle u, Z_t\rangle\} d(\log\det V_t^2 - \mathrm{tr}(S_2)t)$$

et

$$\lambda_T^2(u) = \left(\mathrm{tr}(S_2)(\log(\det V_T^2))^{-1} - T^{-1}\right) \int_0^T \exp\{i\langle u, Z_t\rangle\} dt.$$

Vu que $(\lambda_T^1)$ et $(\lambda_T^2)$ sont majorés en norme par la quantité $1-\dfrac{\mathrm{tr}(S_2)T}{\log(\det V_T^2)}$, alors en utilisant le Lemme 3.4.1, on obtient

$$\lambda_T^1 \longrightarrow 0 \quad \text{et} \quad \lambda_T^2 \longrightarrow 0, \quad (T\longrightarrow\infty),$$

et on en déduit

$$\lambda_T \longrightarrow 0, \quad (T\longrightarrow\infty).$$

Enfin, d'après la relation (3.4), on a l'équivalence suivante :

$$\psi_T \sim \alpha_T, \quad (T\longrightarrow\infty). \tag{3.5}$$

En tenant compte de l'équivalence (3.5), pour montrer le résultat du Théorème 3.2.1, il suffit de prouver que pour $u\in\mathbb{R}^d$, on a

$$\alpha_T(u) \longrightarrow \ \phi_\infty(\eta,u), \quad (T\longrightarrow\infty). \tag{3.6}$$

Pour ce faire, on introduit le processus $(L_t, t\geq 0)$ défini par

$$L_t(u) = (\phi_t(u))^{-1}\exp i\langle u, M_t\rangle \text{ pour } u\in\mathbb{R}^d, \tag{3.7}$$

où $\phi_t$ est la fonction caractéristique définie par

$$\phi_t(u) = \exp\left(-\frac{1}{2}u^*\langle M^c\rangle_t u + \int_0^t\int_{\mathbb{R}^d}(\exp\{i\langle u,x\rangle\} - 1 - i\langle u,x\rangle)\nu^M(ds,dx)\right).$$

Notons que le processus $(L_t,\, t\geq 0)$ est une martingale locale complexe puisque $(\phi_t,\, t\geq 0)$ est un processus continu (voir [9]). De plus, on a

$$\begin{aligned}|L_t(u)| &= |\phi_t(u)|^{-1}\\ &= \exp\left(\frac{1}{2}u^*\langle M^c\rangle_t u + \int_0^t\int_{\mathbb{R}^d}(1-\cos\langle u,x\rangle)\,\nu^M(ds,dx)\right).\end{aligned}$$

Or, pour tout $x\in\mathbb{R}$, on a $1-\cos x\leq x^2/2$, d'où

$$|L_t(u)| \leq \exp\left(\frac{1}{2}u^*\langle M^c\rangle_t u\right)\exp\left(\frac{1}{2}\int_0^t\int_{\mathbb{R}^d}\langle u,x\rangle^2\nu^M(ds,dx)\right).$$

D'après l'inégalité de Cauchy-Schwarz, il vient

$$|L_t(u)| \leq \exp\left(\frac{1}{2}u^*\left\{\langle M^c\rangle_t + \int_0^t\int_{\mathbb{R}^d}\langle x,x\rangle\nu^M(ds,dx)\right\}u\right),$$

et par suite on en déduit que

$$|L_t(u)| \leq \exp\frac{1}{2}u^*\langle M\rangle_t u. \tag{3.8}$$

Par ailleurs, la relation (3.7) s'écrit

$$L_t((V_t^*)^{-1}u) = \big(\phi_t((V_t^*)^{-1}u)\big)^{-1} \exp i\langle u, Z_t\rangle. \qquad (3.9)$$

En tenant compte de (3.9), pour montrer (3.6), il suffit de prouver la convergence suivante :

$$T^{-1}\int_0^T L_t((V_t^*)^{-1}u)\phi_t((V_t^*)^{-1}u)dt \longrightarrow \phi_\infty(\eta, u), \quad (T \longrightarrow \infty). \qquad (3.10)$$

Pour ce faire, on introduit le temps d'arrêt $T_r$ défini par

$$T_r := \inf\{T_{r,b}\,;\,T_{r,c}^u\},$$

où

$$T_{r,b} := \begin{cases} \inf\{t \le r \textit{ tel que} \quad \mathrm{tr}(V_r^{-1}\langle M\rangle_t(V_r^*)^{-1}) > b\} & \text{si } E_{r,b} \text{ est réalisé,} \\ r & \text{sinon,} \end{cases}$$

et

$$T_{r,c}^u := \begin{cases} \inf\{t \le r \textit{ tel que} \quad |\phi_t((V_r^*)^{-1}u)|^{-1} > c\} & \text{si } E_{r,c}^u \text{ est réalisé,} \\ r & \text{sinon,} \end{cases}$$

où les événements $E_{r,b}$ *et* $E_{r,c}^u$ sont définis comme suit :

$$E_{r,b} = \{\mathrm{tr}(V_r^{-1}\langle M\rangle_r(V_r^*)^{-1}) > b\}$$

et pour $u \in \mathbb{R}^d$ fixé,

$$E_{r,c}^u = \{|\phi_r((V_r^*)^{-1}u)|^{-1} > c\},$$

où $b > 0$ (resp. $c > 0$) est un point de continuité de la variable aléatoire $\mathrm{tr}(C)$ (resp. un point de continuité de la variable aléatoire $|\phi_\infty(\eta, u)|^{-1}$ ).
Posons

$$\tilde{L}_t(u) = L_{t\wedge T_t}((V_t^*)^{-1}u).$$

D'après l'inégalité (3.8), le processus $\left(\tilde{L}_t(u),\, t \ge 0\right)$ est une martingale locale complexe vérifiant pour tout $u \in \mathbb{R}^d$

$$\begin{aligned} |\tilde{L}_t(u)| &\le \exp\frac{1}{2}u^*V_t^{-1}\langle M\rangle_{s_t}(V_t^*)^{-1}u, \quad \text{où } s_t = t\wedge T_t \\ &\le \exp\frac{1}{2}\|u\|^2 tr\left\{V_t^{-1}\langle M\rangle_{s_t}(V_t^*)^{-1}\right\}. \end{aligned}$$

Comme $s_t \leq T_t$, on a
$$tr\left\{V_t^{-1}\langle M\rangle_{s_t}(V_t^*)^{-1}\right\} < b$$
et par suite, pour tout $u \in \mathbb{R}^d$, il vient
$$|\tilde{L}_t(u)| \leq \exp\frac{1}{2}\|u\|^2 b. \tag{3.11}$$
Posons, pour tout $u \in \mathbb{R}^d$,
$$\begin{aligned}
\Delta_T &= T^{-1}\int_0^T \{\exp i\langle u, V_t^{-1}M_t\rangle - \exp i\langle u, V_t^{-1}M_{s_t}\rangle\}dt,\\
\delta_T' &= T^{-1}\int_0^T \tilde{L}_t(u)\{\phi_t((V_t^*)^{-1}u) - \phi_\infty(\eta,u)\}dt,\\
\delta_T'' &= T^{-1}\int_0^T \tilde{L}_t(u)\{\phi_{s_t}((V_t^*)^{-1}u) - \phi_t((V_t^*)^{-1}u)\}dt,
\end{aligned}$$
et $\Sigma_T = \Delta_T + \delta_T' + \delta_T''$. On a
$$T^{-1}\int_0^T L_t((V_t^*)^{-1}u)\phi_t((V_t^*)^{-1}u)dt = T^{-1}\int_0^T \tilde{L}_t(u)\phi_{s_t}((V_t^*)^{-1}u)dt + \Delta_T$$
$$= T^{-1}\int_0^T \tilde{L}_t(u)\phi_t((V_t^*)^{-1}u)dt$$
$$+T^{-1}\int_0^T \tilde{L}_t(u)\{\phi_{s_t}((V_t^*)^{-1}u) - \phi_t((V_t^*)^{-1}u)\}dt + \Delta_T$$
$$= T^{-1}\int_0^T \tilde{L}_t(u)\phi_t((V_t^*)^{-1}u)dt + \Delta_T + \delta_T'' = T^{-1}\int_0^T \tilde{L}_t(u)\phi_\infty(\eta,u)dt + \Sigma_T.$$
Par suite, on obtient
$$T^{-1}\int_0^T \tilde{L}_t(u)\phi_t((V_t^*)^{-1}u)dt - \phi_\infty(\eta,u) = T^{-1}\int_0^T \left\{\tilde{L}_t(u) - 1\right\}\phi_\infty(\eta,u)dt + \Sigma_T.$$
Ainsi la relation (3.10) est immédiate dès que les deux propriétés suivantes ont lieu
$$(\mathscr{P}1): \quad \limsup_{T\to\infty} |\Delta_T| + |\delta_T''| = 0 \quad p.s. \quad \text{et} \quad \lim_{T\to\infty} |\delta_T'| = 0 \quad p.s.$$
$$(\mathscr{P}2): \quad T^{-1}\int_0^T \tilde{L}_t(u)dt \longrightarrow 1 \quad p.s., \quad (T \longrightarrow \infty).$$

**Vérification de la propriété** ($\mathscr{P}1$)

D'une part, on a

$$\begin{aligned}|\Delta_T| &\leq T^{-1}\int_0^T |\exp i\langle u, Z_t\rangle + \exp i\langle u, Z_{T_t}\rangle|\, \mathbf{1}_{\{t>T_t\}}dt,\\ &\leq 2T^{-1}\int_0^T \mathbf{1}_{\{t>T_t\}}dt.\end{aligned}$$

Comme $\mathbf{1}_{\{t>T_t\}} \leq \mathbf{1}_{\{t>T_{t,b}\}} + \mathbf{1}_{\{t>T^u_{t,c}\}}$, on obtient

$$\begin{aligned}|\Delta_T| &\leq 2T^{-1}\left\{\int_0^T \mathbf{1}_{\{t>T_{t,b}\}}dt + \int_0^T \mathbf{1}_{\{t>T^u_{t,c}\}}dt\right\},\\ &\leq 2T^{-1}\left\{\int_0^T \mathbf{1}_{\{\mathrm{tr}(V_t^{-1}\langle M\rangle_t(V_t^*)^{-1})>b\}}dt + \int_0^T \mathbf{1}_{\{|\phi_t((V_t^*)^{-1}u)|^{-1}>c\}}dt\right\}.\end{aligned}$$

Grâce aux hypothèses $(\mathcal{H})$ et $(\mathcal{H}_1)$, et vu que

$$\mathbb{P}\{\mathrm{tr}(V_t^{-1}\langle M\rangle_t(V_t^*)^{-1}) = b\} = \mathbb{P}\{|\phi_\infty(\eta, x)|^{-1} = c\} = 0, \tag{3.12}$$

on en déduit

$$|\Delta_T| \leq 2\left\{\mathbf{1}_{\{\mathrm{tr}(C)>b\}} + \mathbf{1}_{\{|\phi_\infty(\eta,u)|^{-1}>c\}}\right\}.$$

D'autre part, on a

$$|\delta''_T| = T^{-1}\int_0^T L_{T_t}((V_t^*)^{-1}u)\{\phi_{T_t}((V_t^*)^{-1}u) - \phi_t((V_t^*)^{-1}u)\}\, \mathbf{1}_{\{t>T_t\}}dt,$$

et vu que la fonction $t \longmapsto |\phi_t(u)|$ est décroissante, alors

$$\begin{aligned}|\delta''_T| &\leq 2T^{-1}\int_0^T |L_{T_t}((V_t^*)^{-1}u)\phi_{T_t}((V_t^*)^{-1}u)|\, \mathbf{1}_{\{t>T_t\}}dt\\ &\leq 2T^{-1}\int_0^T \mathbf{1}_{\{t>T_t\}}dt.\end{aligned}$$

Par ailleurs, l'inégalité

$$\mathbf{1}_{\{t>T_{t,b}\}} + \mathbf{1}_{\{E_{r,b}\}} \leq \mathbf{1}_{\{E^u_{r,c}\}}$$

implique

$$\limsup_{T\to\infty} |\Delta_T| \vee |\delta''_T| \leq 2\left\{\mathbf{1}_{\{\mathrm{tr}(C)>b\}} + \mathbf{1}_{\{|\phi_\infty(\eta,u)|^{-1}>c\}}\right\}.$$

En faisant tendre $b$ et $c$ vers l'infini de manière séquentielle, tout en respectant la relation (3.12), on en déduit

$$\limsup_{T\to\infty} |\Delta_T| + |\delta''_T| = 0 \quad p.s.$$

On s'intéresse maintenant au terme $\delta'_T$. En tenant compte du fait que $|\tilde{L}_t(u)| \leq c$, on obtient

$$|\delta'_T| \leq cT^{-1}\int_0^T \left|\phi_t((V_t^*)^{-1}u) - \phi_\infty(\eta,u)\right| dt.$$

Grâce à l'hypothèse $(\mathcal{H})$, on conclut que

$$\limsup_{T\to\infty} |\delta'_T| \longrightarrow 0 \quad p.s. \tag{3.13}$$

Ainsi, la propriété $(\mathscr{P}1)$ est établie.

**Vérification de la propriété** $(\mathscr{P}2)$

Pour $u \in \mathbb{R}^d$ et $0 \leq \rho \leq t \leq T$, notons $K^u_{\rho,t}$ la covariance du couple $\left(\tilde{L}_\rho(u)\,,\,\tilde{L}_t(u)\right)$. Comme la martingale complexe $\left(\tilde{L}_t(u)\right)$ vérifie la propriété

$$\mathbb{E}\{\tilde{L}_t(u)\} = 1, \tag{3.14}$$

on en déduit

$$\begin{aligned}
K^u_{\rho,t} &= \mathbb{E}\{(\tilde{L}_\rho(u)-1)(\overline{\tilde{L}_t(u)-1})\} \\
&= \mathbb{E}\{\tilde{L}_\rho(u)\overline{\tilde{L}_t(u)}\} - 1 \\
&= \mathbb{E}\{\tilde{L}_\rho(u)\overline{\mathbb{E}\left(\tilde{L}_t(u)/\mathcal{F}_{s_\rho}\right)} \\
&= \mathbb{E}\{\tilde{L}_\rho(u)\overline{L_{s_\rho}((V_t^*)^{-1}u)\}} - 1 \\
&= \mathbb{E}\left\{\tilde{L}_\rho(u)\left(\overline{L_{s_\rho}((V_t^*)^{-1}u)} - 1\right)\right\}.
\end{aligned}$$

D'après l'inégalité Cauchy-Schwarz, on a

$$\left|K^u_{\rho,t}\right| \leq \left(\mathbb{E}|\tilde{L}_\rho(u)|^2\right)^{\frac{1}{2}} \left(\mathbb{E}|L_{s_\rho}((V_t^*)^{-1}u) - 1|^2\right)^{\frac{1}{2}}.$$

Par suite, il vient

$$\left|K^u_{\rho,t}\right| \leq \left(\mathbb{E}|\tilde{L}_\rho(u)|^2\right)^{\frac{1}{2}} \left(\mathbb{E}|L_{s_\rho}((V_t^*)^{-1}u)|^2 - 1\right)^{\frac{1}{2}}. \tag{3.15}$$

Par ailleurs, la relation (3.8) implique

$$|\tilde{L}_\rho(u)| \leq \exp\{\frac{1}{2}u^* V_\rho^{-1} \langle M \rangle_{s_\rho} (V_\rho^*)^{-1} u\}.$$

Vu que $s_\rho \leq T_\rho$, on obtient

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}|\tilde{L}_\rho(u)|^2 &\leq \mathbb{E}\{\exp\{u^* V_\rho^{-1} \langle M \rangle_{s_\rho} (V_\rho^*)^{-1} u\} \\
&\leq \exp\{b\|u\|^2\}. \qquad (3.16)
\end{aligned}$$

D'autre part, on a

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}|\tilde{L}_\rho(u)|^2 &\leq \mathbb{E}\{\exp\{u^* V_\rho^{-1} \langle M \rangle_{s_\rho} (V_\rho^*)^{-1} u\} \\
&\leq \exp\{b\|u\|^2 \|V_t^{-1} V_\rho\|^2\}.
\end{aligned}$$

En utilisant le fait que $e^x - 1 \leq xe^x$ pour tout $x \geq 0$, il vient

$$\mathbb{E}|\tilde{L}_\rho(u)|^2 - 1 \leq b\|u\|^2 \|V_t^{-1} V_\rho\|^2 \exp\{b\|u\|^2 \|V_t^{-1} V_\rho\|^2\}. \qquad (3.17)$$

En insérant (3.16) et (3.17) dans (3.15), on obtient

$$\left|K_{\rho,t}^u\right| \leq \frac{b}{2}\|u\|^2 \|V_t^{-1} V_\rho\|^2 \exp\{\frac{b}{2}\|u\|^2\} \exp\{\frac{b}{2}\|u\|^2 \|V_t^{-1} V_\rho\|^2\}.$$

En écrivant

$$\begin{aligned}
\|V_t^{-1} V_\rho\|^2 &= tr\{(V_t^{-1} V_\rho)^* V_t^{-1} V_\rho\} \\
&= tr\{V_\rho^* V_\rho (V_t^*)^{-1} V_t^{-1}\}
\end{aligned}$$

et vu la condition $(\mathcal{C}_2)$, il existe $s_0 \geq 0$ tel que pour $t \geq \rho \geq s_0$, on a

$$\|V_t^{-1} V_\rho\|^2 \leq \mathrm{tr}(I_d) = d. \qquad (3.18)$$

Cela implique que

$$\left|K_{\rho,t}^u\right| \leq k\|V_t^{-1} V_\rho\|^2, \qquad (3.19)$$

où $k$ est une constante réelle donnée, indépendante de $t$ et $\rho$.
Par ailleurs, pour $t \geq \rho$, on a

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}\left\{\left|T^{-1}\int_0^T \tilde{L}_t(u)dt - 1\right|^2\right\} &= \mathbb{E}\left\{\left|T^{-1}\int_0^T \left(\tilde{L}_t(u) - 1\right)dt\right|^2\right\} \\
&= \mathbb{E}\left\{2T^{-2}\int_0^T \int_0^t \left(\tilde{L}_t(u) - 1\right)\overline{\left(\tilde{L}_\rho(u) - 1\right)}d\rho dt\right\}.
\end{aligned}$$

En utilisant le théorème de Fubini, on obtient

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}\left\{\left|T^{-1}\int_0^T \tilde{L}_t(u)dt-1\right|^2\right\} &= 2T^{-2}\int_0^T\int_0^t \mathbb{E}\left\{\Big(\tilde{L}_t(u)-1\Big)\overline{\Big(\tilde{L}_\rho(u)-1\Big)}\right\}d\rho dt \\
&= 2T^{-2}\int_0^T\int_0^t Cov\Big(\tilde{L}_t(u)\,,\,\tilde{L}_\rho(u)\Big)d\rho dt \\
&= 2T^{-2}\int_0^T\int_0^t K^u_{\rho,t}\,d\rho dt.
\end{aligned}$$

La relation (3.19) implique

$$\mathbb{E}\left\{\left|T^{-1}\int_0^T \tilde{L}_t(u)dt-1\right|^2\right\} \leq 2kT^{-2}\int_0^T\int_0^t \|V_t^{-1}V_\rho\|^2\,d\rho dt.$$

Par suite, on en déduit

$$\mathbb{E}\left\{\left|T^{-1}\int_0^T \tilde{L}_t(u)dt-1\right|^2\right\} \leq 2kT^{-2}tr\left\{\int_0^T (V_t^*)^{-1}V_t^{-1}\int_0^t V_\rho V_\rho^* d\rho dt\right\}. \tag{3.20}$$

De l'égalité

$$\frac{d}{d\rho}(V_\rho V_\rho^*) = \frac{dV_\rho}{d\rho}V_\rho^* + V_\rho\frac{dV_\rho^*}{d\rho},$$

on obtient

$$\begin{aligned}
V_\rho^{-1}\left\{\frac{d}{d\rho}(V_\rho V_\rho^*)\right\}(V_\rho^*)^{-1} &= V_\rho^{-1}\frac{dV_\rho}{d\rho} + \left(V_\rho^{-1}\frac{dV_\rho}{d\rho}\right)^* \\
&= 2\Delta_{\rho,2} + S_2,
\end{aligned}$$

et donc

$$\frac{d}{d\rho}(V_\rho V_\rho^*) = 2V_\rho\Delta_{\rho,2}V_\rho^* + V_\rho S_2 V_\rho^*.$$

Maintenant, si on suppose que $V_0 = I_d$, on obtient l'égalité suivante :

$$\int_0^t V_\rho S_2 V_\rho^* d\rho = V_t V_t^* - I_d - 2\int_0^t V_\rho \Delta_{\rho,2} V_\rho^*\,d\rho,$$

laquelle implique

$$tr\left\{\int_0^T (V_t^*)^{-1}V_t^{-1}\int_0^t V_\rho S_2 V_\rho^* d\rho dt\right\} \leq \int_0^T\left\{d + 2\int_0^t \|V_t^{-1}V_\rho\|^2\|\Delta_{\rho,2}\|d\rho\right\}dt.$$

En tenant compte de la majoration (3.18), on obtient

$$tr\left\{\int_0^T (V_t^*)^{-1}V_t^{-1}\int_0^t V_\rho S_2 V_\rho^* d\rho dt\right\} \leq d\int_0^T\left\{1+2\int_0^t \|\Delta_{\rho,2}\|d\rho\right\}dt.$$

Vu qu'on a

$$\|\Delta_{\rho,2}\| = \mathcal{O}(\rho^{-\beta}), \quad (\rho \to \infty), \quad \text{avec } \beta > 1,$$

on obtient

$$tr\left\{\int_0^T (V_t^*)^{-1}V_t^{-1}\int_0^t V_\rho S_2 V_\rho^* d\rho dt\right\} = \mathcal{O}\left(\int_0^T\left\{1+2\int_0^t \rho^{-\beta}d\rho\right\}dt\right),$$

et il s'en suit que

$$tr\left\{\int_0^T (V_t^*)^{-1}V_t^{-1}\int_0^t V_\rho S_2 V_\rho^* d\rho dt\right\} = \mathcal{O}(T), \quad (T \longrightarrow \infty).$$

L'inégalité (3.20) implique

$$\mathbb{E}\left\{\left|T^{-1}\int_0^T \tilde{L}_t(u)dt - 1\right|^2\right\} = \mathcal{O}(T^{-1}), \quad (T \longrightarrow \infty). \tag{3.21}$$

Ainsi on a démontré que $\left(T^{-1}\int_0^T \tilde{L}_t(u)dt\right)_T$ converge vers 1 en moyenne quadratique. Pour terminer, il suffit de prouver que cette convergence a lieu au sens presque-sûre. Pour ce faire, on pose

$$\nabla_T = T^{-1}\int_0^T \tilde{L}_t(u)dt.$$

Soit $T_k = k^2$ où $k$ est un entier donné. La relation (3.21) donne

$$\mathbb{E}\{|\nabla_{T_k} - 1|^2\} = \mathcal{O}(k^{-2}), \quad (k \longrightarrow \infty),$$

ce qui implique

$$\nabla_{T_k} \longrightarrow 1 \quad p.s., \quad (k \longrightarrow \infty). \tag{3.22}$$

Par ailleurs, en écrivant

$$|\nabla_T - \nabla_{T_k}| \leq \left|\nabla_T - T^{-1}\int_0^{T_k} \tilde{L}_t(u)\,dt\right| + \left|T^{-1}\int_0^{T_k} \tilde{L}_t(u)\,dt - \nabla_{T_k}\right|,$$

on obtient, en tenant compte du fait que $|\tilde{L}_t(u)| \leq c$, on obtient pour $0 < T_k < T < T_{k+1}$

$$\begin{aligned} |\nabla_T - \nabla_{T_k}| &\leq T^{-1}\int_{T_k}^T |\tilde{L}_t(u)|\,dt + |T^{-1} - T_k^{-1}|\int_0^{T_k} |\tilde{L}_t(u)|\,dt \\ &\leq 2c\,T_k^{-1}(T_{k+1} - T_k) = 2c\frac{2k+1}{k^2}. \end{aligned} \tag{3.23}$$

En faisant tendre $k$ vers l'infini, on obtient

$$|\nabla_T - \nabla_{T_k}| \longrightarrow 0.$$

Combinè avec la convergence (3.22), on en déduit

$$\nabla_T \longrightarrow 1 \quad p.s., \quad (T \longrightarrow \infty).$$

La propriété ($\mathscr{P}2$) est établie, ce que achève la preuve du Théorème 3.2.1.

## Preuve du théorème 3.2.2

En appliquant la formule d'Itô à la semi-martingale $\|Z_t\|^2$, on obtient la relation fondamentale suivante :

$$\begin{aligned}\|Z_t\|^2 = Z_t^* Z_t \quad &= 2\int_0^t Z_s^* V_s^{-1} dM_s + \quad tr\left(\int_0^t V_s^{-1} d[M]_s (V_s^*)^{-1}\right) \\ &\qquad - \int_0^t Z_s^* V_s^{-1} d(V_s V_s^*)(V_s^*)^{-1} Z_s.\end{aligned} \tag{3.24}$$

Pour alléger les notations, on pose

$$\begin{aligned}\mathcal{J}_t &= \int_0^t Z_s^* V_s^{-1} d(V_s V_s^*)(V_s^*)^{-1} Z_s, \\ \mathcal{K}_t &= \int_0^t V_s^{-1} d[M]_s (V_s^*)^{-1}, \\ \mathcal{Q}_t &= \int_0^t Z_s^* V_s^{-1} dM_s.\end{aligned}$$

Avec ces notations, la relation (3.24) s'écrit

$$\|Z_t\|^2 + \mathcal{J}_t = 2\mathcal{Q}_t + \mathrm{tr}(\mathcal{K}_t). \tag{3.25}$$

L'étape cruciale de cette preuve est de démontrer la propriété suivante :

$$t^{-1}\left(\|Z_t\|^2 + \int_0^t Z_{s-}^* S_2 Z_{s-} ds\right) \longrightarrow \mathrm{tr}(S_2^{1/2} C S_2^{1/2}) \quad p.s., \quad (t \longrightarrow \infty), \tag{3.26}$$

avec $S_2$ la matrice introduite dans l'hypothèse ($\mathcal{C'}_3$).
Pour ce faire, on va étudier le comportement asymptotique des processus à variation bornée ($\mathcal{J}_t$) et ($\mathcal{K}_t$), ainsi que celui de la martingale locale scalaire ($\mathcal{Q}_t$).

**Comportement asymptotique de** ($\mathcal{J}_t$)

Remarquons que le processus $(\mathcal{J}_t)$ vérifie

$$\begin{aligned}\mathcal{J}_t &= \int_0^t Z_s^* V_s^{-1}\left\{\frac{dV_s}{ds}V_s^* + V_s\frac{dV_s^*}{ds}\right\}(V_s^*)^{-1}Z_s ds\\ &= \int_0^t Z_s^*\left\{V_s^{-1}\frac{dV_s}{ds} + \left(V_s^{-1}\frac{dV_s}{ds}\right)^*\right\}Z_s ds.\end{aligned}$$

Compte tenu de la condition $(\mathcal{C}'_3)$, on obtient

$$\mathcal{J}_t = \int_0^t Z_s^* S_2 Z_s ds + \int_0^t Z_s^* \Delta_{s,2} Z_s ds + \int_0^t Z_s^* \Delta_{s,2}^* Z_s ds.$$

On a, quand $t$ tend vers l'infini,

$$\|\Delta_{t,2}\| = \mathcal{O}(t^{-\beta}), \ \ \beta > 1,$$

d'où

$$\left\|\mathcal{J}_t - \int_0^t Z_s^* S_2 Z_s ds\right\| \le \frac{2k}{t^\beta}\int_0^t \|Z_s\|^2 ds \longrightarrow 0, \quad (t \longrightarrow \infty),$$

et donc

$$\mathcal{J}_t \sim \int_0^t Z_s^* S_2 Z_s ds, \quad (t \longrightarrow \infty). \tag{3.27}$$

**Comportement asymptotique de** $(\mathcal{K}_t)$

Le comportement asymptotique de $(\mathcal{K}_t)$ est donné par le lemme suivant :

**Lemme 3.4.2** *Sous l'hypothèse $(\mathcal{H}_2)$ ou bien sous les hypothèses $(\mathcal{H}_1)$ et $(\mathcal{H}'_2)$, on a*

$$t^{-1}\mathcal{K}_t \longrightarrow CU_2^* + U_2 C \quad p.s., \quad (t \longrightarrow \infty). \tag{3.28}$$

**Preuve :**

Grâce à une intégration par parties, on obtient

$$\begin{aligned}\mathcal{K}_t := \int_0^t V_s^{-1} d[M]_s (V_s^*)^{-1} = V_t^{-1}[M]_t(V_t^*)^{-1} &+ \int_0^t V_s^{-1}[M]_s(V_s^*)^{-1}\left(V_s^{-1}\frac{dV_s}{ds}\right)^* ds\\ &+ \int_0^t \left(V_s^{-1}\frac{dV_s}{ds}\right)V_s^{-1}[M]_s(V_s^*)^{-1} ds.\end{aligned}$$

En posant $C'_t = V_t^{-1}[M]_t(V_t^*)^{-1}$, on a

$$\mathcal{K}_t = C'_t + \int_0^t C'_s\left(V_s^{-1}\frac{dV_s}{ds}\right)^* ds + \int_0^t \left(V_s^{-1}\frac{dV_s}{ds}\right) C'_s ds. \tag{3.29}$$

La condition $(\mathcal{C}'_3)$ implique

$$t^{-1}\mathcal{K}_t = t^{-1}C'_t + t^{-1}\int_0^t C'_s\Delta^*_{s,2}ds + t^{-1}\int_0^t \Delta_{s,2}C'_s ds$$
$$+t^{-1}\int_0^t C'_s ds\ U_2^* + U_2 t^{-1}\int_0^t C'_s ds. \qquad (3.30)$$

Sous l'hypothèse $(\mathcal{H}_2)$, le premier terme du membre de droite de l'égalité (3.30) est presque-sûrement égal à $\mathbf{o}(1)$. De même, du fait qu'on a

$$\|\Delta_{t,2}\| = \mathcal{O}(t^{-\beta}),\ \ \beta > 1,$$

et grâce à l'hypothèse $(\mathcal{H}_2)$, on montre aussi que le deuxième et le troisième termes sont presque-sûrement égaux à $\mathbf{o}(1)$. Enfin, en combinant le lemme de Toeplitz avec l'hypothèse $(\mathcal{H}_2)$, on obtient

$$t^{-1}\int_0^t C'_s ds\ U_2^* + U_2 t^{-1}\int_0^t C'_s ds \longrightarrow CU_2^* + U_2 C \quad p.s., \quad (t\longrightarrow\infty).$$

Ainsi le résultat du lemme est établi.
Il reste à montrer que la propriété (3.28) reste vraie sous les hypothèses $(\mathcal{H}_1)$ et $(\mathcal{H}'_2)$.
Par analogie avec la relation (3.29), on a

$$\tilde{\mathcal{K}}_t = C_t + \int_0^t C_s\left(V_s^{-1}\frac{dV_s}{ds}\right)^* ds + \int_0^t \left(V_s^{-1}\frac{dV_s}{ds}\right) C_s ds, \qquad (3.31)$$

où $C_t = V_t^{-1}\langle M\rangle_t (V_t^*)^{-1}$ et $(\tilde{\mathcal{K}}_t)$ est le compensateur prévisible du processus $(\mathcal{K}_t)$ donné par

$$\tilde{\mathcal{K}}_t = \int_0^t V_s^{-1} d\langle M\rangle_s (V_s^*)^{-1}.$$

Vu la condition $(\mathcal{C}'_3)$, il vient

$$t^{-1}\tilde{\mathcal{K}}_t = t^{-1}C_t + t^{-1}\int_0^t C_s\Delta^*_{s,2}ds + t^{-1}\int_0^t \Delta_{s,2}C_s ds + t^{-1}\int_0^t C_s ds\ U_2^* + U_2 t^{-1}\int_0^t C_s ds.$$

Sous l'hypothèse $(\mathcal{H}_1)$, en utilisant le lemme de Toeplitz et le fait que, quand $t$ tend vers l'infini, on a

$$\|\Delta_{t,2}\| = \mathcal{O}(t^{-\beta}),\ \ \beta > 1,$$

on obtient

$$t^{-1}\tilde{\mathcal{K}}_t \longrightarrow CU_2^* + U_2 C \quad p.s., \quad (t\longrightarrow\infty).$$

Par ailleurs, posons

$$\bar{H}_t := \mathcal{K}_t - \tilde{\mathcal{K}}_t = \int_0^t V_s^{-1}(d[M]_s - d\langle M\rangle_s)(V_s^*)^{-1}.$$

On a
$$\Delta\bar{H}_t = V_t^{-1}\Delta[M]_t(V_t^*)^{-1} = V_t^{-1}(\Delta M_t)(\Delta M_t)^*(V_t^*)^{-1}.$$
Par suite, le compensateur prévisible du processus croissant
$$\delta_t^{p,M} = \sum_{s\leq t}\|\Delta\bar{H}_s\|^{2p} = \sum_{s\leq t}\|V_s^{-1}\Delta M_s\|^{2p}$$
est
$$\tilde{\delta}_t^{p,M} = \int_0^t\int_{\mathbb{R}^d}\|V_s^{-1}x\|^{2p}\nu^M(ds,dx).$$
L'hypothèse $(\mathcal{H}'_2)$ signifie
$$\int_0^\infty(1+s)^{-p}\,d\delta_s^{p,M} < \infty \quad p.s.$$
Donc en utilisant le Lemme 3 de Le Breton et Musiela [12], on peut affirmer que la martingale
$$\int_0^\infty(1+s)^{-p}\,d\bar{H}_s$$
converge presque-sûrement vers une limite finie quand $t$ tend vers l'infini. Il en résulte que
$$t^{-1}(\mathcal{K}_t-\tilde{\mathcal{K}}_t)\longrightarrow 0 \quad p.s., \quad (t\longrightarrow\infty).$$
Par conséquent, la propriété (3.28) a bien lieu sous les hypothèses $(\mathcal{H}_1)$ et $(\mathcal{H}'_2)$.

**Comportement asymptotique de** $(\mathcal{Q}_t)$

Soit la martingale locale scalaire $(\bar{\mathcal{Q}}_t)$ définie par
$$\bar{\mathcal{Q}}_t = \int_0^t \mathrm{tr}(C_s)d\mathcal{Q}_s.$$
En tenant compte de la relation (3.31), la variation quadratique prévisible de la martingale locale $(\mathcal{Q}_t)$ vérifie
$$\langle\mathcal{Q}\rangle_t = \int_0^t Z_s^*d\bar{\mathcal{K}}_sZ_s. \tag{3.32}$$
En insérant la relation (3.31) dans (3.32), il vient
$$\langle\mathcal{Q}\rangle_t = \int_0^t Z_s^*dC_sZ_s + \int_0^t Z_s^*C_s(V_s^{-1}\frac{dV_s}{ds})^*Z_sds + \int_0^t Z_s^*V_s^{-1}\frac{dV_s}{ds}C_sZ_sds.$$
Par suite, on obtient
$$\langle\mathcal{Q}\rangle_t = \mathcal{O}\left(\int_0^t\|Z_s\|^2d(tr\left\{C_s\right\})\right)+\mathcal{O}\left(\int_0^t\|Z_s\|^2tr\left\{C_s\left(V_s^{-1}\frac{dV_s}{ds}\right)^*+V_s^{-1}\frac{dV_s}{ds}C_s\right\}ds\right).$$

D'une part, compte tenu de l'hypothèse $(\mathcal{H}_1)$ et de la condition $(\mathcal{C}'_3)$, quand $t$ tend vers l'infini, on obtient presque-sûrement

$$\left|\int_0^t \|Z_s\|^2 tr\left\{C_s\left(V_s^{-1}\frac{dV_s}{ds}\right)^* + V_s^{-1}\frac{dV_s}{ds}C_s\right\}ds - \int_0^t \|Z_s\|^2 tr\left\{CU_2^* + U_2C\right\}ds\right| \longrightarrow 0.$$

D'autre part, vu la relation (3.27), on a

$$\mathcal{J}_t = \mathcal{O}\left(\int_0^t \|Z_s\|^2 tr\left\{CU_2^* + U_2C\right\}ds\right).$$

On en déduit

$$\langle\mathcal{Q}\rangle_t = \mathcal{O}\left(\int_0^t \|Z_s\|^2 d(tr\left\{C_s\right\})\right) + \mathcal{O}(\mathcal{J}_t) \quad p.s.$$

Grâce à une intégration par parties, on obtient

$$\int_0^t \|Z_s\|^2 d(tr\left\{C_s\right\}) = \|Z_t\|^2 tr\left\{C_t\right\} - \int_0^t tr\left\{C_s\right\} d(\|Z_s\|^2). \tag{3.33}$$

La relation (3.25) implique

$$\int_0^t \|Z_s\|^2 d(tr\left\{C_s\right\}) = \|Z_t\|^2 tr\left\{C_t\right\} + \int_0^t tr\{C_s\}d\mathcal{J}_s - \int_0^t tr\{C_s\}d(tr\{\mathcal{K}_s\}) - 2\bar{\mathcal{Q}}_t.$$

En tenant compte de l'hypothèse $(\mathcal{H}_1)$, on obtient

$$\int_0^t \|Z_s\|^2 d(tr\left\{C_s\right\}) = -2\bar{\mathcal{Q}}_t + \mathcal{O}\left(\|Z_t\|^2 + \mathrm{tr}(\mathcal{K}_t) + \mathcal{J}_t\right).$$

Du fait que la variation quadratique de la martingale locale scalaire $\bar{\mathcal{Q}}$ vérifie

$$\langle\bar{\mathcal{Q}}\rangle_t = \mathcal{O}\left(\langle\mathcal{Q}\rangle_t\right),$$

la loi forte des grands nombres implique

$$\bar{\mathcal{Q}}_t = \mathbf{o}(\langle\mathcal{Q}\rangle_t) \quad p.s.$$

On en déduit

$$\langle\mathcal{Q}\rangle_t = \mathcal{O}\left(\|Z_t\|^2 + \mathrm{tr}(\mathcal{K}_t) + \mathcal{J}_t\right) \quad p.s.$$

En appliquant encore une fois la loi forte des grands nombres à la martingale scalaire $\mathcal{Q}$, on obtient

$$\mathcal{Q}_t = \mathbf{o}\left(\|Z_t\|^2 + \mathrm{tr}(\mathcal{K}_t) + \mathcal{J}_t\right) \quad p.s.$$

De la relation (3.25), à savoir

$$\|Z_t\|^2 + \mathcal{J}_t = 2\mathcal{Q}_t + \mathrm{tr}(\mathcal{K}_t),$$

il vient

$$\mathcal{Q}_t = \mathbf{o}\left(\mathcal{Q}_t + \mathrm{tr}(\mathcal{K}_t)\right) \quad p.s.$$

D'après le comportement asymptotique du processus $(\mathcal{K}_t)$, on conclut

$$\mathcal{Q}_t = \mathbf{o}(t) \quad p.s. \qquad \diamond$$

Par conséquent, vu les comportements asymptotiques des processus $(\mathcal{K}_t)$ et $(\mathcal{Q}_t)$, on obtient la convergence suivante :

$$t^{-1}\left(2\mathcal{Q}_t + \mathrm{tr}(\mathcal{K}_t)\right) \longrightarrow tr\{S_2^{1/2} C S_2^{1/2}\} \quad p.s., \quad (t \longrightarrow \infty).$$

En tenant compte du comportement asymptotique du processus $(\mathcal{J}_t)$ et de la relation (3.25), on obtient l'équivalence suivante :

$$t^{-1}\left(2\mathcal{Q}_t + \mathrm{tr}(\mathcal{K}_t)\right) \sim t^{-1}\left(\|Z_t\|^2 + \int_0^t Z_s^* S_2 Z_s ds\right), \quad (t \longrightarrow \infty).$$

Ainsi la convergence (3.26) est établie.
Par ailleurs, en appliquant le Théorème 3.2.1 au couple $(M, V)$, on obtient

$$\mu_t = t^{-1}\int_0^t \delta_{Z_s} ds \Longrightarrow \mu_\infty \quad p.s.,$$

et donc

$$\liminf_{t\to\infty} \int_{\mathbb{R}^d} x^* S_2 x d\mu_t(x) \geq \int_{\mathbb{R}^d} x^* S_2 x d\mu_\infty(x) \quad p.s. \tag{3.34}$$

Vu qu'on a

$$\int_{\mathbb{R}^d} x^* S_2 x d\mu_\infty(x) = tr\left(S_2 \int_{\mathbb{R}^d} x x^* d\mu_\infty(x)\right),$$

alors sous l'hypothèse $(\mathcal{H}_3)$, on obtient

$$\int_{\mathbb{R}^d} x^* S_2 x d\mu_\infty(x) = tr\{S_2^{1/2} C S_2^{1/2}\}.$$

L'inégalité (3.34) s'écrit alors

$$\liminf_{t\to\infty} \int_{\mathbb{R}^d} x^* S_2 x d\mu_t(x) \geq tr\{S_2^{1/2} C S_2^{1/2}\} \quad p.s.$$

Par conséquent, il vient

$$\liminf_{t\to\infty} t^{-1}\int_0^t Z_{s-}^* S_2 Z_{s-} ds \geq tr\{S_2^{1/2} C S_2^{1/2}\}. \tag{3.35}$$

En combinant l'inégalité (3.35) et la convergence (3.26), sachant que $t^{-1}\|Z_t\|^2$ est une quantité positive lorsque $t$ tend vers l'infini, alors on obtient

$$t^{-1}\int_0^t Z_{s-}^* S_2 Z_{s-}ds \longrightarrow tr\{S_2^{1/2}CS_2^{1/2}\} \quad p.s., \quad (t\longrightarrow\infty). \tag{3.36}$$

En tenant compte de (3.36), la convergence (3.26) implique la propriété de la loi du logarithme, à savoir

$$t^{-1}\|Z_t\|^2 \longrightarrow 0 \quad p.s., \quad (t\longrightarrow\infty),$$

et comme $S_2$ est une matrice inversible, la propriété de la loi forte quadratique est établie. Cela achève la preuve du Théorème 3.2.2.

## Preuve du théorème 3.2.3

En appliquant la formule d'Itô à la forme quadratique ($\langle u, Z_t\rangle^2$), on obtient

$$\begin{aligned} Z_tZ_t^* &= \int_0^t V_s^{-1}M_sdM_s^*(V_s^*)^{-1} - \int_0^t V_s^{-1}M_sM_s^*(V_s^*)^{-1}dV_s^*(V_s^*)^{-1} \\ &\quad - \int_0^t V_s^{-1}dV_sV_s^{-1}M_sM_s^*(V_s^*)^{-1} + \int_0^t V_s^{-1}dM_sM_s^*(V_s^*)^{-1} \\ &\quad + \int_0^t V_s^{-1}d[M]_s(V_s^*)^{-1}. \end{aligned} \tag{3.37}$$

En effet, la formule d'intégration par parties donne

$$Z_tZ_t^* = \int_0^t Z_sdZ_s^* + \int_0^t dZ_sZ_s^* + \langle Z, Z^*\rangle_t.$$

Puisque

$$dZ_s = -V_s^{-1}dV_sV_s^{-1}M_s + V_s^{-1}dM_s$$

et

$$dZ_s^* = dM_s^*(V_s^*)^{-1} - M_s^*(V_s^*)^{-1}dV_s^*(V_s^*)^{-1},$$

on obtient

$$\begin{aligned} Z_tZ_t^* &= \int_0^t Z_sdM_s^*(V_s^*)^{-1} - \int_0^t Z_sM_s^*(V_s^*)^{-1}dV_s^*(V_s^*)^{-1} \\ &\quad - \int_0^t V_s^{-1}dV_sV_s^{-1}M_sZ_s^* + \int_0^t V_s^{-1}dM_sZ_s^* + \langle Z, Z^*\rangle_t. \end{aligned}$$

La relation (3.37) découle de la relation suivante :

$$\langle Z, Z^* \rangle_t = \int_0^t V_s^{-1} d[M]_s (V_s^*)^{-1}.$$

En tenant compte de la relation (3.31), on obtient

$$\tilde{D}_t + \int_0^t V_s^{-1} dV_s \tilde{D}_s + \int_0^t \tilde{D}_s dV_s^* (V_s^*)^{-1} = H_t + H_t^* + \bar{H}_t, \tag{3.38}$$

avec

$$\tilde{D}_t = V_t^{-1}(M_t M_t^* - \langle M \rangle_t)(V_t^*)^{-1}, \quad H_t = \int_0^t V_s^{-1} M_s dM_s^* (V_s^*)^{-1},$$

$$\bar{H}_t = \int_0^t V_s^{-1} d[M]_s (V_s^*)^{-1} - \int_0^t V_s^{-1} d\langle M \rangle_s (V_s^*)^{-1}.$$

Pour la suite, on introduit, pour $u \in \mathbb{R}^d$, la martingale vectorielle $(H_t^u)$ définie par

$$H_t^u = \int_0^t V_s^{-1} M_s dM_s^* (V_s^*)^{-1} u.$$

On désigne par $(e_1, e_2, \ldots, e_d)$ la base canonique de $\mathbb{R}^d$. Soit

$$\mathrm{Vect}(H_t) = \begin{pmatrix} H_t^1 \\ \vdots \\ H_t^d \end{pmatrix}, \quad avec \quad H_t^i = H_t^{e_i}, \quad \text{pour} \quad i = 1, \ldots, d.$$

Dans le but d'établir que la martingale $H$ vérifie un TLC, on étudiera le comportement asymptotique de sa variation quadratique prévisible et la validité de la condition de Lindeberg.

**Lemme 3.4.3** *Posons $\tilde{C} = U_2 C + C U_2^*$. Pour tout $u \in \mathbb{R}^d$, on a*

$$t^{-1} \langle H^u \rangle_t \longrightarrow (u^* \tilde{C} u) C, \quad (t \longrightarrow \infty).$$

*Par conséquent,*

$$t^{-1} \langle \mathrm{Vect}(H) \rangle_t \longrightarrow \tilde{C} \otimes C \, quad (t \longrightarrow \infty).$$

**Preuve** :
La variation quadratique prévisible de la martingale $(H_t^u)$ est donnée par

$$\langle H^u \rangle_t = \int_0^t Z_s \{ u^* V_s^{-1} d\langle M \rangle_s (V_s^*)^{-1} u \} Z_s^*.$$

Pour tout $(x, u) \in \mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^d$, on a

$$
\begin{aligned}
x^*\langle H^u\rangle_t\, x &= \int_0^t x^* Z_s\{u^* V_s^{-1} d\langle M\rangle_s (V_s^*)^{-1} u\} Z_s^* x \\
&= \int_0^t < x, Z_s >^2 \; dF_s^u,
\end{aligned}
$$

avec $F_t^u = u^* F_t u$, où $F_t = \displaystyle\int_0^t V_s^{-1} d\langle M\rangle_s (V_s^*)^{-1} ds$.
Vu la relation (3.31), il vient

$$F_t = C_t + \int_0^t C_s \left(V_s^{-1}\frac{dV_s}{ds}\right)^* ds + \int_0^t \left(V_s^{-1}\frac{dV_s}{ds}\right) C_s ds,$$

et par suite, pour tout $u \in \mathbb{R}^d$, on obtient

$$dF_t^u = d(u^* C_t u) + u^* \left\{ C_t \left(V_t^{-1}\frac{dV_t}{ds}\right)^* + \left(V_t^{-1}\frac{dV_t}{dt}\right) C_t \right\} u.$$

Il en résulte que, pour tout $(x, u) \in \mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^d$, on obtient

$$
\begin{aligned}
x^*\langle H^u\rangle_t\, x = \int_0^t &< x, Z_s >^2 d(u^* C_s u) \\
&+ \int_0^t < x, Z_s >^2 u^* \{C_s(\Delta_{s,2} + U_2)^*(\Delta_{s,2} + U_2) C_s\}\, u\, ds.
\end{aligned}
$$

Par conséquent,

$$
\begin{aligned}
x^*\langle H^u\rangle_t\, x &= \int_0^t < x, Z_s >^2 d(u^* C_s u) + 2\int_0^t < x, Z_s >^2 u^* \Delta_{s,2} C_s^2 u\, ds \\
&\qquad + \int_0^t < x, Z_s >^2 u^* \left(C_s U_2^* + U_2 C_s\right) u\, ds.
\end{aligned}
$$

Par ailleurs, la loi forte quadratique implique

$$\frac{1}{t}\int_0^t < x, Z_s >^2 \; ds \longrightarrow x^* C x \quad p.s., \quad (t \longrightarrow \infty).$$

En utilisant cette dernière convergence, la condition $(\mathcal{C}'_3)$ et l'hypothèse $(\mathcal{H}_1)$, on obtient

$$\int_0^t < x, Z_s >^2 u^* \Delta_{s,2} C_s^2 u\, ds = \mathbf{o}(t) \quad p.s., \quad (t \longrightarrow \infty)$$

et

$$\int_0^t < x, Z_s >^2 u^* \left(C_s U^* + U C_s\right) u\, ds \sim x^*(u^* \tilde{C} u) C x\, t = \mathcal{O}(t) \quad p.s., \quad (t \longrightarrow \infty).$$

Par ailleurs, on a la majoration

$$\int_0^t < x, Z_s >^2 \; d(u^* C_s u) \leq \|x\|^2 \int_0^t \|Z_s\|^2 d|u^* C_s u|$$

et le fait que

$$|u^* C_s u| \leq \|u\|^4 \|C_s\| = \|u\|^4 tr\{C_s\}.$$

On en déduit

$$\int_0^t < x, Z_s >^2 \; d(u^* C_s u) \leq C^{te} \int_0^t \|Z_s\|^2 d(tr\{C_s\}).$$

La relation (3.33) implique

$$\int_0^t \|Z_s\|^2 d(tr\,\{C_s\}) = \|Z_t\|^2 tr\,\{C_t\} - \int_0^t tr\,\{C_s\}\, d(\|Z_s\|^2).$$

D'après la LL et l'hypothèse $(\mathcal{H}_1)$, le premier terme du membre de droite de cette égalité est presque-sûrement égal à $\mathbf{o}(t)$. De même, en utilisant le lemme de Toeplitz, on montre encore que le second terme est presque-sûrement égal à $\mathbf{o}(t)$.
Par conséquent, pour tout $x \in \mathbb{R}^d$, on obtient

$$\int_0^t < x, Z_{s-} >^2 \; u^* dC_s u = \mathbf{o}(t) \quad p.s., \quad (t \longrightarrow \infty).$$

Ainsi, pour tout $(x, u) \in \mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^d$, on a

$$x^* t^{-1} \langle H^u \rangle_t \, x \longrightarrow x^* (u^* \tilde{C} u) C x \quad p.s., \quad (t \longrightarrow \infty),$$

d'où, la première assertion du Lemme 3.4.3 est établie.
La seconde assertion du lemme découle directement de la première et de la relation suivante :

$$\langle H^i, H^j \rangle_t = \int_0^t Z_s e_i^* V_s^{-1} d\langle M \rangle_s (V_s^*)^{-1} e_j Z_s^* \quad \text{pour} \quad 1 \leq i, j \leq d. \qquad \diamond$$

En tenant compte du lemme précédent, pour appliquer le TLC à la martingale $H$, il reste à vérifier la validité de la condition de Lindeberg. Pour ce faire, on introduit la définition suivante :

**Définition :** Soient $A = (A_t,\, t \geq 0)$ et $B = (B_t,\, t \geq 0)$ deux processus croissants issus de 0. On dit que $A$ est dominé au sens fort par $B$, et on note $A \ll B$, si $(B_t - A_t)$ est un processus croissant.

Pour $\tilde{A} = (\tilde{A}_t,\, t \geq 0)$ (resp. $\tilde{B} = (\tilde{B}_t,\, t \geq 0)$) le compensateur prévisible du processus $A$ (resp. $B$), on a le résultat suivant :

$$\text{Si } A \ll B, \quad \text{alors} \quad \tilde{A} \ll \tilde{B}.$$

Notons que $\Delta H = (\Delta H_t,\, t \geq 0)$, le saut de la martingale matricielle $H = (H_t,\, t \geq 0)$, défini par

$$\Delta H_t = Z_{t-}(\Delta M_t)^*(V_t^*)^{-1}, \quad t \geq 0,$$

vérifie

$$\begin{aligned} \|\Delta H_t\|^2 &= tr\{\Delta H_t \Delta H_t^*\} \\ &= tr\{Z_t Z_t^*\}\{\Delta M_t^*(V_t^*)^{-1} V_t^{-1} \Delta M_t\} \\ &= \|Z_t\|^2 tr\{V_t^{-1} \Delta M_t^* \Delta M_t (V_t^*)^{-1}\} \\ &= \|Z_t\|^2 tr\{V_t^{-1} \Delta[M]_t (V_t^*)^{-1}\}. \end{aligned}$$

Cela implique

$$\|\Delta H_t\|^2 = \|Z_t\|^2 \Delta\Lambda_t \quad \text{où} \quad \Delta\Lambda_t = tr\{V_t^{-1}\Delta[M]_t(V_t^*)^{-1}\},$$

et $\Lambda = (\Lambda_t,\, t \geq 0)$ est le processus croissant donné par

$$\Lambda_t = tr\left\{\int_0^t V_s^{-1} d[M]_s (V_s^*)^{-1}\right\}.$$

**Vérification de la condition de Lindeberg pour la martingale $H$**

Posons

$$\sigma_t^H(r) = \sum_{s \leq t} \|\Delta H_s\|^2 \mathbf{1}_{\{\|\Delta H_s\| > r\}}, \quad t > 0 \ \text{ et } \quad r > 0.$$

La condition de Lindeberg au sens de la convergence presque-sûre pour la martingale $H$ s'écrit

$$\forall \epsilon > 0, \quad t^{-1}\widetilde{\sigma_t^H(\epsilon\sqrt{t})} \longrightarrow 0 \quad p.s., \quad (t \longrightarrow \infty).$$

Pour montrer ce dernier résultat on a besoin des deux lemmes techniques suivants :

**Lemme 3.4.4** *Sous l'hypothèse $(\mathcal{H}_2)$, on a presque-sûrement*

$$\sup_{t>0} \|V_t^{-1}\Delta M_t\| < +\infty.$$

**Preuve :**
En remarquant que

$$\sum_{s\le .} \Delta M_s (\Delta M_s)^* \ll [M]_. \ ,$$

alors, pour $t \geq 0$, on a

$$\|V_t^{-1}\Delta M_t\|^2 \le \sum_{s\le t} \|V_s^{-1}\Delta M_s\|^2 \ll \mathrm{tr}\{V_t^{-1}[M]_t (V_t^*)^{-1}\}.$$

Vu l'hypothèse $(\mathcal{H}_2)$, on obtient

$$\|V_t^{-1}\Delta M_t\|^2 = \mathcal{O}(1), \quad (t \longrightarrow \infty).$$

Le résultat du lemme en découle.

**Lemme 3.4.5** *Pour $t > 0$ et $r > 0$, posons*

$$\begin{aligned} \sigma_t^1(r) &= \sum_{s\le t} \|\Delta H_s\|^2 \mathbf{1}_{\{\|Z_s\|>r\}} \quad \textit{et} \\ \sigma_t^2(r) &= \sum_{s\le t} \|\Delta H_s\|^2 \mathbf{1}_{\{\|V_s^{-1}\Delta M_s\|>r\}}. \end{aligned}$$

*Alors, pour $\alpha \in ]0,1]$, on a*

$$\sigma_.^H(\alpha^{-3}) \ll \sigma_.^1(\alpha^{-1}) + \sigma_.^2(\alpha^{-1}).$$

**Preuve :**
Considerons la décomposition suivante :

$$\begin{aligned} \sigma_t^H(\alpha^{-3}) &= \sum_{s\le t} \|\Delta H_s\|^2 \mathbf{1}_{\{\|\Delta H_s\|>\alpha^{-3}\, ,\, \|Z_s\|>\alpha^{-1}\}} \\ &+ \sum_{s\le t} \|\Delta H_s\|^2 \mathbf{1}_{\{\|\Delta H_s\|>\alpha^{-3}\, ,\, \|Z_s\|\le\alpha^{-1}\, ,\, \|V_s^{-1}\Delta M_s\|\le\alpha^{-1}\}} \\ &+ \sum_{s\le t} \|\Delta H_s\|^2 \mathbf{1}_{\{\|\Delta H_s\|>\alpha^{-3}\, ,\, \|Z_s\|\le\alpha^{-1}\, ,\, \|V_s^{-1}\Delta M_s\|>\alpha^{-1}\}}. \end{aligned}$$

D'une part, on a

$$\sum_{s\le t} \|\Delta H_s\|^2 \mathbf{1}_{\{\|\Delta H_s\|>\alpha^{-3}\, ,\, \|Z_s\|>\alpha^{-1}\}} \ll \sigma_t^1(\alpha^{-1})$$

et
$$\sum_{s\leq t}\|\Delta H_s\|^2\mathbf{1}_{\{\|\Delta H_s\|>\alpha^{-3}\,,\,\|Z_s\|\leq\alpha^{-1}\,,\,\|V_s^{-1}\Delta M_s\|>\alpha^{-1}\}}\ll\sigma_t^2(\alpha^{-1}).$$
D'autre part,
$$\|\Delta H_s\|^2=\|Z_s\|^2\|V_s^{-1}\Delta M_s\|^2.$$
Ainsi, l'événement
$$\{\|\Delta H_s\|>\alpha^{-3}\,,\,\|Z_s\|\leq\alpha^{-1}\,,\,\|V_s^{-1}\Delta M_s\|>\alpha^{-1}\}=\emptyset\quad p.s.\qquad\diamond$$
En tenant compte du Lemme 3.4.4, il vient
$$\begin{aligned}\sigma_\cdot^1(r)&\ll\int_0^\cdot\|Z_s\|^2\mathbf{1}_{\{\|Z_s\|>r\}}d\Lambda_s\\ et&\\ \sigma_\cdot^2(r)&\ll\int_0^\cdot\|Z_s\|^2\mathbf{1}_{\{\Delta\Lambda_s>r^2\}}d\Lambda_s.\end{aligned}$$
Donc, pour tout $t\geq 0$ et $r\geq 0$, on a
$$\begin{aligned}\widetilde{\sigma_\cdot^1(r)}&\leq\int_0^t\|Z_s\|^2\mathbf{1}_{\{\|Z_s\|>r\}}d\tilde{\Lambda}_s\\ et&\\ \widetilde{\sigma_\cdot^2(r)}&\leq\int_0^t\|Z_s\|^2\mathbf{1}_{\{\Delta\Lambda_s>r^2\}}d\tilde{\Lambda}_s\\ &\leq\mathbf{1}_{\{\sup_{s\leq t}\Delta\Lambda_s>r^2\}}\int_0^t\|Z_s\|^2d\tilde{\Lambda}_s,\end{aligned}$$
avec
$$\tilde{\Lambda}_s=tr\left\{\int_0^t V_s^{-1}d\langle M\rangle_s(V_s^*)^{-1}\right\}=tr\{\bar{\mathcal{K}}_t\}.$$
Il en résulte que, pour tout $\alpha\in]0,1]$ et $\epsilon>0$
$$\limsup_{t\to\infty}t^{-1}\widetilde{\sigma_t^H(\epsilon\sqrt{t})}\leq\limsup_{t\to\infty}t^{-1}\widetilde{\sigma_t^H(\alpha^{-3})}.$$
Pour terminer, il suffit de prouver
$$\limsup_{t\to\infty}t^{-1}\widetilde{\sigma_t^H(\alpha^{-3})}=0.\tag{3.39}$$
En effet, d'après le Lemme 3.4.5, on a
$$\widetilde{\sigma_t^H(\alpha^{-3})}\leq\int_0^t\|Z_s\|^2\mathbf{1}_{\{\|Z_s\|>\alpha^{-1}\}}d\tilde{\Lambda}_s+\mathbf{1}_{\{\sup_{s\leq t}\Delta\Lambda_s>\alpha^{-2}\}}\int_0^t\|Z_s\|^2d\tilde{\Lambda}_s.$$

Par suite,

$$t^{-1}\sigma_t^{\widetilde{H}(\alpha^{-3})} \leq t^{-1}\int_0^t \|Z_s\|^2 \mathbf{1}_{\{\|Z_s\|>\alpha^{-1}\}} d\tilde{\Lambda}_s + \mathbf{1}_{\{\sup_{s\leq t}\Delta\Lambda_s>\alpha^{-2}\}} t^{-1}\int_0^t \|Z_s\|^2 d\tilde{\Lambda}_s. \quad (3.40)$$

D'après la LFQ, il vient

$$t^{-1}\int_0^t \|Z_s\|^2 ds \longrightarrow \int_0^{+\infty} \|x\|^2 d\mu_\infty(x) \quad p.s., \quad (t \longrightarrow \infty).$$

On en déduit

$$t^{-1}\int_0^t \|Z_s\|^2 \mathbf{1}_{\{\|Z_s\|>\alpha^{-1}\}} ds \longrightarrow \int_0^{+\infty} \|x\|^2 \mathbf{1}_{\{\|x\|>\alpha^{-1}\}} d\mu_\infty(x) \quad p.s., \quad (t \longrightarrow \infty).$$

Vu le comportement asymptotique du processus $(\mathcal{K}_t)$ donné par la relation (3.28), on a

$$t^{-1}\bar{\mathcal{K}}_t \longrightarrow CU_2^* + U_2C \quad p.s., \quad (t \longrightarrow \infty)$$

et donc

$$\tilde{\Lambda}_t = \mathcal{O}(t) \quad p.s., \quad (t \longrightarrow \infty).$$

Par conséquent, on a

$$t^{-1}\int_0^t \|Z_s\|^2 d\tilde{\Lambda}_s \leq C^{te}\, t^{-1}\int_0^t \|Z_s\|^2 ds$$

et

$$t^{-1}\int_0^t \|Z_s\|^2 \mathbf{1}_{\{\|Z_s\|>\alpha^{-1}\}} d\tilde{\Lambda}_s \leq C^{te}\, t^{-1}\int_0^t \|Z_s\|^2 \mathbf{1}_{\{\|Z_s\|>\alpha^{-1}\}} ds.$$

En tenant compte de (3.40), pour tout $\alpha \in ]0,1]$, on obtient

$$t^{-1}\sigma_t^{\widetilde{H}(\alpha^{-3})} \leq \int_0^{+\infty} \|x\|^2 \mathbf{1}_{\{\|x\|>\alpha^{-1}\}} d\mu_\infty(x) + \mathbf{1}_{\{\sup_{s\leq t}\Delta\Lambda_s>\alpha^{-2}\}} \int_0^{+\infty} \|x\|^2 d\mu_\infty(x).$$

En faisant tendre $\alpha$ vers 0, le second terme du membre de droite de cette dernière inégalité tend vers 0 puisque, d'après le Lemme 3.4.4, on a presque-sûrement

$$\sup_{t>0} \Delta\Lambda_s < +\infty,$$

ce qui implique que, pour $\alpha$ qui tend vers 0, on a

$$\mathbf{1}_{\{\sup_{s\leq t}\Delta\Lambda_s>\alpha^{-2}\}} \longrightarrow 0.$$

De même, si $\alpha$ tend vers 0, on obtient

$$\mathbf{1}_{\{\|x\|>\alpha^{-1}\}} \longrightarrow 0,$$

et on en déduit

$$\int_0^{+\infty} \|x\|^2 \mathbf{1}_{\{\|x\|>\alpha^{-1}\}} d\mu_\infty(x) \longrightarrow 0, \quad (\alpha \longrightarrow 0).$$

Ainsi la relation (3.39) est établie. Par conséquent la martingale $H$ vérifie la condition de Lindeberg au sens de la convergence presque-sûre, à savoir

$$\forall \epsilon > 0, \quad \widetilde{\sigma_t^H(\epsilon\sqrt{t})} \longrightarrow 0 \quad (t \longrightarrow \infty). \qquad \diamond$$

Par ailleurs, vu cette dernière relation et le Lemme 3.4.3, et en appliquant le TLC à la martingale vectorielle $\mathrm{Vect}(H)$, on obtient

$$t^{-1/2} H_t \Longrightarrow \mathcal{N}_{d\times d}(0, \tilde{C} \otimes C). \tag{3.41}$$

**Fin de la preuve du Théorème 3.2.3**

La relation (3.38) implique

$$\tilde{D}_t + \int_0^t V_s^{-1} \frac{dV_s}{ds} \tilde{D}_s ds + \int_0^t \tilde{D}_s \left( V_s^{-1} \frac{dV_s}{ds} \right)^* ds = H_t + H_t^* + \bar{H}_t.$$

En tenant compte de la condition $(\mathcal{C}'_3)$, on obtient

$$\tilde{D}_t + \int_0^t (\Delta_{s,2} + U_2) \tilde{D}_s ds + \int_0^t \tilde{D}_s \left(\Delta_{s,2} + U_2\right)^* ds = H_t + H_t^* + \bar{H}_t.$$

Par suite, on a

$$\int_0^t (U_2 \tilde{D}_s + \tilde{D}_s U_2^*) ds = H_t + H_t^* + \bar{H}_t - \tilde{D}_t - 2\int_0^t \Delta_{s,2} \tilde{D}_s ds.$$

D'après la LL, à savoir

$$\|Z_s\|^2 = \mathbf{o}(s) \quad p.s.,$$

on a

$$\|\tilde{D}_s\| = \mathbf{o}(s) \quad p.s.$$

Vu qu'on a

$$\|\Delta_{s,2}\| = \mathcal{O}(s^{-3/2}),$$

il vient

$$\left\| \int_0^t \Delta_{s,2} \tilde{D}_s ds \right\| \leq \int_0^t \|\Delta_{s,2}\| \|\tilde{D}_s\| ds = \mathbf{o}(t^{1/2}) \quad p.s.$$

En tenant compte du fait que sous l'hypothèse $(\mathcal{H}''_2)$, on a

$$\bar{H}_t = \mathbf{o}(t^{1/2}) \quad p.s., \tag{3.42}$$

on obtient

$$t^{-1/2}\int_0^t (U_2\tilde{D}_s+\tilde{D}_sU_2^*)ds = t^{-1/2}H_t + t^{-1/2}H_t^* + t^{-1/2}\bar{H}_t - t^{-1/2}\tilde{D}_t + \mathbf{o}(1) \quad p.s.$$

En utilisant (3.41), (3.42) et le fait que

$$t^{-1/2}\tilde{D}_t \xrightarrow{\mathbb{P}} 0, \quad (t \longrightarrow \infty),$$

on montre que la famille des v.a. $\left(t^{-1/2}\int_0^t (U_2\tilde{D}_s+\tilde{D}_sU_2^*)ds\right)_t$ converge en loi vers $\nu_\infty$, où $\nu_\infty$ est la loi d'une variable aléatoire de la forme $\mathscr{C}^{\frac{1}{2}}G$, $G$ étant un vecteur gaussien standard d-dimensionnel et indépendant de $\mathscr{C}$ avec

$$\mathscr{C} = (\mathrm{tr}(S_2))^{-1}\{2C\otimes C + 2[(\mathrm{Vect}(C))(\mathrm{Vect}(C))^*]^{\perp}\}.$$

Ainsi, la preuve du Théorème 3.2.3.

### 3.4.2 Martingales à croissance mixte

Dans cette section, nous donnons une esquisse de preuve pour le Théorème 3.2.4 (resp. Théorème 3.2.5), qui se démontre d'une manière analogue au Théorème 3.2.1 (resp. Théorème 3.2.1). Les preuves des Théorèmes 3.2.8 et 3.2.9 se démontrent par de nouvelles techniques qui seront détaillées dans la suite.

## Esquisse de preuve du Théorème 3.2.4

Pour montrer le résultat du théorème, il suffit de montrer que pour $u=(u_1,u_2)\in \mathbb{R}^{d_1}\times\mathbb{R}^{d_2}$ et $Z_s=(Z_{1,s},Z_{2,s})$, on a

$$A_t^{-1}\int_0^t \exp\{i\langle u, Z_s\rangle\}dA_s \longrightarrow \ \psi_\infty(\eta,u), \quad (t\longrightarrow\infty), \tag{3.43}$$

où $\psi_\infty(\eta,u)$ est la fonction caractéristique associée à la mesure limite $\mu_\infty$, loi limite de $Z_\infty$.

Dans la suite, on introduit les processus $L=(L_1,L_2)$ et $\phi=(\phi_1,\phi_2)$ définis par

$$L_{t,k}(u_k) = (\phi_{t,k}(u_k))^{-1}\exp i\langle u_k, M_{t,k}\rangle \ \text{ et } \ \phi_{t,k}(u_k)=\exp B_{t,k}(u_k),\ k\in\{1,2\},$$

avec

$$B_{t,k}(u_k) = -\frac{1}{2}u_k^*\langle M_k^c\rangle_t u_k + \int_0^t\int_{\mathbb{R}^{d_k}}(\exp\{i\langle u_k,x\rangle\}-1-i\langle u_k,x\rangle)\nu^{M_k}(ds,dx),\ k\in\{1,2\}.$$

Par conséquent, montrer (3.43) revient à établir la convergence suivante :

$$A_t^{-1}\int_0^t L_s((V_s^*)^{-1}u)\phi_s((V_s^*)^{-1}u)dA_s \longrightarrow \phi_\infty(\eta,u), \quad (t\longrightarrow\infty). \tag{3.44}$$

En adaptant les mêmes techniques utilisées pour établir la relation (3.8), on montre

$$|L_t(u)| = (\phi_t(u))^{-1}\exp i\langle u, M_t\rangle \leq \exp\frac{1}{2}u^*\langle M\rangle_t u. \tag{3.45}$$

En introduisant le temps d'arrêt $T_r := \inf\{T_{r,b}\,;\,T^u_{r,c}\}$ où

$$T_{r,b} := \begin{cases} \inf\{t\leq r \text{ tel que } \quad \mathrm{tr}(V_r^{-1}\langle M\rangle_t(V_r^*)^{-1}) > b\} & \text{si } E_{r,b} \text{ est réalisé,}\\ \\ r & \text{sinon,}\end{cases}$$

et

$$T^u_{r,c} := \begin{cases} \inf\{t\leq r \text{ tel que } \quad |\phi_t((V_t^*)^{-1}u)|^{-1} > c\} & \text{si } E^u_{r,c} \text{ est réalisé,}\\ \\ r & \text{sinon,}\end{cases}$$

avec $E_{r,b} = \{\mathrm{tr}(V_r^{-1}\langle M\rangle_r(V_r^*)^{-1}) > b\}$ et $E^u_{r,c} = \{|\phi_r((V_r^*)^{-1}u)|^{-1} > c\}$, pour $u\in\mathbb{R}^d$ et $b>0$ (resp. $c>0$) désigne un point de continuité de la variable aléatoire $\mathrm{tr}(C)$ (resp. un point de continuité de la variable aléatoire $|\phi_\infty(\eta,u)|^{-1}$ ), on en déduit que la martingale locale complexe $\tilde{L}_t(u) = L_{t\wedge T_t}((V_t^*)^{-1}u)$ est bornée et d'espérance égale à 1. Ainsi, pour tout $u\in\mathbb{R}^d$, on a

$$A_t^{-1}\int_0^t \tilde{L}_s(u)\phi_s((V_s^*)^{-1}u)dA_s - \phi_\infty(\eta,u) = A_t^{-1}\int_0^t\left\{\tilde{L}_s(u)-1\right\}\phi_\infty(\eta,u)dA_s + \Sigma_t, \tag{3.46}$$

où $\Sigma_t = \Delta_t + \delta'_t + \delta''_t$ avec

$$\begin{aligned}\Delta_t &= A_t^{-1}\int_0^t\{\exp i\langle u, Z_s\rangle - \exp i\langle u, V_s^{-1}M_{s\wedge T_s}\rangle\}dA_s,\\ \delta'_t &= A_t^{-1}\int_0^t \tilde{L}_s(u)\{\phi_s((V_s^*)^{-1}u) - \phi_\infty(\eta,u)\}dA_s,\\ \delta''_t &= A_t^{-1}\int_0^t \tilde{L}_s(u)\{\phi_{s\wedge T_s}((V_s^*)^{-1}u) - \phi_s((V_s^*)^{-1}u)\}dA_s.\end{aligned}$$

En tenant compte des hypothèses suivantes :

$$\|\Delta_{1,\rho}\| = \mathcal{O}(A_\rho^{-\beta}) \quad \text{et} \quad \|\Delta_{2,\rho}\| = \mathcal{O}(\rho^{-\beta}), \quad (\rho\to\infty),\ \beta>1, \tag{3.47}$$

et de la même façon que pour la preuve les relations (3.11) et (3.12) de [5], on montre

$$\limsup_{t,b,c\to\infty} |\Delta_t| + |\delta''_t| = 0, \quad \lim_{t\to\infty} |\delta'_t| = 0 \tag{3.48}$$

et

$$A_t^{-1}\int_0^t \{L_{s\wedge T_s}((V_s^*)^{-1}u) - 1\}dA_s \longrightarrow 0 \quad p.s., \quad (t \longrightarrow \infty). \tag{3.49}$$

Le résultat du Théorème 3.2.4 est finalement établi, en utilisant (3.47), (3.48) et (3.49).

## Esquisse de preuve du Théorème 3.2.5

Tout d'abord, on montre la convergence suivante :

$$A_t^{-1}\int_0^t a_s\|Z_s\|^2 ds \longrightarrow \mathrm{tr}(C) \quad p.s., \quad (t \longrightarrow \infty), \tag{3.50}$$

où $Z_t = (Z_{1,t}, Z_{2,t})$ et $C = \mathrm{Diag}(C_1, C_2)$.
Notons que

$$A_t^{-1}\int_0^t a_s\|Z_s\|^2 ds = A_s^{-1}\int_0^t a_s\|Z_{1,s}\|^2 ds + A_t^{-1}\int_0^t a_s\|Z_{2,s}\|^2 ds. \tag{3.51}$$

Grâce à la loi forte quadratique, le premier terme du membre de droite de (3.51) tend vers $\mathrm{tr}(C_1)$ lorsque $t$ tend vers l'infini. Par une intégration par parties, on montre que le second terme s'écrit

$$A_t^{-1}\int_0^t a_s d\Gamma_s = A_t^{-1}a_t\Gamma_t - A_t^{-1}\int_0^t \Gamma_s a'_s ds \quad \text{avec} \quad d\Gamma_s = \|Z_{2,s}\|^2 ds. \tag{3.52}$$

En appliquant la LFQ dans le cas d'une normalisation explosive, on obtient

$$\frac{\Gamma_t}{t} \longrightarrow \mathrm{tr}(C_2)\ p.s., \quad (t \longrightarrow \infty). \tag{3.53}$$

En utilisant la condition $(\mathcal{C}_4)$, on obtient

$$A_t^{-1}a_t\Gamma_t \longrightarrow (1-\alpha)\,\mathrm{tr}(C_2)\ p.s., \quad (t \longrightarrow \infty). \tag{3.54}$$

En tenant compte de (3.53) et de la condition $(\mathcal{C}_4)$, on obtient

$$A_t^{-1}\int_0^t \Gamma_s\, a'_s ds \longrightarrow -\alpha\,\mathrm{tr}(C_2)\ p.s., \quad (t \longrightarrow \infty). \tag{3.55}$$

En insérant (3.54) et (3.55) dans (3.52), on obtient la relation (3.50).
Compte tenu du Théorème 3.2.4 et de l'hypothèse $(H_3)$, on en déduit

$$\liminf_{t\to\infty} \mathrm{tr}\{A_t^{-1}\int_0^t a_s\|Z_s\|^2 ds - C\} \geq 0. \tag{3.56}$$

En combinant la convergence (3.50) et l'inégalité (3.56), on obtient le résultat du Théorème 3.2.5.

## Preuve du théorème 3.2.8

Pour $Z_t = V_t^{-1} M_t$, la formule d'Itô donne :

$$\begin{aligned} Z_t Z_t^* &= \int_0^t V_s^{-1} M_s dM_s^* (V_s^*)^{-1} - \int_0^t V_s^{-1} M_s M_s^* (V_s^*)^{-1} dV_s^* (V_s^*)^{-1} \\ &\quad - \int_0^t V_s^{-1} dV_s V_s^{-1} M_s M_s^* (V_s^*)^{-1} + \int_0^t V_s^{-1} dM_s M_s^* (V_s^*)^{-1} \\ &\quad + \int_0^t V_s^{-1} d[M]_s (V_s^*)^{-1}, \end{aligned} \tag{3.57}$$

qu'on écrit sous la forme suivante :

$$\tilde{D}_t + \int_0^t V_s^{-1} dV_s \tilde{D}_s + \int_0^t \tilde{D}_s (dV_s)^* (V_s^*)^{-1} = H_t + H_t^* + \bar{H}_t, \tag{3.58}$$

avec $\tilde{D}_t = V_t^{-1}(MM^* - \langle M\rangle_t)(V_t^*)^{-1}$, $H = \mathrm{Diag}(H_1, H_2)$ et $\bar{H} = \mathrm{Diag}(\bar{H}_1, \bar{H}_2)$ définis, à valeurs dans $\mathbb{R}^{d_1 \times d_2}$, pour $k \in \{1, 2\}$, par

$$H_{k,t} = \int_0^t V_{k,s}^{-1} M_{k,s} dM_{k,s}^* (V_{k,s}^*)^{-1} \quad \text{et} \quad \bar{H}_{k,t} = \int_0^t V_{k,s}^{-1} (d[M_k]_s - d\langle M_k\rangle_s)(V_{k,s}^*)^{-1}.$$

Par conséquent, on obtient la relation-clé suivante :

$$\begin{aligned} &\mathrm{tr}\left\{ t^{-1/2} \int_0^t \{V_s^{-1} M_s M_s^* (V_s^*)^{-1} - V_s^{-1} \langle M\rangle_s (V_s^*)^{-1}\} V_s^{-1} dV_s \right\} = \\ &\qquad -\frac{1}{2} t^{-1/2} \mathrm{tr}\{\tilde{D}_t\} + t^{-1/2} \mathrm{tr}\{H_t\} + \frac{1}{2} t^{-1/2} \mathrm{tr}\{\bar{H}_t\}. \end{aligned} \tag{3.59}$$

Vu que

$$t^{-1/2} \tilde{D}_t = t^{-1/2} V_t^{-1} M_t M_t^* (V_t^*)^{-1} - t^{-1/2} V_t^{-1} \langle M\rangle_t (V_t^*)^{-1},$$

on obtient, d'après l'hypothèse $(H_1)$

$$\mathrm{tr}\{t^{-1/2} \tilde{D}_t\} \longrightarrow 0 \quad p.s., \quad (t \longrightarrow \infty). \tag{3.60}$$

Par ailleurs, sous l'hypothèse $(\tilde{\mathcal{H}''}_2)$, le Lemme 3 de Le Breton et Museila [12] s'applique et on a

$$A_t^{-1/2} \bar{H}_{1,t} \longrightarrow 0 \quad \text{et} \quad t^{-1/2} \bar{H}_{2,t} \longrightarrow 0 \quad p.s., \quad (t \longrightarrow \infty).$$

En écrivant

$$t^{-1/2} \bar{H}_{1,t} = t^{-1/2} A_t^{1/2} A_t^{-1/2} \bar{H}_{1,t},$$

la condition $(\mathcal{C}_4)$ implique

$$t^{-1/2} \bar{H}_{1,t} \longrightarrow 0 \quad p.s., \quad (t \longrightarrow \infty).$$

Ainsi, on a

$$t^{-1/2}\mathrm{tr}\{\bar{H}_t\} \longrightarrow 0 \quad p.s., \quad (t \longrightarrow \infty). \tag{3.61}$$

Le lemme suivant donne le comportement asymptotique du terme $\mathrm{tr}\{t^{-1/2}H_t\}$.

**Lemme 3.4.6** *Avec les notations précédentes, on a*

$$A_t^{-1/2}H_{1,t} \Longrightarrow \mathcal{N}(0, \tilde{C}_1 \otimes C_1), \quad avec \;\; \tilde{C}_1 = U_1C_1 + C_1U_1^*, \tag{3.62}$$

*et*

$$t^{-1/2}H_{2,t} \Longrightarrow \mathcal{N}(0, \tilde{C}_2 \otimes C_2), \quad avec \quad \tilde{C}_2 = U_2C_2 + C_2U_2^*. \tag{3.63}$$

**Preuve :**
La première assertion de ce lemme est démontrée par Chaâbane et Kebaier (voir relation (3.37) dans [5]). La seconde assertion est une conséquence directe du Lemme 3.4.3.

De la première assertion du Lemme 3.4.6 et de la condition $(\mathcal{C}_4)$, on en déduit que $t^{-1/2}H_{1,t}$ tend vers zéro en probabilité. Par suite, il vient

$$t^{-1/2}\mathrm{tr}\{H_t\} \Longrightarrow \mathcal{N}(0, \mathrm{tr}\{\tilde{C}_2 \otimes C_2\}). \tag{3.64}$$

En insérant (3.60), (3.61) et (3.64) dans (3.59), on obtient le résultat du Théorème 3.2.8.

## Preuve du théorème 3.2.9

Notons tout d'abord qu'en posant $\tilde{S} = \mathrm{Diag}(I_{d_1}, S_2)$, on a

$$\mathrm{tr}\left\{\int_1^t s^{-\alpha}\tilde{D}_s\tilde{S}\,ds\right\} = \mathrm{tr}\left\{\int_1^t s^{-\alpha}\tilde{D}_{1,s}\,ds\right\} + \mathrm{tr}\left\{\int_1^t s^{-\alpha}\tilde{D}_{2,s}\,S_2\,ds\right\}, \tag{3.65}$$

avec $\tilde{D}_{t,1} = v_t^{-2}(M_1M_1^* - \langle M_1\rangle_t)$ et $\tilde{D}_{t,2} = V_{t,2}^{-1}(M_2M_2^* - \langle M_2\rangle_t)(V_{t,2}^*)^{-1}$.

Par conséquent, afin de montrer le résultat du théorème, on étudie les comportements asymptotiques des deux termes de droite de cette dernière égalité, lesquels se déduisent des deux propriétés suivantes. Pour $\gamma > 0$ et $k \in \{1, 2\}$, on a

$(\mathcal{P}_1)$ : $$t^{-\gamma}\tilde{D}_{k,t} \xrightarrow{\mathbb{P}} 0, \quad (t \longrightarrow \infty),$$

et

$(\mathcal{P}_2)$ : $$t^{-(1-\alpha)/2}\int_1^t s^{-(\gamma+\frac{1+\alpha}{2})}\mathrm{tr}\{\tilde{D}_{k,s}\}ds \xrightarrow{\mathbb{P}} 0, \quad (t \longrightarrow \infty).$$

Ces deux propriétés sont une conséquence directe de l'application du lemme de Toeplitz et du fait que les couples $(M_k, V_k)$ vérifient l'hypothèse $(\mathcal{H}_1)$ pour $k \in \{1, 2\}$ et donc $V_{k,t}^{-1}M_{k,t}$ converge en loi.

1. **Comportement asymptotique de** $\mathrm{tr}\left\{\int_1^t s^{-\alpha}\tilde{D}_{2,s}\,S_2\,ds\right\}$ :

En réécrivant la relation (3.58) pour le couple $(M_{2,t}\,,\,t^{\alpha/2}V_{2,t})$, on obtient

$$\int_1^t s^{-\alpha}\mathrm{tr}\{\tilde{D}_{2,s}V_{2,s}^{-1}dV_{2,s}\} + \int_1^t s^{-\alpha}\mathrm{tr}\{\tilde{D}_{2,s}(V_{2,s}^{-1}dV_{2,s})^*\} = -\mathrm{tr}\{t^{-\alpha}\tilde{D}_{2,t}\} + \alpha\int_1^t s^{-\alpha-1}\mathrm{tr}\{\tilde{D}_{2,s}\}ds + \int_1^t s^{-\alpha}\mathrm{tr}\{2dH_{2,s} + d\bar{H}_{2,s}\}, \quad (3.66)$$

avec $H_{2,t} = \int_0^t V_{2,s}^{-1}M_{2,s}dM_{2,s}^*(V_{2,s}^*)^{-1}$ et $\bar{H}_{2,t} = \int_0^t V_{2,s}^{-1}(d[M_2]_s - d\langle M_2\rangle_s)(V_{2,s}^*)^{-1}$.

Vu la condition $(\mathcal{C}'_3)$ et le fait que $\|\Delta_{t,2}\| = \mathcal{O}(t^{-\beta})$, il vient

$$\int_1^t s^{-\alpha}\mathrm{tr}\{\tilde{D}_{2,s}V_{2,s}^{-1}dV_{2,s}\} + \int_1^t s^{-\alpha}\mathrm{tr}\{\tilde{D}_{2,s}(V_{2,s}^{-1}dV_{2,s})^*\} = \mathrm{tr}\left\{\int_1^t s^{-\alpha}\tilde{D}_{2,s}\,S_2\,ds\right\} + \mathcal{O}\left(\mathrm{tr}\left\{\int_1^t s^{-\alpha-\beta}\tilde{D}_{2,s}\,ds\right\}\right).$$

Par conséquent, la relation (3.66) s'écrit

$$\mathrm{tr}\left\{\int_1^t s^{-\alpha}\tilde{D}_{2,s}\,S_2\,ds\right\} = -\mathrm{tr}\{t^{-\alpha}\tilde{D}_{2,t}\} + \alpha\int_1^t s^{-\alpha-1}\mathrm{tr}\{\tilde{D}_{2,s}\}ds + \int_1^t s^{-\alpha}\mathrm{tr}\{(2dH_{2,s} + d\bar{H}_{2,s})\} + \mathcal{O}\left(\mathrm{tr}\left\{\int_1^t s^{-\alpha-\beta}\tilde{D}_{2,s}\,ds\right\}\right). \quad (3.67)$$

Notons qu'en choisissant $\gamma = (1+\alpha)/2$ dans $(\mathcal{P}_1)$ et $(\mathcal{P}_2)$, on a, d'une part,

$$\mathrm{tr}\{t^{-\alpha}\tilde{D}_{2,t}\} \xrightarrow{\mathbb{P}} 0, \quad (t \longrightarrow \infty), \quad (3.68)$$

et d'autre part

$$\int_1^t s^{-\alpha-1}\mathrm{tr}\{\tilde{D}_{2,s}\}ds \xrightarrow{\mathbb{P}} 0, \quad (t \longrightarrow \infty). \quad (3.69)$$

De même, en choisissant $\gamma = \beta - (1-\alpha)/2$ dans $(\mathcal{P}_2)$, on obtient

$$\mathrm{tr}\left\{\int_1^t s^{-\alpha-\beta}\tilde{D}_{2,s}\,ds\right\} \xrightarrow{\mathbb{P}} 0, \quad (t \longrightarrow \infty). \quad (3.70)$$

Par ailleurs, notons

$$B_{2,t} = \int_1^t s^{-\alpha}\mathrm{tr}\{dH_{2,s}\} \quad \text{et} \quad \bar{B}_{2,t} = \int_1^t s^{-\alpha}\mathrm{tr}\{d\bar{H}_{2,s}\}.$$

Alors on a

$$\int_1^t s^{-\alpha}\mathrm{tr}\{(2dH_{2,s} + d\bar{H}_{2,s})\} = 2\, B_{2,t} + \bar{B}_{2,t}. \tag{3.71}$$

Dans la suite, on étudie les comportements asymptotiques des deux martingales $B_{2,t}$ et $\bar{B}_{2,t}$.

(a) **Comportement asymptotique de** $(B_{2,t})$ :

La variation quadratique prévisible de la martingale $(B_{2,t},\, t \geq 0)$ est donnée par

$$\langle B_2\rangle_t = \int_1^t s^{-2\alpha}\mathrm{tr}\{d\langle H_2\rangle_s\}.$$

Grâce à une intégration par parties, on obtient

$$\int_1^t s^{-2\alpha}\mathrm{tr}\{d\langle H_2\rangle_s\} = t^{1-2\alpha}\mathrm{tr}\left\{\frac{\langle H_2\rangle_t}{t}\right\} + 2\alpha\int_1^t s^{-2\alpha}\mathrm{tr}\left\{\frac{\langle H_2\rangle_s}{s}\right\}ds.$$

Vu que $\langle H_2\rangle_t/t$ converge p.s. (voir Lemme 3.4.3), il vient

$$t^{1-2\alpha}\mathrm{tr}\left\{\frac{\langle H_2\rangle_t}{t}\right\} = \mathbf{o}(1) \quad p.s.$$

et

$$\int_1^t s^{-2\alpha}\mathrm{tr}\left\{\frac{\langle H_2\rangle_s}{s}\right\}ds = \mathcal{O}(1) \quad p.s.$$

Par conséquent, on a

$$\langle B_2\rangle_t = \int_1^t s^{-2\alpha}\mathrm{tr}\left\{d\langle H_2\rangle_s\right\} = \mathcal{O}(1) \quad p.s.,$$

ce qui implique

$$B_{2,t} = \mathcal{O}(1) \quad p.s. \tag{3.72}$$

(b) **Comportement asymptotique de** $(\bar{B}_{t,2})$ :

De même, par une intégration par parties, on obtient

$$\bar{B}_{2,t} = t^{-\alpha}\mathrm{tr}\{\bar{H}_{2,t}\} + \alpha\int_1^t s^{-(\alpha+1)}\mathrm{tr}\{\bar{H}_{2,s}\}ds.$$

Sous l'hypothèse $(\mathcal{H}''{}_2)$ (voir Remarque 3.2.7), à savoir

$$\int_0^t V_{2,s}^{-1}(d[M_2]_s - d\langle M_2\rangle_s)(V_{2,s}^*)^{-1} = \mathbf{o}(t^{1/2}) \quad p.s.,$$

on obtient

$$\bar{H}_{2,t} = \mathbf{o}\left(t^{1/2}\right) \quad p.s.$$

Par conséquent, on a

$$t^{-\alpha}\mathrm{tr}\{\bar{H}_{2,t}\} = \mathbf{o}\left(t^{1/2-\alpha}\right) \quad p.s.$$

et

$$\int_1^t s^{-(\alpha+1)}\mathrm{tr}\{\bar{H}_{2,s}\}ds = \mathcal{O}(1) \quad p.s.,$$

ce qui implique

$$\bar{B}_{2,t} = \mathbf{o}\left(t^{(1-\alpha)/2}\right) \quad p.s. \tag{3.73}$$

Vu les relations (3.67), (3.68), (3.69), (3.70), (3.72) et (3.73), on en déduit

$$t^{-(1-\alpha)/2}tr\left\{\int_1^t s^{-\alpha}\tilde{D}_{2,s}\,S\,ds\right\} \xrightarrow{\mathbb{P}} 0, \quad (t \longrightarrow \infty).$$

2. **Comportement asymptotique de** $\mathrm{tr}\left\{\int_1^t s^{-\alpha}\tilde{D}_{1,s}\,ds\right\}$ :

De même, en réécrivant la relation (3.58) pour le couple $(M_1, V_1)$ et en appliquant la trace, on obtient

$$\mathrm{tr}\left\{\int_1^t \tilde{D}_{1,s}\frac{dv_s}{v_s}\right\} = -\frac{1}{2}\mathrm{tr}\{\tilde{D}_{1,t}\} + \mathrm{tr}\{H_{1,t}\} + \frac{1}{2}\mathrm{tr}\{\bar{H}_{1,t}\}, \tag{3.74}$$

avec $H_{1,t} = \int_0^t v_s^{-2}M_{1,s}dM_{1,s}^*$ et $\bar{H}_{1,t} = \int_0^t v_s^{-2}(d[M_1]_s - d\langle M_1\rangle_s)$.

Or $\alpha \in [3/4, 1[$, donc on a

$$v_t^{-1}\frac{dv_t}{dt} = r^2t^{-\alpha} + \mathbf{o}(t^{-(1+\alpha)}). \tag{3.75}$$

On obtient donc

$$\mathrm{tr}\left\{\int_1^t \tilde{D}_{1,s}\frac{dv_s}{v_s}\right\} = r^2\mathrm{tr}\left\{\int_1^t s^{-\alpha}\tilde{D}_{1,s}ds\right\} + \mathbf{o}\left(\mathrm{tr}\left\{\int_1^t s^{-(1+\alpha)}\tilde{D}_{1,s}ds\right\}\right).$$

Par conséquent, la relation (3.74) s'écrit

$$\begin{aligned} r^2\mathrm{tr}\left\{\int_1^t s^{-\alpha}\tilde{D}_{1,s}ds\right\} &= -\frac{1}{2}\mathrm{tr}\{\tilde{D}_{1,t}\} + \frac{1}{2}\mathrm{tr}\{\bar{H}_{1,t}\} \\ &\quad + \mathrm{tr}\{H_{1,t}\} + \mathbf{o}\left(\mathrm{tr}\left\{\int_1^t s^{-(1+\alpha)}\tilde{D}_{1,s}ds\right\}\right). \end{aligned} \tag{3.76}$$

Choisissons $\gamma = (1-\alpha)/2$ dans $(\mathcal{P}_1)$, de telle sorte que

$$t^{-(1-\alpha)/2}\mathrm{tr}\{\tilde{D}_{1,t}\} \xrightarrow{\mathbb{P}} 0, \quad (t \longrightarrow \infty). \tag{3.77}$$

De même, en choisissant $\gamma = (1+\alpha)/2$ dans $(\mathcal{P}_2)$, on obtient

$$t^{-(1-\alpha)/2}\mathrm{tr}\left\{\int_1^t s^{-(1+\alpha)}\tilde{D}_{1,s}ds\right\} \xrightarrow{\mathbb{P}} 0, \quad (t \longrightarrow \infty). \tag{3.78}$$

Sous l'hypothèse $(\mathcal{H}''_2)$ (voir Remarque 3.2.7), on a

$$\int_0^t v_s^{-2}(d[M_1]_s - d\langle M_1\rangle_s) = \mathbf{o}(A_t^{1/2}) \quad p.s.$$

De la condition (3.75), on en déduit

$$\bar{H}_{1,t} = \mathbf{o}(t^{(1-\alpha)/2}) \quad p.s. \tag{3.79}$$

Par ailleurs, la première assertion du Lemme 3.4.6 et la relation (3.75) impliquent

$$\frac{\sqrt{1-\alpha}}{r}\, t^{-(1-\alpha)/2}\mathrm{tr}\{H_{1,t}\} \Longrightarrow \mathcal{N}(0, 2(\mathrm{tr}\{C_1\})^2). \tag{3.80}$$

Ainsi, le résultat du Théorème 3.2.8 découle des propriétés (3.76), (3.77), (3.78), (3.79) et (3.80).

# Bibliographie


[1] B. Bercu. On the convergence of moments in the almost sure central limit theorem for martingales with statistical applications. *Stochastic Process. Appl.*, 111(1) :157–173, 2004.

[2] Gunnar A. Brosamler. An almost everywhere central limit theorem. *Math. Proc. Cambridge Philos. Soc.*, 104(3) :561–574, 1988.

[3] F. Chaâbane. Version forte du théorème de la limite centrale fonctionnel pour les martingales. *C. R. Acad. Sci. Paris Sér. I Math.*, 323(2) :195–198, 1996.

[4] F. Chaâbane. Invariance principles with logarithmic averaging for martingales. *Studia Sci. Math. Hungar.*, 37(1-2) :21–52, 2001.

[5] F. Chaâbane and A. Kebaier. Théorèmes limites avec poids pour les martingales vectorielles à temps continu. *ESAIM Probab. Stat.*, 12 :464–491, 2008.

[6] F. Chaâbane and F. Maâouia. Théorèmes limites avec poids pour les martingales vectorielles. *ESAIM Probab. Statist.*, 4 :137–189 (electronic), 2000.

[7] F. Chaâbane, F. Maâouia, and A. Touati. Généralisation du théorème de la limite centrale presque-sûre pour les martingales vectorielles. *C. R. Acad. Sci. Paris Sér. I Math.*, 326(2) :229–232, 1998.

[8] B. Favetto and A. Samson. Parameter estimation for a bidimensional partially observed Ornstein-Uhlenbeck process with biological application. 2008.

[9] J. Jacod and A. N. Shiryaev. *Limit theorems for stochastic processes*, volume 288 of *Grundlehren der Mathematischen Wissenschaften [Fundamental Principles of Mathematical Sciences]*. Springer-Verlag, Berlin, second edition, 2003.

[10] J. Jacod and A.N. Shiryaev. *Limit theorems for stochastic processes*, volume 288 of *Grundlehren der Mathematischen Wissenschaften [Fundamental Principles of Mathematical Sciences]*. Springer-Verlag, Berlin, second edition, 2003.

[11] R. Krämer and M. Richter. A generalized bivariate Ornstein-Uhlenbeck model for financial assets. 2007.

[12] A. Le Breton and M. Musiela. Laws of large numbers for semimartingales with applications to stochastic regression. *Probab. Theory Related Fields*, 81(2) :275–290, 1989.

[13] M. A. Lifshits. Almost sure limit theorem for martingales. In *Limit theorems in probability and statistics, Vol. II (Balatonlelle, 1999)*, pages 367–390. János Bolyai Math. Soc., Budapest, 2002.

[14] A. W. Lo and J. Wang. Implementing option pricing models when asset returns are predictable. *The Journal of Finance*, 50 :87–129, 1995.

[15] L. C. G. Rogers and D. Williams. *Diffusions, Markov processes, and martingales. Vol. 2.* Cambridge Mathematical Library. Cambridge University Press, Cambridge, 2000. Foundations, Reprint of the second (1994) edition.

[16] A. Touati. Sur la convergence en loi fonctionnelle de suites de semimartingales vers un mélange de mouvements browniens. *Teor. Veroyatnost. i Primenen.*, 36(4) :744–763, 1991.

[17] A. Touati. Deux théorèmes de convergence en loi pour des intégrales stochastiques et application statistique. *Teor. Veroyatnost. i Primenen.*, 38(1) :128–153, 1993.

# Chapitre 4

# Propriétés asymptotiques de l'estimateur des moindres carrés d'un processus autorégressif gaussien par une méthode de moyennisation logarithmique

## 4.1 Introduction

Soit $W = (W_t,\, t \geq 0)$ un mouvement brownien réel standard. On définit le processus $X = (X^1, \ldots, X^p)^*$ avec $X_0 = 0$ par

$$dX_t = B_\theta X_t dt + b\, dW_t, \quad t \geq 0, \tag{4.1}$$

où $b^* = (0, \ldots, 0, \sigma) \in \mathbb{R}^p$ et

$$B_\theta = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \ddots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \ddots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 \\ \theta_1 & \theta_2 & \theta_3 & \cdots & \theta_{p-1} & \theta_p \end{pmatrix}.$$

Ce modèle a été étudié par exemple dans [8, 9, 10, 19]. Le processus $X = (X_t,\, t \geq 0)$ défini par (4.1) est un processus gaussien dont la $p$-ième composante $X^p$ est un processus autorégressif d'ordre $p$ ($AR(p)$) vérifiant l'équation différentielle stochastique suivante :

$$dX_t^p = \theta^* X_t dt + \sigma dW_t, \quad t \geq 0, \tag{4.2}$$

où $\theta = (\theta_1, \ldots, \theta_p) \in \mathbb{R}^p$. Notons que le processus $X = (X_t,\, t \geq 0)$ n'est autre que le processus d'Ornstein-Uhlenbeck multidimensionnel et estimer la matrice drift $B_\theta$ revient à estimer le paramètre $\theta$ du modèle $AR(p)$ donné par (4.2), vu que

$$B_\theta = e_p\, \theta + T,$$

où $e_p$ est le $p$-ième vecteur de la base canonique de $\mathbb{R}^p$ et $T$ une matrice triangulaire donnée par

$$T = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \ddots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \ddots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Le polynôme caractéristique de la matrice drift $B_\theta$ est donné par

$$P(z) = z^p - \theta_p z^{p-1} - \theta_{p-1} z^{p-2} - \cdots - \theta_2 z - \cdots - \theta_1.$$

Désignons par $\mathfrak{m}$ (resp. $\mathfrak{M}$) la plus petite (resp. la plus grande) partie réelle des racines du polynôme $P$. Le processus $X$ défini par (4.2) est dit stable ou régulier (resp. instable

ou explosif) si $\mathfrak{M}$ est strictement négative (resp. $\mathfrak{m}$ est strictement positive).
Soit $\hat{\theta}$ l'estimateur des moindres carrés de $\theta$ défini par

$$\hat{\theta}_t = \left[\int_0^t X_s {X_s}^* ds\right]^{-1} \int_0^t X_s d{X_s}^p. \tag{4.3}$$

Cet estimateur a fait l'objet de plusieurs études donnant sa consistance forte et sa normalité asymptotique (voir par exemple [8], [12], [18], [19]). Dans [19], Le Breton et Musiela, en utilisant une loi forte des grands nombres pour les martingles locales continues multidimensionnelles, ont montré que cet estimateur converge presque-sûrement. Plus précisément, on a

1. Dans le cas stable,
$$\|\hat{\theta}_t - \theta\| = \mathcal{O}\Big(\sqrt{\frac{\log t}{t}}\Big) \quad p.s. \tag{4.4}$$
2. Dans le cas instable,
$$\|\hat{\theta}_t - \theta\| = \mathcal{O}\Big(\sqrt{t}\, e^{-\mathfrak{m}t}\Big) \quad p.s. \tag{4.5}$$

Dans [8], Darwich a établi une loi du logarithme itéré (LLI) pour des martingales locales cadlag multidimensionnelles et a précisé l'ordre de la convergence de ce même estimateur dans le cas stable, à savoir

$$\limsup_{t\to\infty} \frac{\|\hat{\theta}_t - \theta\|\sqrt{t}}{\sqrt{\log\log t}} < +\infty \quad p.s. \tag{4.6}$$

Les théorèmes limites par moyennisation logarithmique pour les martingales à temps continu dont il est question ici ont fait l'objet de quelques publications. On cite en particulier les travaux de Chaâbane [3] pour des martingales continues, Chaâbane et Kebaier [5] dans le cas des martingales quasi-continues à gauche, à croissance régulière et plus récemment Fathallah et Kebaier [13] dans le cas des martingales quasi-continues à gauche, à croissance explosive et mixte (régulière et explosive). Dans ce travail, on applique ces résultats au processus autorégressif gaussien dans les deux cas stable et instable. Dans le premier cas, afin d'améliorer les vitesses de convergence associées au théorème de la limite centrale presque-sûre (TLCPS), à la loi forte quadratique associée au TLCPS (LFQ) et au théorème de la limite centrale logarithmique (TLCL) vérifiés par l'estimateur des moindres carrés $\hat{\theta}_t$ de $\theta$, on utilise comme dans [4] et [5] la méthode de pondération. Dans le cas instable, les mêmes propriétés asymptotiques sont établies pour l'estimateur des moindres carrés $\hat{\theta}$ de $\theta$ et les vitesses de convergence associées à ces propriétés sont arithmétiques. Ces résultats restent toujours liés aux propriétés classiques associées aux martingales telles que la loi forte des grands nombre (LFGN), le théorème de la limite centrale (TLC) ou encore la loi du logarithme itéré (LLI). L'exploitation des théorèmes limites par moyennisation logarithmique, en particulier le théorème de la limite centrale presque-sûre, la loi forte quadratique ou le théorème de la limite centrale logarithmique pour les martingales à temps continu, a permis de dégager d'autres propriétés de l'estimateur des moindres carrés $\hat{\theta}_t$ de $\theta$. Dans [4], l'étude du modèle de régression unidimensionnel dans le cas stable a permis entre autres de dégager une région de confiance asymptotique du couple $(\theta, \sigma^2)$. En effet, pour un mouvement brownien standard réel $B = (B_t,\, t \geq 0)$, on considère le processus d'Ornstein-Uhlenbeck $X = (X_t,\, t \geq 0)$ défini par l'équation différentielle stochastique suivante :

$$dX_t = \theta X_t dt + \sigma dB_t, \quad t \geq 0, \tag{4.7}$$

où $\sigma > 0$ et $\theta < 0$ sont des paramètres inconnus et l'état initial $X_0$ étant choisi indépendamment de $B$. L'estimateur des moindres carrés $\hat{\theta}_t$ de $\theta$ et l'estimateur $\widehat{\sigma}_t$ de $\sigma$ donné par $\widehat{\sigma}_t^2 := -2\widehat{\theta}_t I_t$ avec $I_t = \dfrac{1}{t}\displaystyle\int_0^t X_s^2 ds$ vérifient des propriétés asymptotiques de type :

- Un théorème de la limite centrale presque-sûre

  (TLCPS) $\quad \dfrac{1}{\log t}\displaystyle\int_1^t \frac{ds}{s}\,\delta_{\{\sqrt{s}(\widehat{\theta}_s - \theta)\}} \Longrightarrow \mathcal{N}(0, 2|\theta|) \quad p.s.,$

  où « $\Longrightarrow$ » désigne la convergence en loi ou la convergence étroite des mesures.
- Une loi forte quadratique

  (LFQ) $\quad \dfrac{1}{\log t}\displaystyle\int_1^t (\widehat{\theta}_s - \theta)^2 ds \longrightarrow 2|\theta| \qquad p.s., \quad (t \longrightarrow \infty).$
- Indépendance asymptotique pour le couple $(\theta, \sigma^2)$

  $\Big(\sqrt{t}(\widehat{\theta}_t - \theta)\,,\, t(\sigma^2 - \widehat{\sigma}_t^2)\Big) \Longrightarrow \mathcal{N}(0, 2|\theta|) \otimes (\dfrac{\sigma^2}{2|\theta|}\mathcal{X}^2(1) * \nu),$

  où $\nu$ est la loi de la variable aléatoire $-X_0^2$.

Dans [13], ces mêmes théorèmes limites ont été appliqués au modèle Ornstein-Uhlenbeck bivarié. Plus précisément, pour $\Gamma = (\Gamma_t = (B_t, W_t),\, t \geq 0)$ un mouvement brownien plan nul en zéro, on considère le modèle d'Ornstein-Uhlenbeck bivarié suivant :

$$\begin{cases} dX_t = \theta_1 X_t dt + \theta_2 Y_t dt + dB_t, & X_0 = x, \\ \\ dY_t = \theta_3 Y_t dt + dW_t, & Y_0 = y, \end{cases} \tag{4.8}$$

où $\theta = (\theta_1, \theta_2, \theta_3) \in \mathbb{R}^3$ avec $0 < \theta_3 < \theta_1$. Ces théorèmes limites ont permis de montrer que l'estimateur du maximum de vraisemblance $\hat{\theta}$ de $\theta$ vérifie les propriétés asymptotiques suivantes : pour $V_t = \mathrm{Diag}(e^{t\theta_1}, e^{t\theta_3}, e^{t\theta_3})$ et

$$I_t = \begin{pmatrix} e^{-2t\theta_1}\displaystyle\int_0^t X_s^2 ds & e^{-t(\theta_1+\theta_3)}\displaystyle\int_0^t X_s Y_s ds & 0 \\ e^{-t(\theta_1+\theta_3)}\displaystyle\int_0^t X_s Y_s ds & e^{-2t\theta_3}\displaystyle\int_0^t Y_s^2 ds & 0 \\ 0 & 0 & e^{-2t\theta_3}\displaystyle\int_0^t Y_s^2 ds \end{pmatrix},$$

– Un théorème de la limite centrale presque-sûre

$$(TLCPS) \qquad t^{-1}\int_0^t \delta_{\{I_s V_s(\hat{\theta}_s-\theta)\}} ds \Longrightarrow \mathcal{N}(0, I_\infty) \quad p.s.,$$

où $I_\infty$ est la limite presque-sûre de $I_t$.

– Une loi forte quadratique

$$(LFQ) \qquad t^{-1}\int_0^t I_s V_s(\widehat{\theta}_s-\theta)(\widehat{\theta}_s-\theta)^* V_s^* I_s^* ds \longrightarrow I_\infty \quad p.s., \quad (t\longrightarrow\infty).$$

Pour $\tilde{D}_s = I_s V_s(\widehat{\theta}_s-\theta)(\widehat{\theta}_s-\theta)^* V_s^* I_s^* - I_s$ et $U$ une matrice telle que

$$V_t^{-1}\frac{dV_t}{dt} \longrightarrow U, \quad (t\longrightarrow\infty), \text{ avec } \quad U+U^* \text{ inversible},$$

on a

– Un théorème de la limite centrale logarithmique

$$(TLCL) \quad t^{-1/2}\int_0^t (U\tilde{D}_s + \tilde{D}_s U)\, ds \Longrightarrow \nu_\infty,$$

où $\nu_\infty$ est la loi d'une variable aléatoire de la forme $\mathscr{C}^{\frac{1}{2}}G$, $G$ étant un vecteur gaussien standard d-dimensionnel et indépendant de $\mathscr{C}$.

## 4.2 Énoncés des principaux résultats

Dans la suite, on note $\|\cdot\|$ la norme euclidienne sur $\mathbb{R}^p$. Pour une matrice réelle carrée $A$, $A^*$ et tr$A$ désignent respectivement la matrice transposée et la trace de la matrice $A$. $\mathcal{I}_p$ dénote la matrice identité $p\times p$. La norme de la matrice $A$ est définie par : $\|A\| = \sqrt{\mathrm{tr}(AA^*)}$ et on désigne par $\lambda_{\mathfrak{m}}(A)$ (resp. $\lambda_{\mathfrak{M}}(A)$) la plus petite (resp. la plus grande) valeur propre de la matrice $A$. On note Vect$(A)$ le vecteur obtenu en empilant les vecteurs colonnes de la matrice $A$ et on note $[\mathrm{Vect}(A)\mathrm{Vect}(A)^*]^\perp$ la matrice à blocs dont le bloc d'indice $1\le i,j\le d$ est $A_j A_i^*$ où $A_1,\ldots,A_d$ sont les vecteurs colonnes de $A$. Le symbole $\otimes$ désigne le produit tensoriel de mesures ou de matrices.

### 4.2.1 Résultats relatifs au cas stable

Considérons $\tilde{\theta}_t$ l'estimateur des moindres carrés pondéré de $\theta$, défini par

$$\tilde{\theta}_t = P_t^{-1}\int_0^t \omega_s X_s dX_s, \tag{4.9}$$

correspondant au poids $(\omega_s)$ donné par

$$\omega_s = (1+s)^{-\frac{\alpha+\gamma}{2}} \exp\left\{\frac{2}{1-\alpha}(1+s)^{1-\alpha}\right\}, \quad \text{avec } \frac{1}{2}<\alpha<\gamma<1, \tag{4.10}$$

où

$$P_t = \int_0^t \omega_s X_s X_s^* ds$$

et on note $\bar{\theta}_t$ son moyennisé donné par

$$\bar{\theta}_t = \frac{1}{t}\int_0^t \tilde{\theta}_s ds. \tag{4.11}$$

Posons

$$u_t = \int_0^t \omega_s ds, \quad v_t = \Big(\int_0^t \omega_s^2 ds\Big)^{\frac{1}{2}}, \quad a_t = v_t^{-1}\frac{dv_t}{dt}$$

et introduisons le processus $I_1 = (I_{t,1},\, t \geq 0)$ défini par

$$I_{t,1} := \frac{1}{t}\int_0^t X_s {X_s}^* ds,$$

dont le comportement asymptotique est donné par (voir Le Breton [19])

$$I_{t,1} \longrightarrow I_{\infty,1} \quad p.s., \quad (t \longrightarrow \infty), \tag{4.12}$$

où $I_{\infty,1}$ est une matrice symétrique définie positive donnée par

$$I_{\infty,1} = \sigma^2 \int_0^{+\infty} e^{B_\theta s} e_p {e_p}^* e^{B_\theta^* s} ds, \tag{4.13}$$

où $e_p$ est le $p$-ième vecteur de la base canonique de $\mathbb{R}^p$.
Dans la suite, on suppose que le processus autorégressif gaussien stable $X$ vérifie l'hypothèse suivante :

$$(\mathcal{H}_1) \qquad \|I_{t,1} - I_{\infty,1}\| = \mathbf{o}(t^{-(1-\alpha')}) \quad p.s., \quad (t \longrightarrow \infty), \quad \text{pour } 1/2 \leq \alpha' < \alpha < 1.$$

**Théorème 4.2.1** *Soit $X = (X_t,\, t \geq 0)$ le processus autorégressif gaussien stable à temps continu défini par l'équation* (4.2)*. Si on suppose que l'hypothèse* ($\mathcal{H}_1$) *est vérifiée, alors l'estimateur des moindres carrés pondéré $\widetilde{\theta}_t$ de $\theta$ donné par la relation* (4.9) *ainsi que son moyennisé $\overline{\theta}_t$ convergent au sens presque-sûr. De façon plus précise, on a les propriétés suivantes :*

1. *Consistance forte et normalité asymptotique de $\tilde{\theta}_t$*

$$\|\tilde{\theta}_t - \theta\| = \mathcal{O}\Big(\sqrt{\frac{\log t}{t^\alpha}}\Big) \quad p.s. \quad et \quad t^{\alpha/2}(\tilde{\theta}_t - \theta) \Longrightarrow \sigma I_{\infty,1}^{-1/2} G,$$

*où $G$ est un vecteur gaussien standard d-dimensionnel et indépendant de $I_{\infty,1}$.*

2. *Consistance forte et normalité asymptotique de $\bar{\theta}_t$*

*Si $1/2 \le \alpha' < 3\alpha/2 - 1/2$ et $\alpha < 3/4$, alors on a*

$$\|\bar{\theta}_t - \theta\| = \mathcal{O}\Big(\sqrt{\frac{\log\log t}{t}}\Big) \quad p.s. \quad et \quad t^{1/2}(\bar{\theta}_t - \theta) \Longrightarrow \sigma I_{\infty,1}^{-1/2} G,$$

*où $G$ est un vecteur gaussien standard d-dimensionnel et indépendant de $I_{\infty,1}$.*

**Théorème 4.2.2** *On se place dans le cadre du théorème précédent, on a les résultats suivants :*

1. *Théorème de la limite centrale presque-sûre*

$$\text{(TLCPS)} \qquad \frac{1-\alpha}{t^{1-\alpha}} \int_1^t \frac{ds}{s^\alpha}\, \delta_{\{s^{\alpha/2}(\tilde{\theta}_s - \theta)\}} \Longrightarrow \mu_\infty \quad p.s.,$$

*où $\mu_\infty$ est la loi de la variable aléatoire $\sigma I_{\infty,1}^{-1/2} G$ où $G$ est un vecteur gaussien standard d-dimensionnel et indépendant de $I_{\infty,1}$.*

2. *La loi forte quadratique*

$$\text{(LFQ)} \quad \frac{1-\alpha}{t^{1-\alpha}} \int_0^t (\tilde{\theta}_s - \theta)(\tilde{\theta}_s - \theta)^* ds \longrightarrow \sigma^2 I_{\infty,1}^{-1} \quad p.s., \quad (t \longrightarrow \infty).$$

3. *Théorème de la limite centrale logarithmique*

$$\text{(TLCL)} \quad \left(\frac{t^{1-\alpha}}{1-\alpha}\right)^{1/2} \left(\frac{1-\alpha}{t^{1-\alpha}} \int_0^t (\tilde{\theta}_s - \theta)(\tilde{\theta}_s - \theta)^* ds - \sigma^2 I_{\infty,1}^{-1}\right) \Longrightarrow \nu_\infty,$$

*où $\nu_\infty$ est la loi d'une variable aléatoire de la forme $\mathscr{C}^{\frac{1}{2}} G$, $G$ étant un vecteur gaussien standard d-dimensionnel et indépendant de $\mathscr{C}$ avec*

$$\mathscr{C} = \sigma^{-12} I_{\infty,1}^{-2} \left\{2 I_{\infty,1} \otimes I_{\infty,1} + 2[(\mathrm{Vect}(I_{\infty,1}))(\mathrm{Vect}(I_{\infty,1}))^*]^\perp\right\} I_{\infty,1}^{-2}.$$

### 4.2.2 Résultats relatifs au cas instable

On introduit le processus $I_2 = (I_{t,2},\, t \ge 0)$ défini par

$$I_{t,2} := e^{-B_\theta t} \int_0^t X_s {X_s}^* ds\, e^{-B_\theta^* t}.$$

Son comportement asymptotique est donné par (voir Le Breton [17])

$$I_{t,2} \longrightarrow I_{\infty,2} \quad p.s., \quad (t \longrightarrow \infty), \tag{4.14}$$

où $I_{\infty,2}$ est la matrice symétrique définie positive donnée par

$$I_{\infty,2} := \sigma^4 \int_0^{+\infty} e^{-B_\theta s} Z Z^* e^{-B_\theta^* s} ds \tag{4.15}$$

et $Z$ désigne le vecteur aléatoire gaussien centré donné par

$$Z = \int_0^{+\infty} e^{-B_\theta s} dW_s.$$

Dans la suite, on suppose que le processus autorégressif gaussien instable $X$ vérifie l'hypothèse suivante :

$$(\mathcal{H}_2) \qquad \|I_{t,2} - I_{\infty,2}\| = \mathbf{o}(t^{-\beta}) \quad p.s., \quad (t \longrightarrow \infty), \quad \text{pour} \quad \beta > 1/2.$$

**Théorème 4.2.3** *Soit $X = (X_t,\, t \geq 0)$ le processus autorégressif gaussien instable à temps continu défini par l'équation (4.2). Si on suppose que le processus autorégressif gaussien $X$ vérifie l'hypothèse $(\mathcal{H}_2)$, alors on obtient les résultats suivants :*

1. *Normalité asymptotique de $\hat{\theta}_t$*

   $$e^{B_\theta^* t}(\hat{\theta}_t - \theta) \Longrightarrow \sigma I_{\infty,2}^{-1/2} G,$$

   *où $G$ est un vecteur gaussien standard indépendant de $I_{\infty,2}$.*
2. *Théorème de la limite centrale presque-sûre*

   $$\textit{(TLCPS)} \qquad \frac{1}{t}\int_0^t ds\, \delta_{\{e^{B_\theta^* s}(\hat{\theta}_s - \theta)\}} \Longrightarrow \mu_\infty \quad p.s.,$$

   *où $\mu_\infty$ est la loi de la variable aléatoire $\sigma I_{\infty,2}^{-1/2} G$ où $G$ est un vecteur gaussien standard d-dimensionnel et indépendant de $I_{\infty,2}$.*

   *De plus, si l'hypothèse $(\mathcal{H}_2)$ est vérifiée avec $\beta > 1$, alors on obtient*
3. *La loi forte quadratique*

   $$\textit{(LFQ)} \qquad \frac{1}{t}\int_0^t e^{B_\theta^* s}(\hat{\theta}_s - \theta)(\hat{\theta}_s - \theta)^* e^{B_\theta s}\, ds \longrightarrow \sigma^2 I_{\infty,2}^{-1} \quad p.s., \quad (t \longrightarrow \infty).$$

   *Si l'hypothèse $(\mathcal{H}_2)$ est vérifiée avec $\beta > 3/2$, alors on obtient*
4. *Théorème de la limite centrale logarithmique*

   $$\textit{(TLCL)} \qquad 2t^{-1/2}\mathrm{tr}\left\{\frac{1}{t}\int_0^t e^{B_\theta^* s}(\hat{\theta}_s - \theta)(\hat{\theta}_s - \theta)^* e^{B_\theta s}\, ds - \sigma^2 I_{\infty,2}^{-1}\right\} \Longrightarrow \nu_\infty \quad p.s.,$$

   *où $\nu_\infty$ est la loi d'une variable aléatoire de la forme $\mathscr{C}^{\frac{1}{2}} G$, $G$ étant un vecteur gaussien standard d-dimensionnel et indépendant de $\mathscr{C}$ avec*

   $$\mathscr{C} = \sigma^{-12}\mathrm{tr}\left\{(2\mathrm{tr}(B_\theta))^{-1} I_{\infty,2}^{-2}\left\{2 I_{\infty,2} \otimes I_{\infty,2} + 2[(\mathrm{Vect}(I_{\infty,2}))(\mathrm{Vect}(I_{\infty,2}))^*]^{\perp}\right\} I_{\infty,2}^{-2}\right\}.$$

## 4.3 Preuves des résultats

### 4.3.1 Preuves des résultats relatifs au cas stable

Dans la suite, on introduit la martingale vectorielle continue $\tilde{M}$ définie par

$$\tilde{M}_t = \sigma \int_0^t \omega_s X_s dW_s, \tag{4.16}$$

dont sa variation quadratique prévisible est donnée par

$$\langle \tilde{M} \rangle_t = \sigma^2 \int_0^t {\omega_s}^2 X_s X_s^* ds. \tag{4.17}$$

D'après (4.2) et (4.9), on obtient la relation-clé suivante :

$$\tilde{M}_t = P_t(\tilde{\theta}_t - \theta), \tag{4.18}$$

où

$$P_t = \int_0^t \omega_s X_s X_s^* ds.$$

Le lemme suivant donne des propriétés asymptotiques vérifiées par le poids $(\omega_t)$ introduit dans (4.10).

**Lemme 4.3.1** *Le poids* $(\omega_t)$, *défini dans* (4.10), *satisfait les propriétés suivantes :*

$P_1)$ $\quad t^\alpha \dfrac{\omega_t}{u_t} = 2 + \mathcal{O}(t^{-(1-\alpha)}), \quad (t \longrightarrow \infty).$

$P_2)$ $\quad t^\alpha \dfrac{\omega_t^2}{v_t^2} = 4 + \mathcal{O}(t^{-(1-\alpha)}), \quad (t \longrightarrow \infty).$

$P_3)$ $\quad t^{-\alpha/2} \dfrac{u_t}{v_t} = 1 + \mathcal{O}(t^{-(1-\alpha)}), \quad (t \longrightarrow \infty).$

$P_4)$ $\quad t^{\alpha/2} a_t^{1/2} = \sqrt{2} + \mathcal{O}(t^{-(1-\alpha)}), \quad (t \longrightarrow \infty).$

La preuve de ce lemme est donnée dans [4].

Dans le lemme suivant, on donne le comportement asymptotique de la variation quadratique prévisible de la martingale $\tilde{M}$ ainsi que celui du processus $P$.

**Lemme 4.3.2** *Sous l'hypothèse* $(\mathcal{H}_1)$, *on obtient*

*i)* $\quad \dfrac{\langle \tilde{M} \rangle_t}{v_t^2} - \sigma^2 I_{\infty,1} = \mathbf{o}(t^{-(\alpha-\alpha')}) \quad p.s., \quad (t \longrightarrow \infty).$

*ii)* $\quad \dfrac{P_t}{u_t} - I_{\infty,1} = \mathbf{o}(t^{-(\alpha-\alpha')}) \quad p.s., \quad (t \longrightarrow \infty).$

### Preuve du lemme 4.3.2

**i)** D'après la relation (4.17), on a

$$\begin{aligned}\langle \tilde{M}\rangle_t &= \sigma^2\int_0^t \omega_s^2 d(sI_{s,1}) = \sigma^2\int_0^t \omega_s^2 I_{s,1}ds + \sigma^2\int_0^t s\omega_s^2 dI_{s,1}\\ &= \sigma^2 v_t^2 I_{\infty,1} + \sigma^2\int_0^t \omega_s^2(I_{s,1}-I_{\infty,1})ds + \sigma^2\int_0^t s\omega_s^2 dI_{s,1}.\end{aligned}$$

Grâce à une intégration par parties, on obtient l'égalité suivante :

$$\langle \tilde{M}\rangle_t = \sigma^2 v_t^2 I_{\infty,1} + \sigma^2\int_0^t \omega_s^2(I_{s,1}-I_{\infty,1})ds + \sigma^2 t\omega_t^2(I_{t,1}-I_{\infty,1}) - \sigma^2\int_0^t (I_{s,1}-I_{\infty,1})d(s\omega_s^2).$$

Par suite, il vient

$$\left\|\frac{\langle \tilde{M}\rangle_t}{v_t^2} - \sigma^2 I_{\infty,1}\right\| \leq \sigma^2 \sup_{s\leq t}\|I_{s,1}-I_{\infty,1}\|\Big(1+2t\frac{w_t^2}{v_t^2}\Big).$$

Compte tenu de la propriété $(P_2)$ du lemme 4.3.1, on obtient

$$\left\|\frac{\langle \tilde{M}\rangle_t}{v_t^2} - \sigma^2 I_{\infty,1}\right\| = \sigma^2 \sup_{s\leq t}\|I_{s,1}-I_{\infty,1}\|\left(1+\mathcal{O}(t^{(1-\alpha)})\right).$$

La première assertion du lemme 4.3.2 découle alors de l'hypothèse $(\mathcal{H}_1)$ et du fait que $1-\alpha-\beta < -(\alpha-\alpha')$.

**ii)** D'après l'expression de $P_t$, on a

$$P_t = \int_0^t w_s d(sI_{s,1}) = \int_0^t w_s I_{s,1}ds + \int_0^t s w_s dI_{s,1}.$$

Une intégration par parties donne

$$P_t - u_t I_{\infty,1} = t w_t(I_{t,1}-I_{\infty,1}) + \int_0^t w_s(I_{s,1}-I_{\infty,1})ds - \int_0^t (I_{s,1}-I_{\infty,1})d(sw_s),$$

ce qui implique

$$\left\|\frac{P_t}{u_t} - I_{\infty,1}\right\| \leq \sup_{s\leq t}\|I_{s,1}-I_{\infty,1}\|\Big(1+2t\frac{w_t}{u_t}\Big).$$

En utilisant la propriété $(P_1)$ du lemme 4.3.1, il vient

$$\left\|\frac{P_t}{u_t} - I_{\infty,1}\right\| = \sup_{s\leq t}\|I_{s,1}-I_{\infty,1}\|\Big(1+\mathcal{O}(t^{(1-\alpha)})\Big).$$

De même, la seconde assertion du lemme découle de l'hypothèse $(\mathcal{H}_1)$, ce qui achève la preuve du lemme 4.3.2.

**Lemme 4.3.3** *La martingale vectorielle continue $\tilde{M}$ définie par la relation* (4.16) *vérifie les propriétés asymptotiques suivantes :*

1. *Théorème de la limite centrale*

$$\text{(TLC)} \qquad \frac{\tilde{M}_t}{v_t} \Longrightarrow \sigma I_{\infty,1}^{1/2} G,$$

*où $G$ est un vecteur gaussien standard d-dimensionnel et indépendant de $I_{\infty,1}$.*

2. *Théorème de la limite centrale presque-sûre*

$$\text{(TLCPS)} \qquad \frac{1-\alpha}{t^{1-\alpha}} \int_1^t \frac{ds}{s^\alpha}\, \delta_{\{\tilde{M}_s/v_s\}} \Longrightarrow \mu_\infty \quad p.s.,$$

*où $\mu_\infty$ est la loi de la variable aléatoire $\sigma I_{\infty,1}^{1/2} G$ où $G$ est un vecteur gaussien standard d-dimensionnel et indépendant de $I_{\infty,1}$.*

3. *La loi forte quadratique*

$$\text{(LFQ)} \qquad \frac{1-\alpha}{t^{1-\alpha}} \int_0^t s^{-\alpha} \frac{\tilde{M}_s}{v_s} \frac{\tilde{M}_s^*}{v_s}\, ds \longrightarrow \sigma^2 I_{\infty,1} \quad p.s., \quad (t \longrightarrow \infty).$$

4. *Théorème de la limite centrale logarithmique*

$$\text{(TLCL)} \qquad \left(\frac{t^{1-\alpha}}{1-\alpha}\right)^{-1/2} \int_1^t s^{-\alpha} \Big(\frac{\tilde{M}_s}{v_s} \frac{\tilde{M}_s^*}{v_s} - \sigma^2 I_{\infty,1}\Big) ds \Longrightarrow \nu_\infty,$$

*où $\nu_\infty$ est la loi d'une variable aléatoire de la forme $\mathscr{C}^{\frac{1}{2}} G$, $G$ étant un vecteur gaussien standard d-dimensionnel et indépendant de $\mathscr{C}$ avec*

$$\mathscr{C} = \sigma^4 \{2 I_{\infty,1} \otimes I_{\infty,1} + 2[(\mathrm{Vect}(I_{\infty,1}))(\mathrm{Vect}(I_{\infty,1}))^*]^\perp\}.$$

**Preuve du lemme 4.3.3**

1. Vu la première assertion du lemme précédent, on a

$$\frac{\langle \tilde{M} \rangle_t}{v_t^2} \longrightarrow \sigma^2 I_{\infty,1} \quad p.s., \quad (t \longrightarrow \infty).$$

En appliquant le TLC à la martingale continue $\tilde{M}$, on obtient la première assertion du lemme, à savoir

$$\frac{\tilde{M}_t}{v_t} \Longrightarrow \sigma I_{\infty,1}^{1/2} G,$$

où $G$ est un vecteur gaussien standard d-dimensionnel et indépendant de $I_{\infty,1}$.

2. En appliquant le théorème de la limite centrale presque-sûre (voir théorème 1 dans [2]) pour le couple $(\tilde{M}, v)$ où $\tilde{M}$ est la martingale continue à croissance régulière donnée par (4.16) et normalisée par $v_t = \left(\int_0^t \omega_s^2 ds\right)^{1/2}$, on obtient

$$(\log v_t^2)^{-1} \int_1^t \delta_{\{\tilde{M}_s/v_s\}} d(\log v_s^2) \Longrightarrow \mu_\infty \quad p.s.,$$

   où $\mu_\infty$ est la loi de la variable aléatoire $\sigma I_{\infty,1}^{1/2} G$.

   Par ailleurs, la propriété $(P_2)$ du lemme 4.3.1 implique

$$\log v_t^2 \sim \frac{4}{1-\alpha} t^{1-\alpha} \quad (t \longrightarrow \infty). \tag{4.19}$$

   Combiné avec la convergence précédente, on en déduit

$$\frac{1-\alpha}{t^{1-\alpha}} \int_1^t \delta_{\{\tilde{M}_s/v_s\}} \frac{ds}{s^\alpha} \Longrightarrow \mu_\infty \quad p.s.$$

3. La LFQ1 (voir théorème 3 dans [2]) appliquée à la martingale continue $\tilde{M}$, normalisée par le processus $v_t = \left(\int_0^t \omega_s^2 ds\right)^{1/2}$, donne

$$(\log v_t^2)^{-1} \int_1^t \frac{\tilde{M}_s}{v_s} \frac{\tilde{M}_s^*}{v_s} d(\log v_s^2) \longrightarrow \sigma^2 I_{\infty,1} \quad p.s., \quad (t \longrightarrow \infty). \tag{4.20}$$

   La troisième assertion du lemme découle de l'équivalence (4.19).
4. D'après le corollaire 2.2 dans [5] appliqué au couple $(\tilde{M}, v)$, on a

$$(\log v_t^2)^{-1/2} \int_1^t \Big(\frac{\tilde{M}_s}{v_s} \frac{\tilde{M}_s^*}{v_s} - \frac{\langle \tilde{M} \rangle_s}{v_s^2}\Big) d(\log v_s^2) \Longrightarrow \nu_\infty,$$

   où $I_{\infty,1}$ est la loi d'une variable aléatoire de la forme $\mathscr{C}^{\frac{1}{2}} G$, $G$ étant un vecteur gaussien standard d-dimensionnel et indépendant de $\mathscr{C}$ avec

$$\mathscr{C} = \sigma^4 \{2 I_{\infty,1} \otimes I_{\infty,1} + 2[(\mathrm{Vect}(I_{\infty,1}))(\mathrm{Vect}(I_{\infty,1}))^*]^\perp\}.$$

   En tenant compte de l'équivalence (4.19), à savoir

$$\log v_t^2 \sim \frac{4}{1-\alpha} t^{1-\alpha} \quad (t \longrightarrow \infty),$$

on obtient

$$\left(\frac{t^{1-\alpha}}{1-\alpha}\right)^{-1/2}\int_1^t s^{-\alpha}\left(\frac{\tilde{M}_s}{v_s}\frac{\tilde{M}_s^*}{v_s}-\frac{\langle\tilde{M}\rangle_s}{v_s^2}\right)ds \Longrightarrow \nu_\infty. \tag{4.21}$$

Par ailleurs, on a

$$\left(\frac{t^{1-\alpha}}{1-\alpha}\right)^{-1/2}\int_1^t s^{-\alpha}\left(\frac{\tilde{M}_s}{v_s}\frac{\tilde{M}_s^*}{v_s}-\frac{\langle\tilde{M}\rangle_s}{v_s^2}\right)ds$$

$$\begin{aligned}= \left(\frac{t^{1-\alpha}}{1-\alpha}\right)^{-1/2}\int_1^t s^{-\alpha}\left(\frac{\tilde{M}_s}{v_s}\frac{\tilde{M}_s^*}{v_s}-\sigma^2 I_{\infty,1}\right)ds \\ -\left(\frac{t^{1-\alpha}}{1-\alpha}\right)^{-1/2}\int_1^t s^{-\alpha}\left(\frac{\langle\tilde{M}\rangle_s}{v_s^2}-\sigma^2 I_{\infty,1}\right)ds.\end{aligned} \tag{4.22}$$

Vu la première assertion du lemme 4.3.2, à savoir

$$\frac{\langle\tilde{M}\rangle_t}{v_t^2}-\sigma^2 I_{\infty,1}=\mathbf{o}(t^{-(\alpha-\alpha')}) \quad p.s., \quad (t\longrightarrow\infty),$$

on obtient

$$\left(\frac{t^{1-\alpha}}{1-\alpha}\right)^{-1/2}\int_1^t s^{-\alpha}\left(\frac{\langle\tilde{M}\rangle_s}{v_s^2}-\sigma^2 I_{\infty,1}\right)ds=\mathbf{o}\left(t^{\alpha'-3\alpha/2+1/2}\right) \quad p.s., \quad (t\longrightarrow\infty).$$

Comme par hypothèse on a $\alpha' < (3\alpha-1)/2$, alors

$$\left(\frac{t^{1-\alpha}}{1-\alpha}\right)^{-1/2}\int_1^t s^{-\alpha}\left(\frac{\langle\tilde{M}\rangle_s}{v_s^2}-\sigma^2 I_{\infty,1}\right)ds=\mathbf{o}(1) \quad p.s., \quad (t\longrightarrow\infty). \tag{4.23}$$

La dernière assertion du lemme 4.3.3 est établie en combinant (4.21), (4.22) et (4.23).

Le lemme 4.3.3 est ainsi établi.

## Preuve du théorème 4.2.1

1. D'après Le Breton et Musiela (voir lemme 3.3 dans [19]), on a

$$\lambda_{\mathfrak{m}}(\langle\tilde{M}\rangle_t)\longrightarrow+\infty \quad p.s., \quad (t\longrightarrow\infty).$$

Le comportement asymptotique du processus $\langle\tilde{M}\rangle^{-1}\tilde{M}$ est donné par Darwich (voir théorème 1 dans [8]). En effet, on a

$$\limsup_{t\to\infty} \frac{v_t \left|[\langle\tilde{M}\rangle_t^{-1}\tilde{M}_t]_i\right|}{\sqrt{2\log\log v_t^2}} < +\infty \quad p.s., \quad i=1,\ldots,d. \tag{4.24}$$

On en déduit

$$\begin{aligned} v_t \left|[\langle\tilde{M}\rangle_t^{-1}\tilde{M}_t]_i\right| &= \left|[\langle\tilde{M}\rangle_t^{-1} v_t P_t(\tilde{\theta}_t-\theta)]_i\right| \\ &= \left|[\langle\tilde{M}\rangle_t^{-1} v_t^2 \frac{u_t}{v_t}\frac{P_t}{u_t}(\tilde{\theta}_t-\theta)]_i\right|, \quad \text{pour} \quad i=1,\ldots,d. \end{aligned} \tag{4.25}$$

En utilisant la propriété $(P_4)$ du lemme 4.3.1 et le lemme (4.3.2), on en déduit pour $i=1,\ldots,d$,

$$v_t \left|[\langle\tilde{M}\rangle_t^{-1}\tilde{M}_t]_i\right| \sim \sigma^{-2} t^{\frac{\alpha}{2}} \left|[\tilde{\theta}_t-\theta]_i\right| \quad (t \longrightarrow \infty). \tag{4.26}$$

Vu l'équivalence (4.19) et en combinant les relations (4.24) et (4.26), on obtient

$$\limsup_{t\to\infty} \sqrt{\frac{\sigma^{-4}t^{\alpha}}{2\log\frac{4t^{1-\alpha}}{1-\alpha}}} \left|[\tilde{\theta}_t-\theta]_i\right| < +\infty \quad p.s., \quad i=1,\ldots,d.$$

Donc

$$\limsup_{t\to\infty} \sqrt{\frac{t^{\alpha}}{\log t}} \left|[\tilde{\theta}_t-\theta]_i\right| < +\infty \quad p.s., \quad i=1,\ldots,d,$$

ce que implique

$$[\tilde{\theta}_t-\theta]_i = \mathcal{O}\Big(\sqrt{\frac{\log t}{t^{\alpha}}}\Big), \quad i=1,\ldots,d.$$

Par conséquent, on en déduit la première propriété de la consistance forte de l'estimateur $\tilde{\theta}_t$ de $\theta$, à savoir

$$\|\tilde{\theta}_t-\theta\| = \mathcal{O}\left(\sqrt{\frac{\log t}{t^{\alpha}}}\right) \quad p.s.$$

Par ailleurs, l'hypothèse $(\mathcal{H}_1)$, la propriété $(P_3)$ du lemme 4.3.1 et l'assertion ii) du lemme 4.3.2 impliquent

$$v_s^{-1}P_s = I_{\infty,1}\, s^{\frac{\alpha}{2}} + \mathbf{o}\Big(s^{\alpha'-\frac{\alpha}{2}}\Big) \quad p.s., \tag{4.27}$$

ce qui donne, combiné avec le TLC du lemme 4.3.3 et la relation (4.18), la normalité asymptotique de l'estimateur $\tilde{\theta}$ de $\theta$. Ainsi on a établi la première partie du théorème 4.2.1.

2. Posons $\tilde{Z}_s = \tilde{M}_s / v_s$. D'après les relations (4.11) et (4.18), on a

$$\sqrt{t}(\bar{\theta}_t - \theta) = \frac{1}{\sqrt{t}} \int_0^t P_s^{-1} \tilde{M}_s ds = \frac{1}{\sqrt{t}} \int_0^t v_s P_s^{-1} \tilde{Z}_s \, ds.$$

En combinant la propriété $(P_4)$ du lemme 4.3.1 et l'assertion ii) du lemme 4.3.2, on obtient

$$\begin{aligned} v_s P_s^{-1} &= \frac{v_s}{u_s} u_s P_s^{-1} = \left(s^{-\frac{\alpha}{2}} + \mathbf{o}(s^{\frac{\alpha}{2}-1})\right)\left(I_{\infty,1}^{-1} + \mathbf{o}(s^{\alpha'-\alpha})\right) \quad p.s., \\ &= I_{\infty,1}^{-1} s^{-\frac{\alpha}{2}} + \mathbf{o}(s^{\alpha'-3\alpha/2}) + \mathbf{o}(s^{\alpha/2-1}) + \mathbf{o}(s^{\alpha'-\alpha/2-1}) \quad p.s. \end{aligned}$$

Or $\alpha < 3/4$ et $\alpha' \geq 1/2$, donc $\alpha' - 3\alpha/2 > \alpha/2 - 1$ et $\alpha' - 3\alpha/2 > \alpha' - \alpha/2 - 1$ et on en déduit

$$v_s P_s^{-1} = I_{\infty,1}^{-1} s^{-\frac{\alpha}{2}} + \mathbf{o}(s^{\alpha'-3\alpha/2}) \quad p.s.$$

Il en résulte que

$$\sqrt{t}(\bar{\theta}_t - \theta) = \frac{I_{\infty,1}^{-1}}{\sqrt{t}} \int_0^t s^{-\frac{\alpha}{2}} \tilde{Z}_s \, ds + \mathbf{o}\left(\frac{1}{\sqrt{t}} \int_0^t s^{\alpha' - \frac{3}{2}\alpha} \tilde{Z}_s \, ds\right) \quad p.s. \tag{4.28}$$

Par suite, on a

$$\sqrt{t}\|\bar{\theta}_t - \theta\| \leq \|I_{\infty,1}\|^{-1} \frac{1}{\sqrt{t}} \int_0^t s^{-\frac{\alpha}{2}} \|\tilde{Z}_s\| \, ds + \mathbf{o}\Big(\frac{1}{\sqrt{t}} \int_0^t s^{\alpha' - \frac{3}{2}\alpha} \|\tilde{Z}_s\| \, ds\Big). \tag{4.29}$$

La relation (4.18) combinée avec la propriété $(P_4)$ du lemme 4.3.1 et l'assertion ii) du lemme 4.3.2 impliquent

$$\tilde{Z}_s \sim I_{\infty,1} s^{\frac{\alpha}{2}} (\tilde{\theta}_s - \theta) \quad (s \longrightarrow \infty). \tag{4.30}$$

Grâce à la première assertion du théorème, à savoir

$$\|\tilde{\theta}_t - \theta\| = \mathcal{O}\left(\sqrt{\frac{\log t}{t^\alpha}}\right) \quad p.s.$$

et à l'équivalence (4.30), on obtient

$$\|\tilde{Z}_t\| = \mathcal{O}\left(\sqrt{\log t}\right) \quad p.s. \tag{4.31}$$

Par ailleurs, on a

$$a_s \tilde{Z}_s ds = -d\tilde{Z}_s + v_s^{-1} d\tilde{M}_s, \tag{4.32}$$

ce qui implique

$$\int_0^t a_s^{1/2}\tilde{Z}_s ds = -\int_0^t a_s^{-1/2} d\tilde{Z}_s + \int_0^t a_s^{-1/2} v_s^{-1} d\tilde{M}_s.$$

Grâce à la propriété $(P_4)$ du lemme 4.3.1, on obtient les équivalences suivantes :

$$\int_0^t a_s^{1/2}\tilde{Z}_s ds \sim \sqrt{2}\int_0^t s^{-\alpha/2}\tilde{Z}_s ds \quad (t \longrightarrow \infty),$$

$$\int_0^t a_s^{-1/2} d\tilde{Z}_s \sim \frac{1}{\sqrt{2}}\int_0^t s^{\alpha/2} d\tilde{Z}_s \quad (t \longrightarrow \infty)$$

et

$$\int_0^t a_s^{-1/2} v_s^{-1} d\tilde{M}_s \sim \frac{1}{\sqrt{2}}\int_0^t s^{\alpha/2} v_s^{-1} d\tilde{M}_s \quad (t \longrightarrow \infty).$$

D'où

$$\int_0^t s^{-\alpha/2}\tilde{Z}_s ds \sim L_t - K_t \quad (t \longrightarrow \infty), \tag{4.33}$$

où $L = (L_t,\, t \geq 0)$ est la martingale vectorielle continue définie par

$$L_t = \frac{1}{2}\int_0^t s^{\frac{\alpha}{2}} v_s^{-1} d\tilde{M}_s$$

et $K = (K_t,\, t \geq 0)$ est le processus donné par

$$K_t = \frac{1}{2}\int_0^t s^{\frac{\alpha}{2}} d\tilde{Z}_s.$$

Par conséquent, on obtient l'inégalité suivante :

$$\frac{1}{\sqrt{t}}\int_0^t s^{-\alpha/2}\|\tilde{Z}_s\| ds \leq \frac{\|L_t\|}{\sqrt{t}} - \frac{\|K_t\|}{\sqrt{t}}. \tag{4.34}$$

En vue d'étudier le comportement asymptotique du membre de gauche de la relation (4.34) qui nous permettra de donner le comportement asymptotique de $\sqrt{t}\|\bar{\theta}_t - \theta\|$ via l'inégalité (4.29), on étudiera ceux de $K$ et $L$.

**Comportement asymptotique du processus $K$**

Grâce à une intégration par parties, on obtient

$$K_t = \frac{t^{\alpha/2}}{2}\tilde{Z}_t - \frac{\alpha}{4}\int_0^t s^{\frac{\alpha}{2}-1}\tilde{Z}_s\, ds. \tag{4.35}$$

D'où l'inégalité suivante :

$$\|K_t\| \leq t^{\frac{\alpha}{2}}\|\tilde{Z}_t\| + \int_0^t s^{\frac{\alpha}{2}-1}\|\tilde{Z}_s\|ds,$$

qui donne, combinée avec la relation (4.31)

$$\|K_t\| = \mathcal{O}\Big(\sqrt{t^\alpha \log t}\Big) \quad p.s. \tag{4.36}$$

**Comportement asymptotique du processus $L$**

La variation quadratique prévisible de la martingale vectorielle continue $L$ s'écrit

$$\langle L\rangle_t = \frac{1}{4}\int_0^t s^\alpha \frac{d\langle\tilde{M}\rangle_s}{v_s^2}. \tag{4.37}$$

En tenant compte de la relation (4.17), à savoir

$$\langle\tilde{M}\rangle_t = \sigma^2 \int_0^t {\omega_s}^2 X_s X_s^* ds,$$

il vient

$$\langle L\rangle_t = \frac{\sigma^2}{4}\int_0^t s^\alpha \frac{{\omega_s}^2}{v_s^2} X_s X_s^* ds.$$

Vu la propriété $(P_2)$ du lemme 4.3.1, on obtient

$$\frac{\langle L\rangle_t}{t} = \sigma^2 I_{t,1} + \mathcal{O}\left(\frac{1}{t}\int_0^t s^{-(1-\alpha)} X_s X_s^* ds\right),$$

et grâce au lemme de Toeplitz, on obtient la convergence suivante :

$$\frac{\langle L\rangle_t}{t} \longrightarrow \sigma^2 I_{\infty,1} \quad p.s., \quad (t \longrightarrow \infty).$$

Par conséquent, on a

$$\langle L\rangle_t = \mathcal{O}(t) \quad p.s.$$

Par ailleurs, en utilisant la relation (4.37) et la propriété $(P_2)$ du lemme 4.3.1, on obtient l'équivalence suivante :

$$\langle L\rangle_t \sim \int_0^t w_s^{-2} d\langle\tilde{M}\rangle_s \quad (t \longrightarrow \infty).$$

En tenant compte de la relation (4.17), on obtient

$$\langle L\rangle_t \sim \langle M\rangle_t = \sigma^2 \int_0^t X_s X_s^* \, ds \quad (t \longrightarrow \infty),$$

où $M$ est la martingale vectorielle continue donnée par la relation (4.56). Par conséquent et vu le lemme 3.3 dans [19], il vient

$$\lambda_{\mathfrak{m}}(\langle L\rangle_t) \longrightarrow +\infty \quad p.s., \quad (t \longrightarrow +\infty).$$

Grâce à la LLI (voir théorème 1 dans [8]), on a le comportement asymptotique du processus $\langle L\rangle^{-1}L$

$$\limsup_{t\to\infty} \frac{\sqrt{t}\left|[\langle L\rangle_t^{-1}L_t]_i\right|}{\sqrt{2\log\log t}} < +\infty \quad p.s., \quad i = 1,\ldots,d. \tag{4.38}$$

Il en résulte que la norme de la martingale $L$ vérifie

$$\|L_t\| = \mathcal{O}\Big(\sqrt{t\log\log t}\Big) \quad p.s. \tag{4.39}$$

En insérant (4.36) et (4.39) dans (4.34), on obtient le comportement asymptotique du premier terme du membre de droite de la relation (4.29), à savoir

$$\begin{aligned} \|I_{\infty,1}\|^{-1}\frac{1}{\sqrt{t}}\int_0^t s^{-\alpha/2}\|\tilde{Z}_s\|ds &= \mathcal{O}\Big(\sqrt{\log\log t}\Big) + \mathcal{O}\Big(\sqrt{t^{\alpha-1}\log t}\Big) \quad p.s. \\ &= \mathcal{O}\Big(\sqrt{\log\log t}\Big) \quad p.s. \end{aligned}$$

Vu que le second terme du membre de droite de la relation (4.29) s'écrit

$$\mathbf{o}\Big(\frac{1}{\sqrt{t}}\int_0^t s^{\alpha'-\frac{3}{2}\alpha}\|\tilde{Z}_s\|\,ds\Big) \sim \mathbf{o}\Big(t^{\alpha'-\frac{3}{2}\alpha+\frac{1}{2}}\sqrt{\log t}\Big) \quad p.s., \quad (t \longrightarrow \infty),$$

on en déduit

$$\|\bar{\theta}_t - \theta\| = \mathcal{O}\Big(\sqrt{\frac{\log\log t}{t}}\Big) + \mathbf{o}\Big(t^{\alpha'-\frac{3}{2}\alpha}\sqrt{\log t}\Big) \quad p.s.$$

Comme $\alpha' < (3\alpha-1)/2$, on obtient

$$\|\bar{\theta}_t - \theta\| = \mathcal{O}\Big(\sqrt{\frac{\log\log t}{t}}\Big) \quad p.s.,$$

et donc la propriété de la consistance forte de l'estimateur $\bar{\theta}_t$ de $\theta$. Pour achever la preuve du théorème 4.2.1, il reste à prouver que l'estimateur $\bar{\theta}_t$ de $\theta$ vérifie un TLC.
En utilisant l'équivalence (4.33), il vient

$$\frac{1}{\sqrt{t}}\int_0^t s^{-\alpha/2}\tilde{Z}_s ds \sim \frac{L_t}{\sqrt{t}} - \frac{K_t}{\sqrt{t}} \quad (t \longrightarrow \infty). \tag{4.40}$$

Or, d'après la relation (4.35), on a

$$\frac{K_t}{\sqrt{t}} = \frac{t^{\frac{\alpha-1}{2}}}{2}\tilde{Z}_t - \frac{\alpha}{4\sqrt{t}}\int_0^t s^{\alpha/2-1}\tilde{Z}_s ds. \tag{4.41}$$

En tenant compte de la relation (4.28), à savoir

$$\sqrt{t}(\bar{\theta}_t - \theta) = \frac{I_{\infty,1}^{-1}}{\sqrt{t}}\int_0^t s^{-\frac{\alpha}{2}}\tilde{Z}_s\, ds + \mathbf{o}\Big(\frac{1}{\sqrt{t}}\int_0^t s^{\alpha'-3\alpha/2}\tilde{Z}_s\, ds\Big), \quad p.s.,$$

du fait que

$$\mathbf{o}\Big(\frac{1}{\sqrt{t}}\int_0^t s^{\alpha'-3\alpha/2}\tilde{Z}_s\, ds\Big) = \mathbf{o}\left(t^{\alpha'-3\alpha/2+1/2}\sqrt{\log t}\right) = \mathbf{o}(1) \quad p.s.,$$

(car $\alpha' < 3\alpha/2 - 1/2$) et des deux relations (4.40) et (4.41), on obtient presque sûrement

$$\sqrt{t}(\bar{\theta}_t - \theta) \sim -\frac{I_{\infty,1}^{-1}}{2}t^{\frac{\alpha-1}{2}}\tilde{Z}_t + I_{\infty,1}^{-1}\frac{L_t}{\sqrt{t}} + \frac{\alpha I_{\infty,1}^{-1}}{4\sqrt{t}}\int_0^t s^{\alpha/2-1}\tilde{Z}_s ds\ (t \longrightarrow \infty). \tag{4.42}$$

Le premier terme du membre de droite de cette dernière équivalence tend vers 0 vu que $\tilde{Z}_s$ converge en loi, et de même le dernier terme car

$$\frac{\alpha I_{\infty,1}^{-1}}{4\sqrt{t}}\int_0^t s^{\alpha/2-1}\tilde{Z}_s ds = \mathcal{O}\left(\sqrt{t^{\alpha-1}\log t}\right) = \mathbf{o}(1) \quad p.s.$$

Quant au second terme, comme

$$\frac{\langle L\rangle_t}{t} \longrightarrow \sigma^2 I_{\infty,1} \quad p.s., \quad (t \longrightarrow \infty),$$

alors d'après le TLC appliqué à la martingale continue $L$, on obtient

$$I_{\infty,1}^{-1}\frac{L_t}{\sqrt{t}} \Longrightarrow \sigma I_{\infty,1}^{-1/2}G, \tag{4.43}$$

où $G$ est un vecteur gaussien standard d-dimensionnel et indépendant de $I_{\infty,1}$. On obtient le dernier résultat en insérant la relation (4.43) dans (4.42). Cela achève la preuve du théorème 4.2.1.

## Preuve du théorème 4.2.2

1. Rappelons d'abord les relations (4.18) et (4.27), à savoir

$$\tilde{M}_t = P_t(\tilde{\theta}_t - \theta)$$

et
$$\frac{P_s}{v_s} = I_{\infty,1}\, s^{\frac{\alpha}{2}} + \mathbf{o}\Big(s^{\alpha'-\frac{\alpha}{2}}\Big) \quad p.s.$$
Posons
$$F_t = \frac{1}{t^{1-\alpha}} \int_1^t \varphi\left(\frac{P_s}{v_s}(\tilde{\theta}_s - \theta)\right) \frac{ds}{s^\alpha} - \frac{1}{t^{1-\alpha}} \int_1^t \varphi\left(I_{\infty,1}\, s^{\alpha/2}(\tilde{\theta}_s - \theta)\right) \frac{ds}{s^\alpha},$$
où $\varphi$ est une fonction lipschitzienne continue bornée, alors
$$\|F_t\| \leq C^{te}\, t^{-(1-\alpha)} \int_1^t s^{-\alpha} \left\| \frac{P_s}{v_s} - I_{\infty,1}\, s^{\alpha/2} \right\| \|\tilde{\theta}_s - \theta\| ds.$$
En tenant compte de la relation (4.27) et du fait que
$$\|\tilde{\theta}_t - \theta\| = \mathcal{O}\left(\sqrt{\frac{\log t}{t^\alpha}}\right) \quad p.s.,$$
on obtient
$$\|F_t\| = \mathbf{o}\left(t^{\alpha'-2\alpha+1}\sqrt{\log t}\right) p.s., \quad (t \longrightarrow \infty).$$
Vu que $\alpha < 3/4$, il vient
$$F_t \longrightarrow 0 \quad p.s., \quad (t \longrightarrow \infty).$$
La première assertion du lemme 4.3.3 et la relation (4.18) impliquent
$$\frac{1-\alpha}{t^{1-\alpha}} \int_1^t \frac{ds}{s^\alpha}\, \delta_{\left\{\frac{P_s}{v_s}(\tilde{\theta}_s - \theta)\right\}} \Longrightarrow \mu_\infty \quad p.s.,$$
où $\mu_\infty$ est la loi de la variable aléatoire $\sigma I_{\infty,1}^{1/2} G$ où $G$ est un vecteur gaussien standard d-dimensionnel et indépendant de $I_{\infty,1}$.

Par conséquent
$$\frac{1-\alpha}{t^{1-\alpha}} \int_1^t \frac{ds}{s^\alpha}\, \delta_{\{s^{\alpha/2} I_{\infty,1}(\tilde{\theta}_s - \theta)\}} \Longrightarrow \mu_\infty \quad p.s.$$
Cela donne la première assertion du théorème 4.2.2.

2. Posons
$$\tilde{\delta}_s = (\tilde{\theta}_s - \theta)(\tilde{\theta}_s - \theta)^*$$
et
$$\tilde{\delta}_{s,t} = (\tilde{\theta}_s - \bar{\theta}_t)(\tilde{\theta}_s - \bar{\theta}_t)^*.$$

On a

$$\frac{1-\alpha}{t^{1-\alpha}}\left\|\int_1^t s^{-\alpha}\frac{P_s}{v_s}\tilde{\delta}_s\frac{P_s}{v_s}\,ds - I_{\infty,1}\int_1^t\tilde{\delta}_s ds\, I_{\infty,1}\right\|$$
$$\leq t^{-(1-\alpha)}\left(\|\tilde{J}_{t,1}\|+\|\tilde{J}_{t,2}\|+\|\tilde{J}_{t,3}\|\right), \qquad (4.44)$$

avec

$$\begin{aligned}
\tilde{J}_{t,1} &= \int_1^t s^{-\alpha}\left(\frac{P_s}{v_s}-s^{\alpha/2}I_{\infty,1}\right)\tilde{\delta}_s\left(\frac{P_s}{v_s}-s^{\alpha/2}I_{\infty,1}\right)ds,\\
\tilde{J}_{t,2} &= \int_1^t s^{-\alpha/2}\left(\frac{P_s}{v_s}-s^{\alpha/2}I_{\infty,1}\right)\tilde{\delta}_s\,ds\,I_{\infty,1},\\
\tilde{J}_{t,3} &= \int_1^t s^{-\alpha/2}\tilde{\delta}_s\left(\frac{P_s}{v_s}-s^{\frac{\alpha}{2}}I_{\infty,1}\right)ds.
\end{aligned}$$

D'une part, le processus $(\tilde{J}_{t,1})$ est majoré par

$$t^{-(1-\alpha)}\|\tilde{J}_{t,1}\|\leq t^{-(1-\alpha)}\int_1^t s^{-\alpha}\left\|\frac{P_s}{v_s}-s^{\alpha/2}I_{\infty,1}\right\|^2\left\|\tilde{\theta}_s-\theta\right\|^2 ds.$$

D'autre part, on a

$$\|\tilde{\theta}_s-\theta\|^2=\mathcal{O}\left(\frac{\log s}{s^{\alpha}}\right)\quad p.s.,$$

et de la relation (4.27), on obtient

$$\left\|\frac{P_s}{v_s}-s^{\alpha/2}I_{\infty,1}\right\|^2=\mathbf{o}\left(s^{-(\alpha-2\alpha')}\right)\quad p.s.$$

On en déduit

$$t^{-(1-\alpha)}\|\tilde{J}_{t,1}\|=\mathbf{o}\left(t^{2(\alpha'-\alpha)}\log t\right)=\mathbf{o}(1)\quad p.s.,\quad (t\longrightarrow\infty). \qquad (4.45)$$

De même, les deux processus $(\tilde{J}_{t,2})$ et $(\tilde{J}_{t,3})$ sont majorés par

$$\begin{aligned}
t^{-(1-\alpha)}\|\tilde{J}_{t,2}\| &= t^{-(1-\alpha)}\|\tilde{J}_{t,3}\|\\
&\leq \|I_{\infty,1}\|\,t^{-(1-\alpha)}\int_1^t s^{-\alpha/2}\left\|\frac{P_s}{v_s}-s^{\alpha/2}I_{\infty,1}\right\|\left\|\tilde{\theta}_s-\theta\right\|^2 ds.
\end{aligned}$$

il vient

$$t^{-(1-\alpha)}\|\tilde{J}_{t,2}\|=\mathbf{o}\left(t^{\alpha'-\alpha}\log t\right)=\mathbf{o}(1)\quad p.s.,\quad (t\longrightarrow\infty). \qquad (4.46)$$

Par conséquent, vu que $I_{\infty,1}$ est inversible et en tenant compte du lemme 4.3.3 et des deux relations (4.18) et (4.44), on obtient

$$\frac{1-\alpha}{t^{1-\alpha}} \int_1^t \tilde{\delta}_s ds \longrightarrow \sigma^2 I_{\infty,1}^{-1} \quad p.s., \quad (t \longrightarrow \infty). \tag{4.47}$$

Par ailleurs, on a

$$\frac{1-\alpha}{t^{1-\alpha}} \left\| \int_1^t \tilde{\delta}_s - \tilde{\delta}_{s,t}\, ds \right\| \leq t^{-(1-\alpha)} \left( \|\tilde{K}_{t,1}\| + \|\tilde{K}_{t,2}\| + \|\tilde{K}_{t,3}\| \right), \tag{4.48}$$

avec

$$\begin{aligned} \tilde{K}_{t,1} &= \int_1^t (\tilde{\theta}_s - \bar{\theta}_t)\, ds\, (\bar{\theta}_t - \theta)^*, \\ \tilde{K}_{t,2} &= (\bar{\theta}_t - \theta) \int_1^t (\tilde{\theta}_s - \bar{\theta}_t)^*\, ds, \\ \tilde{K}_{t,3} &= (t-1)(\bar{\theta}_t - \theta)(\bar{\theta}_t - \theta)^*. \end{aligned}$$

Vu que les deux processus $(\tilde{K}_{t,1})$ et $(\tilde{K}_{t,2})$ sont majorés par

$$\begin{aligned} & t^{-(1-\alpha)}\|\tilde{K}_{t,1}\| = t^{-(1-\alpha)}\|\tilde{K}_{t,2}\| \\ & \qquad \leq t^{-(1-\alpha)}\|\bar{\theta}_t - \theta\| \int_1^t \|\tilde{\theta}_s - \theta\|\, ds + (t-1)t^{-(1-\alpha)}\|\bar{\theta}_t - \theta\|^2, \end{aligned} \tag{4.49}$$

et en tenant compte du fait que

$$\|\tilde{\theta}_t - \theta\| = \mathcal{O}\Big(\sqrt{\frac{\log t}{t^\alpha}}\Big) \quad p.s. \quad \text{et} \quad \|\bar{\theta}_t - \theta\| = \mathcal{O}\Big(\sqrt{\frac{\log\log t}{t}}\Big) \quad p.s.,$$

on en déduit

$$\begin{aligned} t^{-(1-\alpha)}\|\tilde{K}_{t,1}\| &= t^{-(1-\alpha)}\|\tilde{K}_{t,2}\| \\ &= \mathcal{O}\left(t^{-(1-\alpha)/2}\sqrt{\log t}\sqrt{\log\log t}\right) \\ &= \mathcal{O}\left(t^{-(1-\alpha)}\log\log t\right). \end{aligned}$$

Il en résulte que

$$t^{-(1-\alpha)}\|\tilde{K}_{t,1}\| \longrightarrow 0 \quad p.s. \quad \text{et} \quad t^{-(1-\alpha)}\|\tilde{K}_{t,2}\| \longrightarrow 0 \quad p.s., \quad (t \longrightarrow \infty). \tag{4.50}$$

Le processus $(\tilde{K}_{t,3})$ est majoré par

$$t^{-(1-\alpha)}\|\tilde{K}_{t,3}\| \leq (t-1)t^{-(1-\alpha)}\|\bar{\theta}_t - \theta\|^2.$$

Donc, on a

$$t^{-(1-\alpha)}\|\tilde{K}_{t,3}\| = \mathcal{O}\left(t^{-(1-\alpha)}\log\log t\right) \quad p.s., \quad (t \longrightarrow \infty).$$

Par conséquent, on obtient

$$t^{-(1-\alpha)}\|\tilde{K}_{t,3}\| \longrightarrow 0 \quad p.s., \quad (t \longrightarrow \infty). \tag{4.51}$$

Enfin, en insérant les relations (4.50) et (4.51) dans l'inégalité (4.48), il vient

$$\frac{1-\alpha}{t^{1-\alpha}}\left\|\int_1^t \tilde{\delta}_s - \tilde{\delta}_{s,t}\, ds\right\| \longrightarrow 0 \quad p.s., \quad (t \longrightarrow \infty). \tag{4.52}$$

La seconde assertion du théorème découle des propriétés (4.47) et (4.52).

3. Notons que

$$\left(\frac{t^{1-\alpha}}{1-\alpha}\right)^{-1/2}\int_1^t s^{-\alpha}\Big(\frac{\tilde{M}_s}{v_s}\frac{\tilde{M}_s^*}{v_s} - \sigma^2 I_{\infty,1}\Big)ds$$
$$= \left(\frac{t^{1-\alpha}}{1-\alpha}\right)^{-1/2}\int_1^t s^{-\alpha}\frac{\tilde{M}_s}{v_s}\frac{\tilde{M}_s^*}{v_s}ds - \left(\frac{t^{1-\alpha}}{1-\alpha}\right)^{1/2}\sigma^2 I_{\infty,1}.$$

De la relation (4.18), on a

$$\tilde{M}_s\tilde{M}_s^* = P_s\tilde{\delta}_s P_s. \tag{4.53}$$

Par suite, grâce à la quatrième assertion du lemme 4.3.3, on a

$$\Big(\frac{t^{1-\alpha}}{1-\alpha}\Big)^{-1/2}\int_1^t s^{-\alpha}\frac{P_s}{v_s}\tilde{\delta}_s\frac{P_s}{v_s}ds - \Big(\frac{t^{1-\alpha}}{1-\alpha}\Big)^{1/2}\sigma^2 I_{\infty,1} \Longrightarrow \nu_\infty.$$

Par ailleurs, notons que

$$\left(\frac{t^{1-\alpha}}{1-\alpha}\right)^{-1/2}\left\|\int_1^t s^{-\alpha}\frac{P_s}{v_s}\tilde{\delta}_s\frac{P_s}{v_s}\, ds - I_{\infty,1}\int_1^t \tilde{\delta}_s ds\, I_{\infty,1}\right\| \leq$$
$$t^{-(1-\alpha)/2}\left(\|\tilde{J}_{t,1}\| + \|\tilde{J}_{t,2}\| + \|\tilde{J}_{t,3}\|\right), \tag{4.54}$$

où les processus $(\tilde{J}_{t,i})$, $i \in \{1,2,3\}$, sont définis par la relation (4.44). De la relation (4.45), on obtient

$$t^{-(1-\alpha)/2}\|\tilde{J}_{t,1}\| = \mathbf{o}\left(t^{2\alpha'-5\alpha/2+1/2}\right) \quad p.s., \quad (t \longrightarrow \infty).$$

De la relation (4.46), on obtient

$$t^{-(1-\alpha)/2}\|\tilde{J}_{t,2}\| = t^{-(1-\alpha)/2}\|\tilde{J}_{t,3}\| = \mathbf{o}\left(t^{\alpha'-3\alpha/2+1/2}\right) \quad p.s., \quad (t \longrightarrow \infty).$$

Vu que $\alpha' < (3\alpha - 1)/2$, on a

$$t^{-(1-\alpha)/2}\|\tilde{J}_{t,1}\| = \mathbf{o}\,(1) \quad p.s., \quad (t \longrightarrow \infty)$$

et

$$t^{-(1-\alpha)/2}\|\tilde{J}_{t,2}\| = t^{-(1-\alpha)/2}\|\tilde{J}_{t,3}\| = \mathbf{o}\,(1) \quad p.s., \quad (t \longrightarrow \infty).$$

Par conséquent, en tenant compte de la relation (4.54), on obtient quand $t$ tend vers l'infini,

$$\left(\frac{t^{1-\alpha}}{1-\alpha}\right)^{-1/2}\left\| \int_1^t s^{-\alpha}\frac{P_s}{v_s}\tilde{\delta}_s\frac{P_s}{v_s}\,ds - I_{\infty,1}\int_1^t \tilde{\delta}_s ds\, I_{\infty,1}\right\| \longrightarrow 0 \quad p.s. \tag{4.55}$$

Par suite, on en déduit

$$\left(\frac{t^{1-\alpha}}{1-\alpha}\right)^{1/2}\left(\frac{1-\alpha}{t^{1-\alpha}}\int_1^t \tilde{\delta}_s\,ds - \sigma^2 I_{\infty,1}^{-1}\right) \Longrightarrow \nu_\infty,$$

où $\nu_\infty$ est la loi d'une variable aléatoire de la forme $\mathscr{C}^{\frac{1}{2}}G$, $G$ étant un vecteur gaussien standard d-dimensionnel et indépendant de $\mathscr{C}$ avec

$$\mathscr{C} = \sigma^4 I_{\infty,1}^{-2}\left\{2I_{\infty,1}\otimes I_{\infty,1} + 2[(\mathrm{Vect}(I_{\infty,1}))(\mathrm{Vect}(I_{\infty,1}))^*]^\perp\right\} I_{\infty,1}^{-2}.$$

Le résultat découle de la convergence (4.52), ce qui achève la preuve du théorème 4.2.2.

### 4.3.2 Preuves des résultats relatifs au cas instable

Dans la suite, on introduit la martingale vectorielle continue $M$ définie par

$$M_t = \sigma\int_0^t X_s dW_s. \tag{4.56}$$

Sa variation quadratique est donnée par

$$\langle M\rangle_t = \sigma^2\int_0^t X_s X_s^* ds,$$

dont le comportement asymptotique est donné par (voir relation (4.14))

$$e^{-B_\theta t}\langle M\rangle_t e^{-B_\theta^* t} \longrightarrow \sigma^2 I_{\infty,2} \quad p.s., \quad (t \longrightarrow \infty).$$

D'après (4.2) et (4.3), on obtient la relation-clé suivante :

$$M_t = \sigma^{-2}\langle M\rangle_t(\hat{\theta}_t - \theta). \tag{4.57}$$

**Lemme 4.3.4** *La martingale vectorielle continue $M$ définie par* (4.56) *vérifie les propriétés asymptotiques suivantes :*

1. *Théorème de la limite centrale*

   *(TLC)* $\quad e^{-B_\theta t}M_t \Longrightarrow \sigma I_{\infty,2}^{1/2}G,$

   *où $G$ est un vecteur gaussien standard d-dimensionnel et indépendant de $I_{\infty,2}$.*

2. *Théorème de la limite centrale presque-sûre*

   *(TLCPS)* $\quad \frac{1}{t}\int_0^t ds\, \delta_{\{e^{-B_\theta s}M_s\}} \Longrightarrow \mu_\infty \quad p.s.,$

   *où $\mu_\infty$ est la loi de la variable aléatoire $\sigma I_{\infty,2}^{1/2}G$ où $G$ est un vecteur gaussien standard d-dimensionnel et indépendant de $I_{\infty,2}$.*

3. *La loi forte quadratique*

   *(LFQ)* $\quad \frac{1}{t}\int_0^t e^{-B_\theta s}M_sM_s^*e^{-B_\theta^* s}ds \longrightarrow \sigma^2 I_{\infty,2} \quad p.s., \quad (t \longrightarrow \infty).$

4. *Théorème de la limite centrale logarithmique*

   *(TLCL)* $\quad t^{-1/2}\int_0^t \{B_\theta\tilde{D}_s + \tilde{D}_sB_\theta^*\}ds \Longrightarrow \nu_\infty,$

   *où $\tilde{D}_s = e^{-B_\theta s}(M_sM_s^* - \langle M\rangle_s)e^{-B_\theta^* s}$ et $\nu_\infty$ est la loi d'une variable aléatoire de la forme $\mathscr{C}^{\frac{1}{2}}G$, $G$ étant un vecteur gaussien standard d-dimensionnel et indépendant de $\mathscr{C}$ avec*

   $$\mathscr{C} = \sigma^4(2\mathrm{tr}(B_\theta))^{-1}\{2I_{\infty,2}\otimes I_{\infty,2} + 2[(\mathrm{Vect}(I_{\infty,2}))(\mathrm{Vect}(I_{\infty,2}))^*]^\perp\}.$$

**Preuve du lemme 4.3.4**

1. La variation quadratique prévisible de la martingale $M$ vérifie

   $$e^{-B_\theta t}\langle M\rangle_t e^{-B_\theta^* t} \longrightarrow \sigma^2 I_{\infty,2} \quad p.s., \quad (t \longrightarrow \infty),$$

   et le TLC appliqué à la martingale continue $M$ implique

   $$e^{-B_\theta t}M_t \Longrightarrow \sigma I_{\infty,2}^{1/2}G,$$

   où $G$ est un vecteur gaussien standard d-dimensionnel et indépendant de $I_{\infty,2}$, d'où la première assertion du lemme 4.3.4.

2. Le théorème de la limite centrale presque-sûre (voir théorème 2.1.1 dans [13]), appliqué au couple $(M, V)$ où $M$ est la martingale continue donnée par (4.56) et

normalisée par $V_t = e^{B_\theta t}$, implique

$$\frac{1}{t}\int_0^t ds\, \delta_{\{V_s^{-1}M_s\}} \Longrightarrow \mu_\infty \quad p.s.,$$

où $\mu_\infty$ est la loi de la variable aléatoire $\sigma I_{\infty,2}^{1/2} G$ et $G$ est un vecteur gaussien standard d-dimensionnel et indépendant de $I_{\infty,2}$. La seconde assertion du lemme 4.3.4 est établie.

3. La LFQ (voir théorème 2.1.1 dans [13]), appliquée à la martingale continue $M$ normalisée par le processus $V_t = e^{B_\theta t}$, donne

$$\frac{1}{t}\int_1^t e^{-B_\theta s} M_s M_s^* e^{-B_\theta^* s} \longrightarrow \sigma^2 I_{\infty,2} \quad p.s., \quad (t \longrightarrow \infty),$$

d'où la troisième assertion du lemme 4.3.4.

4. En appliquant le TLC de la LFQ (voir théorème 2.1.1 dans [13]) au couple $(M, V)$, où $M$ est la martingale continue donnée par (4.56) et normalisée par $V_t = e^{B_\theta t}$, on obtient

$$t^{-1/2}\int_0^t \{B_\theta \tilde{D}_s + \tilde{D}_s B_\theta^*\} ds \Longrightarrow \nu_\infty \quad (t \longrightarrow \infty), \tag{4.58}$$

où $\tilde{D}_s = e^{-B_\theta s}(M_s M_s^* - \langle M\rangle_s)e^{-B_\theta^* s}$ et $\nu_\infty$ est la loi d'une variable aléatoire de la forme $\mathscr{C}^{\frac{1}{2}}G$, $G$ étant un vecteur gaussien standard d-dimensionnel et indépendant de $\mathscr{C}$ avec

$$\mathscr{C} = \sigma^4(2\mathrm{tr}(B_\theta))^{-1}\{2I_{\infty,2} \otimes I_{\infty,2} + 2[(\mathrm{Vect}(I_{\infty,2}))(\mathrm{Vect}(I_{\infty,2}))^*]^\perp\}.$$

Cela achève la preuve du lemme 4.3.4.

## Preuve du théorème 4.2.3

1. Vu la relation (4.57), à savoir

$$M_t = \sigma^{-2}\langle M\rangle_t(\hat{\theta}_t - \theta),$$

on a

$$\begin{aligned} e^{-B_\theta t} M_t &= I_{t,2} e^{B_\theta^* t}(\hat{\theta}_t - \theta) \\ &= (I_{t,2} - I_{\infty,2})e^{B_\theta^* t}(\hat{\theta}_t - \theta) + I_{\infty,2} e^{B_\theta^* t}(\hat{\theta}_t - \theta). \end{aligned} \tag{4.59}$$

En écrivant

$$\|(I_{t,2} - I_{\infty,2})e^{B_\theta^* t}(\hat{\theta}_t - \theta)\| \le \|I_{t,2} - I_{\infty,2}\|\|e^{B_\theta^* t}\|\|\hat{\theta}_t - \theta\|,$$

et en tenant compte de la propriété (4.5), à savoir

$$\|\hat{\theta}_t - \theta\| = \mathcal{O}\Big(\sqrt{t}\, e^{-\mathfrak{m}t}\Big) \quad p.s.,$$

et du fait que

$$\|e^{B_\theta^* t}\| \sim e^{\mathfrak{m}t}, \quad (t \longrightarrow \infty), \tag{4.60}$$

il vient, de l'hypothèse ($\mathcal{H}_2$),

$$\begin{aligned} \|(I_{t,2} - I_{\infty,2})e^{B_\theta^* t}(\hat{\theta}_t - \theta)\| &= \mathbf{o}(t^{\frac{1}{2}-\beta}) \\ &= \mathbf{o}(1) \quad p.s.,\ (t \longrightarrow \infty),\ \text{car } \beta > 1/2. \end{aligned} \tag{4.61}$$

La première assertion du théorème 4.2.3 découle de la première assertion du lemme 4.3.4 et des deux relations (4.59) et (4.61).

2. Soit $\varphi$ une fonction lipschitzienne continue bornée. Posons

$$G_t = t^{-1}\int_0^t \varphi(I_{s,2}e^{B_\theta^* s}(\hat{\theta}_s - \theta))ds - t^{-1}\int_0^t \varphi(I_{\infty,2}e^{B_\theta^* s}(\hat{\theta}_s - \theta))ds.$$

Alors on a

$$\|G_t\| \leq C^{te}\, t^{-1}\int_0^t \|I_{s,2} - I_{\infty,2}\|\, \|e^{B_\theta s}\| \|\hat{\theta}_s - \theta\| ds.$$

En tenant compte de l'hypothèse ($\mathcal{H}_2$) et de la propriété (4.5), on en déduit

$$\|G_t\| = \mathbf{o}(t^{\frac{1}{2}-\beta}) = \mathbf{o}(1) \quad p.s., \quad (t \longrightarrow \infty), \quad \text{car} \quad \beta > 1/2. \tag{4.62}$$

D'après la deuxième assertion du lemme 4.3.4 et la relation (4.57), on obtient

$$t^{-1}\int_0^t ds\, \delta_{\{I_{s,2}e^{B_\theta^* s}(\hat{\theta}_s - \theta)\}} \Longrightarrow \mu_\infty \quad p.s., \tag{4.63}$$

où $\mu_\infty$ est la loi de la variable aléatoire $\sigma I_{\infty,2}^{1/2} G$ et $G$ est un vecteur gaussien standard d-dimensionnel et indépendant de $I_{\infty,2}$.
Grâce aux propriétés (4.62) et (4.63), la seconde assertion du théorème 4.2.3 est établie.

3. Vu que

$$e^{-B_\theta t}M_t = I_{t,2}e^{B_\theta^* t}(\hat{\theta}_t - \theta) \tag{4.64}$$

et d'après la troisième assertion du lemme 4.3.4, on a

$$t^{-1}\int_0^t e^{-B_\theta s}M_s M_s^* e^{-B_\theta^* s} ds \longrightarrow \sigma^2 I_{\infty,2} \quad p.s., \quad (t \longrightarrow \infty).$$

Ainsi pour établir la troisième assertion du théorème, il suffit de montrer que, quand $t$ tend vers l'infini, on a

$$t^{-1}\left\|\int_0^t I_{s,2}e^{B_\theta^* s}\hat{\delta}_s e^{B_\theta s}I_{s,2}^*\,ds - I_{\infty,2}\int_0^t e^{B_\theta^* s}\hat{\delta}_s e^{B_\theta s}\,dsI_{\infty,2}\right\| \longrightarrow 0 \quad p.s., \qquad (4.65)$$

où $\hat{\delta}_s = (\hat{\theta}_s - \theta)(\hat{\theta}_s - \theta)^*$. Pour ce faire, considérons l'inégalité suivante :

$$\begin{aligned} t^{-1}&\left\|\int_0^t I_{s,2}e^{B_\theta^* s}\hat{\delta}_s e^{B_\theta s}I_{s,2}^*\,ds - I_{\infty,2}\int_0^t e^{B_\theta^* s}\hat{\delta}_s e^{B_\theta s}\,dsI_{\infty,2}\right\| \\ &\leq t^{-1}\left(\|\hat{J}_{t,1}\| + \|\hat{J}_{t,2}\| + \|\hat{J}_{t,3}\|\right), \qquad (4.66)\end{aligned}$$

avec

$$\begin{aligned} \hat{J}_{t,1} &= \int_0^t (I_{s,2} - I_{\infty,2})e^{B_\theta^* s}\hat{\delta}_s e^{B_\theta s}(I_{s,2} - I_{\infty,2})\,ds, \\ \hat{J}_{t,2} &= \int_0^t (I_{s,2} - I_{\infty,2})e^{B_\theta^* s}\hat{\delta}_s e^{B_\theta s}\,ds\,I_{\infty,2}, \\ \hat{J}_{t,3} &= I_{\infty,2}\int_0^t e^{B_\theta^* s}\hat{\delta}_s e^{B_\theta s}(I_{s,2} - I_{\infty,2})\,ds. \end{aligned}$$

Le processus $(\hat{J}_{t,1})$ est majoré par

$$t^{-1}\|\hat{J}_{t,1}\| \leq t^{-1}\int_0^t \|I_{s,2} - I_{\infty,2}\|^2\|e^{B_\theta s}\|^2\|\hat{\theta}_s - \theta\|^2\,ds.$$

En tenant compte de la propriété (4.5), de l'hypothèse $(\mathcal{H}_2)$ et de l'équivalence (4.60), on obtient

$$t^{-1}\|\hat{J}_{t,1}\| = \mathbf{o}(t^{1-2\beta}) = \mathbf{o}(1) \quad p.s., \quad (t \longrightarrow \infty), \quad \text{car} \quad \beta > 1/2. \qquad (4.67)$$

De même, les deux processus $(\hat{J}_{t,2})$ et $(\hat{J}_{t,3})$ sont majorés par

$$\begin{aligned} t^{-1}\|\hat{J}_{t,2}\| &= t^{-1}\|\hat{J}_{t,3}\| \\ &\leq \|I_{\infty,2}\|\,t^{-1}\int_0^t \|I_{s,2} - I_{\infty,2}\|\|e^{B_\theta s}\|^2\|\hat{\theta}_s - \theta\|^2\,ds. \end{aligned}$$

Grâce à la propriété (4.5), l'hypothèse $(\mathcal{H}_2)$ avec $\beta > 1$ et l'équivalence (4.60), il vient

$$t^{-1}\|\hat{J}_{t,2}\| = t^{-1}\|\hat{J}_{t,2}\| = \mathbf{o}(t^{1-\beta}) = \mathbf{o}(1) \quad p.s., \quad (t \longrightarrow \infty). \qquad (4.68)$$

Par conséquent, la convergence (4.65) est établie en vertu des deux propriétés (4.67) et (4.68).

4. Notons que

$$t^{-1/2}\int_0^t \{B_\theta \tilde{D}_s + \tilde{D}_s B_\theta^*\} ds = H_t + H_t^*,$$

où

$$H_t = B_\theta t^{-1/2}\int_0^t \tilde{D}_s ds = B_\theta t^{-1/2}\int_0^t \left(e^{-B_\theta s} M_s M_s^* e^{-B_\theta^* s} - \sigma^2 I_{s,2}\right) ds.$$

De la relation

$$H_t = B_\theta t^{-1/2}\int_0^t \left(e^{-B_\theta s} M_s M_s^* e^{-B_\theta^* s} - \sigma^2 I_{\infty,2}\right) ds - \sigma^2 B_\theta t^{-1/2}\int_0^t (I_{s,2} - I_{\infty,2}) ds$$

et l'hypothèse $(\mathcal{H}_2)$, on en déduit

$$t^{-1/2}\int_0^t (I_{s,2} - I_{\infty,2}) ds = \mathbf{o}(t^{\frac{1}{2}-\beta}) = \mathbf{o}(1) \quad p.s., \quad (t \longrightarrow \infty).$$

Par conséquent,

$$H_t \ \sim \ B_\theta t^{-1/2}\int_0^t \left(e^{-B_\theta s} M_s M_s^* e^{-B_\theta^* s} - \sigma^2 I_{\infty,2}\right) ds \quad (t \longrightarrow \infty).$$

Rappelons que $\hat{\delta}_s = (\hat{\theta}_s - \theta)(\hat{\theta}_s - \theta)^*$ et d'après la relation (4.64), on a

$$e^{-B_\theta s} M_s M_s^* e^{-B_\theta^* s} = I_{s,2} e^{B_\theta^* s} \hat{\delta}_s e^{B_\theta s} I_{s,2}.$$

Pour établir le résultat annoncé, il suffit donc de montrer que, quand $t$ tend vers l'infini, on a

$$t^{-1/2}\left\| \int_0^t I_{s,2} e^{B_\theta^* s} \hat{\delta}_s e^{B_\theta s} I_{s,2}\, ds - I_{\infty,2}\int_0^t e^{B_\theta^* s} \hat{\delta}_s e^{B_\theta s}\, ds\, I_{\infty,2} \right\| \longrightarrow 0 \quad p.s. \quad (4.69)$$

Pour ce faire, remarquons que

$$t^{-1/2}\left\| \int_0^t I_{s,2} e^{B_\theta^* s} \hat{\delta}_s e^{B_\theta s} I_{s,2}\, ds - I_{\infty,2}\int_0^t e^{B_\theta^* s} \hat{\delta}_s e^{B_\theta s}\, ds\, I_{\infty,2} \right\| \leq$$
$$t^{-1/2}\left( \|\hat{J}_{t,1}\| + \|\hat{J}_{t,2}\| + \|\hat{J}_{t,3}\| \right), \quad (4.70)$$

où les processus $(\hat{J}_{t,i})$, $i \in \{1,2,3\}$, sont ceux définis par la relation (4.66). En tenant compte de la relation (4.67), on en déduit

$$t^{-1/2}\|\hat{J}_{t,1}\| = \mathbf{o}(t^{\frac{3}{2}-2\beta}) = \mathbf{o}(1) \quad p.s., \quad (t \longrightarrow \infty). \quad (4.71)$$

Vu la relation (4.68), on obtient

$$\begin{aligned} t^{-1/2}\|\hat{J}_{t,2}\| &= t^{-1/2}\|\hat{J}_{t,2}\| \\ &= \mathbf{o}(t^{\frac{3}{2}-\beta}) = \mathbf{o}(1) \quad p.s., \ (t \longrightarrow \infty) \text{ car } \beta > 3/2. \end{aligned} \tag{4.72}$$

Ainsi la convergence (4.69) est établie grâce aux propriétés (4.70), (4.71) et (4.72). La dernière assertion du théorème 4.2.3 découle de la convergence (4.58). Le théorème 4.2.3 est donc établi.

# Bibliographie


[1] Gopal K. Basak and Philip Lee. Asymptotic properties of an estimator of the drift coefficients of multidimensional Ornstein-Uhlenbeck processes that are not necessarily stable. *Electron. J. Stat.*, 2 :1309–1344, 2008.

[2] F. Chaâbane. Invariance principles with logarithmic averaging for martingales. *Studia Sci. Math. Hungar.*, 37(1-2) :21–52, 2001.

[3] F. Chaâbane. Invariance principles with logarithmic averaging for continuous local martingales. *Statist. Probab. Lett.*, 59(2) :209–217, 2002.

[4] F. Chaâbane and H. Fathallah. Identification of a stable Gaussian autoregressive process by an averaging method. *J. Appl. Probab. Stat.*, 2(2) :211–226, 2007.

[5] F. Chaâbane and A. Kebaier. Théorèmes limites avec poids pour les martingales vectorielles à temps continu. *ESAIM Probab. Stat.*, 12 :464–491, 2008.

[6] F. Chaâbane and A. Touati. On averaging methods for identification of linear regression models. *C. R. Acad. Sci. Paris Sér. I Math.*, 333(2) :133–138, 2001.

[7] N. H. Chan and C. Z. Wei. Limiting distributions of least squares estimates of unstable autoregressive processes. *Ann. Statist.*, 16(1) :367–401, 1988.

[8] A. R. Darwich. Une loi du logarithme itéré pour les martingales locales multidimensionnelles et son application en régression linéaire stochastique. *C. R. Acad. Sci. Paris Sér. I Math.*, 309(6) :387–390, 1989.

[9] A. R. Darwich. About the asymptotic behaviour of continuous vector-valued local martingales and application in multiple linear regression models. *Stoch. Stoch. Rep.*, 74(1-2) :393–409, 2002.

[10] A. R. Darwich and A. Le Breton. About the asymptotic behaviour of multidimensional Gaussian martingales and estimates in normal linear regression. *Statist. Probab. Lett.*, 12(4) :317–321, 1991.

[11] Alessandro De Gregorio and Stefano M. Iacus. Least squares volatility change point estimation for partially observed diffusion processes. *Comm. Statist. Theory Methods*, 37(13-15) :2342–2357, 2008.

[12] M. Duflo, R. Senoussi, and A. Touati. Almost sure asymptotic properties of the least-squares estimator of a vector-valued autoregressive model. *Ann. Inst. H. Poincaré Probab. Statist.*, 27(1) :1–25, 1991.

[13] H. Fathallah and A. Kebaier. Weigthed limit theorems for continuous-time vector martingales with explosive and mixed growth and statistical applications. *Prépublication de l'université de Versailles*, 2009.

[14] L. Galtchouk and V. Konev. On uniform asymptotic normality of sequential least squares estimators for the parameters in a stable AR($p$). *J. Multivariate Anal.*, 91(2) :119–142, 2004.

[15] Leonid Galtchouk and Victor Konev. Sequential estimation of the parameters in unstable AR(2). *Sequential Anal.*, 25(1) :25–43, 2006.

[16] T. L. Lai and C. Z. Wei. Asymptotic properties of general autoregressive models and strong consistency of least-squares estimates of their parameters. *J. Multivariate Anal.*, 13(1) :1–23, 1983.

[17] A. Le Breton. Propriétés asymptotiques et estimation des paramètres pour les diffusions gaussiennes homogènes hypoelliptiques dans le cas purement explosif. *C. R. Acad. Sci. Paris Sér. I Math.*, 299(6) :185–188, 1984.

[18] A. Le Breton and M. Musiela. Some parameter estimation problems for hypoelliptic homogeneous Gaussian diffusions. In *Sequential methods in statistics*, volume 16 of *Banach Center Publ.*, pages 337–356. PWN, Warsaw, 1985.

[19] A. Le Breton and M. Musiela. Une loi des grands nombres pour les martingales locales continues vectorielles et son application en régression linéaire stochastique. *C. R. Acad. Sci. Paris Sér. I Math.*, 303(9) :421–424, 1986.

[20] A. Touati. Deux théorèmes de convergence en loi pour des intégrales stochastiques et application statistique. *Teor. Veroyatnost. i Primenen.*, 38(1) :128–153, 1993.