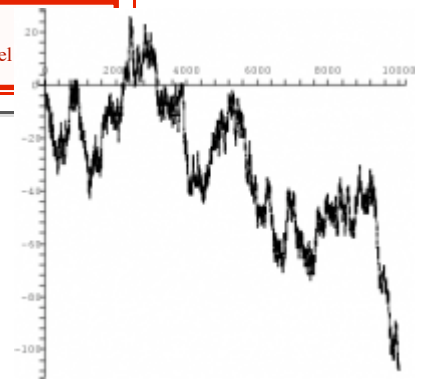


# L'intégrale

To print higher-resolution math symbols, click the [Print](#) button on the jsMath control panel



Le 28 juillet 2010, par **Laurent Decreusefond**  
Probabiliste presque-sûrement ([page web](#))

## Fort comme un haltérophile

**C**OMMENÇONS par une question au résultat surprenant. Qui est le plus fort :

- un haltérophile qui soulève 200 kilos à l'arraché au dessus de sa tête ?
- une jeune fille de 50 kilos qui monte au troisième étage sans ascenseur ?

Eh bien les physiciens nous disent d'abord que le mot « fort » est particulièrement mal choisi. Il faudrait parler d'« énergétique ». On reviendra sur le concept de fort plus bas. Du point vue énergétique, l'haltérophile et la jeune fille sont sur un pied d'égalité. Si on suppose que l'haltérophile amène à la barre à deux mètres au dessus du sol, l'énergie qu'il aura dépensée sera proportionnelle au produit de la masse de la barre et de la hauteur atteinte :

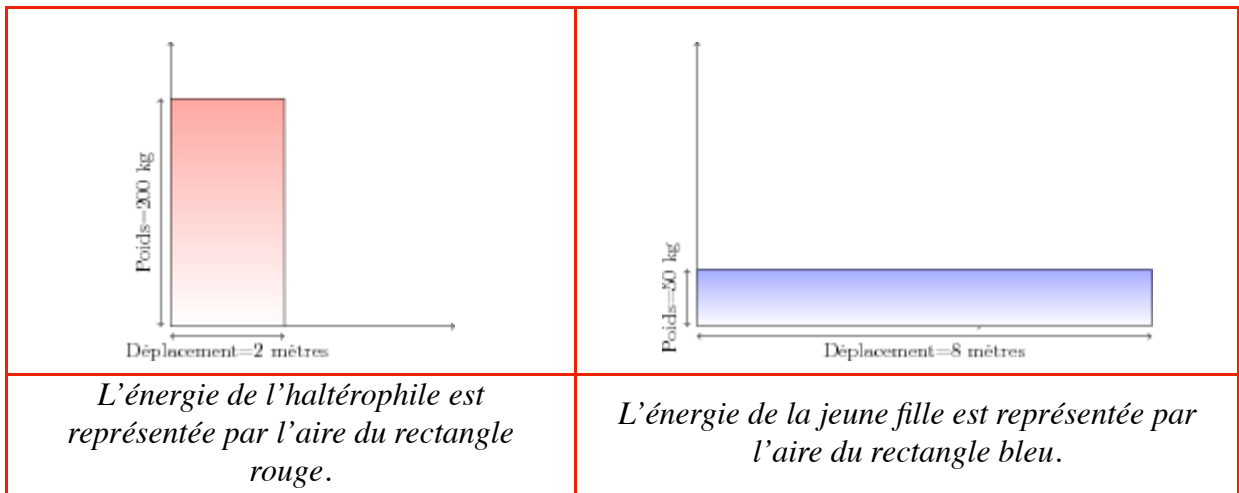
$$\text{Énergie} = 9,81 \times 200 \times 2 = 9,81 \times 400 \text{ Joules} = 3924 \text{ Joules.}$$

Le facteur 9,81, qui s'exprime en mètres par secondes carrées, est « l'accélération » due à la pesanteur. Il traduit le fait que nous soyons soumis à la gravité : sur la lune, nous soulèverions tous des barres de 100 kilos sans aucun effort car là-haut, l'accélération de la pesanteur est de l'ordre de 1,635.

D'un autre côté, si la frêle jeune fille de 50 kilos transporte son propre poids jusqu'à une hauteur de 8 mètres [1], l'énergie dépensée sera

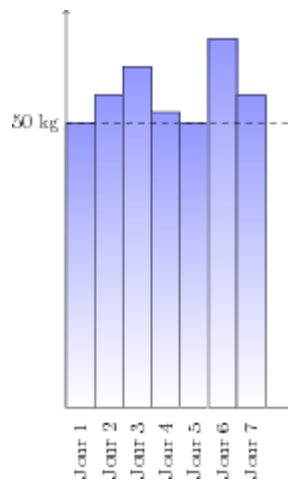
$$\text{Énergie} = 9,81 \times 50 \times 8 = 9,81 \times 400 \text{ Joules} = 3924 \text{ Joules.}$$

Évidemment, il y a une différence entre les deux : dans un cas, pour l'haltérophile, l'énergie est produite en quelques secondes ; pour la jeune fille, l'échelle de temps est de l'ordre de la minute. L'haltérophile dégage plus de *puissance* que la jeune fille, il est donc plus « fort » ! Il est pratique de représenter ces deux situations par un dessin : en abscisse, on représente les déplacements, en ordonnée l'intensité de la force.



Dans les deux cas, au coefficient 9, 81 près, on voit que l'énergie représente l'aire du rectangle colorié. Cette approche nous donne le bon outil pour calculer des énergies dans des situation plus compliquées.

Supposons que la jeune fille veuille calculer l'énergie qu'elle dépense à chaque fois qu'elle monte ses escaliers. Quand elle revient de courses, elle est chargée donc elle dépense plus d'énergie. Sa masse varie en fonction de la quantité de courses qu'elle ramène. Disons qu'entre elle et son chargement, sa masse varie d'une fois sur l'autre tout en restant comprise entre 50 et 55 kilos. Au cours d'une semaine, son énergie dépensée pour remonter chez elle est égale à l'aire bleue de la figure

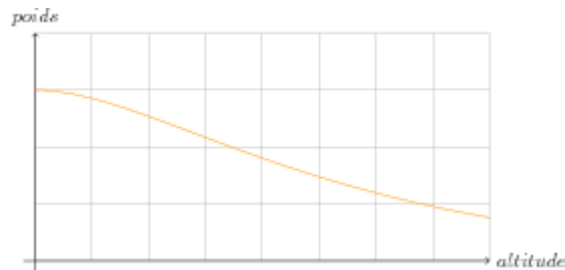


**Figure 3 : l'énergie dépensée par la jeune fille au cours d'une semaine est l'aire totale des rectangles. L'échelle de la représentation est différente de celle de la figure précédente.**

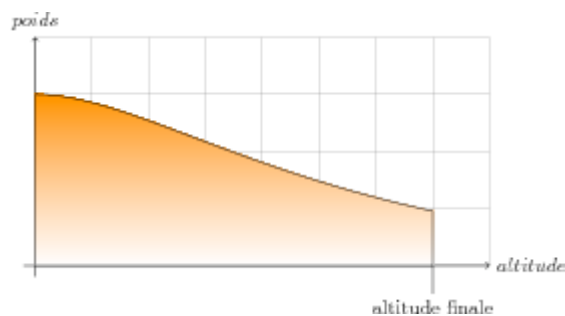
### Lançons une fusée

Plus on dépense d'énergie plus on dépense d'argent, il est donc important de prévoir ce que l'on va dépenser. On peut reprendre les définitions précédentes mais maintenant on ne peut plus dire que l'accélération de la pesanteur ne varie pas au cours du vol puisqu'une fusée monte à des altitudes où la pesanteur est quasi-inexistante. D'autre part, une fusée va (volontairement) perdre de la masse très rapidement pour accélérer. En fonction de l'altitude le poids de la fusée,

qui est défini par les physiciens comme le produit de l'accélération de la pesanteur par la masse, varie en fonction de l'altitude selon une figure qui ressemble à celle de la figure 4.



Pour calculer l'énergie que l'on dépensera pour un tel vol, il faut calculer l'aire comprise entre l'axe horizontal et la courbe depuis l'altitude 0 jusqu'à l'altitude finale, par exemple quelques centaines de kilomètres pour lancer un satellite en orbite basse. Il nous faut donc déterminer l'aire de la zone hachurée en orange dans la figure 5.



C'est d'abord Cauchy en 1823 puis Riemann en 1845 qui ont donné une solution à ce problème (on trouvera [ici](#) une histoire de la théorie de l'intégration).

Il suffit de découper la partie orange en rectangles de plus en plus petits. Si tout se passe bien, quand la base des rectangles devient de plus en plus petite, cette somme d'aires de rectangles doit s'approcher aussi près que l'on veut de l'aire de la zone orangée. On appelle ce nombre l'intégrale de la fonction représentée dans la figure 4. On pourrait croire qu'à partir de là, le problème de l'intégration est résolu. Hélas, il existe des fonctions tellement irrégulières qu'on peut ne pas les dessiner et qu'on ne peut pas en calculer l'intégrale, c'est-à-dire, qu'on aura beau diminuer la base des rectangles, la somme des aires ne convergera pas : soit elle devient arbitrairement grande, soit elle hésite entre plusieurs valeurs indéfiniment.

Plus tard, au vingtième siècle, Lebesgue eut l'idée de découper l'aire orange en rectangles horizontaux de taille de plus en plus petite. Bizarrement, une telle approche permet de calculer des intégrales de fonction un peu plus irrégulière que celles que l'on peut traiter avec des rectangles verticaux. Pour illustrer cette approche alternative, on peut regarder un exemple simple. Un marchand veut faire ses comptes à la fin du mois. Il peut le faire de deux manières : tous les jours, il compte combien il a gagné pendant la journée et il ajoute ça à la somme déjà gagnée depuis le début du mois. A la fin du mois, il a son gain total : c'est le principe déjà expliqué au début. Deuxième méthode : à la fin du mois, il regarde dans son tiroir et il compte le nombre de billets de 100 euros, celui de billets de 20, de billets de 10, de 5, etc. Pour toutes les valeurs de billets possibles, il multiplie la valeur du billet par le nombre de billets de ce type. Il somme ensuite toutes ces valeurs. Cela doit évidemment lui donner le même nombre que par la première méthode. Une différence subtile mais néanmoins essentielle dans la théorie des

probabilités est que dans l'approche dite de Lebesgue, on n'a pas besoin de savoir combien on a gagné chaque jour, on peut se contenter de savoir le nombre de jours où on a gagné 1 billet de 100 euros, le nombre de jours où on a gagné 2 billets de 100 euros, etc. Idem pour les autres billets. Pour vous, cette différence n'est peut-être pas grand chose mais pour un probabiliste, ça veut dire beaucoup !

---

## Les martingales n'existent pas

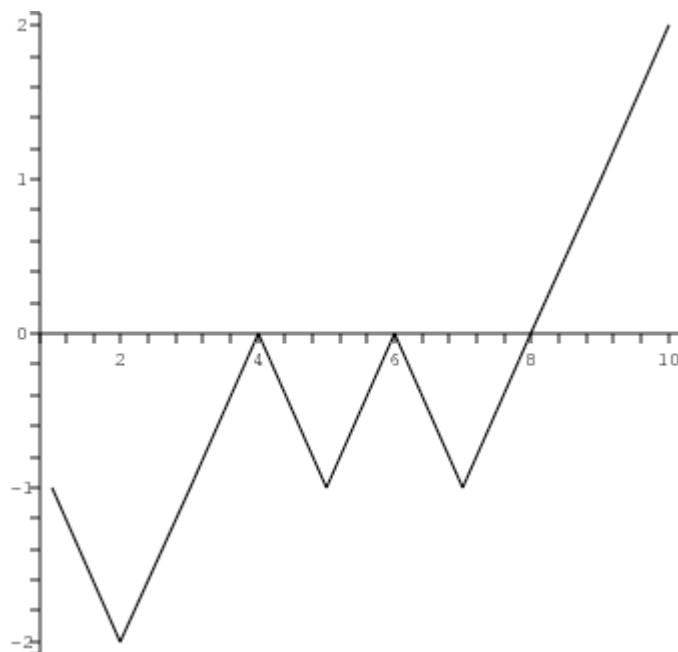
---

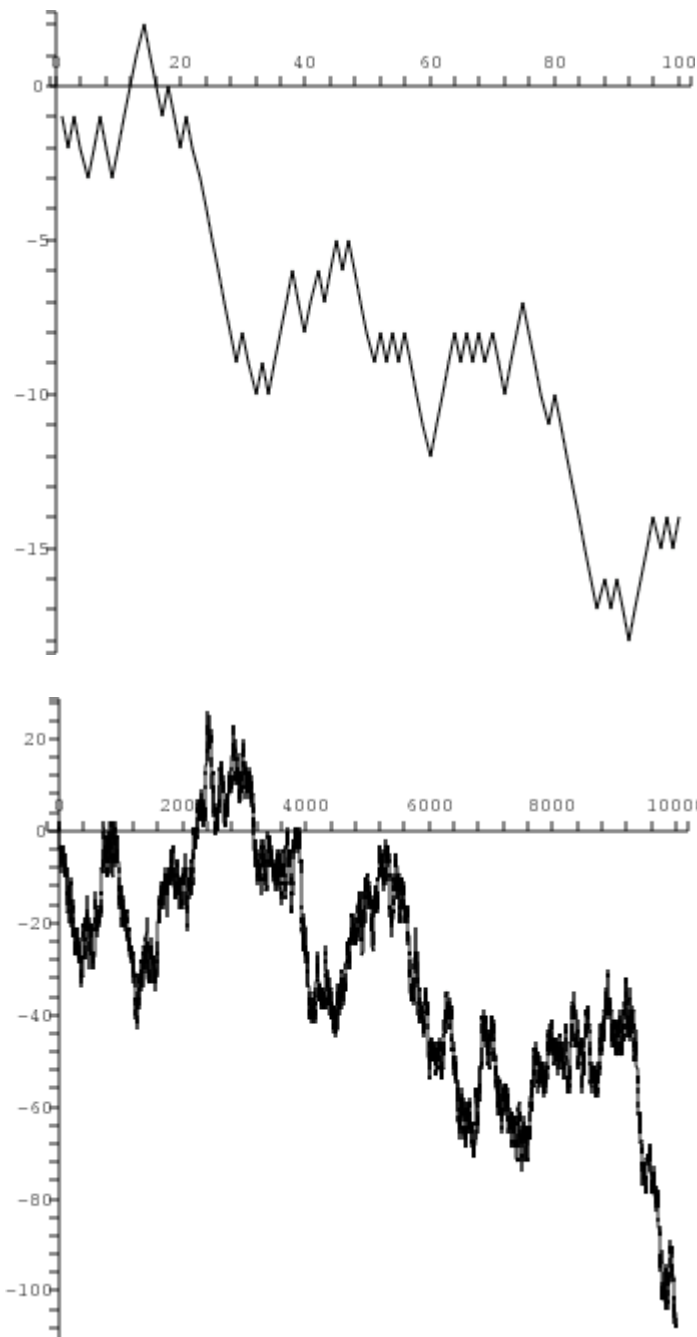
Pourquoi se préoccuper d'intégrer des fonctions irrégulières si ce n'est par le masochisme pur qui caractérise certains mathématiciens ? Imaginons un jeu de hasard où vous avez autant de chances de gagner que de perdre à chaque coup : par exemple, un jeu de pile/face ou parier sur pair/impair à la roulette, etc. Si vous gagnez, vous récupérez deux fois votre mise, si vous perdez, vous perdez votre mise. Vous avez le choix de votre mise à chaque coup. Pour simplifier les choses, vous disposez d'une fortune sans limite ainsi que votre adversaire.

Encore une fois, on peut représenter votre gain par un dessin basé sur des rectangles : les rectangles vont vers le haut si vous gagnez, vers le bas si vous perdez. Les aires correspondantes ont donc un signe : positif en cas de gain, négatif en cas de perte. Votre gain total est la somme de ces aires « signées » [2].

Une martingale au sens commun et pas au sens mathématique, est une stratégie, donc un choix des mises, qui doit vous permettre d'avoir un gain positif en jouant suffisamment longtemps. Depuis le temps que ce problème et d'autres similaires ont été étudiés, on sait qu'il est intéressant de considérer non pas la suite des  $+1$  ou  $-1$  qui traduisent un gain ou une perte à chaque coup mais qu'il est plus intéressant de considérer le cumul des gains et des pertes : pour une suite de gains/pertes comme

$+1, +1, -1, +1, +1, -1, -1, -1, \dots$  on préfère regarder la suite  $1, 2, 1, 2, 3, 2, 1, 0, \dots$





Quand le nombre de coups augmente, cette suite donne une courbe de plus en plus irrégulière. Au point que si l'on va jusqu'au bout, c'est-à-dire pour un nombre infini de coups, on obtient une courbe qui n'est plus dessinable de manière lisse (il devient impossible de construire une tangente). Précisément, on obtient un objet bien connu des probabilistes qui s'appelle un mouvement brownien (voir par exemple [Le mouvement brownien et son histoire, réponses à quelques questions](#)).

Supposons maintenant qu'à chaque coup, vous puissiez miser une quantité de votre choix. Si vous gagnez ce coup, vous récupérez deux fois votre mise, sinon vous perdez votre mise. Conclusion, votre richesse au terme de 4 coups avec le tirage ci-dessus, s'exprime par

$$\text{Richesse}_4 = \text{Richesse}_0 + \text{Mise}_1(+1) + \text{Mise}_2(+1) + \text{Mise}_3(-1) + \text{Mise}_4(+1).$$

Dans le cas général, votre richesse s'exprime comme l'intégrale des mises par rapport aux variations des gains. Quand cette variation des gains est assimilée à un mouvement brownien, cette notion d'intégrale est techniquement plus compliquée à définir que la précédente. Néanmoins, depuis **Young (1936)** puis **Itô** dans les années 50, on sait donner un sens à cette intégrale. Et le résultat est sans appel, quelle que soit votre stratégie, votre gain moyen est nul !

## Notes

[▲1] Je sais, ça fait des petits étages. Mettez-en deux si vous préférez.

[▲2] signées veut dire que l'on tient compte du signe de l'aire dans le calcul du gain

► **Crédits images**

## Affiliation de l'auteur

Telecom ParisTech

Pour citer cet article : **Laurent Decreusefond**, **L'intégrale**. *Images des Mathématiques*, CNRS, 2010. En ligne, URL : <http://images.math.cnrs.fr/L-integrale.html>