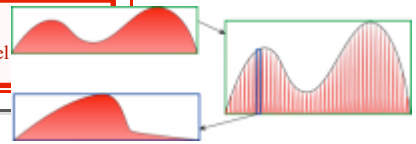


# Dynamique des mesures

To print higher-resolution math symbols, click the  
Hi-Resolution font button in the Math control panel



Le 20 septembre 2010, par **Benoît Kloeckner**

Maître de conférences, Université de Grenoble ([page web](#))

*Il y a quelques temps, je m'étais dit que tenter d'exposer mon travail pourrait être un bon exercice. Jusqu'à présent j'ai reculé, mais un de mes derniers articles me donne une occasion un peu plus facile de le faire.*

---

## Systèmes dynamiques

---

**L**E domaine dans lequel s'inscrit le résultat dont je vais vous parler est celui des *systèmes dynamiques*. Il s'agit de modèles mathématiques décrivant une évolution : c'est large ! Plus précisément, ceux qui m'intéressent le plus sont dits « à temps discret ». Ils consistent en un ensemble de positions que peut prendre le système (son *espace de phase* ou tout simplement *espace*), et une règle (on parle d'*application*) qui donne, en fonction de la position au temps  $t$ , quelle sera la position au temps  $t + 1$ .

Voici un exemple classique : on considère comme ensemble de positions l'intervalle  $I = [0, 1[$ , c'est-à-dire l'ensemble des nombres positifs ou nuls et strictement plus petits que 1. On se donne la règle d'évolution suivante : à chaque étape, on multiplie par 2 la position du système, et si le résultat dépasse 1 alors on enlève 1. Autrement dit, si le système est dans l'état  $x$  au temps  $t$ , alors au temps  $t + 1$  il sera dans l'état  $T(x) = 2x$  (si  $x < 1/2$ ) ou  $T(x) = 2x - 1$  (si  $x \geq 1/2$ ).

On se demande alors quel est le comportement des itérés  $x, T(x), T(T(x)), \dots$ , c'est-à-dire de la suite des positions occupées (on parle de *trajectoire*). Par exemple, finit-on par rester bloqué en une même valeur ? Oscille-t-on entre plusieurs valeurs ? Si on part de deux points différents mais très proches, leurs trajectoires restent-elles tout le temps proches ?

Prenons quelques exemples de trajectoires. Tout d'abord, supposons que  $x = 0$ . On a  $T(0) = 0$  : on dit que 0 est un *point fixe*. C'est une position où on reste bloqué. Maintenant prenons  $x = 1/2$ . On a  $T(1/2) = 0$ , puis évidemment  $T(T(1/2)) = 0$ , etc. : la première étape nous amène au point fixe 0, puis on y reste bloqué.

Il y a beaucoup d'autres points avec ce comportement. Considérons par exemple la position  $x = 3/8$ . On a  $T(3/8) = 6/8$ , puis  $T(6/8) = 12/8 - 1 = 4/8 = 1/2$ , et comme on l'a dit  $T(1/2) = 0$ , stade auquel on se retrouve bloqué en 0. Le phénomène se produit également pour  $5/16, 1/32$ , etc.

Voici un exemple d'une telle orbite qui finit par se « bloquer », mais après un temps assez important (la position initiale est  $x = 33547/65536$ )



On peut aussi trouver des *orbites périodiques* : par exemple  $T(1/3) = 2/3$  et  $T(2/3) = 4/3 - 1 = 1/3$ , donc si on part de  $1/3$ , on oscille entre  $1/3$  et  $2/3$  indéfiniment. De façon générale, si on part d'une fraction d'entiers, alors la trajectoire finira par devenir périodique. Par exemple, considérons le cas  $x = 33547/65535$ , très proche de l'exemple précédent... pendant un certain temps.



Mais d'autres trajectoires sont bien différentes. En effet,  $T$  est *topologiquement transitive*. Cela veut dire qu'on peut trouver une valeur initiale  $x$  dont la trajectoire est « dense », c'est-à-dire qu'elle passe dans toutes les régions de  $I$ , même très petites. Une telle trajectoire est donc beaucoup plus compliquée que celles que j'ai montrées jusqu'à présent. Voici le début d'une telle trajectoire.



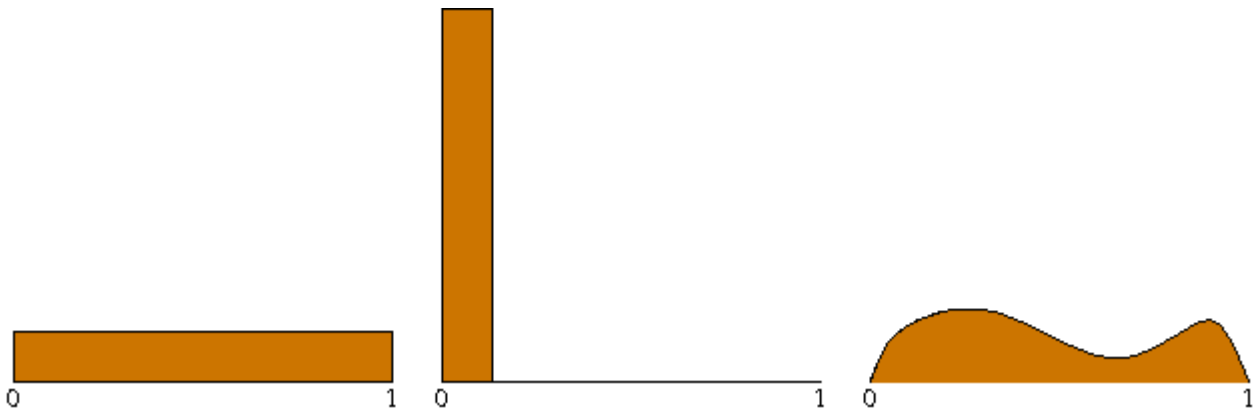

---

## Quelques grains de sables

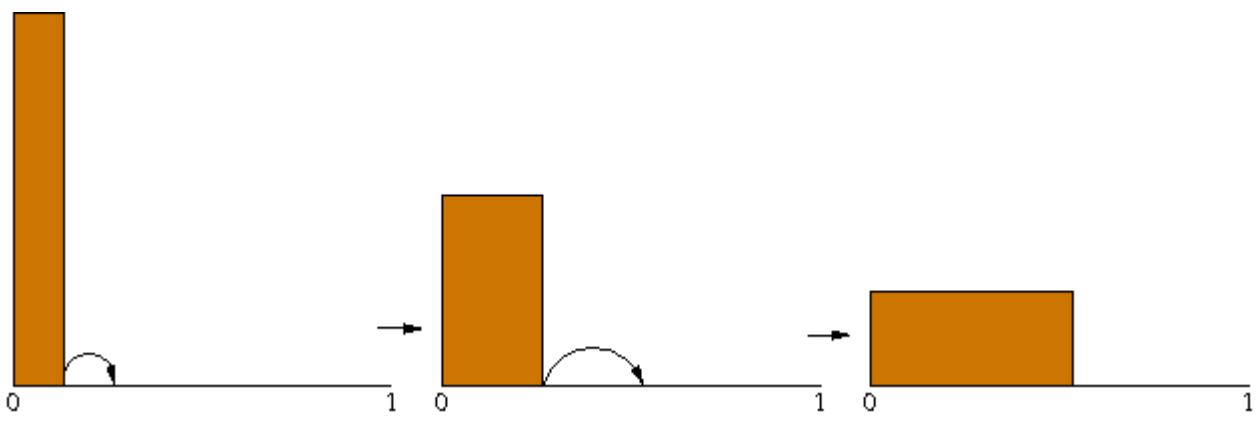
---

Le système dynamique que je viens de décrire est connu et bien compris depuis longtemps. Je me suis intéressé à une variante qui, de façon surprenante, n'avait semble-t-il pas été regardée. On considère le même intervalle de nombres  $I$ , mais maintenant une position du système n'est pas un nombre, mais un « tas de sable » réparti sur l'intervalle (en terme mathématiques, on considère des *mesures*). La seule contrainte que je me donne est que la quantité totale de sable est fixée.

Voici quelques exemples de positions.

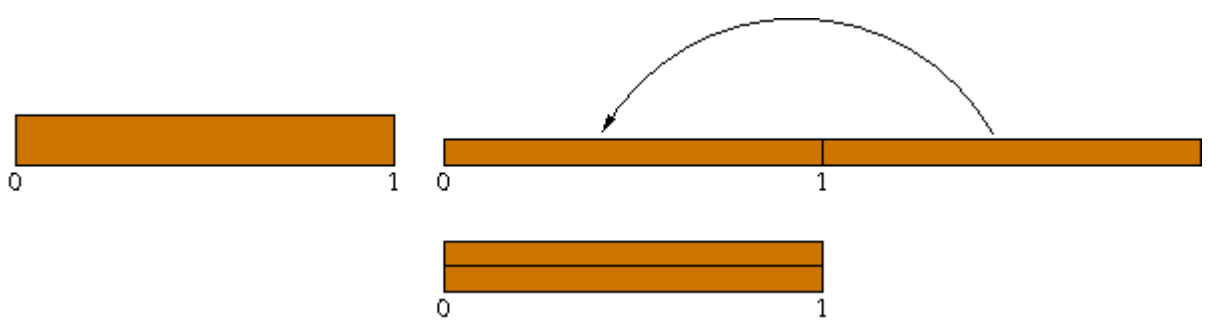


La règle d'évolution consiste à faire subir à chaque grain de sable la transformation  $T$  de tout à l'heure. On note  $T_{\#}$  l'application qui concerne les tas de sable, pour la distinguer de  $T$  tout en rappelant qu'elle en découle. Voici par exemple comment est transformée la deuxième position ci dessus :



À chaque étape, le sable recouvre une plage deux fois plus grande, mais la hauteur du tas a diminué puisqu'au dessus de chaque point, il y a deux fois moins de sable (la quantité de sable est fixée !)

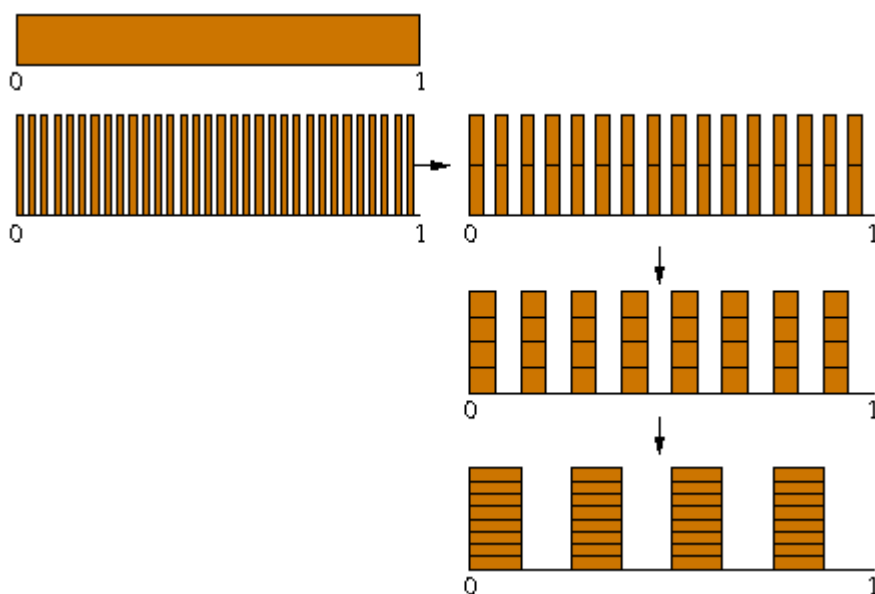
Voici maintenant, en deux étapes, comment  $T_{\#}$  modifie la première position ci-dessus, qu'on appelle la *mesure uniforme*.



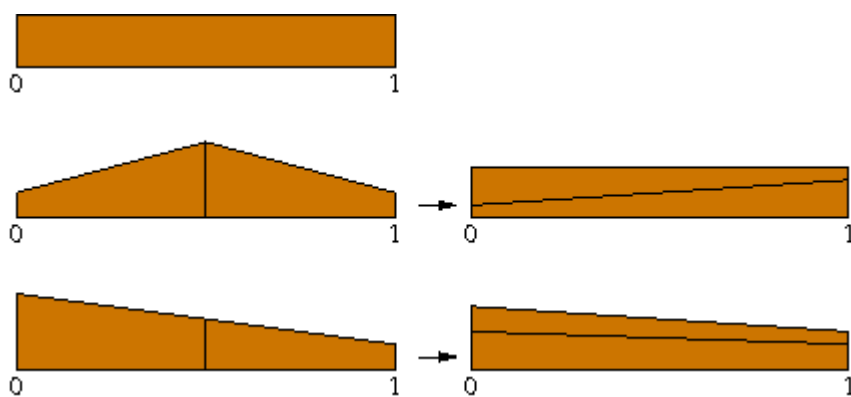
La multiplication par deux étale le tas comme avant (en haut à droite), mais ceci le fait déborder ! On doit encore retirer 1 à la position des grains de sable qui se trouvent à droite de 1 (en bas). Le résultat a la même forme que la position initiale, c'est encore la mesure uniforme. Chaque grain de sable a voyagé, mais leur répartition n'a pas changé.

La mesure uniforme est donc un point fixe du système. C'est un point fixe assez différent de 0 dans le système précédent : en effet, si  $x$  est très proche de 0 alors  $T(x)$  va s'en éloigner. Mais si on part d'un tas de sable proche de la mesure uniforme, plusieurs choses différentes peuvent se passer. Avant d'en parler, il faut peut-être expliquer un peu ce que veut dire pour deux tas de sable qu'être « proches ». Il y a plusieurs conventions possibles, je vais prendre ici celle du *transport optimal* [1] : la distance entre deux tas de sable est la distance totale que doivent parcourir les grains de sable, si on les déplace de façon à passer du premier tas au deuxième, de la manière la plus économique. Autrement dit, si on peut passer d'un tas à l'autre en ne bougeant que très peu la grosse majorité des grains de sables, alors on dit que les tas sont proches.

Revenons à nos trajectoires. Un tas de sable proche de la mesure uniforme peut s'en éloigner quand on lui applique  $T_{\#}$  :



Mais il peut aussi s'en rapprocher encore plus :



L'un de mes résultats montre qu'on peut également trouver des comportements plus stables. Par exemple, il existe des tas de sable aussi proches de la mesure uniforme que l'on veut, et dont les itérés restent très longtemps aux environs de la position initiale, sans s'approcher franchement ni s'éloigner franchement de la mesure uniforme. On peut aussi trouver des tas de sable, toujours aussi proches qu'on veut de la mesure uniforme, dont les itérés oscillent à proximité de

deux positions. De plus, ces deux comportements ne sont pas si rares : on peut les trouver chez des tas de sable d'une infinité de « formes » différentes. Ce sont des comportements absolument impossibles chez  $T$ , et je ne m'attendais pas à les voir apparaître chez  $T_{\#}$ .

Ce genre de résultat revient à calculer ce qu'on appelle la « dérivée » (ou plutôt la « différentielle ») de l'application à étudier. Petit problème : cette dérivée n'est à priori pas définie pour  $T_{\#}$ , qui ne s'applique pas à des nombres ou des familles de nombres, mais à des mesures. La théorie du transport optimal permet toutefois de donner un sens à cette dérivée. C'est grâce à la définition imaginée dans ce cadre par Nicola Gigli que j'ai pu mener le calcul qui m'intéressait.

Le système dynamique donné par  $T_{\#}$  a également des points communs avec  $T$  : j'ai en effet montré qu'il est topologiquement transitif. Je rappelle que ça veut dire qu'on peut trouver un tas de sable dont la trajectoire est dense : certains de ses itérés sont très proches de la mesure uniforme, d'autres sont très concentrés vers  $0$ , etc. Toutes les formes de tas imaginables sont prises (à de toutes petites modifications près) par l'un ou l'autre des itérés. Pour terminer j'aurais voulu vous raconter l'idée de la démonstration, qui est assez simple, mais je pense que cet article est déjà assez long comme ça ; j'ai donc mis cette démonstration dans le logo de l'article. Pour ceux qui voudraient les détails, ou juste pour voir comment on se raconte entre matheux ce que je viens d'expliquer, vous pouvez jeter un œil à **l'article**.

---

**P.S. :**

*Merci à Xavier Buff et Maxime Bourrigan qui ont soigneusement relu ce texte, ainsi qu'à Étienne Ghys pour ses conseils.*

## Notes

[▲1] dont le récent médaillé [Fields](#) Cédric Villani est un des spécialistes

### ► Crédits images

Pour citer cet article : **Benoît Kloeckner**, **Dynamique des mesures**. *Images des Mathématiques*, CNRS, 2010. En ligne, URL : <http://images.math.cnrs.fr/Dynamique-des-mesures.html>