

Modélisation statique de l'archet de violon : influence de la tension du crin sur la raideur latérale

F. ABLITZER, J.P. DALMONT, N. DAUCHEZ

Laboratoire d'Acoustique de l'Université du Maine (LAUM) – UMR CNRS 6613
Avenue Olivier Messiaen – 72085 LE MANS Cedex 9

Résumé :

Un archet de violon est modélisé comme une poutre courbe précontrainte par la tension du crin. L'objectif est de mettre en exergue des paramètres ayant une influence sur les qualités de jeu d'un archet. La déformée de la poutre est calculée par itérations successives afin de prendre en compte la non-linéarité géométrique. L'influence de la tension du crin sur la raideur latérale est examinée, dans un premier temps en utilisant le modèle, puis à partir de mesures sur un archet. Les résultats obtenus sont mis en rapport avec la qualité en terme de jouabilité.

Abstract :

A violin bow is considered as a curved beam prestressed by the tension of the hair. The aim is to highlight parameters affecting the playing properties of a bow. The geometrically nonlinear deflection of the beam is computed through an iterative method. The influence of the bow hair tension on the lateral stiffness is examined, first by means of the model, then from measurement on a bow. The results are discussed regarding the quality of bows.

Mots clefs : archet de violon, poutre précontrainte, non-linéarité géométrique

1 Introduction

La baguette d'un archet moderne est traditionnellement constituée de Pernambouc (*Caesalpinia echinata*), un bois brésilien offrant une combinaison de densité, d'élasticité et d'amortissement exceptionnelle [1]. Ce bois devenu rare est aujourd'hui classé parmi les espèces protégées, c'est pourquoi la recherche d'un matériau de substitution est actuellement un enjeu majeur pour les archetiers. Comment retrouver les qualités d'un archet en Pernambouc avec un autre matériau ? Il est possible de retrouver certaines propriétés statiques et dynamiques d'un archet de référence en compensant la variation de propriétés du matériau par une modification de la géométrie [2]. Pour aller plus loin, il importe de déterminer quels sont les paramètres physiques responsables de la qualité d'un archet, évaluée en termes de jouabilité ou de sonorité. En ce qui concerne la jouabilité, la masse de l'archet et la position du centre d'inertie comptent parmi les critères objectifs couramment admis [3]. La rigidité de la baguette semble également jouer un rôle important. Elle a été caractérisée par différentes méthodes [4] [5]. Cependant la façon dont elle influence la jouabilité n'est pas établie. Une confrontation entre mesures physiques et essais en jeu peut permettre de dégager des critères objectifs pertinents. Ainsi des travaux récents ont montré une forte corrélation entre la force critique de flambement de la baguette et la stabilité (au sens du violoniste) de l'archet en situation de jeu [6]. Un violoniste apprécie la jouabilité d'un archet en l'essayant dans différents modes de jeu. En particulier, lorsque le violoniste incline l'archet, la pression qu'il exerce provoque une flexion latérale de la baguette. Si celle-ci est trop souple, elle risque d'entrer en contact avec la corde. Ce phénomène est particulièrement marqué sur certains archets, les rendant parfois injouables. Un des objectifs des travaux présentés dans cet article est de comprendre comment une tension élevée du crin peut favoriser ce comportement. La baguette est modélisée comme une poutre courbe précontrainte par la tension du crin. Sa déformée est calculée par itérations successives afin de prendre en compte la non-linéarité géométrique du problème. Le modèle est utilisé pour évaluer l'influence de la tension du crin sur la raideur latérale de la baguette, puis les résultats théoriques sont mis en regard avec des mesures sur un archet.

2 Théorie

2.1 Modélisation de l'archet

Un archet de violon, dont les différentes parties sont définies sur la figure 1, est schématisé par la figure 2. La baguette est modélisée par une poutre AB courbe, homogène et à section variable. Le matériau est supposé élastique linéaire et isotrope. Cette poutre est considérée encastree en A (côté hausse) et libre en B (côté tête).

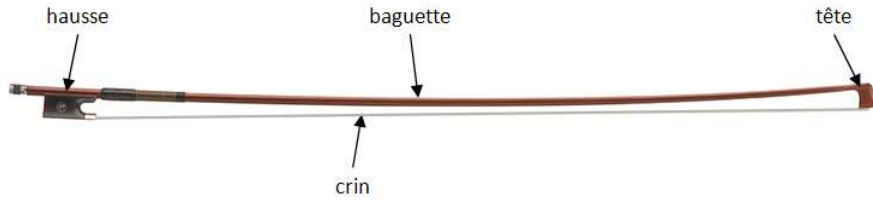


FIG. 1 – Archet de violon.

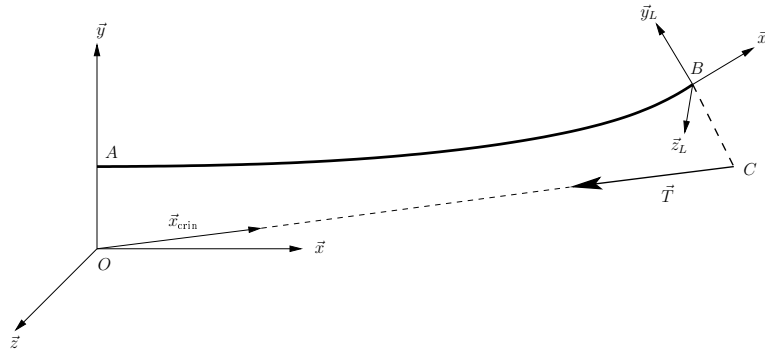


FIG. 2 – Modèle d'archet.

D'un point de vue géométrique, la ligne moyenne de la poutre est décrite par un arc paramétré de variable t . Les coordonnées cartésiennes d'un point de la ligne moyenne sont données par la fonction $f(t) = (x(t), y(t), z(t))$ définie sur $[0, t_{\max}]$. Elles sont exprimées dans un repère global fixe $\mathcal{R}_0 = (O, \vec{x}, \vec{y}, \vec{z})$. La ligne moyenne est supposée initialement contenue dans le plan (\vec{x}, \vec{y}) mais peut devenir gauche lors de la déformation de la poutre. La tête de l'archet est considérée comme indéformable. Elle est modélisée par un segment $[BC]$ qui transmet la force de tension du crin à la baguette. Dans le cas d'un problème plan, ce segment forme toujours un angle droit avec la tangente à la ligne moyenne en B . Dans le cas plus général d'un problème tridimensionnel, on définit la position du point C au moyen du repère local en B : $\vec{BC} = -h \vec{y}_L$ avec h la hauteur de la tête. Le rôle du crin dans le modèle se limite à la force de tension, supposée constante, qu'il exerce sur la baguette au point C . En l'absence d'efforts extérieurs sur le crin, la force de tension est toujours portée par la direction (OC) . Il convient alors de définir un vecteur unitaire \vec{x}_{crin} orienté de O vers C permettant d'exprimer la force de tension sous la forme $\vec{T} = -T \vec{x}_{\text{crin}}$.

2.2 Méthode itérative de calcul de la déformée

Le problème à résoudre, représenté sur la figure 2, est géométriquement non linéaire pour deux raisons. D'une part, la direction de la force de tension du crin \vec{T} varie au cours de la déformation, car le déplacement de l'extrémité B de la poutre entraîne le déplacement du point C . D'autre part, les efforts intérieurs calculés dans la configuration déformée sont différents de ceux calculés dans la configuration initiale. Le calcul linéaire reste valable tant que l'écart entre configuration initiale et configuration déformée reste petit. Dans le cas contraire, il faut recalculer les déplacements en raisonnant sur la configuration déformée [7]. Dans ce qui suit, on calcule par itérations successives la déformée de la poutre précontrainte par la tension du crin et soumise à des efforts en son extrémité libre, en prenant en compte la non-linéarité géométrique.

L'ensemble des efforts extérieurs susceptibles de déformer la poutre est rassemblé sous forme d'un torseur :

$$\mathcal{T}_{\text{ext}} = \left\{ \begin{array}{c} \vec{\mathcal{R}} \\ \vec{\mathcal{M}}_B \end{array} \right\}_B = \left\{ \begin{array}{c} F_x \vec{x} + F_y \vec{y} + F_z \vec{z} \\ M_x \vec{x} + M_y \vec{y} + M_z \vec{z} \end{array} \right\}_B + \left\{ \begin{array}{c} \vec{T} \\ \vec{BC} \wedge \vec{T} \end{array} \right\}_B \quad (1)$$

Le premier terme de ce torseur contient les forces et moments appliqués directement en B , supposés invariants au cours de la déformation. Le deuxième terme contient les efforts dus à la tension du crin. Comme cette force est excentrée par rapport à la poutre, elle est à l'origine d'un moment en B . Avec les notations ci-dessus, le torseur des efforts intérieurs en un point G de la poutre a pour expression :

$$\mathcal{T}_{\text{int}} = \left\{ \begin{array}{c} \vec{\mathcal{R}} \\ \vec{\mathcal{M}}_B + \vec{GB} \wedge \vec{\mathcal{R}} \end{array} \right\}_G = \left\{ \begin{array}{c} N \vec{x}_L + T_y \vec{y}_L + T_z \vec{z}_L \\ M_t \vec{x}_L + M_{fy} \vec{y}_L + M_{fz} \vec{z}_L \end{array} \right\}_G \quad (2)$$

En raison de la forme élancée de la poutre, on se place dans le cadre des hypothèses d'Euler-Bernoulli. En

particulier, l'effet des efforts tranchants T_y et T_z est ignoré. Dans ce qui suit, la notation $[i]$ fait référence à la $i^{\text{ème}}$ itération. L'état initial correspond à $i = 0$.

On considère n points $\{M_1[0], \dots, M_n[0]\}$ de la ligne moyenne initiale répartis uniformément suivant le paramètre t . Leurs coordonnées cartésiennes sont données par la fonction $f[0]$:

$$\overrightarrow{OM_k[0]} = f[0] \left(\frac{k-1}{n-1} t_{\max} \right). \quad (3)$$

À chaque itération, la fonction $f[i]$ décrivant la ligne moyenne de la déformée est définie par interpolation des n points $\{M_1[i], \dots, M_n[i]\}$ par une spline cubique (sauf pour $i = 0$ où la fonction est connue). Le torseur au point B est recalculé en fonction de la géométrie. On en déduit le torseur des efforts intérieurs $\mathcal{T}_{\text{int}}[i]$ le long de la poutre puis les déplacements $\vec{u}_k[i]$ de tous les points $M_k[i]$ sont calculés par la formule de Bresse en prenant comme référence le point A , origine de la poutre, dont le déplacement et la rotation sont nuls :

$$\vec{u}_k[i] = \int_A^{M_k[i]} \frac{N[i]}{ES} \vec{x}_L ds + \int_A^{M_k[i]} \left(\frac{M_t[i]}{GJ} \vec{x}_L + \frac{M_{fy}[i]}{EI_y} \vec{y}_L + \frac{M_{fz}[i]}{EI_z} \vec{z} \right) \wedge \overrightarrow{GM_k[i]} ds. \quad (4)$$

Les positions des points initiaux $M_k[0]$ après déformation sont alors désignées par de nouveaux points $M_k[i+1]$ définis par :

$$\overrightarrow{OM_k[i+1]} = \overrightarrow{OM_k[0]} + \vec{u}_k[i]. \quad (5)$$

On procède ainsi jusqu'à la convergence, qui se traduit par l'égalité entre $\mathcal{T}_{\text{int}}[i]$ et $\mathcal{T}_{\text{int}}[i-1]$ à un écart minimal donné.

3 Application

3.1 Mise sous tension de l'archet

La méthode décrite ci-dessus est illustrée par le problème plan de la mise sous tension de l'archet. La géométrie initiale de la baguette a été définie à partir de données de la littérature. Le diamètre de la section utilise la formule empirique suivante [8] :

$$d(x) = -6.22 + 5.14 \log(875 - x), \quad (6)$$

où x désigne l'abscisse, exprimée en millimètres. Cette formule provient du luthier Vuillaume (19^e siècle) ayant fait nombreuses mesures sur des archets Tourte, archetier à l'origine de l'archet moderne. Elle est valable pour x variant entre 110 mm et 700 mm (les 110 premiers millimètres étant à diamètre constant). On ne s'intéresse ici qu'à la partie de la baguette située après la hausse, on prend donc pour origine $x = 0$ le point d'attache du crin à la hausse et la longueur restante vaut 650 mm. La formule est adaptée en conséquence :

$d(x) = -6.22 + 5.14 \log(825 - x)$. La figure 3 montre l'évolution du diamètre et du moment quadratique

$I_z(x) = \frac{\pi d(x)^4}{64}$ le long de la ligne moyenne.

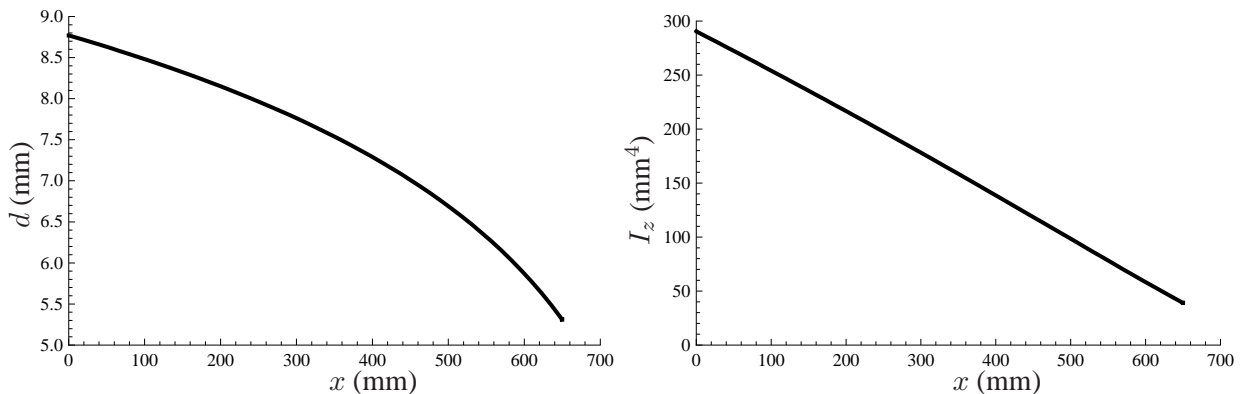


FIG. 3 – Diamètre et moment quadratique le long de la baguette.

On observe que le moment quadratique correspondant à cette décroissance logarithmique du diamètre peut être approché par une fonction linéaire $I_z(x) = a(x - x_0)$ avec une erreur relative maximale d'environ 3% ($a = -0.389 \text{ mm}^3$, $x_0 = 753 \text{ mm}$). Ce résultat permet de calculer la forme initiale de la baguette de sorte que le moment créé par une tension du crin considérée comme maximale la ramène droite. En effet, si la poutre AB est droite et sollicitée en flexion pure par un moment $\vec{M}_B = M \vec{z}$ appliqué en B , la flèche se déduit de l'équation différentielle

$$\frac{d^2 u_y}{dx^2} = \frac{M}{E I_z(x)} = \frac{M}{E a (x - x_0)}, \quad (7)$$

que l'on intègre deux fois pour obtenir :

$$u_y(x) = \frac{M}{E a} \left((x - x_0) \ln \left(1 - \frac{x}{x_0} \right) - x \right). \quad (8)$$

D'après le théorème de superposition, si la forme initiale de la poutre est $y_0(x) = -u_y(x)$, celle-ci sera ramenée droite sous l'effet du moment M . On souhaite une tension maximale de 80 N au point C , c'est-à-dire un moment de -1600 N.mm au point B . On représente donc la forme initiale de la baguette (appelée « cambre » par les archetiers) par la fonction $f[0](t) = (x_0(t), y_0(t), z_0(t))$ définie sur l'intervalle $[0, 650]$, avec $x_0(t) = t$, $z_0(t) = 0$ et

$$y_0(t) = 20 - \frac{1600}{0.389 E} \left((t - 753) \ln \left(1 - \frac{t}{753} \right) - t \right). \quad (9)$$

Le module d'Young choisi pour le Pernambouc est $E = 35\,000$ MPa. La figure 4 présente les premières et dernières itérations du calcul de la déformée pour une tension du crin de 80 N.

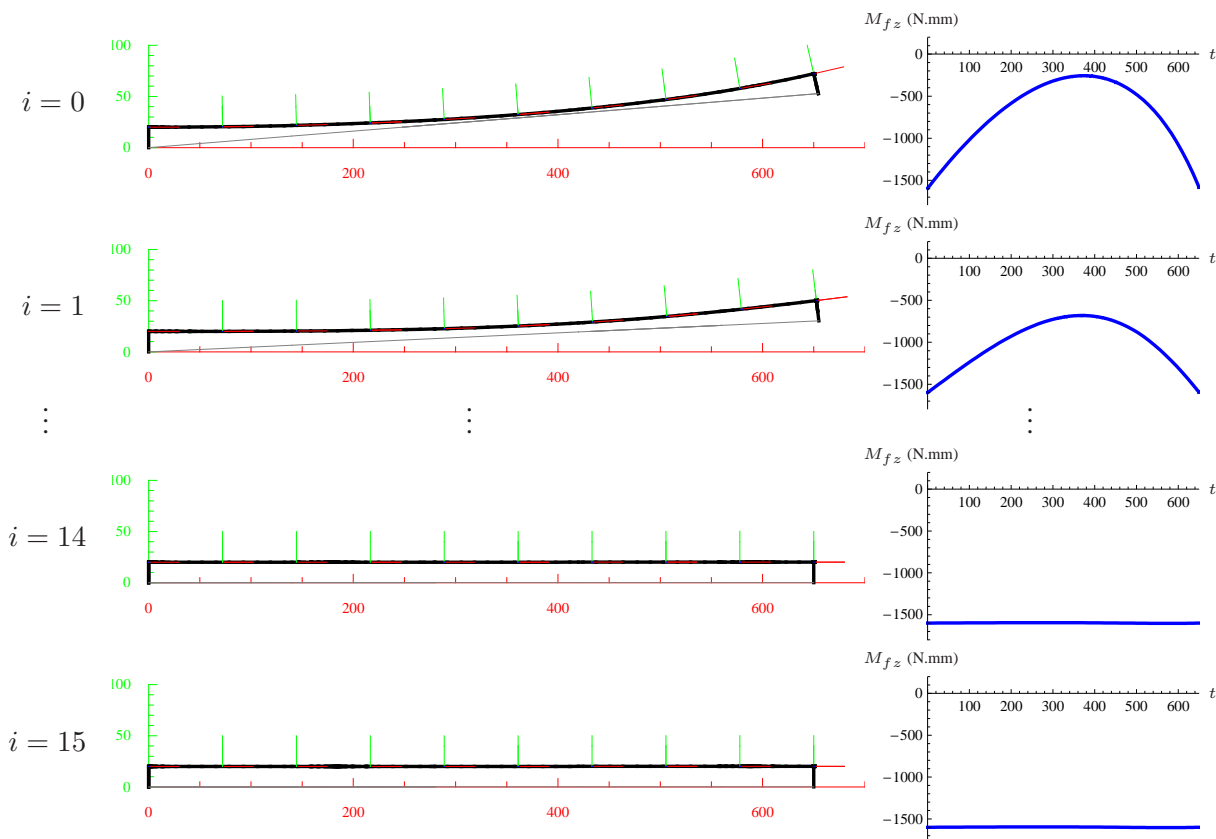


FIG. 4 – Calcul de la mise sous tension de l'archet par itérations successives.

En comparant la configuration initiale à la première configuration déformée, on observe le changement d'orientation de la force de tension du crin provoqué par le déplacement de la tête. De plus, on constate un écart significatif entre le moment de flexion M_{fz} calculé avant et après déformation. Au contraire, il n'y a pas de différence notable entre les itérations 14 et 15 : les calculs successifs ont convergé. Notons que la déformée finale est une droite, conformément à ce qui était escompté.

3.2 Influence de la tension du crin

L'influence de la tension du crin sur la raideur latérale a été évaluée en partant de la même géométrie initiale. Pour différentes valeurs de la tension allant de 0 à 80 N, le déplacement z de l'extrémité de la baguette soumise à une force latérale F_z de 1 N a été calculé afin de déterminer la raideur $k_z = \frac{F_z}{z}$. La figure 5 présente les résultats obtenus. On observe que l'augmentation de tension du crin s'accompagne d'une diminution de la raideur latérale. Entre l'archet sans tension et l'archet sous tension maximale, la raideur est divisée par deux.

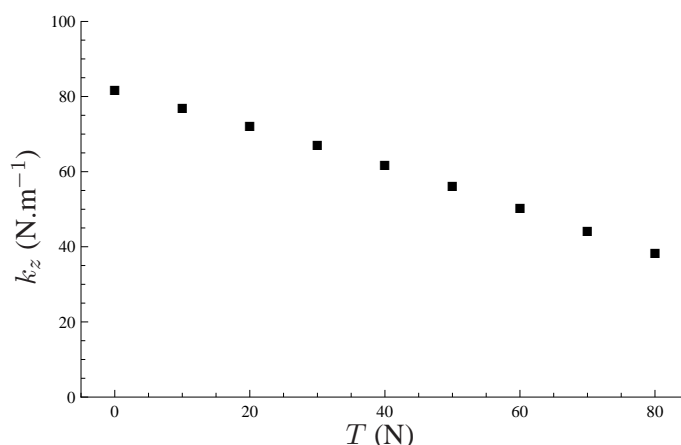


FIG. 5 – Raideur latérale calculée pour différentes valeurs de la tension du crin.

4 Mesure de la raideur latérale

4.1 Protocole expérimental

Des mesures de la raideur latérale sur un archet d'étude ont été effectuées en utilisant le dispositif représenté sur la figure 6. L'archet est encasturé au niveau de la hausse et orienté de telle sorte que son plan (\vec{x}, \vec{y}) soit horizontal. Les forces et les déplacements sont donc appliqués dans la direction verticale au niveau de la tête. La force F_z est déterminée à l'aide d'une balance, et le déplacement z à l'aide d'un trusquin.

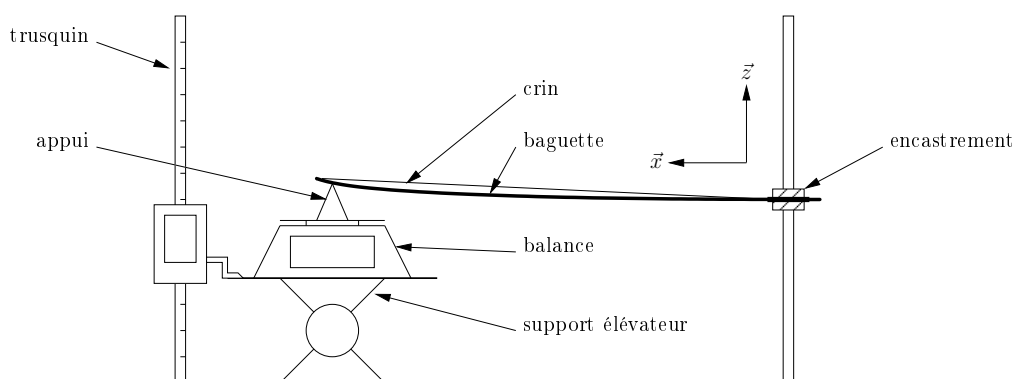


FIG. 6 – Montage permettant de mesurer la raideur latérale d'un archet.

Cette mesure est effectuée pour trois niveaux de tension du crin. Le premier niveau correspond à une tension nulle. Dans ce cas la raideur mesurée dépend uniquement des propriétés mécaniques et géométriques de la baguette. Le deuxième niveau correspond à la tension que le violoniste fixe pour jouer. Elle est appelée tension « nominale » et correspond à une distance crin-baguette de 7 mm. Le troisième niveau correspond à la tension ramenant la baguette quasiment droite. Elle est appelée tension « maximale » et correspond à une distance crin-baguette de 12 mm. Pour chaque tension, le déplacement z imposé à l'extrémité de la baguette est augmenté par pas de 2 mm et la valeur de la force F_z correspondante est relevée.

4.2 Résultats

La figure 7 rassemble les résultats obtenus pour les trois niveaux de tension du crin. Chaque série de mesures peut être approchée par une droite dont la pente définit la raideur latérale de la baguette. On observe que la raideur latérale diminue avec la tension du crin. Ce résultat est en accord avec ceux donnés par le modèle (fig. 5). Le tableau 1 donne les valeurs de la raideur déterminées pour les trois niveaux de tension. D'après ces résultats, l'archet sous tension maximale voit sa raideur latérale diminuer d'environ 25% par rapport à l'archet non tendu. Cette diminution est plus faible que celle donnée par le modèle (environ 50%). Cela peut s'expliquer par une diminution de tension dans le crin lors de la flexion latérale de la baguette, phénomène que le modèle actuel ne prend pas en compte.

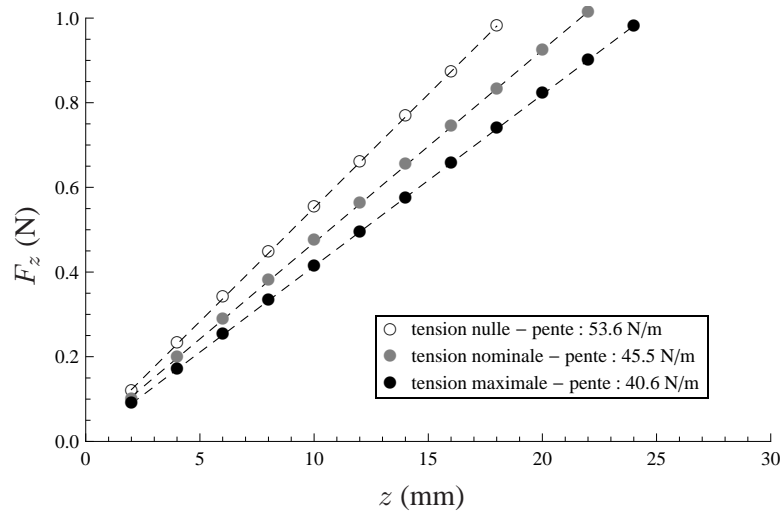


FIG. 7 – Mesure de la raideur latérale pour différents niveaux de tension du crin.

	tension nulle	tension nominale	tension maximale
raideur latérale (N.m ⁻¹)	53.6	45.5	40.6

TAB. 1 – Raideur latérale de l'archet en fonction de la tension du crin.

5 Conclusion et perspectives

Les résultats théoriques et expérimentaux ont mis en évidence une diminution de la raideur latérale avec l'augmentation de tension du crin. Si la raideur latérale est trop faible, la baguette risque de toucher la corde dans certains modes de jeu. Il est donc probable que la raideur latérale d'un archet intervienne parmi d'autres propriétés dans l'estimation de sa qualité par un violoniste. Des essais en jeu effectués conjointement avec des mesures sur différents archets permettront de discuter cette hypothèse. En particulier, une comparaison entre raideur latérale et raideur transversale de chaque archet sous tension nominale est envisagée. Pour tracer des courbes expérimentales semblables à celle de la figure 5, une connaissance suffisamment précise de la tension est indispensable. En général, la tension est estimée avant les mesures en prenant comme référence la distance crin-baguette [6] ou la position de la hausse [9]. Un dispositif permettant de connaître la tension du crin pendant les mesures est en cours d'élaboration. Par la suite, l'influence de la précontrainte sur certaines propriétés dynamiques de l'archet fera l'objet d'une étude théorique et expérimentale.

Références

- [1] Brémaud I. Diversité des bois utilisés ou utilisables en facture d'instruments de musique. Thèse de Doctorat, Université des sciences et techniques du Languedoc, 2006.
- [2] Carlsson P. and Tinnsten M. Geometrical compensation for varying material properties in bows by the use of numerical optimization. *Acta Acustica united with Acustica*, 93, 145–151, 2007.
- [3] Askenfelt A. and Guettler K. The bouncing bow : Some important parameters. *TMH-QPSR*, 38(2-3), 53–57, 1997.
- [4] Pickering N. Physical characteristics of violin bows. *The Journal of the Violin Society of America*, 8(2), 41–58, 1987.
- [5] Askenfelt A. Observations on the violin bow and the interaction with the string. In *Proceedings of the International Symposium on Musical Acoustics*, 1995.
- [6] Dauchez N., Gêneaux J.-M., and Brémaud I. Qualité des archets de violon et instabilité de type flambe-ment. In *Actes du 8^e Congrès Français d'Acoustique*, Tours, 2006.
- [7] Frey F. Analyse des structures et milieux continus – Mécanique des structures, chapitre 20. Presses Polytechniques et Universitaires Romandes, 2000.
- [8] Fétis F.-J. Antoine Stradivari luthier célèbre connu sous le nom de Stradivarius, chapitre Détermination empirique de la forme des archets de Tourte. Vuillaume, 1856.
- [9] Askenfelt A. Observations on the dynamic properties of violin bows. *STL-QPSR*, 33(4), 043–049, 1992.