

Résumé

La compréhension des phénomènes économiques nécessite de prendre en compte plusieurs échelles de temps simultanément. Nous étudions le cas d'un modèle simple d'épargne, où plusieurs échelles de temps caractéristiques coexistent. Nous montrons qu'il est possible de séparer les contributions lentes et rapides confondues dans une même variable observée en nous appuyant d'une part sur une linéarisation de la dynamique (stochastique et nonlinéaire) autour d'un point d'équilibre, et d'autre part sur un découplage via la transformation de Chang, issue de la théorie de la commande.

Les modèles d'équilibre calculable, plus généraux et de grande dimension, tels que les modèles DSGE employés par de nombreuses institutions financières, pourraient bénéficier de ces outils autant pour accélérer leurs simulations que pour l'analyse statistique de données réelles.

macroéconomie, épargne, Solow, Ramsey, découplage, slow/fast, multiéchelle, filtrage

Découplage de modèle économique lent/rapide

Aurélien Hazan
SAMM Université Paris 1
90, rue de Tolbiac, Paris, France
aurelien.hazan@univ-paris1.fr

18 avril 2011

1 Introduction

De très nombreux phénomènes physiques ou sociaux-économiques sont caractérisés par la coexistence de plusieurs échelles de temps caractéristiques, parfois très distinctes les unes des autres.

En économie on peut citer les échelles temporelles suivantes [Bla02] : court terme (e.g. marché des biens de consommation, marchés financiers), moyen terme (e.g. marché du travail, monnaie), et long-terme (e.g. croissance, progrès technologique, accumulation du capital, production).

Souvent, les données disponibles concernant un phénomène économique donné mélangent et rendent indiscernables des contributions ayant des échelles de temps caractéristiques différentes. Dans cet article, pour séparer ces différentes contributions, nous proposons d'utiliser un ensemble d'outils tirés de la théorie de la commande, et plus particulièrement de l'analyse des échelles temporelles¹ [Nai02].

Nous illustrons l'importance de ce point de vue à l'aide du modèle de Solow-Swan, employé aussi bien en macroéconomie pour décrire les phénomènes de croissance qu'en microéconomie pour modéliser l'épargne.

Ce modèle sera brièvement décrit en §2. Le principe du découplage des composantes lentes et rapides sera exposé en §3. Des résultats de simulations seront exposés en §4, avant de discuter en §5 des perspectives dégagées par ce travail.

1. "Time Scale Analysis".

2 Modèle de Solow-Swan

Nous nous plaçons en temps continu, dans le cas simplifié d'une économie fermée [BSiM04] sans dépense publique² :

$$Y(t) = C(t) + I(t) \quad (1)$$

où $Y(t)$ est la production, $C(t)$ la consommation et $I(t)$ l'investissement. L'équation d'accumulation du capital s'écrit :

$$\dot{K}(t) = Y(t) - C(t) - \delta K(t) \quad (2)$$

où δ est le taux de dépréciation du capital.

Nous posons une fonction de production néoclassique de type AK, avec chocs stochastiques :

$$Y(t) = Ae^{z(t)}K^\alpha(t) \quad (3)$$

où α est l'élasticité, A une constante et $z(t)$ un terme de choc autorégressif d'espérance nulle. Le quantité de travail est ici implicitement considérée comme constante.

Dans le modèle de Solow-Swan, la consommation et donc l'investissement sont des fonctions linéaires de la production, dont les proportions respectives sont fixées par une constante $s \in [0, 1]$, le taux d'épargne. En posant pour simplifier $A = 1$, on a :

$$C(t) = (1 - s)Y(t) \quad (4)$$

$$\dot{K}(t) = se^{z(t)}K^\alpha(t) - \delta K(t) \quad (5)$$

On fait l'hypothèse que les chocs productifs sont aléatoires, et obéissent à l'équation suivante :

$$\dot{z}(t) = -rz(t) + \sigma \dot{W}(t) \quad (6)$$

où $W(t)$ est un bruit blanc centré, $r > 0$, $\sigma > 0$. Cette équation correspond à une marche aléatoire (terme \dot{W}) amortie de manière exponentielle par le terme $-rz(t)$.

Le système ci-dessus, muni de conditions initiales appropriées, admet un équilibre stable qu'on peut approximer en négligeant la partie aléatoire pour σ faible. En fixant $z(t) = 0$ et $\dot{K}(t) = 0$, on obtient :

$$K_\infty \approx \exp\left(\frac{\log \frac{s}{\delta}}{\alpha - 1}\right) \quad (7)$$

Le modèle de Solow est simple mais néanmoins très utilisé pour étudier les phénomènes de croissance au niveau macroéconomique. Il peut être généralisé comme suit : l'hypothèse de consommation linéaire est abandonnée au profit d'un modèle d'optimisation d'une fonction d'utilité. Le modèle obtenu, dit de Ramsey, peut être ramené à un problème de commande optimale au moyen d'une approximation linéaire quadratique de la fonction d'utilité au voisinage de l'équilibre. Le cas du temps discret est par exemple traité dans [HM05] mais ne sera pas examiné ici.

2. cf [BSiM04, §1.1] pour une économie ouverte avec dépense publique.

3 Système lent/rapide et découplage

Le comportement du modèle économique décrit en §2 résulte de l'interaction des deux équations (5,6). Les deux phénomènes associés, accumulation du capital et choc, ont des temps caractéristiques distincts : un choc peut laisser son empreinte plusieurs années dans l'économie, alors qu'un épargnant adaptera son comportement en quelques semaines ou quelques mois. Pour en tenir compte nous introduisons la notion de système lent/rapide.

Soit un système dynamique régi par un système d'équations différentielles linéaire $\dot{x} = Ax$, $x(t_0) = x_0 \in \mathbb{R}^n$. Si les valeurs propres λ_i de A peuvent être réparties en deux groupes clairement distincts, on dira que le système est *lent/rapide*, ou encore qu'il y a *séparation d'échelle*. Dans un cadre non-linéaire, on peut étendre la définition précédente en linéarisant le système en un point.

Pour certaines valeurs des paramètres du modèle de Solow-Swan (5,6), le système devient lent-rapide, pourvu qu'on le linéarise en un point, par exemple l'équilibre qui vérifie l'équation (7) de manière approchée. On en donne quelques exemples dans le tableau Tab.1.

α	δ	r	$\lambda_1 = \delta(\alpha - 1)$	$\lambda_2 = -r$
0.1	0.9	0.01	-0.81	-0.01
0.9	0.01	1	-0.001	-1

TABLE 1 – Paramètres du modèle et valeurs propres λ_i du système linéarisé autour de l'état d'équilibre ($K = K_\infty, z = 0$). On remarque que s n'intervient pas dans $\lambda_{1,2}$, mais dans le couplage des systèmes.

La première ligne donne l'exemple d'une faible élasticité du capital dans la fonction de production, avec un taux de dépréciation important. Dans ce cas, la valeur propre de l'équation en K est plus grande en valeur absolue que celle du terme de choc. $K(t)$ est donc le terme rapide, et $z(t)$ le terme lent. La deuxième ligne montre une situation renversée. Dans les deux cas on constate que les valeurs propres ont des ordres de grandeur distincts, et que donc le système dans son ensemble a la propriété de séparation d'échelle.

Le problème qui nous intéresse est de séparer les contributions lentes et rapides qui s'influencent l'une l'autre. En particulier, le système lent influencera de manière durable le système rapide, ce qui nous empêchera de distinguer sa réponse propre à un choc.

Pour pallier ce problème, nous exposons en §3.1 le principe de la transformation de Chang qui permet de découpler deux systèmes linéaires dépendants et donc de les observer séparément l'un de l'autre. En §3.2 nous rappelons quelques applications classiques de cette transformation dans le domaine de la commande. En §4 nous proposons des simulations numériques.

3.1 Transformation de Chang

Cette transformation³ est une diagonalisation par blocs d'un système linéaire. Soient $x_1(t) \in \mathbb{R}^{n_1}$, $x_2(t) \in \mathbb{R}^{n_2}$ les états lent et rapide qui vérifient le système différentiel linéaire suivant :

$$\dot{x}_1(t) = A_{11}x_1(t) + A_{12}x_2(t) + B_1u(t) \quad (8)$$

$$\dot{x}_2(t) = A_{21}x_1(t) + A_{22}x_2(t) + B_2u(t) \quad (9)$$

Moyennant la transformation :

$$x_s(t) = (I_s - ML)x_1(t) - Mx_2(t) \quad (10)$$

$$x_f(t) = Lx_1(t) + I_f x_2(t) \quad (11)$$

le système se met sous la forme [Nai02] :

$$\dot{x}_s(t) = A_s x_s(t) + B_s u(t) \quad (12)$$

$$\dot{x}_f(t) = A_f x_f(t) + B_f u(t) \quad (13)$$

Sous cette dernière expression, on voit donc que $x_s(t)$ ne dépend plus de x_f , et réciproquement.

Pour y parvenir, il est nécessaire de calculer les matrices L et M , qui sont des inconnues. Lorsque ces solutions existent, elles répondent à deux équations matricielles⁴.

$$LA_{11} + A_{21} - LA_{12}L - A_{22}L = 0 \quad (14)$$

$$A_{11}M - A_{12}LM - MA_{22} - MLA_{12} + A_{12} = 0 \quad (15)$$

La principale condition d'existence est l'inversibilité de A_{22} . Plusieurs algorithmes de résolution numérique sont disponibles dans la littérature [GL01, §1.1]. Nous emploierons dans cet article un algorithme de point fixe.

3.2 Applications classiques : contrôle et filtrage de système lent/rapide

La transformation (10,11) fonde un grand nombre de méthodes développées en théorie de la commande pour les systèmes lent/rapides⁵. La plupart des systèmes techniques présentent la propriété de séparation d'échelle. Par exemple, un système mécanique asservi par une commande électronique peut y être assimilé, étant donné l'écart entre les temps caractéristiques de ces deux types d'artefacts.

L'une des théories les plus utilisées, la théorie de la commande optimale, a été étendue à ce type de système, grâce à la transformée de Chang [KKO99].

3. on la trouve associée à différents auteurs dans la littérature (Riccati, Sibuya, Harris).

4. on parle d'équations nonlinéaires algébriques de Riccati.

5. plus spécifiquement pour des systèmes lent/rapides qualifiés de "singulièrement perturbés" c'est-à-dire quand l'équation rapide du système différentiel se présente sous la forme $\varepsilon \dot{x}_2(t) = g(x_1, x_2, \varepsilon, t)$, où $\varepsilon \ll 1$

Parallèlement, le problème du filtrage - l'estimation statistique optimale de l'état d'un système observé de manière imparfaite - a également été étendu dans le cas lent/rapide à l'aide de cette transformation. Ceci permet notamment de traiter des problèmes de prédiction de l'état d'un système lent/rapide.

A notre connaissance, ce type d'outil a été très peu employé pour l'étude de systèmes socio-économiques, malgré le fait qu'ils présentent souvent la propriété de séparation d'échelle. Nous illustrons leur application dans le cas du modèle de Solow-Swan en §4.

4 Simulations numériques

4.1 Simulation et linéarisation du modèle de Solow-Swan continu

Les solutions du système (5,6) écrit en §2 ne peuvent être trouvées aisément de manière analytique. Nous proposons de les approximer grâce à un schéma de discrétisation d'Euler. De plus, afin d'appliquer notre algorithme de découplage, nous linéarisons le modèle au point d'équilibre ($K_\infty, z_\infty = 0$). Ces deux étapes sont détaillées en Annexe.

La Fig. 1 permet de comparer l'approximation en temps discret du système nonlinéaire et du système linéarisé.

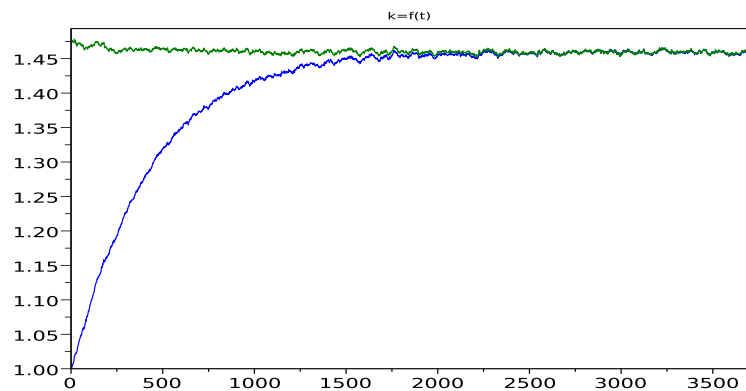


FIGURE 1 – Capital $K = f(t_k)$. Approximation du modèle de Solow-Swan nonlinéaire (en bleu) et linéarisé autour du point d'équilibre (en vert).

4.2 Découplage

Nous supposons ici que l'évolution du capital $K(t)$ est lente par rapport aux chocs $z(t)$. Nous souhaitons vérifier que la transformation de Chang nous permet de séparer la partie spécifique lente $K_s(t)$ du terme $K(t)$.

Pour cela nous appliquons la transformation (10,11) à la version linéarisée du système (5, 6) autour du point d'équilibre $(K_\infty, z = 0)$. Nous obtenons un système du type (12, 13), que nous discrétisons à l'aide d'un schéma d'Euler. Les résultats sont résumés par la Fig. 2. Nous constatons bien que les chocs z ont un temps caractéristique plus court que celui du capital.

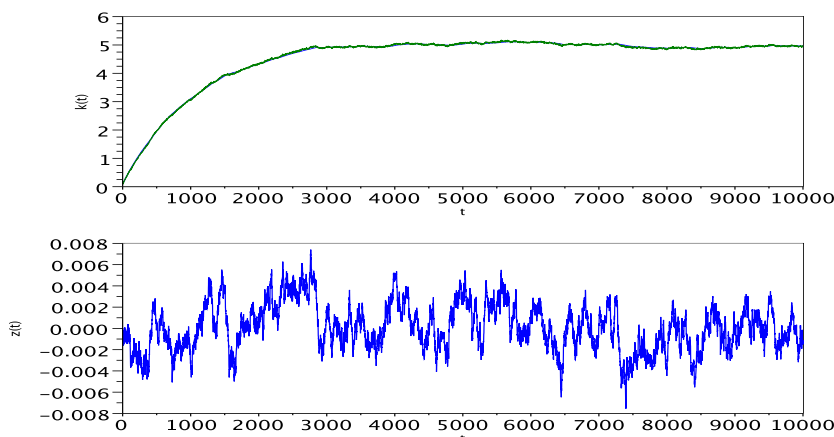


FIGURE 2 – Capital $K(t_k)$ et choc $z(t_k)$. (haut) : $K(t_k)$ en vert, et en bleu sa composante lente spécifique $K_s(t_k)$ obtenue par la transformation de Chang. (bas) : chocs $z(t_k)$.

Cependant le capital $K(t_k)$ et sa composante lente spécifique $K_s(t_k)$ obtenue par la transformation de Chang sont indiscernables à cette échelle. La Fig. 3(haut) permet de pallier ce problème, et de constater que la transformation a bien isolé le terme lent spécifique $K_s(t_k)$ qui est perturbé par l'influence de z dans $K(t_k)$.

4.3 Intepretation

De tels résultats auraient pu être obtenus avec des méthodes purement statistiques, sans prendre en compte le modèle sous-jacent. Par exemple, une simple moyenne mobile (moyennant le choix de la largeur du filtre), ou la régression de K par rapport à z , auraient pu donner des résultats satisfaisants.

Cependant, en augmentant la dimension, en complexifiant les modèles et en augmentant le niveau du bruit, il est probable que les techniques statistiques classiques se trouvent mises en défaut. Nous réaliserons une comparaison plus détaillée dans des travaux ultérieurs.

5 Conclusions et perspectives

Dans cet article nous considérons un phénomène économique comme résultant de l'interaction de plusieurs contributions ayant des échelles

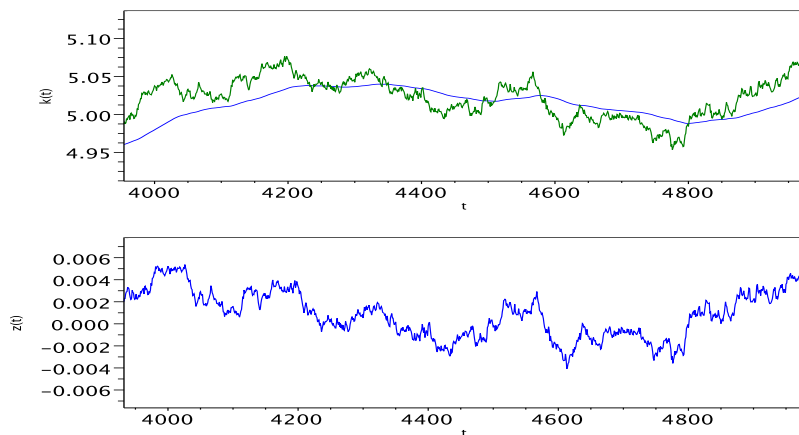


FIGURE 3 – Capital $K(t_k)$ et choc $z(t_k)$. (haut) : $K(t_k)$ en vert, et en bleu sa composante lente spécifique $K_s(t_k)$ obtenue par la transformation de Chang. (bas) : chocs $z(t_k)$.

de temps caractéristiques très différentes les unes des autres. Pour certaines valeurs de ses paramètres, le modèle classique de Solow-Swan est un système lent/rapide.

Nous suggérons d'appliquer à l'analyse de ce modèle des outils spécifiquement développés pour les systèmes lents/rapides, issus de la théorie de la commande, notamment la transformation de Chang. Notre propos a été illustré par des simulations numériques dans un cas très simple, qui permet d'apprécier les capacités de découplage de la transformation.

Dans la suite, nous proposons d'appliquer cette méthode à des cas plus réalistes, si possible en grande dimension. Dans un premier temps, nous identifierons les problèmes économiques réels ou les modèles (e.g. de type DSGE⁶) qui présentent la propriété de séparation d'échelle, et en proposerons un si besoin, par exemple en introduisant des horizons temporels finis d'ordre de grandeur distincts. Ils seront calibrés sur des données réelles.

Pour les modèles qui reposent sur la commande optimale, tels que le modèle de Ramsey, nous utiliserons le système découplé afin de proposer une solution composite lente/rapide, en résolvant séparément les sous-problèmes de commande optimale. Les aspects computationnels et la précision des approximations seront évalués.

Nous traiterons dans un second temps l'analyse de données réelles sous l'angle du filtrage optimal, où l'observation de l'état du système est partielle et perturbée par un bruit d'observation.

Des extensions au cas non-linéaire sont envisagées dans la littérature et pourront également être considérées, afin d'éviter l'étape de linéarisation.

6. Dynamic Stochastic General Equilibrium.

Annexe

Le schéma de discrétisation d'Euler des équations (5,6) s'écrit :

$$z(i+1) = z(i)(1-rh) + W(i+1) - W(i) \quad (16)$$

$$K(i+1) = K(i) + h \left[se^{z(i)} K^\alpha(i) - \delta K(i) \right] \quad (17)$$

où h est le pas de discrétisation.

Au point d'équilibre ($K_\infty, z_\infty = 0$), la linéarisation s'écrit en temps continu :

$$\dot{K}(t) = \delta(\alpha-1) K(t) + sK_\infty^\alpha z(t) + (1-\alpha)sK_\infty^\alpha \quad (18)$$

$$\dot{z}(t) = -r z(t) + \dot{W}(t) \quad (19)$$

La linéarisation est ici effectuée à l'aide d'un développement de Taylor en dimension 2, bien que de manière rigoureuse un développement de Ito-Taylor soit nécessaire. Le système linéarisé continu est également discrétisé à l'aide du schéma d'Euler.

Remerciements

Je remercie O. Aboura pour son aide précieuse au sujet du schéma de discrétisation de l'EDS, et du terme correctif du développement de Taylor stochastique.

Références

- [Bla02] O. Blanchard. *Macroeconomics*. MIT Press, Cambridge, MA., 2002.
- [BSiM04] R. Barro and X. Sala-i Martin. *Economic Growth*. MIT Press, Cambridge, MA., 2004.
- [GL01] Z. Gajić and M.-T. Lim. *Optimal control of singularly perturbed linear systems and applications*. Marcel Dekker, 2001.
- [HM05] B. Heer and A. Maussner. *Dynamic General Equilibrium Modelling*. Springer, 2005.
- [KKO99] P. Kokotović, H.K. Khalil, and J. O'Reilly. *Singular perturbation methods in control. Analysis and design*. SIAM Classics in Applied Mathematics, 1999.
- [Nai02] D.S. Naidu. Singular perturbations and time scales in control theory and applications : an overview. *Dynamics of Continuous, Discrete and Impulsive Systems Series B : Applications and Algorithms*, 9(2) :233–278, 2002.

