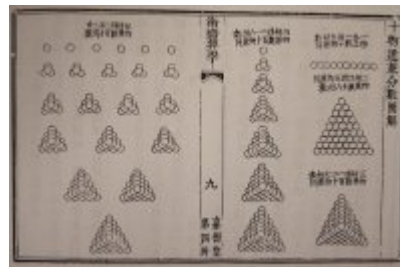


Pratiques et mathématiques combinatoires en Chine (2)

Combinaisons et nombres figurés

Le 16 août 2009, par **Andrea Bréard**

Maître de conférences, Université Lille I, Laboratoire Paul Painlevé UMR CNRS 8524, chercheur associé du REHSEIS - UMR7596 ([page web](#))



A travers les écrits de quatre auteurs chinois du XIIIe au XIXe siècle, nous analysons, dans une série de trois articles, les divers contextes dans lesquels on s'est intéressé en Chine à différentes questions qui relèvent aujourd'hui du domaine de la combinatoire : les séries arithmétiques, les dénombrements combinatoires, les nombres figurés et le « triangle de Pascal ».

*La première partie (**Le début d'un nouveau domaine**) portait sur un manuscrit de la fin du XVIIe siècle, qui présentait une collection exhaustive de problèmes et de procédures types classés en fonction de leur signification combinatoire : permutations, arrangements ou combinaisons avec ou sans répétition.*

Dans ce deuxième volet on se penchera sur un écrit d'une autre nature. L'auteur, Wang Lai 汪萊 (1768-1813), s'y intéresse concrètement aux questions suivantes : de combien de manières peut-on choisir k objets au sein d'un ensemble à n éléments, et quelle est la somme de tous ces nombres de combinaisons pour $k = 1, \dots, n$? Nous nous concentrerons en particulier sur les aspects épistémologiques de sa démarche : d'une part, l'auteur utilise des figures spécifiques, et d'autre part il renvoie à des éléments d'une tradition de travail sur les nombres figurés et la sommation de séries.

Le texte de Wang Lai (1768-1813)

CET auteur est bien connu des spécialistes pour avoir été membre de l'école philologique Qian-Jia [1] et pour avoir conduit des travaux en algèbre traditionnelle. Cependant son essai *Les principes mathématiques des combinaisons successives* (*Dijian shuli 遞兼數理*) [2] reste, lui, méconnu. D'un point de vue mathématique moderne, les « combinaisons successives » de Wang Lai sont les coefficients binomiaux C_n^k . Ils correspondent au nombre de combinaisons possibles lorsqu'on tire (sans remise) k objets parmi n .

Regardons tout d'abord la structure de ce texte qui comporte une dizaine de pages. On y trouve :

- Une introduction générale à la problématique, qui fournit les éléments suivants :
 - une explication de ce que sont les « nombres des combinaisons successives » ;
 - une méthode pour obtenir les « nombres totaux des combinaisons successives » (*dijian zhi zongshu 遞兼之總數*), c'est-à-dire les sommes

$$S_n = \sum_{k=1}^n C_n^k;$$

- ◦ une méthode pour obtenir les « nombres partiels des combinaisons successives » (*dijian zhi fenshu* 遞兼之分數), i.e. les termes C_n^k . Les descriptions de ces deux méthodes introduisent le vocabulaire des « empilements triangulaires » (*sanjiao dui* 三角堆), nécessaire dans le calcul des sommes arithmétiques finies de divers ordres.
- Une « explication illustrée du nombre total des combinaisons successives pour 10 objets ». Il s'agit de la **figure 2** ci-dessous, qui montre les sommes S_n pour $1 \leq n \leq 10$.
- Une explication illustrée du nombre partiel des combinaisons successives pour 10 objets. Dans cette figure (voir **figure 3** ci-dessous) les « nombres partiels » C_{10}^k ($k = 1, \dots, 9$) sont représentés à l'aide de pyramides de boules unitaires.
- Cinq explications des raisons pour lesquelles on utilise les procédures des « empilements triangulaires » pour les « nombres partiels des combinaisons successives ».
- Un exemple : un problème de divination.
- Une méthode générale de calcul des « empilements triangulaires » de divers ordres, ou en termes mathématiques modernes, des sommes [3] :

$$\sum_{k=1}^n k = \frac{n(n+1)}{1 \cdot 2},$$

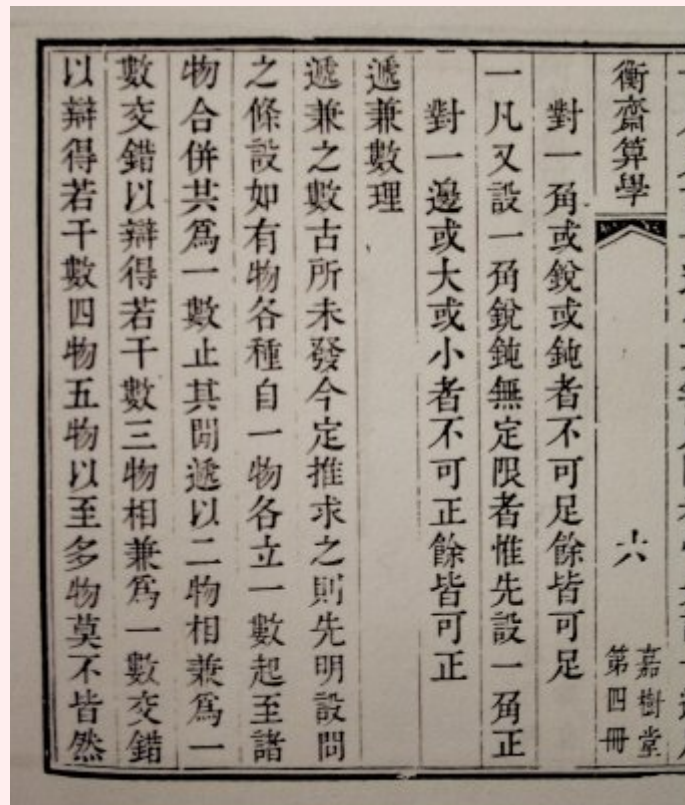
$$\sum_{k=1}^n \frac{k(k+1)}{1 \cdot 2} = \frac{n(n+1)(n+2)}{1 \cdot 2 \cdot 3},$$

...

Entrons dans le détail

Dans l'introduction, Wang Lai nous explique le propos de son essai sur les « combinaisons successives » :

Dans le passé, on n'a pas développé les nombres (*shu* 數) des combinaisons successives. Nous déterminons aujourd'hui comment il faut les chercher. Il convient donc d'expliquer tout d'abord les éléments qui entrent dans les énoncés des problèmes. Supposons qu'on ait toutes sortes d'objets. On commence par un objet, dont chacun établit un seul ensemble, jusqu'à tous les objets pris ensemble qui forment un seul ensemble. Entre ceux-ci, successivement, avec deux objets combinés entre eux pour former un ensemble, en échangeant et en alternant on discute combien d'ensembles l'on peut obtenir ; avec trois objets combinés entre eux pour former un ensemble, en échangeant et en alternant on discute combien d'ensembles l'on peut obtenir ; quatre objets, cinq objets jusqu'à de multiples objets, il n'en est aucun qui ne soit pas ainsi [4]. C'est ce qu'on appelle les nombres des combinaisons successives (*dijian zhi shu* 遞兼之數).



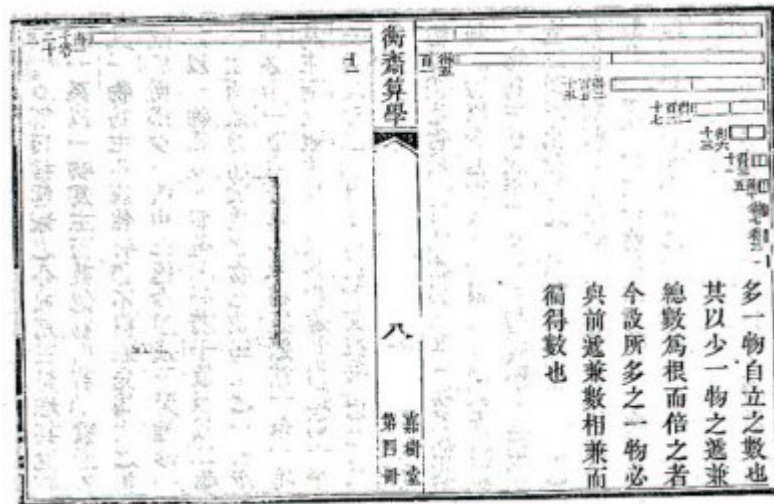
Wang Lai donne ensuite une méthode pour calculer la somme des nombres de combinaisons

$$S_n = \sum_{k=1}^n C_n^k.$$

L'algorithme qu'il indique correspond en termes mathématiques modernes à une itération : on répète les opérations de doubler le résultat obtenu à l'étape précédente et d'ajouter l'unité. Étant donné un ensemble de n objets, et en commençant par $S_1 = 1$ (ce qui correspond à C_1^1), il prescrit $n - 1$ itérations des opérations pour $k = 2, \dots, n$, ce qui donne successivement :

$$S_k = 2S_{k-1} + 1.$$

La figure correspondante de Wang Lai (figure 2 ci-dessous) montre, à l'aide de barres doublées chacune par rapport à la barre précédente et rallongées d'une unité les $n - 1$ itérations pour $n = 10$. Il obtient ainsi $S_{10} = 1023$.

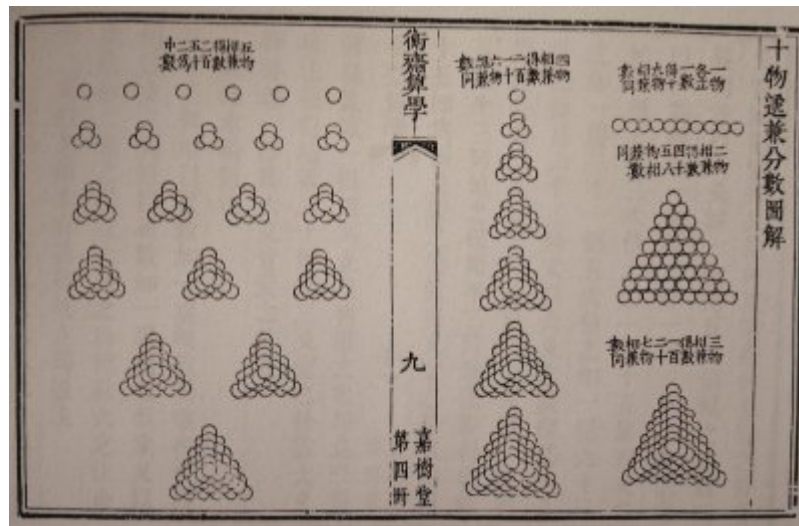


Contrairement à ce qu'ont pu dire certains historiens [5], pour être tout à fait exact, Wang Lai n'a donc pas employé l'égalité remarquable suivante [6] :

$$\sum_{k=1}^n C_n^k = 2^n - 1.$$

Pour la « Procédure des nombres partiels des combinaisons successives », c'est-à-dire le calcul des valeurs des C_n^k , Wang Lai explique les liens qu'entretiennent ces nombres avec les sommes de séries arithmétiques de divers ordres :

Du nombre d'objets supposés - ce qui est en fait le nombre [possible] d'ensembles constitués par un [objet] pris individuellement [7] - on soustrait l'unité. Ceci fait la racine d'un empilement triangulaire [8]. En cherchant avec ce nombre à la racine [la somme de] l'empilement triangulaire dans le plan, on obtient le nombre de combinaisons de deux objets. Si l'on soustrait encore l'unité, en cherchant [la somme de] l'empilement triangulaire dans l'espace on obtient le nombre de combinaisons de trois objets [9]. Si l'on soustrait encore l'unité, en cherchant [la somme] de l'empilement triangulaire du troisième degré [10] on obtient le nombre de combinaisons de quatre objets. Ainsi en diminuant successivement le nombre à la racine et en augmentant successivement le nombre de degrés, on obtient tous les nombres de combinaisons. On s'arrêtera quand on arrive au nombre du milieu. Après le nombre du milieu, c'est la même chose qu'auparavant et on n'a pas besoin de refaire les calculs.



Wang lie ici pour la première fois dans l'histoire des mathématiques en Chine les combinaisons aux nombres figurés. Il illustre les procédures générales permettant de déterminer les « nombres partiels des combinaisons successives » pour le cas particulier de $n = 10$ par le biais figures (voir la figure 3 ci-dessus). En tirant consécutivement un, deux, trois, quatre ou cinq éléments parmi $n = 10$ objets, on obtient respectivement un nombre de combinaisons que Wang Lai représente géométriquement par des boules alignées ou empilées sous forme triangulaire ou pyramidale. Il donne pour $i = 1 \dots 5$ des figures pour les nombres C_{10}^i , ce qui est suffisant pour $n = 10$ puisqu'il remarque, comme Chen Houyao, la symétrie $C_{10}^i = C_{10}^{10-i}$:

$$1 + 1 + 1 + 1 + \dots + 1 = C_{10}^1 = C_{10}^9 = 10$$

$$1 + 2 + 3 + 4 + \dots + 9 = C_{10}^2 = C_{10}^8 = 45$$

$$1 + 3 + 6 + 10 + \dots + 36 = C_{10}^3 = C_{10}^7 = 120$$

$$1 + 4 + 10 + 20 + \dots + 84 = C_{10}^4 = C_{10}^6 = 210$$

$$1 + 5 + 15 + 35 + 70 + 126 = C_{10}^5 = 252.$$

L'illustration de ces sommes par des éléments unitaires suggère le mode d'engendrement de chaque terme des séries ci-dessus. Elle évoque la tradition de la dynastie des Song et des Yuan qui considérait des piles d'objets discrets présentant différentes formes géométriques [11]. La série $1 + 2 + 3 + \dots + 9$, dont la somme correspond à C_{10}^2 , correspond ainsi un triangle dans lequel des boules sont empilées en neuf rangées successives, en commençant par neuf boules à la base. La somme suivante, ou C_{10}^3 , est alors illustrée par une pyramide régulière dont le triangle de base a huit boules de côté et dont chaque niveau constitue un triangle comportant (de haut en bas) 1, 3, 6, ... ou 36 ($= 8 + 7 + 6 + 5 + 4 + 3 + 2 + 1$) éléments. Pour C_{10}^4 Wang montre sept pyramides dont les hauteurs vont de 1 à 7, ce qui lui donne la somme :

$$C_{10}^4 = 1 + (1 + 3) + (1 + 3 + 6) + \dots + (1 + 3 + 6 + 10 + 15 + 21 + 28) = 210.$$

La dernière partie de l'essai de Wang Lai fournit les algorithmes correspondant aux calculs des

« empilements triangulaires » dont la base a un nombre d'éléments b . Il donne tout d'abord les algorithmes des empilements plans et solides, i.e. la somme des séries arithmétiques des nombres entiers et des nombres triangles :

- L'empilement triangulaire dans le plan, lorsque le nombre de boules à la base est $b = n - 1$, vaut :

$$\sum_{k=1}^b k = \frac{b(b+1)}{2}.$$

- L'empilement triangulaire dans l'espace, lorsque le nombre de boules du côté du triangle de base vaut $b = n - 2$, est :

$$\sum_{k=1}^b \frac{k(k+1)}{2} = \frac{b(b+1)(b+2)}{6}.$$

Ces résultats correspondent à des sommes arithmétiques finies, qui étaient déjà connues par Zhu Shijie 朱世傑. Ce dernier les utilisait dans des calculs algébriques qu'il présente son *Miroir de jade des quatre inconnues* (*Siyuan yujian* 四元玉鑑, 1303), sans qu'il y fasse pour autant référence à des questions de combinatoire. Pour les dimensions suivantes, Wang Lai remarque que « comme on n'a pas encore leur procédure, on l'établit comme une procédure générale ». Il donne ainsi en toute généralité la somme des « piles triangulaires de degré m et avec une base b » [12], sous la forme :

$$\frac{b(b+1)(b+2) \cdots (b+m)}{1 \cdot 2 \cdots (m+1)}.$$

Le seul problème mathématique concret que Wang Lai donne en exemple dans son essai provient de la divination. Il s'agit d'un chaman qui, exécutant une divination par bâtonnets (*shigua* 筮卦), produit un hexagramme, à savoir : une configuration de six lignes (*liu yao* 六爻), pleines ou brisées. Wang calcule le nombre total S_6 de configurations possibles comportant de une à six lignes que l'on pourrait former à partir d'un certain hexagramme que l'on aurait obtenu. Même si d'un point de vue de la pratique de la divination cette question peut paraître étrange, elle rentre tout à fait dans le cadre des méthodes auxquelles Wang Lai s'intéresse. Comme dans la première partie de son essai, quand il énonce la procédure du nombre total de combinaisons successives, il calcule ici le nombre total S_6 de deux manières distinctes. Une première méthode, itérative, procède par doublement du résultat précédent et ajout de l'unité. Wang Lai remarque, en parallèle avec la procédure générale donnée, que cinq (i.e. le nombre maximal de lignes que l'on puisse obtenir moins l'unité) itérations suffisent pour donner le nombre total de configurations possibles :

$$2 \cdot 1 + 1 = 3$$

$$2 \cdot 3 + 1 = 7$$

$$2 \cdot 7 + 1 = 15$$

$$2 \cdot 15 + 1 = 31$$

$$2 \cdot 31 + 1 = 63.$$

La deuxième méthode de Wang Lai consiste à calculer la somme totale des 63 configurations en additionnant les nombres de toutes les configurations possibles, comportant de une jusqu'à six lignes :

$$C_6^1 + C_6^2 + C_6^3 + C_6^4 + C_6^5 + C_6^6 = 63.$$

Pour déterminer les « nombres partiels », les C_6^k , Wang se sert, comme il l'a indiqué plus haut, des procédures pour les « empilements triangulaires » et de la symétrie $C_n^i = C_n^{n-i}$.

Filiations

Dans le texte analysé ci-dessus, Wang Lai lie de manière générale les sommes arithmétiques (finies) aux problèmes des combinaisons. Mais il ne met pas ses calculs en relation avec le triangle arithmétique, dans les lignes duquel figurent les C_n^i pour $i = 0, \dots, n$. On pourrait donc penser que Wang Lai n'a pas eu connaissance des écrits de Zhu Shijie évoqués plus haut : l'ouvrage de 1303 comporte notamment le triangle arithmétique et, de fait, il a été longtemps perdu. Ce livre ne fut retrouvé que vers 1802, date autour de laquelle on situe la rédaction de l'essai de Wang Lai sur les « combinaisons successives ».

Je reviendrai sur Zhu Shijie dans le troisième volet de mes articles sur les pratiques et mathématiques combinatoires en Chine. On verra que Li Shanlan, mathématicien du XIXe siècle, a, lui, travaillé sur la base du triangle arithmétique et dans un cadre conceptuel strictement traditionnel, pour obtenir des résultats importants.

Il est finalement intéressant de noter que Wang Lai, tout comme Chen Houyao (voir l'article **Le début d'un nouveau domaine**), puise dans les techniques divinatoires pour construire des exemples de problèmes mathématiques combinatoires. On pourrait même spéculer sur le fait qu'il y a ici un certain parallèle entre l'illustration de la formation des 64 hexagrammes de Fuxi, et la procédure de Wang Lai pour trouver le nombre total des combinaisons S_n . Les deux émergent d'une procédure de dédoublement.

Notes

[▲1] Il s'agit d'une communauté de lettrés, actifs durant les règnes des Empereurs **Qianlong** (r. 1735-1796) et **Jiaqing** (r. 1796-1820), qui avait pour objectif de renouveler l'étude des classiques confucéens par le biais de la critique textuelle. Comme les mathématiques figuraient parmi les *Six Arts* de l'éducation confucéenne, elles revêtaient une certaine importance aux yeux des tenants de cette école.

[▲2] In *Études mathématiques de Hengzhai* (*Hengzhai suanxue* 衡齋算學), juan 4. Reprint in Guo Shuchun 郭書春 et al. (éds.) (1993). *Zhongguo kexue jishu dianji tonghui. Shuxue juan* 中國科學技術典籍通彙. 數學卷. Zhengzhou : Henan jiaoyu chubanshe 河南教育出版社. Vol. 4, pp. 1512-1516. Hengzhai était le surnom de Wang Lai.

[▲3] Ces deux formules se démontrent facilement par récurrence.

[▲4] Il semble qu'après avoir donné des exemples concrets pour expliquer ce que sont les C_n^2 et C_n^3 , Wang Lai passe au cas général des C_n^k , pour lequel il suit le même raisonnement dans sa recherche de nombre de combinaisons pour tous les $k = 1, \dots, n$.

[▲5] Voir par exemple Li Zhaohua (1986). 李兆華. Wang Lai « Dijian shuli », « Sanliang suanjing » lüelun 汪萊《遞兼數理》,《參兩算經》略論 (Une brève discussion des « Principes mathématiques des combinaisons séquentielles » et du « Classique mathématique de deux et trois » de Wang Lai). In Wu Wenjun 吳文俊 (éd.), *Zhongguo shuxueshi lunwenji* 中國數學史論文集 (China Historical Materials of Science and Technology), Volume 2, pp. 65–78. Jinan : Shandong jiaoyu chubanshe 山東教育出版社.

[▲6] On peut retrouver cette égalité en posant $x = 1$ et $y = 1$ dans la formule du binôme de Newton :

$$(x + y)^n = \sum_{k=0}^n C_n^k x^{n-k} y^k.$$

Ceci dit, il n'y a de lien conceptuel entre les deux ni historiquement, ni mathématiquement. Par définition C_n^k compte les parties à k éléments dans un ensemble à n éléments. La somme $C_n^0 + C_n^1 + \dots + C_n^n$ est donc le nombre de parties d'un ensemble à n éléments. Pour décrire une partie, il suffit de dire, pour chacun des n éléments, s'il lui appartient ou pas. On effectue donc n choix successifs parmi deux possibilités, et l'on obtient donc 2^n parties possibles dans un ensemble à n éléments.

[▲7] L'idée de Wang Lai correspond à l'égalité $C_n^1 = n$. Dans la figure 3, le nombre C_{10}^1 est représenté en haut à droite, par un alignement de dix boules unitaires.

[▲8] Il s'agit du nombre d'unités à la base d'un triangle ou d'une pyramide. Avec $b = n - 1$, un empilement triangulaire, dans le plan par exemple, serait constitué de b éléments à la base du triangle, de $b - 1$ éléments dans la rangée au-dessus de la base, de $b - 2$ éléments posé au-dessus et ainsi de suite jusqu'à n'avoir qu'un seul élément au sommet du triangle. Ceci fait en tout $b + (b - 1) + \dots + 2 + 1$ éléments, ce qui est égal à $\frac{n \cdot (n-1)}{2}$ éléments ou encore à C_n^2 comme l'indique Wang dans la phrase suivante.

[▲9] Dans la figure 3, le nombre C_{10}^3 est représenté par un ensemble de sept pyramides triangulaires, dont la plus petite à une boule à la base, et la plus grande sept boules comme côté du triangle de base.

[▲10] Mathématiquement parlant, il s'agit de passer de la somme $\sum_{k=1}^{n-2} \frac{k \cdot (k+1)}{1 \cdot 2}$ à la somme d'ordre supérieur $\sum_{k=1}^{n-3} \frac{k \cdot (k+1) \cdot (k+2)}{1 \cdot 2 \cdot 3}$: un petit exercice combinatoire...

[▲11] Cette tradition s'est développée sous les Song en établissant des analogies entre objets géométriques continus, et empilements obtenus en reproduisant ces formes à l'aide d'objets discrets. Voir Bréard, A. (1999). *Re-Kreation eines mathematischen Konzeptes im chinesischen Diskurs : Reihen vom 1. bis zum 19. Jahrhundert*. Stuttgart : Steiner Verlag (Boethius ; 42), chapitres 3 et 4.

[▲12] Un empilement plan aurait ainsi le degré $m = 1$, un empilement solide le degré $m = 2$. Wang

ne donne explicitement la procédure que pour le cas $m = 4$ avec une racine $b = 5$.

 **Crédits images**

Pour citer cet article : **Andrea Bréard**, **Pratiques et mathématiques combinatoires en Chine (2)**. *Images des Mathématiques*, CNRS, 2009. En ligne, URL : <http://images.math.cnrs.fr/Pratiques-et-mathematiques,419.html>