

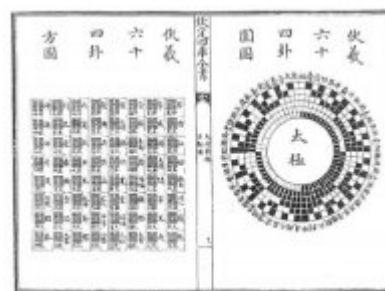
# Pratiques et mathématiques combinatoires en Chine

*Le début d'un nouveau domaine*

Le 15 mai 2009, par **Andrea Bréard**

Maître de conférences, Université Lille I, Laboratoire Paul

Painlevé UMR CNRS 8524, chercheur associé du REHSEIS - UMR7596 ([page web](#))



*Aujourd'hui, le domaine mathématique que l'on appelle « combinatoire » est étroitement lié à la théorie des nombres et à la théorie des graphes. Dans le passé, c'est avant tout un intérêt pour les diverses combinaisons d'un nombre fini d'objets, suivant certaines règles et afin de créer avec eux les arrangements les plus variés, qui a inspiré le développement de réflexions combinatoires.*

*On analysera ici, dans une série de trois articles, les divers contextes dans lesquels on s'est intéressé en Chine aux séries arithmétiques, aux dénombrements combinatoires, aux nombres figurés et au « Triangle de Pascal ». A travers l'étude des écrits de quatre auteurs actifs entre le 13ème et le 19ème siècle, on verra comment ces différents aspects ont été articulés les uns aux autres, et comment ces auteurs ont contribué (ou souhaité contribuer) à la constitution, en Chine, d'un nouveau domaine mathématique, au sens où celui-ci ne relevait pas des « Neuf chapitres sur les procédures mathématiques », le livre canonique qui a déterminé les formes et les contenus du discours mathématique en Chine pendant plus d'un millénaire.*

---

## Introduction

---

**L**ES pratiques combinatoires remontent en Chine à la plus haute Antiquité, lorsque furent élaborées des techniques divinatoires basées sur les configurations que forment trois ou six lignes pleines ou brisées. Le *Livre des Mutations* (*Yijing* 易經), compilé vers la fin de la dynastie des Zhou (ca le IIIème siècle avant JC), a conservé la trace de ces pratiques jusqu'à aujourd'hui, et ce fut un ouvrage abondamment commenté et lu au long de l'histoire en Chine. La figure ci-dessous [1] montre les trigrammes, qui sont, chacun, une combinaison de trois lignes pleines ou brisées, arrangés suivant l'ordre qu'on attribue à l'empereur légendaire Fuxi 伏羲. A droite, c'est leur engendrement par dédoublements successifs qui est représenté : le « Faîte suprême » (*taiji* 太極), en bas, se divise en « deux modèles », le *yin* et le *yang*, situés immédiatement au-dessus, puis en « quatre figures », sur la base desquelles se forment, dans la ligne supérieure, les « huit trigrammes ».

**伏義八卦次序伏義八卦方位**

八	七	六	五	四	三	二	一	
坤	艮	坎	巽	震	離	兌	乾	卦八
太陰		少陽		少陰		太陽		象四
		陰				陽		儀兩

太極

周易本義圖

繫辭傳曰：易有太極，是生兩儀，兩儀生四象，四象生八卦。邵子曰：一分爲二，二分爲四，四分爲八也。說卦傳曰：易逆數也。邵子曰：乾一，兌二，離三，震四，巽五，坎六，艮七，坤八。自乾至坤，皆得未生之卦。若逆推四時之比也。後六十四卦次序放此。

說卦傳曰：天地定位，山澤通氣，雷風相薄，水火不相射，八卦相錯。數往者順，知來者逆。邵子曰：乾南，坤北，離東，坎西，震東北，兌東南，巽西南，艮西北。自震至乾爲順，自巽至坤爲逆。後六十四卦方位放此。

Cependant, les pratiques combinatoires ne restèrent pas limitées en Chine aux explorations dans le cadre de la divination ou à la recherche des carrés magiques. Un grand nombre de sources, qui traitent de jeux comme le Go ou les échecs, de jeux de cartes ou de dominos, manifestent un intérêt pour des questions de combinatoire d'un point de vue plus ou moins mathématique. Ainsi le fonctionnaire du XI<sup>ème</sup> siècle Shen Gua s'intéressait à dénombrer les configurations d'un échiquier. Par ailleurs, certaines descriptions des jeux de dominos autour de 1600 témoignent, aussi implicitement, d'une recherche de toutes les permutations possibles à partir d'une combinaison de trois dominos. L'image ci-dessous [2] illustre par exemple la combinaison de trois tuiles qui portent le nom de « cavalerie régulière » : (première ligne, de droite à gauche) [4 4], [5 5] et [6 6]. Les trois combinaisons suivantes (lignes suivantes, toujours de droite à gauche) [5 5] [4 6], puis [4 6], [4 4] [5 6] et enfin [5 6] et [4 5] [4 6] [5 6], obtenues par permutation des six chiffres présents, portent toutes le même nom de « cavalerie irrégulière ». La permutation [4 5] [4 5] [6 6] n'apparaît pas dans l'énumération, car dans l'ensemble des 32 dominos avec lesquels on jouait, la tuile [4 5] ne figurait qu'une seule fois.





La première source qui discute, systématiquement et d'un point de vue théorique, les permutations et les combinaisons dans ces différents contextes est un manuscrit de la fin du XVII<sup>ème</sup> siècle. Même si quelques éléments de mathématiques « européennes » avaient alors été introduites en Chine, le manuscrit reprend clairement des concepts et des modes d'écriture algorithmique traditionnels. Contrairement à la manière dont la combinatoire s'est développée dans les pays arabes, ou en Europe, le triangle arithmétique, qui est apparu en Chine vers le XI<sup>ème</sup> siècle, n'a jamais été associé à la résolution de problèmes de dénombrement de configurations. Même la fameuse « Identité de Li Shanlan » 李善蘭 (1810-1882), ou « Identité de Li Renshu » :

$$\sum_{k=0}^n \binom{n}{k}^2 \binom{m+2n-k}{2n} = \binom{m+n}{n}^2,$$

que Li a déduite de ses réflexions sur le triangle arithmétique, a été développée dans un contexte mathématique traditionnel essentiellement préoccupé de la sommation de différentes séries arithmétiques finies. Ainsi, les résultats de Li Shanlan n'émanent pas de questionnements concernant le nombre de combinaisons d'un nombre fini d'objets. Les catégories modernes qu'on plaque sur les écrits de Li Shanlan pour les interpréter les placent dans un contexte différent de celui dans lequel l'auteur a travaillé et accordent donc, à ses résultats, une signification inadaptée et anachronique. A l'époque et pour Li Shanlan, ces travaux s'inscrivaient dans une recherche visant à généraliser le triangle arithmétique, et à élargir les domaines mathématiques en y définissant une nouvelle discipline.

Je montrerai ci-dessous, à travers l'exemple du manuscrit de Chen Houyao 陳厚耀 (1648-1722), que le développement, en Chine, de réflexions combinatoires en mathématiques a manifestement tiré parti des explorations dans le cadre de la divination et des jeux de hasard, mais n'a pas eu recours au triangle dit de Pascal pour la résolution de problèmes. Dans deux autres contributions, [3] je discuterai des écrits de Wang Lai 汪萊 (1768-1813) et de Li Shanlan, qui lient plus systématiquement leurs travaux mathématiques à la tradition de la dynastie des Yuan (XIII<sup>ème</sup> et XIV<sup>ème</sup> siècles), en particulier aux écrits de Zhu Shijie 朱世傑 en matière de sommation des séries arithmétiques finies. Tandis que le premier, Wang Lai, s'en servira dans le cadre de ses réflexions sur la combinatoire, le second, Li Shanlan, élargit cette tradition par la construction de nouveaux triangles arithmétiques.

---

## Chen Houyao

---

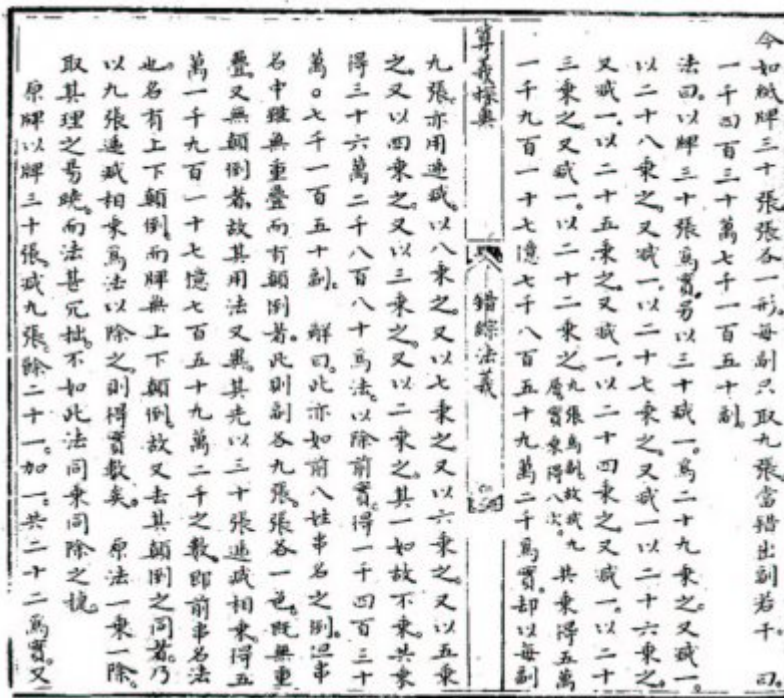
Le manuscrit intitulé *Le sens des méthodes de combinaison et d'alternance* (*Cuozong fayi* 錯綜法義), que Chen Houyao 陳厚耀 (1648-1722) consacre à la combinatoire à la fin du XVII<sup>ème</sup> siècle, traite systématiquement de problèmes de permutations et de combinaisons avec ou sans répétition. Ainsi que le souligne la préface du manuscrit, l'expression *cuozong* (que nous traduisons par « combinaison et alternance ») du titre est empruntée au *Livre des Mutations*. On y lit effectivement (dans *Le Grand Commentaire*) : [4]

« Par trois, par cinq, par les modifications ; mélanger et confondre [*cuozong*] les nombres. Pénétrer les modifications, achever naturellement et sans effort les

signes du ciel et de la terre. Épuiser les nombres, et en déterminer naturellement les symboles du ciel et de la terre. Sans l'extrême modification de l'univers, qui donc serait capable de ceci ? »

參伍以變,錯綜其數,通其變,遂馬天地之文;極其數,遂定天下之象。非天下之致變,其孰能與於此。

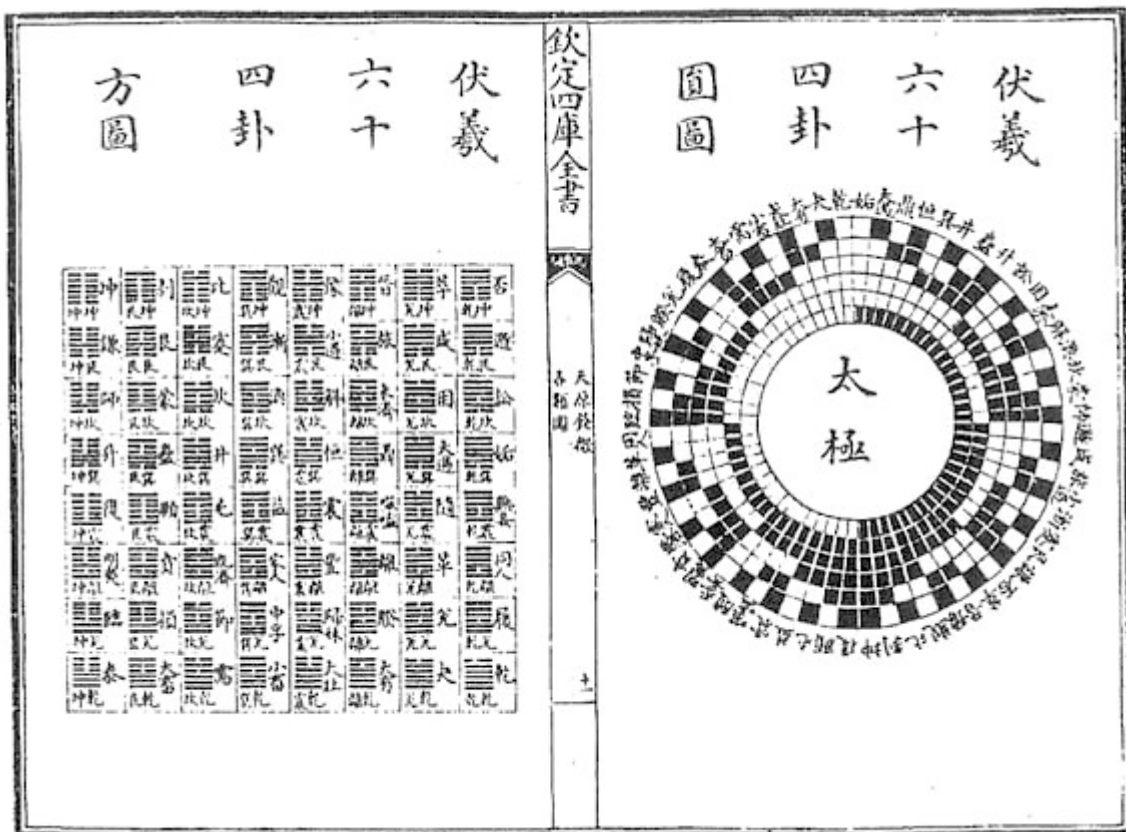
Les sept problèmes du manuscrit sont construits autour d'exemples qui concernent la divination, la formation de noms propres avec plusieurs caractères, la constitution du cycle sexagésimal calendaire, et les jeux de hasard avec dés ou cartes.



Voici la liste des catégories de questions posées par Chen Houyao dans sa collection de problèmes combinatoires :

1. Combien d'hexagrammes (configurations à six lignes, voir figure ci-dessous) [5] peut on former à partir de deux éléments ? Réponse : 64. Ayant huit trigrammes, en les superposant, combien obtient-on (d'hexagrammes) ? En les superposant encore une fois (pour en former des configurations de 9 lignes), combien obtient-on (de telles figures) ? Réponse : 64 et 512 respectivement.
2. Combien de configurations à douze lignes peut-on former à partir des huit trigrammes ? Réponse : 512.
3. Combien de combinaisons de deux éléments peut-on avoir en choisissant de manière cyclique le premier parmi les dix troncs célestes (*tiangan* 天干) et le deuxième parmi les douze branches terrestres (*dizhi* 地支) ? Réponse : 60. Ayant un cycle calendaire de 60 années, 12 mois par an, un cycle de 60 jours et 12 périodes [de deux heures] par jour. Combien de possibilités y a-t-il pour désigner la naissance d'une personne par huit caractères ? [6] Réponse : 518 400.
4. Dans l'un des chapitres de *La Doctrine du Milieu* [7] il y a 22 phrases. Combien de

- possibilités y a-t-il de former des sujets de 1 à 22 phrases consécutives extraites de ce chapitre ? Réponse : 253 (ce qui correspond à la somme des entiers de 1 à 22).
5. Ayant trois noms personnels (d'un seul caractère chacun), combien de permutations de ces trois caractères peut-on trouver ? Réponse : 6. Ayant huit noms personnels (d'un seul caractère chacun), combien d'arrangements de trois caractères distincts (sans répétition) peut-on trouver ? Réponse : 336.
6. Avec six dés (de six faces chacun) combien de possibilités de résultats y a-t-il à chaque lancer ? Réponse : 462. [8] Ayant obtenu 462 manières de lancer six dés, combien de fois a-t-on obtenu chaque combinaison ? Réponse : Une seule fois.
7. Dans un jeu de 30 cartes différentes, combien de possibilités y a-t-il de tirer neuf cartes ? Réponse : 14 307 150.



Pour résoudre ces problèmes, Chen Houyao se base probablement sur des résultats obtenus par des prédécesseurs. Il dit en effet lui-même qu'il améliore l'efficacité des calculs en proposant des méthodes alternatives pour certains problèmes ou en citant explicitement une « méthode d'origine ». Dans le cas des hexagrammes, il souligne que le calcul de toutes les combinaisons possibles de six lignes pleines ou brisées peut être obtenu soit par multiplications successives, sur la base des deux possibilités pour chaque ligne, soit par un algorithme plus simple qui prend le carré des huit possibilités d'obtenir un trigramme (une configuration de trois lignes). La première méthode calcule successivement :

$$\text{Nombre de configurations de 2 lignes} = 2 \cdot 2 = 4$$

$$\text{Nombre de configurations de 3 lignes} = 4 \cdot 2 = 8$$

⋮

Nombre de configurations de 6 lignes =  $32 \cdot 2 = 64$ .

Alternativement, Chen Houyao propose de :

multiplier par soi-même 8, le nombre de configurations de trois lignes, ce qui donne 64, le nombre de configurations de six lignes. En multipliant par lui-même ledit nombre obtenu [pour les trigrammes = 8], on économise la moitié des multiplications. [9]

Dans un autre problème, celui du tirage de neuf cartes au sein d'un ensemble de trente, Chen évoque également deux algorithmes alternatifs pour la résolution du problème combinatoire. En termes mathématiques modernes, sa première méthode propose d'effectuer une seule division, après avoir calculé dividende et diviseur par multiplications successives : [10]

$$C_{30}^9 = \binom{9}{k} = \frac{(30 \cdot 29 \cdot 28 \cdot 27 \cdot 26 \cdot 25 \cdot 24 \cdot 23 \cdot 22)}{(9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2)}$$
$$= 5191778592000 \div 362880 = 14307150$$

La « méthode d'origine » (*yuanfa* 原法), citée ensuite par Chen, procède par multiplications et divisions successives :

$$C_{30}^9 = (\dots (((22 \cdot 23) \div 2) \cdot 24) \div 3) \cdot \dots \cdot 30) \div 9$$

Après l'avoir donnée, il conclut : [11]

La méthode d'origine multiplie et divise en alternance. Lorsqu'on saisit son principe, elle est facile à comprendre, mais la méthode est très lourde et maladroite (*rongzhuo* 冗拙). Elle n'égale pas l'efficacité de la multiplication globale et de la division globale de la méthode (décrite) ici.

Malheureusement, l'état des sources transmises ne nous permet pas d'identifier la provenance de cette méthode que cite Chen Houyao. Son évocation nous permet néanmoins de faire l'hypothèse qu'il disposait d'écrits antérieurs qu'il a utilisé pour compiler sa collection de problèmes et de méthodes.

---

## Un nouveau domaine mathématique ?

---

Par son originalité, sa structure et son exhaustivité, le manuscrit de Chen Houyao peut amener l'historien à y voir le texte fondateur d'un nouveau domaine mathématique en Chine. En tout cas, ceci correspond bien à l'intention déclarée par son auteur dans la préface. Ce dernier s'y distingue de la tradition classique des mathématiques telle que l'incarne l'ouvrage *Neuf chapitres sur les procédures mathématiques* (*Jiu zhang suan shu* 九章算術), [12] :

Les méthodes [mathématiques] des *Neuf chapitres* [13] sont toutes parfaites, mais il y manque un type de méthode pour toutes sortes de combinaisons et d'alternances.

Chen donne ensuite une classification théorique des problèmes en lien avec les exemples traités dans son manuscrit :

Il y a ceux où l'on tient compte de l'ordre et où l'on combine avec répétitions — comme dans la catégorie des 64 trigrammes —, il y a ceux où l'on tient compte de l'ordre et où l'on combine sans répétitions — comme dans la catégorie des noms —, il y a ceux où l'on combine sur chacune des positions mais où il n'y a pas non plus de répétitions — comme dans la catégorie du cycle des soixante années —, il y a ceux où l'on ne distingue pas les positions, mais où il y a des répétitions — comme dans la catégorie des six dés —, il y a ceux où parmi un ensemble entier on choisit deux ou trois à combiner, qu'on échange mutuellement pour les combiner jusqu'à exhaustion — comme dans la catégorie des cartes —. Mais puisque le sens [des procédures] n'est pas uniforme, il faut donc, dans l'établissement des calculs, distinguer en fonction du sens.

Même si l'on peut voir ici la cristallisation d'une théorie combinatoire, on verra dans les deux articles suivants, que les mathématiques ne se développeront pas par la suite le long d'une trajectoire linéaire. Car d'autres auteurs chinois qui ont abordé des questions qui font aujourd'hui partie du domaine de la combinatoire n'ont pas repris les idées de Chen Houyao. Ils se sont plutôt appuyés sur des éléments d'une tradition de travail sur les nombres figurés et la sommation de séries qui remonte à la dynastie des Yuan (1271 – 1368).

## Notes

[▲1] In : Zhu Xi 朱熹 (1130-1200), *La signification d'origine [du Livre] des Mutations des Zhou* (*Zhouyi benyi* 周易本義).

[▲2] In : Xu Qilong 徐企龍, (1610), *Un abysse d'une myriade de livres* (*Wanshu Yuanhai* 萬書淵海).

[▲3] A suivre dans la rubrique **Histoire des Mathématiques**.

[▲4] Traduction de 1885 par **Paul-Louis-Félix Philastre**, p. 1188. Il existe également une version française de la traduction allemande de Richard Wilhelm (Éditions Médecis-Entrelacs, 2001), mais le passage cité ici n'y est guère plus clair. Ceci dit, même le grand philosophe Zhu Xi du 13<sup>ème</sup> siècle est de l'avis que le passage n'est plus compréhensible.

[▲5] In : Bao Yunlong 鮑雲龍, *Tianyuan fawei* 天原發微, appendice des illustrations (*Fu : Ge lei tu* 附 : 各類圖), milieu du 13<sup>ème</sup> siècle.

[▲6] Les « huit caractères » désignent l'année, le mois, le jour et l'heure d'une naissance et sont utilisés dans le calcul de l'horoscope.

[▲7] Le classique *Zhongyong* 中庸 faisait partie de l'anthologie des *Quatre Livres*, qui constituaient la quintessence de l'enseignement traditionnel confucéen.

[▲8] Il y a  $C_{n+m-1}^{n-1} = C_{n+m-1}^m$  combinaisons avec répétition de  $m$  éléments pris parmi  $n$  éléments. Ici 462 correspond avec  $m = 6$  et  $n = 6$  donc à  $C_{11}^5$  ou  $C_{11}^6$ .

[▲9] Chen Houyao (fin XVIIe). 陳厚耀. *Cuozong fayi* 錯綜法義 (Le sens des méthodes de combinaison et d'alternance). Reprint in Guo Shuchun et al. (éds.) (1993). 郭書春. *Zhongguo kexue jishu dianji tonghui*. Shuxue juan 中國科學技術典籍通彙. 數學卷. Zhengzhou : Henan jiaoyu chubanshe 河南教育出版社. Vol. 4, pp. 685-688, ici : p. 685.

[▲10] *Idem* p. 687.

[▲11] Traduit de *idem*, p. 687.

[▲12] Traduit de *idem*, p. 685.

[▲13] Ouvrage canonique du Ier siècle environ. Pour une introduction et traduction de ce texte voir Chemla, K. et Guo S. (2004). *Les neuf chapitres sur les procédures mathématiques. Le Classique mathématique de la Chine ancienne et ses commentaires*. Paris : Dunod.

#### ► Crédits images

Pour citer cet article : **Andrea Bréard**, **Pratiques et mathématiques combinatoires en Chine**. *Images des Mathématiques*, CNRS, 2009. En ligne, URL : <http://images.math.cnrs.fr/Pratiques-et-mathematiques.html>