

# Démocrite

## et la Puissance Motrice du Feu

Jacques ARNAUD

*Mas Liron, F30440 Saint Martial, France*

Laurent CHUSSEAU

*IES, Université Montpellier II, F34095 Montpellier, France*

Fabrice PHILIPPE

*LIRMM, Université Montpellier II, F34392 Montpellier, France*

5 avril 2011



## Résumé

Cet article, dont le but est principalement historique et pédagogique, suggère que les concepts introduits dans la Grèce antique par Anaximandre (terre plate isolée) et Démocrite (corpuscules et vide) permettent d'obtenir, à partir d'observations qualitatives et de généralisations plausibles, le rendement maximal et le travail d'une machine thermique obtenus à l'époque moderne par Carnot (1824). Un prologue présente un modèle simple de machine thermique. Après avoir introduit la notion d'équilibre thermique, un modèle de machine thermique constitué de deux réservoirs de corpuscules est étudié de manière classique. Nous établissons ensuite l'équation des gaz parfaits suivant le concept corpusculaire de Daniel Bernoulli (1738) en utilisant la notion d'*action* d'un corpuscule. L'énergie interne d'un gaz à toute température est déterminée.

## Abstract

This paper, whose purpose is mainly historical and pedagogical, suggests that concepts introduced in the ancient Greece by Anaximander (isolated flat earth) and Democritus (corpuscles and empty-space) could have led, from some observations and plausible generalizations, to the maximum efficiency and output work of heat engines obtained in the modern time by Carnot (1824). A prolog presents a simple heat engine. After introducing the concept of thermal equilibrium, a model of thermal engine consisting of corpuscle reservoirs is studied in a classical manner. We establish the ideal gas law from the Daniel Bernoulli corpuscular concept (1738) using the corpuscle *action* concept. This leads to the energy of a gas at any temperature.



Ce tableau de Chardin illustre «le parti pris des choses» (Francis Ponge) adopté par Anaximandre et Démocrite dans la Grèce antique. Aristote note avec justesse que : «Démocrite omet de traiter de la cause finale et ainsi ramène à la nécessité toutes les voies de la nature.». On peut imaginer, en référence au chapitre 4, que le tableau de Chardin représente des corpuscules et deux sites.

# Table des matières

<b>1</b>	<b>Introduction</b>	<b>1</b>
<b>2</b>	<b>Prologue</b>	<b>17</b>
<b>3</b>	<b>Equilibre thermique</b>	<b>25</b>
3.1	Observations . . . . .	25
3.2	Simulation pour deux milieux identiques . . . . .	26
3.3	Simulation pour deux milieux différents . . . . .	26
3.4	Equilibre thermodynamique . . . . .	27
<b>4</b>	<b>Réservoirs de corpuscules</b>	<b>28</b>
4.1	La machine bi-therme . . . . .	28
4.2	Deux réservoirs de corpuscules . . . . .	29
4.3	Le modèle de machine thermique : travail et rendement . . . . .	30
4.4	Introduction de la température . . . . .	31
4.5	Un corpuscule au plus par site . . . . .	32
<b>5</b>	<b>Réservoirs multiples : cycle de Carnot</b>	<b>33</b>
5.1	Transfert des contenus des sous-réservoirs . . . . .	33
5.2	Relation : poids-altitude . . . . .	35
5.3	Rendement maximal . . . . .	35
<b>6</b>	<b>Gaz parfaits</b>	<b>37</b>
6.1	Notion d'impact . . . . .	37
6.2	Force . . . . .	38
6.3	Action . . . . .	38
6.4	Moyenne . . . . .	39
6.5	Loi des gaz parfaits . . . . .	39
6.6	Travail en régime isotherme . . . . .	40
6.7	Consommation de chaleur . . . . .	41
6.8	Comment éviter des contacts entre corps... . . . .	42

<b>7</b>	<b>Energie interne</b>	<b>45</b>
7.1	Energie moyenne . . . . .	45
7.2	Mouvement de corpuscules soumis à la gravité . . . . .	47
<b>8</b>	<b>Conclusion</b>	<b>50</b>
<b>A</b>	<b>Anaximandre et la terre plate</b>	<b>54</b>
<b>B</b>	<b>Densité de l'air en fonction de l'altitude</b>	<b>56</b>
<b>C</b>	<b>Température</b>	<b>61</b>
C.1	Notion de température. Corpuscules d'énergie unité . . . . .	61
C.2	Nombre de configurations distinctes . . . . .	62
C.3	Poids moyen par site. . . . .	63
<b>D</b>	<b>Compositions et partitions d'entiers</b>	<b>66</b>
<b>E</b>	<b>Formulation traditionnelle du mouvement</b>	<b>69</b>
<b>F</b>	<b>Formulation quantique</b>	<b>70</b>

*«Sitôt que j'ai eu acquis quelques notions générales touchant la physique, commençant à les éprouver en diverses difficultés particulières, j'ai remarqué jusques où elles peuvent conduire. Si nous connaissons la force et les actions du feu et de tous les autres corps qui nous environnent, nous pouvons les employer à tous les usages auxquels ils sont propres.»*

(René Descartes, Discours de la méthode VI, citation abrégée.)



# Chapitre 1

## Introduction

Le rôle de l'homme dans l'univers a été bien compris par certains philosophes grecs pré-socratiques (pour une liste des plus éminents de ces philosophes, voir la figure 1.1). Ceux-ci ont anticipé dans une certaine mesure la théorie de l'évolution, considérant que l'homme est l'une des branches d'une arborescence émergent de la réplication et de la sélection. En particulier Anaximandre a affirmé que l'homme était initialement un poisson, qui perdit ses écailles en venant sur terre. La notion de transformation se rencontre chez un grand nombre de penseurs pré-socratiques<sup>1</sup>. En considération du titre de cet article il est approprié de rappeler que Héraclite considérait le *feu* comme étant l'élément primordial.

**Anaximandre et Démocrite :** Le point de vue matérialiste (au sens philosophique du mot) constitue l'originalité radicale de plusieurs philosophes pré-socratiques, certains considérant comme élément fondamental le feu, ou l'eau, ou l'air, ou quatre éléments, voire cinq. La théorie de Démocrite s'en distingue par sa simplicité et sa cohérence. Des présentations détaillées peuvent être trouvées dans les livres de Zeller [1] et Salem [2] ou l'article de Horne [3], par exemple.

Anaximandre vécu environ six cents ans avant notre ère. Il fut semble-t-il, ainsi que Thales, à l'origine de l'esprit scientifique et le premier à écrire ce que l'on pourrait appeler un traité de physique, hélas perdu, comme le furent les autres contributions pré-socratiques (Démocrite est généralement considéré comme un pré-socratique bien qu'il fut contemporain de Socrate [4].). L'opinion prévalait à son époque que les choses avaient une tendance naturelle à «tomber». Ce qui soulevait la question suivante : Pourquoi la

---

1. Des objections ont été faites à la théorie de l'évolution de Darwin à la fin du dix-neuvième siècle : 1) Kelvin a calculé l'âge de la terre en considérant l'apport de chaleur dû au soleil, l'énergie libérée par la contraction de la terre, et le rayonnement de chaleur par la terre. Il a obtenu un âge de un million d'années. C'eut été insuffisant au regard des temps nécessaires à l'évolution biologique. Il ignorait que la chaleur libérée par la radioactivité terrestre conduit à un âge mille fois supérieur (environ quatre milliards d'années). 2) La vie crée de l'ordre et de ce fait réduit l'entropie, ce qui paraît contraire au deuxième principe de la thermodynamique. Toutefois les sources naturelles d'entropie sont immensément supérieures. La découverte des gènes, dont une fraction seulement code pour des protéines, a conduit à certaines révisions de la théorie de Darwin, sans en affecter l'essentiel.

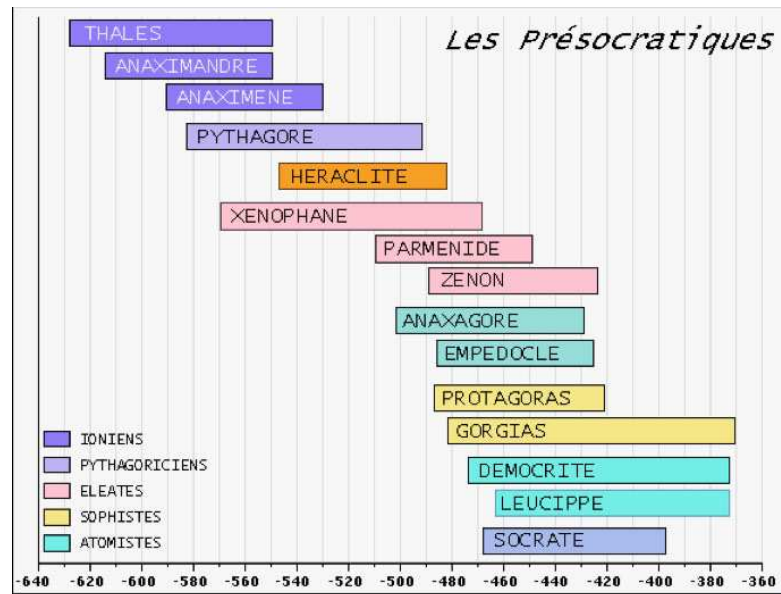


FIGURE 1.1 – Cette figure donne la liste des philosophes grecs pré-socratiques les plus éminents, d’après <http://www.igor-brevnjovski.net/>. Les contributions des scientifiques de la Grèce antique sont décrites dans <http://coll-ferry-montlucon.planet-allier.com/gdscient.htm>.

terre ne tombe-t-elle pas également ? L’explication d’Anaximandre fut que la terre est isolée dans le vide et n’a de ce fait aucune tendance à se mouvoir. Mais elle attire à elle les objets. Nous adopterons le modèle d’une terre de grand diamètre<sup>2</sup>. Ceci revient à dire que la gravité terrestre peut être considérée comme une constante universelle, que nous posons égale à l’unité pour une raison de concision : Si un corpuscule est libéré d’une hauteur  $E$  à l’instant  $t = 0$  son mouvement :  $z(t) - E$  ne dépend pas de  $E$ . Incidemment, une interprétation des propos d’Anaximandre concernant l’épaisseur de la terre (un tiers du diamètre) est proposée en annexe.

Démocrite distingue deux formes de connaissance : la connaissance par les sens, qu’il appelle «obscur», et la connaissance par l’intellect qu’il appelle «véritable». Sur le plan de la physique, sa conception est celle-ci : l’univers est constitué de corpuscules élémentaires se déplaçant dans le vide, régulièrement, ou irrégulièrement en raison de leurs chocs mutuels. Ils ont un poids, c’est à dire une tendance à tomber (dont la raison importe peu ici). Tous les corpuscules, quelque soit leur poids, tombent de la même manière<sup>3</sup>. Ce point de vue a été bien compris par Aristote sur le plan philosophique :

2. Anaximandre parle d’une terre cylindrique. Nous supposons que le diamètre de ce cylindre est de plusieurs années-lumière de telle sorte que la vitesse de chute d’un corpuscule pourrait en principe atteindre une vitesse comparable à celle de la lumière. Toutefois dans les situations pratiques cette vitesse est considérablement plus petite.

3. Certains commentateurs disent avec une précision excessive : «à la même vitesse». Selon Galilée, la vitesse des corpuscules est proportionnelle au temps de chute, la constante de proportionnalité étant

«Démocrite omet de traiter de la cause finale et ainsi ramène à la nécessité toutes les voies de la nature». Il émet toutefois une réserve : «Démocrite ne montre pas pourquoi le mouvement des atomes existe, se contentant de dire qu'il est éternel et qu'il est perpétué par les collisions». En effet Aristote pense qu'un objet ne se déplace à une vitesse constante que s'il est soumis à une force constante. Depuis Galilée les physiciens partagent à cet égard le point de vue de Démocrite : en l'absence de force (ou de collision) la vitesse d'un corpuscule est constante (il vaudrait mieux dire que la quantité de mouvement est constante. Mais pour une seule particule la constance de la quantité de mouvement entraîne la constance de la vitesse).

La conception atomiste fut acceptée dans l'antiquité par quelques scientifiques tels Héron d'Alexandrie, crédité pour avoir inventé la première machine thermique. Cette machine, appelée «eolipile» (porte d'Eole), était une sphère emplie d'eau bouillante, la vapeur s'échappant par des sorties obliques.

Epicure et le poète Lucrèce ont adopté le point de vue démocritien pour des raisons principalement éthiques<sup>4</sup>. Mais celui-ci fut généralement ignoré, rejeté, ou oublié jusqu'à l'âge des lumières. Démocrite fut banni du conseil des dieux car sa théorie ne faisait pas mention de l'intervention divine et était vue comme une opposition à l'idée selon laquelle les dieux participent à la création de notre monde. Plus récemment, Glanvill écrit, en 1670 : «L'hypothèse corpusculaire, c'est à dire l'opinion selon laquelle le monde est une agitation fortuite d'atomes, est impie et abominable».

Mais sans doute Démocrite aurait-il pu dire avec Régine Desforges (Le Cahier Volé) ces mots qui réconcilient en nous le sentiment de nécessité et d'unité : «J'aimerais mourir à l'automne et que mon corps enfoui à même la terre humide et encore chaude de

---

indépendante du poids des corpuscules (on néglige la résistance de l'air). Le temps de chute est donc indépendant du poids des corpuscules. La version employée dans cet article dit plutôt ceci : Si un poids  $p$  rebondit de façon élastique sur le plateau d'une balance, le poids moyen enregistré par la balance est égal à  $p$ . Nous définissons l'«impact» du corpuscule comme le produit du poids  $p$  et de la période  $\tau$  du mouvement.

Pour être plus complet, il faudrait ajouter que Démocrite considérait un vide infini et un nombre de corpuscules infini, et que ses corpuscules étaient inaltérables et éternels. Ils n'étaient pas directement perceptibles. Ils pouvaient avoir des formes, tailles et positions différentes, et pouvaient s'associer en combinaisons complexes.

4. Voici quelques citations attribuées à Démocrite sur ce plan :

«La liberté d'expression est une partie de la liberté»

«Les lois ne devraient pas empêcher chacun de vivre comme il l'entend, pour autant qu'il ne nuise pas à autrui»

«Certains, ignorant la dissolution de notre nature, troublent leurs vies de peurs inventant des légendes concernant la vie après la mort».

Un grand nombre d'assertions relatives au comportement humain a été attribué à Démocrite. Certains ont recherché un lien entre sa théorie corpusculaire et ses positions éthiques. Ce lien résulterait d'une analyse mécaniste des «mouvements de l'âme». A la place de ces considérations naïves, il vaut mieux remarquer que la recherche de la vérité implique le choix de l'intégrité intellectuelle, et que cette dernière implique souvent une intégrité morale (il y a des contre-exemples). Que, par ailleurs, le fait de refuser les préjugés qui prévalent dans la société humaine est sans doute en soi un pas dans la bonne direction. On peut dire avec Salem [5] «Etrange destin que celui d'une physique qu'on ne saurait réduire à une anticipation chanceuse des dogmes sur lesquels reposent aujourd'hui notre science. Etrange destin que celui d'une éthique dont l'actualité paraît si évidente»

l'été se décompose rapidement, participant ainsi à l'énorme travail de pourrissement qui accompagne tout renouveau». Cette idée de transformation fut exprimée dans l'antiquité par Anaxagore. Celui-ci contribua comme Empédocle à préparer la base conceptuelle de la théorie corpusculaire.

Le sophiste Protagoras paraît s'être éloigné de la pensée de ces philosophes en affirmant : « l'homme est la mesure de toute chose » mais il se référerait là sans doute, de façon critique, au rôle attribué au divin.

**Les corpuscules sont-ils insécables ?** La théorie corpusculaire a rencontré de fortes oppositions indépendamment des objections théologiques. Certains philosophes ont jugé inconcevable qu'un corpuscule ne puisse être divisé. En fait, nous savons aujourd'hui que la possible division d'un corpuscule dépend du domaine d'énergie considéré. Un atome d'hélium par exemple possède trois degrés de liberté correspondant à ses mouvements de translation. Une molécule de di-azote possède  $2 \times 3 - 1 = 5$  degrés de liberté, la liaison entre les deux atomes étant supposée «gelée». A plus haute énergie (ou température) la molécule se dissocie en deux atomes d'azote. Des processus similaires se reproduisent à de très hautes énergies. Il semble que l'électron cependant soit une particule sans structure interne, donc véritablement insécable. A contrario, des corpuscules comportant des centaines d'atomes tels qu'ils apparaissent dans les colloïdes et en «nanotechnologie» se comportent à beaucoup d'égards comme les corpuscules de Démocrite. Ils établissent un lien entre les atomes et les phénomènes macroscopiques, comme l'ont montré en 1827 les expériences de Brown et l'interprétation de ces expériences par Einstein.

**Le vide existe-t-il ?** L'idée de «vide» a soulevé également de nombreuses controverses certains considérant cette notion comme un oxymoron. En fait, le mot «vide» n'est sans doute qu'une façon concise de dire : «un corpuscule est ici, puis là», et implique de ce fait les notions de corpuscule, d'espace et de temps<sup>5</sup>.

Après Torricelli, l'«horreur du vide» fut remplacée par la pesanteur de l'air et un équilibre de forces. Certains suggérèrent que le vide est en fait de la vapeur de mercure ou d'eau, suivant le liquide employé, mais ce point de vue n'aborde pas le fond de la question. Descartes introduisit une certaine «matière subtile» qui emplirait toute chose car, philosophiquement parlant, le vide lui faisait horreur. Dans les «Expériences nouvelles touchant le vide», Pascal [6] présente des expériences similaires à celles de Torricelli, sa conclusion étant que les espaces en haut des tubes sont apparemment vides de toute matière sensible. Une lettre lui fut adressée s'opposant à cette conclusion avec l'argument suivant : la lumière passant à travers le tube, il faut nécessairement que le haut du tube soit plein d'une matière qui permette sa propagation. Le consensus paraît être que la lumière, comme les corpuscules, peut se propager dans le vide.

---

5. Pour Kant l'espace et le temps sont des «représentations nécessaires a priori qui servent de fondement à toutes les intuitions extérieures». L'aspect *expérimental* de l'espace et du temps paraît accepté en physique moderne. Ceux-ci pourraient être discrets, fractals, émergents.... Ce serait plutôt l'«information» qui aurait aujourd'hui le statut que Kant attribuait à l'espace et au temps.

A l'époque moderne la situation a évolué sans pour autant aboutir à une conclusion définitive. La notion d'éther fut introduite au dix-neuvième siècle afin de donner un support palpable à la propagation de la lumière, puis jugée inutile. La théorie quantique des champs remplace le vide par des créations et annihilations de particules tels les paires électrons-positrons. Des théories encore plus récentes proposent que la gravité soit un phénomène émergent d'un substrat dont les fluctuations se produiraient à l'échelle de Planck. Elle serait basée sur les lois de la thermodynamique. Le présent article se limite à la valeur heuristique des notions de corpuscules et de vide dans un domaine d'énergie pour lequel ces notions sont appropriées.

**La théorie de Démocrite et la philosophie :** L'hypothèse démocritienne a intéressé ou séduit des penseurs très divers, tels Diderot, Nietzsche, Marx, mais aussi Aristote ou Leibnitz bien que ces derniers aient conclu contre celle-ci.

L'hypothèse atomique a souvent été considérée comme un simple mécanisme qui, pertinent ou non, ne relève pas de la philosophie en tant qu'ontologie : à savoir l'étude de l'être. Diogène Laërce (~ 200 de notre ère) note que Platon en particulier feint d'ignorer Démocrite. Pour une discussion relative à ces deux philosophes, voir par exemple [7]. Le «parti pris des choses» dont nous avons parlé plus haut définit une *méthode*. C'est aussi une empathie. Il ne prétend pas définir une ontologie.

Beaucoup de scientifiques acceptent naturellement l'hypothèse démocritienne et ont tendance à employer les mots : philosophie et métaphysique dans le sens péjoratif de : «relevant du langage et d'une tradition historique mais dénué de signification réelle». Du point de vue démocritien, ces problèmes philosophiques toutefois demeurent : Comment les choses apparaissent-elles au delà des mécanismes de la perception ? Et la conscience des choses au delà des phénomènes neurologiques ? D'où vient la notion de «sens» ? Qu'est-ce que l'imaginaire ? Quant à l'éthique il est sans doute insuffisant d'en faire un simple mécanisme d'adaptation des animaux sociaux.

Il s'agit là d'un problème général concernant l'émergence, qui est décrit ainsi par Kim [8] «Au fur et à mesure que les systèmes acquièrent des degrés de plus en plus élevés de complexité organisationnelle, ils présentent de nouvelles propriétés qui, en un certain sens, transcendent les propriétés de leurs parties constitutives et dont l'existence ne peut être prédite à partir des lois gouvernant les systèmes plus simples.»

L'interprétation de la mécanique quantique fait appel à des notions à connotation philosophique tel que le réalisme, la localité, la causalité<sup>6</sup>, la contextualité, l'identité, le

---

6. La notion classique de causalité est souvent mal comprise malgré son intérêt pratique évident, car beaucoup de phénomènes ont des causes multiples difficiles à discerner. En outre intervient la croyance en un rôle moteur direct du désir, de l'intention humaine et d'interventions surnaturelles. Les raisonnements procèdent alors souvent par pure analogie.

A titre d'exemple, il est important de déterminer si tel médicament apporte à un malade une amélioration notable. La méthode permettant d'établir l'efficacité ou l'inefficacité d'un médicament (l'existence ou la non-existence d'un phénomène) consiste à effectuer un grand nombre d'observations en double aveugle. Cette méthode (qui peut cependant être difficile à mettre en oeuvre pour des raisons éthiques ou pratiques) permet de réduire le rôle de la subjectivité et celui du hasard, c'est à dire le rôle des causes inconnues. Une telle méthode permet donc d'établir avec un certain degré d'objectivité la corrélation de deux événements, disons : A et B. Toutefois, pour affirmer que A est la cause de B

hasard, la probabilité (subjective ou en fréquence), etc...dont la signification n'est pas toujours claire. Une centaine d'articles paraissent chaque année sur ces sujets depuis près d'un siècle sans qu'un accord soit en vue.

**La théorie de Démocrite a-t-elle une valeur explicative en physique ?** La théorie de Démocrite a-t-elle une valeur explicative et la science atomique moderne (Bernoulli<sup>7</sup>, Dalton et Avogadro<sup>8</sup>, Boltzmann [10]) peut-elle être considérée comme étant logiquement reliée à cette doctrine ancestrale ? Dans un article récent Klein [11] le conteste : «l'atomisme des anciens relève, non de la physique, mais de la métaphysique».

Nous pensons au contraire que si l'enseignement de Démocrite s'était poursuivi les concepts modernes concernant en particulier la puissance motrice du feu auraient pu être obtenus. Des résultats expérimentaux pratiquement impossibles à obtenir avant l'époque moderne (car ils requièrent une longue évolution de la technologie) ne paraissent pas nécessaires. L'intuition démocritienne paraît être le fruit, non de son imagination, mais au contraire de l'observation de faits bien réels, tel le mouvement collectif de grains de sable, le rebond de balles sur une planche, l'observation du travail converti spontanément en chaleur par l'effet d'un frottement, etc...

Russo [12] estime que la science (telle qu'il la définit) apparut seulement après le troisième siècle avant notre ère avec Archimède, Euclide, Héron... Les philosophes présocratiques (incluant Démocrite) auraient, pour ainsi dire, seulement préparé le terrain. Il faut peut-être souligner à cet égard que nous parlons dans ce texte de Démocrite de façon emblématique. Notre propos concerne l'ensemble des philosophes rationalistes de la Grèce antique.

Ce qui nous touche peut-être, plus que la valeur technique des résultats obtenus à cette époque, c'est l'*héroïsme* de ces philosophes. Les livres de Zeller et de Salem, cités ci-dessus, parmi d'autres, expriment cette empathie. Quand nous disons que Démocrite *aurait pu* découvrir certains principes de la thermodynamique, nous ne voulons pas dire

---

l'ordre temporel ne suffit pas. Il faut pouvoir écarter l'hypothèse d'une cause commune à A et à B. Si un phénomène est avéré, il reste à en trouver l'explication sur la base de théories fiables, ou, si un désaccord persiste, à remettre en cause ces théories. La plupart des personnes ont une notion instinctive de la causalité. Mais cette notion est faussée lorsque l'on prête à la nature une intentionnalité qui est propre à l'homme.

7. La loi de Boyle (le produit de la pression et du volume d'un gaz est constant) est baptisée du nom du philosophe irlandais R. Boyle qui fut le premier à la publier en 1662. C'est Amontons [9] qui précise en 1702 que cette loi n'est valable qu'à température constante et qu'elle est plus précise aux basses pressions. Les travaux sur l'air et ses propriétés s'organisent en deux périodes : la première, amorcée par Torricelli, conduit aux expériences barométriques de Pascal en 1648 ; la deuxième aboutit à la découverte de l'élasticité de l'air et à la loi de Boyle. Gassendi contribue à la notion de pression de l'air sur une base corpusculaire. En 1738, Daniel Bernoulli donne une explication moderne de la pression exercée par un gaz supposant que : «les atomes d'un gaz se déplacent de façon aléatoire et la pression n'est rien d'autre que l'impact des atomes sur les murs du récipient qui contient ce gaz». Il est intéressant de noter que le mot «gaz» vient du mot grec signifiant : chaos.

8. Dalton a montré que les réactions chimiques se produisent en parties proportionnelles (la formule H+O qu'il attribuait à l'eau fut cependant corrigée en H+O+H par Avogadro). Cette conclusion repose sur l'idée qu'il existe un certain nombre (une centaine) de types différents d'atomes que l'on appelle «éléments», les atomes d'un type donné étant identiques entre eux si l'on omet les isotopes.

que nous disposons de documents historiques justifiant ce point de vue ; mais que, si d'aventure apparaissaient de tels documents, il ne serait pas justifié d'affirmer d'emblée qu'il s'agit d'une falsification (voir le prologue).

Le lecteur est invité à examiner en premier lieu le modèle du chapitre 4 consistant en réservoirs de corpuscules situés à deux altitudes différentes, soumis à la gravité. Selon ce modèle, ce qui distingue une machine thermique d'une machine telle qu'une roue à aubes, c'est le fait que, dans le premier cas, nous ne savons pas si un site particulier contient ou non un corpuscule : nous connaissons seulement le poids moyen du site. De cela, résulte une perte de rendement intrinsèque. Ceci exprime le principe de Carnot. Cette conclusion repose seulement sur la loi de conservation de l'énergie potentielle, et sur une notion intuitive de probabilité. Une définition plus précise de la température repose sur l'examen de diverses configurations, examen qui eut été également à la portée d'un penseur de la Grèce antique. Notre thèse est donc que certaines observations rudimentaires, plus un principe de simplicité, permettent à eux seuls d'aboutir à des résultats techniques significatifs.

Par ailleurs, le lecteur est invité à visionner les simulations disponibles sur le web : Thermodynamique, simulations, en particulier en ce qui concerne le mouvement aléatoire des corpuscules [13].

**Les phénomènes thermiques :** Nous considérons principalement les phénomènes thermiques car on peut dire qu'ils sont à la base de nos connaissances en physique. Chacun sait que le feu peut déplacer des charges et avoir, par conséquent, des effets mécaniques. Par exemple la combustion d'hydrogène ou d'un autre corps combustible placé sous une montgolfière permet à celle-ci de s'élever. La raison en est que l'air contenu dans la montgolfière se dilate lorsqu'il est chauffé et devient de ce fait moins dense que l'air extérieur. La montgolfière s'élève alors dans l'air comme le ferait un morceau de bois plongé dans l'eau d'un lac. On peut penser également à une poche étanche remplie d'air, supportant une lourde pierre. Lorsque le soleil se lève, l'air contenu dans la poche s'échauffe et la pierre s'élève. Celle-ci ayant atteint sa hauteur maximale elle peut être déplacée latéralement. A la nuit tombée, la poche reprend sa hauteur initiale et le cycle peut être réitéré. Ce dispositif sera décrit dans le prologue sur la base de deux lois : la loi des gaz parfaits et la loi de l'énergie interne.

Pour un exposé concernant la thermodynamique classique et la mécanique statistique voir par exemple [14].

**La contribution de Carnot :** Carnot s'est posé vers 1824 la question suivante : Le dispositif cité ci-dessus à titre d'exemple fait-il le meilleur usage de la quantité de chaleur disponible ? Sur la base de trois lois qu'il a établies ou consolidées, numérotées 0, 1 et 2, il a donné à cette question une réponse négative.

En bref, la loi N°0 est celle de l'équilibre thermique, considérée comme évidente d'un point de vue empirique, mais dont la vérification théorique ou numérique n'est pas simple. Le N°0 a été attribué à cette loi car elle ne fut énoncée clairement qu'après les lois N°1 et N°2.

La loi N°1 affirme que la chaleur est une forme d'énergie et que l'énergie d'un système clos ne varie pas au cours du temps. Citons à ce sujet Carnot [15] qui écrivit dans des notes publiées après sa mort : «La chaleur n'est rien d'autre que la puissance motrice, ou plutôt une autre forme du mouvement. Lorsque de la puissance motrice est détruite, la chaleur est générée précisément en proportion de la quantité de puissance motrice détruite ; de même, quand de la chaleur est détruite, de la puissance motrice est générée». Il a établi que la quantité de chaleur nécessaire pour élever un gramme d'eau de un degré est équivalente à 3.26 joules (au lieu de la valeur moderne de 4.18 joules).

La loi N°2 affirme qu'aucun travail ne peut être obtenu à partir d'un bain ayant une température constante par un processus cyclique. Cette loi est basée sur la notion de «calorique» introduite par Carnot et aujourd'hui appelée : «entropie». Citons à ce sujet Zemansky et Dittmann [16] : «Carnot used «chaleur» when referring to heat in general, but when referring to the motive power of fire that is brought about when heat enters an engine at high temperature and leaves at low temperature, he uses the expression : chute de calorique, never : chute de chaleur. Carnot had in the back of his mind the concept of entropy, for which he reserved the term : calorique» [Carnot utilise le terme de chaleur d'une façon générale, mais quand il se réfère à la puissance motrice du feu apportée quand la chaleur est introduite dans une machine thermique à haute température et la quitte à basse température, il emploie l'expression «chute de calorique», jamais : «chute de chaleur». Carnot avait acquis le concept d'entropie, pour lequel il réservait le nom de «calorique»]. Pour cette raison, nous ne pouvons qu'approuver la proposition faite par quelques auteurs de donner à l'unité d'entropie le nom de Carnot (Cn en abrégé) au lieu de l'unité : joule par kelvin, actuellement employée. Pour une discussion historique très complète de la contribution de Carnot à la thermodynamique, voir Brodiansky [17].

**Le rendement maximal d'une machine thermique :** Il existe des dispositifs dits «réversibles» dont le rendement est maximal. Ce rendement maximal, bien qu'inférieur à l'unité pour une raison fondamentale qui sera expliquée ultérieurement, est supérieur à celui des dispositifs décrits ci-dessus. Précisons dans quelles conditions une machine thermique peut être considérée comme réversible. Une telle machine transforme une certaine quantité de chaleur en travail. On dit que la machine est réversible, donc optimale, si le même travail donne la même quantité de chaleur. Le dispositif inverse est appelé, suivant l'usage qui en est fait, un réfrigérateur ou une pompe à chaleur.

Les transformations lentes sont réversibles, le milieu étant en contact avec un bain (chaud ou froid) ou isolé thermiquement. Les processus fondamentalement irréversibles sont les transferts de chaleur par contact thermique lorsque la différence de température entre les deux corps est notable. Carnot a expliqué comment il est possible d'éviter la présence de tels contacts thermiques durant un cycle. Le rendement maximal ne dépend alors que de la température dite : «thermodynamique» de la source chaude et de celle du fluide de refroidissement. *a contrario* mentionnons un cycle non optimal : Le cycle thermique utilisé dans les véhicules à moteur appelé : «cycle d'Otto», du nom d'un ingénieur allemand. Dans ce cas, le milieu actif n'est pas modifié lorsqu'il est en contact avec un bain thermique. Ce cycle n'est pas réversible et son rendement n'est donc pas

optimal. Toutefois il peut se rapprocher des conditions fixées par Carnot comme on le verra [18–21].

**Illustration du rendement de Carnot.** Nous donnons une illustration simple du *résultat* d'un cycle de Carnot sur la figure 1.2. Le bain froid est supposé avoir une température absolue (température en degré centigrade plus 273.15) égale à 100 et le bain chaud une température égale à 300. La théorie de Carnot prédit un rendement  $\eta = W/Q = 200/300$ , où  $W$  représente le travail fourni et  $Q$  la quantité de chaleur consommée. Cette quantité de chaleur  $Q$  pourrait être fournie par la chute d'un poids d'une hauteur trois mètres dans le bain chaud. Idéalement, la machine permettrait d'élever un poids identique de deux mètres. Naturellement cette opération convertissant un travail en un travail moindre ne présente aucun intérêt pratique. Elle est présentée ici pour concrétiser la signification de la quantité de chaleur  $Q$ .

Donnons un autre exemple : La différence de température entre l'eau océanique de surface et l'eau en profondeur est de l'ordre de 20 degrés centigrade près de l'équateur. Le rendement maximal d'une machine fonctionnant avec ces deux bains serait :  $\eta_C \approx 20/273$ . Le rendement pratique, obtenu par un changement de phase (par exemple ammoniacque liquide-ammoniacque gazeux) est de l'ordre de 0.5%. La ressource est illimitée mais une quantité importante de travail est nécessaire pour pomper l'eau en profondeur (la température de l'eau est de 4°C en profondeur car la densité de l'eau est maximale à cette température). Ce dispositif, inventé par G. Claude [22] reste l'objet de recherches.

**La théorie de Carnot aurait-elle pu être conçue dans l'antiquité ?** Il eut fallu pour cela, en premier lieu, établir la loi de conservation de l'énergie potentielle dans un système mécanique classique. Cette loi peut être observée à l'aide de poids et de poulies : un poids unité descendant d'une unité peut soulever un poids de deux unités d'une hauteur moitié (on suppose ici l'absence de frottement). Cette notion était bien connue des Grecs et des Egyptiens puisqu'elle est à la base du fonctionnement des systèmes de levage.

En deuxième lieu, il faut observer qu'une énergie mécanique peut échauffer un corps par le mécanisme du frottement<sup>9</sup>. On peut donc imaginer que l'énergie potentielle libérée par la chute d'un corps sert à élever les corpuscules contenus dans le corps (la gravité est introduite ici à titre de modèle ; nous ne suggérons pas qu'elle joue un rôle notable dans les phénomènes thermiques usuels).

On observe aussi qu'un corps chauffé se dilate et peut donc fournir du travail. Toutefois, si on cherche à ramener ce corps à sa température initiale, le travail net est nul. En d'autres termes, la transmission de chaleur est irréversible et un corps à une certaine température ne peut pas fournir de travail de façon cyclique.

Imaginons que l'on puisse concevoir une machine réversible, c'est-à-dire telle que si la machine fonctionne en sens inverse elle redonne la chaleur initialement utilisée. Un raisonnement élémentaire (mais énoncé pour la première fois par Carnot en 1824)

---

9. Rumford a démontré expérimentalement en 1798 l'équivalence entre travail et chaleur, avec une erreur de l'ordre de 20 pour cent.

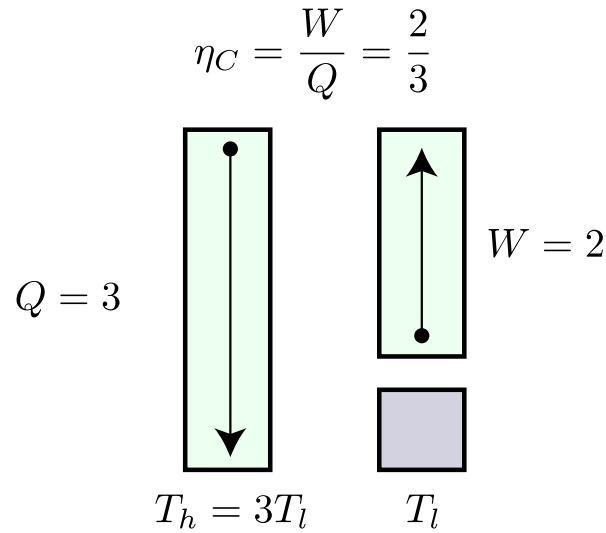


FIGURE 1.2 – Cette figure illustre le résultat du fonctionnement du cycle optimal de Carnot. Ici, la quantité de chaleur consommée  $Q$  résulte d'un travail mécanique : la chute d'un poids ( $Q$  est entendue en valeur absolue). Le rectangle de gauche représente le bain chaud et le rectangle inférieur de droite représente le bain froid. La représentation du milieu de travail en haut à droite est schématique. Il peut s'agir d'un cylindre muni d'un piston et rempli d'air. Le diagramme pression-volume est en figure 1.3. L'énergie  $Q - W$  est dissipée dans le bain froid, qui s'échauffe. On suppose que les processus sont arbitrairement lents. On suppose aussi que les bains sont si grands que leurs températures ne varient pas de façon appréciable cycle après cycle.

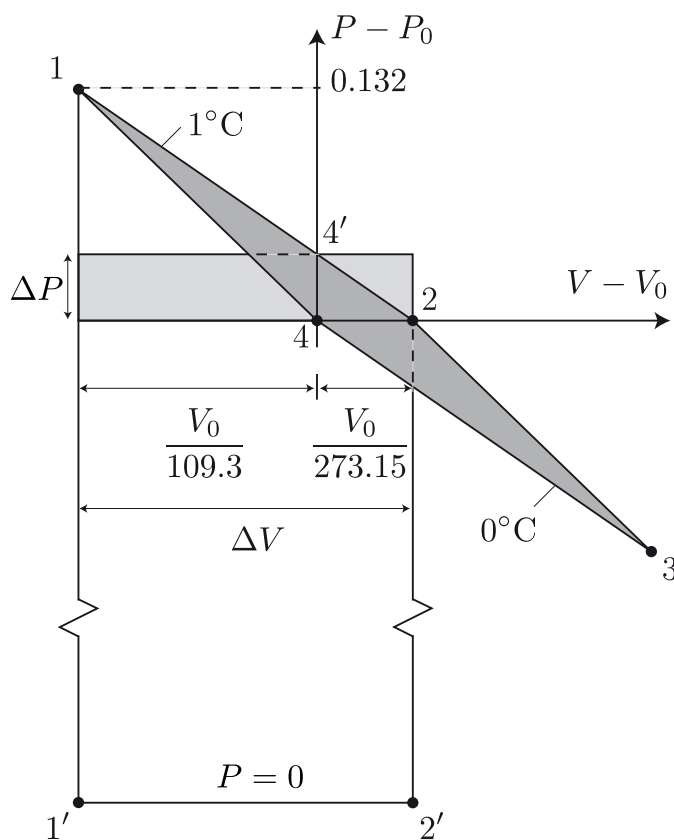


FIGURE 1.3 – Cycle de Carnot tel qu'il a été décrit par lui (mais non représenté) dans son ouvrage de 1824, où  $P$  est la pression et  $V$  le volume.  $P_0$  est une pression de référence, par exemple la pression atmosphérique, et  $V_0$  est un volume de référence, par exemple un mètre cube. La température basse est la température de fusion de la glace. La température haute est de un kelvin (ou un degré centigrade) supérieure à celle-ci. Le travail fourni est l'aire du cycle, parcouru dans le sens : 1,2,3,4. Cette aire est égale à celle du cycle rectangulaire représenté à gauche. Mais ce cycle rectangulaire (isobar-isochore) consommerait une quantité de chaleur bien supérieure à celle requise par le cycle de Carnot. Les transformations 1-2 et 3-4 sont dites «isothermes» : la température est constante, et les transformations 2-3 et 4-1 sont dites «adiabatiques» : la chaleur ne passe pas. Elles sont également «isentropiques» : l'entropie est constante. Reprenons l'explication du cycle 1,2,3,4 de façon plus détaillée. En 1 le gaz est en contact avec le bain chaud. On le laisse se détendre jusqu'au point 2, fournissant du travail. De 2 à 3 le gaz est forcé de se détendre davantage (absorbant du travail) afin qu'il se refroidisse et atteigne la température du bain froid. Puis, de 3 à 4 on le laisse se comprimer, fournissant du travail. Enfin, de 4 à 1, il est forcé de se comprimer davantage afin qu'il se réchauffe et atteigne la température du bain chaud, absorbant du travail.

montre qu'aucune machine ne peut avoir un rendement supérieur à celui d'une machine réversible : cela entraînerait la violation du principe de conservation de l'énergie rappelé ci-dessus. Mais d'autre part, on ne peut imaginer une telle machine réversible que si, outre le bain chaud, un bain froid est également disponible.

Par la considération de plusieurs machines couplées, on conclut que le rendement, défini comme le rapport du travail fourni et de l'énergie thermique consommée par le bain chaud, est de la forme :  $1 - T(\theta_l)/T(\theta_h)$  où  $\theta_h$ ,  $\theta_l$  sont les températures des bains chauds et froids, respectivement, définies de façon arbitraire, par exemple par la dilatation d'un objet. La fonction  $T(\cdot)$  toutefois reste inconnue. C'est ici que les considérations présentées dans cet article relatives au transfert de corpuscules entre deux réservoirs peuvent être utiles, car elles permettent de définir la fonction  $T(\cdot)$  de façon simple.

Les machines thermiques réalisées à l'époque de Carnot étaient beaucoup trop imparfaites pour que la mesure de leur rendement puisse fournir des indications utiles relatives au rendement maximal. C'est donc sur la seule base d'observations qualitatives, accessibles à tous, et de raisonnements, que Carnot a pu énoncer ses résultats fondamentaux. Nous ne voyons donc pas pour quelles raisons ces raisonnements n'auraient pas pu être énoncés beaucoup plus tôt, sinon pour des raisons de société.

**Étapes de cet article.** Nous reprenons dans cet article à visée pédagogique les trois étapes du processus scientifique :

1. Observations qualitatives.
2. Théorie basée sur un modèle plausible. Cette théorie définit une structure cohérente mais les quantités introduites ne sont pas nécessairement directement mesurables. De fait, nous ne précisons pas initialement les unités employées.
3. Comparaison entre les résultats de ce modèle et des observations précises. C'est à ce stade que les unités sont définies.

Après un prologue, où un modèle simple (mais inefficace) de machine thermique est traité, l'article est composé de deux parties. Dans la première, nous considérons un modèle selon lequel les corpuscules sont situés à une certaine altitude (l'image qui vient à l'esprit est celle d'oiseaux perchés sur un fil téléphonique). On définit les sites sur lesquels les corpuscules sont susceptibles de se trouver, et en particulier le site N°1 qui joue le rôle de milieu de travail. Puis nous considérons deux dispositifs de ce type situés l'un en dessous de l'autre. Le transfert du site N°1 du niveau supérieur au niveau inférieur et son retour, fourni (ou absorbe) un certain travail. Il faut naturellement attendre que les équilibres thermiques aient eu lieu.

Dans la deuxième partie nous obtenons les lois des gaz parfaits et de l'énergie interne. Ces deux lois permettent de traiter le cas de machines thermiques conventionnelles, utilisant la dilatation de l'air.

### Résumé des chapitres :

1. Prologue : il s'agit d'une conversation hypothétique entre Démocrite et le roi d'Abdère, qui permet d'introduire le sujet de façon concrète.

2. Notion d'équilibre thermique. Cette notion est précisée au moyen de simulations : Equilibre entre deux corps de même nature et équilibre entre deux corps différents. Nous introduisons la notion de nombre de configurations, notion qui, incidemment, eut été tout à fait à la portée des philosophes grecs puisqu'il suffit d'examiner la disposition de quelques objets. Une autre sorte d'explication repose sur le facteur dit : «de Boltzmann». Lorsque l'équilibre thermique, mécanique et osmotique est établi on parle d'«équilibre thermodynamique». Les détails sont donnés en annexe.
3. Modèle comportant deux réservoirs de corpuscules de même nature, chacun comportant  $g$  sites, situés respectivement à une altitude  $E_l$  et à une altitude  $E_h > E_l$ . Un cycle thermique peut dans ce cas être défini par l'échange des contenus d'un site du réservoir du bas et d'un site du réservoir du haut. Nous montrons que le rendement de ce cycle est égal à  $1 - \frac{T_l}{T_h}$ , ce qui nous permet d'identifier la «température absolue»  $T$  et la «température thermodynamique».  $T_l$ ,  $T_h$  se réfèrent respectivement à la température du bain froid et à celle du bain chaud : indice  $l$  pour «low» et  $h$  pour «high». L'intérêt de ce modèle est qu'il ne fait appel qu'à la notion d'énergie potentielle. Celle-ci est facilement comprise à l'aide de poids et de poulies comme nous l'avons dit ci-dessus. Par contre, la notion d'énergie cinétique requière des expériences difficiles à effectuer. Il est donc préférable de modéliser un corps chaud par des corpuscules situés à une certaine altitude dans le champ de gravité, plutôt que par des corpuscules en état de mouvement chaotique comme on le fait généralement.
4. Généralisation du modèle précédent à  $m$  sous-réservoirs inférieurs et  $m$  sub-réservoirs supérieurs. Pour un choix approprié des paramètres le cycle de Carnot est obtenu. Le diagramme de représentation usuel d'un cycle est le diagramme  $T - S$  où  $T$  est la température absolue et  $S$  l'entropie. Le travail est égal à l'aire du cycle. Dans notre représentation  $E, \nu$ , le poids moyen  $\nu$  d'un site est une fonction de l'entropie  $S$ , et  $E$  est liée à  $T$  et à  $\nu$ . Les relations sont telles que le travail fourni est, ici encore, égal à l'aire du cycle.
5. Modèle corpusculaire d'un gaz dilué. Ce modèle conduit, suivant l'intuition de Bernoulli, à la loi des gaz parfaits valable à toute température, loi que nous écrivons sous la forme simplifiée :  $Fh = NT$ , où  $F$  est la force<sup>10</sup>,  $h$  la hauteur (ou longueur) d'un cylindre et  $T$  la température absolue. Concernant le nombre  $N$  de corpuscules, il suffit de savoir qu'il est constant dans un réservoir clos. Sa valeur numérique n'est pas importante ici. La loi des gaz parfait permet de définir une méthode de mesure de la température, dite «absolue». <sup>11</sup>  
 Pour justifier l'introduction du facteur de Boltzmann, nous considérons en annexe

10. Il ne faut pas la confondre avec l'énergie libre, que certains auteurs notent :  $F$ , pour : «Free energy».

11. Le thermomètre à gaz fut introduit par Galilée et considérablement amélioré par la suite. Le mot «température» introduit vers 1538 vient du latin «temperare» qui vient lui même du mot «temps» (ce lui qui passe et non celui qu'il fait). La notion de chaud et de froid s'entend par rapport à la température de notre corps. En fait, nous ressentons plutôt la *perte* ou le gain de chaleur de notre corps. Si nous touchons un morceau de cuivre et un morceau de verre tous deux à 20°C, le premier paraîtra plus froid que le second en raison de sa conductibilité thermique plus élevée. Rappelons également que la température

la décroissance de la densité atmosphérique avec l'altitude sur la base de la théorie corpusculaire et de l'équilibre des forces à la température standard, en utilisant un modèle comportant des pistons fictifs de poids négligeable. Puis, identifiant la température  $T$  au volume occupé par l'air à une pression standard comme l'a proposé Galilée, nous obtenons une loi de décroissance de la densité de l'air en fonction de l'altitude  $z$  de la forme :  $2^{-z/T}$ . Si l'on s'en tient au modèle selon lequel les corpuscules se déplacent verticalement sous l'influence de la gravité (donc sans introduction de pistons fictifs) on est conduit à affirmer qu'une certaine température correspond, non pas à des corpuscules ayant une énergie précise, mais à une collection de corpuscules ayant une certaine distribution d'énergie. Ceci conduit au facteur de Boltzmann. Nous montrons ensuite que la loi :  $2^{-z/T}$  citée ci-dessus est obtenue si une température donnée correspond à une *distribution* :  $2^{-E(f)/T}$  où :  $E(f)$  est l'énergie exprimée en fonction de l'action<sup>12</sup>. La théorie présentée est «relativiste», ce qui veut dire qu'elle s'applique à toutes les valeurs de la température supérieures à une certaine valeur quantique. Si la distribution donnée ci-dessus est appliquée au cas de deux niveaux discrets d'énergie, on obtient le «facteur de Boltzmann».

6. Energie interne d'un gaz parfait. Pour la déterminer il est nécessaire de savoir comment l'«action»  $f$  (définie dans le cas particulier d'un corpuscule soumis à une gravité constante comme l'aire du mouvement  $z(t)$ ), dépend de l'énergie  $E$ . Pour obtenir le mouvement d'un corpuscule dans ces conditions, nous postulons en premier lieu un principe simple applicable à la lumière : l'instant de retour d'un écho lumineux ne dépend que de la distance de l'obstacle<sup>13</sup>. Puis ce principe est généralisé de façon heuristique<sup>14</sup> au mouvement de corpuscules, qui est universel. Une présentation plus traditionnelle de ces résultats est donnée en annexe. On déduit de ces considérations l'expression de l'énergie interne  $U = U(T)$ <sup>15</sup>. La forme usuelle :  $U = \frac{NT}{2}$  est applicable seulement aux températures modérées.

---

thermodynamique utilisée aujourd'hui s'exprime en kelvin et a la valeur 273.16 au point triple de l'eau, lorsque les phases solide, liquide et vapeur de ce corps co-existent.

12. En mécanique quantique  $f \propto n$ ,  $n=1,2,\dots$

13. Galilée a tenté en vain de faire cette mesure. La mesure du temps aller-retour de la lumière fut effectuée pour la première fois par Römer par l'observation d'un satellite de Jupiter. La valeur numérique de ce temps d'écho n'est utile dans cet article que pour définir les températures pour lesquelles l'approximation dite «non-relativiste» :  $U = \frac{Nk_B T}{2}$  est valable, à savoir :  $k_B T \ll mc^2$ , où  $k_B$  représente la constante de Boltzmann,  $m$  la masse du corpuscule et  $c$  la vitesse de la lumière dans le vide. Pour la lumière ( $m = 0$ ) cette approximation n'est jamais valable.

14. La procédure utilisée ici peut surprendre. En fait, les changements de paradigme en physique résultent généralement de tels procédés heuristiques. Ils consistent à introduire de façon arbitraire une constante universelle. C'est ce que fit Planck vers 1900 dans le but de rendre finie l'énergie du corps noir. Ces procédés, que l'on peut juger de nature «divinatoire», sont évidemment contrôlés «a posteriori» par l'expérience. Inversement, le mouvement d'impulsions lumineuses correspond au mouvement de corpuscules de masse nulle. Les propriétés thermodynamiques de la lumière sont toutefois entièrement différentes de celles des corpuscules, car le nombre de corpuscules de lumière (photons) ne se conserve pas.

15. On appelle «gaz de Joule» un gaz dont l'énergie interne ne dépend que de la température. Un gaz parfait est un gaz de Joule.

Bien que les considérations résumées ci-dessus, en particulier celles qui sont dues à Bernoulli, aient été obtenues à l'époque moderne, il eut peut-être été possible de les introduire à l'époque de la Grèce antique sans avoir connaissance de résultats expérimentaux précis. Les moyens techniques disponibles à cette époque ne permettaient certes pas d'évaluer le nombre  $N_A$  de corpuscules contenus dans 0.0224 mètres cubes d'air dans les conditions standards de pression et de température, nombre que l'on appelle aujourd'hui : «nombre d'Avogadro». Mais ce nombre (ou un nombre similaire) n'est introduit dans le présent texte que pour clarifier la discussion. Sa valeur numérique ne serait importante que si nous voulions déterminer la constante des gaz parfait. Cette dernière est introduite ici empiriquement.

**Simplifications.** Dans un souci de brièveté, nous omettons (après le prologue) de définir les unités (longueur, temps, etc...). Les quantités introduites n'ont donc pas de dimension. Le résultat concret relatif au rendement des cycles réversibles ne dépend que du rapport de deux températures. Il est donc indépendant des unités choisies. Une fois la structure d'une théorie établie, c'est la comparaison avec des résultats expérimentaux précis qui permet de définir les unités.

Comme nous l'avons dit ci-dessus, certains de nos arguments sont «heuristiques» c'est à dire plausibles mais non formellement justifiés. Des explications en termes modernes sont ajoutées en bas de page et en annexe pour faciliter la compréhension.

**Notions mathématiques et notations.** On sait que les Sumériens possédaient il y a plus de 4 000 ans une mathématique évoluée (numération de position en base 60, résolution des équations du second degré...). Cet héritage fut partiellement transmis aux Grecs, qui accrurent les connaissances en géométrie. A titre d'exemple, la formule donnant le volume d'un cône fut proposée par Démocrite et prouvée par Eudoxe. Quelques règles mathématiques sont rappelées pour aider les lecteurs n'ayant pas de connaissances en mathématiques. Nous utilisons un langage moderne, mais il semble que celui-ci pourrait être reformulé et remplacé par un langage basé sur les opérations élémentaires de l'arithmétique. Pour l'essentiel, il suffit de savoir que  $2^{m+n} = 2^m 2^n$  et admettre que ce qui est vrai pour des entiers est vrai pour des nombres quelconques. La fonction  $\log_2(x)$  est la fonction inverse de la fonction  $2^x$ , ce qui veut dire que :  $\log_2(2^x) = x$ . On passe de la fonction :  $2^x$  à la fonction analogue :  $\exp(x)$  par l'introduction d'une constante, et de la fonction  $\exp(x)$  à sa fonction inverse :  $\ln(x)$ . On appelle «factorielle»  $n! \equiv 1.2\dots n$ .

Nous utilisons l'intégration comme une somme de petits éléments comme l'a fait Archimède, en particulier pour évaluer l'aire de la parabole. La notion de dérivée, plus récente, paraît avoir été introduite par Leibnitz et Newton. Le signe  $\frac{\partial}{\partial x}$  de dérivée partielle veut simplement dire que les variables autres que  $x$  sont considérées comme des constantes.

L'analyse combinatoire joue un rôle important dans cet article. Le fait que le nombre 103 049, annoncé par Hipparque (circa 150 avant notre ère) dans un contexte assez obscur, ait trouvé une interprétation à l'époque moderne [23], suggère que cet astronome possédait des notions non-triviales d'analyse combinatoire. Il devait y avoir à

cette époque un corpus dans ce domaine, qui n'est pas parvenu jusqu'à nous.

Il faut reconnaître que certaines opérations, bien que possible dans leur principe à l'époque grecque, eussent été en fait impraticable car les Grecs (à quelques exceptions près) n'utilisaient pas la notation de position. En outre, ils n'avaient pas connaissance des coordonnées, qui furent introduites par Descartes, ou de notions plus avancées de représentation de l'espace, voir [24] où l'on trouvera quelques références historiques.

Concernant les nombres, nous utilisons la notation de position usuelle, et la convention anglo-saxonne remplaçant par un point la virgule utilisée en français, ainsi que la séparation par tranches de trois chiffres.

Rappelons que «iso» signifie «même»; «chore» signifie «volume»; «bar» signifie «pression»; «therme» signifie «température»; «adiabatique» signifie «ne traverse pas» (sous entendue : la chaleur).

**La théorie présentée est classique. C'est une ébauche.** La théorie présentée est classique en ce sens que les phénomènes quantiques sont négligés, sauf occasionnellement en notes et dans une annexe. Pour éviter une confusion, notons que les niveaux (ou altitudes) des corpuscules sont supposés connus. S'il s'agissait d'électrons soumis à l'attraction d'un noyau (atome) la théorie quantique serait nécessaire pour évaluer ces niveaux à partir de constantes fondamentales et en particulier de la constante de Planck réduite, notée  $\hbar$ . Celle-ci n'intervient pas ici. L'aspect quantique a été traité en particulier par Kieu et Quan, voir [25], et plus récemment par Abe [26]. Notons que des corpuscules classiques peuvent toujours être considérés comme distinguables, même s'ils sont identiques (il s'agit là d'une affirmation controversée [27, 28]).

Un aspect peut-être original de l'article concerne le mouvement relativiste des corpuscules. En effet, nous traitons de façon délibérément *asymétrique* le mouvement des corpuscules vers le haut et leur mouvement vers le bas. Il en résulte une simplification. Le traitement traditionnel est donné en annexe.

Le présent texte est une ébauche en ce sens qu'il conviendrait, d'une part de réduire les mathématiques à des opérations arithmétiques accessibles aux Grecs anciens, d'autre part d'effectuer les expériences élémentaires suggérées pour voir dans quelle mesure il eut été concevable de les réaliser à cette époque. Si c'est le cas, on peut imaginer que ces expériences furent faites mais que leur trace fut perdue. Quoiqu'il en soit, il semble qu'il y ait un grand intérêt pédagogique à présenter la physique de la manière dont elle *aurait pu* être découverte, même s'il s'agit d'une hypothétique reconstruction.

Pour les notions de base en physique le lecteur peut consulter le site web : hyperphysics, voir [29].

## Chapitre 2

# Prologue

*Nous imaginons un dialogue qui aurait pu avoir lieu entre Démocrite et le roi de son pays, Abdère. Le roi envisage de soulever de lourdes pierres à l'aide d'une poche remplie d'air chauffée par la combustion de bois. La question posée est celle-ci : Quelle quantité de chaleur (ou quelle quantité de bois) est-elle nécessaire pour effectuer ce travail ? Certaines notions déjà présentées dans l'introduction sont reproduites pour rendre la lecture plus aisée.*

### **Le projet du roi.**

— Mon cher Démocrite, dit le roi, je fais construire un palais. Pour réaliser cette construction, mes ouvriers doivent soulever des pierres de poids considérable. Même avec des rampes de faible pente plusieurs centaines d'hommes sont nécessaires pour amener les pierres extraites des carrières aux emplacements définis par notre architecte. Ayant observé la dilatation de poches remplies d'air sous l'influence de la chaleur je me suis demandé si le feu, obtenu par exemple par la combustion du bois, ne pourrait nous aider à soulever ces blocs avec peu d'effort. Certains dispositifs sont sans doute à cet égard supérieurs à d'autres. Connaissant la profondeur de tes réflexions dans plusieurs domaines de la physique et de la philosophie, j'attends de toi des propositions.

— Sire, répondit Démocrite, ce que vous proposez me paraît en effet réalisable. Pour répondre à votre demande, nous pourrions certes effectuer un nombre considérable d'expériences avec diverses charges. Mon but est de prouver que le raisonnement permet de prévoir un grand nombre de choses utiles, rendant la plupart des expériences superflues.

### **Unités commodes.**

— Vous disposez d'un cube (que j'appellerai désormais un cylindre d'axe vertical) dont les parois sont en bronze. Je propose d'utiliser comme unité de longueur le côté de ce cube et de l'appeler «mètre». Ce cylindre étant rempli d'air dans les conditions usuelles et rendu étanche par un piston placé sur sa face supérieure, il contient un certain nombre de corpuscules.

Nous avons par ailleurs fait l'expérience suivante : nous avons rempli d'eau un cylindre de 1 mètre carré de section et de 11 mètres de haut et obturé son extrémité supérieure. Une partie de l'eau s'écoule alors mais il reste une hauteur d'eau d'environ 10 mètres, le poids de cette eau étant équilibré par le poids de l'atmosphère. Je propose de prendre pour unité de poids celui de ce volume d'eau<sup>1</sup>. Ce poids, unité, s'exerce naturellement sur le piston du cylindre dont j'ai parlé précédemment.

Enfin, convenons d'appeler «énergie» le produit d'un poids et de la hauteur dont on le soulève.

- Et qu'appelles-tu exactement : «température» ?
- Ayant observé que, lorsque la température ressentie augmente, la charge totale que le cylindre peut supporter tout en conservant sa hauteur ( $h = 1$ ) augmente, je propose d'appeler «température» cette charge totale. Nous avons constaté que la température de l'eau bouillante, par exemple, est d'environ :  $T = 1.37$  dans ces unités<sup>2</sup>.
- Soit ! dit le roi. Ceci étant admis, que pourras-tu démontrer ?
- Sur la base corpusculaire, je peux établir la loi des gaz, que j'énoncerai dans un instant. Concernant la quantité de chaleur nécessaire pour échauffer une certaine quantité d'air, j'utiliserai initialement un résultat empirique. Je peux obtenir un résultat théorique à ce sujet, mais c'est beaucoup plus compliqué.

### Loi des gaz.

— Considérons un cylindre muni d'un piston dans les conditions standard :  $h = F = T = 1$  et multiplions par  $k$  la température. A l'équilibre, la charge totale est multipliée par  $k$  d'après nos définitions, la hauteur restant la même. Nous posons d'une façon générale :  $F = f(T, h)$ , où  $f(T, h)$  est une fonction de deux variables avec :  $f(T, 1) = T$ .

Plaçons l'un au-dessus de l'autre  $h$  cylindres identiques de telle sorte que la hauteur totale soit  $h$ , avec une charge  $k$  placée sur le piston du cylindre supérieur, les cylindres restant séparés par des pistons sans poids. Cette charge est naturellement transmise aux cylindres inférieurs (on néglige le poids du gaz et des cylindres), de telle sorte que chaque cylindre est soumis à une charge  $k$ . Pour revenir à un cylindre unique il est nécessaire de supposer que le fait de retirer les pistons intermédiaires n'a pas effet, ce qui est vrai si les corpuscules ne s'attirent pas entre eux. Nous avons dans ce cas :  $f(kT, h) = kf(T, h)$  pour toute valeur entière de  $h$  (donc en pratique pour toute valeur de  $h$ ). Mais si, pour tout entier  $k$  :  $f(kT, h) = kf(T, h)$ , alors :  $f(T, h) = Tg(h)$  pour une certaine fonction  $g(\cdot)$ . Ceci suffit, comme vous allez le voir, pour obtenir l'expression du rendement maximal absolu d'une machine thermique.

- Je suis curieux d'apprendre cela.

---

1. En unités modernes il s'agit de 10 tonnes, ou 100 000 newtons.

2. C'est Amontons qui, vers 1700, a montré expérimentalement une proportionnalité entre la pression et la température, à volume constant. Une fois établie la loi des gaz parfaits, on peut définir la température de façon équivalente par le changement de volume d'un gaz à pression constante. Pour un gaz réel, en raison de l'attraction mutuelle des corpuscules, la température telle que nous la définissons ici, ne coïncide pas avec la température thermodynamique.

### Le travail.

— Grâce à la rivière qui coule près d'Abdère, nous disposons en hiver de glace fondante, dont la température, par la définition adoptée ci-dessus, est unité. D'autre part, grâce à un feu de bois, nous pouvons chauffer le gaz à une température  $T$ .

Si, à une température  $T$  la force est  $F$ , et la hauteur  $h$  s'accroît de  $\Delta h$ , le travail élémentaire fourni sera, d'après la définition de l'énergie que j'ai donnée ci-dessus, égal à :  $F \Delta h = T g(h) \Delta h$ . Si donc la hauteur  $h$  augmente de  $h_1$  à  $h_2$ , la température étant maintenue constante et égale à  $T$ , le travail total fourni est :  $W_h = T \Sigma(h_1, h_2)$ , où  $\Sigma(h_1, h_2) \equiv \Sigma$  est une somme de termes élémentaires dont l'expression ne sera pas nécessaire.

Si maintenant le volume d'air est transféré au bain froid à la température  $T = 1$  sans changement de volume, puis ramené à son volume initial (donc de  $h_2$  à  $h_1$ ) on voit que le travail fourni est  $W_l = \Sigma(h_2, h_1) = -\Sigma(h_1, h_2)$ . Les  $\Sigma$  sont opposés puisqu'il s'agit des mêmes éléments pris en sens opposés. Le travail total est donc :  $W = W_h + W_l = (T-1)\Sigma$ .

### Le rendement maximal.

— La quantité de chaleur fournie par le bain chaud est égal à  $W_h$  plus la quantité de chaleur qui est nécessaire pour porter l'air de la température 1, acquise lorsqu'il était en contact avec le bain froid, à la température  $T$  du bain chaud. Toutefois, cette quantité de chaleur est fixe. Au contraire, le travail  $W_h$  devient en général aussi grand qu'on le désire en augmentant l'expansion  $h_2/h_1$ . Dans cette limite, la quantité de chaleur nécessaire au réchauffement de l'air devient négligeable, et le rendement de la machine, défini comme le rapport du travail fourni au cours d'un cycle complet et de la quantité de chaleur fournie par le bain chaud s'écrit :

$$\eta_C \approx \frac{W_h + W_l}{W_h} = \frac{T-1}{T} = 1 - \frac{1}{T}. \quad (2.1)$$

Cette expression donne le rendement maximal car le système considéré est presque réversible (le raisonnement est omis ici). Dans le cas de l'eau bouillante :  $T = 1.37$ , le rendement maximal absolu est :  $\eta_C = 1 - 1/1.37 \approx 0.26$ .

### Loi des gaz parfaits.

— Si les corpuscules sont indépendants les uns des autres, la force est proportionnelle au nombre de corpuscules. Reprenons le modèle précédent et divisons la quantité de gaz, donc le nombre de corpuscules, par  $h$ . Nous retrouvons ainsi le nombre initial de corpuscules et la force est divisée par  $h$ . Il en résulte que :  $F h = T$ . C'est la loi des gaz parfaits. Dans un modèle plus général il faudrait introduire une constante de proportionnalité.

— Tu as négligé dans ton raisonnement la quantité de chaleur nécessaire à l'échauffement de l'air. Est-ce une approximation réaliste ?

— Non ! C'est la raison pour laquelle, afin de répondre concrètement à votre question initiale, je dois vous présenter des réflexions un peu plus difficiles.

### La machine simple.

— J'ai l'ambition de vous montrer, Sire, que si vous chauffez progressivement l'air contenu dans le cube en le mettant en contact avec de l'eau bouillante et, le moment venu, vous le laissez se refroidir, la charge optimale est de un cinquième (c'est à dire deux tonnes). Et que, d'autre part, la consommation en bois est, pour le même travail fourni, dix fois plus grande que celle de la machine optimale décrite dans le paragraphe précédent.

Pour être plus précis, je suppose que le piston, supportant une charge  $w$  mais empêché de descendre au-dessous de un mètre, est mis en contact avec un bain chaud dont la température est  $T$ . Si  $T$  est suffisamment élevé, le piston s'élève jusqu'à une certaine hauteur maximale. La charge est alors déplacée latéralement. Puis on laisse la température et la hauteur du piston revenir à leurs valeurs initiales.

Mon raisonnement sera basé sur la loi des gaz parfaits établie ci-dessus, et la loi de l'énergie interne, considérée ici comme empirique.

### Le travail maximal.

— J'ai expliqué ci-dessus pourquoi le produit de la force  $F$  qu'exerce le piston sur une charge et de la hauteur  $h$  du piston est égal à la température  $T$ . A partir des définitions posées ci-dessus, nous avons bien entendu :  $T = 1$  lorsque  $h = 1$  et  $F = 1$ <sup>3</sup>.

Plaçons maintenant sur le piston une charge de poids  $w$ . Si la température passe de 1 (température de la glace fondante) à  $T = 1.37$  (température de l'eau bouillante), la hauteur du piston passe de 1 à  $h$ , avec :  $(1 + w)h = T$ . Le travail utile  $W$  est le produit de la charge  $w$  par l'élévation  $h - 1$  (Le déplacement de l'air au-dessus du piston ne peut pas être considéré comme un travail utile). Nous avons donc :

$$W = w(h - 1) = w \left( \frac{T}{1 + w} - 1 \right). \quad (2.2)$$

Il est facile de voir que le travail donné par cette formule est maximal lorsque  $w = \sqrt{T} - 1 = \sqrt{1.37} - 1 \approx 0.17$  dans le cas présent.

Je vous conseille donc de placer sur le piston des charges voisines de 0.17 (soit 1.7 tonnes). Cette charge sera soulevée au cours de l'opération de  $h - 1 = 0.16$  mètres. Le travail effectué vaudra :  $W = w(h - 1) = (\sqrt{T} - 1)^2 \approx 0.027$  dans nos unités.

### La consommation minimale.

— Toutefois, votre objectif, Sire, n'est pas nécessairement d'obtenir le travail maximal en une seule opération, mais plutôt d'obtenir la consommation minimale de bois pour un travail total donné. Le plus souvent la charge pourra être scindée en éléments plus

---

3. Tant que les corpuscules constituant le gaz conservent leur intégrité, cette formule est valable à des températures arbitrairement grandes. Toutefois il est concevable qu'à très hautes températures les corpuscules se scindent en deux, auquel cas le nombre de corpuscules serait doublé. La force serait alors doublée. Ces complications n'apparaissent pas pour les situations dont nous traitons.

petits, et l'opération de levage pourra être répétée. Je défini la «consommation» comme le rapport de l'énergie de chauffage et du travail fourni. C'est l'inverse du rendement. Concernant l'énergie de chauffage, je note que l'échauffement d'un mètre cube d'air dans les conditions standard d'une température 1 à une température  $T$  peut, certes, être obtenu par la combustion du bois, mais on peut également l'obtenir en laissant tomber un certain poids d'une certaine hauteur dans le bain chaud. La chute de ce poids définit l'énergie équivalente à la chaleur apportée par la combustion du bois. Il nous faut donc connaître l'énergie dite «interne»,  $U(T)$  d'un mètre cube d'air, initialement à la pression standard, à une température donnée  $T$ .

J'utilise la loi empirique de l'énergie interne  $U$  suivante : A condition que  $T$  ne soit pas trop grand :  $U = aT \equiv d\alpha T$  avec  $\alpha = 5$  et  $d \approx 0.46$ , soit  $a = 2.3$ . La raison pour laquelle j'écris la constante de proportionnalité  $a$  comme le produit de deux nombres apparaîtra plus tard ; on verra que  $\alpha$  est le nombre de degrés de liberté du corpuscule.<sup>4</sup>

L'énergie thermique qu'il faut fournir est la somme du travail  $(1+w)(h-1)$  (car le piston est soumis à la force de l'atmosphère égale à 1 et à la charge  $w$ ) et de la quantité de chaleur  $a(T-1)$  nécessaire pour élever la température de l'air de 1 à  $T$ . La consommation est donc :

$$C(w) \equiv \frac{(1 + \frac{1}{w})W + a(T-1)}{W} = 1 + \frac{1}{w} + \frac{a(T-1)}{W}; \quad W = w \left( \frac{T}{1+w} - 1 \right) \quad (2.3)$$

En remplaçant dans la formule ci dessus  $T$  par 1.37 et  $a$  par 2.3, on constate que la consommation minimale est :  $C \approx 36$ . On l'obtient pour une valeur de  $w$  légèrement plus grande que celle qui donne le travail utile maximal. Le diagramme hauteur-température est représenté sur la figure 2.1.

Notons que, une fois la charge retirée et la température étant revenue à sa valeur initiale ( $T=1$ ), le piston pourrait fournir un travail supplémentaire en revenant à sa hauteur initiale de un mètre. Dans le dispositif décrit ci-dessus ce travail est perdu.

Nous en concluons que la consommation de la machine simple traitée ici ( $C=36$ ) est dix fois supérieure à celle d'une machine optimale :  $C_{min} = 3.7$ . Des mécanismes plus compliqués sont toutefois nécessaires pour obtenir ce minimum absolu.

### La loi de l'énergie interne peut-elle être obtenue à partir de la seule notion de corpuscule ?

— Les informations que tu viens de me communiquer sont sans doute fort utiles, dit le roi. Toutefois, elles reposent en partie sur des données empiriques, c'est-à-dire des mesures. Certes, elles constituent un progrès car elles permettent de prédire des résultats utiles à partir d'un nombre réduit de mesures. Je comprend également qu'elles permettent d'interpoler entre les valeurs mesurées avec une certaine confiance. L'extrapolation à des

---

4. Les valeurs disponibles dans la littérature moderne sont les suivantes. La masse d'un mètre cube d'air sec dans les conditions standards est de 1.2 kilogramme. La quantité de chaleur nécessaire pour élever d'un kelvin la température d'un kilogramme d'air à volume constant est 710 joules. La température de la glace fondante est approximativement 273 kelvins. On en déduit que la valeur de  $a$  est :  $a = 710 \times 1.2 \times 273 / 100000 \approx 2.3$  dans nos unités, car une atmosphère égale 100 000 newtons.

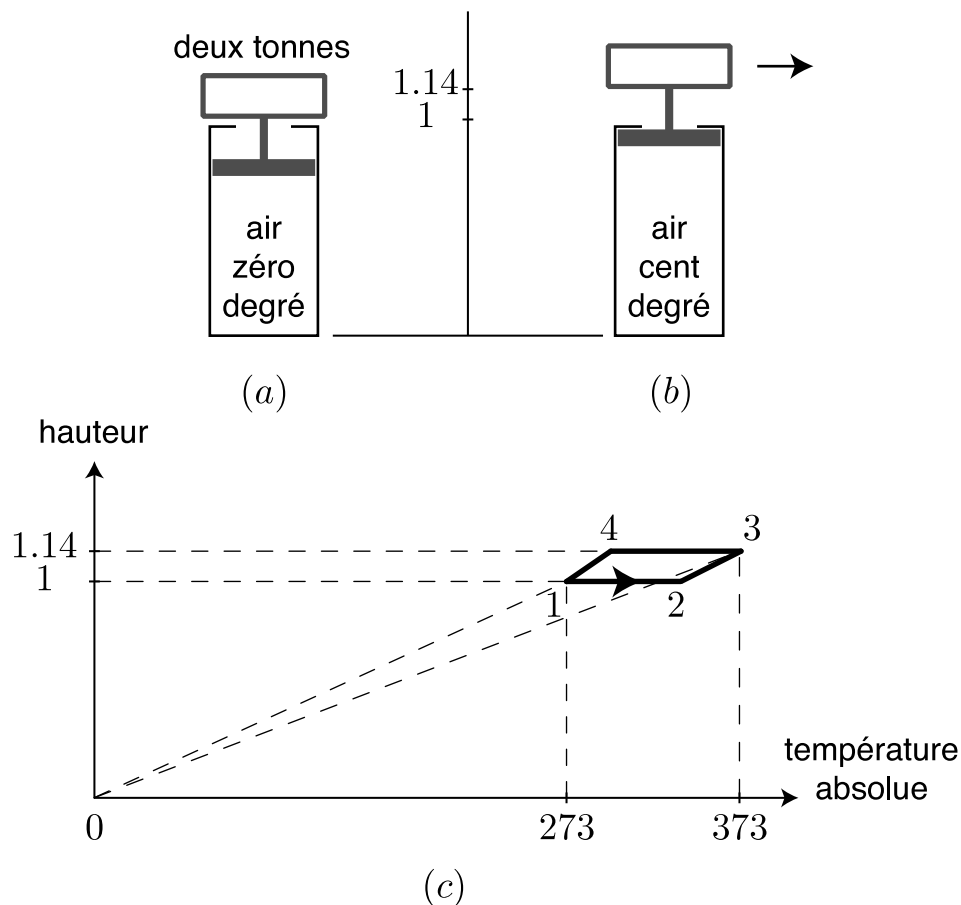


FIGURE 2.1 – Cette figure décrit une machine simple comprenant un cylindre et un piston dont la hauteur par rapport au fond du cylindre est notée  $h$ . En (a) on a représenté le cylindre avec une charge de 2 tonnes appliquée au piston. La température est de 0 degré et  $h=1$  mètre. En (b), la température atteint 100 degrés centigrades et la charge, soulevée à 1.14 mètres, est retirée latéralement. Le piston est empêché de monter plus haut. Le diagramme en (c) représente la variation de hauteur  $h$  du piston en fonction de la température absolue  $T$  de l'air. Ce diagramme comporte deux isochores et deux isobares. Pour des raisons de commodité graphique nous avons supposé l'axe du cylindre vertical. L'orientation du cylindre est en fait sans importance tant que sa hauteur est petite en comparaison de l'«épaisseur» de l'atmosphère.

valeurs très supérieures ou très inférieures à celles qui ont été effectivement observées est par contre douteuse. Tu as toi-même mentionné le fait que des difficultés pouvaient apparaître à des températures très élevées. Peux-tu obtenir des lois plus sûres à partir des notions de corpuscules et de vide que tu as introduites en philosophie ?

— Oui, Sire, c'est possible jusqu'à un certain point. Naturellement ma mathématique ne peut pas savoir quelles unités nous avons choisies. D'autre part, les considérations que je vais vous présenter nécessitent l'introduction de constantes universelles. Certaines mesures sont donc indispensables. Mais vous m'accorderez sans doute, après m'avoir écouté, que les notions corpusculaires que je vais vous présenter augmentent notre compréhension, quant à la nature des choses.

### Notions.

— On sait que lorsque deux corps, initialement à des températures différentes, sont mis en contact, le corps le plus chaud se refroidit tandis que le corps le plus froid se réchauffe. Au bout d'un certain temps les températures des deux corps sont égales. Mon modèle est celui de deux réservoirs, l'un contenant initialement des corpuscules (corps chaud), l'autre aucun (corps froid). Si l'on choisi au hasard un corpuscule et on le transfère dans l'autre réservoir, au bout d'un grand nombre d'échanges les deux réservoirs contiendront approximativement le même nombre de corpuscules, et auront donc la même température. C'est ainsi que je visualise la notion de température.

Nous avons dit plus haut que la pression qu'un volume d'air exerce sur les parois du récipient qui le contient augmente lorsque celui-ci est comprimé. Je visualise cette observation en considérant que l'air est constitué de corpuscules s'agitant en tous sens. C'est l'impact de ces corpuscules sur les parois qui est responsable de cette pression. L'objection suivante a été faite à ce modèle : la collision d'un corpuscule avec une paroi ne pouvant pas être parfaitement élastique, tous les corpuscules, entraînés par leur poids, devraient, au bout d'un certain temps, se trouver au fond du réservoir. Pour répondre à cette objection, je suppose que les parois effectuent des tremblements de faible amplitude, de telle sorte qu'en moyenne les corpuscules ne perdent pas d'énergie. Il ne sera pas nécessaire de préciser cette notion plus avant. Pour expliquer que la pression augmente avec la température, le volume restant constant, je suppose que l'énergie des corpuscules augmente avec la température.

Chacun sait que la densité de l'air décroît progressivement lorsque l'on gravit une montagne. Je conçois les corpuscules d'air comme partant du niveau du sol avec une certaine vitesse, atteignant une altitude maximale que j'appelle  $E$ , puis revenant rebondir sur le sol, et ainsi de suite<sup>5</sup>. Je rencontre ici une difficulté : selon ce modèle, la densité de l'air devrait *croître* avec l'altitude jusqu'à l'altitude  $E$ , et s'annuler brusquement au dessus, ce qui ne correspond pas du tout à ce qui est observé. Je suis donc conduit à supposer qu'il existe une certaine *distribution* d'énergie. Je montrerai que cette distribution doit être  $:2^{-E(f)/T}$ . Dans cette formule,  $f$  est l'«action» du mouvement, définie

---

5. Sur la planète Mercure, par exemple, la densité atmosphérique est si faible que les molécules entrent plus souvent en collision avec le sol qu'entre elles.

comme l'aire du mouvement  $z(t)$  du corpuscule. Cette distribution jouera un rôle fondamental dans la suite de mes raisonnements. Bien qu'elle ait été établie pour le problème particulier de la densité de l'air atmosphérique, je suppose qu'elle est générale.

Je retrouve ainsi la loi des gaz parfaits en considérant l'impact d'un corpuscule sur une paroi pour une énergie donnée, et en introduisant la distribution d'énergie mentionnée ci-dessus. Les corpuscules étant indépendants (je néglige leurs interactions mutuelles), la force est proportionnelle au nombre de corpuscules. Malheureusement les corpuscules sont trop petits pour que je puisse les observer et les compter. J'obtiens donc une loi de la forme :  $Fh = kT$ , où  $k$  est une constante obtenue à l'aide d'une mesure.

L'énergie interne  $U$  est la moyenne de  $E$ . J'écris le facteur précédent sous la forme  $2^{-E/T} \frac{df}{dE}$ . Pour obtenir ce dernier terme nous avons besoin de plus d'information concernant le mouvement d'un corpuscule. Cette information nous sera fournie par une généralisation heuristique de la loi du mouvement de la lumière. Dans la limite où  $E \ll 1$  le résultat est :  $U = \frac{T}{2}$  (par corpuscule et à un facteur constant près).

— Eh bien, conclu le roi, nous allons mettre tout cela en pratique. Je te demande toutefois de bien vouloir consigner les détails mathématiques de tes calculs, afin qu'ils puissent être utilisés par d'autres philosophes, compétents en mathématique.

## Chapitre 3

# Equilibre thermique

*Une expérience usuelle consiste à mettre en contact deux corps de volume constant ayant des températures différentes : les températures tendent à s'égaliser car les deux corps peuvent échanger de l'énergie. Nous considérons plus particulièrement deux milieux (a) et (b) constitués chacun de  $g$  sites. Dans le milieu (a) chaque site peut recevoir un corpuscule au plus. Dans le milieu (b) chaque site peut recevoir un nombre quelconque de corpuscules. Nous étudions l'équilibre entre ces deux corps à l'aide d'une simulation. Nous montrons en annexe que les résultats de la simulation peuvent être obtenus, premièrement en évaluant le nombre de configurations distinctes, ce qui donne la température  $T$  connaissant l'énergie  $U$ . Deuxièmement en utilisant le facteur de Boltzmann qui donne l'énergie  $U$  en fonction de la température  $T$ .*

### 3.1 Observations

Nous avons une notion intuitive de la température : le chaud, le froid. Une expérience commune est la suivante : Si l'on met en contact<sup>1</sup> deux pièces de cuivre ou d'autres matériaux portés à des températures différentes on observe après un certain temps que les deux pièces ont approximativement la même température, intermédiaire entre les températures initiales (loi N°0 : équilibre thermique). Cette loi est exprimée souvent par une relation de transitivité : si A est en équilibre avec B, et B avec C, alors A est en équilibre avec C. Le phénomène inverse ne se produit jamais spontanément : les contacts thermiques sont irréversibles. Dans les conditions d'évolution lente considérées dans le présent texte et en l'absence de frottements, les contacts thermiques entre deux corps ayant des températures notablement différentes constituent la seule source d'irréversibilité. Celle-ci est la cause fondamentale d'une perte de rendement.

---

1. Il y a contact thermique lorsque les deux pièces sont assez proches l'une de l'autre pour que des ondes sonores (pour un isolant tel que l'oxyde de béryllium) ou des influences électriques (pour un conducteur tel que le cuivre) puissent être transmises de l'une à l'autre. Il peut s'agir aussi de la transmission de lumière incohérente. Dans ce dernier cas, l'équilibre se produit même si les deux pièces sont séparées à condition que l'ensemble soit isolé.

### 3.2 Simulation pour deux milieux identiques

On peut donner un modèle plausible du contact thermique en utilisant la notion de corpuscule. Dans ce modèle [30] nous considérons deux chiens. L'un d'eux porte  $N$  puces, l'autre n'en porte pas (une puce représente un corpuscule). On choisit une puce au hasard et on lui enjoint de sauter sur *l'autre* chien. Cet ordre est répété un grand nombre de fois. Dans ces conditions, on observe au bout d'un certain temps que les deux chiens portent à peu près le même nombre de puces. Si l'on suppose que dans ce modèle la température augmente avec le nombre de puces, on voit que deux objets ayant initialement des températures inégales atteignent au bout d'un certain temps des températures égales, conformément à l'expérience.

Quelques précisions doivent être apportées à ce qui vient d'être dit. En premier lieu, le nombre de puces sur chaque chien sera rarement égal à  $N/2$  car des fluctuations autour de cette valeur se perpétuent. En second lieu il est concevable qu'au bout d'un temps très long les conditions initiales soient retrouvées, toutes les puces se trouvant à nouveau sur le premier chien. Ce temps cependant est de l'ordre de  $2^N$ . Il est si grand qu'on peut le considérer comme infini. L'irréversibilité mentionnée plus haut s'applique seulement aux objets de grande taille.

D'un point de vue plus physique, il faut noter que dans le présent modèle les deux chiens se trouvent à la même altitude. Comme on néglige l'effort que les puces doivent fournir pour passer d'un chien à l'autre, l'énergie est constante. Nous considérons ultérieurement le cas plus général où les deux chiens se trouvent à des altitudes différentes et nous en déduisons le principe de Carnot.

### 3.3 Simulation pour deux milieux différents

Considérons maintenant deux milieux différents comportant chacun  $g$  sites. Dans le milieu (a) les sites peuvent contenir au plus un corpuscule tandis que dans le milieu (b) les sites peuvent contenir un nombre quelconque de corpuscules.

Pour établir l'équilibre thermique entre le milieu (a) et le milieu (b) nous faisons la simulation suivante, considérant à titre d'exemple 100 sites de type (a) et 100 sites de type (b). On suppose qu'initialement chaque site contient un corpuscule. On choisit au hasard (avec une probabilité uniforme) un site parmi les sites qui ne sont pas vides et on lui retire un corpuscule. Puis, on choisit au hasard un site parmi les sites qui ne sont pas pleins et on lui ajoute un corpuscule. Ce processus est répété un grand nombre de fois jusqu'à ce qu'une situation de quasi-équilibre soit atteinte. Notons que dans cette simulation les milieux a et b sont situés à la même altitude (nous considérerons ultérieurement des corpuscules soumis à la gravité et situés à des altitudes différentes). Le nombre total de corpuscules est conservé, mais il y a transfert de corpuscules d'un milieu à l'autre.

On obtient ainsi, numériquement, un nombre moyen de corpuscules par site  $\nu_a \equiv n_a/100 = 0.383$  dans le milieu (a) et  $\nu_b \equiv n_b/100 = 1.617$  dans le milieu (b). La somme de ces deux nombres est évidemment égale à 2 puisque le nombre total de corpuscules

$n = n_a + n_b = 200$  n'a pas varié. Mais nous avons aussi avec une bonne précision la relation remarquable :

$$\frac{1}{\nu_a} - 1 = \frac{1}{\nu_b} + 1, \quad (3.1)$$

ce qui suggère que les deux membres de cette égalité sont liés à la température. Une curiosité est que la valeur exacte de  $\nu_b$  est le nombre d'or :  $(1 + \sqrt{5})/2$ .

Cette simulation indique en quoi consiste un équilibre thermique mais ne permet pas de préciser une température même en convenant d'un point arbitraire. Comme on le verra en annexe les deux membres de (3.1) sont égaux à :  $\exp(1/T)$  où  $T$  est la température définie précédemment.

D'après cette formule, nous avons :  $\nu_a = \nu_b = 0$  si  $T = 0$ , et  $\nu_a = 1/2$ ,  $\nu_b = \infty$  si  $T = \infty$ . Si  $\nu_a$  était supérieur à  $1/2$  la température serait négative, mais cela ne peut pas se produire ici. Cela peut se produire lorsque l'énergie du système ne peut pas dépasser une certaine valeur, mais ici l'occupation de l'ensemble des sites n'est pas bornée supérieurement.

### 3.4 Equilibre thermodynamique

Nous avons décrit ci-dessus l'équilibre thermique entre deux milieux de volume constant. Cet équilibre est décrit en thermodynamique en introduisant l'entropie, notée  $S$ , qui est additive et maximale à l'équilibre. Dans le cas présent on pose :  $dU = T dS$ , où  $U$  est l'énergie interne,  $T$  la température absolue. Comme l'énergie est conservée lors d'un contact thermique nous avons :  $dU_1 + dU_2 = 0$ , les indices 1 et 2 se référant aux deux milieux. Si l'entropie est maximale  $dS = dS_1 + dS_2 = 0 = dU_1/T_1 + dU_2/T_2$ , d'où il résulte que  $T_1 = T_2$ .

Si le volume  $V$  peut changer et la pression est  $P$ , la loi de conservation de l'énergie permet de généraliser cette relation qui devient :  $dU = T dS - P dV$  en raison du travail élémentaire  $dW = P dV$  effectué par le corps.

Un exemple d'application de ce résultat est celui d'un cylindre rigide isolé (donc de volume total et d'énergie totale constants) contenant un piston étanche de conductibilité thermique négligeable mais pouvant se déplacer librement suivant l'axe. Les indices 1 et 2 se référant aux deux parties du cylindre, nous avons :  $dV_1 + dV_2 = 0$  et  $dU_1 + dU_2 = 0$ . Par ailleurs la relation précédente appliquée aux deux sections est :  $dU_1 = T_1 dS_1 - P_1 dV_1$ ,  $dU_2 = T_2 dS_2 - P_2 dV_2$ . A l'équilibre on doit avoir :  $dS_1 + dS_2 = 0$ . En tenant compte des relations précédentes ceci implique que :  $T_1 = T_2$  (équilibre thermique) et  $P_1/T_1 = P_2/T_2$  d'où :  $P_1 = P_2$  (équilibre mécanique). Quand ces deux conditions sont satisfaites on dit qu'il y a «équilibre thermodynamique». Il peut paraître surprenant que l'équilibre thermique  $T_1 = T_2$  puisse être prédit bien que la conductibilité thermique du piston soit supposée nulle. Au niveau microscopique l'échange d'énergie entre les deux parties du cylindre s'effectue, une fois l'équilibre des pressions moyennes atteint, par de petits mouvements aléatoires du piston. Mais les lois de la thermodynamique classique ne prennent pas en compte explicitement de tels effets microscopiques [31].

## Chapitre 4

# Réservoirs de corpuscules

*La machine bi-therme particulière considérée dans ce chapitre consiste en deux réservoirs de corpuscules situés à des altitudes différentes. Si les nombres de corpuscules dans les deux réservoirs sont voisins la machine se comporte presque comme une machine optimale (c'est-à-dire réversible). Seule la notion d'énergie potentielle et la notion de poids moyen par site est employée ici.*

### 4.1 La machine bi-therme

Afin de permettre au lecteur de lire ce chapitre indépendamment de l'introduction, rappelons que la source d'énergie d'un moteur thermique est la quantité de chaleur fournie par un *bain* c'est à dire un corps de grand volume, constant, à une température  $T_h$ . Il faut déduire de cette quantité de chaleur celle qui est reçue par un bain similaire à une température  $T_l < T_h$ , les quantités de chaleur étant exprimées en terme d'énergie. La quantité d'énergie  $-Q$  fournie par le bain chaud est le travail qu'il faudrait lui fournir, par exemple par la chute d'un corps, pour maintenir sa température rigoureusement constante. Le transfert de chaleur entre le bain chaud et le bain froid est effectué à l'aide d'un *milieu de travail* alternativement en contact avec le bain chaud et avec le bain froid.

Le milieu de travail dont nous venons de parler est un corps dont les propriétés thermiques peuvent être modifiées en faisant varier un paramètre que nous appellons  $\epsilon$  (dans le cas d'un cylindre de hauteur  $h$  le paramètre  $\epsilon$  s'identifie à  $h$ ). Ce paramètre varie de  $\epsilon_1$  à  $\epsilon_2$  quand le milieu de travail est en contact avec le bain chaud, de  $\epsilon_2$  à  $\epsilon_3$  quand le milieu de travail est transféré du bain chaud au bain froid, de  $\epsilon_3$  à  $\epsilon_4$  quand le milieu de travail est en contact avec le bain chaud, et finalement de  $\epsilon_4$  à  $\epsilon_1$  quand le milieu de travail est transféré du bain froid au bain chaud, de telle sorte que l'on retrouve les conditions initiales après un cycle complet. En particulier le milieu de travail retrouve son énergie interne et son entropie initiale. C'est l'agent qui effectue ces changements de paramètre qui reçoit du travail (machine thermique) ou en fournit (pompe à chaleur).

Dans le cas particulier du cycle d'Otto le paramètre ne varie pas lorsque le milieu de travail est en contact avec un bain, c'est à dire :  $\epsilon_1 = \epsilon_2$  et  $\epsilon_3 = \epsilon_4$ . La machine que nous allons décrire, constituée de deux réservoirs de corpuscules, fonctionne sur un principe

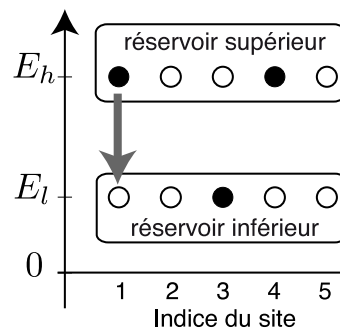


FIGURE 4.1 – Cette figure représente un modèle de machine thermique constitué de deux réservoirs de corpuscules, d’après [18]. Un cycle consiste à déplacer le site N°1 du réservoir supérieur au réservoir inférieur, et retour. Ce site peut être considéré comme le milieu de travail, les autres sites constituant le bain chaud (en haut) et le bain froid (en bas). Le travail est positif dans le cas de la figure mais il pourrait être négatif ou nul. Nous ne nous intéressons qu’au travail moyen, qui est positif dans le cas illustré car il y a plus de corpuscules en haut qu’en bas.

analogue à celui du cycle d’Otto. Le cycle est en général irréversible, mais dans certaines conditions limites il est presque réversible.

Dans notre modèle un bain est constitué de corpuscules soumis à la gravité et situés à une certaine hauteur,  $E$ , au-dessus du sol. Le niveau du sol par convention correspond à une énergie nulle.

## 4.2 Deux réservoirs de corpuscules

Le modèle de machine considéré consiste en deux réservoirs de corpuscules situés respectivement aux altitudes  $E_l$  et  $E_h > E_l$  dans le champ de gravité terrestre. Ce modèle ressemble à celui qui a été présenté précédemment pour illustrer la nature des contacts thermiques. Celui-ci consistait, rappelons-le, en deux chiens pouvant échanger des puces. Toutefois dans le cas présent les deux réservoirs (ou chiens) sont situés à des altitudes différentes de telle sorte que le passage d’un corpuscule (ou puce) d’un réservoir à l’autre implique un accroissement ou une réduction d’énergie. En outre, nous supposons que les corpuscules (ou puces) se trouvent nécessairement dans un site identifiable. L’introduction d’un nombre fixe de sites est nécessaire si l’on veut préciser la température du réservoir. En effet, on ne peut pas se contenter de dire de façon vague comme nous l’avons fait dans la section 3.2 que la température *augmente* avec le nombre de corpuscules.

Pour simplifier, nous supposons que chacun des deux réservoirs comporte le même nombre  $g$  de sites. Les sites d’un réservoir sont distinguables les uns des autres mais ils sont équivalents entre eux. Nous nous limitons au cas où les corpuscules ont des poids unités.

Dans le modèle considéré ici, chacun des  $g$  sites peut être occupé par un corpuscule au plus. S’il y a  $n$  corpuscules au total on pose :  $\nu \equiv \frac{n}{g}$ . Il est intuitif que le paramètre

$\nu$  représente le poids moyen d'un site. Nous nous limitons aux températures positives :  $\nu < 1/2$ . Considérant un site en particulier, la probabilité que ce site contienne un corpuscule est égale à  $\nu$ . Il en résulte que la probabilité que ce site ne contienne pas de corpuscule est  $1 - \nu$ , puisque la probabilité que le site contienne 0 ou 1 corpuscule est unité. L'occupation moyenne est donc bien :  $0 \times (1 - \nu) + 1 \times \nu = \nu$ .

Le réservoir du bas contient  $n_l$  corpuscules et le réservoir du haut en contient  $n_h$ , tous de poids unité. On pose donc :  $\nu_l \equiv \frac{n_l}{g}$ ,  $\nu_h \equiv \frac{n_h}{g}$ . Un cycle consiste à déplacer le site N°1 (milieu de travail) du réservoir du bas (bain froid) au réservoir du haut (bain chaud) et inversement, une fois l'équilibre thermique atteint. Nous avons supposé que ces déplacements portent sur le site N°1 comme le montre la figure, mais tous les sites sont ici équivalents.

### 4.3 Le modèle de machine thermique : travail et rendement

Si l'on se réfère à la description d'une machine thermique donnée en §4.1, les deux réservoirs mentionnés ci-dessus correspondent aux deux bains. Le site N°1 correspond au milieu de travail. Mais on peut dire de façon presque équivalente que les contenus des sites N°1 du réservoir supérieur et du réservoir inférieur sont *échangés*. Le site N°1 du réservoir supérieur contient un corpuscule avec une probabilité  $\nu_h$ . Si c'est le cas, ce corpuscule passe lors de son transfert d'une énergie  $E_h$  à une énergie  $E_l$ . Inversement le site N°1 du réservoir inférieur contient un corpuscule avec une probabilité  $\nu_l$ . Si c'est le cas, ce corpuscule passe lors de son transfert d'une énergie  $E_l$  à une énergie  $E_h$  [18].

Si un corpuscule est ajouté au réservoir du bas son énergie est augmentée de  $E_l$  et si un corpuscule est ajouté au réservoir du haut son énergie est augmentée de  $E_h$ . Lors de l'échange mentionné ci-dessus, les énergies moyennes ajoutées aux deux réservoirs sont donc respectivement :

$$\begin{aligned} Q_l &= E_l(\nu_h - \nu_l) \\ Q_h &= E_h(\nu_l - \nu_h). \end{aligned} \quad (4.1)$$

En effet, le site du réservoir du bas reçoit en moyenne  $\nu_h$  corpuscules, mais en perd en moyenne  $\nu_l$ . Pour le réservoir du haut la situation est inversée.

Le travail moyen  $W$  fourni par le dispositif est donné par la loi de conservation de l'énergie :  $Q_l + Q_h + W = 0$ . Il en résulte que le travail moyen et le rendement  $\eta$  sont donnés par les relations suivantes :

$$\begin{aligned} W &= -Q_l - Q_h = (E_h - E_l)(\nu_h - \nu_l) \\ \eta &\equiv \frac{W}{-Q_h} = 1 - \frac{E_l}{E_h}. \end{aligned} \quad (4.2)$$

Pour être concret on pourrait attribuer une charge électrique aux corpuscules et les soumettre à un champ électrique (au lieu d'un champ de gravité). Les échanges d'énergie se feraient alors avec la source qui génère le champ électrique, par exemple un condensateur.

Les formules qui précèdent paraissent avoir peu de rapport avec la température ou le feu. La relation qui existe entre les considérations de mécanique pure présentées ci-dessus et les effets thermiques est expliquée dans les sections suivantes. Pour la clarté nous répétons en partie les considérations présentées dans le chapitre sur l'équilibre thermique.

## 4.4 Introduction de la température

Nous définissons l'entropie  $S$  d'un réservoir comme étant égale au nombre de sites  $g$  multiplié par une certaine fonction  $s(\nu)$  :  $S(n) = g s(\nu)$ , où comme précédemment  $\nu$  représente le poids moyen d'un site. Le fait que  $S$  soit proportionnel à  $g$  implique que cette quantité est extensive : si  $g$  et  $n$  sont multipliés par 2 par exemple (laissant donc  $\nu$  inchangé) l'entropie  $S$  est multipliée par 2 également. Mise à part l'extensivité, nous ne faisons aucune supposition concernant l'entropie.

Considérons maintenant un réservoir quelconque situé à la hauteur  $E$  et contenant  $n = \nu g$  corpuscules. Ajoutons un corpuscule. La température  $T$  est définie comme l'augmentation d'énergie divisée par l'augmentation d'entropie. L'énergie est accrue de  $E$  puisque le poids d'un corpuscule est unité, et l'entropie est accrue de  $\Delta S = S(n+1) - S(n) = g \left( s\left(\frac{n+1}{g}\right) - s\left(\frac{n}{g}\right) \right) \approx \frac{ds}{d\nu}$  si  $n$  et  $g$  sont grands. Il en résulte que :

$$T \equiv \frac{E}{\Delta S} = \frac{E}{ds/d\nu} \equiv \frac{E}{s'(\nu)}. \quad (4.3)$$

On voit que  $T$  ne dépend pas de  $g$  : C'est une grandeur intensive. La température du milieu considéré telle que nous venons de la définir dépend du choix de la fonction  $s(\nu)$  qui est jusqu'ici arbitraire (en dehors de quelques propriétés générales). C'est la notion d'équilibre thermique avec un milieu de référence qui détermine cette fonction : Lorsque deux corps peuvent échanger de l'énergie de façon incohérente ils ont la même température et n'échangent pas d'énergie en moyenne.

Les expressions (4.2) du travail et du rendement peuvent être écrites maintenant sous les formes suivantes :

$$\begin{aligned} W &= -T_l \Delta S_l - T_h \Delta S_h, & \Delta S_l &= (\nu_h - \nu_l) s'(\nu_l), & \Delta S_h &= (\nu_l - \nu_h) s'(\nu_h) \\ \eta &= 1 - \frac{T_l s'(\nu_l)}{T_h s'(\nu_h)}. \end{aligned} \quad (4.4)$$

Nous avons introduit ci-dessus les accroissements d'entropie  $\Delta S_l$ ,  $\Delta S_h$  des deux réservoirs résultant de l'échange du contenu d'un site du réservoir du haut et d'un site du réservoir du bas.

Dans le cas particulier où  $\nu_l$  est voisin de  $\nu_h$ , nous avons :  $s'(\nu_l) \approx s'(\nu_h)$ , et donc :  $\Delta S_l + \Delta S_h \approx 0$  : l'entropie totale créée est presque nulle. Nous posons :  $\Delta S \equiv \Delta S_l \approx -\Delta S_h$  : la machine est presque réversible. Les expressions du travail et du rendement

données en (4.4) deviennent :

$$\begin{aligned} W &= (T_h - T_l)\Delta S \\ \eta &= 1 - \frac{T_l}{T_h}. \end{aligned} \quad (4.5)$$

Ces formules sont celles qui ont été données par Carnot. On voit qu'elles ne dépendent pas de la fonction entropie choisie.

Nous considérons ci-dessous le cas particulier où les sites ne peuvent être occupés que par un corpuscule au plus, déjà traité dans le chapitre sur l'équilibre thermique mais présenté ici un peu différemment.

## 4.5 Un corpuscule au plus par site

Pour obtenir la valeur numérique du travail fourni d'après (4.5) il faut connaître les valeurs de  $\nu_l$ ,  $\nu_h$  et la fonction  $s'(\nu) \equiv ds(\nu)/d\nu$ , les températures étant supposées connues. Rappelons que si un site ne peut être occupé que par un corpuscule au plus :

$$\nu = \frac{1}{1 + \exp(\beta E)}, \quad (4.6)$$

où  $\beta \equiv 1/T$ . A une constante additive près l'entropie est :

$$S = g s(\nu), \quad s(\nu) \equiv -(1 - \nu) \ln(1 - \nu) - \nu \ln(\nu) \quad (4.7)$$

car en effet :

$$\beta E = \frac{ds(\nu)}{d\nu} = \ln\left(\frac{1}{\nu} - 1\right) \quad (4.8)$$

qui coïncide avec (4.6).

A titre d'exemple considérons des réservoirs aux altitudes  $E_l = 1$  et  $E_h = 2$ . Si  $T_l = 1$  et  $T_h = 2$  nous obtenons à partir de (4.6) les valeurs  $\nu_l = \nu_h = 1/(1 + e)$  avec  $e \approx 2.718$ . Dans ce cas limite le rendement est optimal et égal à  $1/2$ . Pour obtenir un travail non nul il faut cependant que  $\nu_l$ ,  $\nu_h$  ne soient pas rigoureusement égaux.

## Chapitre 5

# Réservoirs multiples : cycle de Carnot

Le modèle de machine thermique constitué de deux réservoirs de corpuscules traité au chapitre précédent est ici généralisé à un grand nombre de réservoirs dans le but de décrire exactement le cycle de Carnot. Nous supposons que le système comporte  $m$  sous-réservoirs inférieurs aux altitudes  $\epsilon_{l,1}, \epsilon_{l,2}, \dots, \epsilon_{l,m}$ , avec des poids moyens :  $\nu_{l,1}, \nu_{l,2}, \dots, \nu_{l,m}$ , respectivement. De même nous supposons qu'il y a  $m$  sous-réservoirs supérieurs aux altitudes  $\epsilon_{h,1}, \epsilon_{h,2}, \dots, \epsilon_{h,m}$ , avec des poids moyens  $\nu_{h,1}, \nu_{h,2}, \dots, \nu_{h,m}$ , respectivement. Un cycle consiste à transférer le contenu d'un site au site suivant.

### 5.1 Transfert des contenus des sous-réservoirs

Par l'échange des contenus du sous-réservoir  $l_1$  vers le sous-réservoir  $l_2$ , du sous-réservoir  $l_2$  vers le sous-réservoir  $l_3$ , et ainsi de suite comme le montre la figure 5.1b, nous obtenons :

$$\begin{aligned} Q_l &= \epsilon_{l1}\nu_{hm} + \sum_{i=1}^{m-1} \nu_{li}(\epsilon_{l,i+1} - \epsilon_{l,i}) - \epsilon_{lm}\nu_{lm} \\ Q_h &= \epsilon_{h1}\nu_{lm} + \sum_{i=1}^{m-1} \nu_{hi}(\epsilon_{h,i+1} - \epsilon_{h,i}) - \epsilon_{hm}\nu_{hm}. \end{aligned} \quad (5.1)$$

En considérant particulièrement le cas où  $m = 2$  et en se référant à la figure 5.1 en b), il est facile de voir (en réarrangeant les quatre termes de son expression donnée ci-dessus) que  $-Q_h$  est l'aire située en dessous du créneau du haut (somme des aires de deux rectangles).  $Q_l$  est l'aire située en dessous du créneau du bas. Le travail  $W = -Q_h - Q_l$  est donc l'aire du cycle représenté sur la figure.

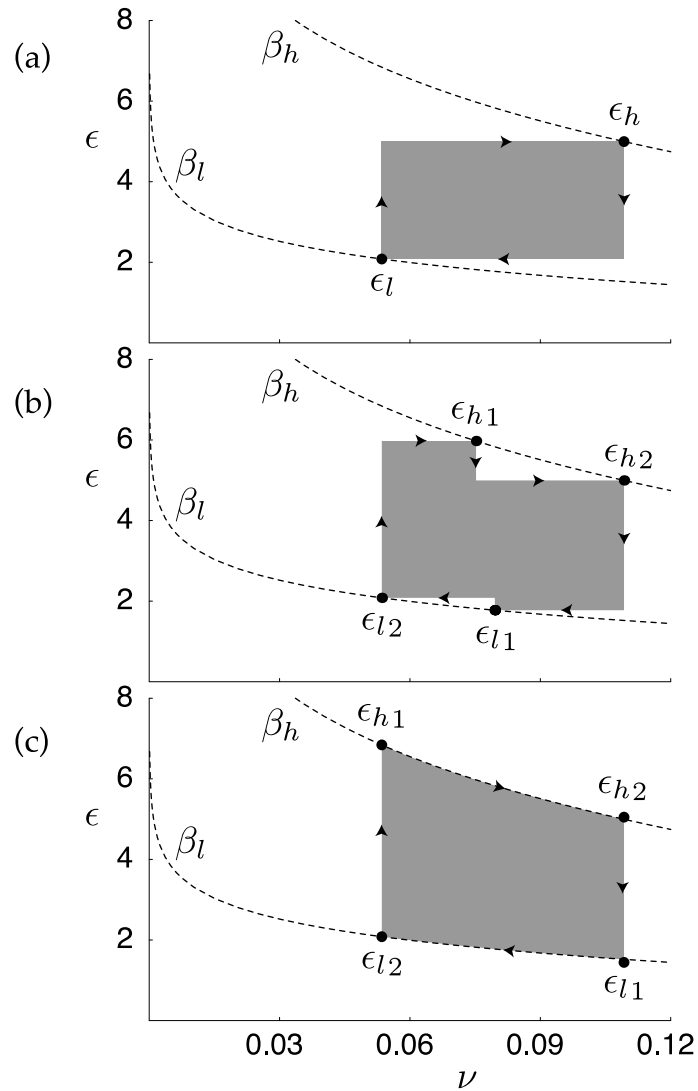


FIGURE 5.1 – Généralisation du modèle précédent à deux réservoirs (cycle d’Otto). La figure représente l’altitude d’un réservoir en fonction de son poids moyen  $\nu$ . L’altitude est liée à la température de telle sorte que l’aire des courbes représentées correspond au travail fourni, comme c’est le cas dans le diagramme usuel : température-entropie. Nous avons représenté en a) le cycle d’Otto, en b) le cycle dans le cas de deux réservoirs supérieurs et de deux réservoirs inférieurs, et en c) le cycle de Carnot.

## 5.2 Relation : poids-altitude

Nous avons considéré ci-dessus des poids arbitraires des sous-réservoirs. Nous limitons maintenant la généralité en supposant que les poids dépendent des altitudes des réservoirs suivant des lois de la forme :

$$\nu_i = \nu(\beta\epsilon_i). \quad (5.2)$$

où  $\nu(\cdot)$  est une fonction qui sera précisée ultérieurement, et  $\epsilon_i$ , avec  $i = 1, 2 \dots m$  représente comme précédemment l'altitude des sous-réservoirs inférieurs ou supérieurs. Le paramètre  $\beta$  a la valeur  $\beta_l$  pour les sous-réservoirs inférieurs et la valeur  $\beta_h$  pour les sous-réservoirs supérieurs. Dans ces conditions les énergies des réservoirs deviennent :

$$\begin{aligned} \beta_l Q_l &= L_1 \nu(H_m) + \sum_{i=1}^{m-1} \nu(L_i)(L_{i+1} - L_i) - L_m \nu(L_m) \\ \beta_h Q_h &= H_1 \nu(L_m) + \sum_{i=1}^{m-1} \nu(H_i)(H_{i+1} - H_i) - H_m \nu(H_m). \end{aligned} \quad (5.3)$$

où nous avons défini :  $L_i \equiv \beta_l \epsilon_{l,i}$  et  $H_i \equiv \beta_h \epsilon_{h,i}$ ,  $i = 1, 2 \dots m$ .

Si les valeurs des  $\epsilon$  varient peu d'un sous-réservoir inférieur au suivant, et de même varient peu d'un sous-réservoir supérieur au suivant, les sommes peuvent être remplacées par des intégrales et nous obtenons :

$$\begin{aligned} \beta_l Q_l &= s(L_1, H_m) - s(L_m) \\ \beta_h Q_h &= s(H_1, L_m) - s(H_m), \end{aligned} \quad (5.4)$$

où :

$$s(x, y) \equiv x \nu(y) - \int^x \nu(x') dx', \quad s(x) \equiv s(x, x), \quad (5.5)$$

la limite inférieure de l'intégrale étant sans importance.

## 5.3 Rendement maximal

Quand  $L_1 = H_m \equiv L$  et  $H_1 = L_m \equiv H$  le rendement maximal est atteint. En effet nous avons alors :  $\beta_l Q_l + \beta_h Q_h = 0$ . En posant  $\beta_l \equiv 1/T_l$ ,  $\beta_h \equiv 1/T_h$ , le rendement est :

$$\eta_C = 1 - \frac{T_l}{T_h}. \quad (5.6)$$

Le travail fourni est alors le produit de la différence de température  $T$  et du changement de  $s$ , c'est-à-dire :

$$W = (T_h - T_l)(s(H) - s(L)). \quad (5.7)$$

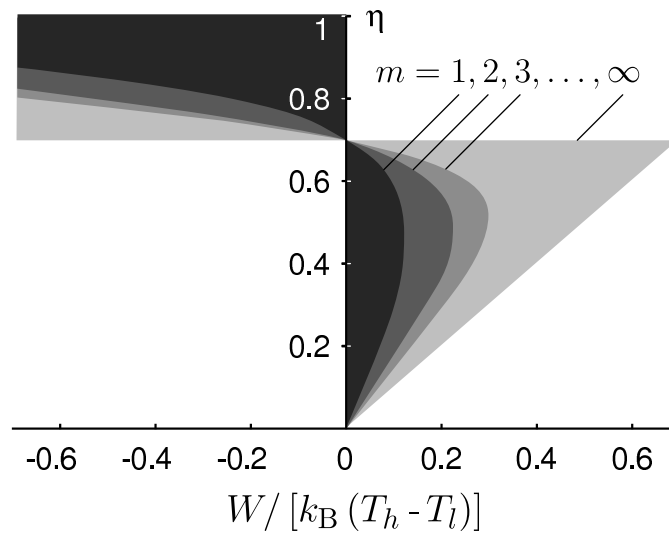


FIGURE 5.2 – Rendement  $\eta$  d'un cycle à réservoirs multiples en fonction du travail  $W$  pour différents nombres  $m$  de sous-réservoirs inférieurs et supérieurs.  $m = 1$  correspond au cycle d'Otto et  $m = \infty$  correspond au cycle de Carnot. Nous avons introduit la constante de Boltzmann  $k_B$ .

Notons que :  $\Delta S \equiv s(H) - s(L)$  est l'entropie transférée du bain chaud au milieu de travail, puis du milieu de travail au bain froid, de telle sorte que l'entropie perdue par le bain chaud est intégralement transmise au bain froid. Il y a conservation de l'entropie totale, le système étant réversible.

Pour conclure : le système mécanique considéré présentement a exactement les mêmes propriétés qu'une machine thermique réversible.

## Chapitre 6

# Gaz parfaits

*Daniel Bernoulli a adopté le point de vue selon lequel un gaz est constitué de corpuscules, et suggéré en 1738 l'idée selon laquelle la pression exercée par ce gaz sur les parois du récipient qui le contient est due à l'impact des corpuscules. L'indépendance de ces corpuscules et le fait qu'un corpuscule occupe une position précise à un instant précis constituent des concepts importants. Bien que la gravité (action de la pesanteur) n'intervienne pas dans la loi des gaz parfaits, nous considérons le mouvement de corpuscules suivant l'axe vertical  $z$  dans le champ de gravité terrestre afin de définir plus concrètement ce que l'on appelle : «énergie» d'un corpuscule. Après avoir obtenu une expression du produit  $Fh$  de la force  $F$  et de la hauteur  $h$  d'un cylindre rempli de gaz pour une énergie donnée, nous en déduisons l'expression de  $\langle F \rangle h$  en fonction de la température, où :  $\langle F \rangle$  représente la force moyenne. Il en résulte la loi des gaz parfaits :  $\langle F \rangle h = T$ , valable à toute température  $T$  (sauf aux températures très basses pour lesquelles la notion de corpuscule n'est pas applicable, voir l'annexe F). La température  $T$ , dite «absolue», est introduite de façon abstraite. Mais la loi des gaz parfaits nous donne la possibilité de la mesurer, à condition de disposer d'un gaz presque idéal, tel l'hélium à basse pression.*

### 6.1 Notion d'impact

Considérons en premier lieu un corpuscule de poids unité se déplaçant selon l'axe vertical et rebondissant sans amortissement sur le plateau d'une balance. Le poids moyen mesuré par la balance est unité quelque soit la hauteur maximale atteinte par le corpuscule, autrement dit quelque soit son énergie, notée  $E$ . On peut définir l'«impact»  $i$  du corpuscule sur le plateau comme étant égal à la période  $\tau(E)$  du mouvement. En effet le poids moyen est égal à l'impact  $i$  multiplié par le nombre d'impacts par unité de temps, donc à  $i/\tau$ . Il s'en suit que :  $i = \tau$  puisque nous avons choisi un poids unité<sup>1</sup>.

---

1. L'impact  $i$  a la dimension du produit d'une masse et d'une vitesse que l'on appelle «changement de quantité de mouvement». En mécanique classique l'impact est le double de la quantité de mouvement du corpuscule incident et est proportionnel à sa vitesse. Nous ne supposons pas ici que la quantité de mouvement après un rebond soit nécessairement égale et opposée à la quantité de mouvement avant le

## 6.2 Force

Introduisons maintenant un plan en  $z = h$ . Le corpuscule effectue des rebonds successifs sur le sol en  $z = 0$  et sur le plan en  $z = h$ , voir la figure 7.2 en section 7.2. Nous avons vu que les impacts sont proportionnels aux périodes temporelles. La force moyenne  $F(0)$  exercée par le corpuscule sur le plan inférieur est le rapport de l'impact  $\tau(E)$  sur ce plan et de la période (temporelle) du mouvement. Cette dernière, par examen du zig-zag de la figure 7.2, est égale à  $\tau(E) - \tau(E - h)$  si  $h < E$  et  $\tau(E)$  si  $h \geq E$ . Il en résulte que  $F(0) = 1$  si  $h \geq E$ , et :

$$F(0) = \frac{\tau(E)}{\tau(E) - \tau(E - h)} \implies F h \approx \frac{\tau(E)}{\tau'(E)} \quad \tau'(E) \equiv \frac{d\tau(E)}{dE} \quad (6.1)$$

où  $F \equiv F(0)$ , si  $h < E$ . Le dénominateur a été développé au premier ordre en  $h \ll E$ .<sup>2</sup>

Toutefois, une température  $T$  correspond, non pas à une énergie fixe, mais à une *distribution* d'énergie. Il conviendra donc d'effectuer une moyenne. C'est ce qui motive les sections suivantes, où nous définissons les notions d'action et de moyennes.

## 6.3 Action

Considérons en premier lieu le mouvement partant de  $z = 0$  et revenant à  $z = 0$  après être passé par un maximum en  $z = E$ . Ce mouvement correspond à un cycle, qui pourrait se répéter indéfiniment par rebond sur le sol. C'est la situation considérée dans l'annexe B. Nous définissons dans ce cas l'action  $f(E)$  du mouvement comme l'aire d'une période :  $z = z(t, E)$ . Comme la gravité est indépendante de  $z$  selon le modèle de la terre plate (d'aire arbitrairement grande), les mouvements  $z(t)$  pour différentes valeurs de  $E$  se déduisent les uns des autres par une simple translation verticale. Nous avons donc :

$$\frac{df(E)}{dE} = \tau(E), \quad (6.2)$$

où  $\tau(E)$  représente comme précédemment la durée d'un cycle du mouvement. L'expression de  $\tau(E)$  ne sera pas nécessaire dans le présent chapitre. Mais il est important que  $\tau(0) = 0$ .

Dans le cas présent, le corpuscule effectue des rebonds, non seulement sur le sol comme ci-dessus, mais aussi sur une surface située à l'altitude  $z = h$ , comme le montre la figure 7.2. L'action est alors le produit de  $h$  et de l'impact  $i = \tau(E)$ .<sup>3</sup> Cette expression de  $f$  est utilisée dans la section suivante pour calculer la force moyenne.

rebond. D'autre part nous ne faisons pas l'approximation des vitesses faibles.

2. La méthode traditionnelle permettant d'obtenir la force  $F$  consiste à montrer en premier lieu que :  $F h = p v$ . En effet, l'impact d'un corpuscule sur le piston est égal à  $2p$  et le nombre d'impacts par unité de temps est  $v/2h$ ,  $p$  étant la quantité de mouvement et  $v$  la vitesse du corpuscule. A partir de :  $(1 + E)^2 - p^2 = 1$  et :  $v = dE/dp$  nous obtenons :  $F h = (E^2 + 2E)/(E + 1) = \tau/\tau'$ , avec  $\tau = 2\sqrt{E^2 + 2E}$  et  $\tau' = d\tau/dE$ . Cette expression coïncide avec celle qui a été obtenue directement dans le texte en (6.1).

3. Dans la formulation traditionnelle on dit que l'action est l'aire d'un cycle dans l'espace «des phases»  $z, p$ , où  $p$  représente la quantité de mouvement. Il s'agit d'une trajectoire rectangulaire de hauteur  $h$  et de largeur  $2p = i = \tau(E)$ .

## 6.4 Moyenne

Il existe dans un gaz une distribution d'énergies. Cette distribution est définie par le facteur de Boltzmann, dont la validité est discutée en annexe B. Ce que nous appelons la «moyenne», notée :  $\langle g(E) \rangle$ , d'une fonction quelconque  $g(E)$ , est obtenue en introduisant la pondération :  $\exp(-\beta E) \frac{df}{dE}$ , où  $f(E)$  est l'action du mouvement et  $\beta \equiv 1/T$ , ce qui revient à introduire une température dite «absolue»  $T$  de façon formelle.

Dans le cas présent où la gravité joue un rôle négligeable ( $h \ll E$ ) le mouvement est rectangulaire dans l'espace dit «des phases», avec une hauteur  $h$  et une largeur  $i = \tau$ . L'action  $f$  est l'aire  $h\tau$  de ce mouvement, comme nous l'avons vu dans la section précédente. Donc :  $f = h\tau(E)$  et  $\frac{df}{dE} = h\tau'(E)$ . Les moyennes sont par conséquent définies ainsi :

$$\langle g(E) \rangle = \frac{\int_0^\infty dE g(E) \exp(-\beta E) \tau'(E)}{\int_0^\infty dE \exp(-\beta E) \tau'(E)} \quad (6.3)$$

$$= \frac{\int_0^\infty dE g(E) \exp(-\beta E) \tau'(E)}{\int_0^\infty dE \beta \exp(-\beta E) \tau(E)} \quad (6.4)$$

$$= \frac{\int_0^\infty dE (g - g'/\beta) \exp(-\beta E) \tau(E)}{\int_0^\infty dE \exp(-\beta E) \tau(E)}, \quad (6.5)$$

où  $g'$  est la dérivée de  $g$ . La première forme résulte de la définition d'une moyenne telle que nous venons de la donner. La deuxième forme, qui résulte d'une intégration par parties du dénominateur de la précédente (rappelons que :  $\tau(0) = 0$ ), sera utilisée dans le présent chapitre. La troisième forme, obtenue en intégrant par parties également le numérateur, sera utilisée au chapitre 7.

## 6.5 Loi des gaz parfaits

Calculant la moyenne de  $Fh$  donnée en (6.1) à l'aide de (6.4) nous notons que  $\tau'(E)$  s'élimine. Nous avons donc simplement :

$$\langle F \rangle h = \left\langle \frac{\tau}{\tau'} \right\rangle = \frac{1}{\beta} = T. \quad (6.6)$$

qui est la loi des gaz parfaits. Nous avons introduit pour des raisons de clarté une gravité unité, et également un poids, donc une masse, unité. En fait, la loi des gaz parfaits ne dépend pas de la masse des corpuscules. Evidemment, elle est sans rapport avec la gravité qui n'a été introduite ici qu'en tant que modèle.

Pour  $N$  corpuscules indépendants nous avons :

$$\langle F \rangle h = NT, \quad (6.7)$$

Cette loi est valable à toute température et pour un mélange de corpuscules quelconque. Rappelons que nous avons considéré un cylindre d'aire unité. Une forme plus familière de cette relation est  $PV = NT$ , où  $P$  représente la pression et  $V$  le volume.

Insistons sur le fait que si dans un gaz atomique les  $N$  atomes s'associent par paires pour former  $N/2$  molécules, la pression est divisée par deux, le volume étant constant, bien que le poids (ou la masse) du gaz soit resté le même. C'est bien la notion de corpuscule qui est ici essentielle. S'il y a condensation du gaz en liquide en raison des forces d'attraction entre corpuscules, jusqu'ici négligées, la pression devient presque nulle.

Pour respecter l'homogénéité des unités, on peut écrire la relation ci-dessus sous la forme :

$$\langle F \rangle h = k N T, \quad (6.8)$$

où  $k$  représente une constante universelle dont la valeur dépend des unités choisies<sup>4</sup>.

Après avoir observé que la hauteur  $h$  d'un cylindre rempli d'air au niveau du sol (donc à  $\langle F \rangle$  et  $N$  constants) augmente avec la température telle que celle-ci est ressentie, nous pouvons *définir* avec Galilée la température  $T$  comme étant *égale* à  $h$ , soit :  $T = h$ . Il faudra montrer que la température  $T$  définie empiriquement ci-dessus (c'est-à-dire :  $T = h$  dans des conditions standard) correspond bien à la température qui s'introduit dans l'expression du rendement maximal d'une machine thermique, appelée «température thermodynamique». Cela peut être fait en considérant un cycle particulier, le milieu de travail étant un gaz parfait, ou plus simplement en considérant deux niveaux occupés par des corpuscules. Nous allons maintenant déduire de la loi des gaz parfaits un certain nombre de relations utiles.

## 6.6 Travail en régime isotherme

Le nombre  $N$  de corpuscules contenus dans le milieu de travail étant constant nous le posons désormais égal à 1 pour abrégé. Considérons un cylindre d'aire unité, de hauteur  $h$ , à la température  $T$  et exerçant donc une force :  $F = \frac{T}{h}$  sur un piston. Si  $h$  est accru de  $dh$  par un agent extérieur, ce dernier reçoit une énergie  $dW = F dh = T \frac{dh}{h}$ . Il en résulte par intégration que le travail fourni pour un déplacement de  $h_1$  à  $h_2$  du piston est :

$$W = T \ln \left( \frac{h_2}{h_1} \right). \quad (6.9)$$

La formule (6.9) permet d'évaluer le travail fourni lors d'un cycle particulier (non optimal) la hauteur du cylindre ne variant pas lorsque le cylindre est transféré d'un bain chaud (température  $T_h$ ) à un bain froid (température  $T_l < T_h$ ). Si la hauteur varie de  $h_1$  à  $h_2$  lorsque le cylindre est en contact avec le bain chaud le travail fourni est, d'après la formule ci-dessus :  $W_h = T_h \ln \left( \frac{h_2}{h_1} \right)$ . Si d'autre part la hauteur varie de  $h_2$  à  $h_1$  lorsque le cylindre est en contact avec le bain froid le travail fourni est, d'après la

---

4. En unités SI,  $k$  a pour dimension : joule par kelvin. On considère généralement une quantité de gaz appelé une «mole», occupant un volume de 0.0224 mètres cubes à la pression et à la température standards (approximativement une atmosphère ou 100 000 pascals, et 300 kelvins), et on écrit :  $PV = RT$ , avec la constante des gaz parfaits :  $R \approx 8.315$  joules par kelvin.

formule ci-dessus :  $W_l = T_l \ln \left( \frac{h_2}{h_1} \right)$ . Il en résulte que le travail total fourni au cours d'un cycle est :

$$W = W_h + W_l = T_h \ln \left( \frac{h_2}{h_1} \right) + T_l \ln \left( \frac{h_2}{h_1} \right) = (T_h - T_l) \ln \left( \frac{h_2}{h_1} \right) \quad (6.10)$$

qui est positif si  $h_2 > h_1$ .

En d'autres termes, pour obtenir un travail positif il faut laisser le gaz se détendre lorsqu'il est en contact avec le bain chaud et le comprimer lorsqu'il est en contact avec le bain froid. Le milieu de travail étant mis en contact avec des bains dont la température diffère de la sienne, le cycle n'est pas réversible et le rendement n'est pas optimal.

## 6.7 Consommation de chaleur

La quantité de chaleur utilisée dans la machine décrite ci-dessus peut être divisée en deux parties. Lorsque le milieu de travail, initialement à la température  $T_l$ , est mis en contact avec le bain chaud, il consomme une quantité de chaleur  $U(T_h) - U(T_l)$ , sa hauteur (ou volume) étant constante. Pour obtenir cette quantité il faut connaître l'énergie interne  $U(T)$  du gaz en fonction de la température. C'est ce dont il sera question au chapitre 7. Dans ce qui suit nous considérons que  $U$  est une fonction quelconque croissante de  $T$ . Une fois la température  $T_h$  atteinte la hauteur augmente et le bain chaud fournit une quantité de chaleur égale au travail  $W_h$  définie dans la section précédente.

D'après ce qui a été dit ci-dessus, nous avons besoin d'une quantité de chaleur<sup>5</sup> :  $-Q = W_h + U(T_h) - U(T_l)$ . D'où un rendement inverse, que nous appelons «consommation», utilisant (6.10) :

$$\frac{1}{\eta} = \frac{-Q}{W} = \frac{1}{\eta_C} + \frac{U(T_h) - U(T_l)}{(T_h - T_l) \ln(h_2/h_1)} \quad \eta_C = 1 - \frac{T_l}{T_h}. \quad (6.11)$$

Cette consommation est toujours supérieure à la consommation minimale  $\frac{1}{\eta_C}$  donnée par Carnot car  $U(T_h) > U(T_l)$  pour des raisons de stabilité<sup>6</sup>. On voit que la consommation tend (lentement) vers la consommation minimale de Carnot si le rapport  $h_2/h_1$  tend vers l'infini, quelle que soit la fonction  $U(T)$ . Toutefois, il est peu pratique d'introduire de grands rapports  $h_2/h_1$ .

Pour cette raison, les cycles thermiques comportent en général, outre les transformations isothermes traitées ci-dessus, des transformations dites : «adiabatiques» durant lesquelles le cylindre est isolé du point de vue thermique, mais sa hauteur varie. Pour évaluer le travail fourni durant de telles transformations l'expression de l'énergie interne est également requise.

5. Nous appelons  $Q$  l'accroissement de chaleur du bain chaud.

6. Si l'on accroît l'énergie d'un système en interaction gravitationnelle, l'énergie potentielle augmente mais l'énergie cinétique diminue. On en déduit parfois que la capacité thermique  $(dU/dT)_h$  d'un tel système est négative. Il semble que cette décroissance de  $U$  avec  $T$  sorte du cadre de la thermodynamique traditionnelle.

## 6.8 Comment éviter des contacts entre corps de températures différentes ?

Le principe du cycle de Carnot consiste à ne mettre en contact deux corps que s'ils ont presque la même température. Comme l'explique Carnot, une légère différence de température est nécessaire pour obtenir un travail non nul. Le cycle de Carnot correspond donc à une situation limite. Dans cette limite la puissance est nulle mais le travail est non-nul.

Supposons que le milieu de travail soit en contact avec le bain froid à la température  $T_l$ . On le sépare de ce bain. Le paramètre (hauteur  $h$  du piston) avec initialement  $h = h_4$  évolue lentement de telle sorte que la température atteigne celle du bain chaud à la température  $T_h$ . Le problème est d'évaluer la valeur finale  $h_1$  de la hauteur qui assure l'égalité entre la température du milieu de travail et celle du bain chaud (les nombres 1,2,3,4 correspondent à ceux de la figure 1.3).

Appellons comme précédemment  $U(T)$  l'énergie interne du milieu de travail. Le nombre de corpuscules étant constant nous l'omettons par soucis de concision. Par application de la loi des gaz parfaits la force  $F = \frac{T}{h}$ . Si donc la hauteur s'accroît de  $dh$  le travail élémentaire fourni à l'agent extérieur est :  $F dh = T \frac{dh}{h}$ . Le système étant isolé l'énergie interne est accrue de :  $dU = -T \frac{dh}{h}$ . D'où l'équation différentielle :

$$\frac{dU}{T} = -\frac{dh}{h} \implies \ln\left(\frac{h_4}{h_1}\right) = \int_{T_l}^{T_h} \frac{dU}{T}, \quad (6.12)$$

l'accroissement  $dU$  pouvant être écrit :  $\frac{dU}{dT}dT$ . On voit donc que la condition imposée par Carnot peut être satisfaite quelque soit la fonction  $U(T)$  par un choix approprié de  $\frac{h_4}{h_1}$ .

Si le cylindre contient  $N$  corpuscules  $F$  et  $U$  doivent être multipliés par  $N$  puisque les corpuscules sont indépendants. L'expression ci-dessus donnant le rapport  $h_4/h_1$  optimal est inchangée.

Le résultat ci-dessus peut être réécrit sous la forme suivante :

$$S_1 = S_4, \quad S_1 \equiv \ln(h_1) + \int_1^{T_h} \frac{dU}{T} \quad S_4 \equiv \ln(h_4) + \int_1^{T_l} \frac{dU}{T}. \quad (6.13)$$

La borne inférieure des intégrales est sans importance. Écrit d'une façon plus générale nous avons :  $S = \text{constante}$ , avec :

$$dS = \frac{dQ}{T} = \frac{dU - F dh}{T} = \frac{dU}{T} - \frac{dh}{h} \quad (6.14)$$

en utilisant la loi des gaz parfaits.

La fonction  $S$  appelée «entropie» a donc la même valeur au moment où le milieu de travail quitte le bain chaud et au moment où il entre en contact avec le bain froid. Elle a la même valeur pour tout état intermédiaire. En effet on peut refaire le calcul pour un bain fictif ayant une température intermédiaire. Donc  $S$  reste constante dans une transformation adiabatique lente.

Pour le cas particulier d'un gaz parfait non-relativiste nous montrerons au chapitre suivant que :  $U = T/2$ . Nous pouvons alors écrire :  $S(U, h) = \ln(U^{1/2}h)$ . Nous avons :  $F/T = \partial S/\partial h = 1/h$  (loi des gaz parfaits) et  $\beta = \partial S/\partial U \implies U = T/2$ , ce qui redonne l'expression de  $U$ .

Pour un nombre quelconque  $N$  de molécules, nous souhaitons que cette fonction  $S(U, h, N)$  soit «extensive», c'est à dire que sa valeur soit multipliée par 2, par exemple, si les variables extensives  $U, h, N$  sont également multipliées par 2. Pour un degré de liberté et en régime non-relativiste nous avons :

$$\frac{S}{N} = \ln \left( \left( \frac{U}{N} \right)^{1/2} \frac{h}{N} \right) = \frac{1}{2} \ln(U) + \ln(h) + \text{une fonction de } N. \quad (6.15)$$

En effet :

$$\begin{aligned} \frac{1}{T} &= \frac{\partial S}{\partial U} = \frac{N}{2U} \implies U = \frac{NT}{2} \\ \frac{F}{T} &= \frac{\partial S}{\partial h} = \frac{N}{h} \implies Fh = NT. \end{aligned} \quad (6.16)$$

Si l'entropie du milieu de travail est conservée on dit que le processus est «isentropique». Cela signifie que l'entropie reçue du bain froid par le milieu de travail est intégralement transmise au bain chaud (rappelons que nous considérons d'une façon générale comme positifs les *accroissements*). Il en résulte que dans un cycle de Carnot où le transport du milieu de travail d'un bain à un autre se fait de façon isentropique, la somme des entropies des deux bains est constante. Il n'y a pas création nette d'entropie<sup>7</sup>.

En particulier, si  $U = T$  (corpuscules à hautes températures) la condition générale de Carnot (6.12) s'écrit :

$$\frac{h_4}{h_1} = \frac{T_h}{T_l}. \quad (6.17)$$

En utilisant à nouveau la loi des gaz parfaits (remplaçant  $T$  dans l'expression ci-dessus par  $Fh$ ) cette relation nous donne :  $Fh^2 = \text{constante}$ , que l'on écrit généralement :  $PV^\gamma = \text{constante}$ . Dans le cas présent  $\gamma = 2$ .<sup>8</sup>

Naturellement le même principe s'applique pour le retour du milieu de travail vers le bain initial. La consommation minimale est obtenue pour des choix appropriés de

7. Cycle après cycle, le bain chaud se refroidit et le bain froid se réchauffe. Au bout d'un certain temps les deux bains ont la même température. Kelvin s'est posé la question suivante : quel est le travail total fourni si les transformations sont réversibles. La solution, facilement obtenue à partir de la conservation de l'énergie totale et de l'entropie totale est, pour des gaz parfaits de même nature pour lesquels  $U = aT$ , où  $a$  est une constante (basses températures), la suivante : le travail total est :  $W = U_1 + U_2 - 2\sqrt{U_1 U_2}$ , où :  $U_1, U_2$  sont les énergies internes initiales des deux bains. Naturellement, si les températures initiales des bains sont égales le travail est nul.

8. Dans le cas de l'air constitué essentiellement de di-azote et di-oxygène nous avons aux températures usuelles :  $U = \frac{5}{2}T$  et  $\gamma = \frac{7}{5}$ . Laplace a montré que ce facteur  $\gamma$  était crucial pour expliquer la valeur de la vitesse du son dans l'air. Le travail de Laplace s'est avéré important pour Carnot car il lui a permis de bien comprendre la différence qui existe entre un processus adiabatique et un processus isotherme.

$h_1, h_2, h_3, h_4$ . Le travail fourni peut être positif (machine thermique) ou négatif (pompe à chaleur).

Pour obtenir un cycle de Carnot, nous pouvons choisir arbitrairement les points 2 et 4 (en se référant à la notation de la figure 1.3) et passer de 2 à 3 et de 4 à 1 en utilisant la règle énoncée ci-dessus, de telle sorte que le milieu de travail n'est mis en contact avec un bain que lorsque sa température est presque égale à celle de ce bain.

Nous avons établi dans ce chapitre la loi des gaz parfaits applicable à des corpuscules indépendants en utilisant le facteur de Boltzmann, dont la validité est rendue plausible en annexe B. Nous en avons déduit le travail fourni par une machine thermique simple utilisant un gaz parfait comme milieu de travail. En général, le rendement dépend de la façon dont l'énergie interne  $U$  du gaz varie avec sa température  $T$ . Cette relation est établie au chapitre suivant. Dans le cas particulier d'un cycle réversible cependant le rendement ne dépend pas de l'énergie interne. Il ne dépend que des températures des bains.

# Chapitre 7

## Energie interne

La connaissance de l'énergie moyenne  $U$ , appelée «énergie interne» pour indiquer que les mouvements d'ensemble du système ne sont pas pris en considération, permet de déterminer la quantité de chaleur qu'il faut fournir pour élever la température d'un gaz d'un certain nombre de degrés, le volume étant constant. L'énergie interne d'un gaz parfait est :  $U(T) = \langle E \rangle$ , la moyenne ayant été définie au chapitre précédent. Afin d'évaluer cette moyenne il est nécessaire de connaître la fonction  $\tau(E)$ , c'est à dire la façon dont la période  $\tau$  du mouvement d'un corpuscule soumis à la gravité dépend de son énergie  $E$ . Pour cela nous généralisons de façon heuristique une expression valable pour la lumière et obtenons  $\tau(E) = 2\sqrt{E^2 + 2E}$ . L'expression usuelle :  $U = \frac{T}{2}$  de l'énergie interne en est déduite lorsque  $T \ll 1$ , c'est à dire dans la limite «non-relativiste».

### 7.1 Energie moyenne

Comme dans le chapitre précédent nous considérons un cylindre d'axe vertical soumis à une gravité uniforme. Le sol en  $z = 0$  correspond à une énergie nulle. L'altitude  $E$  maximale atteinte est l'énergie du corpuscule. Nous supposons que la hauteur  $h$  du cylindre est très inférieure à  $E$  de telle sorte que la gravité joue un rôle négligeable. Celle-ci est utilisée seulement pour définir concrètement l'énergie du corpuscule.

Nous avons établi en (6.5) que, pour une fonction quelconque  $g(E)$  :

$$\langle g(E) \rangle = \frac{\int_0^\infty dE (g - g'/\beta) \exp(-\beta E) \tau(E)}{\int_0^\infty dE \exp(-\beta E) \tau(E)}, \quad (7.1)$$

où  $g'$  est la dérivée de  $g$ . Dans le cas présent :  $g(E) = E$  et  $g'(E) = 1$ . Il en résulte que l'énergie interne est :

$$U(\beta) \equiv \langle E \rangle = \frac{\int_0^\infty dE E \exp(-\beta E) \tau(E)}{\int_0^\infty dE \exp(-\beta E) \tau(E)} - \frac{1}{\beta}. \quad (7.2)$$

Nous montrerons dans la section suivante que :  $\tau(E) = 2\sqrt{E^2 + 2E}$ . En posant

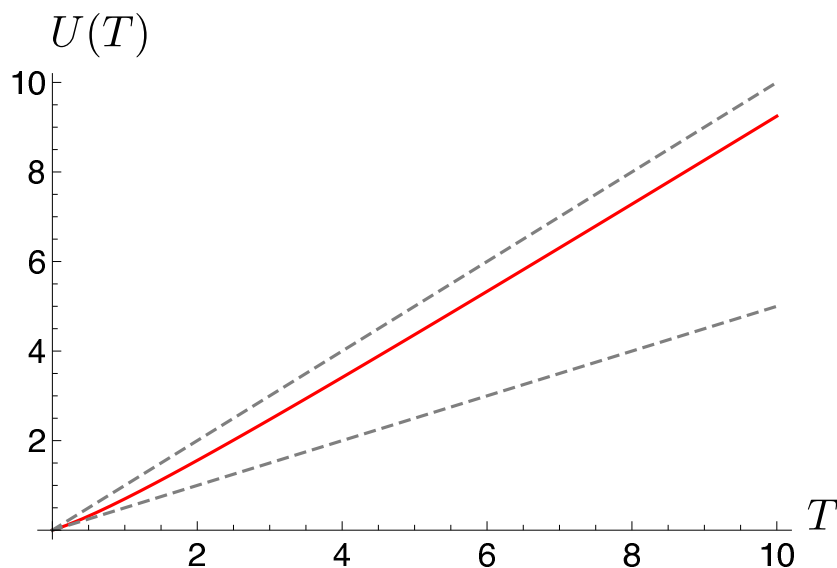


FIGURE 7.1 – Cette figure représente l'énergie interne  $U$  d'un gaz parfait donnée en (7.2) pour des corpuscules sans structure se déplaçant verticalement, en fonction de la température absolue  $T$ . Les faibles valeurs de  $T$  correspondent à l'approximation non relativiste.

$E \equiv T x$ , on déduit de (7.2) que :

$$\frac{U(T)}{T} = \frac{\int_0^\infty dx x \exp(-x) \sqrt{x^2 + 2x/T}}{\int_0^\infty dx \exp(-x) \sqrt{x^2 + 2x/T}} - 1. \quad (7.3)$$

La variation de  $U$  avec  $T$  donnée en (7.3) est représentée sur la figure 7.1.

Pour de faibles et fortes températures nous avons, respectivement :

$$\begin{aligned} U \equiv \langle E \rangle &= \frac{T}{2} & T \ll 1 \\ U \equiv \langle E \rangle &= T - 1 & T \gg 1. \end{aligned} \quad (7.4)$$

Il faut connaître l'expression de l'énergie interne pour évaluer la quantité de chaleur nécessaire à une certaine élévation de température du gaz. Pour mesurer celle-ci on peut utiliser un réservoir de volume fixe rempli d'air dans les conditions standard. Si on libère un poids au sommet du réservoir le travail correspondant est converti en chaleur et la température de l'air s'élève. Cette élévation de température peut être mesurée par la dilatation d'une petite partie de l'air, négligeable par rapport au volume total. On suppose ici que le poids absorbe une quantité négligeable de chaleur <sup>1</sup>

1. Les expressions ci-dessus ne s'appliquent qu'à des corpuscules ayant un seul degré de liberté. Les corpuscules d'air (di-azote et di-oxygène) étant di-atomiques et se déplaçant dans un espace à trois dimensions ils possèdent :  $2 \times 3 - 1 = 5$  degrés de liberté. L'expression donnée ci dessus :  $U = \frac{T}{2}$  doit

L'expression de l'énergie interne donnée en (7.3) est commode numériquement parce que la fonction à intégrer ne présente pas de singularités. Toutefois, pour effectuer une comparaison avec le résultat quantique donné dans l'annexe F il est préférable d'utiliser la forme (6.3). On obtient alors :

$$U = \langle E \rangle = -\frac{d}{d\beta} \ln \left( \int_0^\infty dE \exp(-\beta E) \tau'(E) \right). \quad (7.5)$$

## 7.2 Mouvement de corpuscules soumis à la gravité

Nous considérons en premier lieu le mouvement d'une impulsion lumineuse et généralisons le résultat au mouvement de corpuscules. L'observation suggère que la lumière n'est pas sensible à la gravité. On peut donc raisonnablement penser que si une impulsion de lumière est réfléchiée par un miroir le temps d'aller-retour de l'impulsion lumineuse ne dépend que de la distance du miroir à la source de lumière. La généralisation aux corpuscules présume que leur mouvement dans une gravité constante est universel.

Si une source en  $z = 0$  émet une impulsion brève de lumière vers le haut à l'instant  $t$  et l'on note  $2\zeta$  le temps d'aller-retour de l'impulsion, nous considérons que  $\zeta(t)$  définit le mouvement de l'impulsion lumineuse. Sur la figure 7.2 l'impulsion montante est émise à l'instant  $t = 0$ . L'impulsion descendante obéit par convention à la relation :  $t = -2\zeta$  ( $\zeta$  est négatif et  $t$  est positif). Ces deux possibilités sont exprimées par [33] :

$$t(t + 2\zeta) = 0. \quad (7.6)$$

Elle sera généralisée de façon heuristique aux corpuscules soumis à la gravité<sup>2</sup>. Puis nous définirons l'«action» du mouvement.

Nous généralisons cette relation aux corpuscules, de façon heuristique, en ajoutant «1» à gauche de l'équation (7.6). Rappelons que nous avons adopté la conception selon

---

donc être multipliées par 5. Nous avons supposé que la distance entre les deux atomes de la molécule di-atomique est «gelée» et ne doit pas être considérée comme un degré de liberté. Aux températures élevées il faut cependant tenir compte de ce degré de liberté correspondant à des modes de vibrations, et éventuellement des modes d'excitation électronique. Pour ces différentes raisons la capacité thermique  $dU/dT$  d'un gaz augmente par paliers en fonction de la température.

A une température quelconque une étude numérique montre que pour des corpuscules tels que des atomes d'hélium dans l'espace à trois dimensions (trois degrés de liberté) nous avons avec une bonne précision :  $U(T) = 3T \frac{4+15T+15T^2}{8+20T+15T^2}$  [32]. En unités du système international il faut remplacer le terme  $3T$  par :  $3RT$  avec  $R = 8.315$  pour 0.0224 mètres cubes de gaz dans les conditions standard, et les termes  $T$  dans la fraction par :  $k_B T / mc^2$ , où  $k_B \approx 1.38 \cdot 10^{-23}$  joules par kelvin représente la constante de Boltzmann,  $m$  la masse du corpuscule et  $c$  la vitesse de la lumière dans le vide. On obtient alors  $U$  en joules par mole.

2. L'impulsion lumineuse émise à l'instant  $t$  définit la synchronisation du temps pour différents corpuscules. Le temps d'aller-retour de l'impulsion définit leur altitude. Une présentation plus traditionnelle est donnée dans l'annexe E. Elle est plus compliquée que celle qui est présentée ici mais elle aboutit aux mêmes résultats. Si l'on appelle  $s$  la lenteur (inverse de la vitesse) on pourrait écrire pour une direction faisant un angle  $\theta$  avec la gravité :  $s = 1 + a \cos(\theta)$ , où  $a$  est une constante. Il est facile de montrer que le temps d'aller-retour (de  $z = 0$  à  $z = 0$ ) est égal au trajet parcouru quelque soit  $a$ .

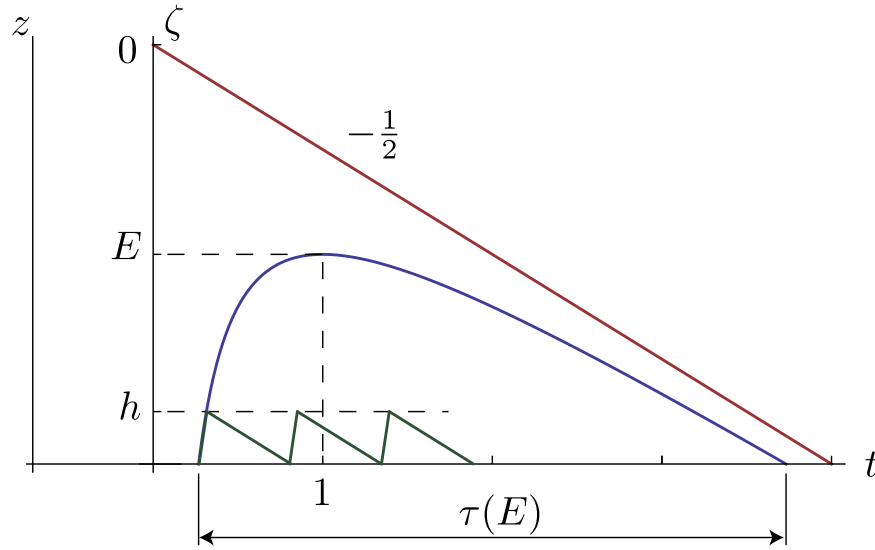


FIGURE 7.2 – Cette figure représente l’altitude  $z$  d’un corpuscule d’énergie  $E$  (énergie définie par rapport au sol  $z = 0$ ) en fonction du temps  $t$  dans la formulation asymétrique. La période  $\tau(E)$  est la dérivée par rapport à  $E$  de l’action  $f(E)$ , définie comme l’aire du mouvement. Les lignes en pointillé représentent un plan réflecteur situé à l’altitude  $h$  et le mouvement corpusculaire correspondant.

laquelle la gravité est une constante universelle. L’équation décrivant le mouvement d’un corpuscule serait donc :

$$t(t + 2\zeta) + 1 = 0 \quad \implies \zeta = -\frac{1}{2} \left( \frac{1}{t} + t \right). \quad (7.7)$$

$|\zeta|$  est minimal pour  $t = 1$  et vaut 1.

Effectuons une translation verticale en introduisant l’altitude  $z \equiv 1 + E + \zeta$ , où  $E$  est une constante pour un corpuscule particulier, de telle sorte que  $z = E$  au maximum de la trajectoire. En utilisant (7.7) le mouvement d’un corpuscule est alors décrit par :

$$z(t, E) = 1 + E - \frac{1}{2} \left( \frac{1}{t} + t \right). \quad (7.8)$$

$E$  représente donc l’altitude maximale atteinte par le corpuscule que l’on identifie à son énergie. Au voisinage de  $t = 1$  nous avons :  $z(t) \approx E - \frac{1}{2}(t - 1)^2$ , qui coïncide bien avec l’équation classique galiléenne normalisée, indiquant une vitesse proportionnelle au temps indépendante du poids du corpuscule (principe d’équivalence).

L’intervalle de temps correspondant à une certaine valeur de  $z$  et de  $E$  est obtenu en évaluant la différence des deux valeurs de  $t$  correspondant à une valeur de  $E - z$  d’après (7.8) :

$$\tau(z, E) = \tau(E - z) \quad \tau(E) = 2\sqrt{E^2 + 2E} \quad E \geq z. \quad (7.9)$$

Notons que les mêmes résultats seraient obtenus si nous ajoutions à  $t$  dans (7.8) une fonction quelconque de  $z$ .

Pour une constante de gravité quelconque  $g$ , la constante à introduire dans (7.6) est  $1/g$ , de telle sorte que nous avons maintenant :  $gt(t + 2\zeta + 1) + 1 = 0$ . On définit la coordonnée  $z = 1/g + E + \zeta$ . Près de la valeur maximale de  $z$  (qui est atteinte au temps  $t = 1/g$ ) on a :  $z \approx E - (1/2)g(t - 1/g)^2$  qui est la formule de Galilée. Nous avons alors :  $\tau(E) = 2\sqrt{E^2 + 2E/g}$ . Le poids du corpuscule ayant été posé égal à 1, il en résulte que  $g = 1/m$ , où  $m$  dénote la masse du corpuscule. Dans l'expression de l'énergie interne la constante de gravité n'intervient plus, mais au lieu de  $T$  nous avons :  $T/m$ , ou plus précisément avec les unités usuelles :  $k_B T/mc^2$ .

## Chapitre 8

# Conclusion

Certains philosophes pré-socratiques ont adopté ce que l'on peut appeler «le parti des choses». C'est le cas en particulier d'Anaximandre et de Démocrite. Le but de cet article est de suggérer que les résultats fondamentaux de Carnot relatifs au rendement maximal des machines thermiques auraient peut-être pu être obtenus en ces temps là. Notre article peut être également utile du point de vue pédagogique.

Pour cela nous avons insisté sur un modèle prenant en considération l'énergie potentielle des corpuscules d'un corps, et non comme on le fait habituellement leur énergie cinétique. Une comparaison entre les propriétés corpusculaires et la théorie des gaz parfaits a été proposée. Le mouvement universel des corpuscules (Démocrite) dans l'hypothèse d'une terre plate (Anaximandre) permet d'éviter l'approximation non-relativiste.

# Bibliographie

- [1] É. Zeller, *La Philosophie des Grecs considérée dans son Développement Historique*. Paris : Hachette, 1882. [Online]. Available : <http://gallica.bnf.fr/ark:/12148/bpt6k779388>
- [2] J. Salem, *Démocrite. Grains de poussière dans un rayon de soleil*, ser. Bibliothèque d'Histoire de la Philosophie. Paris : Vrin, 2002.
- [3] R. A. Horne, "Atomism in ancient medical history," *Med. Hist.*, vol. 7, no. 4, pp. 317–329, 1963. [Online]. Available : <http://www.ncbi.nlm.nih.gov/pmc/articles/PMC1034870/>
- [4] C. Rovelli, *Anaximandre de Milet ou la naissance de la pensée scientifique*, ser. UniverSciences. Paris : Dunod, 2009.
- [5] J. Salem, *Lucrèce et l'éthique. La mort n'est rien pour nous*, ser. Bibliothèque d'Histoire de la Philosophie. Paris : Vrin, 1992.
- [6] B. Pascal, *Œuvres complètes*, J. Chevalier, Ed. Paris : Gallimard, 1954, pp. 374–375.
- [7] I. Nikseresht, *Démocrite, Platon et la physique des particules élémentaires*, ser. Philosophie Sciences et Techniques. Paris : L'Harmattan, 2007.
- [8] J. Kim, *Trois essais sur l'émergence*. Paris : Éditions d'Ithaque, 2006.
- [9] G. Amontons, "Discours sur quelques propriétés de l'Air, et le moyen d'en connaître la température dans tous les climats de la Terre," *Mémoires de l'Académie Royale des Sciences*, pp. 161–180, 1702.
- [10] C. Cercignani, *Ludwig Boltzmann. The Man Who Trusted Atoms*. New-York : Oxford University Press, 1998.
- [11] E. Klein, "L'infini a le don de mettre la physique sous tension," *Science et Avenir*, p. 6, Avril-Mai 2010.
- [12] L. Russo, *The Forgotten Revolution. How Science Was Born in 300 BC and Why It Had to Be Reborn*. Berlin : Springer, 2004.
- [13] "Simulations thermodynamiques." [Online]. Available : <http://physics-animations.com/Physics/English/thermo.htm>
- [14] D. Schroeder, *An introduction to Thermal Physics*. San Francisco : Addison-Wesley Publishing Company, 2002.

- [15] N. S. Carnot, *Réflexions sur la puissance motrice du feu*. Paris : Bachelier, 1824, (facsimile by Jacques Gabay ed., Sceaux, 1960). Pour information complémentaire, voir : R. Fox, *Carnot, Sadi : Réflexions sur la puissance motrice du feu, éd. critique avec introd. et comment., augment. de documents d'archives et de divers manuscrits de Carnot*, Paris : J. Vrin, 1979.
- [16] M. W. Zemansky and R. H. Dittman, *Heat and Thermodynamics*. New-York : Mc Graw Hill, 1997.
- [17] V. M. Brodiansky, *Sadi Carnot*. Perpignan : Presses Universitaires de Perpignan, 2006, translated from Russian to French.
- [18] J. Arnaud, L. Chusseau, and F. Philippe, "A simple model for Carnot heat engines," *Am. J. Phys.*, vol. 78, no. 1, pp. 106–110, 2010. [Online]. Available : <http://arxiv.org/abs/0812.2757>
- [19] —, "Carnot cycle for an oscillator," *Eur. J. Phys.*, vol. 23, pp. 489–500, 2002. [Online]. Available : <http://arxiv.org/abs/physics/0105048>
- [20] —, "Mechanical equivalent of quantum heat engines," *Phys. Rev. E*, vol. 77, p. 061102, 2008.
- [21] —, "Quiet lasers," 2009. [Online]. Available : <http://arxiv.org/abs/0906.1469>
- [22] "Energie thermique des mers." [Online]. Available : [http://fr.wikipedia.org/wiki/Energie\\_thermique\\_des\\_mers](http://fr.wikipedia.org/wiki/Energie_thermique_des_mers)
- [23] "Hipparchus on compound statements." [Online]. Available : <http://www.mathpages.com/home/kmath397/kmath397.htm>
- [24] J. M. Chappell, A. Iqbal, and D. Abbott, "Geometric algebra : A natural representation of three-space," 2011. [Online]. Available : <http://arxiv.org/abs/1101.3619>
- [25] S. W. Kim, T. Sagawa, S. De Liberato, and M. Ueda, "Quantum Szilard engine," *Phys. Rev. Lett.*, vol. 106, p. 070401, 2011. [Online]. Available : <http://arxiv.org/abs/1006.1471>
- [26] S. Abe and S. Okuyama, "Similarity between quantum mechanics and thermodynamics : Entropy, temperature, and carnot cycle," *Phys. Rev. E*, vol. 83, no. 2, p. 021121, Feb 2011.
- [27] H. Peters, "Statistics of distinguishable particles and resolution of the Gibbs paradox of the first kind," *J. Stat. Phys.*, vol. 141, pp. 785–828, 2010. [Online]. Available : <http://www.springerlink.com/content/c128466431w33t56/fulltext.pdf>
- [28] M. A. Versteegh and D. Dieks, "The Gibbs paradox and the distinguishability of identical particles," 2010. [Online]. Available : <http://arxiv.org/abs/1012.4111>
- [29] "Relativity." [Online]. Available : <http://hyperphysics.phy-astr.gsu.edu/hbase/relativ/relcon.html>
- [30] P. Ehrenfest and T. Ehrenfest, "Ueber zwei bekannte Eingwände gegen das Boltzmannsche H-Theorem," *Zeitschrift für Physik*, vol. 8, pp. 311–314, 1907.

- [31] R. de Abreu and V. Guerra, "Comment on 'A close examination of the motion of an adiabatic piston' by Eric A. Gislason [Am. J. Phys. 78, 995-1001 (2010)]," 2010. [Online]. Available : <http://arxiv.org/abs/1012.4918>
- [32] H. A. Buchdahl, "Modification of the general theorem of equipartition : Application to the relativistic ideal gas," *Am. J. Phys.*, vol. 52, no. 9, pp. 802–804, 1984.
- [33] R. de Abreu and V. Guerra, "The principle of relativity and the indeterminacy of special relativity," *European Journal of Physics*, vol. 29, no. 1, p. 33, 2008. [Online]. Available : <http://stacks.iop.org/0143-0807/29/i=1/a=004>
- [34] S. Sonogo and M. Pin, "Foundations of anisotropic relativistic mechanics," *J. Math. Phys.*, vol. 50, p. 042902, 2009. [Online]. Available : <http://arxiv.org/abs/0812.1294>

## Annexe A

# Anaximandre et la terre plate

Selon les maigres documents qui nous sont parvenus Anaximandre (600 ans avant notre ère) imaginait une terre cylindrique (essentiellement plate) d'épaisseur égale «au tiers du diamètre». L'interprétation usuelle de cette phrase est qu'Anaximandre imaginait une terre cylindrique, en forme de colonne, dont la hauteur (ou épaisseur) serait égale «au tiers de son diamètre». On peut s'interroger sur l'origine de ce facteur trois. Nous en offrons ici une interprétation, qui peut être considérée comme une coïncidence.

Il n'est nullement exclu qu'Anaximandre ait su que la terre était approximativement sphérique. La mesure du diamètre de la terre ne fut effectuée qu'un peu plus tard par Erathostène. Mais des observations simples telles que l'observation d'un océan, ou de l'ombre portée par la terre sur la lune, permettent de savoir, ou de deviner, que la terre est sphérique. La valeur numérique de son diamètre n'est pas importante dans ce qui suit. Notre interprétation est qu'Anaximandre imaginait, en tant que modèle, une terre plate dont l'épaisseur serait le tiers du diamètre «de la terre sphérique réelle». Ce modèle conduit en effet à une gravitation identique à celle qui est observée, sur la base d'une hypothèse simple concernant la gravitation que nous énoncerons ci-dessous.

Rappelons d'abord une notion mathématique qui pouvait être connue d'Anaximandre : Le volume d'une sphère est le produit de sa surface et du tiers de son *rayon*. En effet, le volume d'une pyramide est égal au tiers de la surface de la base multipliée par la hauteur. Ce résultat, qui peut être obtenu en décomposant un cube en trois pyramides identiques, est généralement attribué à Démocrite mais il est possible qu'il ait été connu antérieurement. Soit  $S$  la surface d'une sphère de rayon  $R$  et  $V$  son volume. Nous avons en décomposant la surface de la sphère en éléments  $dS$ , correspondant à des pyramides élémentaires de hauteur  $R$  et de surface à la base  $dS$  :  $V = \frac{SR}{3}$ .

Concernant la gravité, on peut imaginer qu'Anaximandre eut l'idée simple suivante : La force de gravitation, ou «pesanteur», est égale à la masse d'attraction divisée par la surface entourant cette masse. Notre interprétation (certes hasardeuse) suggérerait donc qu'Anaximandre avait établi une forme simplifiée des lois de la gravitation universelle ultérieurement découvertes par Newton ! L'énoncé que nous prêtons à Anaximandre est valable pour les conditions de symétrie de la sphère et du plan. La relation suggérée ci-dessus est évidemment une relation de proportionnalité, puisque les unités n'ont pas

encore été définies. Nous supposons dans ce qui suit que la densité (masse par unité de volume) du modèle de la terre plate et celle de la terre sphérique réelle sont les mêmes.

Pour une terre sphérique de masse unité, la force de gravité serait donc, sur la base de la conjecture énoncée ci-dessus, égale à  $\frac{1}{S}$  et la densité de matière est  $\frac{1}{V}$ . D'un autre côté, pour une terre plate d'épaisseur  $h$ , d'aire  $A \gg 1$  et de densité  $\frac{1}{V}$  comme déterminé ci-dessus, la masse  $M$  est égale à la densité  $\frac{1}{V}$  multipliée par le volume  $Ah$  du cylindre, soit :  $M = \frac{Ah}{V}$ . La surface étant égale à  $2A$  (cette approximation repose sur le fait que nous avons considéré un cylindre de très grand diamètre), nous obtenons une force de gravitation  $\frac{M}{2A} = \frac{Ah}{V} \frac{1}{2A} = \frac{h}{2V}$ . Anaximandre ayant choisi  $h = \frac{2R}{3}$ , nous obtenons dans le modèle de la terre plate une force de gravitation  $\frac{R}{3V}$  qui coïncide bien avec la force de gravitation  $\frac{1}{S}$  de la terre sphérique donnée au début de ce paragraphe, puisque, comme nous l'avons rappelé dans un paragraphe antérieur, la géométrie nous apprend que  $V = \frac{SR}{3}$ .

## Annexe B

# Densité de l'air en fonction de l'altitude

Le but de cette annexe est d'expliquer la raison pour laquelle il est nécessaire de pondérer diverses expressions obtenues pour une valeur fixée de l'énergie  $E$  par le facteur de Boltzmann :  $\exp(-E(f)/T)$ , où  $T \equiv 1/\beta$  est la température absolue et  $f$  l'action du mouvement. Nous considérons ici le mouvement de corpuscules dans une gravité constante, c'est-à-dire indépendante de la coordonnée verticale  $z$  (ignorant les autres coordonnées spatiales) et du temps. Dans ce cas, l'action est l'aire du mouvement  $z(t)$ , partant de  $z = 0$ , atteignant l'altitude  $E$ , et revenant après une période temporelle  $\tau(E)$  en  $z = 0$ .

Plus précisément, nous comparons la décroissance de la densité de l'air avec l'altitude obtenue à partir d'un modèle plausible comportant des pistons de poids négligeable, à celle qui est obtenue à partir du mouvement libre des corpuscules. Un accord entre ces deux modèles ne peut être obtenu que si l'on suppose qu'une certaine température correspond, non pas à une énergie précise des corpuscules, mais à une distribution particulière de cette énergie. Nous considérons initialement une température standard  $T = 1$ , puis une température quelconque. La température est définie comme la hauteur d'un cylindre rempli d'air dans des conditions standard, c'est-à-dire situé au niveau du sol, et dont la hauteur est unité lorsque  $T = 1$ .

Chacun a éprouvé la diminution de la densité de l'air en fonction de l'altitude. Il devient par exemple de plus en plus difficile de respirer au fur et à mesure que l'on monte vers le sommet du mont Olympe. Le modèle corpusculaire permet de comprendre ce phénomène dans une certaine mesure, mais présente une difficulté. En effet, les corpuscules d'air ayant un poids, on peut comprendre que les couches inférieures de l'air soient en quelque sorte écrasées par le poids des couches supérieures et aient, de ce fait, une densité supérieure. Ce concept d'écrasement d'une couche par les couches supérieures conduit au modèle des pistons fictifs présenté ci-dessous. Toutefois, on pourrait imaginer que les corpuscules se comportent comme des pierres lancées à partir du sol avec une certaine vitesse, cette vitesse étant liée à la température. Ces pierres (ou corpuscules) atteignent une hauteur maximale  $E$  correspondant à leur énergie. Selon ce modèle, la

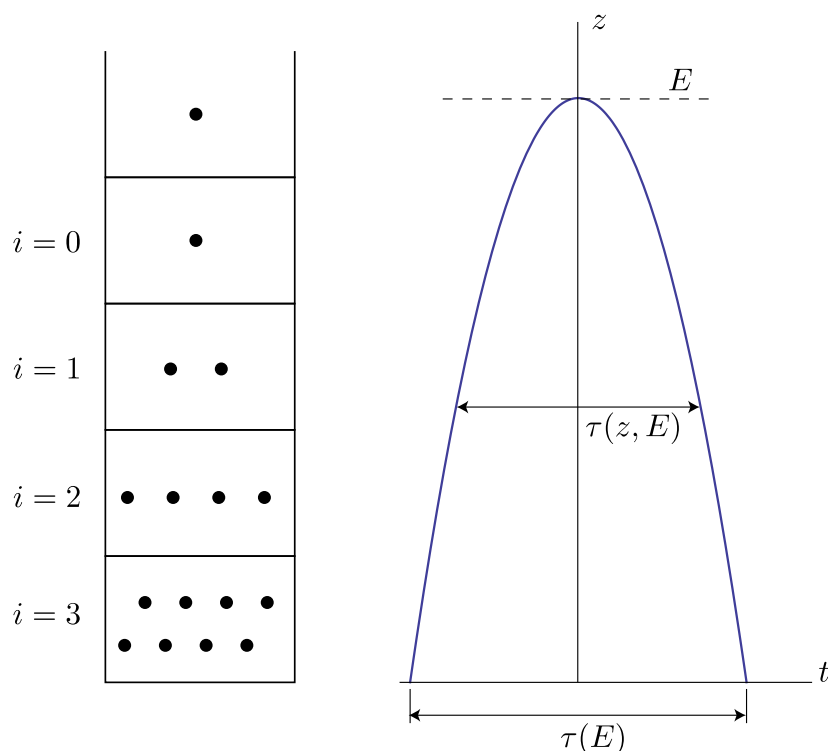


FIGURE B.1 – Décroissance de la densité de l'air en fonction de l'altitude. En (a) : modèle des pistons de poids négligeable. En (b) : mouvement d'un corpuscule. On notera que ce deuxième modèle suggère que la densité, qui est le temps pendant lequel le corpuscule se trouve situé entre les altitudes  $z$  et  $z + dz$ , divisé par  $\tau(E)dz$ , est nulle au dessus de l'altitude :  $z = E$ . La définition de  $\tau$  est montrée sur la figure. Ce résultat (incorrect) est rectifié par l'introduction d'une *distribution* d'énergie.

densité de l'air *augmenterait* en fonction de l'altitude jusqu'à l'altitude  $E$ , au delà de laquelle elle serait nulle. Il s'agit donc de réconcilier ces deux modèles, manifestement contradictoires.

**Modèle des pistons sans poids :** La notion de corpuscule permet d'obtenir la variation de la densité de l'air en fonction de l'altitude, la densité étant définie comme égale au nombre de corpuscules par unité de volume. La température est supposée uniforme. L'hypothèse d'un équilibre thermique n'est évidemment pas applicable au cas d'une montagne en raison des vents et autres phénomènes météorologiques. Initialement nous supposons que la température a la valeur standard :  $T = 1$ . Le présent calcul est essentiellement le calcul traditionnel de l'équation barométrique.

Notre modèle est celui d'un cylindre dont la section a une aire unité et dont l'axe est vertical. L'extrémité inférieure de ce cylindre repose sur le sol, et l'extrémité supérieure est si haute qu'il n'y a qu'un seul corpuscule situé au dessus de celle-ci. Nous utilisons dans ce qui suit les notions de poids et d'équilibre des forces.

Des pistons fictifs, de poids négligeable, sont placés régulièrement le long du cylindre, les sections séparant deux pistons adjacents ayant une hauteur unité. Nous supposons que la hauteur des sections est petite par rapport à l'«épaisseur» de l'atmosphère mais assez grande pour contenir un grand nombre de corpuscules. Des hauteurs de section d'un mètre par exemple seraient appropriées dans le cas de l'atmosphère terrestre. Les forces exercées par les corpuscules d'air sur les deux pistons limitant une section sont presque opposées. La force inférieure excède toutefois légèrement la force supérieure, en valeur absolue, du poids de l'air contenu dans la section. Toutes les sections considérées dans ce modèle sont donc identiques en hauteur et en température mais elles ne contiennent pas le même nombre de corpuscules.

Comme nous l'avons dit ci-dessus, la section la plus haute ( $N^{\circ}0$ ) ne contient qu'un seul corpuscule. La section située juste en dessous ( $N^{\circ}1$ ) doit contenir également un corpuscule, afin que le piston qui les sépare soit en équilibre. Mais la section située en dessous de celle-ci ( $N^{\circ}2$ ) doit supporter le poids de deux corpuscules. Cette section doit donc contenir deux corpuscules. La section située encore en dessous ( $N^{\circ}3$ ) doit supporter un poids total de  $1+1+2=4$  corpuscules, et ainsi de suite. On voit ainsi que le nombre de corpuscules d'air est donné par la formule suivante :

$$N_i = 2^i, \quad (\text{B.1})$$

c'est à dire :  $N_0 = 2^0 = 1$ ,  $N_1 = 2^1 = 2$ ,  $N_2 = 2^2 = 2 \times 2 = 4$ ,  $N_3 = 2^3 = 2 \times 2 \times 2 = 8$ , etc..., jusqu'à ce que le niveau du sol soit atteint.

Inversement, si l'on part du niveau du sol, la densité de l'air décroît en fonction de l'altitude. Si l'on introduit la coordonnée verticale  $z \equiv -i$  et la densité  $\rho$  de l'air, proportionnelle à  $N$ , la relation (B.1) peut s'écrire :

$$\rho(z) \propto 2^{-z}, \quad (\text{B.2})$$

Par l'introduction de constantes de peu d'importance nous écrivons cette relation :  $\rho(z) \propto \exp(-z)$

**Densité de l'air pour des corpuscules libres :** Rappelons ce qui a été dit ci-dessus. Les corpuscules partent du sol ( $z = 0$ ), atteignent une altitude maximale  $E$  correspondant à leur énergie, puis reviennent au niveau du sol. La gravité étant uniforme, les mouvements corpusculaires pour différentes énergies se déduisent les uns des autres par une simple translation selon l'axe vertical. On appelle  $\tau(E)$  la période temporelle en  $z = 0$ , et plus généralement  $\tau(z, E) \equiv \tau(E - z)$  la différence des temps de passage successifs à l'altitude  $z$  pour une énergie  $E$ . L'expression de  $\tau(E)$  ne sera pas nécessaire dans ce qui suit.

Évaluons tout d'abord la densité<sup>1</sup> de corpuscules  $\rho(z, E)$  en fonction de l'altitude  $z$  pour une valeur fixée de l'énergie  $E$ . La densité de l'air à une certaine hauteur  $z$  est

---

1. Nous appelons «densité» le nombre de corpuscules par unité de hauteur. D'autres auteurs introduisent la masse ou le poids des corpuscules. Pour le moment, nous supposons que tous les corpuscules ont le même poids.

proportionnelle à la durée moyenne pendant laquelle le corpuscule se trouve localisé entre  $z$  et  $z + dz$  :

$$\rho(z, E) = -\frac{1}{\tau(E)} \frac{\partial \tau(z, E)}{\partial z} = \frac{\tau'(E - z)}{\tau(E)} \quad \tau'(E) \equiv \frac{d\tau(E)}{dE}, \quad (\text{B.3})$$

parce que  $\tau(z, E)$  ne dépend que de  $E - z$ . Naturellement, pour un seul corpuscule, l'intégrale de  $\rho(z, E)$  de  $z = 0$  à  $z = E$  est unité. Pour  $N$  corpuscules il faut multiplier le résultat ci-dessus par  $N$ .

La densité de l'air donnée en (B.3), qui est infinie lorsque  $z = E$ , est entièrement différente de celle qui a été obtenue à l'aide de notre modèle précédent. Cette dernière indiquait en effet une diminution progressive de la densité, conformément à l'expérience. La décroissance exponentielle de la densité atmosphérique avec l'altitude peut être obtenue sans le stratagème consistant à introduire des pistons fictifs. Mais il faut alors supposer que les corpuscules n'ont pas tous la même énergie.

Pour obtenir un résultat satisfaisant, il faut multiplier l'expression donnée en (B.3) par le produit de deux termes, le premier étant  $\tau(E)$ , afin d'éliminer le dénominateur de cette expression, le second étant  $\exp(-E)$ , puis intégrer sur  $E$  de  $z$  à l'infini (en effet les corpuscules ne doivent être pris en considération que lorsque leur énergie  $E > z$ . Lorsque  $E < z$  le corpuscule n'atteint pas l'altitude  $z$  considérée).

La densité moyenne est alors obtenue en faisant la somme de  $E = z$  à  $E = \infty$  la quantité :

$$\begin{aligned} \rho(z, E) \exp(-E) \tau(E) &= \frac{\tau'(E - z)}{\tau(E)} \exp(-E) \tau(E) = \tau'(E - z) \exp(-E) \\ &= \exp(-z) \tau'(x) \exp(-x). \quad x \equiv E - z \quad \tau'(x) \equiv \frac{d\tau(x)}{dx}. \end{aligned} \quad (\text{B.4})$$

Comme l'intégration de  $E = z$  à  $E = \infty$  correspond à une intégration de  $x = 0$  à  $x = \infty$ , la densité moyenne est :

$$\langle \rho(z) \rangle = A \exp(-z), \quad (\text{B.5})$$

où  $A$  est une constante. Ce résultat coïncide avec celui qui a été obtenu à l'aide des pistons fictifs. La normalisation est obtenue en écrivant que le nombre de corpuscules de  $z = 0$  à  $z = \infty$  est égal à  $N$ .

Revenons au modèle des pistons traité au début de cette annexe, mais pour une température quelconque  $T$ . Les hauteurs des sections changent mais elles conservent toutes la même valeur. En effet l'équilibre des forces reste le même, et le nombre de corpuscules dans chaque section reste le même, les pistons étant étanches. Il en résulte qu'un changement de température entraîne seulement un changement d'échelle verticale. Si de plus on *définit* la température absolue  $T$  comme étant égale à la hauteur du cylindre de référence en  $z = 0$ , nous voyons que la densité moyenne de l'air prend la forme :

$$\langle \rho(z) \rangle \propto \exp\left(-\frac{z}{T}\right). \quad (\text{B.6})$$

Notons que l'expression de  $\langle \rho(z) \rangle$  ne dépend pas de l'expression de  $\tau(E)$ .

Si le poids des corpuscules est  $p$ , il faut écrire :  $\rho \propto \exp(-pz/T)$ ,  $pz$  étant l'énergie du corpuscule. Les atomes d'oxygène étant un peu plus lourds que les atomes d'azote, la décroissance de l'oxygène avec l'altitude est un peu plus rapide que celle de l'azote. Ces différents corpuscules sont considérés comme indépendants. Dans le cas de l'air, qui est un mélange d'oxygène et d'azote, la méthode des pistons fictifs introduit au début de cette annexe serait difficile à appliquer, car on ne connaît pas à priori la proportion d'oxygène et d'azote à une altitude donnée.

**Interprétation du facteur de pondération :** Le facteur  $\exp(-\beta E)\tau(E)$  introduit ci-dessus coïncide avec le facteur de Boltzmann :  $\exp(-\beta E(f))$ , où  $f$  représente l'action, c'est à dire l'aire du mouvement  $z(t, E)$ . En effet celui-ci peut s'écrire :  $\exp(-\beta E) \frac{df}{dE} dE$ , l'intégration portant maintenant sur l'énergie  $E$  et non sur  $f$ . Par la définition de l'action donnée ci-dessus (aire du mouvement), la quantité  $\frac{df}{dE}$  coïncide avec  $\tau(E)$ .

Lorsque le corpuscule n'est pas soumis à la gravité mais rebondit de façon élastique sur deux plans parallèles séparés de  $h$  (voir la figure 7.2),  $f$  est égal à  $h\tau(E)$  et par conséquent le terme  $\frac{df}{dE}$  devient  $h\tau'(E)$ . Cette forme est utilisée dans le texte principal.

Si d'autre part  $f$  ne peut prendre que des valeurs discrètes  $k$  le facteur de Boltzmann devient :  $\exp(-\beta E_k)$  et l'intégration devient une sommation. Inversement, dans la limite où  $E_k$  et  $E_{k+1}$  sont très voisins pour toutes valeurs de  $k$  les sommations peuvent être remplacées par des intégrales et on retrouve la formulation précédente. C'est ce que l'on verra dans l'annexe F.

## Annexe C

# Température

Nous avons considéré dans le texte principal des sites pouvant accueillir un corpuscule au plus et des sites pouvant accueillir un nombre quelconque de corpuscules. Dans la présente annexe nous justifions les expressions du poids moyen par site pour une température donnée de deux manières différentes (nombre de configurations et facteur de Boltzmann). Nous considérons également le cas où un site peut accueillir deux corpuscules au plus. Ce cas, assez compliqué du point de vue de l'analyse combinatoire, est détaillé dans l'annexe suivante D.

### C.1 Notion de température. Corpuscules d'énergie unité

Introduisons la notion de configurations distinctes. Considérons des sites (distincts mais équivalents) pouvant accueillir un nombre quelconque de corpuscules par site. Les corpuscules que nous considérons sont classiques, donc distinguables, même s'ils sont identiques, par exemple s'ils ont le même poids et n'ont pas de structure interne. Toutefois, il est commode d'évaluer le nombre de configurations comme si les corpuscules ne pouvaient pas être distingués les uns des autres, voir [27, 28]. Cette règle permet d'obtenir une entropie extensive, en conformité avec l'entropie thermodynamique.

Pour  $g = 3$  sites et  $n = 2$  corpuscules, par exemple, les six configurations sont :  $(1,1,0)$ ,  $(1,0,1)$ ,  $(0,1,1)$ ,  $(2,0,0)$ ,  $(0,2,0)$ ,  $(0,0,2)$ , les chiffres se référant au nombre de corpuscules dans un site. (Cette notion eut été tout à fait accessible aux penseurs de l'antiquité). Nous appelons  $\Omega(n)$  le nombre de configurations ainsi définies, avec  $\Omega(2)=6$  dans l'exemple.

Si nous considérons deux milieux (a) et (b) ensembles (les indices a et b se référant à ces milieux). Nous avons évidemment :  $\Omega(n_a, n_b) = \Omega_a(n_a)\Omega_b(n_b)$ . On pose :  $n = n_a + n_b$ . Il est assez naturel de penser que l'équilibre thermique correspond à la situation pour laquelle  $\Omega$  est maximal, donc stationnaire. Cela signifie que si un corpuscule est transféré du milieu (b) au milieu (a)  $\Omega$  ne doit pas changer sensiblement, ce qui s'écrit :

$$\Omega_a(n_a)\Omega_b(n_b) \approx \Omega_a(n_a + 1)\Omega_b(n_b - 1), \quad (\text{C.1})$$

ou :

$$\frac{\Omega_a(n_a + 1)}{\Omega_a(n_a)} \approx \frac{\Omega_b(n_b)}{\Omega_b(n_b - 1)} \approx \frac{\Omega_b(n_b + 1)}{\Omega_b(n_b)} \quad (\text{C.2})$$

car on suppose que :  $n, g \gg 1$  et  $n$  comparable à  $g$ .

Pour de grandes valeurs de  $n, g$  cela revient à dire que le rapport  $\frac{\Omega(n+1)}{\Omega(n)}$  peut être considéré comme une mesure de la température. Dans la condition d'équilibre définie ci-dessus il y a en effet (presque) égalité entre les températures des deux milieux ainsi définies.

En fait, il est mathématiquement plus commode de définir une température inverse :  $\beta \equiv \ln\left(\frac{\Omega(n+1)}{\Omega(n)}\right)$  que l'on peut écrire :  $\beta = S(n+1) - S(n)$  si l'on pose :  $S(n) = \ln(\Omega(n))$ . Ces notions sont précisées dans les sections suivantes.

## C.2 Nombre de configurations distinctes

Nous considérons  $g$  sites,  $n$  corpuscules, et évaluons le nombre  $\Omega(g, n)$  de configurations distinctes dans plusieurs cas :

**0,1 :** Milieu (a) où l'occupation d'un site est 0 ou 1. Le nombre de configurations distinctes est :

$$\Omega_1(g, n) = \frac{g(g-1)\dots(g-n+1)}{n!} = \frac{g!}{n!(g-n)!}. \quad (\text{C.3})$$

En effet, le premier corpuscule peut être placé dans l'un quelconque des  $g$  sites. Comme un site ne peut pas être occupé par plus d'un corpuscule d'après nos conventions le deuxième corpuscule ne dispose plus que de  $g-1$  choix, et ainsi de suite jusqu'au dernier corpuscule. Le facteur  $n!$  au dénominateur permet à l'entropie statistique de coïncider avec l'entropie thermodynamique.

Si  $g = 3$  et  $n = 2$  par exemple les trois configurations distinctes sont :  $(1,1,0)$ ,  $(1,0,1)$ ,  $(0,1,1)$ , où le chiffre 1 signale la présence d'un corpuscule. Notons incidemment que l'expression (C.3) satisfait la relation évidente :  $\Omega_1(g, n) = \Omega_1(g-1, n) + \Omega_1(g-1, n-1)$ .

A partir de (C.3) nous obtenons si  $n \gg 1$  :

$$\frac{\Omega_1(g, n+1)}{\Omega_1(g, n)} = \frac{g-n}{n+1} \approx \frac{1}{\nu_a} - 1 \quad \nu_a \equiv \frac{n}{g}. \quad (\text{C.4})$$

ce qui correspond à l'expression donnée dans le texte principal si l'on pose :  $x \equiv \exp(\beta) = \frac{\Omega_1(g, n+1)}{\Omega_1(g, n)}$ .

Donc :  $\beta(n) = \Delta S(n) \equiv S(n+1) - S(n)$  avec :

$$S(n) \equiv \ln(\Omega_1(g, n)). \quad (\text{C.5})$$

Cette prescription définit l'entropie  $S$  à une constante additive près<sup>1</sup>.

1. Il serait mathématiquement incorrect de déduire de  $S(n) = \ln(\Omega(n))$  que  $\beta \equiv \Delta S = \Delta\Omega/\Omega$  en utilisant l'expression de la dérivée de la fonction logarithme car  $\Omega(n+1)/\Omega(n)$  n'est pas voisin de l'unité même si  $n$  est grand.

**0,1,2,...** : Des considérations similaires sont applicables à un milieu (b) dans lequel les sites peuvent être occupés par un nombre quelconque de corpuscules. Le nombre de configurations distinctes est :

$$\Omega_{\infty}(g, n) = \frac{(n + g - 1)!}{n!(g - 1)!}. \quad (\text{C.6})$$

Nous avons donc si  $n \gg 1$  :

$$x \equiv \exp(\beta) = \frac{\Omega_{\infty}(n + 1)}{\Omega_{\infty}(n)} \approx \frac{1}{\nu_b} + 1 \quad \nu_b \equiv \frac{n}{g} \quad (\text{C.7})$$

qui est le résultat donné dans le texte principal.

**0,1,2** : Pour un milieu (c) dans lequel les sites peuvent être occupés par 0, 1 ou 2 corpuscules, le nombre de configurations distinctes est, d'après l'annexe suivante :

$$\Omega_2(g, n) = \sum_{n/2 \leq s \leq \min(n, g)} \frac{g!}{(g - s)!(2s - n)!(n - s)!}. \quad (\text{C.8})$$

Par exemple  $\Omega_2(4, 4) = 19$ .

On obtient à partir de cette formule pour  $g=20\ 000$  : avec  $\nu = n/g = 1/2$  :  $x = \Omega_2(g, n + 1)/\Omega_2(g, n) = 2.3025\dots$ , ce qui est en accord avec le résultat obtenu à partir de la distribution de Boltzmann :  $\nu = (x + 2)/(x^2 + x + 1) \implies x = (1 + \sqrt{13})/2$  (voir les sections suivantes de ce chapitre). Avec  $\nu=1/3$ , on obtient :  $x=3.45\dots$ , ce qui est aussi en accord avec la formule de Boltzmann :  $x = 1 + \sqrt{6}$ .

Il faut retenir de cette discussion que la température inverse peut être obtenue en dérivant par rapport à l'énergie (ici  $n$ ) la fonction entropie, définie comme le logarithme du nombre de configurations.

### C.3 Poids moyen par site déduit du facteur de Boltzmann

Dans le modèle décrit ci-dessus il y a transfert de corpuscules d'un site à un autre. Il est commode de supposer maintenant que l'ensemble des sites se trouve à une altitude  $E$ , un corpuscule placé au niveau du sol ayant par convention une énergie 0 et que les corpuscules ont un poids 1 de telle sorte que l'énergie d'un corpuscule placé à l'altitude  $E$  est égale à  $E$ . Cette énergie est ce que l'on appelle une énergie «potentielle» en ce sens qu'elle pourrait être convertie en une autre forme d'énergie telle que l'énergie cinétique.

Au lieu de retirer un corpuscule à un site on peut imaginer que ce corpuscule soit transféré au niveau du sol et perde son énergie. Inversement, au lieu d'ajouter un corpuscule à un site on peut imaginer que ce corpuscule est transféré du niveau du sol au site considéré et gagne une énergie  $E$ . Il y a donc dans ce nouveau modèle transfert d'énergie d'un site à un autre et non transfert de corpuscules.

Postulons que la probabilité qu'un corpuscule ait une énergie  $E$  soit proportionnelle à  $1/x$  avec :  $x \equiv \exp(E/T) \equiv \exp(\beta E)$ . Il s'agit là du facteur dit : «de Boltzmann» dont nous avons montré la légitimité en annexe B. Pour simplifier, posons  $E = 1$ . Les expressions relatives à des corpuscules de poids  $p$  seront données ultérieurement.

**0 ou 1** Dans le cas du milieu (a) (occupation 0 ou 1) les probabilités d'avoir 0 ou 1 sont proportionnelles à : 1 et  $1/x$ , respectivement. La normalisation à 1 de la probabilité totale nous donne :

$$P(1) = \frac{1/x}{1 + 1/x} = \frac{1}{x + 1}. \quad (\text{C.9})$$

Dans le cas présent l'occupation moyenne d'un site est :  $\nu_a = P(1)$ , ce qui montre que le poids moyen par site :

$$\langle p_a \rangle = \nu_a = \frac{1}{x + 1} \quad (\text{C.10})$$

avec  $x \equiv \exp(\beta)$ , comme affirmé précédemment. Le poids moyen par site est représenté en fonction de la température absolue sur la figure C.1.

**0,1,2...** Dans le cas du milieu (b) (occupation quelconque) la probabilité d'avoir  $n$  corpuscules est d'après le facteur de Boltzmann :  $p(n) \propto \exp(-\beta n)$ . Une sommation sur  $n$  de 0 à  $\infty$  (série géométrique) donne le résultat annoncé. Il est commode pour effectuer ce calcul de poser :  $Z(\beta) = \sum_0^\infty \exp(-\beta n) = (1 - \exp(-\beta))^{-1}$  et de dériver par rapport à  $\beta$  le logarithme de  $Z$ . En dérivant par rapport à  $\beta$  la quantité :  $\ln(\sum_0^\infty \exp(-\beta n))$  on obtient  $-\nu_b$ . En dérivant par rapport à  $\beta$  le logarithme de  $(1 - \exp(-\beta))^{-1}$  on obtient :  $-1/(\exp(\beta) - 1)$ . D'où résulte la relation :

$$\langle p_b \rangle = \nu_b = \frac{1}{x - 1} \quad (\text{C.11})$$

annoncée précédemment.  $\nu_b$  est représenté en fonction de la température absolue sur la figure C.1.

**0, 1, 2** Considérons un milieu (c) où chaque site peut être occupé par deux corpuscules au plus, donc par 0, 1, ou 2 corpuscules. De façon analogue à ce qui a été dit ci-dessus, nous obtenons :

$$\langle p_c \rangle = \nu_c = \frac{x + 2}{x^2 + x + 1}. \quad (\text{C.12})$$

Le poids moyen par site donné par l'expression ci-dessus est représenté en fonction de la température absolue sur la figure C.1.

**Poids  $p$**  Nous reprenons ici le cas où chaque site peut être occupé par un corpuscule au plus, mais ces corpuscules ont un poids  $p$ . L'altitude reste  $E = 1$ , et l'énergie d'un corpuscule est égale à  $p$ . La distribution  $\nu(x) = \frac{1}{x+1}$  est modifiée et devient  $\nu_d(x) = \nu(x^p)$ . Le poids moyen par site du milieu considéré lorsqu'il est porté à la température  $T$  ( $x \equiv \exp(1/T)$ ) devient donc :

$$\langle p_d \rangle = p \nu_d = \frac{p}{x^p + 1}. \quad (\text{C.13})$$

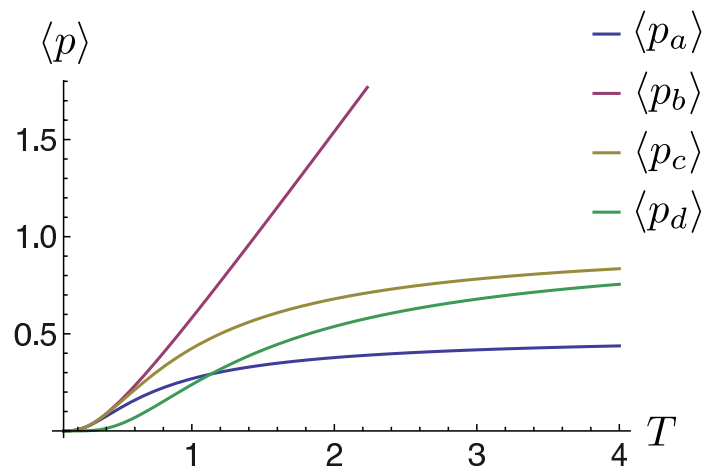


FIGURE C.1 – Poids moyen par site  $\langle p \rangle$  en fonction de la température  $T$ . Milieu (a) : un corpuscule (de poids 1) au plus par site; (b) : nombre quelconque de corpuscules (de poids 1) par site; et (c) : deux corpuscules (de poids 1) au plus par site. Enfin, (d) un corpuscule (de poids 2) au plus par site. On suppose que les corpuscules sont situés à l'altitude  $E = 1$ .

La variation du poids moyen  $p_d$  avec la température  $T$  est représenté sur la figure C.1 pour le cas où  $p = 2$ . Si nous avons  $n/2$  corpuscules de poids  $p_1$  et  $n/2$  corpuscules de poids  $p_2$ , il y a une chance sur deux pour qu'un corpuscule ait un poids  $p_1$  et une chance sur deux pour que ce corpuscule ait un poids  $p_2$ . D'où l'on déduit le poids moyen.

## Annexe D

# Compositions et partitions d'entiers

Dans ce qui suit, nous appellerons simplement *entiers* les entiers naturels  $(0,1,2\dots)$ , dont l'ensemble est usuellement noté  $\mathbb{N}$ . Une *composition* d'un entier  $n$  est une suite finie d'entiers dont la somme vaut  $n$ . Les termes de la suite sont appelés les *parts* de la composition. Il faut noter que nous autorisons les parts nulles. Le nombre de compositions d'un entier donné est donc toujours infini puisque l'on peut ajouter à volonté la part 0. Cependant, nous ne nous intéressons ici qu'aux compositions ayant un nombre fixe de parts, et la définition ci-dessus est la plus générale dans ce contexte. Le nombre de compositions de  $n$  avec  $g$  parts est noté  $\Omega_\infty(g, n)$  dans l'annexe C précédente.

Outre leur nombre, on peut imposer diverses contraintes aux parts. Dans ce qui suit, nous considérerons le cas où celles-ci doivent exclusivement être prises dans un sous-ensemble non vide  $A$  de  $\mathbb{N}$ , et nous noterons  $\Omega_A(g, n)$  le nombre de compositions de  $n$  avec  $g$  parts prises dans  $A$ . Remarquons que si le plus petit élément de  $A$  est  $m$ , et si l'ensemble  $A_0$  se déduit de  $A$  en retranchant  $m$  à chacun de ses éléments, une composition de  $n$  avec  $g$  parts prises dans  $A$  s'identifie à une composition de  $n - gm$  avec  $g$  parts prises dans  $A_0$ . Ainsi, quand le nombre  $g$  de parts est fixé, on peut toujours se ramener au cas où  $A$  contient 0, mais aussi bien au cas où il ne le contient pas. Dans l'annexe C, les notations  $\Omega_1$  et  $\Omega_2$  correspondent aux cas respectifs  $A = \{0, 1\}$  et  $A = \{0, 1, 2\}$ .

Il est clair que  $\Omega_A(1, n) = 1$  si  $A$  contient  $n$ , et que  $\Omega_A(1, n) = 0$  sinon. Les valeurs de  $\Omega_A(g, n)$  peuvent ainsi s'obtenir par récurrence :

$$\Omega_A(g, n) = \sum_{a \in A} \Omega_A(g-1, n-a). \quad (\text{D.1})$$

Pour obtenir cette relation, il suffit de classer les compositions en question selon la valeur  $a$  de leur première part, puis de retirer cette part dans chaque classe. Néanmoins, cette méthode de calcul est lente pour de grandes valeurs de  $n$  ou de  $g$ .

Voyons une seconde façon de calculer  $\Omega_A(g, n)$ . On peut formellement déduire de

(D.1) la fonction génératrice

$$\sum_{n \geq 0} \Omega_A(g, n) y^n = \left( \sum_{s \in A} y^s \right)^g, \quad (\text{D.2})$$

mais cette relation se vérifie facilement en développant le polynôme de droite. Grâce aux expressions

$$(x + x^3)^2 = x^2 + 2x^4 + x^6, \quad (x + x^3)^3 = x^3 + 3x^5 + 3x^7 + x^9,$$

on retrouve par exemple qu'il y a 2 compositions de 4 avec 2 parts prises dans  $A = \{1, 3\}$ , à savoir  $(3, 1)$  et  $(1, 3)$ , mais aucune avec 3 parts dans ce même ensemble. Dans le cas où  $A = \{0, 1\}$ , la formule du binôme de Newton

$$(1 + y)^g = \sum_{n=0}^g \frac{g!}{n!(g-n)!} y^n$$

fournit directement la relation (C.3). De même, la relation (C.6) se déduit de

$$\frac{1}{(1-y)^g} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(n+g-1)!}{n!(g-1)!} y^n.$$

Cependant, il n'y pas d'expressions aussi simples dans le cas général.

Voyons donc une troisième façon de calculer  $\Omega_A(g, n)$ . Une *partition* de  $n$  est une composition *décroissante* (incluant une composition constante) de  $n$ . Il y a par exemple 8 compositions de 4 avec des parts non nulles, dont 5 partitions (soulignées) seulement :

$$\underline{(4)}, \underline{(3, 1)}, \underline{(2, 2)}, (1, 3), \underline{(2, 1, 1)}, (1, 2, 1), (1, 1, 2), \underline{(1, 1, 1, 1)}.$$

Permuter les termes d'une partition de  $n$  fournit donc en règle générale plusieurs compositions de  $n$  ayant les mêmes parts en même nombre. Par exemple, la partition  $(2, 1, 1)$  de 4 fournit les compositions  $(2, 1, 1)$ ,  $(1, 2, 1)$  et  $(1, 1, 2)$ . Compter les compositions fournies par une partition ayant  $g$  parts n'est pas difficile : parmi les  $g!$  permutations possibles, il suffit de regrouper celles qui donnent la même composition. Ce regroupement est possible dès qu'une part apparaît plusieurs fois dans la partition, la permutation des occurrences de cette part étant sans effet. Par exemple, les  $3! = 6$  permutations des termes de la partition  $(2, 1, 1)$  ne fournissent que  $3!/2! = 3$  compositions car la part 1 apparaît 2 fois. Une définition alternative des partitions est donc utile ici, mettant en valeur la multiplicité des parts. Une partition de  $n$  avec  $g$  parts prises dans  $A$  sera donc dorénavant une suite  $\kappa = (\kappa_a)_{a \in A}$  telle que

$$\sum_{a \in A} \kappa_a = g, \quad \sum_{a \in A} a \kappa_a = n, \quad (\text{D.3})$$

et on notera  $P_A(g, n)$  l'ensemble de ces suites. Par exemple, la partition  $(2, 1, 1)$  de 4 avec 3 parts prises dans  $A = [0, 5]$  s'écrira  $(0, 2, 1, 0, 0, 0)$ . Avec cette définition, le nombre de compositions déduites d'une partition  $\kappa$  de  $P_A(g, n)$  sera donc

$$\frac{g!}{\prod_{a \in A} \kappa_a!}.$$

On en déduit immédiatement la formule suivante :

$$\Omega_A(g, n) = \sum_{\kappa \in P_A(g, n)} \frac{g!}{\prod_{a \in A_n} k_a!}. \quad (\text{D.4})$$

Si par exemple  $A = \{0, 1, 2\}$ , on vérifie avec (D.3) que  $P_A(g, n)$  est l'ensemble des suites  $(g - s, 2s - n, n - s)$  telles que  $n/2 \leq s \leq \min(g, n)$ , où  $s = \kappa_1 + \kappa_2$  représente le nombre de parts non nulles. Ceci explique la relation (C.8) de l'annexe C. Notons que la relation (D.4) peut se déduire formellement de (D.2) et de la formule de Faà di Bruno sur la dérivée  $n$ -ième d'une fonction composée.

## Annexe E

# Formulation traditionnelle du mouvement

Dans le chapitre 7 relatif au mouvement de corpuscules soumis à une gravité unité nous avons utilisé une présentation originale. Nous donnons ici une présentation traditionnelle et montrons que les résultats sont identiques.

On postule en premier lieu la loi de la dynamique :  $dp/dt = F(z, t)$  pour une quantité de mouvement  $p(t)$  et un champ de force quelconque  $F(z, t)$ . Ici nous avons :  $F = 1$  et par conséquent :  $p = t$  à une constante additive près, que nous omettons. La relation entre  $p$  et la vitesse  $v = dz/dt$  a été obtenue par Einstein en imposant à l'électromagnétisme le principe galiléen de relativité sous la forme :

$$p = t = \frac{v}{\sqrt{1-v^2}} \implies v = \frac{dz}{dt} = -\frac{t}{\sqrt{1+t^2}}. \quad (\text{E.1})$$

Nous avons posé :  $c = 1$  et choisi le signe négatif devant la racine carrée. Par intégration on obtient le mouvement  $z(t)$  en choisissant les conditions initiales :  $z(0) = E, v(0) = 0$  :

$$z(t, E) = 1 + E - \sqrt{1+t^2}. \quad (\text{E.2})$$

Nous avons  $z = 0$  lorsque  $t = \pm\sqrt{E^2 + 2E}$  de telle sorte que la période du mouvement est :  $\tau(E) = 2\sqrt{E^2 + 2E}$ , ce qui est le résultat donné dans le texte principal.

Puis on définit l'action  $f(E)$  comme l'aire d'un mouvement périodique dans le plan  $z, p$  (ou  $z, t$  dans notre cas particulier). Après une intégration pour obtenir  $f(E)$  et une dérivation par rapport à  $E$  nous obtenons :  $df/dE = 2\sqrt{E^2 + 2E} \equiv \tau(E)$  comme donné dans le texte. Notre formulation évite de passer par les étapes indiquées ci-dessus. Une discussion des conditions dans lesquelles une anisotropie (réelle ou fictive) peut être introduite est donnée par [34].

Puisque dans le cas présent  $t = p$ , en  $z = 0$  nous avons :

$$E = \sqrt{1+p^2} - 1. \quad (\text{E.3})$$

Cette expression s'applique en l'absence de gravité avec  $p$  constant. Elle sera utilisée dans l'annexe F.

## Annexe F

# Formulation quantique

La formulation quantique, donnée ici pour faciliter des comparaisons, consiste essentiellement à donner des valeurs entières  $n = 1, 2, \dots$  à l'action, notée  $f$ . Cette formulation est requise aux températures très basses pour lesquelles seul le premier terme des séries est important.

Nous considérons un corpuscule se déplaçant le long de l'axe des  $z$  et réfléchi en  $z = 0$  et  $z = h$  sous forme d'une onde. Lorsqu'une onde est réfléchi aux extrémités d'un cylindre distantes de  $h$  la longueur d'onde est de la forme :  $\lambda = 2h/n$ ,  $n = 1, 2, 3, \dots$ . Ce résultat peut être visualisé en considérant une corde de violon de longueur  $h$ . L'action est :  $2ph$ , où  $p$  représente la quantité de mouvement (dans le texte principal nous avons appelé  $2p$  l'impact, noté  $i$ ). La résonance de l'onde impose des valeurs discrètes à l'action, posant  $p = \hbar 2\pi/\lambda$ , où  $\hbar$  est une constante universelle (constante de Planck réduite) ayant la dimension d'une action.

Nous avons donc une suite discrète de valeurs possibles de l'énergie donnée en (E.3) :

$$E_n(h) = \sqrt{m^2 + p^2} - m = \sqrt{m^2 + \left(\frac{\pi \hbar}{h}\right)^2 n^2} - m. \quad (\text{F.1})$$

où  $m$  représente la masse du corpuscule et nous avons posé  $c = 1$ .

L'étude du mouvement de corpuscules dans l'atmosphère donnée en annexe B suggère que la probabilité pour qu'un corpuscule ait l'énergie  $E$  est proportionnelle à :  $p_n = \exp(-\beta E_n)$  où  $T \equiv 1/\beta$ , posant la constante de Boltzmann égale à 1.

On appelle «fonction de partition»  $Z$  la somme des  $p_n$  de  $n = 1$  à  $n = \infty$ . La probabilité que le corpuscule occupe le niveau  $n$  s'écrit alors :

$$P_n(\beta, h) = \frac{\exp(-\beta E_n(h))}{Z(\beta, h)} \quad Z(\beta, h) \equiv \sum_{n=1}^{\infty} \exp(-\beta E_n(h)). \quad (\text{F.2})$$

Si le corpuscule se trouvait avec certitude dans l'état d'énergie  $E_n(h)$  la force correspondante serait :  $F_n = -dE_n(h)/dh$ . Compte tenu de la loi de probabilité ci-dessus, la

force moyenne s'écrit :

$$\langle F(\beta, h) \rangle = - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{dE_n}{dh} P(\beta, h) = \frac{1}{\beta} \frac{\partial \ln(Z(\beta, h))}{\partial h} \quad (\text{F.3})$$

en dérivant l'exponentielle sous le signe de sommation. Nous avons employé le signe des dérivées partielles dans la seconde expression pour rappeler que la température, et par conséquent  $\beta$ , est ici constante.

Les expressions précédentes conduisent bien aux formules précédemment établies dans la limite où la sommation sur l'indice  $n$  peut être remplacé par une intégration, ce qui est justifié si l'action du mouvement est grande par rapport à la constante de Planck. Nous avons alors :

$$\begin{aligned} Z &= \int_0^{\infty} dn \exp \left( -\beta \left( \sqrt{m^2 + \left( \frac{\pi \hbar}{h} \right)^2 n^2} - m \right) \right) \\ &\propto h \int_0^{\infty} dp \exp \left( -\beta \left( \sqrt{m^2 + p^2} - m \right) \right) \\ \Rightarrow \ln(Z) &= \ln(h) + f(\beta) \end{aligned} \quad (\text{F.4})$$

où  $f(\cdot)$  est une fonction un peu compliquée. Ceci donne :

$$\langle F \rangle = \frac{1}{\beta} \frac{\partial \ln(Z)}{\partial h} = \frac{1}{\beta h}. \quad (\text{F.5})$$

La loi des gaz parfaits :  $\langle F \rangle h = T$  est donc valable à toutes températures, sauf aux températures très petites pour lesquelles la somme sur  $n$  ne peut pas être remplacée par une intégrale.

L'énergie moyenne est :

$$U(\beta, h) = \sum_{n=1}^{\infty} E_n(h) P_n(\beta, h) = \frac{\sum_{n=1}^{\infty} E_n(h) \exp(-\beta E_n(h))}{Z(\beta, h)} = - \frac{\partial \ln(Z(\beta, h))}{\partial \beta} \quad (\text{F.6})$$

en dérivant l'exponentielle sous le signe de sommation. Nous avons employé le signe des dérivées partielles dans la dernière expression pour rappeler que  $h$  est gardé constant.

L'expression générale (F.6) coïncide avec le résultat (6.3) du texte principal (en posant  $m = 1$ ), car l'expression de  $Z(\beta)$  donnée ci dessus, (F.4), se ramène à une constante près à celle qui a été donnée en (7.5) par un simple changement de variable d'intégration :  $E = \sqrt{1 + p^2} - 1$  donne :  $2 \frac{dp}{dE} = \frac{d\tau}{dE} \equiv \tau'(E)$ , où  $\tau(E) = 2\sqrt{E^2 + 2E}$ .