

École Doctorale de Sciences Mathématiques de Paris Centre

## THÈSE DE DOCTORAT

présentée pour obtenir le grade de

**DOCTEUR DE L'UNIVERSITÉ PIERRE ET MARIE  
CURIE**

Discipline : Mathématiques

par

**François CHAPON**

---

**Processus de Dunkl, matrices aléatoires, et  
marches aléatoires sur des espaces  
non-commutatifs**

---

Sous la direction de Philippe BIANE

Soutenue le 8 décembre 2010 devant le jury composé de :

M. Philippe BIANE	Université de Marne-la-Vallée	Directeur
M. Philippe BOUGEROL	Université Pierre et Marie Curie	Examinateur
M. Nathanaël ENRIQUEZ	Université Paris Ouest	Examinateur
M. Léonard GALLARDO	Université de Tours	Rapporteur
M. Emmanuel LESIGNE	Université de Tours	Examinateur
M. Alain ROUAULT	Université de Versailles	Examinateur

au vu des rapports de :

M. Léonard GALLARDO	Université de Tours
M. Neil O'CONNELL	University of Warwick

Laboratoire de Probabilités et Modèles Aléatoires  
4, place Jussieu  
75252 Paris Cedex 05

École doctorale de Paris Centre  
4, place Jussieu  
75252 Paris Cedex 05

# Remerciements

Je tiens bien évidemment à exprimer ma profonde reconnaissance envers Philippe Biane, pour avoir accepté d'encadrer cette thèse. J'ai ainsi pu bénéficier de sa vision fascinante des mathématiques, et m'atteler à des problèmes très variés et passionnants. J'ai beaucoup appris grâce à lui et je le remercie pour ses nombreux conseils, sa disponibilité, mais aussi pour sa patience sans défaut. J'espère que nombreuses seront les occasions où je pourrais l'embêter de nouveau.

Léonard Gallardo et Neil O'Connell ont accepté d'être les rapporteurs de ma thèse, je les remercie très sincèrement pour leur lecture précieuse et attentive. C'est avec beaucoup de plaisir que je compte aujourd'hui Léonard Gallardo parmi les membres de mon jury, et j'ai eu plusieurs fois l'opportunité de croiser Neil O'Connell, en Irlande et en France, et nos quelques échanges –mathématiques ou non–, auront été très agréables.

Je suis aussi très honoré de la présence de Philippe Bougerol, Nathanaël Enriquez, Emmanuel Lesigne et d'Alain Rouault dans mon jury.

Je tiens à particulièrement remercier Philippe Bougerol pour les nombreuses fois, où me voyant errer dans les couloirs du laboratoire, il m'a prodigué ses conseils, encouragements, mais aussi ses traits d'humour, et ceci toujours tout souriant. C'est avec une réelle émotion que je le compte aujourd'hui parmi les membres de mon jury.

Un été quelque peu désert à Chevaleret, j'ai pu profiter de nombreuses discussions enrichissantes avec Nathanaël Enriquez, et je tiens à le remercier pour ça aussi.

J'ai eu la chance de suivre les cours de quelques esthètes des mathématiques, dont les enseignements auront été déterminants pour toute la suite. Notamment, et bien qu'ils l'ignorent sans doute, mais Francis Comets et François Delarue sont à l'origine de mon goût pour les probas, et méritent donc bien un merci.

Le laboratoire ne serait certainement pas ce qu'il est, sans toutes les personnes que le hasard des groupes de travail, enseignements, et autres pauses cafés, m'aura permis de croiser. Il m'est certes impossible de toutes les citer, mais en voici tout de même un petit florilège : Frédérique Petit qui m'aura initié avec beaucoup d'enthousiasme à la médiation scientifique avec les collégiens, Marc Yor et ses conseils avisés, Omer Adelman et sa vision bien à lui de l'enseignement, Irina Kourkova et Michèle Thiullen pour tout le plaisir que j'ai pris à enseigner pour elles. Je n'oublie pas non plus les amis Fanny et Cédric.

Je serais bien peu reconnaissant sans remercier Florent Benaych-Georges, pour avoir travaillé avec moi et m'avoir sorti d'abîmes où je commençais à doucement m'enfoncer (et aussi pour m'avoir fait découvrir les black keys).

Il y a bien sûr le camarade Amaury et son amitié grandissante, particulièrement cette dernière année.

Il y a aussi les thésards du labo, qui d'ailleurs pour la plupart ne le sont plus : Clément, Vincent (66, toujours pas ?), l'ami Abass (qui aura supporté mes humeurs pendant quatre ans), grand François, Kilian, Nathalie, Julien, Bruno, Paul, Olivier, Marie, Thanh Mai, et tous les autres.

Je n'oublie pas l'équipe administrative du labo, Isabelle, Josette, Maria, Valérie, Philippe, et bien sûr M. Portès, pour m'avoir tiré plusieurs fois d'énigmes administratives ou informatiques, mais surtout pour leur sympathie.

Et puis il y a tout ceux qui, étrangers aux maths ou non, auront fait que je n'ai pas passé ma vie sur cette thèse, et qui y auront tout de même plus que contribué.

Tout d'abord, il y a Manon. . . Cette thèse te doit beaucoup, sans toi, je n'ose pas trop imaginer où j'en serais. Pas seulement pour tout le plaisir que j'ai pris à travailler avec toi (y compris les changements de virgules à une heure avancée de la nuit), mais surtout pour ton amitié paisible et bienveillante. Bref, tout ceci t'est un peu dédié quand même.

Je ne saurais exprimer tout ce que représente pour moi mes petites Laura et Juliette adorées, mais elles le savent sans doute, et je ne m'épancherai donc pas plus ici, bien que leur présence quotidienne me manque terriblement.

Je pense bien sûr à ma famille, mes parents, Perrine, Alice, mais aussi mes p'tits n'veux et tout ce qu'ils m'apportent.

Merci aussi aux jungle's Laurent, Pierre et Serge, pour les heures passées dans des pièces confinées à, n'ayons pas peur des mots, révolutionner le rock, mais surtout à oublier tout le reste.

Et enfin, qu'ils lisent ces lignes où non, qu'ils soient présents ou non, ou qu'ils ouvrent la première page tout en s'empressant de la refermer ou non, je pense à Ben, Vic et Omar, pour leur amitié constante depuis tant d'années, et qui auront assisté d'un oeil hagard, et parfois transi, aux différents états du thésard, et aussi à Éric, Cyprien, Clém, Béné, VV. . .

# Table des matières

<b>Introduction</b>	<b>7</b>
0.1 Processus de Dunkl affine . . . . .	7
0.2 Matrices aléatoires quaternioniques . . . . .	14
0.3 Marches aléatoires quantiques et mineurs du mouvement brownien hermitien	20
0.4 Propriété d'entrelacement des opérateurs de Schrödinger . . . . .	31
<b>1 Affine Dunkl processes</b>	<b>35</b>
1.1 Introduction . . . . .	35
1.2 The radial affine Dunkl process . . . . .	40
1.3 The affine Dunkl process . . . . .	47
<b>2 Gaussian quaternionic matrices</b>	<b>55</b>
2.1 Introduction . . . . .	55
2.2 Convergence of the spectral distribution . . . . .	57
2.3 Main result . . . . .	63
2.4 Quadratic potential and uniform measure on $\mathbb{S}(\mathbb{H})$ . . . . .	67
2.5 Appendix . . . . .	69
<b>3 Quantum random walks and minors of Hermitian Brownian motion</b>	<b>73</b>
3.1 Introduction . . . . .	73
3.2 Universal enveloping algebra . . . . .	74
3.3 Quantum Markov chain . . . . .	75
3.4 Restriction to a subalgebra . . . . .	77
3.5 Random matrices . . . . .	82
<b>4 Interlacing property of Schrödinger operators</b>	<b>87</b>
4.1 Introduction . . . . .	87
4.2 Notations . . . . .	88
4.3 Green's formula . . . . .	90
4.4 Nodal theorem and zeros of eigenvectors . . . . .	92
<b>Bibliographie</b>	<b>95</b>



# Introduction

Ce travail de thèse comporte quatre chapitres indépendants dont nous donnons ici une introduction et un résumé des principaux résultats obtenus, ainsi que le contexte dans lequel ils s'inscrivent. Le premier chapitre porte sur la construction du processus de Dunkl affine, qui est un processus de Markov càdlàg dont le générateur infinitésimal est donné par le laplacien de Dunkl pour un système de racines de type affine. Le second chapitre est consacré à l'étude des valeurs propres à droite de matrices aléatoires gaussiennes à entrées quaternioniques. Dans le troisième chapitre, nous étudions des marches aléatoires non-commutatives qui sont des approximations en temps discret de certains processus des valeurs propres issus des mineurs du mouvement brownien hermitien. Enfin, dans le dernier chapitre nous montrons un théorème de type Courant sur la propriété d'entrelacement des zéros des fonctions propres d'un opérateur de Schrödinger sur un arbre fini.

## 0.1 Processus de Dunkl affine

Le premier chapitre de cette thèse consiste en la construction et l'étude de l'analogie du processus de Dunkl dans le cadre du système de racines de type affine  $A_1^{(1)}$ . Il s'agit d'un processus de Markov càdlàg  $(Y_t)_{t \geq 0}$ , à valeurs dans  $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}$  p.s., et dont le générateur infinitésimal est donnée par

$$\mathcal{A}u(y) = \frac{1}{2}u''(y) + k\pi \cot(\pi y)u'(y) + \frac{k}{2} \sum_{p \in \mathbb{Z}} \frac{u(s_p(y)) - u(y)}{(y-p)^2},$$

pour  $u \in C_b^2(\mathbb{R})$ , et  $y \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}$ , où  $k$  est le paramètre du processus, qui est un réel vérifiant  $k \geq \frac{1}{2}$ , et  $s_p$  la réflexion affine par rapport à  $p$ , c'est-à-dire que  $s_p(y) = -y + 2p$ . La partie radiale de ce processus, appelée processus de Dunkl affine radial, est le processus de Feller continu, de générateur

$$\mathcal{L}u(y) = \frac{1}{2}u''(y) + k\pi \cot(\pi y)u'(y)$$

pour  $u \in C([0, 1]) \cap C^2(]0, 1[)$ . La construction du processus de Dunkl affine va s'effectuer à l'aide d'une décomposition en « skew-product » du processus par sa partie radiale et un processus de sauts sur le groupe de Weyl affine. Commençons par quelques rappels sur les systèmes de racines et les groupes de Weyl.

### 0.1.1 Systèmes de racines et groupes de réflexion

On introduit ici la notion classique de système de racines et de groupes de réflexion, en s'appuyant sur le livre [Hum90]. Soit  $V$  un espace euclidien réel de dimension finie, muni d'un produit scalaire  $\langle \cdot, \cdot \rangle$ . Pour un vecteur  $\alpha \in V$ , on définit la réflexion orthogonale  $\sigma_\alpha$  associée à  $\alpha$  par

$$\sigma_\alpha(x) = x - 2 \frac{\langle \alpha, x \rangle}{\langle \alpha, \alpha \rangle} \alpha,$$

pour  $x \in V$ , et on note  $\mathcal{H}_\alpha$  l'hyperplan orthogonal à  $\alpha$ , c'est-à-dire

$$\mathcal{H}_\alpha = \{x \in V \mid \langle \alpha, x \rangle = 0\}.$$

Par définition, un *système de racine cristallographique*  $\mathcal{R}^0$  est un sous-ensemble fini de  $V$ , vérifiant les conditions suivantes :

- (i)  $\mathcal{R}^0$  engendre  $V$ ,
- (ii) Pour tout  $\alpha \in \mathcal{R}^0$ ,  $\sigma_\alpha(\mathcal{R}^0) = \mathcal{R}^0$ ,
- (iii) Pour tout  $\alpha \in \mathcal{R}^0$ ,  $\alpha^\vee(\mathcal{R}^0) \subset \mathbb{Z}$ ,

où les éléments de  $\mathcal{R}^0$  sont appelés *racines*, et la *co-racine*  $\alpha^\vee$  est définie par  $\alpha^\vee = 2 \frac{\alpha}{\langle \alpha, \alpha \rangle}$  de telle sorte que  $\langle \alpha^\vee, \alpha \rangle = 2$  pour tout  $\alpha \in \mathcal{R}^0$ . On appelle *rang* de  $\mathcal{R}^0$  la dimension de  $V$ . Le *groupe de Weyl*  $W^0$  associé à  $\mathcal{R}^0$  est le sous-groupe du groupe orthogonal  $O(V)$ , engendré par les réflexions  $\sigma_\alpha$ ,  $\alpha \in \mathcal{R}^0$ . On sait que  $W^0$  est un groupe fini pour tout système de racine de  $\mathbb{R}^n$ . Introduisons la notion de racines positives. On se fixe un vecteur  $\beta$  arbitrairement choisi dans  $V$ , et tel que  $\beta \notin \mathcal{R}^0$ . Alors, tout système de racine peut se décomposer en une union disjointe  $\mathcal{R}^0 = \mathcal{R}_+^0 \cup (-\mathcal{R}_+^0)$ , où  $\mathcal{R}_+^0$  et  $-\mathcal{R}_+^0$  sont séparés par l'hyperplan  $\{x \in V \mid \langle \beta, x \rangle = 0\}$ . L'ensemble  $\mathcal{R}_+^0$  est appelé un sous-système positif. Soit

$$C = \{x \in V \mid \forall \alpha \in \mathcal{R}_+^0, \langle \alpha, x \rangle > 0\}$$

la *chambre de Weyl* associée. On notera  $\overline{C}$  son adhérence, et  $\partial C$  sa frontière, qui est une union d'hyperplans  $\mathcal{H}_\alpha$ , qui sont appelés les *murs* de  $C$ . Un point important est le fait que  $\overline{C}$  est un domaine fondamental pour l'action de  $W^0$  sur  $V$ . Ainsi,  $W^0$  permute les chambres du système, où chambre désigne n'importe quelle composante connexe de  $V \setminus \bigcup_{\alpha \in \mathcal{R}^0} \mathcal{H}_\alpha$ .

Tout les systèmes de racines de  $\mathbb{R}^n$  ont été classifiés, les détails se trouvant dans [Hum90]. Pour illustrer notre propos, mentionnons l'exemple du système de racine  $A_{n-1}$ , pour  $n \geq 2$ , qui est l'ensemble

$$\{\pm(e_i - e_j) \mid 1 \leq i < j \leq n\},$$

où  $(e_i)_{1 \leq i \leq n}$  est la base standard de  $\mathbb{R}^n$ , et  $V$  est l'hyperplan orthogonal au vecteur  $e_1 + \dots + e_n$ . Le groupe de Weyl associé, est dans ce cas isomorphe au groupe symétrique  $\mathcal{S}_n$ , et la chambre de Weyl est le cône

$$\{(x_1, \dots, x_{n-1}) \in \mathbb{R}^{n-1} \mid 0 < x_1 < \dots < x_{n-1}\}.$$

Si l'on veut considérer non seulement les réflexions orthogonales, laissant fixe l'origine de  $V$ , mais aussi les *réflexions affines* associées aux hyperplans qui ne passent pas par l'origine, on introduit alors, un système de racine  $\mathcal{R}^0$  étant donné, le *système de racines*

*affine* correspondant, défini comme le produit direct  $\mathcal{R} = \mathcal{R}^0 \times \mathbb{Z}$ . Explicitement, on notera  $\lambda = (\alpha, p) \in \mathcal{R}$ , avec  $\alpha \in \mathcal{R}^0$ , et  $p \in \mathbb{Z}$ . On définit alors, pour  $x \in V$

$$\lambda(x) = \langle \alpha, x \rangle - p,$$

et la réflexion affine associée à  $\lambda$  par

$$s_\lambda(x) = s_{(\alpha, p)}(x) = x - \langle \alpha, x \rangle \alpha^\vee + p \alpha^\vee.$$

Le sous-système de racines affine positif est alors défini par

$$\mathcal{R}_+ = \{(\alpha, 0) \mid \alpha \in \mathcal{R}_+^0\} \cup \{(\alpha, p) \mid \alpha \in \mathcal{R}^0, p \leq -1\}.$$

Le *groupe de Weyl affine*  $W$  est le sous-groupe du groupe des transformations affines de  $V$ , engendré par les réflexions affines  $s_\lambda$ , pour  $\lambda \in \mathcal{R}$ . On peut montrer que  $W$  est le produit semi-direct de  $W^0$  et du groupe des translations correspondant au réseau engendré par les co-racines de  $\mathcal{R}^0$ . Pour tout  $\lambda = (\alpha, p) \in \mathcal{R}$ , l'hyperplan affine associé est défini par

$$\mathcal{H}_\lambda = \{x \in V \mid \langle \alpha, x \rangle = p\}.$$

Soit  $\mathcal{A}$  l'ensemble des composantes connexes de  $V^\circ = V \setminus \bigcup_{\lambda \in \mathcal{R}} \mathcal{H}_\lambda$ . Tout élément de  $\mathcal{A}$  est appelé une *alcôve*. Comme pour les chambres, on se donne une alcôve particulière

$$\mathcal{A}_0 = \{x \in V \mid 0 < \langle \alpha, x \rangle < 1 \text{ pour tout } \alpha \in \mathcal{R}_+^0\},$$

appelée *l'alcôve principale*. On a alors que le groupe de Weyl affine permute l'ensemble  $\mathcal{A}$  de toutes les alcôves transitivement, et l'alcôve principale  $\mathcal{A}_0$  est un domaine fondamental pour l'action de  $W$  sur  $V$ .

Le cadre qui nous intéressera par la suite, est celui du système de racines de rang 1, noté  $A_1^{(1)}$ , qui se réduit à  $\mathcal{R}^0 = \{\pm\alpha\}$  et  $\mathcal{R}_+^0 = \{\alpha\}$ . On peut alors identifier  $\alpha$  avec 1,  $\alpha^\vee$  avec 2, et le sous-système de racines affines positives s'identifie à

$$\mathcal{R}_+ = \mathcal{R}_+^0 \cup \{(\pm 1, p) \mid p \leq -1\}.$$

On notera alors, pour  $p \in \mathbb{Z}$ ,

$$s_p(x) = -x + 2p$$

la réflexion affine par rapport à  $p$ . Le groupe de Weyl affine est dans ce cas isomorphe au groupe diédral infini, et l'alcôve principale n'est rien d'autre que l'intervalle  $]0, 1[$ . Par la suite, on utilisera alors aussi bien alcôve ou intervalle, pour désigner un intervalle de la forme  $]n, n + 1[$ , pour  $n \in \mathbb{Z}$ .

### 0.1.2 Processus de Dunkl

On pourra trouver un excellent exposé de ce qui est actuellement connu sur les opérateurs et les processus de Dunkl dans le livre [CDG<sup>+</sup>08].

D'un point de vue analytique, la théorie a été initiée par Dunkl ([Dun89]), qui étudia les opérateurs différentiels aux différences définis par

$$T_i u(x) = \frac{\partial u(x)}{\partial x_i} + \sum_{\alpha \in \mathcal{R}_+^0} k(\alpha) \alpha_i \frac{u(x) - u(\sigma_\alpha(x))}{\langle x, \alpha \rangle},$$

où  $u \in C^1(V)$ , et  $k$  est une fonction de multiplicité, c'est-à-dire que  $k: \mathcal{R}^0 \rightarrow \mathbb{R}_+$  est une fonction invariante par l'action du groupe de Weyl  $W^0$  associé à  $\mathcal{R}^0$ , i.e.  $k \circ w = k$

pour tout  $w \in W^0$ . Une des plus importantes propriétés de ces opérateurs de Dunkl, est le fait qu'ils engendrent une algèbre commutative d'opérateurs, ce qui est à la base de nombreuses propriétés analytiques.

Le laplacien de Dunkl  $\mathcal{L}^0$  est alors défini par

$$\mathcal{L}^0 = \sum_{i=1}^n T_i^2,$$

et a pour expression explicite

$$\mathcal{L}^0 u(x) = \frac{1}{2} \Delta u(x) + \sum_{\alpha \in \mathcal{R}_+^0} k(\alpha) \left( \frac{\langle \nabla u(x), \alpha \rangle}{\langle x, \alpha \rangle} + \frac{|\alpha|^2}{2} \frac{u(\sigma_\alpha(x)) - u(x)}{\langle x, \alpha \rangle^2} \right),$$

agissant sur  $u \in C^2(V)$ . Ceci généralise la partie radiale de l'opérateur de Laplace-Beltrami sur un espace symétrique Riemannien de type euclidien, obtenu pour  $k$  ne prenant que certaines valeurs.

D'un point de vue probabiliste, l'étude des processus de Dunkl a été initié par Rösler et Voit dans [RV98], et a été étudié par la suite par notamment Gallardo et Yor dans [GY06b, GY06a, GY05] et Chybiryakov dans [Chy08]. Les processus de Dunkl sont une famille de processus de Markov càdlàg (*i.e.* continue à droite et limite à gauche), de paramètre  $k$ , dont le générateur infinitésimal est le laplacien de Dunkl  $\mathcal{L}^0$ . On remarque par son expression explicite, que  $\mathcal{L}^0$  ne dépend pas du choix de  $\mathcal{R}^0$ . Une chambre de Weyl étant fixée, la partie radiale du processus de Dunkl est la projection canonique du processus de Dunkl sur la chambre de Weyl. Le processus de Dunkl radial est alors le processus de Feller continu, de générateur infinitésimal

$$\mathcal{L}^{0,W^0} u(x) = \frac{1}{2} \Delta u(x) + \sum_{\alpha \in \mathcal{R}_+^0} k(\alpha) \frac{\langle \nabla u(x), \alpha \rangle}{\langle x, \alpha \rangle},$$

où  $u \in C_0^2(\overline{C})$ , l'ensemble des fonctions  $C^2$  sur  $C$ , continues sur  $\overline{C}$ , qui s'annulent sur la frontière de  $\overline{C}$ , et telles que  $\langle \nabla u(x), \alpha \rangle = 0$  pour  $x \in \mathcal{H}_\alpha$ ,  $\alpha \in \mathcal{R}_+^0$ . On remarque que  $\mathcal{L}^{0,W^0}$  s'obtient à partir de  $\mathcal{L}^0$  en faisant agir  $\mathcal{L}^0$  sur les fonctions invariantes par  $W^0$ . Il est intéressant de noter que, lorsque  $k \equiv 1$ , le processus de Dunkl radial est le mouvement brownien dans une chambre de Weyl, étudié par Biane, Bougerol et O'Connell dans [BBO05].

Le processus de Dunkl radial est l'unique solution de l'équation différentielle stochastique

$$dX_t^0 = dB_t + \sum_{\alpha \in \mathcal{R}_+^0} k(\alpha) \alpha \frac{dt}{\langle X_t^0, \alpha \rangle},$$

où  $(B_t)_{t \geq 0}$  est un mouvement brownien  $n$ -dimensionnel, et  $X_0^0 \in C$  presque sûrement. De plus, lorsque  $k(\alpha) \geq \frac{1}{2}$  pour tout  $\alpha \in \mathcal{R}^0$ ,  $X^0$  vit dans  $C$  presque sûrement, *i.e.*  $X^0$  n'atteint jamais les murs de la chambre de Weyl  $C$ . Rappelons d'autres propriétés intéressantes du processus de Dunkl, que l'on notera  $(Y_t^0)_{t \geq 0}$ . Tout d'abord, on voit de par son expression explicite, que  $\mathcal{L}^0$  se décompose en une partie continue et une partie à sauts donnée par les différences  $\sum_{\alpha \in \mathcal{R}_+^0} k(\alpha) \frac{u(\sigma_\alpha(x)) - u(x)}{\langle x, \alpha \rangle^2}$ . On peut alors montrer que le nombre de sauts dans un intervalle de temps fini est fini p.s., et quand le processus saute à un instant  $t$ , il existe une réflexion aléatoire  $\sigma_\alpha$ , telle que  $Y_t^0 = \sigma_\alpha Y_{t-}^0$ . Ainsi, le processus de Dunkl saute de chambre en chambre, sans toucher les murs des différentes chambres. Une propriété

remarquable est que le processus de Dunkl est le premier exemple connu de processus de Markov à sauts, qui vérifie la propriété d'inversion du temps, comme le mouvement brownien ou le processus de Bessel par exemple. Une autre propriété à noter, et qui tient une certaine importance dans notre étude du cas affine, est la décomposition en « skew-product » établie par Chybiryakov dans [Chy08]. Il obtient une méthode pour construire le processus de Dunkl, en partant de sa partie radiale et en ajoutant successivement les sauts dans la direction des racines.

Pour finir, citons que l'analogie des processus de Dunkl dans le cadre des espaces Riemanniens de courbure négative, qui sont appelés processus de Heckman-Opdam, ont été étudiés par Schapira dans [Sch07]. Ce sont là encore des processus de Markov à sauts, de générateur infinitésimal donné par

$$\mathcal{D}f(x) = \frac{1}{2}\Delta f(x) + \sum_{\alpha \in \mathcal{R}_+^0} k(\alpha) \left( \coth \frac{\langle \alpha, x \rangle}{2} \partial_\alpha f(x) + \frac{|\alpha|^2}{4 \sinh^2 \frac{\langle \alpha, x \rangle}{2}} (f(\sigma_\alpha(x)) - f(x)) \right),$$

pour  $f \in C_b^2(V)$  et  $x \in V \setminus \bigcup_{\alpha \in \mathcal{R}^0} \mathcal{H}_\alpha$ .

### 0.1.3 Processus de Dunkl affine

On vient de voir que le processus de Dunkl de paramètre  $k$  est le processus de Markov de générateur infinitésimal

$$\mathcal{L}^0 u(x) = \frac{1}{2}\Delta u(x) + \sum_{\alpha \in \mathcal{R}_+^0} k(\alpha) \left( \frac{\langle \nabla u(x), \alpha \rangle}{\langle x, \alpha \rangle} + \frac{|\alpha|^2}{2} \frac{u(\sigma_\alpha(x)) - u(x)}{\langle x, \alpha \rangle^2} \right),$$

pour  $u \in C_b^2(V)$ , et  $x \in V \setminus \bigcup_{\alpha \in \mathcal{R}^0} \mathcal{H}_\alpha$ . Pour définir l'analogie de ce processus dans le cadre d'un système de racines affine, l'idée est alors de remplacer le système de racines  $\mathcal{R}^0$  par un système de racines affine  $\mathcal{R}$ . On se restreint uniquement à l'étude du cas d'un système de racine de rang 1, *i.e.*  $\mathcal{R}^0 = \{\pm\alpha\}$  et  $\mathcal{R}_+^0 = \{\alpha\}$ , où on identifiera  $\alpha$  avec 1. L'expression de  $\mathcal{L}^0$  est alors

$$\mathcal{L}^0 u(x) = \frac{1}{2}u''(x) + k \frac{u'(x)}{x} + k \frac{u(-x) - u(x)}{2x^2},$$

en posant  $k = k(\alpha)$ . Rappelons tout d'abord la décomposition en série de la fonction cotangente due à Euler (voir [AZ06]) :

$$\pi \cot(\pi x) = \frac{1}{x} + \sum_{n \geq 1} \left( \frac{1}{x+n} + \frac{1}{x-n} \right),$$

pour  $x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}$ , qui peut aussi s'écrire de façon plus élégante

$$\pi \cot(\pi x) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} \frac{1}{x-n}.$$

Il faut tout de même remarquer que cette écriture est quelque peu dangereuse, du fait que cette série n'est pas absolument convergente, et sa valeur est donc subordonnée à un choix judicieux de l'ordre de sommation. Remplaçant alors dans l'expression de  $\mathcal{L}^0$ ,  $\mathcal{R}_+^0$  par son analogue affine  $\mathcal{R}_+$ , on obtient que l'analogie de  $\mathcal{L}^0$  dans le cas affine, noté  $\mathcal{A}$ , s'écrit après calculs

$$\mathcal{A}u(x) = \frac{1}{2}u''(x) + k\pi \cot(\pi x)u'(x) + \frac{k}{2} \sum_{p \in \mathbb{Z}} \frac{u(s_p(x)) - u(x)}{(x-p)^2}.$$

On cherche donc à construire un processus dont le générateur infinitésimal est donné par  $\mathcal{A}$ . Pour se faire, nous allons établir une décomposition en « skew-produit » analogue à celle de Chybiryakov, c'est-à-dire que l'on va partir du processus radial et ajouter les sauts successivement. La première étape est donc de définir le processus de Dunkl affine radial, correspondant à la partie continue du générateur  $\mathcal{A}$ .

**Définition 0.1.1.** Le processus de Dunkl affine radial de paramètre  $k$ , est l'unique solution de l'équation différentielle stochastique suivante :

$$dX_t = dB_t + k\pi \cot(\pi X_t)dt,$$

avec pour condition initiale  $X_0 = x \in ]0, 1[$  p.s., et où  $(B_t)_{t \geq 0}$  est un mouvement brownien standard.

Ainsi, le processus de Dunkl affine radial  $(X_t)_{t \geq 0}$  est le processus de Feller, à trajectoires continues, de générateur infinitésimal

$$\mathcal{L}u(x) = \frac{1}{2}u''(x) + k\pi \cot(\pi x)u'(x),$$

pour  $u \in C([0, 1]) \cap C^2(]0, 1[)$ . De même que pour les processus de Dunkl, on montre que si  $S$  désigne le premier temps d'atteinte du bord de  $]0, 1[$ , *i.e.*

$$S = \inf\{t \geq 0 \mid X_t = 0 \text{ ou } 1\},$$

alors  $\mathbb{P}(S = +\infty) = 1$  si et seulement si  $k \geq \frac{1}{2}$ . La théorie des polynômes orthogonaux nous permet d'étudier le semigroupe du processus  $(X_t)_{t \geq 0}$ , dont l'expression s'écrit

$$q_t(x, y)dy = \sum_{n \geq 0} e^{-\lambda_n t} G_n^{(k)}(\cos \pi x) G_n^{(k)}(\cos \pi y) \omega_n^{(k)}(\sin \pi y)^{2k} dy,$$

sur  $]0, 1[ \times ]0, 1[$ , où les  $G_n^{(k)}$  sont les polynômes de Gegenbauer de valeurs propres  $\lambda_n$ , et  $\omega_n^{(k)}$  une constante de normalisation. Rappelons que les polynômes de Gegenbauer  $G_n^{(k)}$  peuvent s'exprimer en fonction des polynômes de Jacobi  $P_n^{(k-\frac{1}{2}, k-\frac{1}{2})}$ , et sont orthogonaux pour la mesure  $(1-x^2)^{k-\frac{1}{2}} \mathbb{1}_{[-1,1]}(x)dx$ . Ceci nous permet d'étudier le comportement de la fonctionnelle

$$\eta_t = \frac{k\pi^2}{2} \int_0^t \frac{ds}{\sin^2(\pi X_s)},$$

qui nous servira pour la construction du processus affine.

Passons alors à la construction du processus affine. On définit le processus de Dunkl affine par une décomposition en « skew-produit » par le processus radial  $X$  et un processus de sauts  $(w_t)_{t \geq 0}$  sur le groupe de Weyl, avec un changement de temps. Pour cela, soit  $(N_t)_{t \geq 0}$  un processus de Poisson de paramètre 1, indépendant de  $X$ , et dont les temps de sauts sont notés  $(\tau_n)_{n \geq 0}$ . La fonctionnelle  $(\eta_t)_{t \geq 0}$  définissant un changement de temps, on pose  $a$  son inverse, *i.e.*  $a(t) = \inf\{s \geq 0 \mid \eta_s > t\}$ . Le processus  $\tilde{X}$ , défini par  $\tilde{X}_t = X_{a(t)}$  est alors un processus de Markov de générateur

$$\tilde{\mathcal{L}}u(x) = \frac{2 \sin^2(\pi x)}{k\pi^2} \mathcal{L}u(x),$$

pour  $u \in C_b^2(\mathbb{R})$ . On introduit alors des variables aléatoires  $(\beta_j)_{j \geq 1}$  sur  $W$ , dont la loi dépend de la position du processus aux instants  $\tau_n$ . Plus précisément, on construit de façon récursive les v.a.  $\beta_j$  et des processus  $\tilde{X}^j$  en posant

$$\tilde{X}_t^j = \beta_j \cdot \tilde{X}_t^{j-1},$$

avec  $\tilde{X}_t^0 = \tilde{X}_t$ , la loi de  $\beta_j$  conditionnellement à l'événement  $\{\tilde{X}_{\tau_j}^{j-1} = x\}$ , étant donnée par

$$\sigma^x(dw) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} \frac{\sin^2(\pi x)}{\pi^2} \frac{1}{(x-n)^2} \delta_{s_n}(dw),$$

où  $s_n$  est la réflexion affine par rapport à  $n \in \mathbb{Z}$ . On définit alors un processus de sauts sur le groupe de Weyl  $W$  par

$$w_t = \beta_n \cdots \beta_1, \quad \text{sur } t \in [\tau_n, \tau_{n+1}[.$$

Nous obtenons alors le théorème suivant qui nous assure l'existence du processus de Dunkl affine.

**Théorème 0.1.2.** *Soit  $(X_t)_{t \geq 0}$  le processus de Dunkl radial de paramètre  $k \geq \frac{1}{2}$ . Le processus  $(Y_t)_{t \geq 0}$  défini par*

$$Y_t = w_{\eta_t} \cdot X_t,$$

*pour tout  $t \geq 0$ , est un processus de Markov, càdlàg, à valeurs dans  $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}$  p.s., et de générateur infinitésimal*

$$\mathcal{A}u(y) = \frac{1}{2}u''(y) + k\pi \cot(\pi y)u'(y) + \frac{k}{2} \sum_{p \in \mathbb{Z}} \frac{u(s_p(y)) - u(y)}{(y-p)^2},$$

*pour  $f \in C_b^2(\mathbb{R})$  et  $y \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}$ .*

On appelle le processus  $(Y_t)_{t \geq 0}$  le *processus de Dunkl affine* de paramètre  $k$ . C'est donc un processus càdlàg, qui saute sur les différentes alcôves de  $\mathbb{R}$  et dont la partie radiale est le processus de Dunkl affine radial  $(X_t)_{t \geq 0}$ , c'est-à-dire que  $\pi(Y_t) = X_t$  où  $\pi$  est la projection canonique de  $\mathbb{R}$  sur l'espace des  $W$ -orbites dans  $\mathbb{R}$ , et qui s'identifie avec l'alcôve principale. On vérifie que le processus est bien défini, et que dans tout intervalle de temps fini, il n'y a qu'un nombre fini de sauts. Comme dans le cas classique, on obtient sa décomposition en partie martingale locale continue et purement discontinue.

**Proposition 0.1.3.** *Le processus de Dunkl affine  $Y$  vérifie la décomposition suivante,*

$$Y_t = Y_0 + B_t + M_t,$$

*où  $(B_t)_{t \geq 0}$  est un mouvement brownien standard et  $(M_t)_{t \geq 0}$  une martingale locale purement discontinue qui s'écrit comme la somme compensée de ses sauts :*

$$M_t = - \sum_{s \leq t} \Delta Y_s \mathbb{1}_{\{\Delta Y_s \neq 0\}} + \int_0^t k\pi \cot(\pi Y_s) ds.$$

## 0.2 Matrices aléatoires quaternioniques

### 0.2.1 Introduction

Le chapitre 2 est issu d'une collaboration avec Florent Benaych-Georges (LPMA, Université Pierre et Marie Curie). La motivation pour l'étude des matrices aléatoires quaternioniques vient des observations suivantes. La projection sur le plan complexe de la mesure uniforme sur la sphère  $\mathbb{S}^3$  de  $\mathbb{R}^4$  est la mesure uniforme sur le disque unité  $D(0, 1)$  de  $\mathbb{C}$ , appelée aussi loi circulaire. De même, la projection sur la droite réelle  $\mathbb{R}$  de la loi circulaire est la loi semi-circulaire  $\sigma_{1/2}$  sur  $[-1, 1]$ , dont la densité par rapport à la mesure de Lebesgue est

$$\frac{2}{\pi} \sqrt{1 - x^2} \mathbb{1}_{[-1, 1]}.$$

Or ces deux dernières mesures jouent un rôle central dans la théorie des matrices aléatoires. En effet, la théorie des matrices aléatoires s'est largement développée sous l'impulsion des travaux du physicien Wigner [Wig58], qui datent des années 50. Pour l'étude du spectre de certains noyaux atomiques lourds, correspondant aux spectres d'opérateurs hermitiens sur un espace de Hilbert — et dont l'étude se révèle assez laborieuse —, Wigner a été amené à considérer les valeurs propres de matrices aléatoires de grande taille, dont le comportement devrait être analogue à celui de ces opérateurs. Le théorème de Wigner peut alors s'énoncer ainsi.

**Théorème 0.2.1** (Wigner). *Soit, pour tout  $n \geq 1$ , une matrice aléatoire  $X^{(n)}$  de taille  $n \times n$ , hermitienne, dont les entrées sont des gaussiennes complexes centrées indépendantes, modulo le caractère hermitien, et de variances*

$$\mathbb{E}((X_{i,i}^{(n)})^2) = \frac{1}{n}, \text{ et } E(|X_{i,j}^{(n)}|^2) = \frac{1}{2n}.$$

*Alors, la mesure spectrale empirique de  $X^{(n)}$ , c'est-à-dire la mesure aléatoire*

$$\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \delta_{\lambda_i^{(n)}},$$

*où les  $\lambda_i^{(n)}$  sont les valeurs propres (réelles) de  $X^{(n)}$ , converge, au sens de la convergence étroite, vers la loi semi-circulaire dont la densité par rapport à la mesure de Lebesgue est*

$$\frac{1}{2\pi} \sqrt{4 - x^2} \mathbb{1}_{[-2, 2]}(x).$$

Les matrices considérées dans ce théorème sont appelées matrices du GUE, pour *Gaussian Unitary Ensemble*. Depuis ce résultat, différentes généralisations ont été obtenues, et de nombreuses questions se sont multipliées. Citons par exemple les travaux de Tracy et Widom sur l'interaction entre les valeurs propres ou le comportement asymptotique de la plus grande valeur propre, ou encore les travaux de Voiculescu sur la théorie des probabilités libres [VDN92]. Le fait d'obtenir un résultat analogue au théorème de Wigner en s'affranchissant du caractère hermitien des matrices aléatoires a été conjecturé depuis les années 50. Ginibre [Gin65] a notamment obtenu le résultat suivant (voir aussi Mehta [Meh04]) :

**Théorème 0.2.2.** *Soit, pour tout  $n \geq 1$ ,  $X^{(n)}$  une matrice aléatoire complexe de taille  $n \times n$ , dont les entrées sont des gaussiennes centrées, indépendantes, et de variances*

$\mathbb{E}(|X_{i,j}^{(n)}|^2) = \frac{1}{n}$ . Alors, la mesure spectrale empirique de  $X^{(n)}$ ,

$$\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \delta_{\lambda_i^{(n)}},$$

où les  $\lambda_i^{(n)}$  sont les valeurs propres (complexes) de  $X^{(n)}$ , converge, au sens de la convergence étroite, vers la mesure circulaire

$$\frac{1}{\pi} \mathbb{1}_{\{z \in \mathbb{C} \mid |z| \leq 1\}} dz,$$

i.e. la mesure uniforme sur le disque unité de  $\mathbb{C}$ .

Depuis, de nombreux travaux, dont ceux de Girko [Gir83], Bai [Bai97], et plus récemment Tao et Vu [TV08] ont généralisé ce résultat, sous certaines hypothèses (les v.a. ne sont plus supposées gaussiennes, mais possèdent certaines conditions de moments).

Nous nous sommes alors posé la question de construire un modèle matriciel dont la mesure spectrale empirique convergerait vers la mesure uniforme sur la sphère  $\mathbb{S}^3$ . Le passage de la loi semi-circulaire à la loi circulaire se faisant en étudiant un modèle de matrices aléatoires complexes plutôt qu'un modèle de matrices aléatoires hermitiennes, l'idée de départ était donc de doubler la dimension, et ainsi de regarder des matrices aléatoires à entrées quaternioniques, la sphère des quaternions s'identifiant naturellement à  $\mathbb{S}^3$ . Nous allons voir que ceci n'est pas possible si l'on considère des modèles quaternioniques gaussiens, et voir quel type de convergence nous avons obtenu. Commençons par quelques rappels sur les quaternions.

## 0.2.2 Quaternions et matrices de quaternions

Une bonne référence portant sur le corps des quaternions et les matrices à entrées quaternioniques est l'article de Zhang [Zha97]. On notera  $\mathbb{H}$  le corps des quaternions. En tant qu'espace vectoriel réel,  $\mathbb{H}$  est isomorphe à  $\mathbb{R}^4$ , sa base canonique étant noté  $(1, \mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k})$ . La structure multiplicative sur  $\mathbb{H}$  est définie par le fait que 1 est l'élément neutre, et  $\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}$  vérifient les relations suivantes :

$$\mathbf{i}^2 = \mathbf{j}^2 = \mathbf{k}^2 = -1, \quad \mathbf{ij} = -\mathbf{ji} = \mathbf{k}, \quad \mathbf{jk} = -\mathbf{kj} = \mathbf{i}, \quad \mathbf{ki} = -\mathbf{ik} = \mathbf{j}.$$

$\mathbb{H}$  est donc un corps non-commutatif. Pour tout  $q = q_0 + q_1\mathbf{i} + q_2\mathbf{j} + q_3\mathbf{k} \in \mathbb{H}$ , avec  $q_l \in \mathbb{R}$ ,  $l = 0, 1, 2, 3$ , la conjugaison sur  $\mathbb{H}$  est définie par  $q^* = q_0 - q_1\mathbf{i} - q_2\mathbf{j} - q_3\mathbf{k}$ , ce qui permet de définir une norme  $|\cdot|$  sur  $\mathbb{H}$  par  $|q|^2 = qq^* = q_0^2 + q_1^2 + q_2^2 + q_3^2$ . Ceci montre de plus que tout quaternion  $q$  non nul est inversible, d'inverse  $q^{-1} = \frac{q^*}{|q|^2}$ , et on peut aussi montrer que  $|qq'| = |q||q'|$ , pour tout  $q, q' \in \mathbb{H}$ . On définit la partie réelle de  $q$ , par  $\Re(q) = q_0$ , et sa partie imaginaire par  $\Im(q) = q_1\mathbf{i} + q_2\mathbf{j} + q_3\mathbf{k}$ . Remarquons que si on identifie 1 et  $\mathbf{i}$  avec leurs définitions usuelles, on obtient les inclusions  $\mathbb{R} \subset \mathbb{C} \subset \mathbb{H}$ , qui sont compatibles avec les définitions de multiplication, conjugaison, norme, et de parties réelles et imaginaires (si l'on définit la partie imaginaire d'un nombre complexe par  $\Im(x + y\mathbf{i}) = y\mathbf{i}$  plutôt que  $y$ ).

On dit que deux quaternions  $x$  et  $y$  sont *similaires* s'il existe un quaternion  $q$  non nul tel que  $x = qyq^{-1}$ . Notons que ceci est équivalent à l'existence d'un quaternion  $u$  de norme  $|u| = 1$ , tel que  $x = uyu^*$ . On a le lemme suivant qui sera important par la suite pour l'étude des valeurs propres des matrices quaternioniques.

**Lemme 0.2.3.** *Si  $q = q_0 + q_1\mathbf{i} + q_2\mathbf{j} + q_3\mathbf{k} \in \mathbb{H}$ , alors  $q$  et  $\Re(q) + |\Im(q)|\mathbf{i}$  sont similaires.*

Soit  $q = q_0 + q_1\mathbf{i} + q_2\mathbf{j} + q_3\mathbf{k} \in \mathbb{H}$ . Par les règles de multiplication des éléments de la base de  $\mathbb{H}$ , on a que  $q = (q_0 + q_1\mathbf{i}) + (q_2 + q_3\mathbf{i})\mathbf{j}$ , et donc  $q$  peut se réécrire  $q = c_1 + c_2\mathbf{j}$ , où  $c_1$  et  $c_2$  sont deux nombres complexes. Ainsi, une façon alternative de définir les quaternions est de considérer le sous-ensemble de  $M_2(\mathbb{C})$  donné par

$$\left\{ \left( \begin{array}{cc} c_1 & c_2 \\ -\bar{c}_2 & \bar{c}_1 \end{array} \right) \mid c_1, c_2 \in \mathbb{C} \right\}.$$

L'application

$$q = c_1 + c_2\mathbf{j} \rightarrow q' = \left( \begin{array}{cc} c_1 & c_2 \\ -\bar{c}_2 & \bar{c}_1 \end{array} \right)$$

est alors bijective, et préserve les opérations algébriques.

Soit  $A \in M_n(\mathbb{H})$  une matrice de taille  $n \times n$ , à entrées quaternioniques. On peut alors lui associer de façon unique, une matrice complexe  $2n \times 2n$  donnée par

$$A = A_1 + A_2\mathbf{j} \rightarrow A' = \left( \begin{array}{cc} A_1 & A_2 \\ -\bar{A}_2 & \bar{A}_1 \end{array} \right),$$

avec  $A_1, A_2 \in M_n(\mathbb{C})$ . Du fait de la non commutativité des quaternions, deux notions de valeurs propres existent. On dira que  $\lambda \in \mathbb{H}$  est une *valeur propre à droite* de  $A \in M_n(\mathbb{H})$ , s'il existe un vecteur  $X \in \mathbb{H}^n$  non nul tel que  $AX = X\lambda$ . Si  $\lambda$  est valeur propre à droite de  $A$ , on voit aisément que  $q\lambda q^{-1}$  est encore valeur propre à droite pour tout  $q \in \mathbb{H} \setminus \{0\}$ . Le spectre à droite de  $A$  est alors soit infini, soit dans  $\mathbb{R}$ . Du fait que tout quaternion est similaire à un nombre complexe, on peut commencer par se restreindre à l'étude des valeurs propres à droite complexes. Plus précisément, on peut montrer que  $\lambda \in \mathbb{C}$  est valeur propre à droite de  $A$  si et seulement si  $\lambda$  est valeur propre de la matrice complexe  $A'$  associée à  $A$ . De part la symétrie de la matrice  $A'$ ,  $\lambda$  est valeur propre implique que  $\bar{\lambda}$  est aussi valeur propre. Ainsi, le spectre à droite complexe de  $A$  est fini, de cardinal  $2n$ , et est composé des  $2n$  valeurs propres de  $A'$  qui apparaissent par paires conjuguées. On obtient alors toutes les valeurs propres à droite de  $A$  en prenant les classes de similitudes des valeurs propres à droite complexes de  $A$ .

Un mot sur les valeurs propres à gauche. C'est une notion beaucoup plus compliquée que celle de valeurs propres à droite, dont la théorie algébrique n'est pas complètement satisfaisante à l'heure actuelle. Par exemple, en dehors de quelques cas particuliers, on ne sait rien dire sur le nombre de valeurs propres à gauche que possède une matrice à entrées quaternioniques.

### 0.2.3 Modèle matriciel quaternionique

Le modèle matriciel que nous étudions est le suivant. Soit  $X(n)$  une matrice aléatoire quaternionique de taille  $n \times n$ , dont les entrées sont des gaussiennes quaternioniques indépendantes, c'est-à-dire que pour tout  $1 \leq l, p \leq n$ ,

$$X(n)_{l,p} = X(n)_{l,p}^0 + X(n)_{l,p}^1\mathbf{i} + X(n)_{l,p}^2\mathbf{j} + X(n)_{l,p}^3\mathbf{k},$$

où  $X(n)_{l,p}^0, X(n)_{l,p}^1, X(n)_{l,p}^2, X(n)_{l,p}^3$  sont des gaussiennes réelles indépendantes. On supposera les  $X(n)_{l,p}$  centrées et de variance  $\frac{1}{2n}$ , *i.e.*

$$\mathbb{E}(X(n)_{l,p}) = 0, \quad \text{et} \quad \mathbb{E}(|X(n)_{l,p}|^2) = \frac{1}{2n}.$$

On associe à  $X(n)$ , comme vu précédemment, une matrice complexe de taille  $2n \times 2n$ ,  $Y(n) := X(n)'$ . On notera  $z_{n,1}, \dots, z_{n,2n}$  les  $2n$  valeurs propres de  $Y(n)$ , avec la convention que

$$z_{n,n+i} = \bar{z}_{n,i}, \quad \text{pour tout } i = 1, \dots, n.$$

La distribution des valeurs propres de  $Y(n)$  a été calculé par Ginibre dans [Gin65], et est donnée, posant  $z = (z_1, \dots, z_n)$ , par la densité

$$P_n(z) = \frac{1}{c_n} \exp\left(-2n \sum_{i=1, \dots, n} |z_i|^2\right) \prod_{1 \leq i < j \leq n} |z_i - z_j|^2 |z_i - \bar{z}_j|^2 \prod_{i=1, \dots, n} |z_i - \bar{z}_i|^2,$$

où  $c_n$  est une constante de normalisation.

En s'inspirant des cas hermitiens et complexes (voir [Dei99, BZ98]), nous utilisons la théorie du potentiel logarithmique pour l'étude de la convergence en loi de la mesure spectrale de  $Y(n)$ .

### 0.2.4 Théorie du potentiel logarithmique

On renvoie au livre de Saff et Totik [SV97] pour tout ce qui concerne la théorie du potentiel logarithmique. Rappelons ici les résultats principaux de cette théorie utiles à notre étude.

Soit  $\mu$  une mesure de probabilité sur  $\mathbb{C}$ . On appelle *énergie logarithmique* de  $\mu$ , avec champ extérieur  $V$ , la fonctionnelle

$$I(\mu) = \iint \log |x - y|^{-1} d\mu(x) d\mu(y) + \int V(z) d\mu(z),$$

où  $V: \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{R}_+$  est un potentiel vérifiant certaines conditions de régularité. On est alors amené à considérer des problèmes de minimisation de la fonctionnelle  $I$ . Plus précisément, on a les deux théorèmes suivants (voir [SV97]) :

**Théorème 0.2.4.** *Le minimum de  $I$ , noté  $E^V$ , est atteint en une unique mesure  $\mu^V$  à support compact sur  $\mathbb{C}$ . Cette mesure est appelée la mesure d'équilibre de  $V$ .*

On introduit la notion de *potentiel logarithmique* d'une mesure  $\sigma$  sur  $\mathbb{C}$ . Il s'agit de la fonction

$$U^\sigma(x) = \int \log |x - y|^{-1} d\sigma(y),$$

pour  $x \in \mathbb{C}$ . On a alors

**Théorème 0.2.5.** *Soit  $\sigma$  une mesure sur  $\mathbb{C}$  à support compact, d'énergie logarithmique finie. Alors,  $\sigma$  est la mesure d'équilibre  $\mu^V$  de  $V$  si et seulement si il existe une constante  $l$  telle que*

- (i)  $2U^\sigma(x) + V(x) = l$ ,  $\mu^V$ -p.p. sur le support de  $\sigma$ ,
- (ii)  $2U^\sigma(x) + V(x) \geq l$ ,  $\mu^V$ -p.p.

Ce théorème permet de caractériser la mesure d'équilibre, qui dans le cas du potentiel gaussien  $V(z) = |z|^2$ , est donnée par la loi circulaire.

De façon heuristique, on voit que la loi  $P_n$  des valeurs propres de la matrice  $Y(n)$  se réécrit essentiellement sous la forme,

$$P_n(z) \sim \exp\left(-(2n)^2 I(\mu_z)\right)$$

où  $\mu_z$  est la mesure spectrale empirique des valeurs propres, *i.e.*

$$\mu_z = \frac{1}{2n} \sum_{i=1}^{2n} \delta_{z_{n,i}}.$$

Bien sûr, cette écriture n'a pas vraiment de sens puisque  $I(\mu_z)$  explose. Mais essentiellement, ceci permet de voir que  $\mu_z$  va se concentrer autour de la mesure qui rend minimal la fonctionnel  $I$ , et ainsi converger vers la mesure d'équilibre quand la taille de la matrice tend vers l'infini.

### 0.2.5 Convergence de la mesure spectrale

En rendant rigoureux ce qui a été dit précédemment, nous obtenons le résultat de convergence suivant :

**Théorème 0.2.6.** *Soit  $z_{n,1}, \dots, z_{n,2n}$  les valeurs propres de  $Y(n)$ . Alors, la mesure spectrale de  $Y(n)$ ,*

$$\frac{1}{2n} \sum_{i=1}^{2n} \delta_{z_{n,i}},$$

*converge presque sûrement, quand  $n$  tend vers l'infini, vers la loi circulaire.*

Définissons maintenant ce que l'on entend par mesure spectrale des valeurs propres à droite de la matrice à entrées quaternioniques  $X(n)$ . On a vu que les valeurs propres à droites de  $X(n)$  sont exactement données par les classes de similitudes des valeurs propres à droite complexes. Soit  $z_{n,1}, \dots, z_{n,2n}$  les valeurs propres à droites complexes de  $X(n)$ , ordonnées de telle sorte que pour tout  $i = 1, \dots, n$ ,  $\Im(z_{n,i})$  est positive, et  $z_{n,n+i} = \overline{z_{n,i}}$ . Posons alors

$$C_{n,1} := \{uz_{n,1}u^* ; u \in \mathbb{H}, |u| = 1\}, \dots, C_{n,n} := \{uz_{n,n}u^* ; u \in \mathbb{H}, |u| = 1\},$$

Soit  $(u_i)_{i \geq 1}$  une famille de variables aléatoires indépendantes et identiquement distribuées, de loi la mesure uniforme sur la sphère des quaternions, et indépendantes de  $z_{n,1}, \dots, z_{n,n}$ . Posons

$$c_{n,1} = u_1 z_{n,1} u_1^*, \dots, c_{n,n} = u_n z_{n,n} u_n^*.$$

On définit alors la mesure empirique des valeurs propres à droite de  $X(n)$  comme étant la mesure

$$\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \delta_{c_{n,i}}.$$

Le théorème précédent nous permet alors de montrer le résultat principal de cette partie :

**Théorème 0.2.7.** *Soit  $X(n)$  le modèle matriciel quaternionique considéré précédemment. Alors, la mesure empirique*

$$\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \delta_{c_{n,i}},$$

*converge presque sûrement, quand  $n$  tend vers l'infini, vers la loi sur  $\mathbb{H}$  de densité par rapport à la mesure de Lebesgue donnée par*

$$\rho(q) = \frac{1}{2\pi^2 |\Im(q)|^2} \mathbb{1}_{\{q \in \mathbb{H} \mid |q| \leq 1\}}.$$

Pour conclure, on peut se demander si en changeant de modèle matriciel  $X(n)$  on pourrait obtenir une convergence vers la mesure uniforme sur la sphère des quaternions. Il suffirait pour cela de changer le potentiel gaussien  $|\cdot|^2$  par un autre potentiel  $V$  dans l'expression  $P_n$  de la densité des valeurs propres à droite complexes. Notons alors cette nouvelle mesure  $P_n^V$ . Nous montrons que cela n'est pas possible si l'on se restreint aux potentiels quadratiques, *i.e.* de la forme  $V(z) = az^2 + b\bar{z}^2 + cz\bar{z}$  (ce qui consisterait à considérer un modèle matriciel gaussien dont les entrées ne sont plus indépendantes).

**Théorème 0.2.8.** *Il n'existe pas de potentiel quadratique  $V$  tel que si la loi de  $(z_{n,1}, \dots, z_{n,n})$  est donnée par  $P_n^V$ , alors la mesure  $\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \delta_{u_i z_{n,i} u_i^*}$  convergerait vers la mesure uniforme sur la sphère des quaternions.*

### 0.3 Marches aléatoires quantiques et mineurs du mouvement brownien hermitien

Le chapitre 3 est issu d'une collaboration avec Manon Defosseux (MAP5, Université Paris Descartes). Dans cette partie, nous étudions des analogues de processus des valeurs propres des mineurs du mouvement brownien hermitien dans le cadre de marches aléatoires quantiques. Adler, Nordenstam et van Moerbeke [ANvM10] ont récemment montré que le processus des valeurs propres de deux mineurs consécutifs du mouvement brownien hermitien est markovien, alors que si l'on considère plus de deux mineurs consécutifs, la propriété de Markov tombe en défaut. Nous montrons un résultat analogue dans le cadre non-commutatif, et démontrons la propriété de Markov des valeurs propres de sous-matrices particulières du mouvement brownien hermitien.

Commençons par un exemple. Soit  $(M(t), t \geq 0)$  le mouvement brownien hermitien sur les matrices  $2 \times 2$  de trace nulle, *i.e.*

$$M(t) = \begin{pmatrix} B_1(t) & B_2(t) + iB_3(t) \\ B_2(t) - iB_3(t) & -B_1(t) \end{pmatrix}, \quad t \geq 0,$$

où  $(B_1, B_2, B_3)$  est un mouvement brownien dans  $\mathbb{R}^3$ . Le processus

$$\sqrt{B_1^2(t) + B_2^2(t) + B_3^2(t)}, \quad t \geq 0$$

est un processus de Bessel de dimension 3, et l'on montre aisément que le processus

$$\left( B_1(t), \sqrt{B_1^2(t) + B_2^2(t) + B_3^2(t)} \right), \quad t \geq 0$$

est un processus de Markov sur  $\mathbb{R}^2$ . Plaçons nous alors dans le cadre des marches aléatoires quantiques. Pour cela, on considère l'espace de probabilité non-commutatif  $(M_2(\mathbb{C}), \text{tr})$ , où  $M_2(\mathbb{C})$  est l'ensemble des matrices complexes de taille  $2 \times 2$ , et  $\text{tr} = \frac{1}{2} \text{Tr}$  est la trace normalisée (la notion d'espace de probabilité non-commutatif sera définie proprement dans la section suivante). Considérons les matrices de Pauli

$$x = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad y = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}, \quad z = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix},$$

vérifiant les relations de commutations suivantes

$$[x, y] = 2iz,$$

ainsi que les relations de commutations obtenues par permutation circulaire de  $x, y, z$ . Ici,  $[\cdot, \cdot]$  désigne le crochet usuel sur l'algèbre des matrices, *i.e.*  $[a, b] = ab - ba$ . Les matrices  $x, y, z$  définissent trois variables de Bernoulli non-commutatives, au sens où les nombres

$$\text{tr}(x^k),$$

pour  $k \geq 0$ , donnent exactement les moments de la loi de Bernoulli  $\frac{1}{2}\delta_{-1} + \frac{1}{2}\delta_{+1}$  (et de même pour  $y$  et  $z$ ). Dans l'algèbre  $M_2(\mathbb{C})^{\otimes \infty}$ , muni de l'état  $\text{tr}^{\otimes \infty}$ , les éléments ( $I$  désignant la matrice identité)

$$x_i = I^{\otimes(i-1)} \otimes x \otimes I^{\otimes \infty}, \quad y_i = I^{\otimes(i-1)} \otimes y \otimes I^{\otimes \infty}, \quad z_i = I^{\otimes(i-1)} \otimes z \otimes I^{\otimes \infty},$$

sont encore des variables de Bernoulli non-commutatives, et les processus  $(X_n)_{n \geq 1}$ ,  $(Y_n)_{n \geq 1}$ ,  $(Z_n)_{n \geq 1}$  définis par

$$X_n = \sum_{i=1}^n x_i, \quad Y_n = \sum_{i=1}^n y_i, \quad Z_n = \sum_{i=1}^n z_i,$$

définissent des marches aléatoires de Bernoulli. Considérées comme les composantes d'un même processus, elles forment un processus non-commutatif qui converge, après renormalisation usuelle, vers un mouvement brownien de dimension de 3 [Bia90, Bia91b]. De plus, la famille de variables non-commutatives

$$\left( Z_n, \sqrt{X_n^2 + Y_n^2 + Z_n^2}, n \geq 1 \right)$$

forme une approximation discrète du processus

$$\left( B_1(t), \sqrt{B_1^2(t) + B_2^2(t) + B_3^2(t)}, t \geq 0. \right)$$

Nous étudions ici une généralisation en dimension supérieure de ces différents processus. Remarquons que le processus ci-dessus est composé de valeurs propres des mineurs du mouvement brownien hermitien sur les matrices  $2 \times 2$ . On s'intéresse donc à certaines approximations quantiques de processus issus des valeurs propres des mineurs du mouvement brownien hermitien.

Commençons par donner une introduction aux probabilités non-commutatives.

### 0.3.1 Probabilités non-commutatives

La théorie des probabilités non-commutatives tire son essence de la mécanique quantique, où suivant l'axiomatique de von Neumann, les observables sont des opérateurs sur un espace de Hilbert. En effet, la position et la vitesse d'une particule quantique ne pouvant se mesurer simultanément, ces deux quantités sont représentées par des opérateurs non-commutatifs dont les observations se réalisent suivant certaines lois de probabilités. Depuis, un cadre mathématique s'est développé pour modéliser ces phénomènes afin de généraliser la théorie classique des probabilités à un cadre non-commutatif. On pourra par exemple consulter l'ouvrage de référence de Meyer [Mey93] pour tout ce qui concerne les probabilités non-commutatives, ou encore le cours de Biane [Bia08].

Soit  $X$  une variable aléatoire réelle, bornée, définie sur un espace de probabilité  $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ . Sa loi est alors entièrement déterminée par la donnée de  $\mathbb{E}(f(X))$  pour toute fonction mesurable bornée  $f$ . On peut alors voir  $X$  comme un élément de l'algèbre des fonctions bornées  $L^\infty(\Omega)$ , muni de la forme linéaire  $\mathbb{E}$ . L'idée de base des probabilités non-commutatives est alors de remplacer l'algèbre  $L^\infty$  par une algèbre non-commutative  $\mathcal{A}$ , muni d'une forme linéaire  $\varphi: \mathcal{A} \rightarrow \mathbb{C}$  qui jouera le rôle de l'espérance. On dira alors que  $(\mathcal{A}, \varphi)$  est un *espace de probabilité non-commutatif* si  $\mathcal{A}$  est une \*-algèbre possédant une unité, et  $\varphi: \mathcal{A} \rightarrow \mathbb{C}$  une forme linéaire positive, au sens où  $\varphi(aa^*) \geq 0$  pour tout  $a \in \mathcal{A}$ , et telle que  $\varphi(1) = 1$ . Par la suite, on s'intéressera uniquement au cas où  $\varphi$  est un *état tracial*, c'est-à-dire que  $\varphi(ab) = \varphi(ba)$ , pour tout  $a, b \in \mathcal{A}$ . On appelle *variable aléatoire non-commutative* tout élément  $a$  de  $\mathcal{A}$ , et si  $a$  est auto-adjoint, *i.e.*  $a = a^*$ , sa loi est déterminé par la collection des  $\varphi(a^k)$ ,  $k \geq 0$ . En effet, comme  $a$  est auto-adjoint,  $\varphi(a^k)$  est réel pour tout  $k \geq 0$ , et la résolution du problème des moments nous assure l'existence d'au moins une mesure de probabilité  $\mu$  telle que

$$\varphi(a^k) = \int_{\mathbb{R}} x^k \mu(dx).$$

Si  $\mu$  est unique, on l'appelle la loi de  $a$ . Si  $a_1, \dots, a_n$  sont des variables aléatoires non-commutatives, on appelle loi jointe de  $(a_1, \dots, a_n)$ , la donnée des moments

$$\varphi(a_{i_1}^{\varepsilon_1} \cdots a_{i_l}^{\varepsilon_l}),$$

pour tout  $l \geq 1$ ,  $i_j \in \{1, \dots, n\}$ ,  $\varepsilon_j \in \{1, *\}$ ,  $j = 1, \dots, n$ . Notons alors que rien ne garantit cette fois-ci (et en général ce n'est pas le cas) l'existence d'une mesure de probabilité dont ce serait la suite des moments. La notion de convergence en loi d'une suite de variables aléatoires non-commutatives est alors donnée par la convergence des tous les moments.

Plusieurs types d'algèbres sont utilisés en théorie des probabilités non-commutatives, et notamment la notion d'algèbre de von Neumann. Soit  $\mathcal{H}$  un espace de Hilbert, et  $\mathcal{B}(\mathcal{H})$  l'algèbre des opérateurs bornés sur  $\mathcal{H}$ . Une *algèbre de von Neumann* est \*-sous-algèbre de  $\mathcal{B}(\mathcal{H})$ , contenant l'identité, et fermé par la topologie forte définie par  $\lim_{n \rightarrow \infty} A_n = A$  si  $\lim_{n \rightarrow \infty} \|A_n x\| = \|Ax\|$ , pour tout  $x \in \mathcal{H}$ , et où  $\|\cdot\|$  est la norme associée au produit scalaire  $\langle \cdot, \cdot \rangle$  de  $\mathcal{H}$ , et  $A_n, A \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$ . Par le théorème du bicommutant de von Neumann, une sous-algèbre  $\mathcal{A}$  de  $\mathcal{B}(\mathcal{H})$  est une algèbre de von Neumann si et seulement si  $\mathcal{A}$  est égale à son bicommutant  $\mathcal{A}''$ , *i.e.* le commutant du commutant  $\mathcal{A}' = \{X \in \mathcal{B}(\mathcal{H}) \mid AX = AX, \text{ pour tout } A \in \mathcal{A}\}$  de  $\mathcal{A}$ . Notons que  $\mathcal{B}(\mathcal{H})$  est elle-même une algèbre de von Neumann. La situation classique se retrouve de la sorte : toute algèbre de von Neumann commutative est isomorphe à un  $L^\infty(X, \mu)$  pour un certain espace mesuré  $(X, \mu)$ , vu comme une sous-algèbre des opérateurs bornés sur  $L^2(X, \mu)$ . En ce sens, la théorie des probabilités non-commutatives est une généralisation des probabilités classiques, et la théorie des algèbres de von Neumann est parfois appelée théorie de la mesure non-commutative. En effet, de nombreux résultats de probabilités et d'intégration se transposent au cadre non-commutatif. On pourra consulter les différents volumes du livre de Takesaki [Tak03] pour un exposé très complet sur la théorie des algèbres d'opérateurs, ou encore les livres de Dixmier [Dix96b, Dix96a]. Donnons comme dernier exemple l'algèbre de von Neumann d'un groupe localement compact  $G$ . Un groupe localement compact possède une unique mesure invariante par multiplication à gauche, appelée mesure de Haar et notée  $dg$ . On peut donc considérer l'espace de Hilbert  $L^2(G)$  des fonctions complexes sur  $G$  muni du produit scalaire

$$\langle f, h \rangle = \int_G \overline{f(g)} h(g) dg,$$

et tel que  $\|f\| < +\infty$ , pour tout  $f \in L^2(G)$ . Pour tout  $g \in G$ , soit  $\lambda_g$  l'opérateur de translation à gauche, agissant sur  $L^2(G)$  par

$$\lambda_g f(x) = f(g^{-1}x).$$

L'algèbre de von Neumann du groupe  $G$ , notée  $L(G)$ , est alors la sous-algèbre de  $\mathcal{B}(L^2(G))$  engendrée par la fermeture de  $\{\lambda_g \mid g \in G\}$  pour la topologie forte. Lorsque  $G$  est abélien,  $G$  possède un groupe dual  $\hat{G}$  donné par l'ensemble des caractères de  $G$ , c'est-à-dire l'ensemble des morphismes de  $G$  dans  $\mathbb{C}^*$ , et alors  $L(G)$  est isomorphe à  $L^\infty(\hat{G})$ . Par exemple, si  $\mathbb{T}$  est un tore, on a  $L(\mathbb{T}) \simeq L^\infty(\mathbb{Z})$ . Dans le cas général, l'algèbre  $L(G)$  peut alors s'interpréter comme une algèbre de « fonctions non-commutatives » sur un objet dual au groupe  $G$ , que Biane appelle *espace non-commutatif* [Bia08], et qui consiste en l'ensemble des représentations de  $G$ , ce que nous verrons plus en détail par la suite.

Une notion essentielle en probabilités est celle de chaîne ou de processus de Markov. Voyons comment cette notion se généralise à un cadre non-commutatif. Soient  $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$  un espace de probabilité,  $(E, \mathcal{E})$  un espace mesurable, et  $X_n : \Omega \rightarrow E$  une suite de variables

aléatoires,  $n \geq 1$ . Pour toute fonction mesurable  $f: E \rightarrow E$ ,  $f(X_n)$  est encore une variable aléatoire sur  $\Omega$ , et la suite de v.a.  $X_n$  induit une suite de morphismes d'algèbres

$$\begin{aligned} \chi_n: L^\infty(E) &\rightarrow L^\infty(\Omega) \\ f &\mapsto f(X_n) \end{aligned}$$

pour tout  $n \geq 1$ . Une variable aléatoire non-commutative peut alors être vue comme un morphisme entre deux algèbres. La « loi » du processus non-commutatif  $(\chi_n)_{n \geq 1}$ , où les  $\chi_n: \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{B}$  sont des morphismes d'algèbres, et  $(\mathcal{B}, \varphi)$  est un espace de probabilité non-commutatif, est alors caractérisée par la famille

$$\varphi(\chi_{n_1}(a_1) \cdots \chi_{n_k}(a_k)),$$

pour tout  $k \geq 1$ ,  $n_j \geq 1$ ,  $j = 1, \dots, k$ , et tout éléments  $a_1, \dots, a_k$  de  $\mathcal{A}$ .

Supposons que  $(X_n)_{n \geq 1}$  soit une chaîne de Markov (classique), d'opérateur de transition  $P$ . La propriété de Markov peut s'énoncer ainsi :

$$\mathbb{E}(f_1(X_{n_1}) \cdots f_k(X_{n_k}) f(X_{n+1})) = \mathbb{E}(f_1(X_{n_1}) \cdots f_k(X_{n_k}) (Pf)(X_n)),$$

pour toutes fonctions  $f_1, \dots, f_k, f$  mesurables bornées, et tous  $n_1 < \dots < n_k \leq n$ . Transposée au cadre des morphismes, la propriété de Markov se réécrit

$$\mathbb{E}(\chi_{n_1}(f_1) \cdots \chi_{n_k}(f_k) \chi_{n+1}(f)) = \mathbb{E}(\chi_{n_1}(f_1) \cdots \chi_{n_k}(f_k) \chi_n(Pf)).$$

Un processus non-commutatif  $(\chi_n)_{n \geq 1}$ ,  $\chi_n: \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{B}$ , sera alors appelé une *chaîne de Markov quantique* s'il existe un opérateur positif  $P: \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{A}$ , tel que pour tout  $n \geq 1$ , tout  $a \in \mathcal{A}$  et tout élément  $\xi$  appartenant à la sous-algèbre de  $\mathcal{B}$  engendré par  $\{\chi_k(\mathcal{A}), k \leq n\}$ , on ait

$$\varphi(\xi \chi_{n+1}(a)) = \varphi(\xi \chi_n(Pa)).$$

On pourra consulter [Bia08, Mey93] pour une exposition plus précise de la notion de chaîne de Markov quantique, qui fait appel à la définition de dilatation.

Nous serons amené par la suite, à restreindre le processus non-commutatif  $(\chi_n)_{n \geq 1}$  à certaines sous-algèbres de  $\mathcal{A}$ . Le processus ainsi obtenu sera encore une chaîne de Markov quantique si l'opérateur  $P$  laisse stable la sous-algèbre  $\mathcal{D}$  considérée, *i.e.*  $P\mathcal{D} \subset \mathcal{D}$ . En particulier, si  $\mathcal{D}$  est une sous-algèbre commutative, alors  $P: \mathcal{D} \rightarrow \mathcal{D}$  est un opérateur de transition au sens classique, et si l'algèbre engendrée par  $(\chi_n(\mathcal{D}))_{n \geq 1}$  est commutative, alors on obtient une construction d'une chaîne de Markov classique à partir du processus non-commutatif  $(\chi_n)_{n \geq 1}$ .

### 0.3.2 Marches aléatoires sur un espace non-commutatif

Nous allons étudier ce que Biane [Bia08] appelle *marche aléatoire quantique sur un espace non-commutatif*. Cette partie, qui n'apparaît pas dans le chapitre 3, ne présente que des résultats obtenus par Biane dans [Bia91a], et n'est introduite ici que pour clarifier la marche aléatoire quantique que nous étudierons par la suite. Pour tout ce qui concerne les représentations des groupes et des algèbres de Lie, on renvoie à [Žel73] ou [BtD95].

Soit  $G$  le groupe de Lie  $SU(d)$ , *i.e.* le groupe compact des matrices spéciales unitaires, et  $L(G)$  son algèbre de von Neumann. Soit  $\rho$  une représentation irréductible de  $G$  de dimension finie  $d$ . Rappelons qu'une représentation d'un groupe  $G$  dans un espace vectoriel  $V$  de dimension finie est un morphisme de groupe

$$\rho: G \rightarrow GL(V).$$

Une représentation  $\rho$  est irréductible si les seuls sous-espaces de  $V$  stables par l'action de  $G$  sont  $\{0\}$  et  $V$ . On prendra pour  $\rho$  la représentation standard de  $SU(d)$ , et étendue à  $L(G)$ . Soit  $\eta$  un état sur  $L(G)$  défini par  $\eta(\lambda_g) = \text{tr}(\rho(g))$ . Soit l'algèbre de von Neumann  $\mathcal{W} = M_d(\mathbb{C})^{\otimes \infty}$ , le produit tensoriel étant pris par rapport à l'état  $\omega = \eta^{\otimes \infty}$ . Pour tout  $n \geq 1$ , on définit les morphismes

$$j_n: L(G) \rightarrow \mathcal{W},$$

par  $j_n(\lambda_g) = \rho(g) \otimes \cdots \otimes \rho(g) \otimes 1^{\otimes \infty}$ , avec  $n$  facteurs  $\rho(g)$ . Soit  $\Delta$  le coproduit sur  $L(G)$ , qui est le morphisme d'algèbres défini par

$$\begin{aligned} \Delta: L(G) &\rightarrow L(G) \otimes L(G) \\ \lambda_g &\mapsto \lambda_g \otimes \lambda_g \end{aligned}$$

Soit  $P: L(G) \rightarrow L(G)$  l'opérateur positif (en fait complètement positif) défini par

$$P = \text{id} \otimes \eta \circ \Delta$$

On a alors  $P\lambda_g = \lambda_g \eta(\lambda_g)$ , et on peut vérifier que les  $(j_n)_{n \geq 1}$  forment une chaîne de Markov quantique. Si on fait la même construction avec  $G$  un groupe compact abélien, on retrouve la construction d'une marche aléatoire sur le groupe dual  $\hat{G}$  (qui est discret, et noté additivement), l'algèbre  $L(G)$  s'identifiant avec  $L^\infty(\hat{G})$ , et l'opérateur  $P$  s'identifiant avec l'opérateur de convolution par une certaine mesure  $\mu$  sur  $\hat{G}$ . En effet, la fonction  $\varphi$  sur  $G$  définie par  $\varphi(g) = \eta(\lambda_g)$  est de type positif, et est donc la transformée de Fourier d'une mesure positive sur le groupe  $\hat{G}$  par le théorème de Bochner, *i.e.*

$$\varphi(g) = \int_{\hat{G}} \chi(g) \mu(d\chi).$$

Dans l'isomorphisme entre  $L(G)$  et  $L^\infty(\hat{G})$ , l'opérateur  $\int_G \overline{\gamma(g)} \lambda_g dg$ , où  $\gamma \in \hat{G}$  est un caractère, correspond à la fonction indicatrice  $\mathbb{1}_\gamma$ , et on obtient

$$P\mathbb{1}_\gamma = \int_{\hat{G}} \mathbb{1}_{\{\gamma - \chi\}} \mu(d\chi).$$

Ainsi,  $P$  est l'opérateur de convolution par la mesure  $\mu$ , et la loi des accroissements de la marche aléatoire est donnée par  $\mu$ . C'est donc par analogie au cas abélien que le processus non-commutatif  $(j_n)_{n \geq 1}$  est appelé marche aléatoire sur un espace non-commutatif.

On peut alors s'intéresser à certaines sous-algèbres abéliennes afin de construire des processus de Markov classiques. Biane a montré que si  $\mathbb{T}$  est le sous-groupe des matrices diagonales de  $SU(d)$ , alors la sous-algèbre  $L(\mathbb{T})$  est stable par l'opérateur  $P$ . Il montre de plus que le centre de l'algèbre  $L(G)$  est lui aussi stable par l'opérateur  $P$ . Rappelons pour cela, quelques faits bien connus sur les représentations de  $SU(d)$ .

On note  $\mathfrak{su}(d)$  l'algèbre de Lie de  $SU(d)$ , c'est-à-dire l'ensemble des matrices anti-hermitiennes de trace nulle. Soit  $\mathbb{T}$  le sous-groupe des matrices diagonales de  $SU(d)$ , qui est un tore maximal dans  $SU(d)$ . Son algèbre de Lie  $\mathfrak{t}$  est composée des matrices diagonales purement imaginaires de trace nulle. Soit  $e_j$  les éléments du dual de  $\mathfrak{t}$  définis par

$$e_j \left( \begin{pmatrix} u_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & u_d \end{pmatrix} \right) = \frac{1}{2i\pi} u_j,$$

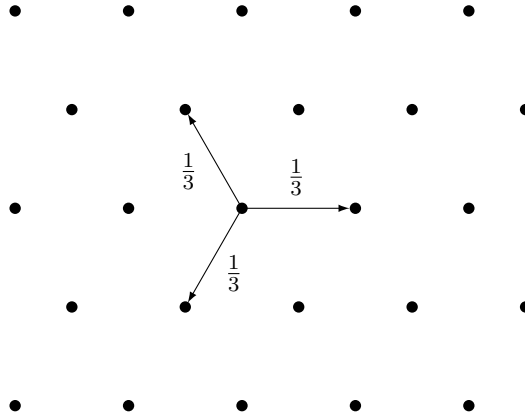


FIGURE 1 – La marche aléatoire sur  $\mathbf{P}$  pour  $SU(3)$

vérifiant  $e_1 + \dots + e_d = 0$ . Soit  $\mathbf{P}$  le réseau engendré par les éléments  $e_j$ ,  $j = 1, \dots, d$ . Les éléments de  $\mathbf{P}$  sont appelés *poinds* des représentations de  $SU(d)$ . Les *racines* de  $SU(d)$  sont les éléments  $e_i - e_j$ , pour  $1 \leq i \neq j \leq d$ . Le *groupe de Weyl* associé à ce système de racines (noté  $A_{d-1}$ , voir la première section) est par définition engendré par les réflexions par rapport aux racines, et est isomorphe au groupe symétrique  $\mathcal{S}_d$ . On notera  $\phi$  la demi-somme des racines positives, *i.e.*  $\phi = (d-1)e_1 + (d-2)e_2 + \dots + e_{d-1}$ .

Le groupe dual  $\hat{\mathbb{T}}$  de  $\mathbb{T}$  s'identifie avec  $\mathbf{P}$  par l'application  $e: x \in \mathbf{P} \mapsto e(x) \in \hat{\mathbb{T}}$  définie par  $e(x)(\exp X) = \exp(2i\pi x(X))$ , pour tout  $X \in \mathfrak{t}$ , et où l'application  $\exp$  dans le terme de gauche de l'égalité précédente est l'application exponentielle  $\exp: \mathfrak{su}(d) \rightarrow SU(d)$ . On sait que toute représentation irréductible de  $SU(d)$  est de dimension finie, et que l'ensemble des représentations irréductibles de  $SU(d)$  s'identifie avec l'ensemble des *plus hauts poinds*

$$\mathbf{P}_+ = \{m_1 e_1 + \dots + m_{d-1} e_{d-1} \mid m_i \in \mathbb{N}, m_1 \geq m_2 \geq \dots \geq m_{d-1}\},$$

qui s'identifie avec

$$\mathbf{P}_{++} = \{m_1 e_1 + \dots + m_{d-1} e_{d-1} \mid m_i \in \mathbb{N}, m_1 > m_2 > \dots > m_{d-1}\},$$

par  $\mathbf{P}_{++} = \mathbf{P}_+ + \phi$ . On remarque alors que l'ensemble des représentations irréductibles  $\mathbf{P}_{++}$  est l'intersection de  $\mathbf{P}$  avec la *chambre de Weyl*

$$C = \{x_1 e_1 + \dots + x_{d-1} e_{d-1} \mid x_1 > x_2 > \dots > x_{d-1}\}.$$

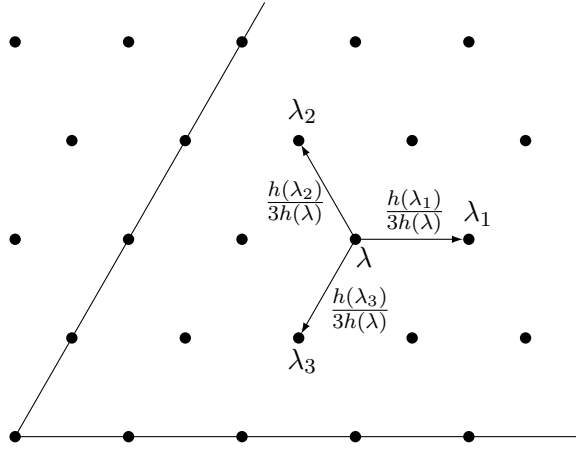
Rappelons aussi que toute représentation de  $SU(d)$  se décompose en somme directe de représentations irréductibles.

Le *caractère* de la représentation  $\rho_\lambda$  de plus haut poids  $\lambda \in \mathbf{P}_+$ , *i.e.* la fonction sur  $\mathbb{T}$  définie par  $\chi_\lambda(x) = \text{Tr}(\rho_\lambda(x))$ , pour  $x \in SU(d)$ , est donnée par la formule des caractères de Weyl :

$$\chi_\lambda(x) = \frac{\sum_{w \in \mathcal{S}_d} \det(w) e(w(\lambda + \phi))}{\sum_{w \in \mathcal{S}_d} \det(w) e(w(\phi))}, \quad \text{pour } x \in \mathbb{T}.$$

En particulier, le caractère de la représentation standard  $\rho$  de  $SU(d)$  est donnée par  $\sum_{i=1}^d e(e_i)$ .

L'opérateur  $P$  de la marche quantique laissant stable la sous-algèbre de von Neumann  $L(\mathbb{T})$ , Biane a montré que la restriction de  $(j_n)_{n \geq 1}$  à cette sous-algèbre isomorphe

FIGURE 2 – La chaîne de Markov sur  $\mathbf{P}_{++}$  pour  $SU(3)$ 

à  $L^\infty(\mathbf{P})$  définit une marche aléatoire (classique) sur  $\mathbf{P}$ . Dans cet isomorphisme, l'opérateur  $\int_{\mathbb{T}} \overline{e(x)}(\theta) \lambda_\theta d\theta$  correspond à l'indicatrice de  $x \in \mathbf{P}$ , et comme  $P\lambda_g = \lambda_g \text{tr}(\rho(g))$ , on obtient que la loi des accroissements de la marche est donnée par  $\frac{1}{d}(\delta_{e_1} + \dots + \delta_{e_d})$ .

De même, le centre  $\mathcal{Z}$  de  $L(SU(d))$  étant stable par  $P$ , la restriction de  $(j_n)_{n \geq 1}$  au centre définit une chaîne de Markov classique sur  $\mathbf{P}_{++}$ . En effet, le centre est engendré par les projections  $\Pi_\lambda = d_\lambda \int_{SU(d)} \overline{\chi_\lambda(g)} \lambda_g dg$ , où  $d_\lambda$  est la dimension de la représentation de plus haut poids  $\lambda$ . On obtient alors un isomorphisme entre  $\mathcal{Z}$  et  $L^\infty(\mathbf{P}_{++})$  en identifiant  $\Pi_\lambda$  et l'indicatrice de  $\lambda + \phi$ . Pour identifier la loi de cette chaîne de Markov, on applique  $P$  à  $\Pi_{\lambda-\phi}$ , pour  $\lambda \in \mathbf{P}_{++}$ , ce qui donne

$$P\Pi_{\lambda-\phi} = d_{\lambda-\phi} \int_{SU(d)} \overline{\chi_{\lambda-\phi}(g)} \frac{1}{d} \chi_d(g) \lambda_g dg,$$

où  $\chi_d$  est le caractère de la représentation standard, *i.e.*  $\chi_d(g) = \text{Tr}(\rho(g))$ . Le produit  $\chi_{\lambda-\phi} \chi_d$  correspondant au caractère de la représentation tensorielle  $\rho_{\lambda-\phi} \otimes \rho: G \rightarrow \text{End}(V_{\lambda-\phi} \otimes V)$ , où  $V_{\lambda-\phi}$  et  $V$  sont les espaces des représentations  $\rho_{\lambda-\phi}$  et  $\rho$ , il s'agit alors de décomposer la représentation  $V_{\lambda-\phi} \otimes V$  en somme directe de représentations irréductibles. Ceci est obtenu par la formule de Weyl, qui nous donne

$$V_{\lambda-\phi} \otimes V = \bigoplus_{\mu \in \{\lambda + e_1, \dots, \lambda + e_n\} \cap \mathbf{P}_{++}} V_{\mu-\phi}.$$

On obtient ainsi que les probabilités de transition de la chaîne de Markov obtenue sur  $\mathbf{P}_{++}$  sont données par

$$p(\lambda, \mu) = \frac{1}{d} \frac{h(\mu)}{h(\lambda)}, \quad \text{si } \mu \in \{\lambda + e_1, \dots, \lambda + e_n\} \cap \mathbf{P}_{++},$$

où  $h(\lambda) = d_{\lambda-\phi}$ , pour tout  $\lambda \in \mathbf{P}_{++}$ . Remarquons alors que si on note  $p^0$  les sous-probabilités de transition de la marche aléatoire sur  $\mathbf{P}$  tuée au bord de la chambre de Weyl, *i.e.*

$$p^0(\lambda, \mu) = \frac{1}{d}, \quad \text{si } \mu \in \{\lambda + e_1, \dots, \lambda + e_n\} \cap \mathbf{P}_{++},$$

et 0 sinon, alors la chaîne de Markov sur  $\mathbf{P}_{++}$  est obtenue par une  $h$ -transformée, au sens de Doob, de la marche tuée au bord de la chambre de Weyl, par la fonction dimension  $h(\lambda) = d_{\lambda-\phi}$ .

Pour clarifier les choses, prenons par exemple  $SU(3)$ . Alors le réseau des poids  $\mathbf{P}$  est un réseau triangulaire d'angle  $\frac{\pi}{3}$ , et la marche aléatoire obtenue par restriction à  $\mathbb{T}$  est représentée à la figure 1. De même, la chaîne de Markov obtenue par restriction au centre de l'algèbre est représentée à la figure 2, l'ensemble des plus hauts poids  $\mathbf{P}_{++}$  étant égal à l'intersection de  $\mathbf{P}$  avec un cône de  $\mathbb{R}^2$ .

### 0.3.3 Marches aléatoires quantiques et mineurs du mouvement brownien hermitien

Plutôt que de considérer l'algèbre de von Neumann du groupe  $SU(d)$ , on va se placer du point de vue des algèbres enveloppantes. En effet, les représentations irréductibles de  $SU(d)$  sont en correspondance avec les représentations irréductibles de son algèbre de Lie complexifiée  $\mathfrak{sl}_d(\mathbb{C})$ , l'ensemble des matrices complexes  $d \times d$  de trace nulle, elles-mêmes en correspondance avec les représentations irréductibles de dimension finie de  $GL_d(\mathbb{C})$ , le groupe des matrices complexes de taille  $d \times d$  inversibles.

On suppose désormais que  $G = GL_d(\mathbb{C})$  est le groupe des matrices complexes de taille  $d \times d$  inversibles, et que  $\mathfrak{g} = M_d(\mathbb{C})$  est l'algèbre de Lie de  $G$ , c'est-à-dire l'algèbre de toutes les matrices complexes de taille  $d \times d$ . Soit  $\mathcal{U}(\mathfrak{g})$  son algèbre enveloppante. Notant  $e_{ij}$ ,  $i, j = 1, \dots, d$  la base standard de  $M_d(\mathbb{C})$ ,  $\mathcal{U}(\mathfrak{g})$  est l'algèbre associative engendrée par les  $e_{ij}$  ne vérifiant entre eux que les relations de commutation suivantes

$$[e_{ij}, e_{kl}] = \delta_{jk}e_{il} - \delta_{il}e_{kj}.$$

Toute représentation de dimension finie de  $\mathfrak{g}$ ,

$$\rho: \mathfrak{g} \rightarrow \text{End}(V)$$

s'étend de façon unique à  $\mathcal{U}(\mathfrak{g})$ , par

$$\rho(xy) = \rho(x)\rho(y), \quad \text{pour } x, y \in \mathcal{U}(\mathfrak{g}).$$

Le produit tensoriel de représentations s'obtient à l'aide du coproduit  $\Delta$ , qui est le morphisme  $\Delta: \mathcal{U}(\mathfrak{g}) \rightarrow \mathcal{U}(\mathfrak{g}) \otimes \mathcal{U}(\mathfrak{g})$  défini par

$$\begin{aligned} \Delta(I) &= I \otimes I \\ \Delta(e_{ij}) &= I \otimes e_{ij} + e_{ij} \otimes I, \quad \text{si } i \neq j, i, j = 1, \dots, d \\ \Delta(h_i) &= I \otimes h_i + h_i \otimes I, \quad i = 1, \dots, d-1, \end{aligned}$$

où  $h_i = e_{ii} - e_{i+1, i+1}$ , et  $I$  la matrice identité. Si  $\rho_1: \mathfrak{g} \rightarrow \text{End}(V_1)$  et  $\rho_2: \mathfrak{g} \rightarrow \text{End}(V_2)$  sont deux représentations de  $\mathfrak{g}$ , et étendues à  $\mathcal{U}(\mathfrak{g})$ , alors on obtient une nouvelle représentation sur  $V_1 \otimes V_2$ , appelée représentation tensorielle, en posant

$$\rho_1 \otimes \rho_2(x) = (\rho_1 \otimes \rho_2)\Delta(x),$$

pour  $x \in \mathcal{U}(\mathfrak{g})$ . Soit  $\rho$  la représentation standard de  $\mathfrak{g}$ . On définit alors de façon récursive la représentation  $\rho^{\otimes n}$  par

$$\rho^{\otimes n}(x) = (\rho^{\otimes(n-1)} \otimes \rho)\Delta(x).$$

La chaîne de Markov quantique que nous considérons est alors définie par les morphismes

$$\begin{aligned} j_n: \mathcal{U}(\mathfrak{g}) &\rightarrow \mathcal{W} \\ u &\mapsto \rho^{\otimes n}(u), \end{aligned}$$

pour  $n \geq 1$ , où  $\mathcal{W}$  est l'algèbre de von Neumann  $\mathcal{W} = M_d(\mathbb{C})^{\otimes \infty}$  pour l'état produit  $\omega = \text{tr}^{\otimes \infty}$ . Si  $P: \mathcal{U}(\mathfrak{g}) \rightarrow \mathcal{U}(\mathfrak{g})$  est l'opérateur défini par

$$P = \text{id} \otimes \eta \circ \Delta,$$

où  $\eta(\cdot) = \text{tr}(\rho(\cdot))$ , alors on vérifie que le processus non-commutatif  $(j_n)_{n \geq 1}$  vérifie la propriété de Markov suivante

$$\omega(j_n(u)\xi) = \omega(j_{n-1}(Pu)\xi),$$

pour tout  $\xi$  dans la sous-algèbre de von Neumann engendré par  $\{j_k(\mathcal{U}(\mathfrak{g})), k \leq n-1\}$ . Remarquons que le processus  $(j_n)_{n \geq 1}$  est le même que la marche quantique construite sur  $L(SU(d))$  vu précédemment, mais pris du point de vue des algèbres enveloppantes.

Le groupe  $G$  agit sur  $\mathfrak{g}$  par l'action adjointe définie par  $\text{Ad}(g)x = gxg^{-1}$ , pour  $g \in G$  et  $x \in \mathfrak{g}$ , et qui s'étend en une action sur  $\mathcal{U}(\mathfrak{g})$ .

En remarquant que l'opérateur  $P$  et l'action adjointe commutent, on a que si  $K$  est un sous-groupe de  $G$  et que l'on note  $\mathcal{U}(\mathfrak{g})^K$  la sous-algèbre des éléments invariants par l'action adjointe de  $K$ , *i.e.* l'ensemble des  $g \in G$  tel que  $\text{Ad}(k)g = g$ , pour tout  $k \in K$ , alors  $P$  laisse stable  $\mathcal{U}(\mathfrak{g})^K$ , c'est-à-dire

$$P\mathcal{U}(\mathfrak{g})^K \subset \mathcal{U}(\mathfrak{g})^K.$$

Ainsi, les morphismes  $j_n$  restreints à  $\mathcal{U}(\mathfrak{g})^K$  forment encore une chaîne de Markov quantique. Par exemple, l'algèbre  $\mathcal{U}(\mathfrak{g})^G$  n'est rien d'autre que le centre de  $\mathcal{U}(\mathfrak{g})$ , et on retrouve le résultat de Biane énoncé précédemment.

On va donc s'intéresser à certaines sous-algèbres  $\mathcal{U}(\mathfrak{g})^K$  pour  $K$  un sous-groupe bloc diagonal de la forme  $\text{GL}_{d-p}(\mathbb{C}) \times \mathbb{C}^{*p}$ , c'est-à-dire engendré par les éléments

$$\begin{pmatrix} k & & & \\ & k_1 & & \\ & & \ddots & \\ & & & k_p \end{pmatrix},$$

avec  $k \in \text{GL}_{d-p}(\mathbb{C})$ , et  $k_1, \dots, k_p \in \mathbb{C}^*$ . Pour cela nous aurons besoin d'un peu de théorie des invariants afin de connaître les générateurs de ces différentes algèbres. On note  $\mathcal{M}_{k,l}$  l'algèbre des matrices  $k \times l$  dont les entrées sont dans  $\mathcal{U}(\mathfrak{g})$ . Soit  $E$  la matrice  $(e_{ij})_{1 \leq i,j \leq d} \in \mathcal{M}_{d,d}$ . On partitionne  $E$  en sous-matrices par

$$E = \begin{bmatrix} E_{11} & \dots & E_{1p+1} \\ \vdots & & \vdots \\ E_{p+11} & \dots & E_{p+1p+1} \end{bmatrix},$$

avec  $E_{11} \in \mathcal{M}_{d-p,d-p}$ ,  $E_{1i} \in \mathcal{M}_{d-p,1}$ ,  $E_{i1} \in \mathcal{M}_{1,d-p}$ ,  $i = 2, \dots, p+1$ , et  $E_{ij} \in \mathcal{U}(\mathfrak{g})$ ,  $i, j = 2, \dots, d$ . Pour  $M = (m_{i,j})_{1 \leq i,j \leq k}$  une matrice de  $\mathcal{M}_{k,k}$ , on notera  $\mathbf{Tr}(M) = \sum_{i=1}^k m_{ii}$ . Un théorème de Klink et Ton-That [KTT92] nous donne alors les générateurs de  $\mathcal{U}(\mathfrak{g})^{\text{GL}_{d-p}(\mathbb{C}) \times \mathbb{C}^{*p}}$ .

**Théorème 0.3.1.** *La sous-algèbre  $\mathcal{U}(\mathfrak{g})^{\text{GL}_{d-p}(\mathbb{C}) \times \mathbb{C}^{*p}}$  est finiment engendrée par les constantes et par les éléments*

$$\mathbf{Tr}(E_{i_1 i_2} \cdots E_{i_q i_1}), \quad q \in \mathbb{N}^*, i_1, \dots, i_q \in \{1, \dots, p+1\}.$$

Ces éléments sont appelés opérateurs de Casimir généralisés. En effet, pour  $p = 0$ , on retrouve le fait bien connu que le centre de  $\mathcal{U}(\mathfrak{g})$  est engendré par les opérateurs de Casimir ([Žel73])

$$\mathbf{Tr}(E^q), \quad q \geq 0.$$

Pour  $p = 1$ , les générateurs de la sous-algèbre  $\mathcal{U}(\mathfrak{g})^{\mathrm{GL}_{d-1}(\mathbb{C}) \times \mathbb{C}^*}$  se réécrivent de la façon suivante.

**Lemme 0.3.2.** *La sous-algèbre  $\mathcal{U}(\mathfrak{g})^{\mathrm{GL}_{d-1}(\mathbb{C}) \times \mathbb{C}^*}$  est engendrée par*

$$\mathbf{Tr}(E_{11}^{k-1}), \mathbf{Tr}(E^k), \quad k = 1, \dots, d.$$

Nous obtenons alors le théorème suivant.

**Théorème 0.3.3.** *Le processus  $(j_n)_{n \geq 1}$  restreint à la sous-algèbre*

$$\langle \mathbf{Tr}(E_{11}^{k-1}), \mathbf{Tr}(E^k), \quad k = 1, \dots, d \rangle \quad (1)$$

*est une chaîne de Markov quantique.*

Notons que la sous-algèbre (1) est engendrée par les opérateurs de Casimir correspondant à l'algèbre de Lie  $M_d(\mathbb{C})$  et ceux correspondant à  $M_{d-1}(\mathbb{C})$ , et est donc commutative.

On montre de plus que dans le cas  $p = 2$ , la sous-algèbre

$$\langle \mathbf{Tr}(E_{11}^k), \mathbf{Tr}\left(\begin{bmatrix} E_{11} & E_{12} \\ E_{21} & E_{22} \end{bmatrix}^k\right), \mathbf{Tr}(E^k), \quad k \geq 0 \rangle \quad (2)$$

n'est pas stable par l'opérateur  $P$ , et donc sa restriction ne définit pas une chaîne de Markov quantique.

Ces deux derniers résultats sont l'analogie non-commutatif de résultats récemment obtenus par Adler, Nordenstam, et van Moerbeke [ANvM10, théorèmes 2.2 et 2.4], et annoncés dans [Def10], dans le cadre des matrices aléatoires. En effet, ils ont montré les résultats suivants.

**Théorème 0.3.4** ([ANvM10]). *Soit  $(B(t), t \geq 0)$  le mouvement brownien hermitien. Soient  $(\Lambda_t^{(d)}, t \geq 0)$  le processus de ses valeurs propres,  $(\Lambda_t^{(d-1)}, t \geq 0)$  le processus des valeurs propres de son mineur principal d'ordre  $d - 1$ , et  $(\Lambda_t^{(d-2)}, t \geq 0)$  le processus des valeurs propres de son mineur principal d'ordre  $d - 2$ . Alors, le processus*

$$(\Lambda^{(d)}(t), \Lambda^{(d-1)}(t), t \geq 0) \quad (3)$$

*est markovien, alors que le processus*

$$(\Lambda^{(d)}(t), \Lambda^{(d-1)}(t), \Lambda^{(d-2)}(t), t \geq 0) \quad (4)$$

*n'est pas markovien.*

Afin de comprendre l'analogie avec les processus non-commutatifs précédemment introduits, il faut alors remarquer que par un résultat de Biane [Bia95], le processus quantique  $(j_n)_{n \geq 1}$  restreint à chacune des deux sous-algèbres (1) et (2) considérées précédemment converge respectivement et après renormalisation usuelle, vers les processus (3) et (4) des valeurs propres des mineurs du mouvement brownien hermitien du théorème précédent.

### 0.3.4 Applications aux matrices aléatoires

Dans la section précédente, on a vu que la sous-algèbre  $\mathcal{U}(\mathfrak{g})^{\mathrm{GL}_{d-p}(\mathbb{C}) \times \mathbb{C}^{*p}}$  était stable par l'opérateur  $P$ . Par le théorème (0.3.1), on obtient donc que le processus non-commutatif  $(j_n)_{n \geq 1}$  restreint à la sous-algèbre (pour un  $m$  assez grand)

$$\langle \mathrm{Tr}(E_{i_1 i_2} \cdots E_{i_q i_1}), q \in \{1, \dots, m\}, i_1, \dots, i_q \in \{1, \dots, p+1\} \rangle$$

est une chaîne de Markov quantique, et converge après renormalisation vers

$$(\mathrm{Tr}(B_{i_1 i_2}(t) \cdots B_{i_q i_1}(t)), t \geq 0), \quad (5)$$

$q \in \{1, \dots, m\}$ ,  $i_1, \dots, i_q \in \{1, \dots, p+1\}$ , où  $(B(t), t \geq 0)$  est un mouvement brownien hermitien, et où on partitionne une matrice de  $M_d(\mathbb{C})$  comme dans le cas non-commutatif, c'est-à-dire que

$$B = \begin{bmatrix} B_{11} & \cdots & B_{1p+1} \\ \vdots & & \vdots \\ B_{p+11} & \cdots & B_{p+1p+1} \end{bmatrix},$$

avec  $B_{11} \in M_{d-p}(\mathbb{C})$ ,  $B_{1i} \in M_{d-p,1}(\mathbb{C})$ ,  $B_{i1} \in M_{1,d-p}(\mathbb{C})$ , pour  $i = 2, \dots, p+1$ , et  $B_{ij} \in \mathbb{C}$ , pour  $i, j = 2, \dots, d$  ( $M_{k,l}(\mathbb{C})$  désigne l'ensemble des matrices complexes de taille  $k \times l$ ). L'étude du processus limite commutatif (5) fait intervenir le calcul d'Itô et la théorie des invariants appliquée à un cadre commutatif. Nous obtenons alors le théorème suivant.

**Théorème 0.3.5.** *Soit  $p \geq 1$  et  $B$  un mouvement brownien hermitien. Alors le processus des valeurs propres des matrices*

$$B_{11}, \begin{pmatrix} B_{11} & B_{1i} \\ B_{i1} & B_{ii} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} B_{11} & B_{1i} & 0 \\ 0 & 0 & B_{ij} \\ B_{j1} & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

et des processus complexes,

$$B_{ij}B_{ji}, B_{ij}B_{jk}B_{ki},$$

où  $i, j, k$ , sont des entiers distincts dans  $\{2, \dots, p+1\}$ , considérés comme les composantes d'un même processus, est un processus de Markov.

En prenant  $p = 1$  dans le théorème précédent, nous obtenons alors comme corollaire le résultat de [ANvM10], c'est-à-dire que le processus des valeurs propres et des valeurs propres du mineur principal d'un mouvement brownien hermitien

$$(\Lambda^{(d)}(t), \Lambda^{(d-1)}(t), t \geq 0)$$

est un processus de Markov.

## 0.4 Propriété d'entrelacement des zéros des vecteurs propres d'opérateurs de Schrödinger sur les arbres

Dans le chapitre 4 (non probabiliste), nous démontrons l'analogie pour les arbres finis d'un théorème de Courant sur la propriété d'entrelacement des zéros des fonctions propres d'un opérateur de Schrödinger.

### 0.4.1 Introduction

Le célèbre théorème de Courant sur les domaines nodaux des fonctions propres d'un opérateur différentiel peut s'énoncer ainsi (voir [CH53]) :

**Théorème 0.4.1** (Théorème de Courant). *Soit  $L$  un opérateur elliptique auto-adjoint de second ordre, défini sur un domaine  $G$  de conditions aux bords arbitraires. Si ses fonctions propres sont ordonnées selon l'ordre croissant de ses valeurs propres, alors les zéros de la  $n$ -ième fonction propre divisent le domaine  $G$  en au plus  $n$  sous-domaines.*

Les sous-domaines définis dans le théorème de Courant sont appelés domaines nodaux, et sont donc les composantes connexes du complémentaire de  $\{x \in G \mid u_n(x) = 0\}$ , et sont séparés par les zéros, ou nodes, des fonctions propres  $u_n$  de  $L$ .

Si  $L$  est un opérateur de Schrödinger sur  $G = [a, b]$  un intervalle de  $\mathbb{R}$ , c'est-à-dire que  $L$  s'écrit  $L = \mathcal{L} + V$ , où  $\mathcal{L}$  est le laplacien, et  $V$  un certain potentiel, le théorème de Courant devient : *Les zéros de la  $n$ -ième fonction propre  $u_n$  divisent  $G$  en exactement  $n$  domaines nodaux.* De plus, les zéros des fonctions propres de  $L$  possèdent la propriété d'entrelacement suivante : *Entre deux zéros de  $u_n$ , il existe exactement un zéro de  $u_{n+1}$ .* Ce sont plus précisément ces deux dernières propriétés dont nous allons démontrer l'analogie dans le cadre des arbres finis.

De nombreux travaux sur le théorème de Courant sur les graphes ont été effectués ces dernières années, citons Davies *et al.* [DGLS01], Büyükoğlu [Büy03], et le livre [BLS07]. Contrairement au cas où  $G$  est une variété, et du fait qu'une fonction sur un graphe n'est définie que sur l'ensemble de ses sommets, une fonction peut changer de signe sans passer par zéro. Les zéros d'une fonction ne sont alors pas bien définis a priori. Ceci a donc conduit Davies *et al.* à définir la notion de graphe signé, qui est un ensemble connexe de sommets sur lesquels une fonction ne change pas de signe. Plus précisément, on a la définition suivante.

**Définition 0.4.2.** Soit  $\Gamma$  un arbre, et  $V$  l'ensemble de ses sommets. Soit  $u$  une fonction sur  $V$ . Un graphe signé fortement positif (resp. négatif) de  $u$  est un sous-arbre maximal  $S$  de  $\Gamma$  tel que  $u(x) > 0$  (resp.  $u(x) < 0$ ), pour tout sommet  $x$  de  $S$ .

Davies *et al.* ont alors montré un analogue du théorème de Courant sur le nombre maximal de graphes signés des vecteurs propres d'un opérateur de Schrödinger.

**Théorème 0.4.3** ([DGLS01]). *Soient  $\lambda_1, \dots, \lambda_N$  les valeurs propres d'un laplacien généralisé sur  $V$ . Supposons que  $\lambda_n$  soit de multiplicité  $r$ . Alors tout vecteur propre correspondant à  $\lambda_n$  a au plus  $n + r - 1$  graphes signés fortement positif (ou négatif).*

Leur preuve est essentiellement basé sur le théorème du minimax de Courant, voir [CH53]. Dans [Büy03], Büyükoğlu montre un analogue du théorème de Courant pour les arbres. Il caractérise le nombre maximal de graphes signés d'un vecteur propre d'un laplacien généralisé, et donne un algorithme de calcul pour trouver un vecteur propre avec un nombre minimal de graphes signés. De plus, il caractérise le nombre maximal de graphes

signés pour les valeurs propres de multiplicité plus grande que 1. Pour rendre ces faits plus précis, introduisons les différentes notions utilisées par la suite.

### 0.4.2 Notations

Introduisons quelques notations. On note  $\Gamma = (V, E)$  un arbre fini, où  $V$  est l'ensemble des sommets et  $E$  l'ensemble des arêtes, avec  $|V| = N$ , et  $|E| = N - 1$ . Rappelons qu'un arbre est un graphe connexe sans cycles. Ceci implique que sur un arbre, deux points quelconques (on autorise le fait de prendre des points sur les arêtes) sont reliés par un unique chemin. On note pour  $x, y \in V$ ,  $x \sim y$  s'il existe une arête reliant  $x$  et  $y$ , et alors  $x$  et  $y$  sont dit *voisins*, ou *adjacents*. On choisit un certain sommet  $\emptyset$  ne possédant qu'un seul voisin (ce qui existe toujours) qui sera appelé la racine de l'arbre. Ceci permet de définir une orientation des arêtes, l'orientation positive étant la direction reliant la racine  $\emptyset$  et les sommets. On notera  $(x, y)$  l'arête partant de  $x$  et finissant en  $y$ . On se donnera un *poids* sur  $\Gamma$ , c'est-à-dire une fonction  $c: V \times V \rightarrow \mathbb{R}$  tel que

$$\begin{cases} c(x, y) = c(y, x) > 0, & \text{si } x \sim y, \\ c(x, y) = 0, & \text{sinon.} \end{cases}$$

Pour  $x \sim y$ , la *longueur*  $l(x, y)$  de l'arête  $(x, y)$  reliant  $x$  et  $y$  est définie par  $l(x, y) = \frac{1}{c(x, y)}$ . L'espace  $L^2(V)$  des fonctions sur  $V$  est muni du produit scalaire

$$\langle u, v \rangle_V = \sum_{x \in V} u(x)v(x),$$

pour  $u$  et  $v$  des fonctions sur  $V$ .

Le *laplacien* sur  $\Gamma$  est l'opérateur auto-adjoint sur  $L^2(V)$ , défini par

$$\mathcal{L}f(x) = \sum_{y \in V, y \sim x} c(x, y)(f(x) - f(y)),$$

pour  $f \in L^2(V)$ , et  $x \in V$ . Remarquons que si  $f$  est vue comme un vecteur de  $\mathbb{R}^N$ , alors  $\mathcal{L}$  est la matrice de taille  $N \times N$  symétrique dont les entrées sont données par

$$\begin{cases} \mathcal{L}_{xy} = -c(x, y), & \text{pour } x \sim y, \\ \mathcal{L}_{xx} = \sum_{y \sim x} c(x, y), & \text{sur la diagonale.} \end{cases}$$

Un *opérateur de Schrödinger* sur  $\Gamma$ , ou *laplacien généralisé*, est un opérateur  $\mathcal{A}: L^2(V) \rightarrow L^2(V)$  de la forme  $\mathcal{A} = \mathcal{L} + r$ , où  $r: V \rightarrow \mathbb{R}$  une fonction sur  $V$ , jouant le rôle d'un potentiel. On a, pour toute  $f \in L^2(V)$ ,

$$\mathcal{A}f(x) = \sum_{y \sim x} c(x, y)(f(x) - f(y)) + r(x)f(x).$$

De même que pour le laplacien,  $\mathcal{A}$  peut être vu comme une matrice  $N \times N$  symétrique, dont les entrées en dehors de la diagonale sont négatives.

Dans la suite, on notera  $\lambda_i$ ,  $i = 1, \dots, N$  les valeurs propres (réelles) de  $\mathcal{A}$ , et nous ferons l'hypothèse suivante :

**Hypothèse A.** Pour tout  $n = 1, \dots, N$ , et tout vecteur propre  $u_n$  associé à  $\lambda_n$ , on a  $u_n(x) \neq 0$  pour tout sommet  $x \in V$ .

Ceci implique en particulier que les valeurs propres de  $\mathcal{A}$  sont simples, *i.e.*

$$\lambda_1 < \cdots < \lambda_n.$$

Une des idées principales ici, est d'étendre par linéarité une fonction  $u$  sur  $V$  aux arêtes de  $\Gamma$ . En effet, une arête  $(x, y)$  peut être identifiée avec l'intervalle réel  $[0, l(x, y)]$ . On note alors  $\tilde{u}_{xy}$ , ou seulement  $\tilde{u}$  lorsqu'il n'y a pas de risque de confusion, l'extension de  $u$  sur l'arête  $(x, y)$ , définie par

$$\tilde{u}_{xy}(t) = \frac{u(y) - u(x)}{l(x, y)}t + u(x), \quad \text{pour } t \in [0, l(x, y)].$$

Ceci permet d'étendre la notion de domaine nodal aux arbres.

**Définition 0.4.4.** Soit  $u$  une fonction sur  $V$ , et  $\tilde{u}$  son extension aux arêtes. Un *domaine nodal* de  $\tilde{u}$  est un chemin connexe maximal sur lequel  $\tilde{u}$  ne s'annule pas.

Remarquons que du fait qu'un arbre est connexe, cette notion est bien définie. Les différents domaines nodaux de  $\tilde{u}$  sont alors séparés les zéros de  $\tilde{u}$ . Un domaine nodal peut aussi être vu comme un sous-arbre de  $\Gamma$ , avec des arêtes incomplètes.

Soit  $G$  un graphe signé de  $u$  (fortement positif ou négatif). Soit  $(x, y)$  une arête avec  $x \in G$  et  $y \in V \setminus G$ . Alors  $u(x)u(y) < 0$  sinon  $y$  serait dans  $G$ . Ceci implique que  $\tilde{u}$  doit s'annuler sur l'intervalle  $]0, l(x, y)[$ . Ainsi,  $G$  définit de façon unique un domaine nodal de  $\tilde{u}$ , dû au fait que comme  $\tilde{u}$  est linéaire sur n'importe quelle arête, deux zéros de  $\tilde{u}$  ne peuvent être sur la même arête, et un domaine nodal contient au moins un sommet. On a donc que  $u$  possède  $n$  graphes signés si et seulement si  $\tilde{u}$  possède  $n$  domaines nodaux.

Soit  $u$  une fonction sur  $V$ , et  $G$  un graphe signé de  $u$ . On notera

$$\delta(G) = \{x \in V \setminus G \mid x \sim y, \text{ pour un certain } y \in G\},$$

la frontière de  $G$ . Soit  $\tilde{u}$  l'extension linéaire de  $u$ , et  $\tilde{G}$  le domaine nodal de  $\tilde{u}$  correspondant à  $G$ . La frontière de  $\tilde{G}$  est définie par

$$\mathcal{B}(\tilde{G}) = \{t(x, y) \mid x \sim y, x \in G, y \in \delta(G)\},$$

où  $t(x, y)$  est le point de  $]0, l(x, y)[$  sur lequel  $\tilde{u}_{xy}$  s'annule.

### 0.4.3 Résultats

Notre preuve de la propriété d'entrelacement des zéros des vecteurs propres de  $\mathcal{A}$  consiste essentiellement à adapter la démonstration classique du cas unidimensionnel à celui des arbres. Pour cela, nous montrons tout d'abord une formule de Green sur un arbre.

**Proposition 0.4.5** (Formule de Green). *Soit  $\mathcal{A} = \mathcal{L} + R$  un opérateur de Schrödinger sur  $\Gamma$ . Soient  $u, v$  des fonctions sur  $V$ , et  $\tilde{u}, \tilde{v}$  leurs extensions linéaires aux arêtes de  $\Gamma$ . Soient  $G$  un graphe signé de  $u$ , et  $\mathcal{B}(\tilde{G})$  la frontière du domaine nodal de  $\tilde{u}$  correspondant. Alors, on a*

$$\sum_{x \in G} \mathcal{A}u(x)v(x) - \sum_{x \in G} u(x)\mathcal{A}v(x) = - \sum_{t \in \mathcal{B}(\tilde{G})} \nabla \tilde{u}(t)\tilde{v}(t).$$

Nous obtenons alors la propriété d'entrelacement des zéros des vecteurs propres d'un opérateur de Schrödinger.

**Théorème 0.4.6.** *Soit  $\Gamma$  un arbre fini, et  $\mathcal{A}$  un opérateur de Schrödinger sur  $\Gamma$ . Soient  $(\lambda_n)_{1 \leq n \leq N}$ , les valeurs propres ordonnées de  $\mathcal{A}$ . Soit pour tout  $n$ ,  $u_n$  un vecteur propre de  $\mathcal{A}$  associé à  $\lambda_n$  tel que  $u_n$  ne s'annule pas sur les sommets de  $\Gamma$ . Alors,  $u_n$  possède exactement  $n$  graphes signés, et les zéros de  $\tilde{u}_n$  s'entrelacent, au sens où dans chaque domaine nodal de  $\tilde{u}_{n-1}$ , il y a exactement un zéro de  $\tilde{u}_n$ .*



# Chapter 1

## Affine Dunkl processes

### 1.1 Introduction

The aim of the following is to study the analogue of Dunkl processes in the case of an affine root system of type  $A_1^{(1)}$  (root systems and Dunkl process will be properly defined in the sequel). The affine Dunkl process  $(Y_t)_{t \geq 0}$  with parameter  $k$  will be defined as the Markov process in  $\mathbb{R}$  with infinitesimal generator given by

$$\mathcal{A}u(x) = \frac{1}{2}u''(x) + k\pi \cot(\pi x)u'(x) + \frac{k}{2} \sum_{p \in \mathbb{Z}} \frac{u(s_p(x)) - u(x)}{(x-p)^2},$$

acting on  $u \in C_b^2(\mathbb{R})$  and  $x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}$ , where  $k$  is a real number satisfying  $k \geq \frac{1}{2}$  and  $s_p$  is the reflection around  $p$ , *i.e.*  $s_p(x) = -x + 2p$ . It is a Markov process with jumps, whose radial part is the continuous Feller process living in the interval  $]0, 1[$ , and with generator

$$\mathcal{L}u(x) = \frac{1}{2}u''(x) + k\pi \cot(\pi x)u'(x),$$

for  $u \in C([0, 1]) \cap C^2(]0, 1[)$ . The main idea to achieve the construction of the process  $Y$  with generator  $\mathcal{A}$  is to consider a skew-product decomposition, by starting from the radial part and adding the jumps successively at random times. First, let us recall some facts about root system and Weyl group in the classical case as in the affine case, and some results about Dunkl processes.

#### 1.1.1 Root systems and reflection groups

All these facts can be found in the book [Hum90]. Let  $V$  be a real euclidean space of finite dimension endowed with an inner product  $\langle \cdot, \cdot \rangle$ . For  $\alpha \in V$ , we denote by  $\sigma_\alpha$  the orthogonal reflection associated to the vector  $\alpha$ , which writes

$$\sigma_\alpha(x) = x - 2 \frac{\langle \alpha, x \rangle}{\langle \alpha, \alpha \rangle} \alpha,$$

for  $x \in V$ , and  $\mathcal{H}_\alpha = \{x \in V \mid \langle x, \alpha \rangle = 0\}$  the hyperplane orthogonal to  $\alpha$ . Let  $\mathcal{R}^0 \subset V$  be a crystallographic root system, which by definition is a finite set which satisfies

- (i)  $\mathcal{R}^0$  spans  $V$ ,
- (ii) For all  $\alpha \in \mathcal{R}^0$ ,  $\sigma_\alpha(\mathcal{R}^0) = \mathcal{R}^0$ ,

(iii) For all  $\alpha, \beta \in \mathcal{R}^0$ ,  $\langle \alpha^\vee, \beta \rangle \in \mathbb{Z}$ ,

where elements of  $\mathcal{R}^0$  are called *roots* and the *coroot*  $\alpha^\vee$  is defined by  $\alpha^\vee = 2\frac{\alpha}{\langle \alpha, \alpha \rangle}$ , so  $\langle \alpha^\vee, \alpha \rangle = 2$  for all  $\alpha \in \mathcal{R}^0$ . The *rank* of  $\mathcal{R}^0$  is defined as the dimension of  $V$ . The *Weyl group*  $W^0$  associated to  $\mathcal{R}^0$  is the subgroup of the orthogonal group of  $V$ ,  $O(V)$ , generated by reflections  $\{\sigma_\alpha \mid \alpha \in \mathcal{R}^0\}$ . Note that  $W^0$  is a finite group for all root system in  $\mathbb{R}^n$ . Each root system can be written as a disjoint union  $\mathcal{R}^0 = \mathcal{R}_+^0 \cup (-\mathcal{R}_+^0)$ , where  $\mathcal{R}_+^0$  and  $-\mathcal{R}_+^0$  are separated by a hyperplane  $\{x \in V \mid \langle \beta, x \rangle = 0\}$ , where  $\beta$  is an arbitrary chosen vector in  $V$  with  $\beta \notin \mathcal{R}^0$ .  $\mathcal{R}_+^0$  is called a positive subsystem. Let

$$C = \{x \in V \mid \forall \alpha \in \mathcal{R}_+^0, \langle \alpha, x \rangle > 0\}$$

be the *Weyl chamber*. We denote by  $\bar{C}$  its closure, and by  $\partial C$  its boundary which is a union of half hyperplanes  $\mathcal{H}_\alpha$ , which are called the *walls* of  $C$ . We have that  $\bar{C}$  is a fundamental domain for the action of  $W^0$  on  $V$ , *i.e.*  $W^0$  permutes the chambers of the system, where chamber means any connected component of  $V \setminus \bigcup_{\alpha \in \mathcal{R}^0} \mathcal{H}_\alpha$ .

All root systems of  $\mathbb{R}^n$  have been classified, see [Hum90] for details. Let us just mention for example the  $A_{n-1}$  root system (for  $n \geq 2$ ) which is the set

$$\{\pm(e_i - e_j) \mid 1 \leq i < j \leq n\},$$

where  $(e_i)_{1 \leq i \leq n}$  is the standard basis of  $\mathbb{R}^n$ , and  $V$  is the orthogonal complement of the vector  $e_1 + \dots + e_n$ . Thus the rank of  $A_{n-1}$  is  $n - 1$ . The Weyl group is in this case the symmetric group  $\mathcal{S}_n$ , and a Weyl chamber is the cone

$$\{(x_1, \dots, x_{n-1}) \in \mathbb{R}^{n-1} \mid 0 < x_1 < \dots < x_{n-1}\}.$$

We now want to consider not only orthogonal reflections (leaving the origin of  $V$  fixed), but also *affine reflections* relative to hyperplanes which do not necessarily pass through the origin. To this end, given a root system  $\mathcal{R}^0$ , we define the corresponding *affine root system* as the direct product  $\mathcal{R} = \mathcal{R}^0 \times \mathbb{Z}$ . Explicitly, we note  $\lambda = (\alpha, p) \in \mathcal{R}$ , for  $\alpha \in \mathcal{R}^0$  and  $p \in \mathbb{Z}$ . We define for  $x \in V$

$$\lambda(x) = \langle \alpha, x \rangle - p,$$

and affine reflections by

$$s_\lambda(x) = s_{(\alpha, p)}(x) = x - \langle \alpha, x \rangle \alpha^\vee + p \alpha^\vee.$$

The positive affine root system is also defined by

$$\mathcal{R}_+ = \{(\alpha, 0) \mid \alpha \in \mathcal{R}_+^0\} \cup \{(\alpha, p) \mid \alpha \in \mathcal{R}^0, p \leq -1\}. \quad (1.1)$$

The *affine Weyl group*  $W$  is the subgroup of the affine group of  $V$  generated by affine reflections  $\{s_\lambda \mid \lambda \in \mathcal{R}\}$ . One can show that  $W$  is the semidirect product of  $W^0$  and the translation group corresponding to the lattice generated by the coroots of  $\mathcal{R}^0$ . For each  $\lambda = (\alpha, p) \in \mathcal{R}$ , we define the affine hyperplane associated to  $\lambda$  by

$$\mathcal{H}_\lambda = \{x \in V \mid \langle \alpha, x \rangle = p\}.$$

Let  $\mathcal{A}$  be the collection of all connected components of  $V^\circ := V \setminus \bigcup_{\lambda \in \mathcal{R}} \mathcal{H}_\lambda$ . Each element of  $\mathcal{A}$  is called an *alcove*. As for chambers, we single out one particular alcove

$$\mathcal{A}_0 = \{x \in V \mid 0 < \langle \alpha, x \rangle < 1 \text{ for all } \alpha \in \mathcal{R}_+^0\},$$

called the *principal alcove*. Then, we have that the affine Weyl group  $W$  permutes the collection  $\mathcal{A}$  of all alcoves transitively, and the principal alcove  $\mathcal{A}_0$  is a fundamental domain for the action of  $W$  on  $V$ .

In the case of rank one root system, denoted  $A_1^{(1)}$ , this reduces to  $\mathcal{R}^0 = \{\pm\alpha\}$ ,  $\mathcal{R}_+^0 = \{\alpha\}$ , and the positive affine root system is given by

$$\mathcal{R}_+ = \mathcal{R}_+^0 \cup \{(\pm 1, p) \mid p \leq -1\}.$$

where we have identified  $\alpha$  with 1 and  $\alpha^\vee$  with 2, so that  $\langle \alpha^\vee, \alpha \rangle = 2$ . Hence, we will use the notation for affine reflections

$$s_p(x) = -x + 2p,$$

for  $p \in \mathbb{Z}$ . The affine Weyl group is then in the  $A_1^{(1)}$  case isomorphic to the infinite dihedral group, and the principal alcove is just the interval  $]0, 1[$ , so we will use in what follows either alcove or interval to describe an interval of the form  $]n, n + 1[$  with  $n \in \mathbb{Z}$ .

### 1.1.2 Dunkl processes

A good survey of Dunkl operators and processes can be found in the book [CDG<sup>+</sup>08].

From an analytic point of view, the theory was initiated by Dunkl ([Dun89]) who studied differential-difference operators defined by

$$T_i u(x) = \frac{\partial u(x)}{\partial x_i} + \sum_{\alpha \in \mathcal{R}_+^0} k(\alpha) \alpha_i \frac{u(x) - u(\sigma_\alpha(x))}{\langle x, \alpha \rangle},$$

where  $u \in C^1(V)$  and  $k$  is a nonnegative multiplicity function invariant by the Weyl group  $W^0$  associated with  $\mathcal{R}^0$ , *i.e.*  $k: \mathcal{R}^0 \rightarrow \mathbb{R}_+$  and  $k \circ w = k$  for all  $w \in W^0$ . One of the most important property of these Dunkl operators is the fact that they commute, and is at the basis of a rich analytic structures related to them.

The Dunkl Laplacian  $\mathcal{L}^0$  is defined by

$$\mathcal{L}^0 = \sum_{i=1}^n T_i^2,$$

and has explicit expression given by

$$\mathcal{L}^0 u(x) = \frac{1}{2} \Delta u(x) + \sum_{\alpha \in \mathcal{R}_+^0} k(\alpha) \left( \frac{\langle \nabla u(x), \alpha \rangle}{\langle x, \alpha \rangle} + \frac{|\alpha|^2}{2} \frac{u(\sigma_\alpha(x)) - u(x)}{\langle x, \alpha \rangle^2} \right),$$

acting on  $u \in C_b^2(V)$ , for  $x \in V \setminus \bigcup_{\alpha \in \mathcal{R}^0} \mathcal{H}_\alpha$ , where  $C_b^2$  means continuous twice differentiable bounded functions. This generalizes the radial part of the Laplace-Beltrami operator of a Riemannian symmetric space of Euclidian type obtained when  $k$  takes only certain values.

From a probabilistic point of view, the study of Dunkl processes was originated in [RV98], and then extensively studied in [GY06b, GY06a, GY05, Chy08]. The Dunkl processes are a family of càdlàg Markov processes with generator  $\mathcal{L}^0$ , and parameter  $k$ . Note that by its explicit expression given above,  $\mathcal{L}^0$  does not depend of the choice of  $\mathcal{R}^0$ . Fixing a Weyl chamber  $C$ , the radial part of the Dunkl process is the projection of the Dunkl process by the canonical projection of  $V$  onto the space  $V/W^0$  of  $W^0$ -orbits in  $V$ ,

and we can identify  $V/W^0$  with  $\overline{C}$  since  $\overline{C}$  is a fundamental domain for the action of  $W^0$ . The radial Dunkl process is then a diffusion process with infinitesimal generator given by

$$\mathcal{L}^{0,W^0}u(x) = \frac{1}{2}\Delta u(x) + \sum_{\alpha \in \mathcal{R}_+^0} k(\alpha) \frac{\langle \nabla u(x), \alpha \rangle}{\langle x, \alpha \rangle},$$

for  $u \in C_0^2(\overline{C})$ , the set of  $C^2$  functions in  $C$ , continuous on  $\overline{C}$ , which vanish on the boundary of  $C$ , and such that  $\langle \nabla u(x), \alpha \rangle = 0$  for  $x \in \mathcal{H}_\alpha$ ,  $\alpha \in \mathcal{R}_+^0$ . Note that  $\mathcal{L}^{0,W^0}$  is obtained from  $\mathcal{L}^0$  acting on functions that are invariant by  $W^0$ . As an example, when  $k(\alpha) \equiv 1$ , the radial Dunkl process is the Brownian motion process in a Weyl chamber as studied in [BBO05]. One can show that the radial Dunkl process is the unique solution of the following stochastic differential equation

$$dX_t^0 = dB_t + \sum_{\alpha \in \mathcal{R}_+^0} k(\alpha) \alpha \frac{dt}{\langle X_t^0, \alpha \rangle},$$

where  $(B_t)_{t \geq 0}$  is a  $n$ -dimensional Brownian motion, and  $X_0^0 \in C$  almost surely. Furthermore, it has been shown ([CDG<sup>+</sup>08]) that, when  $k(\alpha) \geq \frac{1}{2}$  for all  $\alpha \in \mathcal{R}^0$ ,  $X^0$  lives in  $C$  almost surely, *i.e.*  $X^0$  never touches the walls of the chamber  $C$ . Now, we list some of the main properties of the Dunkl process, which is denoted  $(Y_t^0)_{t \geq 0}$ , all of them can be found in [CDG<sup>+</sup>08]. First, we see from its explicit expression, that  $\mathcal{L}^0$  decomposes into a continuous part and a jump part driven by the term  $\sum_{\alpha \in \mathcal{R}_+^0} k(\alpha) \frac{u(\sigma_\alpha(x)) - u(x)}{\langle x, \alpha \rangle^2}$ . One can show that the number of jumps is almost surely finite in any finite time interval, and when a jump occurs at some time  $t$ , there is a random reflection  $\sigma_\alpha$  such that  $Y_t^0 = \sigma_\alpha Y_{t-}^0$ , hence  $Y^0$  jumps from chamber to chamber. A remarkable property is that the Dunkl process is the first known example of Markov process with jumps which enjoy the time-inversion property like Brownian motion or Bessel processes. Another property, which will be of importance for the next, is the skew-product decomposition of the Dunkl process found in [Chy08]. This is a constructive way to define  $Y^0$  starting from its radial part, by adding successively jumps in the direction of the roots, see [Chy08] or [CDG<sup>+</sup>08] for details.

Finally, we also mention that the counterpart of Dunkl processes in the negatively curved setting, which are called Heckman-Opdam processes, is investigated in [Sch07]. They are Markov process with jumps, with infinitesimal generator given by

$$\mathcal{D}f(x) = \frac{1}{2}\Delta f(x) + \sum_{\alpha \in \mathcal{R}_+^0} k(\alpha) \left( \coth \frac{\langle \alpha, x \rangle}{2} \partial_\alpha f(x) + \frac{|\alpha|^2}{4 \sinh^2 \frac{\langle \alpha, x \rangle}{2}} (f(\sigma_\alpha(x)) - f(x)) \right),$$

for  $f \in C_b^2(V)$  and  $x \in V \setminus \bigcup_{\alpha \in \mathcal{R}^0} \mathcal{H}_\alpha$ .

### 1.1.3 Heuristics of affine Dunkl process

Since the link between the operator  $\mathcal{A}$  defined in the introduction and affine root system is not so obvious, we give in this section some little heuristics, without being rigorous. We have seen in the previous section that the Dunkl process is the Markov process with infinitesimal generator

$$\mathcal{L}^0 u(x) = \frac{1}{2}\Delta u(x) + \sum_{\alpha \in \mathcal{R}_+^0} k(\alpha) \left( \frac{\langle \nabla u(x), \alpha \rangle}{\langle x, \alpha \rangle} + \frac{|\alpha|^2}{2} \frac{u(\sigma_\alpha(x)) - u(x)}{\langle x, \alpha \rangle^2} \right),$$

acting on  $u \in C_b^2(V)$  with  $x \in V \setminus \bigcup_{\alpha \in \mathcal{R}^0} \mathcal{H}_\alpha$ . The main idea is then to replace the positive root system  $\mathcal{R}_+^0$  by a positive affine root system  $\mathcal{R}_+$ , and hence to define the affine Dunkl laplacian by

$$\mathcal{A}u(x) = \frac{1}{2}\Delta u(x) + \sum_{\lambda \in \mathcal{R}_+} k(\lambda) \left( \frac{\langle \nabla u(x), D\lambda \rangle}{\langle x, \lambda \rangle} + \frac{|D\lambda|^2}{2} \frac{u(s_\lambda x) - u(x)}{\langle x, \lambda \rangle^2} \right).$$

The multiplicity function is defined by  $k(\lambda) = k(\alpha)$  for  $\lambda = (\alpha, p) \in \mathcal{R}$ , and  $D\lambda = \alpha$ . Using the explicit form (1.1) of the positive affine root system, we have

$$\begin{aligned} \mathcal{A}u(x) = \frac{1}{2}\Delta u(x) + \sum_{\alpha \in \mathcal{R}_+^0} k(\alpha) & \left( \frac{\langle \nabla u(x), \alpha \rangle}{\langle x, \alpha \rangle} + \frac{|\alpha|^2}{2} \frac{u(s_\alpha x) - u(x)}{\langle x, \alpha \rangle^2} \right) \\ & + \sum_{p \leq -1} \sum_{\alpha \in \mathcal{R}^0} \left( \frac{\langle \nabla u(x), \alpha \rangle}{\langle x, \alpha \rangle - p} + \frac{|\alpha|^2}{2} \frac{u(s_{(\alpha,p)} x) - u(x)}{(\langle x, \alpha \rangle - p)^2} \right). \end{aligned}$$

In the  $A_1^{(1)}$  case, this gives

$$\begin{aligned} \mathcal{A}u(x) = \frac{1}{2}u''(x) + k \frac{u'(x)}{x} + k \frac{u(-x) - u(x)}{2x^2} + k \sum_{p \leq -1} & \left\{ \frac{u'(x)}{x-p} + \frac{u'(x)}{x+p} \right. \\ & \left. + \frac{u(-x+2p) - u(x)}{2(x-p)^2} + \frac{u(-x-2p) - u(x)}{2(x+p)^2} \right\}. \end{aligned}$$

Recall the series expansion of the cotangent function

$$\pi \cot(\pi x) = \frac{1}{x} + \sum_{n \geq 1} \left( \frac{1}{x+n} + \frac{1}{x-n} \right),$$

for  $x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}$ , see [AZ06], which can be written more elegantly

$$\pi \cot(\pi x) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} \frac{1}{x-n}.$$

Note that the latter formula is quite dangerous since it is not absolutely convergent, and we have to be cautious with the summation order. Hence, using the cotangent expansion, the affine Dunkl laplacian writes

$$\mathcal{A}u(x) = \frac{1}{2}u''(x) + k\pi \cot(\pi x)u'(x) + \frac{k}{2} \sum_{p \in \mathbb{Z}} \frac{u(s_p(x)) - u(x)}{(x-p)^2}.$$

The following is divided in two parts. In the first one, we define the radial affine Dunkl process, as the unique solution of a stochastic differential equation. We calculate its semigroup and study some of its properties. The second part is devoted to the construction of the affine Dunkl process with generator  $\mathcal{A}$ , using a skew-product decomposition by means of the radial process and a pure jump process on the affine Weyl group. We study its jumps and also give a martingale decomposition.

## 1.2 The radial affine Dunkl process

### 1.2.1 Definition of the radial process

In what follows, the parameter  $k$  of the affine Dunkl process is a real number satisfying  $k \geq \frac{1}{2}$ . We start by studying the radial part of the affine Dunkl Process, which is the process  $(X_t)_{t \geq 0}$  solution to the following stochastic differential equation.

**Proposition 1.2.1.** *The stochastic differential equation*

$$dX_t = dB_t + k\pi \cot(\pi X_t)dt,$$

with initial condition  $X_0 = x \in ]0, 1[$  a.s., and where  $(B_t)_{t \geq 0}$  is a standard brownian motion, admits a unique strong solution. Furthermore, let  $S$  be the first exit time of the interval  $]0, 1[$ , that is

$$S = \inf\{t \geq 0 \mid X_t = 0 \text{ or } 1\}.$$

Then  $\mathbb{P}(S = +\infty) = 1$  if and only if  $k \geq \frac{1}{2}$ .

*Proof.* The operator

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2} \frac{d^2}{dx^2} + k\pi \cot(\pi x) \frac{d}{dx}$$

acting on  $C([0, 1]) \cap C^2(]0, 1[)$  generates a Feller semigroup on  $C([0, 1])$ , hence the corresponding stochastic differential equation admits a unique strong solution [EK86].

For the second assertion, we use the standard scale function technique as in [KS91]. The scale function  $p$  is defined by

$$p(x) = \int_c^x \exp\left(-2k \int_c^\xi \pi \cot(\pi y) dy\right) d\xi,$$

for  $x \in ]0, 1[$ . We can choose  $c = 1/2$  without loss of generality. Then,

$$p(x) = \frac{1}{\pi} \int_{\pi/2}^{\pi x} \frac{1}{(\sin y)^{2k}} dy.$$

Since  $\frac{1}{(\sin y)^{2k}} \sim \frac{1}{x^{2k}}$  for  $x = 0$ ,  $p$  diverges for  $k \geq \frac{1}{2}$ . Indeed, we have  $p(0) = -\infty$  and  $p(1) = +\infty$ . This guarantees that for  $k \geq \frac{1}{2}$ ,  $S = +\infty$  a.s., according to [KS91].

Now, suppose that  $k < \frac{1}{2}$ . Define the speed measure by

$$m(dx) = \frac{2}{p'(x)} dx = 2(\sin(\pi x))^{2k} dx.$$

Define also

$$v(x) = \int_c^x (p(x) - p(y))m(dy).$$

Then by Feller's test for explosion, see theorem 5.29 in [KS91],  $S = +\infty$  a.s. if and only if  $v(0)$  and  $v(1)$  equal  $\pm\infty$ . Since  $p(x) < +\infty$  for all  $x \in [0, 1]$ , we have to look at the finiteness of  $\int_c^x p(y)m(dy)$ . But,

$$\begin{aligned} \left| \int_{1/2}^x p(y)m(dy) \right| &= \left| \frac{2}{\pi^2} \int_{\pi/2}^{\pi x} dy \int_{\pi/2}^{\pi y} d\xi \frac{1}{(\sin \xi)^{2k}} (\sin y)^{2k} \right| \\ &\leq \left| \frac{2}{\pi^2} \int_{\pi/2}^{\pi x} dy \int_{\pi/2}^{\pi y} d\xi \frac{1}{(\sin \xi)^{2k}} \right| \\ &= \left| \frac{2}{\pi^2} \int_{\pi/2}^{\pi x} \frac{x - \pi/2}{(\sin \xi)^{2k}} d\xi \right|. \end{aligned}$$

Hence, for  $k < \frac{1}{2}$ ,  $\int_c^x p(y)m(dy)$  is finite for  $x = 0$  and  $x = 1$ , and  $S < +\infty$  a.s.  $\square$

**Remark 1.2.2.** If we let the starting point live in some interval  $]n, n + 1[$ , with  $n \in \mathbb{Z}$ , by the periodicity of the cotangent function we get exactly the same kind of result, that is, the process  $X$  lives in  $]n, n + 1[$  almost surely.

Hence, we define

**Definition 1.2.3.** The Feller continuous process  $(X_t)_{t \geq 0}$  with infinitesimal generator

$$\mathcal{L}u(x) = \frac{1}{2}u''(x) + k\pi \cot(\pi x)u'(x)$$

acting on  $u \in C(\bar{I}) \cap C^2(I)$ , where  $I$  is some interval  $I = ]n, n + 1[$ ,  $n \in \mathbb{Z}$ , and  $X_0 \in I$  a.s., is called the *radial Affine Dunkl process* with parameter  $k$ .

Let us mention that for  $k = 1$ , the radial affine Dunkl process is the Brownian motion conditioned to stay in the interval  $]0, 1[$ , also known as the Legendre process (see [RY99]). Indeed, in that case, the generator of the process writes

$$\mathcal{L}u(x) = \frac{1}{2}u''(x) + \frac{h'(x)}{h(x)}u'(x),$$

where  $h(x) = \sin(\pi x)$  is an eigenfunction for the Laplacian  $\Delta$ , and hence the corresponding process  $X$  is a Doob  $h$ -transform at the bottom of the spectrum of Brownian motion killed when it reached the walls of  $]0, 1[$ . Let us also mention that Brownian motions in alcoves are related to the process of eigenvalues of the Brownian motion with values in the special unitary group  $SU(n)$ , see [Bia09]. The last two remarks are analogues of the same kind of properties for the radial Dunkl process in the classical case, see [CDG<sup>+</sup>08]

The property of recurrence of the radial affine Dunkl process is the content of the next proposition.

**Proposition 1.2.4.** *Let  $k \geq \frac{1}{2}$ . The radial affine Dunkl process  $(X_t)_{t \geq 0}$  is recurrent, that is for every  $y \in ]0, 1[$ , we have*

$$\mathbb{P}(\exists 0 \leq t < +\infty, X_t = y) = 1.$$

*Proof.* Let  $S$  be the exit time of the interval  $]0, 1[$ , and

$$p(x) = \frac{1}{\pi} \int_{\pi/2}^{\pi x} \frac{1}{(\sin y)^{2k}} dy,$$

be the scale function as in the proof of the last proposition. Since  $p(0) = -\infty$  and  $p(1) = +\infty$  for  $k \geq \frac{1}{2}$ , we have

$$\mathbb{P}(S = +\infty) = \mathbb{P}\left(\sup_{t \geq 0} X_t = 1\right) = \mathbb{P}\left(\inf_{t \geq 0} X_t = 0\right) = 1.$$

Hence by continuity of the paths of  $(X_t)_{t \geq 0}$ , the result follows.  $\square$

From now on, we will denote by  $\mathbb{P}_x$  the distribution of the radial affine Dunkl process starting from  $x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}$ .

### 1.2.2 Semigroup of the radial affine Dunkl process

Orthogonal polynomials theory (see [Sch00]) will allow us to make explicit the semigroup of the radial affine Dunkl process.

First, let us recall some standard facts about Gegenbauer polynomials, which can be found in [MOS66] or [Sze75] for example. Gegenbauer polynomials  $G_n^{(k)}$  (which can be expressed in terms of Jacobi polynomials  $P_n^{(k-\frac{1}{2}, k-\frac{1}{2})}$ ) are orthogonal for the weight  $(1-x^2)^{k-\frac{1}{2}} \mathbb{1}_{[-1,1]}(x)dx$ , *i.e.*

$$\int_{[-1,1]} G_n^{(k)}(x)G_m^{(k)}(x)(1-x^2)^{k-\frac{1}{2}}dx = \pi(\omega_n^{(k)})^{-1}\delta_{n,m},$$

for  $k > -\frac{1}{2}$ , where

$$\omega_n^{(k)} = \frac{n!(k+n)\Gamma(k)^2}{2^{1-2k}\Gamma(n+2k)}.$$

The first polynomials are (for  $k \neq 0$ ),  $G_0^{(k)}(y) = 1$ ,  $G_1^{(k)}(y) = 2ky, \dots$  They are of the same parity than  $n$ , and  $G_n^{(k)}(-y) = (-1)^n G_n^{(k)}(y)$ . The value at 1 is  $G_n^{(k)}(1) = \frac{\Gamma(2k+n)}{n!\Gamma(2k)}$ . For  $k > 0$ , they admit an explicit expression, given by

$$G_n^{(k)}(y) = \frac{1}{\Gamma(k)} \sum_{m=0}^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor} (-1)^m \frac{\Gamma(k+n-m)}{m!(n-2m)!} (2y)^{n-2m}. \quad (1.2)$$

Furthermore, for all  $n \geq 0$ ,  $G_n^{(k)}$  is (up to the normalization  $G_n^{(k)}(1) = \frac{\Gamma(2k+n)}{n!\Gamma(2k)}$ ) the unique polynomial solution of the equation

$$(1-x^2)f''(x) - (2k+1)xf'(x) + n(n+2k)f(x) = 0.$$

Now, we can state the following proposition, which gives the semigroup of the radial affine Dunkl process.

**Proposition 1.2.5.** *The radial affine Dunkl process  $(X_t)_{t \geq 0}$ , with  $X_0 \in ]0, 1[$  a.s., is the Markov process with semigroup on  $]0, 1[ \times ]0, 1[$  given by*

$$q_t(x, y)dy = \sum_{n \geq 0} e^{-\lambda_n t} G_n^{(k)}(\cos \pi x) G_n^{(k)}(\cos \pi y) \omega_n^{(k)} (\sin \pi y)^{2k} dy,$$

where the  $G_n^{(k)}$  are the Gegenbauer polynomials, with eigenvalues  $\lambda_n = \frac{\pi^2}{2}n(n+2k)$ , and  $\omega_n^{(k)}$  is a normalization constant given by

$$\omega_n^{(k)} = \frac{n!(k+n)\Gamma(k)^2}{2^{1-2k}\Gamma(n+2k)}.$$

*Proof.* Since for all  $n \geq 0$ ,  $G_n^{(k)}$  is the unique polynomial solution of the equation

$$(1-x^2)f''(x) - (2k+1)xf'(x) + n(n+2k)f(x) = 0,$$

we have that  $G_n^{(k)}(\cos(\pi x))$  is solution of the equation

$$\frac{1}{2}g''(x) + k\pi \cot(\pi x)g'(x) = -\frac{\pi^2}{2}n(n+2k)g(x),$$

for  $x \in [0, 1]$ . The weight associated is then the measure  $\pi(\sin \pi x)^{2k} \mathbb{1}_{[0,1]}dx$ , and by [Sch00], we obtain that the semigroup associated to the diffusion of generator  $\mathcal{L} = \frac{1}{2} \frac{d^2}{dx^2} + k\pi \cot(\pi x) \frac{d}{dx}$ , is given by

$$q_t(x, y)dy = \sum_{n \geq 0} e^{-\lambda_n t} G_n^{(k)}(\cos \pi x) G_n^{(k)}(\cos \pi y) \omega_n^{(k)} (\sin \pi y)^{2k} dy. \quad \square$$

### 1.2.3 Some properties of the radial process

As we will see, an important functional of the radial affine Dunkl process, is the continuous process  $\frac{1}{\sin^2(\pi X)}$ . First, note that since  $X$  is continuous and never reaches (for  $k \geq \frac{1}{2}$ ) the walls of the alcove where is started from, we have that for all  $t \geq 0$ , there exists some random  $\varepsilon_t > 0$  such that

$$\inf_{s \in [0, t]} \sin^2(\pi X_s) > \varepsilon_t, \quad \mathbb{P}_x\text{-a.s.}$$

Hence, we obtain that for all  $t \geq 0$ ,

$$\int_0^t \frac{ds}{\sin^2(\pi X_s)} < +\infty, \quad \mathbb{P}_x\text{-a.s.}$$

Note also that, since  $\sin^2(\pi X_s) < 1$  for all  $s \geq 0$ , we have that  $\int_0^t \frac{ds}{\sin^2(\pi X_s)} \geq t$ , so

$$\int_0^t \frac{ds}{\sin^2(\pi X_s)} \xrightarrow{t \rightarrow +\infty} +\infty, \quad \mathbb{P}_x\text{-a.s.}$$

To study some properties of the radial affine Dunkl process and more particularly of the last functional, we will need a few lemmas. Let us introduce some standard notations. The binomial coefficient is denoted  $\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$ , for all integers  $n$  and  $k$ , the rising factorial (also known as Pochhammer's symbol) is defined by

$$(\alpha)_n = \alpha(\alpha + 1) \cdots (\alpha + n - 1) = \frac{\Gamma(\alpha + n)}{\Gamma(\alpha)},$$

for real  $\alpha$ , where  $\Gamma$  is the usual Gamma function, and the falling factorial is defined by

$$[\alpha]_n = \alpha(\alpha - 1) \cdots (\alpha - n + 1),$$

with  $(0)_n = [0]_n = 0$  by convention. The relation between rising and falling factorials is given by  $(\alpha)_n = [\alpha + n - 1]_n$ . We have the classical following lemma.

**Lemma 1.2.6.** *For all  $\alpha \in \mathbb{R}$ , and all  $n \geq 0$ , we have*

$$\sum_{l=0}^n (-1)^l \binom{n}{l} [\alpha + l]_i = 0,$$

for  $i = 0, \dots, n - 1$ .

*Proof.* This can be done by looking at the function  $u(x) = x^\alpha(1 - x)^n$  for which 1 is a zero of order  $n$ , and by differentiating  $u$   $i$ -times.  $\square$

We will use this lemma to prove the

**Lemma 1.2.7.** *Let  $k > \frac{1}{2}$ . For all  $n \geq 0$ , we have*

$$\int_{-1}^1 G_n^{(k)}(x)(1 - x^2)^{k-\frac{3}{2}} dx = \frac{\Gamma(k - \frac{1}{2})\sqrt{\pi}}{\Gamma(k)}, \quad \text{if } n \text{ is even,}$$

and 0 if  $n$  is odd.

*Proof.* Since  $G_n^{(k)}$  is odd for  $n$  odd, we just have to look at the even case. The explicit form (1.2) of Gegenbauer polynomials is given by

$$G_{2n}^{(k)}(x) = \frac{1}{\Gamma(k)} \sum_{m=0}^n (-1)^m \frac{\Gamma(k+2n-m)}{m! \Gamma(2n-2m)!} (2x)^{2n-2m}.$$

Hence, by parity,

$$\begin{aligned} & \int_{-1}^1 G_{2n}^{(k)}(x) (1-x^2)^{k-\frac{3}{2}} dx \\ &= 2 \int_0^1 G_{2n}^{(k)}(x) (1-x^2)^{k-\frac{3}{2}} dx \\ &= \frac{1}{\Gamma(k)} \sum_{m=0}^n (-1)^m \frac{\Gamma(k+2n-m)}{m! (2n-2m)!} 2^{2n-2m} \int_0^1 x^{2n-2m} (1-x^2)^{k-\frac{3}{2}} dx. \end{aligned}$$

Making the change of variable  $u = x^2$  in the integral, we obtain

$$2 \int_0^1 x^{2n-2m} (1-x^2)^{k-\frac{3}{2}} dx = \int_0^1 u^{n-m-\frac{1}{2}} (1-u)^{k-\frac{3}{2}} du = \frac{\Gamma(n-m+\frac{1}{2}) \Gamma(k-\frac{1}{2})}{\Gamma(k+n-m)},$$

by the definition of the Beta distribution. So,

$$\int_{-1}^1 G_{2n}^{(k)}(x) (1-x^2)^{k-\frac{3}{2}} dx = \sum_{m=0}^n (-1)^m \frac{\Gamma(k+2n-m)}{m! (2n-2m)!} \frac{\Gamma(n-m+\frac{1}{2})}{\Gamma(k+n-m)} 2^{2n-2m} \frac{\Gamma(k-\frac{1}{2})}{\Gamma(k)}.$$

Using duplication formula of the Gamma function, *i.e.*

$$\Gamma(z) \Gamma(z + \frac{1}{2}) = 2^{1-2z} \sqrt{\pi} \Gamma(2z),$$

we obtain

$$\Gamma(n-m+\frac{1}{2}) = 2^{-2(n-m)} \sqrt{\pi} \frac{(2n-2m)!}{(n-m)!},$$

hence,

$$\int_{-1}^1 G_{2n}^{(k)}(x) (1-x^2)^{k-\frac{3}{2}} dx = \sum_{m=0}^n (-1)^m \frac{1}{m! (n-m)!} \frac{\Gamma(k+2n-m)}{\Gamma(k+n-m)} \frac{\Gamma(k-\frac{1}{2}) \sqrt{\pi}}{\Gamma(k)}.$$

Using the rising factorial notation, and the change of index  $j = n-m$ , this can be rewritten

$$\int_{-1}^1 G_{2n}^{(k)}(x) (1-x^2)^{k-\frac{3}{2}} dx = \frac{1}{n!} \sum_{j=0}^n (-1)^{n-j} \binom{n}{j} (k+j)_n \frac{\Gamma(k-\frac{1}{2}) \sqrt{\pi}}{\Gamma(k)}.$$

So, to prove the lemma, we have to show that

$$I_n = \sum_{j=0}^n (-1)^{n-j} \binom{n}{j} (k+j)_n = n!.$$

This is done by induction. The cases 0 and 1 are easily checked. Suppose it is true for  $n \geq 1$ . Introduce

$$\tilde{I}_n = (-1)^n I_n = \sum_{j=0}^n (-1)^j \binom{n}{j} (k+j)_n.$$

Then, since  $(k+j)_{n+1} = (k+j)_n(k+j+n)$ , we have

$$\tilde{I}_{n+1} = (k+n) \sum_{j=0}^{n+1} (-1)^j \binom{n+1}{j} (k+j)_n + \sum_{j=0}^{n+1} (-1)^j \binom{n+1}{j} j(k+j)_n.$$

The first term in the right hand side of the above equality is

$$(k+n) \sum_{j=0}^{n+1} (-1)^j \binom{n+1}{j} [k+j+n-1]_n = 0,$$

by lemma 1.2.6 applied to  $\alpha = k+n-1$ . So, we have

$$\tilde{I}_{n+1} = \sum_{j=0}^{n+1} (-1)^j \binom{n+1}{j} j(k+j)_n = \sum_{l=0}^n (-1)^{l+1} (n+1) \binom{n}{l} (k+l+1)_n.$$

Now, developing the rising factorial as

$$(a+b)_n = \sum_{j=0}^n \binom{n}{j} (a)_j (b)_{n-j},$$

(this can be seen by looking at the  $n^{\text{th}}$ -moment of the sum of two independent random variables with Gamma distributions of parameters  $a$  and  $b$ ), we get

$$(k+l+1)_n = \sum_{j=0}^n \binom{n}{j} (k+l)_j (1)_{n-j} = \sum_{j=0}^n \frac{n!}{j!} (k+l)_j,$$

since  $(1)_{n-j} = (n-j)!$ . Hence, we have

$$\tilde{I}_{n+1} = \sum_{j=0}^n \frac{n!}{j!} (n+1) \left( \sum_{l=0}^n (-1)^{l+1} \binom{n}{l} (k+l)_j \right).$$

But lemma 1.2.6 gives

$$\sum_{l=0}^n (-1)^l \binom{n}{l} (k+l)_j = \sum_{l=0}^n (-1)^l \binom{n}{l} [k+j-1+l]_j = 0$$

for  $j = 1, \dots, n-1$ . Hence, the only non-zero term is for  $j = n$ , and

$$\begin{aligned} \tilde{I}_{n+1} &= (n+1)(-1) \sum_{l=0}^n (-1)^l \binom{n}{l} (k+l)_n \\ &= (-1)^{n+1} (n+1)!, \end{aligned}$$

by induction hypothesis. So, we obtain  $I_n = (n+1)!$ , which proves the assertion, and the lemma follows.  $\square$

**Lemma 1.2.8.** *Let  $(X_t)_{t \geq 0}$  be the radial affine Dunkl process, and  $k > \frac{1}{2}$ . Then, for all  $x \in ]0, 1[$ , and all  $t \geq 0$ , we have*

$$\mathbb{E}_x \left( \frac{1}{\sin^2(\pi X_t)} \right) < +\infty.$$

*Proof.* We have,

$$\begin{aligned}\mathbb{E}_x \left( \frac{1}{\sin^2(\pi X_t)} \right) &= \int_{[0,1]} \frac{1}{\sin^2(\pi y)} q_t(x, y) dy \\ &= \int_{[0,1]} \sum_{n \geq 0} e^{-\lambda_n t} G_n^{(k)}(\cos \pi x) G_n^{(k)}(\cos \pi y) \omega_n^{(k)} (\sin \pi y)^{2k-2} dy,\end{aligned}$$

which is integrable as soon as  $2k - 2 > -1$ , *i.e.*  $k > \frac{1}{2}$ , the summability of the series being guaranteed by the term  $e^{-\lambda_n t}$ .  $\square$

Note that the proof of this lemma gives that for  $k = \frac{1}{2}$ ,  $\mathbb{E}_x \left( \frac{1}{\sin^2(\pi X_t)} \right) = +\infty$  for all  $t > 0$ . In fact, we have a little more.

**Proposition 1.2.9.** *Let  $k > \frac{1}{2}$ . For all  $x \in ]0, 1[$ , and all  $t \geq 0$ , we have*

$$\mathbb{E}_x \left( \int_0^t \frac{ds}{\sin^2(\pi X_s)} \right) < +\infty.$$

*Proof.* For all  $t > 0$ , we have,

$$\begin{aligned}\int_0^t \mathbb{E}_x \left( \frac{ds}{\sin^2(\pi X_s)} \right) &= \int_0^t \int_0^1 \frac{1}{\sin^2(\pi y)} q_s(x, y) dy ds \\ &= \int_0^t \int_0^1 \sum_{n \geq 0} e^{-\lambda_n s} G_n^{(k)}(\cos \pi x) G_n^{(k)}(\cos \pi y) \omega_n^{(k)} (\sin \pi y)^{2k-2} dy ds \\ &= \sum_{n \geq 0} \frac{1}{\lambda_n} (1 - e^{-\lambda_n t}) G_n^{(k)}(\cos \pi x) \omega_n^{(k)} \int_0^1 G_n^{(k)}(\cos \pi y) (\sin \pi y)^{2k-2} dy.\end{aligned}$$

First, remark that the term  $n = 0$  is not a problem since  $G_0^{(k)}(y) = 1$  and  $\omega_0^{(k)} = \frac{k\Gamma(k)^2}{2^{1-2k}\Gamma(2k)}$ . Now, by the change of variables  $u = \cos(\pi y)$ , and lemma 1.2.7, we have

$$\int_0^1 G_n^{(k)}(\cos \pi y) (\sin \pi y)^{2k-2} dy = \frac{1}{\pi} \int_{-1}^1 G_n^{(k)}(u) (1 - u^2)^{k-\frac{3}{2}} du = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \frac{\Gamma(k - \frac{1}{2})}{\Gamma(k)},$$

if  $n$  is even, and 0 if  $n$  is odd. So,

$$\int_0^t \mathbb{E}_x \left( \frac{ds}{\sin^2(\pi X_s)} \right) = \sum_{\substack{n \geq 0 \\ n \text{ even}}} \frac{1}{\lambda_n} (1 - e^{-\lambda_n t}) G_n^{(k)}(\cos \pi x) \omega_n^{(k)} \frac{1}{\sqrt{\pi}} \frac{\Gamma(k - \frac{1}{2})}{\Gamma(k)}.$$

Hence, it suffices to prove that

$$\sum_{\substack{n \geq 0 \\ n \text{ even}}} \left| \frac{1}{\lambda_n} G_n^{(k)}(\cos \pi x) \omega_n^{(k)} \right| < +\infty.$$

Using Stirling's formula for the gamma function, *i.e.*

$$\Gamma(z) = \frac{\sqrt{2\pi}}{\sqrt{z}} z^z e^{-z} \left( 1 + O\left(\frac{1}{z}\right) \right),$$

we find that

$$\omega_n^{(k)} \underset{+\infty}{\sim} n^{2-2k}.$$

Now, using asymptotic expansion of Gegenbauer polynomials (see [MOS66]), that is

$$G_n^{(k)}(\cos \pi x) = 2^{1-k} \frac{\Gamma(n+k)}{n! \Gamma(k)} (\sin \pi x)^{-k} \cos\left((n+k)\pi x - k\pi^2/2\right) + O(n^{k-2}),$$

for  $0 < x < 1$ , we have (recall that  $\lambda_n = \frac{\pi^2}{2}n(n+2k)$ ),

$$\left| \frac{1}{\lambda_n} \omega_n^{(k)} G_n^{(k)}(\cos \pi x) \right| \underset{+\infty}{\sim} \frac{1}{n^{k+1}},$$

Hence, since  $k > \frac{1}{2}$ , the series is convergent, which proves the proposition.  $\square$

**Remark 1.2.10.** We obviously obtain the same results, if a.s.  $X_0 = x$  for some  $x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}$  (not only in  $]0, 1[$ ), that is for all  $x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}$ ,  $t \geq 0$ , and  $k > \frac{1}{2}$ ,

$$\mathbb{E}_x \left( \int_0^t \frac{ds}{\sin^2(\pi X_s)} \right) < +\infty.$$

Due to the importance of the process  $\frac{1}{\sin^2(\pi X)}$  for the construction of the affine Dunkl process, as we will see in the next section, we put the

**Definition 1.2.11.** For all  $t \geq 0$ , we define

$$\eta_t = \frac{k}{2} \pi^2 \int_0^t \frac{ds}{\sin^2(\pi X_s)}.$$

Let us summarize the properties of the process  $\eta$ . For all  $x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}$ , it is a  $\mathbb{P}_x$ -almost surely finite continuous increasing process, with  $\eta_0 = 0$  and  $\eta_t \rightarrow +\infty$  a.s. when  $t$  goes to infinity. Furthermore, it has finite expectation for  $k > \frac{1}{2}$ , and for  $k = \frac{1}{2}$ ,  $\mathbb{E}_x(\eta_t) = +\infty$  for  $t > 0$ .

Now we can pass to the construction properly speaking of the affine Dunkl process.

### 1.3 The affine Dunkl process

We will define in this section the affine Dunkl process as the Markov process with infinitesimal generator

$$\mathcal{A}f(x) = \frac{1}{2} f''(x) + k\pi \cot(\pi x) f'(x) + \frac{k}{2} \sum_{n \in \mathbb{Z}} \frac{f(s_n(x)) - f(x)}{(x-n)^2},$$

for  $f \in C_b^2(\mathbb{R})$  and  $x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}$ . To achieve this, we will start with the radial affine Dunkl process living in some alcove, and add the jumps at some random times. This is a kind of skew-product decomposition as the one done in [Chy08] (see also [Sch09] for the same decomposition in the Heckman-Opdam setting). More precisely, we construct a pure jump process on the affine Weyl group  $W$ , and use the action of  $W$  on the radial process.

### 1.3.1 Jump process on the affine Weyl group

First, using what we have seen in (1.2.11), that is  $\eta_t = \frac{k}{2}\pi^2 \int_0^t \frac{ds}{\sin^2(\pi X_s)}$  an a.s. finite continuous increasing process, with  $\eta_0 = 0$  and  $\eta_t \rightarrow +\infty$  as  $t \rightarrow +\infty$ , we have that  $\eta_t$  is a well-defined time change. Let us call its inverse  $a(t)$ , *i.e.*

$$a(t) = \inf\{s \geq 0 \mid \eta_s > t\},$$

so  $a$  is continuous, increasing,  $a(0) = 0$ ,  $a(t) < +\infty$  for all  $t \geq 0$ , and  $a(t) \rightarrow +\infty$  as  $t \rightarrow +\infty$ , a.s. It is well-known that such time-change transformation preserves the Markovian character of a process (see for example [Dyn65]), so the process

$$\tilde{X}_t = X_{a(t)}$$

is a strong Markov process, with infinitesimal generator

$$\tilde{\mathcal{L}}f(y) = \frac{2 \sin^2(\pi y)}{k\pi^2} \mathcal{L}f(y),$$

for  $f \in C(\bar{I}) \cap C^2(I)$  and  $y \in I$ , where  $I$  is the alcove containing  $X_0$ .

Recall that for  $x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}$ , we have the series expansion

$$\frac{\pi^2}{\sin^2(\pi x)} = \sum_{n \in \mathbb{Z}} \frac{1}{(x - n)^2}.$$

We denote by  $\sigma^x$  the following probability measure on the affine Weyl group  $W$

$$\sigma^x(dw) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} \frac{\sin^2(\pi x)}{\pi^2} \frac{1}{(x - n)^2} \delta_{s_n}(dw).$$

Let  $(N_t)_{t \geq 0}$  be a Poisson point process with intensity 1, independent of  $X$ , *i.e.*

$$N_t = \sum_{n \geq 1} \mathbb{1}_{\{\tau_n \leq t\}},$$

where  $\tau_0 = 0$  and  $\tau_n = \sum_{j=1}^n e_j$ , where  $(e_j)_{j \geq 1}$  is a sequence of independent and identically distributed random variables, with exponential distribution of parameter 1, and independent of  $X$ .

Now define recursively the processes  $\tilde{X}^j$  and the random variables  $(\beta_j)_{j \geq 1}$  on  $W$  by

$$\tilde{X}_t^j = \beta_j \cdot \tilde{X}_t^{j-1}, \tag{1.3}$$

for all  $j \geq 1$ , with  $\tilde{X}_t^0 = \tilde{X}_t$ , and where conditionally on  $\{\tilde{X}_{\tau_j}^{j-1} = x\}$ ,  $\beta_j$  is distributed according to  $\sigma^x$ . Note that  $\tilde{X}^j$  is the Markov process  $\tilde{X}$  with initial condition  $\tilde{X}_0^j = \beta_j \cdots \beta_1 \cdot \tilde{X}_0$ .

Using left multiplication on  $W$ , we define the jump process on  $W$

$$w_t = \xi_{N_t} = \beta_n \cdots \beta_1, \quad \text{for } t \in [\tau_n, \tau_{n+1}[, \tag{1.4}$$

where  $\xi_n = \beta_n \cdots \beta_1$ , for all  $n \geq 1$ .

### 1.3.2 Skew-product decomposition

Given an operator  $\mathcal{A}$  with domain  $\mathcal{D}(\mathcal{A})$ , we say that a càdlàg stochastic process  $(Y_t)_{t \geq 0}$  is a solution of the martingale problem for  $\mathcal{A}$  if for all  $u \in \mathcal{D}(\mathcal{A})$ ,

$$u(Y_t) - u(Y_0) - \int_0^t \mathcal{A}u(Y_s) ds$$

is a  $(\mathcal{F}_t^Y)$ -martingale, where  $(\mathcal{F}_t^Y)_{t \geq 0}$  is the natural filtration of  $Y$  (see [EK86] for a detailed exposition of the theory of martingale problems).

Now we can state the main result of this paper.

**Theorem 1.3.1.** *Let  $(X_t)_{t \geq 0}$  be the radial affine Dunkl process with  $X_0 = x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}$  a.s., and parameter  $k \geq \frac{1}{2}$ , and  $(w_t)_{t \geq 0}$  be the pure jump process defined by (1.4). Then, the process  $(Y_t)_{t \geq 0}$  defined by*

$$Y_t = w_{\eta_t} \cdot X_t,$$

with  $\eta_t = \frac{k}{2} \pi^2 \int_0^t \frac{ds}{\sin^2(\pi X_s)}$ , is a Markov process on  $\mathbb{R}$ , with infinitesimal generator  $\mathcal{A}$  given by

$$\mathcal{A}f(y) = \frac{1}{2} f''(y) + k\pi \cot(\pi y) f'(y) + \frac{k}{2} \sum_{p \in \mathbb{Z}} \frac{f(s_p(y)) - f(y)}{(y-p)^2},$$

for  $f \in C_b^2(\mathbb{R})$  and  $y \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}$ , and such that  $Y_t \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}$  for all  $t \geq 0$  a.s.

**Definition 1.3.2.** The process  $(Y_t)_{t \geq 0}$  defined in the above theorem is called the *affine Dunkl process* with parameter  $k$ .

*Proof.* Let us call  $I$  the alcove containing  $x$ , that is  $I = ]x], [x] + 1[$ . By proposition 1.2.1 and remark 1.2.2, we have that  $X$  lives in  $I$  almost surely. Consider the process  $\tilde{X}$ , with generator  $\tilde{\mathcal{L}}$ , defined previously by  $\tilde{X}_t = X_{a(t)}$ , where  $a(t)$  is the inverse of  $\eta_t$ . Define, for all  $t \geq 0$ ,

$$\tilde{Y}_t = w_t \cdot \tilde{X}_t.$$

Hence, for  $t \in [\tau_n, \tau_{n+1}[$ , we have

$$\begin{aligned} \tilde{Y}_t &= \beta_n \cdots \beta_1 \cdot \tilde{X}_t \\ &= \tilde{X}_t^n, \end{aligned}$$

where the processes  $\tilde{X}^n$  are defined by (1.3).

By construction  $(\tilde{Y}_t)_{t \geq 0}$  is a càdlàg process which jumps at the random times  $\tau_n$ 's. We denote by  $(\tilde{\mathcal{F}}_t)_{t \geq 0}$  the natural filtration of  $\tilde{Y}$ , and by  $\tilde{\mathcal{F}}_t^n = \sigma(\tilde{X}_s^n, s \leq t) \vee \sigma(N_s, s \leq t)$ . As we shall see,  $(\tilde{Y}_t)_{t \geq 0}$  is a solution of the martingale problem for the generator  $\tilde{\mathcal{A}}$  given by

$$\tilde{\mathcal{A}}f(y) = \tilde{\mathcal{L}}f(y) + \int_W (f(w \cdot y) - f(y)) \sigma^y(dw),$$

acting on  $f \in C_b^2(\mathbb{R})$  for  $y \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}$ , where  $\sigma^x(dw) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} \frac{\sin^2(\pi x)}{\pi^2} \frac{1}{(x-n)^2} \delta_{s_n}(dw)$ , and  $\tilde{\mathcal{L}}$  is the generator of  $\tilde{X}$ . The proof follows exactly the lines of proposition 10.2, chapter 4 of [EK86], see also lemma 17 in [Chy08]. First, since  $(\tilde{X}_t^n)_{t \geq \tau_n}$  is a Markov process with generator  $\tilde{\mathcal{L}}$ , and using independence of  $\tilde{X}$  and  $(\tau_n)_{n \geq 0}$ , we have that for  $u \in C_b^2(\mathbb{R})$

$$u(\tilde{X}_{(t \vee \tau_n) \wedge \tau_{n+1}}^n) - u(\tilde{X}_{\tau_n}^n) - \int_{\tau_n}^{(t \vee \tau_n) \wedge \tau_{n+1}} \tilde{\mathcal{L}}u(\tilde{X}_s^n) ds$$

is a  $(\tilde{\mathcal{F}}_t)$ -martingale. Hence, summing over  $n \geq 0$ , and using

$$u(\tilde{X}_{(t \vee \tau_n) \wedge \tau_{n+1}}^n) = u(\tilde{X}_{\tau_n}^n) \mathbb{1}_{\{t < \tau_n\}} + u(\tilde{X}_t^n) \mathbb{1}_{\{\tau_n \leq t < \tau_{n+1}\}} + u(\tilde{X}_{\tau_{n+1}}^n) \mathbb{1}_{\{t \geq \tau_{n+1}\}},$$

we get that

$$u(\tilde{Y}_t) - u(\tilde{Y}_0) - \int_0^t \tilde{\mathcal{L}}u(\tilde{Y}_s) ds - \sum_{n=1}^{N_t} \left( u(\tilde{X}_{\tau_n}^n) - u(\tilde{X}_{\tau_n}^{n-1}) \right) \quad (1.5)$$

is a  $(\tilde{\mathcal{F}}_t)$ -martingale. Note that, since  $N$  is a Poisson process, we have that

$$\int_0^t \left( \int_W u(w \cdot \tilde{Y}_{s-}) \sigma^{\tilde{Y}_{s-}}(dw) - u(\tilde{Y}_{s-}) \right) d(N_s - s),$$

is a  $(\tilde{\mathcal{F}}_t)$ -martingale, and is equal to

$$\sum_{n=1}^{N_t} \left( \int_W u(w \cdot \tilde{X}_{\tau_n}^{n-1}) \sigma^{\tilde{X}_{\tau_n}^{n-1}}(dw) - u(\tilde{X}_{\tau_n}^{n-1}) \right) - \int_0^t \left( \int_W u(w \cdot \tilde{Y}_{s-}) \sigma^{\tilde{Y}_{s-}}(dw) - u(\tilde{Y}_{s-}) \right) ds. \quad (1.6)$$

But

$$\sum_{n=1}^{N_t} \left( u(\tilde{X}_{\tau_n}^n) - \int_W u(w \cdot \tilde{X}_{\tau_n}^{n-1}) \sigma^{\tilde{X}_{\tau_n}^{n-1}}(dw) \right) \quad (1.7)$$

is also a  $(\tilde{\mathcal{F}}_t)$ -martingale. This follows from the fact that for all  $t_1 < \dots < t_m \leq s < t$ , and all  $h_1, \dots, h_m$  measurable bounded functions, we have

$$\begin{aligned} & \mathbb{E} \left( \prod_{i=1}^m h_i(\tilde{Y}_{t_i}) \sum_{n \geq 1} \mathbb{1}_{\{s < \tau_n \leq t\}} \left( u(\tilde{X}_{\tau_n}^n) - \int_W u(w \cdot \tilde{X}_{\tau_n}^{n-1}) \sigma^{\tilde{X}_{\tau_n}^{n-1}}(dw) \right) \right) \\ &= \mathbb{E} \left( \prod_{i=1}^m h_i(\tilde{Y}_{t_i}) \sum_{n \geq 1} \mathbb{1}_{\{s < \tau_n \leq t\}} \mathbb{E} \left( u(\tilde{X}_{\tau_n}^n) - \int_W u(w \cdot \tilde{X}_{\tau_n}^{n-1}) \sigma^{\tilde{X}_{\tau_n}^{n-1}}(dw) \middle| \tilde{\mathcal{F}}_{\tau_n}^{n-1} \right) \right) \\ &= 0, \end{aligned}$$

since  $\tilde{X}_{\tau_n}^n = \beta_n \cdot \tilde{X}_{\tau_n}^{n-1}$ , and  $\beta_n$  is distributed according to  $\sigma^{\tilde{X}_{\tau_n}^{n-1}}$  conditionally to  $\tilde{X}_{\tau_n}^{n-1}$ .

Adding (1.7) and (1.6) to (1.5), we get that

$$u(\tilde{Y}_t) - u(\tilde{Y}_0) - \int_0^t \tilde{\mathcal{L}}u(\tilde{Y}_s) ds - \int_0^t \int_W \left( u(w \cdot \tilde{Y}_s) - u(\tilde{Y}_s) \right) \sigma^{\tilde{Y}_s}(dw) ds$$

is a  $(\tilde{\mathcal{F}}_t)$ -martingale (since  $\tilde{Y}$  is càdlàg and  $\{s \mid \tilde{Y}_{s-} \neq \tilde{Y}_s\}$  is Lebesgue negligible, we can replace  $\tilde{Y}_{s-}$  by  $\tilde{Y}_s$  in the last integral). Hence, we have obtained that for  $u \in C_b^2(\mathbb{R})$

$$u(\tilde{Y}_t) - u(\tilde{Y}_0) - \int_0^t \tilde{\mathcal{A}}u(\tilde{Y}_s) ds$$

is a  $(\tilde{\mathcal{F}}_t)$ -martingale, which proves that  $(\tilde{Y}_t)_{t \geq 0}$  is a solution of the martingale problem for the generator  $\tilde{\mathcal{A}}$ .

We are now interested in solution of

$$Y_t = \tilde{Y} \left( \int_0^t \beta(Y_s) ds \right), \quad (1.8)$$

with  $\beta(y) = \frac{k\pi^2}{2\sin^2(\pi y)}$  for  $y \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}$ , and  $\beta(y) = 0$  for  $y \in \mathbb{Z}$ . First remark that since  $\sin^2(\pi \cdot)$  is a  $W$ -invariant function, we have  $\beta(\tilde{Y}_t) = \beta(\tilde{X}_t)$  almost surely, since  $\tilde{Y}_t = w_t \cdot \tilde{X}_t$ . Since  $X$  never touches 0 and 1 a.s., so is  $\tilde{X}$ , and  $\beta \circ \tilde{X}$  is a.s. bounded on bounded intervals. Define

$$\zeta_1 = \inf \left\{ t \geq 0 \mid \int_0^t \frac{ds}{\beta(\tilde{Y}_s)} = +\infty \right\}$$

and,

$$\zeta_0 = \inf \left\{ t \geq 0 \mid \beta(\tilde{Y}_t) = 0 \right\}.$$

Since  $0 < \sin^2(\pi \tilde{X}_t) < 1$  for all  $t \geq 0$ , we easily see that  $\zeta_1 = \zeta_0 = +\infty$ , so by applying theorem 1.3, chapter 6 of [EK86], we have that equation (1.8) admits a solution  $(Y_t)_{t \geq 0}$ , which is a solution of the martingale problem for  $\mathcal{A} = \beta \tilde{\mathcal{A}}$ , *i.e.* for all  $u \in C_b^2(\mathbb{R})$ ,

$$u(Y_t) - u(Y_0) - \int_0^t \mathcal{A}u(Y_s) ds$$

is a  $(\tilde{\mathcal{F}}_{\tau(t)})$ -martingale, where  $\tau(t) = \int_0^t \beta(Y_s) ds$ . Since we have

$$\begin{aligned} \tilde{\mathcal{A}}u(y) &= \tilde{\mathcal{L}}u(y) + \int_W (u(w \cdot y) - u(y)) \sigma^y(dw) \\ &= \frac{2\sin^2(\pi y)}{k\pi^2} \mathcal{L}u(y) + \frac{\sin^2(\pi y)}{\pi^2} \sum_{n \in \mathbb{Z}} \frac{u(s_n(y)) - u(y)}{(y-n)^2}, \end{aligned}$$

we obtain

$$\mathcal{A}u(y) = \mathcal{L}u(y) + \frac{k}{2} \sum_{n \in \mathbb{Z}} \frac{u(s_n(y)) - u(y)}{(y-n)^2},$$

acting on  $u \in C_b^2(\mathbb{R})$ , for  $y \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}$ . Since  $\beta(Y_s) = \beta(X_s)$  for all  $s \geq 0$  by the  $W$ -invariance of  $\sin^2(\pi \cdot)$ , we have that

$$\int_0^t \beta(Y_s) ds = \eta_t,$$

for all  $t \geq 0$ . Hence, we obtain the skew-product decomposition of  $(Y_t)_{t \geq 0}$  given by

$$Y_t = w_{\eta_t} \cdot X_t,$$

for all  $t \geq 0$ . Let  $\pi$  be the projection onto the principal alcove  $\mathcal{A}_0 = ]0, 1[$ . Then, by the invariance of  $\pi$  under the action of the Weyl group  $W$  and the skew-product representation of the affine Dunkl process, we see that

$$\pi(Y_t) = X_t \text{ a.s.,}$$

*i.e.*  $(\pi(Y_t))_{t \geq 0}$  is the radial affine Dunkl process. Hence, if two process  $Y$  and  $Y'$  are solutions to the martingale problem for  $\mathcal{A}$ , then  $\pi(Y_t) = \pi(Y'_t) = X_t$ , so  $Y$  and  $Y'$  have the same one-dimensional distributions, and by the same arguments as in theorem 4.2, chapter 4 in [EK86], we have that the affine Dunkl process  $Y$  is a Markov process with infinitesimal generator  $\mathcal{A}$ . By construction,  $Y$  is càdlàg and lives a.s. in  $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}$ , else the radial process  $X$  would touch the walls of the principal alcove, which is impossible by proposition (1.2.1).  $\square$

### 1.3.3 Jumps of the affine Dunkl process

By the construction of the affine Dunkl process, we have the skew-product decomposition

$$Y_t = w_{\eta_t} \cdot X_t,$$

for  $t \geq 0$ . This shows that there is a jump of the process at time  $t$  when the functional  $\eta_t$  is equal to one of the  $\tau_n$ 's. Hence, the number of jumps  $V_t$  of  $(Y_t)_{t \geq 0}$  before time  $t$ , *i.e.*

$$V_t = \sum_{s \leq t} \mathbb{1}_{\{\Delta Y_s \neq 0\}},$$

is exactly given by the point process

$$V_t = \sum_{n \geq 1} \mathbb{1}_{\{\eta_t \geq \tau_n\}}.$$

Since  $\eta$  is a well-defined time change, we get the following representation of  $V$  in term of a time-change Poisson process

$$V_t = N_{\eta_t},$$

for all  $t \geq 0$ , where  $(N_t)_{t \geq 0}$  is the Poisson process considered previously. Using this representation and the fact that for all  $t \geq 0$ ,  $\eta_t < +\infty$  a.s., we get immediately the following proposition.

**Proposition 1.3.3.** *For all  $x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}$ , and all  $t \geq 0$*

$$V_t < +\infty, \quad \mathbb{P}_x\text{-almost surely,}$$

*i.e. the number of jumps of the affine Dunkl process in a finite time interval is a.s. finite.*

Now define for all  $n \geq 1$ ,

$$T_n = a(\tau_n),$$

where  $a$  is the inverse of  $\eta$ , *i.e.*  $a(t) = \inf\{s \geq 0 \mid \eta_s > t\}$ , and  $T_0 = 0$ . The sequence  $(T_n)_{n \geq 1}$  corresponds to the jump times of the affine Dunkl process. Since  $a$  is increasing and  $a(t) \rightarrow +\infty$  as  $t \rightarrow +\infty$  a.s., we have that for all  $n \geq 0$ ,

$$T_n > T_{n-1}, \quad \mathbb{P}_x\text{-almost surely,}$$

and  $T_n \rightarrow +\infty$  when  $n \rightarrow +\infty$  a.s. Note that we can also define the jump times recursively by

$$T_n = \inf \left\{ t \geq T_{n-1} \mid \frac{k\pi^2}{2} \int_{T_{n-1}}^t \frac{ds}{\sin^2(\pi X_s)} > e_n \right\}, \quad (1.9)$$

where  $(e_n)_{n \geq 1}$  is a sequence of independent and identically distributed random variables with exponential distribution of parameter 1. Indeed, define for all  $n \geq 1$  and all  $t \geq 0$ ,

$$\eta_n(t) = \frac{k\pi^2}{2} \int_{T_{n-1}}^{T_{n-1}+t} \frac{ds}{\sin^2(\pi X_s)},$$

so  $\eta_n$  is a well-defined time-change with inverse given by

$$\eta_n^{-1}(t) = \inf\{s \geq 0 \mid \eta_n(s) > t\},$$

which is finite for all  $t \geq 0$ , and goes to infinity as  $t$  goes to infinity. Then, we can rewrite  $T_n$  as

$$\begin{aligned} T_n &= T_{n-1} + \inf \{t \geq 0 \mid \eta_n(t) > e_n\} \\ &= T_{n-1} + \eta_n^{-1}(e_n). \end{aligned}$$

So,

$$T_n - T_{n-1} = \eta_n^{-1}(e_n),$$

which gives  $\eta_n(T_n - T_{n-1}) = e_n$ , and

$$\eta_{T_n} = \sum_{j=1}^n \eta_j(T_j - T_{j-1}) = \sum_{j=1}^n e_j = \tau_n,$$

or equivalently  $T_n = a(\tau_n)$ . Note that the fact that the sequence  $(T_n)_{n \geq 0}$  is well-defined can be proved directly using expression (1.9) and the strong Markov property of  $(X_t)_{t \geq 0}$ .

Since  $V_t$  is a time-change Poisson process, it is not difficult to exhibit its compensator.

**Lemma 1.3.4.** *Let  $V_t = N_{\eta_t}$ . The compensator of  $V$  is  $\eta$ , that is*

$$V_t - \eta_t$$

is a martingale with respect to the filtration  $(\mathcal{F}_{\eta_t}^N)_{t \geq 0}$ , where  $\mathcal{F}_t^N = \sigma(N_s, s \leq t)$ .

*Proof.* Let  $0 \leq s < t$ . Define  $T = \eta_t$  and  $S = \eta_s$ . We have  $S < T$ , since  $t \mapsto \eta_t$  is increasing. Note also that  $S$  and  $T$  are stopping times with respect to  $\mathcal{F}_t$ . Hence, since  $N$  is a Poisson process,  $N_t - t$  is a martingale and by the optional sampling theorem, we have

$$\mathbb{E}_x(V_t - \eta_t \mid \mathcal{F}_{\eta_s}^N) = \mathbb{E}_x(N_T - T \mid \mathcal{F}_S^N) = N_S - S = V_s - \eta_s. \quad \square$$

Since  $\eta$  is the compensator of  $V$ , we have by proposition 1.2.9,  $\mathbb{E}_x(V_t) < +\infty$  for  $k > \frac{1}{2}$  and  $\mathbb{E}_x(V_t) = +\infty$  for  $k = \frac{1}{2}$ .

### 1.3.4 Martingale decomposition

First, we remark that  $Y$  is a local martingale.

**Proposition 1.3.5.** *The affine Dunkl process  $(Y_t)_{t \geq 0}$  is a local martingale.*

*Proof.* Using the formula

$$\pi \cot(\pi x) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} \frac{1}{x - n},$$

one can see that the function  $f(x) = x$  is killed by the generator  $\mathcal{A}$  of  $(Y_t)_{t \geq 0}$ , which proves that  $Y$  is a local martingale.  $\square$

We will now give the martingale decomposition of  $Y$  into its continuous and purely discontinuous parts. First, recall that the Lévy kernel  $N$  of a Markov process describes the distribution of its jumps, see [Mey67]. For all  $x \in \mathbb{R}$ , and for a function  $f$  in the domain of the infinitesimal generator which vanishes in a neighbourhood of  $x$ , the Lévy kernel  $N$  of  $(Y_t)_{t \geq 0}$  is given by

$$\mathcal{A}f(x) = \int_{\mathbb{R}} N(x, dy) f(y).$$

Hence, by the explicit form of the infinitesimal generator  $\mathcal{A}$ , we get immediately that

$$N(x, dy) = \frac{k\pi^2}{2} \sum_{n \in \mathbb{Z}} \frac{\delta_{s_n(x)}(dy)}{(x-n)^2},$$

for all  $x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}$ . By [Mey67], for all nonnegative measurable function  $f$  on  $\mathbb{R}^2$ , the nonnegative discontinuous functional

$$\sum_{s \geq t} f(Y_{s-}, Y_s) \mathbb{1}_{\{\Delta Y_s \neq 0\}},$$

where  $\Delta Y_s = Y_s - Y_{s-}$ , can be compensated by the process

$$\int_0^t ds \int_{\mathbb{R}} N(Y_{s-}, dy) f(Y_{s-}, y).$$

**Proposition 1.3.6.** *We have the following martingale decomposition,*

$$Y_t = Y_0 + B_t + M_t,$$

where  $(B_t)_{t \geq 0}$  is a standard Brownian motion, and  $(M_t)_{t \geq 0}$  is a purely discontinuous local martingale which can be written as the compensated sum of its jumps :

$$M_t = - \sum_{s \leq t} \Delta Y_s \mathbb{1}_{\{\Delta Y_s \neq 0\}} + \int_0^t k\pi \cot(\pi Y_s) ds.$$

The proof uses Itô's formula and the theory of Lévy kernel and is exactly the same as in the classical case of Dunkl processes, so we refer to [GY06a] for more details.

### 1.3.5 Open questions

It would be interesting to answer the question of whether or not the affine Dunkl process is recurrent. Also, generalizing this construction to other affine root systems is an interesting problem. We hope to answer these questions in a future work.

## Chapter 2

# Random right eigenvalues of Gaussian random quaternionic matrices

### 2.1 Introduction

This is part of a joint work with Florent Benaych-Georges (LPMA, Université Pierre et Marie Curie). Our motivation for studying quaternionic random matrices comes from the following facts. The projection onto the complex plane of the uniform measure on the unit sphere  $\mathbb{S}^3$  of  $\mathbb{R}^4$  is the uniform measure on the unit disk  $D(0, 1)$  of  $\mathbb{C}$  (also called the circular law, or Girko's law). Furthermore, the projection onto the real axis of the uniform measure on  $D(0, 1)$  is the semi-circular law on  $[-1, 1]$ . But the last two measures play a key role in random matrix theory. Indeed, it is well known that as the dimension goes to infinity, the empirical distribution of the eigenvalues of a gaussian hermitian random matrix converges to the semi-circular law (Wigner's theorem) and the empirical distribution of complex eigenvalues of a complex gaussian random matrix to the circular law. The idea in the first place was then to study what happens when the dimension is doubled, thus to study quaternionic random matrices. The hope was then, after defining properly eigenvalues of quaternionic matrices, that the empirical distribution of a quaternionic gaussian matrix will converge to the uniform distribution on the unit sphere of quaternions, which can be identified with  $\mathbb{S}^3$ . We will see that in fact, this is not the case, and we will prove that we cannot find a gaussian quaternionic matrix model such that the empirical distribution of its eigenvalues converges to the uniform measure on  $\mathbb{S}^3$ .

The sequel is organized as follows. First, we recall some basic facts on the quaternion field  $\mathbb{H}$  and on matrices of quaternions. We will see that we can associate to a quaternionic matrix a complex matrix whose dimension is doubled. This allows us to study at first the complex random right eigenvalues of a gaussian random quaternionic matrix  $X(n)$ . We prove in section 2.2 that the empirical distribution of complex right eigenvalues of  $X(n)$ , converge as the dimension goes to infinity, towards the circular law, using logarithmic potential theory. In section 2.3, we prove the main result which is the convergence of the empirical distribution of right eigenvalues of  $X(n)$  to a distribution  $\rho$  with density with respect to Lebesgue measure on  $\mathbb{H}$ , and whose support is the set  $\{q \in \mathbb{H} \mid |q| \leq 1\}$ . Finally, in section 2.4, we prove that we cannot find a gaussian quaternionic matrix model such that the empirical distribution of its eigenvalues converges to the uniform measure on  $\mathbb{S}^3$ .

### 2.1.1 Basic facts on quaternions.

We begin with a brief recall of basic facts on quaternions (see [Zha97]). Let us denote by  $\mathbb{H}$  the noncommutative field of quaternions: as a real vector space,  $\mathbb{H}$  admits a basis denoted by  $(1, \mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k})$  and its multiplicative structure is defined by the fact that 1 is the neutral element,  $\mathbf{i}^2 = \mathbf{j}^2 = \mathbf{k}^2 = -1$ ,  $\mathbf{ij} = -\mathbf{ji} = \mathbf{k}$ ,  $\mathbf{jk} = -\mathbf{kj} = \mathbf{i}$ ,  $\mathbf{ki} = -\mathbf{ik} = \mathbf{j}$ . For all  $q = q_0 + q_1\mathbf{i} + q_2\mathbf{j} + q_3\mathbf{k} \in \mathbb{H}$ , one defines  $q^* = q_0 - q_1\mathbf{i} - q_2\mathbf{j} - q_3\mathbf{k}$ ,  $\Re(q) = q_0$ ,  $\Im(q) = q_1\mathbf{i} + q_2\mathbf{j} + q_3\mathbf{k}$ . Then it appears that  $qq^* = q_0^2 + q_1^2 + q_2^2 + q_3^2$  (which proves that any non null quaternion is invertible) and we denote the square root of this number by  $|q|$ . It can be proved that for any  $q, q' \in \mathbb{H}$ ,  $|qq'| = |q||q'|$ . Note that identifying 1 and  $\mathbf{i}$  with their usual definitions, one has  $\mathbb{R} \subset \mathbb{C} \subset \mathbb{H}$ . This inclusion is compatible with the definitions of the algebraic operations, of the conjugation  $z \mapsto z^*$ , of  $|\cdot|$  and of the real and imaginary parts (with the exception that we usually prefer to define  $\Im(x + y\mathbf{i}) = y$  instead of  $y\mathbf{i}$  for  $x, y \in \mathbb{R}$ ).

Two quaternions  $x, y$  are said to be *similar* if there exists a nonzero quaternion  $q$  such that  $x = yq^{-1}$ . Note that this is equivalent to the existence of a quaternion  $u$  with norm  $|u| = 1$  such that  $x = yu^*$ . The following lemma will be important for the study of right eigenvalues of quaternionic matrices.

**Lemma 2.1.1.** *If  $q = q_0 + q_1\mathbf{i} + q_2\mathbf{j} + q_3\mathbf{k} \in \mathbb{H}$ , then  $q$  and  $\Re(q) + |\Im(q)|\mathbf{i}$  are similar.*

Let  $q = q_0 + q_1\mathbf{i} + q_2\mathbf{j} + q_3\mathbf{k} \in \mathbb{H}$ . By the multiplication rules of the basis elements, we have  $q = (q_0 + q_1\mathbf{i}) + (q_2 + q_3\mathbf{i})\mathbf{j}$ , so  $q$  can be written  $q = c_1 + c_2\mathbf{j}$ , where  $c_1$  and  $c_2$  are two complex numbers. An alternative way to define quaternions is then to consider the subring of  $M_2(\mathbb{C})$  given by

$$\left\{ \begin{pmatrix} c_1 & c_2 \\ -\bar{c}_2 & \bar{c}_1 \end{pmatrix} \mid c_1, c_2 \in \mathbb{C} \right\}.$$

The map

$$q = c_1 + c_2\mathbf{j} \mapsto q' = \begin{pmatrix} c_1 & c_2 \\ -\bar{c}_2 & \bar{c}_1 \end{pmatrix}$$

is bijective, and preserves the algebraic operations.

Let  $A \in M_n(\mathbb{H})$  be an  $n \times n$  matrix with quaternionic entries. In the same way as above, we can associate to  $A$  an  $2n \times 2n$  complex matrix  $A'$  by

$$A = A_1 + A_2\mathbf{j} \mapsto A' = \begin{pmatrix} A_1 & A_2 \\ -\bar{A}_2 & \bar{A}_1 \end{pmatrix},$$

with  $A_1, A_2 \in M_n(\mathbb{C})$ .

### 2.1.2 Right eigenvalues of quaternionic matrices.

Let  $A \in M_n(\mathbb{H})$ . Then  $\lambda \in \mathbb{H}$  is called a right eigenvalue of  $A$  if there exists a vector  $X \in \mathbb{H}^n$  such that  $AX = X\lambda$ . If  $\lambda$  is a right eigenvalue of  $A$ , we can easily see that  $q\lambda q^{-1}$  is still a right eigenvalue for all  $q \in \mathbb{H} \setminus \{0\}$ . The right spectrum of  $A$  is then infinite or belongs to  $\mathbb{R}$ . Since every quaternion is similar to an unique element of  $\mathbb{C}/(z \sim \bar{z})$ , we can first restrict our attention to complex right eigenvalue  $\lambda$ . Indeed, let  $\lambda \in \mathbb{C}$  and  $X = Y + Z\mathbf{j}$ , with  $Y, Z \in \mathbb{C}^n$ . Then we have an equivalence between

- (i)  $\lambda$  is a right eigenvalue of  $A$ ,

$$(ii) \begin{pmatrix} A_1 & A_2 \\ -A_2 & A_1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} Y \\ -\bar{Z} \end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix} Y \\ -\bar{Z} \end{pmatrix},$$

$$(iii) \begin{pmatrix} A_1 & A_2 \\ -A_2 & A_1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} Z \\ \bar{Y} \end{pmatrix} = \bar{\lambda} \begin{pmatrix} Z \\ \bar{Y} \end{pmatrix}.$$

Hence, the right spectrum of  $A$ , when restricted to complex numbers, is finite, has cardinal  $2n$ , and is given by the  $2n$  eigenvalues of the complex matrix  $A'$ , which appear in conjugate pairs. The right eigenvalues of  $A$  are then obtained by considering the similitary classes of the complex right eigenvalues of  $A$ .

## 2.2 Convergence of the spectral distribution of quaternionic gaussian random matrices

### 2.2.1 Quaternionic random matrices model

Let  $X(n)$  be an  $n \times n$  quaternionic random matrix, whose entries are distributed as independent quaternionic gaussian random variables with null expectation and covariance  $\frac{1}{2n}$ , *i.e.*

$$\mathbb{E}(X(n)_{i,j}) = 0, \quad \text{and} \quad \mathbb{E}(|X(n)_{i,j}|^2) = \frac{1}{2n}, \quad \text{for all } i, j = 1, \dots, n.$$

By a quaternionic gaussian random variable  $q$ , we mean that  $q = q_0 + q_1\mathbf{i} + q_2\mathbf{j} + q_3\mathbf{k}$  where  $q_0, q_1, q_2, q_3$  are independent real gaussian random variables. We can associate to  $X(n)$  an  $2n \times 2n$  complex random matrix  $Y(n)$  as seen above. We will denote by  $z_{n,1}, \dots, z_{n,2n}$  the  $2n$  eigenvalues of  $Y(n)$ , with the convention that

$$z_{n,n+i} = \bar{z}_{n,i}, \quad \text{for all } i = 1, \dots, n,$$

since the eigenvalues of  $Y(n)$  appears in conjugate pairs. The right eigenvalues of  $X(n)$  are then the similarity classes of the  $z_{n,i}$ , for  $i = 1, \dots, n$ . The distribution of the eigenvalues of  $Y(n)$  has been calculated by Ginibre [Gin65], and is given, for  $z = (z_1, \dots, z_n) \in \mathbb{C}^n$ , by the density

$$P_n(z) = \frac{1}{c_n} \exp\left(-2n \sum_{i=1}^n |z_i|^2\right) \prod_{1 \leq i < j \leq n} |z_i - z_j|^2 |z_i - \bar{z}_j|^2 \prod_{i=1}^n |z_i - \bar{z}_i|^2,$$

with respect to Lebesgue measure on  $\mathbb{C}^n$ .  $c_n$  is a normalization constant such that

$$c_n = \int_{\mathbb{C}^n} \exp\left(-2n \sum_{i=1, \dots, n} |z_i|^2\right) \prod_{1 \leq i < j \leq n} |z_i - z_j|^2 |z_i - \bar{z}_j|^2 \prod_{i=1, \dots, n} |z_i - \bar{z}_i|^2 dz_1 \cdots dz_n,$$

so  $P_n$  is a probability density.

If we write

$$\sum_{1 \leq i \neq j \leq 2n} \log |z_i - z_j| = 2 \sum_{1 \leq i \neq j \leq n} \log |z_i - z_j| |z_i - \bar{z}_j| + 2 \sum_{i=1, \dots, n} \log |z_i - \bar{z}_i|,$$

then the density  $P_n$  can be rewritten as

$$P_n(z) = \frac{1}{c_n} \exp\left(-\frac{1}{2} \left(2n \sum_{i=1}^{2n} |z_i|^2 + \sum_{1 \leq i \neq j \leq 2n} \log |z_i - z_j|^{-1} + \sum_{i=1}^{2n} \log |z_i - \bar{z}_i|^{-1}\right)\right).$$

Let  $V : \mathbb{C} \rightarrow [0, +\infty)$  be a continuous non-negative function, conjugate invariant, and such that there is a constant  $\delta > 0$  such that  $V(z) \geq (\delta + 1) \log(|z|^2 + 1)$ , for  $|z|$  large enough. Denote for  $x, y \in \mathbb{C}$ ,  $k(x, y) = \log|x - y|^{-1} + \frac{1}{2}(V(x) + V(y))$ , and for  $z \in \mathbb{C}^n$ ,

$$K_n(z) = \sum_{1 \leq i \neq j \leq 2n} k(z_i, z_j),$$

we have then

$$\begin{aligned} K_n(z) &= \sum_{1 \leq i \neq j \leq 2n} \log|z_i - z_j|^{-1} + \sum_{1 \leq i \neq j \leq 2n} V(z_i) \\ &= \sum_{1 \leq i \neq j \leq 2n} \log|z_i - z_j|^{-1} + (2n - 1) \sum_{i=1, \dots, 2n} V(z_i). \end{aligned}$$

Define the probability density  $P_n^V$  on  $\mathbb{C}^n$  by,

$$P_n^V(z) = \frac{1}{c_n^V} \exp \left( -\frac{1}{2} \left( K_n(z) + \sum_{i=1}^{2n} V(z_i) + \sum_{i=1}^{2n} \log|z_i - \bar{z}_i|^{-1} \right) \right),$$

where  $c_n^V$  is the normalization constant. Note that one recovers  $P_n$  by putting  $V(x) = |x|^2$ .

### 2.2.2 The weighted logarithmic energy

Let us denote  $\mathcal{M}(\mathbb{C})$  the set of probability measures on  $\mathbb{C}$ , and let  $\sigma \in \mathcal{M}(\mathbb{C})$ . We define the *weighted logarithmic energy* of  $\sigma$  by

$$I(\sigma) = \int \int \log|x - y|^{-1} d\sigma(x) d\sigma(y) + \int V(z) d\sigma(z),$$

where the potential  $V : \mathbb{C} \rightarrow [0, +\infty)$  is defined as above. Note that  $V$  is also called an *external field*.

We have the two following theorems, see [SV97].

**Theorem 2.2.1.** *The minimum of  $I$  over  $\mathcal{M}(\mathbb{C})$ , denoted  $E^V$ , is attained at a unique  $\mu^V$  with compact support on  $\mathbb{C}$ . This measure is called the equilibrium measure of  $V$ .*

For,  $V(z) = |z|^2$ , we will see that  $\mu^V$  is the uniform measure on the unit disk  $D(0, 1)$  of  $\mathbb{C}$ . We put

**Definition 2.2.2.** We will denote by  $\mu$  the *circular law*, that is the uniform measure on the unit disk  $D(0, 1)$  of  $\mathbb{C}$ .

Let, for  $x \in \mathbb{C}$ ,

$$U^\sigma(x) = \int \log|x - y|^{-1} d\sigma(y),$$

be the *logarithmic potential* of some measure  $\sigma \in \mathcal{M}(\mathbb{C})$ . The equilibrium measure  $\mu^V$  can be characterised by the following theorem, see [SV97].

**Theorem 2.2.3.** *Let  $\sigma \in \mathcal{M}(\mathbb{C})$ , with compact support, and finite logarithmic energy. We have  $\sigma = \mu^V$  if and only if there exists a constant  $l$  such that*

$$(i) \quad 2U^\sigma(x) + V(x) = l, \quad \mu^V\text{-a.e. on the support of } \sigma$$

$$(ii) \quad 2U^\sigma(x) + V(x) \geq l, \quad \mu^V\text{-a.e.}$$

We will use this theorem to prove that the equilibrium measure is the uniform measure  $\mu$  on  $D(0, 1)$  when the potential is  $V(z) = |z|^2$ . Let us calculate the logarithmic potential of  $\mu$ . First, recall the

**Theorem 2.2.4** (Mean-value property). *Let  $f$  be a function on  $\mathbb{C}$ , which is harmonic in the open disk  $D(a, r)$ , and continuous on its closure, then,*

$$f(a) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(a + re^{i\theta}) d\theta.$$

We have then the following classical lemma.

**Lemma 2.2.5.** *For all  $x \in \mathbb{C}$ ,*

$$\int_{-\pi}^{\pi} \log |x - re^{i\theta}| d\theta = \begin{cases} 2\pi \log r, & \text{if } |x| \leq r, \\ 2\pi \log |x|, & \text{if } |x| > r. \end{cases}$$

*Proof.* For  $|x| > r$ , the function  $y \mapsto \log |x - y|$  is harmonic in  $D(0, r)$ , and continuous on its closure. By the mean-value property of harmonic functions, we have then

$$\log |x| = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \log |x - re^{i\theta}| d\theta, \quad \text{for } |x| > r.$$

For  $|x| < r$ , we remark that  $\log |x - re^{i\theta}| = \log |r - \bar{x}e^{i\theta}|$ , so we can use the same argument applied to the function  $y \mapsto \log |r - y|$  in the open disk  $D(0, |\bar{x}|)$ . Hence,

$$\log r = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \log |x - re^{i\theta}| d\theta, \quad \text{for } |x| < r.$$

For  $|x| = r$ , we can use dominated convergence theorem, and the above calculation. Let  $\rho < r$  such that  $\rho \rightarrow r$ . Then, as  $|x| = r > \rho$ , we have

$$\log |x| = \log r = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \log |x - \rho e^{i\theta}| d\theta \xrightarrow[\rho < r]{\rho \rightarrow r} \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \log |x - re^{i\theta}| d\theta. \quad \square$$

We can now calculate the logarithmic potential of  $\mu$ .

**Proposition 2.2.6.** *Let  $\mu$  be the uniform measure on the unit disk  $D(0, 1)$ . Let  $U^\mu$  be the logarithmic potential of  $\mu$ , i.e.  $U^\mu(x) = \int \log |x - y|^{-1} \mu(dy)$  for  $x \in \mathbb{C}$ . Then,*

$$U^\mu(x) = \begin{cases} \frac{1}{2}(1 - |x|^2), & \text{for } |x| \leq 1, \\ -\log |x|, & \text{for } |x| > 1. \end{cases}$$

*Proof.* Suppose  $|x| \leq 1$ . Then, by the above lemma,

$$\begin{aligned} U^\mu(x) &= - \int_0^1 \int_{-\pi}^{\pi} \log |x - re^{i\theta}| \frac{1}{\pi} r dr d\theta \\ &= - \frac{1}{\pi} \int_0^1 \mathbb{1}_{\{|x| \leq r\}} \left( \int_{-\pi}^{\pi} \log |x - re^{i\theta}| d\theta \right) r dr - \frac{1}{\pi} \int_0^1 \mathbb{1}_{\{|x| > r\}} \left( \int_{-\pi}^{\pi} \log |x - re^{i\theta}| d\theta \right) r dr \\ &= \frac{1}{\pi} 2\pi \int_{|x|}^1 \log(r) r dr - \frac{1}{\pi} 2\pi \int_0^{|x|} \log |x| r dr \\ &= \frac{1}{2}(1 - |x|^2). \end{aligned}$$

Now suppose  $|x| > 1$ . Then,

$$\begin{aligned} U^\mu(x) &= - \int_0^1 \int_{-\pi}^{\pi} \log|x - re^{i\theta}| \frac{1}{\pi} r dr d\theta \\ &= - \int_0^1 2 \log(|x|) r dr \\ &= - \log(|x|). \end{aligned} \quad \square$$

Now, by a direct application of theorem 2.2.3, we have that the equilibrium measure of the weighted logarithmic energy  $I$  with potential  $V(z) = |z|^2$  is given by the uniform measure  $\mu$  on the unit disk of  $\mathbb{C}$ .

### 2.2.3 Convergence of empirical distribution.

This section is very close to what happens in the hermitian case, see [Dei99].

For  $x \in \mathbb{C}$ , let  $H(x) = V(x) - \log(|x|^2 + 1)$ . We remark that  $k(x, x') \geq \frac{H(x) + H(x')}{2}$ , for all  $x, x' \in \mathbb{C}$ , since  $|x - x'|^2 \leq (|x|^2 + 1)(|x'|^2 + 1)$ . So,  $k$  is bounded from below. Let  $l \geq 0$ . For  $\mu \in \mathcal{M}(\mathbb{C})$ , let us define

$$k^l = k \wedge l, \quad I^l(\mu) = \int k^l(x, y) d\mu(x) d\mu(y), \quad \text{and} \quad K_n^l(z) = \sum_{1 \leq i \neq j \leq 2n} k^l(z_i, z_j).$$

Since  $k^l$  is continuous almost everywhere, by monotone convergence  $I^l$  converge to  $I$  as  $l$  goes to infinity.

**Notation 2.2.7.** For  $x = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{C}^n$ , with our convention that  $x_{n+i} = \bar{x}_i$ , for  $i = 1, \dots, n$ , we will denote by  $\mu_x$  the empirical distribution of  $x_1, \dots, x_{2n}$ , that is

$$\mu_x = \frac{1}{2n} \sum_{i=1}^{2n} \delta_{x_i} = \frac{1}{2n} \sum_{i=1}^n (\delta_{x_i} + \delta_{\bar{x}_i}).$$

An immediate calculation gives

$$I^l(\mu_x) = \frac{1}{4n^2} K_n^l(z) + \frac{l}{2n}.$$

The following two facts will be useful for the proof of the convergence of the empirical distribution.

**Lemma 2.2.8.** (i) Let for all  $n$ ,  $x^{(n)} \in \mathbb{C}^n$  such that the sequence  $\frac{1}{4n^2} K_n(x^{(n)})$  is bounded. Then the sequence of measures  $\mu_{x^{(n)}}$  is tight.

(ii) Let  $\mu_n$  be a tight sequence of probability measures on  $\mathbb{C}$  such that for all  $l$ ,

$$\limsup_n I^l(\mu_n) \leq E^V.$$

Then  $\mu_n$  converge to  $\mu^V$  weakly.

*Proof.* Assertion (i). Since  $H(z) \rightarrow \infty$  as  $|z| \rightarrow \infty$ , then for all  $M \in \mathbb{R}$  there exists  $c \geq 0$  such that  $H(z) > M$  for all  $|z| \geq c$ . Hence,

$$M \int_{\{|z| \geq c\}} d\mu_{x^{(n)}}(z) < \int_{\{|z| \geq c\}} H(z) d\mu_{x^{(n)}}(z) \leq \int H(z) d\mu_{x^{(n)}}(z) \leq \frac{2n}{2n-1} \frac{1}{4n^2} K_n(x^{(n)}),$$

since  $k(x, y) \geq \frac{H(x)+H(y)}{2}$ . By hypothesis,  $\frac{1}{4n^2}K_n(x^{(n)})$  is bounded, so the tightness follows.

Assertion (ii). Since  $\mu_n$  is tight, from every subsequence  $n_k$ , there exists a subsequence  $\mu_{n_{k_j}}$  such that  $\mu_{n_{k_j}}$  converge to some  $\sigma$ . Since  $I^l$  is continuous for the weak convergence because  $k^l$  is bounded and continuous a.e., we have then that

$$I^l(\sigma) = \limsup_j I^l(\mu_{n_{k_j}}) \leq E^V,$$

by hypothesis. Letting  $l \rightarrow \infty$ , we get  $I(\sigma) \leq E^V$ . By unicity of the equilibrium measure, the result follows.  $\square$

From this lemma, we deduce the following proposition.

**Proposition 2.2.9.** *Let, for all  $n$ ,  $x^{(n)} \in \mathbb{C}^n$  such that*

$$\limsup_n \frac{1}{4n^2}K_n(x^{(n)}) \leq E^V.$$

*Then  $\mu_{x^{(n)}}$  converge to  $\mu^V$  as  $n$  goes to infinity.*

*Proof.* By lemma 2.2.8 (i), the sequence  $\mu_{x^{(n)}}$  is tight. Since  $I^l(\mu_{x^{(n)}}) = \frac{1}{4n^2}K_n^l(x^{(n)}) + \frac{l}{2n}$ , we get  $\limsup_n I^l(\mu_{x^{(n)}}) \leq E^V$ , hence by lemma 2.2.8 (ii),  $\mu_{x^{(n)}}$  converge to  $\mu^V$  as  $n$  goes to infinity.  $\square$

### 2.2.4 Concentration of $\frac{1}{4n^2}K_n$ around $I$

We will prove a concentration result of  $\frac{1}{4n^2}K_n$ , which is the analogue of the same result in the hermitian case (see for example [Dei99]). We will need the two following lemmata.

**Lemma 2.2.10.** *We have*

$$\int_{\mathbb{C}} e^{-V(x)}|x - \bar{x}|dx < +\infty.$$

*Proof.* Let  $c > 0$  such that  $V(x) \geq (\delta + 1) \log(|x|^2 + 1)$  for  $|x| > c$ . Write

$$\int_{\mathbb{C}} e^{-\frac{1}{2}V(x)}|x - \bar{x}|^{1/2}dx = \int_{\{|x| \leq c\}} e^{-\frac{1}{2}V(x)}|x - \bar{x}|^{1/2}dx + \int_{\{|x| > c\}} e^{-\frac{1}{2}V(x)}|x - \bar{x}|^{1/2}dx.$$

The first integral is finite, so we just have to look at the convergence of the second integral. For  $V(x) \geq (\delta + 1) \log(|x|^2 + 1)$ , we have  $e^{-V(x)}|x - \bar{x}| \leq 2|x|(|x|^2 + 1)^{-\delta-1}$ , which is integrable for  $\delta > 0$ .  $\square$

The second lemma gives some estimate on the normalization constant  $c_n^V$  of the probability measure  $P_n^V$ .

**Lemma 2.2.11.** *We have*

$$\limsup_n \frac{1}{2n^2} \log \frac{1}{c_n^V} \leq E^V.$$

*Proof.* The proof follows the lines of the analogue result for the hermitian case. As in [Dei99], define  $\phi_\varepsilon$  such that  $\phi_\varepsilon(x) = \frac{1}{\pi\varepsilon^2} \int_{B(x,\varepsilon)} d\mu^V$ , for  $x \in \mathbb{C}$ , where  $B(x, \varepsilon)$  is the disk of center  $x$  and radius  $\varepsilon$ , and put  $\nu_\varepsilon(dx) = \phi_\varepsilon(x)dx$ . We have  $\int \nu_\varepsilon(dx) = 1$  and we can

choose  $\varepsilon > 0$  such that  $I(\nu_\varepsilon) \leq E^V + \varepsilon$ . Define  $E^n = \{x \in \mathbb{C} \mid \prod_{i=1}^n \phi_\varepsilon(x_i) > 0\}$ . Then we have

$$\begin{aligned} c_n^V &= \int e^{-\frac{1}{2}(K_n(z) + \sum_{i=1}^{2n} V(z_i) + \sum_{i=1}^{2n} \log |z_i - \bar{z}_i|^{-1})} dz_1 \cdots dz_n \\ &\geq \int_{E^n} e^{-\frac{1}{2}(K_n(z) + \sum_{i=1}^{2n} V(z_i) + \sum_{i=1}^{2n} \log |z_i - \bar{z}_i|^{-1} + 2 \sum_{i=1}^n \log \phi_\varepsilon(z_i))} d\nu_\varepsilon(z_1) \cdots d\nu_\varepsilon(z_n). \end{aligned}$$

Now, we can apply Jensen inequality,

$$c_n^V \geq \exp \int -\frac{1}{2} \left( K_n(z) + 2 \sum_{i=1}^n V(z_i) + 2 \sum_{i=1}^n \log |z_i - \bar{z}_i|^{-1} + 2 \sum_{i=1}^n \log \phi_\varepsilon(z_i) \right) d\nu_\varepsilon(z_1) \cdots d\nu_\varepsilon(z_n),$$

so,

$$\begin{aligned} -\log c_n^V &\leq \frac{1}{2} \int K_n(z) \prod_{i=1}^n d\nu_\varepsilon(z_i) + \sum_{i=1}^n \int (V(z_i) + \log \phi_\varepsilon(z_i)) \prod_{i=1}^n d\nu_\varepsilon(z_i) \\ &\quad + \sum_{i=1}^n \int \log |z_i - \bar{z}_i|^{-1} \prod_{i=1}^n d\nu_\varepsilon(z_i) \\ &= \frac{1}{2} \sum_{1 \leq i \neq j \leq 2n} \int k(x, y) d\nu_\varepsilon(x) d\nu_\varepsilon(y) + n \int (V(x) + \log \phi_\varepsilon(x)) d\nu_\varepsilon(x) \\ &\quad + n \int \log |x - \bar{x}|^{-1} d\nu_\varepsilon(x). \end{aligned}$$

Since  $\log$  is integrable in  $0^+$ ,  $\nu_\varepsilon(dx) = \frac{1}{\pi \varepsilon^2} \int \mathbb{1}_{B(x, \varepsilon)}(t) \mu^V(dt) dx$ , and  $\mu^V$  is compactly supported, we have  $\int \log |x - \bar{x}|^{-1} d\nu_\varepsilon(x) < +\infty$ , hence

$$\begin{aligned} \frac{1}{2n^2} \log \frac{1}{c_n^V} &\leq \frac{n(2n-1)}{2n^2} I(\nu_\varepsilon) + \frac{1}{2n} C_\varepsilon \\ &\leq \frac{n(2n-1)}{2n^2} (E^V + \varepsilon) + \frac{1}{2n} C_\varepsilon \end{aligned}$$

where  $C_\varepsilon = \int (V(x) + \log \phi_\varepsilon(x) + \log |x - \bar{x}|) d\nu_\varepsilon(x)$  is a finite constant. Taking the lim sup, and letting  $\varepsilon$  goes to zero, we obtain

$$\limsup_n \frac{1}{2n^2} \log \frac{1}{c_n^V} \leq E^V. \quad \square$$

Now we can prove the following concentration result.

**Proposition 2.2.12.** *Define, for  $\eta > 0$ , and all  $n \geq 1$ , the sets*

$$A_n(\eta) = \left\{ x \in \mathbb{C}^n \mid \frac{1}{4n^2} K_n(x) \leq E^V + \eta \right\}.$$

*Let  $z^{(n)}$  be distributed according to  $P_n^V$ . Then, for all  $0 < \varepsilon < \eta$ , we have, for  $n$  large enough,*

$$\mathbb{P} \left( z^{(n)} \in A_n(\eta)^c \right) \leq e^{-2\varepsilon n^2}.$$

*Proof.* We have,

$$\begin{aligned} \mathbb{P} \left( z^{(n)} \in A_n(\eta)^c \right) &= \frac{1}{c_n^V} \int \mathbb{1}_{\{K_n(z^{(n)}) > 4n^2(E^V + \eta)\}} e^{-\frac{1}{2}(K_n(z) + \sum_{i=1}^{2n} V(z_i) + \sum_{i=1}^{2n} \log |z_i - \bar{z}_i|^{-1})} dz_1 \cdots dz_n \\ &\leq \frac{1}{c_n^V} e^{-2n^2(E^V + \eta)} \int e^{-\frac{1}{2}(\sum_{i=1}^{2n} V(z_i) + \sum_{i=1}^{2n} \log |z_i - \bar{z}_i|^{-1})} dz_1 \cdots dz_n \\ &= \frac{1}{c_n^V} e^{-2n^2(E^V + \eta)} \left( \int e^{-V(x) - \log |x - \bar{x}|^{-1}} dx \right)^n \end{aligned}$$

Now taking the log in the above inequality, we obtain

$$\frac{1}{2n^2} \log \mathbb{P} \left( z^{(n)} \in A_n(\eta)^c \right) \leq \frac{1}{2n^2} \log \frac{1}{c_n^V} - E^V - \eta + \frac{1}{2n} \log(a),$$

where  $a = \int_{\mathbb{C}} e^{-V(x)} |x - \bar{x}| dx$  is a finite constant by lemma 2.2.10. Now taking the lim sup and using the estimate of  $c_n^V$  given by lemma 2.2.11, we obtain

$$\limsup_n \frac{1}{2n^2} \log \mathbb{P} \left( z^{(n)} \in A_n(\eta)^c \right) \leq E^V - E^V - \eta < -\varepsilon,$$

so the result follows.  $\square$

We can now prove the convergence of the empirical measure.

**Theorem 2.2.13.** *Let  $z^{(n)} = (z_{n,1}, \dots, z_{n,n}) \in \mathbb{C}^n$  be distributed according to  $P_n^V$ . Then, the empirical distribution*

$$\mu_{z^{(n)}} = \frac{1}{2n} \sum_{i=1}^n \delta_{z_{n,i}}$$

*converges almost surely, as  $n$  goes to infinity, towards the equilibrium measure  $\mu^V$ .*

*Proof.* By proposition 2.2.12 and Borel-Cantelli lemma, we have that almost surely, for all  $\eta > 0$ , and  $n$  large enough,  $\frac{1}{4n^2} K_n(z^{(n)}) \leq E^V + \eta$ . Hence, almost surely  $\limsup_n \frac{1}{4n^2} K_n(z^{(n)}) \leq E^V$ . By proposition 2.2.9, the almost surely convergence of  $\mu_{z^{(n)}}$  follows.  $\square$

Taking  $V(z) = |z|^2$  in the last theorem, we get the following corollary about the convergence of the empirical distribution of the complex right eigenvalues of the gaussian random quaternionic matrix  $X(n)$ .

**Corollary 2.2.14.** *Let, for each  $n$ ,  $X(n)$  be an  $n$  by  $n$  matrix whose entries are independent quaternionic gaussian random variables with null expectation and covariance  $\frac{1}{2n}$ . Then if one denotes by  $z_{n,1}, \dots, z_{n,2n}$  the complex right eigenvalues of  $X(n)$ , as  $n$  tends to infinity, the empirical probability measure*

$$\frac{1}{2n} \sum_{i=1}^{2n} \delta_{z_{n,i}}$$

*tends almost surely to the uniform law  $\mu$  on the unit disk of the complex plane.*

## 2.3 Main result

**Theorem 2.3.1.** *Let, for each  $n$ ,  $X(n)$  be the quaternionic random matrix of corollary 2.2.14. Let  $C_{n,1}, \dots, C_{n,n}$  be the (compact) similarity classes of its right spectrum, and  $c_{n,1}, \dots, c_{n,n}$  be elements taken independently at random, uniformly in respectively  $C_{n,1}, \dots, C_{n,n}$ . Then as  $n$  tends to infinity, the empirical probability measure*

$$\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \delta_{c_{n,i}}$$

*tends almost surely to the law on  $\mathbb{H}$  with density with respect to the Lebesgue measure*

$$\rho(q) = \frac{1}{2\pi^2 |\Im q|^2} 1_{\{q \in \mathbb{H} \mid |q| \leq 1\}}. \quad (2.1)$$

To prove this theorem, we shall need the following preliminary results.

**Lemma 2.3.2.** *Let  $G$  be a compact subgroup of the group of orthogonal endomorphisms of an euclidian space  $E$  such that  $G$  acts transitively on the unit sphere  $\mathbb{S}(E)$  of  $E$ . Let  $g$  be a random element of  $G$  distributed according to the Haar probability measure. Then for any  $x \in \mathbb{S}(E)$ ,  $g.x$  is distributed uniformly on  $\mathbb{S}(E)$ .*

*Proof.* Let  $(x_i)_{i \geq 1}$  be a sequence of elements of  $\mathbb{S}(E)$  such that as  $n$  tends to infinity, the sequence of probability measures  $\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \delta_{x_i}$  converges weakly to the uniform probability measure on  $\mathbb{S}(E)$  (such a sequence exists, as consequence, for example, of the strong law of large numbers). Choose, for each  $i$ ,  $g_i \in G$  such that  $x_i = g_i.x$ . Then by right invariance of the Haar measure on  $G$ , for all  $i$ , the law of  $g.x$  is the law of  $gg_i.x = g.x_i$ . Thus for all  $n$ , the law of  $g.x$  is equal to

$$\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \text{Law}(g.x_i),$$

which is equal to the law of  $g.X_n$ , for  $X_n$  independent of  $g$  and distributed according to

$$\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \delta_{x_i}.$$

Letting  $n$  tend to infinity, the law of  $X_n$  tends to the uniform law on  $\mathbb{S}(E)$ , thus one gets that the law of  $g.x$  is equal to the law of  $g.X$ , with  $X$  uniformly distributed on  $\mathbb{S}(E)$ , i.e. that the law of  $g.x$  is the uniform one.  $\square$

**Proposition 2.3.3.** *Fix  $z_0 \in \mathbb{H}$  and let  $u$  be a random element of the group of quaternions with norm one, uniformly distributed on  $\mathbb{S}(\mathbb{H})$ . Then  $uz_0u^*$  has the law of  $\Re(z_0) + |\Im(z_0)|S$ , for  $S$  uniformly distributed on the unit sphere of the subspace  $\mathbb{H}_0$  of  $\mathbb{H}$  of quaternion with null real part, endowed with the induced euclidian structure.*

*Proof.* Let us endow  $\mathbb{H}$  with its canonical euclidian structure (for which  $(1, \mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k})$  is an orthogonal basis). Then the action of the group of quaternion with norm one on  $\mathbb{H}$  defined by  $u.z := uzu^*$  is linear, norm preserving (since the norm is multiplicative on  $\mathbb{H}$ ) stabilizes  $\mathbb{R}$  and thus also the orthogonal of  $\mathbb{R}$  in  $\mathbb{H}$ , namely the space of quaternions with null real part. Moreover, by [Zha97, Th. 2.2], the action induced on the unit sphere of this subspace is transitive, thus the proposition follows from the previous lemma.  $\square$

**Lemma 2.3.4.** *Let  $p, q$  be two positive integers and  $\mu, \nu$  be two probability measures on respectively  $\mathbb{R}^p, \mathbb{R}^q$ . Let, for each  $n$ ,*

$$x_{n,1}, \dots, x_{n,n}, y_{n,1}, \dots, y_{n,n}$$

*be random variables, the  $x_{n,i}$ 's taking values in  $\mathbb{R}^p$  and the  $y_{n,j}$ 's taking values in  $\mathbb{R}^q$  such that*

- (i) *for each  $n$ ,  $\{x_{n,1}, \dots, x_{n,n}\}$  and  $\{y_{n,1}, \dots, y_{n,n}\}$  are independent sets of random variables,*
- (ii) *for each  $n$ , the laws of the random vectors  $(x_{n,1}, \dots, x_{n,n})$  and  $(y_{n,1}, \dots, y_{n,n})$  are invariant under the actions of the symmetric group  $\mathcal{S}_n$ ,*

(iii) the random probability measures

$$\mu_n := \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \delta_{x_{n,i}}, \quad \nu_n := \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \delta_{y_{n,i}}$$

converge almost surely respectively to  $\mu, \nu$  as  $n$  tends to infinity.

Then the random probability measure

$$\rho_n := \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \delta_{(x_{n,i}, y_{n,i})}$$

converges almost surely to  $\mu \otimes \nu$  as  $n$  tends to infinity.

*Proof.* It suffices to prove that for any compactly supported real valued continuous function  $f$  defined on  $\mathbb{R}^{p+q}$ ,  $\int f(t) d\rho_n(t)$  tends almost surely to  $\int f(t) d\mu \otimes \nu(t)$  as  $n$  tends to infinity. By Stone-Weierstrass theorem, it suffices to prove it when  $f = g \otimes h$ , with  $g, h$  compactly supported real valued continuous functions defined respectively on  $\mathbb{R}^p, \mathbb{R}^q$ . Moreover, since by (iii), it is obvious when  $g$  or  $h$  is a constant function, one can suppose that

$$\int g(t) d\mu(t) = \int h(t) d\nu(t) = 0.$$

Thus we have to prove that  $\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n g(x_{n,i}) h(y_{n,i})$  tends almost surely to 0. Let us define, for all  $n$ , for all  $i = 1, \dots, n$ ,

$$a_{n,i} = g(x_{n,i}) - \frac{1}{n} \sum_{j=1}^n g(x_{n,j}), \quad b_{n,i} = h(y_{n,i}) - \frac{1}{n} \sum_{j=1}^n h(y_{n,j}).$$

Since  $\frac{1}{n} \sum_{j=1}^n g(x_{n,j})$  and  $\frac{1}{n} \sum_{j=1}^n h(y_{n,j})$  converge almost surely to zero and the functions  $g, h$  are bounded, it suffices to prove that  $\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n a_{n,i} b_{n,i}$  converges almost surely to zero. Note that the advantage of working with the  $a_{n,i}$ 's and the  $b_{n,i}$ 's instead of working with the  $g(x_{n,i})$ 's and the  $h(y_{n,i})$ 's is that for all  $n$ , one has almost surely

$$\sum_{i=1}^n a_{n,i} = \sum_{i=1}^n b_{n,i} = 0. \quad (2.2)$$

We claim that the fourth moment of  $\sum_{i=1}^n a_{n,i} b_{n,i}$  is  $O(n^2)$ . Let us prove it. We have

$$\mathbb{E} \left[ \left( \sum_{i=1}^n a_{n,i} b_{n,i} \right)^4 \right] = \sum_{1 \leq i, j, k, l \leq n} \mathbb{E}(a_{n,i} a_{n,j} a_{n,k} a_{n,l}) \mathbb{E}(b_{n,i} b_{n,j} b_{n,k} b_{n,l}). \quad (2.3)$$

Note that by the hypothesis (ii), each term in the sum of the right hand side of (2.3) only depends on the partition of 4 defined by  $(i, j, k, l)$ : let us define

$$\begin{aligned} \alpha_{n,1,1,1,1} &= \mathbb{E}(a_{n,i} a_{n,j} a_{n,k} a_{n,l}) \quad \text{for } i, j, k, l \text{ pairwise distinct,} \\ \alpha_{n,2,1,1} &= \mathbb{E}(a_{n,i}^2 a_{n,k} a_{n,l}) \quad \text{for } i, k, l \text{ pairwise distinct,} \\ \alpha_{n,2,2} &= \mathbb{E}(a_{n,i}^2 a_{n,k}^2) \quad \text{for } i \neq k, \\ \alpha_{n,3,1} &= \mathbb{E}(a_{n,i}^3 a_{n,l}) \quad \text{for } i \neq l, \\ \alpha_{n,4} &= \mathbb{E}(a_{n,i}^4) \quad \text{for } i \in \{1, \dots, n\} \end{aligned}$$

and let us define the  $\beta_{n,\cdot}$ 's in the same way with the  $b_{n,i}$ 's instead of the  $a_{n,i}$ 's. Then by the hypothesis (ii), with the notation  $A_n^k = n(n-1)\cdots(n-k+1)$  for all  $k$ ,

$$\mathbb{E} \left[ \left( \sum_{i=1}^n a_{n,i} b_{n,i} \right)^4 \right] =$$

$$A_n^4 \alpha_{n,1,1,1,1} \beta_{n,1,1,1,1} + 6A_n^3 \alpha_{n,2,1,1,1} \beta_{n,2,1,1} + 4A_n^2 (\alpha_{n,2,2} \beta_{n,2,2} + \alpha_{n,3,1} \beta_{n,3,1}) + n\alpha_{n,4} \beta_{n,4}.$$

Note that since  $g$  and  $h$  are bounded, the  $\alpha_{n,\cdot}$ 's and the  $\beta_{n,\cdot}$ 's are all  $O(1)$ . Thus to prove the claim, it suffices to prove that  $\alpha_{n,1,1,1,1} = O(n^{-1})$ ,  $\alpha_{n,2,1,1} = O(n^{-1})$  and that the same holds for the  $\beta$ 's. We shall only treat the case of the  $\alpha$ 's. Passing (2.2) to the fourth power and taking the expectation, we get

$$A_n^4 \alpha_{n,1,1,1,1} + 6A_n^3 \alpha_{n,2,1,1} + 4A_n^2 (\alpha_{n,2,2} + \alpha_{n,3,1}) + n\alpha_{n,4} = 0,$$

from which it follows that  $\alpha_{n,1,1,1,1} = O(n^{-1})$ . In the same way, it follows from (2.2) that

$$\sum_{\substack{i,j,k \\ \text{pairwise distinct}}} a_{n,i}^2 a_{n,j} a_{n,k} = \sum_{i \neq j} a_{n,i}^2 a_{n,j} (-a_{n,i} - a_{n,j}),$$

which gets, by integration,  $A_n^3 \alpha_{n,2,1,1} = -A_n^2 (\alpha_{n,3,1} + \alpha_{n,2,2})$ . Hence  $\alpha_{n,2,1,1} = O(n^{-1})$ .

Thus we have proved that the fourth moment of  $\sum_{i=1}^n a_{n,i} b_{n,i}$  is  $O(n^2)$ . It follows that the fourth moment of  $\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n a_{n,i} b_{n,i}$  is  $O(n^{-2})$ , and that by the Markov inequality, for all  $\varepsilon > 0$ ,

$$\mathbb{P} \left( \left| \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n a_{n,i} b_{n,i} \right| > \varepsilon \right) = O(n^{-2}).$$

By the Borel-Cantelli lemma, the result follows.  $\square$

Using these preliminary results, we can now prove Theorem 2.3.1.

*Proof of Theorem 2.3.1.* Let, for each  $n$ ,  $z_{n,1}, \dots, z_{n,2n}$  be the complex right eigenvalues of  $X(n)$ , ordered in such a way that for all  $i = 1, \dots, n$ ,  $z_{n,n+i} = \overline{z_{n,i}}$  and the imaginary part of  $z_{n,i}$  is positive and that the joint law of  $(z_{n,1}, \dots, z_{n,n})$  is invariant under the action of the symmetric group  $\mathcal{S}_n$ . Then the conjugation classes of its right spectrum are

$$C_{n,1} := \{uz_{n,1}u^*; u \in \mathbb{H}, |u| = 1\}, \dots, C_{n,n} := \{uz_{n,n}u^*; u \in \mathbb{H}, |u| = 1\},$$

and  $c_{n,1}, \dots, c_{n,n}$  can be defined by  $c_{n,1} = u_1 z_{n,1} u_1^*, \dots, c_{n,n} = u_n z_{n,n} u_n^*$  for  $(u_i)_{i \geq 1}$  a family of independent random variables with uniform distribution on the group of the quaternions with norm one, such that  $\{z_{n,1}, \dots, z_{n,n}\}$  and  $\{u_i; i \geq 1\}$  are independent.

Note that the random probability measure

$$\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \delta_{z_{n,i}}$$

is the push-forward of the random measure

$$\frac{1}{2n} \sum_{i=1}^{2n} \delta_{z_{n,i}}$$

by the map  $z \in \mathbb{C} \mapsto \Re(z) + \mathbf{i}|\Im(z)|$ . Thus it converges almost surely, as  $n$  tends to infinity, to the push-forward of the uniform law on the unit circle of the complex plane by this map,

i.e. to the uniform law on the intersection of the unit circle with the upper half-plane, denoted by  $\mathcal{U}|_{D_{\mathbb{C}}^+(0,1)}$ . By the strong law of large numbers,

$$\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \delta_{u_i}$$

converges almost surely, as  $n$  tends to infinity, to the uniform law on the group of the quaternions with norm one, denoted by  $\mathcal{U}|_{\mathbb{S}(\mathbb{H})}$ .

By lemma 2.3.4, it follows that as  $n$  tends to infinity, the random probability measure

$$\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \delta_{(z_{n,i}, u_i)}$$

converges almost surely to  $\mathcal{U}|_{D_{\mathbb{C}}^+(0,1)} \otimes \mathcal{U}|_{\mathbb{S}(\mathbb{H})}$ . Thus the random probability measure

$$\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \delta_{c_{n,i}}$$

converges almost surely, as  $n$  tends to infinity, to the push-forward of the law  $\mathcal{U}|_{D_{\mathbb{C}}^+(0,1)} \otimes \mathcal{U}|_{\mathbb{S}(\mathbb{H})}$  by the map  $(z, u) \mapsto uzu^*$ .

To prove that this law, that we shall denote by  $L$ , has a density given by (2.1), it suffices to note that by Proposition 2.3.3, for any Borel bounded function  $f$  on  $\mathbb{H}$ ,

$$\int f(t) dL(t) = \frac{2}{\pi} \int_{x=-\infty}^{+\infty} \int_{y=0}^{+\infty} \int_{s \in \mathbb{S}(\mathbb{H}_0)} \mathbf{1}_{x^2+y^2 \leq 1} f(x+ys) ds dy dx,$$

where  $\mathbb{S}(\mathbb{H}_0)$  denotes the unit sphere of the subspace of  $\mathbb{H}$  of quaternions with null real part and  $ds$  denotes the uniform probability measure on this sphere. By spherical integration on the three-dimensional space of quaternion with null real part, we have

$$\begin{aligned} \int f(t) dL(t) &= \frac{1}{2\pi^2} \int_{x=-\infty}^{+\infty} \int_{y=0}^{+\infty} \int_{s \in \mathbb{S}(\mathbb{H}_0)} \mathbf{1}_{x^2+y^2 \leq 1} y^{-2} f(x+ys) 4\pi y^2 ds dy dx \\ &= \frac{1}{2\pi^2} \int_{(x_1, \dots, x_4) \in \mathbb{R}^4} \mathbf{1}_{x_1^2+x_2^2+x_3^2+x_4^2 \leq 1} (x_2^2 + x_3^2 + x_4^2)^{-1} \\ &\quad \times f(x_1 + x_2\mathbf{i} + x_3\mathbf{j} + x_4\mathbf{k}) dx_1 dx_2 dx_3 dx_4, \end{aligned}$$

which proves the theorem. □

## 2.4 Quadratic potential and uniform measure on $\mathbb{S}(\mathbb{H})$

One can ask if it is possible to find a quaternionic matrix model for which the empirical distribution of right eigenvalues would converge to the uniform measure on  $\mathbb{S}(\mathbb{H})$ . We next show that it is not possible if one restricts to quadratic potentials, i.e. potentials of the form  $V(z) = a_1 z^2 + a_2 \bar{z}^2 + a_3 z\bar{z}$ .

**Theorem 2.4.1.** *There does not exist a quadratic potential  $V$  such that if the law of  $(z_{n,1}, \dots, z_{n,2n})$  is given by  $P_n^V$ , then the random measure  $\frac{1}{2n} \sum_{i=1}^{2n} \delta_{u_i z_{n,i} u_i^*}$  would converge to the uniform measure of  $\mathbb{S}(\mathbb{H})$ , where the variables  $u_i$  are uniformly distributed on  $\mathbb{S}(\mathbb{H})$ , and independent from the  $z_{n,i}$ 's.*

*Proof.* Let  $\mathcal{U}_{|\mathbb{S}(\mathbb{H})}$  denote the uniform measure on the sphere  $\mathbb{S}(\mathbb{H})$ . We will prove the following fact:

$$\frac{1}{2n} \sum_{i=1}^{2n} \delta_{u_i z_n, i u_i^*} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \mathcal{U}_{|\mathbb{S}(\mathbb{H})} \text{ a.s.} \quad \Leftrightarrow \quad \frac{1}{2n} \sum_{i=1}^{2n} \delta_{z_n, i} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} d\nu(z) = 2|\Im(z)|^2 d\sigma(z) \text{ a.s.},$$

where  $\sigma$  is the Haar probability measure on the sphere  $\mathbb{S}^1$ .

By lemma 2.3.4, it suffices to prove that if  $t$  is a random variable distributed according to  $\nu$ , and  $w$  a random variable uniformly distributed on  $\mathbb{S}(\mathbb{H})$  and independent from  $t$ , then  $wtw^*$  is uniformly distributed on  $\mathbb{S}(\mathbb{H})$ . Let  $x$  be a random variable on  $\mathbb{S}(\mathbb{H})$ , whose distribution is invariant by conjugation, and  $w$  be quaternionic random variable uniformly distributed on  $\mathbb{S}(\mathbb{H})$ . By the proposition 2.3.3, we know that the law of  $wxw^*$  is given by that of  $\Re(x) + |\Im(x)|S$ , where  $S$  uniformly distributed on the unit sphere of  $\mathbb{H}_0$ . Since  $x$  is in the unit sphere of  $\mathbb{H}$ , we have

$$x \stackrel{(d)}{=} \Re(x) + (1 - \Re(x)^2)^{1/2} S,$$

so the law of  $x$  is entirely determined by the law of  $\Re(x)$ . Let  $t$  be random on  $\mathbb{S}^1$ , with real part distributed according to the semi-circular law on  $[-1, 1]$ , and independent from  $w$ . Since  $t$  is complex, we have  $\Re(wtw^*) = \Re(t)$ , because  $wi w^* \in \mathbb{H}_0$ , see [Zha97]. But  $wtw^*$  is a random variable on  $\mathbb{S}(\mathbb{H})$ , so its law is entirely determined by the law of its real part, hence by  $\Re(t)$ . Now, take  $x$  uniformly distributed on  $\mathbb{S}(\mathbb{H})$ . Then we know that  $\Re(x)$  is distributed according to the semi-circular law on  $[-1, 1]$ . So, we have  $wtw^* \stackrel{(d)}{=} x$ , so  $wtw^*$  is uniformly distributed on  $\mathbb{S}(\mathbb{H})$ .

Now, suppose  $t$  is distributed according to  $d\nu(z) = 2|\Im(z)|^2 d\sigma(z)$  on  $\mathbb{S}^1$ . Then for all bounded function  $f$ ,

$$\mathbb{E}(f(\Re(t))) = \int_{-\pi}^{\pi} f(\cos \theta) 2 \sin^2(\theta) \frac{d\theta}{2\pi} = \int_{-1}^1 f(x) \frac{2}{\pi} \sqrt{1-x^2} dx,$$

so  $\Re(t)$  is distributed according to the semi-circular law on  $[-1, 1]$ . Hence,  $wtw^*$  is uniformly distributed on  $\mathbb{S}(\mathbb{H})$ , and the claim is proved.

The logarithmic potential of  $\nu$  is given, for  $x \in \mathbb{C}$  by

$$U^\nu(x) = \int_{\mathbb{S}^1} \log |x - z|^{-1} d\nu(z) = \begin{cases} -\frac{1}{4}(\Re(x)^2 - \Im(x)^2), & \text{if } |x| \leq 1, \\ -\frac{1}{4|x|^4}(\Re(x)^2 - \Im(x)^2) - \log |x|, & \text{if } |x| > 1. \end{cases}$$

The detailed calculation of this fact is left to the appendix.

Let  $z = x + iy \in \mathbb{C}$ . Suppose by contradiction that there exists a quadratic potential  $V(z) = a_1 z^2 + a_2 \bar{z}^2 + a_3 z \bar{z}$ , such that  $\nu$  is the equilibrium measure of  $V$ . Since  $V$  must be real valued, we have  $a_1 = a + ib = \bar{a}_2$ , and  $a_3 = c \in \mathbb{R}$ . So  $V$  can be written  $V(z) = x^2(a + c) + y^2(-a + c) + xy(-2b + c)$ , for  $z = x + iy$ . By theorem 2.2.3,  $2U^\nu + V$  must be constant on the support of  $\nu$ . So, we get, for  $|z| = 1$ ,  $2U^\nu(z) + V(z) = (a + c - \frac{1}{2})x^2 + (-a + c + \frac{1}{2})y^2 + xy(-2b + c) = \text{constant}$ . This implies that  $a = \frac{1}{2}$ , and  $c = 2b > 0$ . Hence,

$$2U^\nu(z) + V(z) = c|z|^2 = c \quad \text{on } |z| = 1.$$

But, on  $|z| < 1$ , we have  $2U^\nu(z) + V(z) < c$ , which refutes the condition (ii) of theorem 2.2.3. So, we obtain a contradiction, and there does not exist a quadratic potential  $V$  such that  $\nu$  is the equilibrium measure of  $V$ .  $\square$

If we consider a gaussian quaternionic random matrix (not only with independent entries), the distribution of its right eigenvalues is given by  $P_n^V$ , for some potential  $V$  quadratic. So the above theorem say that we cannot find a quaternionic gaussian random matrix model such that the empirical distribution of its right eigenvalues converges to the uniform measure on  $\mathbb{S}(\mathbb{H})$ .

## 2.5 Appendix

### 2.5.1 Logarithmic potential of $\nu$

In this appendix, we give the calculation of the logarithmic potential of the measure  $d\nu(z) = 2|\Im(z)|^2 d\sigma(z)$ . We begin with two lemmata.

**Lemma 2.5.1.** *We have, for  $r \geq 0$ ,*

$$\int_{-\pi}^{\pi} \log |r - e^{i\theta}| \frac{1}{\pi} \sin^2(\theta) d\theta = \begin{cases} \frac{r^2}{4}, & \text{if } r < 1, \\ \frac{1}{4r^2} + \log r, & \text{if } r > 1. \end{cases}$$

*Proof.* Let  $I = \int_{-\pi}^{\pi} \log |r - e^{i\theta}| \sin^2(\theta) d\theta = \frac{1}{2} \int_{-\pi}^{\pi} \log(r^2 + 1 - 2r \cos \theta) \sin^2(\theta) d\theta$ . A first integration by parts gives

$$I = -\frac{r^2 + 1}{4r} \underbrace{\int_{-\pi}^{\pi} \log(r^2 + 1 - 2r \cos \theta) \cos \theta d\theta}_{:=A} + \frac{1}{2} \underbrace{\int_{-\pi}^{\pi} \log(r^2 + 1 - 2r \cos \theta) d\theta}_{:=B} - I - \frac{\pi}{2}.$$

But, by the mean-value property of harmonic functions, we have

$$B = 2 \int_{-\pi}^{\pi} \log |r - e^{i\theta}| d\theta = \begin{cases} 0, & \text{if } r < 1, \\ 4\pi \log r, & \text{if } r > 1. \end{cases}$$

Now let us calculate  $A$ . Integration by parts gives,

$$A = -2r \underbrace{\int_{-\pi}^{\pi} \frac{1}{r^2 + 1 - 2r \cos \theta} d\theta}_{:=A_1} + 2r \underbrace{\int_{-\pi}^{\pi} \frac{\cos^2 \theta}{r^2 + 1 - 2r \cos \theta} d\theta}_{:=A_2}.$$

Let  $P_a(\theta) = \frac{1-a^2}{a^2+1-2a \cos \theta}$  be the Poisson kernel, for  $0 \leq a < 1$ . Recall the facts that

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} P_a(\theta) d\theta = 1,$$

and,

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} P_a(t - \theta) e^{in\theta} d\theta = a^{|n|} e^{int}, \quad \text{for } n \in \mathbb{Z}.$$

Thus, we obtain

$$A_1 = \begin{cases} \frac{2\pi}{1-r^2}, & \text{for } r < 1, \\ \frac{2\pi}{r^2-1}, & \text{for } r > 1, \end{cases}$$

the second case being obtained by replacing  $r$  by  $\frac{1}{r}$  with  $r > 1$ .

Now,

$$\int_{-\pi}^{\pi} P_a(\theta) \cos^2 \theta d\theta = \frac{1}{4} \int_{-\pi}^{\pi} P_a(\theta) e^{i2\theta} d\theta + \frac{1}{4} \int_{-\pi}^{\pi} P_a(\theta) e^{-i2\theta} d\theta + \frac{1}{2} \int_{-\pi}^{\pi} P_a(\theta) d\theta = \pi(a^2 + 1).$$

Thus,

$$A_2 = \begin{cases} \frac{1}{1-r^2}\pi(r^2 + 1), & \text{for } r < 1, \\ \frac{1}{r^2-1}\pi(\frac{1}{r^2} + 1), & \text{for } r > 1. \end{cases}$$

So,

$$A = \begin{cases} -2\pi r, & \text{for } r < 1, \\ -\frac{2\pi}{r}, & \text{for } r > 1, \end{cases}$$

and finally,

$$I = \begin{cases} \frac{r^2}{4}, & \text{for } r < 1, \\ \frac{1}{4r^2} + \log r, & \text{for } r > 1. \end{cases}$$

□

To determine the logarithmic potential for points belonging to the unit circle, we will need the following lemma.

**Lemma 2.5.2.** *We have*

$$\int_{-\pi}^{\pi} \log |1 - e^{i\theta}| \frac{1}{\pi} \sin^2 \theta d\theta = \frac{1}{4}.$$

*Proof.* Let  $I = \int_{-\pi}^{\pi} \log |1 - e^{i\theta}| \sin^2 \theta d\theta = \frac{\pi}{2} \log 2 + \int_0^{\pi} \log(1 - \cos \theta) \sin^2 \theta d\theta$ . Let us call  $J$  the last integral. Using integration by parts, we have

$$J = - \int_0^{\pi} \log(1 - \cos \theta) d\theta + \int_0^{\pi} \log(1 - \cos \theta) d\theta - J - \frac{\pi}{2}.$$

But,

$$\int_0^{\pi} \log(1 - \cos \theta) d\theta = \int_{-\pi}^{\pi} \log |1 - e^{i\theta}| d\theta - \pi \log 2 = -\pi \log 2,$$

the last integral being zero by the mean value property of harmonic functions. Using integration by parts, and the change of variable  $x = \cos \theta$ , we obtain

$$\int_0^{\pi} \log(1 - \cos \theta) \cos \theta d\theta = -\pi.$$

Thus,  $\int_{-\pi}^{\pi} \log |1 - e^{i\theta}| \frac{1}{\pi} \sin^2 \theta d\theta = \frac{1}{4}$ . □

By the two previous lemma, we have then that

$$\int_{-\pi}^{\pi} \log |r - e^{i\theta}| \frac{1}{\pi} \sin^2 \theta d\theta = \begin{cases} \frac{r^2}{4}, & \text{if } 0 \leq r \leq 1, \\ \frac{1}{4r^2} + \log r, & \text{if } r > 1. \end{cases}$$

The logarithmic potential of the measure  $d\nu(z) = 2|\Im z|^2 d\sigma(z)$  on  $\mathbb{S}^1$  can now be determined.

**Proposition 2.5.3.** *Let  $d\nu(z) = 2|\Im z|^2 d\sigma(z)$ . The logarithmic potential of  $\nu$  is given, for  $x \in \mathbb{C}$ , by*

$$U^\nu(x) = \int_{\mathbb{S}^1} \log |x - z|^{-1} d\nu(z) = \begin{cases} -\frac{1}{4}(\Re(x)^2 - \Im(x)^2), & \text{if } |x| \leq 1, \\ -\frac{1}{4|x|^4}(\Re(x)^2 - \Im(x)^2) - \log |x|^2, & \text{if } |x| > 1. \end{cases}$$

*Proof.* Let  $x = re^{i\gamma} \in \mathbb{C}$ .

$$\int_{\mathbb{S}^1} \log |re^{i\gamma} - z| d\nu(z) = \int \log |r - z| \frac{1}{\pi} |\mathfrak{S}(ze^{i\gamma})|^2 d\sigma(z),$$

since  $d\sigma$  is invariant by multiplication by an element of the unit circle. So,

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{S}^1} \log |re^{i\gamma} - z| d\nu(z) &= \int_{-\pi}^{\pi} \log |r - e^{i\theta}| \frac{1}{\pi} \sin^2 \theta d\theta \cos^2 \gamma + \int_{-\pi}^{\pi} \log |r - e^{i\theta}| \frac{1}{\pi} \cos^2 \theta d\theta \sin^2 \gamma \\ &\quad + \int_{-\pi}^{\pi} \log |r - e^{i\theta}| \frac{1}{\pi} \sin \theta \cos \theta d\theta 2 \sin \gamma \cos \gamma. \end{aligned}$$

The last integral is zero by parity, so

$$\int_{\mathbb{S}^1} \log |re^{i\gamma} - z| d\nu(z) = \int_{-\pi}^{\pi} \log |r - e^{i\theta}| \frac{1}{\pi} \sin^2 \theta d\theta (\cos^2 \gamma - \sin^2 \gamma) + \int_{-\pi}^{\pi} \log |r - e^{i\theta}| \frac{1}{\pi} d\theta \sin^2 \gamma.$$

Since  $\int_{-\pi}^{\pi} \log |r - e^{i\theta}| \frac{1}{\pi} d\theta = \begin{cases} 0, & \text{if } r \leq 1 \\ 2 \log r, & \text{if } r > 1, \end{cases}$  we have

$$\int_{\mathbb{S}^1} \log |re^{i\gamma} - z| d\nu(z) = \begin{cases} \frac{r^2}{4} (\cos^2 \gamma - \sin^2 \gamma), & \text{if } r \leq 1, \\ (\frac{1}{4r^2} + \log r) \cos^2 \gamma + (-\frac{1}{4r^2} + \log r) \sin^2 \gamma, & \text{if } r > 1. \end{cases}$$

□

## 2.5.2 Large deviations

Let  $\hat{\mu}_n$  be the empirical measure of  $X(n)$ , that is

$$\hat{\mu}_n = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \delta_{u_i z_{n,i} u_i^*}.$$

It would be interesting to prove a large deviation principle for the empirical measure  $\hat{\mu}_n$  as in the hermitian and complex cases [BG97, BZ98]. This is a first result in this direction.

**Proposition 2.5.4.** *The measure  $\hat{\mu}_n$  is exponentially tight.*

*Proof.* Denote by  $B_r = \{q \in \mathbb{H} \mid |q| < r\}$  the open ball of radius  $r$  in  $\mathbb{H}$ . Consider the compact sets

$$A_{K,r} = \{\mu \in \mathcal{M}_1(\mathbb{H}) \mid \mu(B_r^c) \leq K\},$$

where  $\mathcal{M}_1(\mathbb{H})$  is the set of probability measure on  $\mathbb{H}$ . Then, denoting by  $\sigma = \mathcal{U}_{|\mathbb{S}(\mathbb{H})}$  the uniform measure on  $\mathbb{S}(\mathbb{H})$ , we have,

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(\hat{\mu}_n \in A_{K,r}^c) &= \mathbb{P}(\hat{\mu}_n(|q| \geq r) > K) \\ &= \int \mathbb{1}_{\{\hat{\mu}_n(|q| \geq r) > K\}} \frac{1}{c_n} \exp \left( -\frac{1}{2} \left( K_n(z) + \sum_{i=1}^{2n} (|z_i|^2 + \log |z_i - \bar{z}_i|^{-1}) \right) \right) \\ &\quad \times dz_1 \cdots dz_n d\sigma(u_1) \cdots d\sigma(u_n) \end{aligned}$$

Recall that  $H(x) = |x|^2 - \log(|x|^2 + 1)$  for the gaussian potential  $V(x) = |x|^2$ , and define  $\varphi(|x|) = H(x)$ . Hence,  $\varphi$  is a non-negative, non-decreasing function on  $\mathbb{R}$ , and we have  $\varphi(|uxu^*|) = \varphi(|x|)$  for all  $u \in \mathbb{S}(\mathbb{H})$ . By Markov inequality we have,

$$\hat{\mu}_n(|q| \geq r) \leq \hat{\mu}_n(\varphi(|q|) \geq \varphi(r)) \leq \frac{\int_{\mathbb{H}} \varphi(|q|) d\hat{\mu}_n(q)}{\varphi(r)}.$$

Hence, since  $k(x, y) \geq \frac{1}{2}(H(x) + H(y))$ , we have

$$K_n(z) \geq (2n-1)2 \sum_{i=1}^n \varphi(|z_i|) = (2n-1)2n \int \varphi(|q|) d\hat{\mu}(q) \geq (2n-1)2n\varphi(r)\hat{\mu}(|q| \geq r).$$

So we get,

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(\hat{\mu}_n \in A_{K,r}^c) &\leq \int \mathbb{1}_{\{\hat{\mu}_n(|q| \geq r) > K\}} \frac{1}{c_n} e^{-\frac{1}{2}(2n-1)2n\varphi(r)\hat{\mu}_n(|q| \geq r)} e^{-\frac{1}{2} \sum_{i=1}^{2n} (|z_i|^2 + \log |z_i - \bar{z}_i|^{-1})} \\ &\quad \times dz_1 \cdots dz_n d\sigma(u_1) \cdots d\sigma(u_n) \\ &\leq \frac{1}{c_n} e^{-n(2n-1)\varphi(r)K} \left( \int_{\mathbb{C}} e^{-|x|^2} |x - \bar{x}| dx \right)^n \underbrace{\int d\sigma(u_1) \cdots d\sigma(u_n)}_{=1}. \end{aligned}$$

Now taking the log, we obtain

$$\frac{1}{n^2} \log \mathbb{P}(\hat{\mu}_n \in A_{K,r}^c) \leq \frac{1}{n^2} \log \frac{1}{c_n} - \frac{n(2n-1)}{n^2} \varphi(r)K + \frac{1}{n} \log C,$$

where  $C = \int_{\mathbb{C}} e^{-|x|^2} |x - \bar{x}| dx$  is a finite constant. Now taking the limsup, and using the estimate on  $c_n$  given by lemma 2.2.11, we have

$$\limsup_n \frac{1}{n^2} \log \mathbb{P}(\hat{\mu}_n \in A_{K,r}^c) \leq 2E - 2\varphi(r)K \leq -\alpha,$$

with  $K = \frac{\alpha+2E}{2\varphi(r)}$ , which proves the exponential tightness.  $\square$

## Chapter 3

# Quantum random walks and minors of Hermitian Brownian motion

This is a joint work with Manon Defosseux (MAP5, Université Paris Descartes). Considering quantum random walks, we construct discrete-time approximations of the eigenvalues processes of minors of Hermitian Brownian motion. It has been recently proved by Adler, Nordenstam and van Moerbeke in [ANvM10] that the process of eigenvalues of two consecutive minors of an Hermitian Brownian motion is a Markov process, whereas if one considers more than two consecutive minors, the Markov property fails. We show that there are analog results in the noncommutative counterpart and establish the Markov property of eigenvalues of some particular submatrices of Hermitian Brownian motion.

### 3.1 Introduction

Let  $(M(t), t \geq 0)$  be a  $2 \times 2$  Hermitian Brownian motion with null trace, *i.e.*

$$M(t) = \begin{bmatrix} B_1(t) & B_2(t) + iB_3(t) \\ B_2(t) - iB_3(t) & -B_1(t) \end{bmatrix}, t \geq 0,$$

where  $(B_1, B_2, B_3)$  is a standard Brownian motion in  $\mathbb{R}^3$ . Itô's calculus easily shows that the process

$$(B_1(t), \sqrt{B_1^2(t) + B_2^2(t) + B_3^2(t)}), t \geq 0, \quad (3.1)$$

is a Markovian process on  $\mathbb{R}^2$ . Let us recall how noncommutative discrete-time approximation of this process can be constructed, following [Bia06]. For this, we consider the set  $M_2(\mathbb{C})$  of  $2 \times 2$  complex matrices, endowed with the state

$$\text{tr}(M) = \frac{1}{2} \text{Tr}(M), M \in M_2(\mathbb{C}),$$

and the Pauli matrices

$$x = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad y = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}, \quad z = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix},$$

which satisfy the commutation relations

$$[x, y] = 2iz, [y, z] = 2ix, \text{ and } [z, x] = 2iy.$$

The matrices  $x, y$  and  $z$  define three noncommutative Bernoulli variables. Consider the algebra  $M_2(\mathbb{C})^{\otimes \infty}$ , endowed with the infinite product state, still denoted  $\text{tr}$ , defined by

$$\text{tr}(a_1 \otimes \cdots \otimes a_n \otimes I^{\otimes \infty}) = \text{tr}(a_1) \cdots \text{tr}(a_n), \quad \text{for } a_1, \dots, a_n \in M_2(\mathbb{C}),$$

where  $I$  is the identity matrix of  $M_2(\mathbb{C})$ . Define, for all  $i \in \mathbb{N}^*$ , the elements

$$x_i = I^{\otimes(i-1)} \otimes x \otimes I^{\otimes \infty}, \quad y_i = I^{\otimes(i-1)} \otimes y \otimes I^{\otimes \infty}, \quad z_i = I^{\otimes(i-1)} \otimes z \otimes I^{\otimes \infty},$$

as well as the partial sums

$$X_n = \sum_{i=1}^n x_i, \quad Y_n = \sum_{i=1}^n y_i, \quad Z_n = \sum_{i=1}^n z_i, \quad n \geq 1.$$

The processes  $(X_n)_{n \geq 1}$ ,  $(Y_n)_{n \geq 1}$  and  $(Z_n)_{n \geq 1}$ , define three classical centered Bernoulli random walks. Considered together, they form a noncommutative Markov process which converges, after a proper renormalization, towards a standard Brownian motion in  $\mathbb{R}^3$  (see Biane [Bia90] for more details). Furthermore, the family of noncommutative random variables

$$(Z_n, \sqrt{X_n^2 + Y_n^2 + Z_n^2}, n \geq 1), \tag{3.2}$$

forms a discrete-time approximation of the Markov process (3.1). Since the noncommutative process (3.2) is also Markovian (see [Bia06]), there is a quite noticing analogy between what happens in the commutative and noncommutative cases.

In higher dimension, there are several natural ways to generalize the construction of processes (3.1) and (3.2). For some of them, the Markov property fails. For instance for  $d \geq 2$ , in the commutative case, if  $(M(t), t \geq 0)$  is a  $d \times d$  Hermitian Brownian motion, the process obtained by considering the eigenvalues of two consecutive minors of  $(M(t), t \geq 0)$ , is Markovian whereas the Markovianity fails if one considers more than two consecutive minors, as it has been recently proved in [ANvM10], and announced in [Def10]. This result has also an analogue in a noncommutative framework as we shall see in the sequel.

In this paper we extend to higher dimensions the construction of the noncommutative process (3.2). For this we need some basic facts about representation theory of Lie algebra recalled in section 3.2. In section 3.3 we recall the construction of quantum Markov chains. The Markovian aspects are studied more specifically in section 3.4 using some existing results of invariant theory. In particular we discuss the Markovianity of noncommutative analogues of the processes of eigenvalues of consecutive minors. In the last section, considering the limit of the noncommutative processes previously studied, we discuss the Markovianity of some natural generalizations of the process (3.1).

### 3.2 Universal enveloping algebra

Let  $G = GL_d(\mathbb{C})$  be the group of  $d \times d$  invertible matrices, and  $\mathfrak{g} = M_d(\mathbb{C})$  its Lie algebra, which is the algebra of  $d \times d$  complex matrices. Letting  $e_{ij}$ ,  $i, j = 1, \dots, d$ , be the standard basis in  $M_d(\mathbb{C})$ , the universal enveloping algebra  $\mathcal{U}(\mathfrak{g})$  of  $\mathfrak{g}$  is the associative algebra generated by  $e_{ij}$ ,  $i, j = 1, \dots, d$ , with no relations among the generators other than the following commutation relations

$$[e_{ij}, e_{kl}] = \delta_{jk}e_{il} - \delta_{il}e_{kj},$$

where  $[\cdot, \cdot]$  is the usual bracket of  $\mathfrak{g}$ . By the Poincaré-Birkhoff-Witt theorem (see [Žel73]), there exists a basis of  $\mathcal{U}(\mathfrak{g})$  composed of monomials

$$e_{i_1 j_1} \cdots e_{i_m j_m},$$

where the integers  $i_k, j_k$  are taken in a certain order. Hence, writing an element of  $\mathcal{U}(\mathfrak{g})$  in this basis, its degree is defined as the degree of its leading term. For  $n \in \mathbb{N}$ , we denote  $\mathcal{U}_n(\mathfrak{g})$  the set of elements of  $\mathcal{U}(\mathfrak{g})$  whose leading term is of degree smaller than  $n$ . Recall that a representation of  $\mathfrak{g}$  in a finite dimensional vector space  $V$  is a Lie algebra homomorphism

$$\rho: \mathfrak{g} \rightarrow \text{End}(V).$$

Then any representation  $\rho$  of  $\mathfrak{g}$  extends uniquely to the universal enveloping algebra letting

$$\rho(xy) = \rho(x)\rho(y), \quad x, y \in \mathcal{U}(\mathfrak{g}).$$

Let  $I$  be the identity matrix of size  $d \times d$ . The coproduct on  $\mathcal{U}(\mathfrak{g})$  is the algebra homomorphism  $\Delta: \mathcal{U}(\mathfrak{g}) \rightarrow \mathcal{U}(\mathfrak{g}) \otimes \mathcal{U}(\mathfrak{g})$  defined on the generators by

$$\begin{aligned} \Delta(I) &= I \otimes I \\ \Delta(e_{ij}) &= I \otimes e_{ij} + e_{ij} \otimes I, \quad \text{if } i \neq j, \quad i, j = 1, \dots, d \\ \Delta(h_i) &= I \otimes h_i + h_i \otimes I, \quad i = 1, \dots, d-1, \end{aligned}$$

where  $h_i = e_{ii} - e_{i+1 i+1}$ . This characterizes entirely  $\Delta$  letting

$$\Delta(xy) = \Delta(x)\Delta(y), \quad x, y \in \mathcal{U}(\mathfrak{g}),$$

where the product on  $\mathcal{U}(\mathfrak{g}) \otimes \mathcal{U}(\mathfrak{g})$  is defined in the usual way  $(a \otimes b)(c \otimes d) = ac \otimes bd$ , for  $a, b, c, d \in \mathcal{U}(\mathfrak{g})$ . The tensor product of two representations  $\rho_1: \mathfrak{g} \rightarrow \text{End}(V_1)$  and  $\rho_2: \mathfrak{g} \rightarrow \text{End}(V_2)$  and its extension to  $\mathcal{U}(\mathfrak{g})$

$$\rho_1 \otimes \rho_2: \mathcal{U}(\mathfrak{g}) \rightarrow \text{End}(V_1 \otimes V_2)$$

is given by

$$\rho_1 \otimes \rho_2(x) = (\rho_1 \otimes \rho_2)\Delta(x), \quad x \in \mathcal{U}(\mathfrak{g}),$$

where  $(\rho_1 \otimes \rho_2)(x_1 \otimes x_2) = \rho_1(x_1) \otimes \rho_2(x_2)$ , for  $x_1, x_2 \in \mathcal{U}(\mathfrak{g})$ . For a representation  $\rho$  of  $\mathfrak{g}$ , we define recursively the representation  $\rho^{\otimes n}$  of  $\mathcal{U}(\mathfrak{g})$  by

$$\rho^{\otimes n}(x) := (\rho^{\otimes n-1} \otimes \rho)\Delta(x), \quad x \in \mathcal{U}(\mathfrak{g}).$$

### 3.3 Quantum Markov chain

We first recall some basic facts about noncommutative probability, which can be found in [Mey93] for example. A noncommutative probability space  $(\mathcal{A}, \varphi)$  is composed of a unital  $*$ -algebra, and a state  $\varphi: \mathcal{A} \rightarrow \mathbb{C}$ , that is a positive linear form, in the sense that  $\varphi(aa^*) \geq 0$  for all  $a \in \mathcal{A}$ , and normalized, *i.e.*  $\varphi(1) = 1$ . Elements of  $\mathcal{A}$  are called noncommutative random variables. Note that classical probability is recovered, at least for bounded random variables, by letting  $\mathcal{A} = L^\infty(\Omega, \mathbb{P})$  for some probability space  $(\Omega, \mathbb{P})$ , and  $\varphi$  being the expectation  $\mathbb{E}$ . The law of a family  $(a_1, \dots, a_n)$  of noncommutative random variables is defined as the collection of  $*$ -moments

$$\varphi(a_{i_1}^{\varepsilon_1} \cdots a_{i_k}^{\varepsilon_k}),$$

where for all  $j = 1, \dots, k$ ,  $i_j \in \{1, \dots, n\}$ ,  $\varepsilon_j \in \{1, *\}$ , and  $k \geq 1$ . Thus, convergence in distribution means convergence of all  $*$ -moments.

Recall that a von Neumann algebra is a subalgebra of the algebra of bounded operators on some Hilbert space, closed under the strong topology. Define  $\mathcal{W} = M_d(\mathbb{C})^{\otimes \infty}$  the infinite tensor product in the sense of von Neumann algebras, with respect to the product state  $\omega = \text{tr}^{\otimes \infty}$ , where  $\text{tr} = \frac{1}{d} \text{Tr}$  is the normalized trace on  $M_d(\mathbb{C})$ . Hence,  $(\mathcal{W}, \omega)$  is a noncommutative probability space. For  $a_1, \dots, a_n \in M_d(\mathbb{C})$ , we use the notation  $a_1 \otimes \dots \otimes a_n$  instead of  $a_1 \otimes \dots \otimes a_n \otimes I^{\otimes \infty}$ . Let us now recall the construction of quantum Markov chains, as it can be found in [Bia06]. First, let us see how classical Markov chains can be translated in the noncommutative formalism. If  $(X_n)_{n \geq 1}$  is a classical Markov chain defined on some probability space  $(\Omega, \mathbb{P})$  and taking values in a measurable space  $E$ , then for each  $n \geq 1$ , the random variable  $X_n: \Omega \rightarrow E$  gives rise to an algebra homomorphism

$$\begin{aligned} \chi_n: L^\infty(E) &\rightarrow L^\infty(\Omega) \\ f &\mapsto f(X_n). \end{aligned}$$

Hence, one can think of a noncommutative random variable as an algebra homomorphism. The Markov property of  $(X_n)_{n \geq 1}$  writes

$$\mathbb{E}(Y f(X_{n+1})) = \mathbb{E}(Y Q f(X_n)),$$

for all  $\sigma(X_1, \dots, X_n)$ -measurable random variable  $Y$ , and where  $Q: L^\infty(E) \rightarrow L^\infty(E)$  is the transition operator of  $(X_n)_{n \geq 1}$ . Translating this in the homomorphism formalism, we get

$$\mathbb{E}(\psi \chi_{n+1}(f)) = \mathbb{E}(\psi \chi_n(Qf)),$$

where  $\psi$  is in the subalgebra of  $L^\infty(\Omega)$  generated by  $X_1, \dots, X_n$ .

Let us pass to the construction properly speaking of the quantum Markov chain considered here. Let  $\rho$  be the standard representation of  $\mathfrak{g}$ . We consider the morphism

$$\begin{aligned} j_n: \mathcal{U}(\mathfrak{g}) &\rightarrow \mathcal{W} \\ x &\mapsto \rho^{\otimes n}(x), \end{aligned}$$

for all  $n \geq 1$ . Define  $P: \mathcal{U}(\mathfrak{g}) \rightarrow \mathcal{U}(\mathfrak{g})$  by

$$P = \text{id} \otimes \eta \circ \Delta,$$

where  $\eta(\cdot) = \text{tr}(\rho(\cdot))$ .  $P$  is a unital completely positive map, which is the analogue of Markov operator in the quantum context. We have that  $(j_n)_{n \geq 1}$  is a quantum Markov chain, in the sense that it satisfies the following Markov property.

**Proposition 3.3.1.** *For all  $\xi$  in the von Neumann algebra generated by  $\{j_k(\mathcal{U}(\mathfrak{g})), k \leq n-1\}$ , and all  $x \in \mathcal{U}(\mathfrak{g})$ ,*

$$\omega(j_n(x)\xi) = \omega(j_{n-1}(Px)\xi).$$

*Proof.* Let  $\xi = a_1 \otimes \dots \otimes a_{n-1}$ , where the  $a_i$ 's are in  $M_d(\mathbb{C})$ . Using Sweedler's notation

$$\Delta(x) = \sum x^1 \otimes x^2,$$

we have on one hand

$$\begin{aligned} \omega(j_n(x)\xi) &= \omega((\rho^{\otimes n-1} \otimes \rho)\Delta(x)\xi) \\ &= \sum \omega(\rho^{\otimes n-1}(x^1) \otimes \rho(x^2)\xi), \end{aligned}$$

so,

$$\omega(j_n(x)\xi) = \sum \text{tr}(\rho^{\otimes n-1}(x^1)\xi) \text{tr}(\rho(x^2)).$$

On the other hand,

$$Px = \sum x^1 \eta(x^2).$$

Thus

$$j_{n-1}(Px) = \sum \eta(x^2) \rho^{\otimes n-1}(x^1),$$

and

$$\omega(j_{n-1}(Px)\xi) = \sum \text{tr}(\rho^{\otimes n-1}(x^1)\xi) \text{tr}(\rho(x^2)),$$

which achieves the proof.  $\square$

### 3.4 Restriction to a subalgebra

Recall that the group  $G$  acts on  $\mathfrak{g}$  via the adjoint action, *i.e.* the conjugation action, given by

$$\text{Ad}(g)x = gxg^{-1}, \quad g \in G, x \in \mathfrak{g}.$$

This action extends uniquely to an action on  $\mathcal{U}(\mathfrak{g})$  letting

$$\text{Ad}(g)(xy) = (\text{Ad}(g)x)(\text{Ad}(g)y), \quad g \in G, x \in \mathcal{U}(\mathfrak{g}).$$

The group  $G$  acts on  $\mathcal{U}(\mathfrak{g}) \otimes \mathcal{U}(\mathfrak{g})$  via the action

$$\text{Ad}(g)(x \otimes y) = (\text{Ad}(g)x) \otimes (\text{Ad}(g)y), \quad g \in G, x, y \in \mathcal{U}(\mathfrak{g}).$$

Note that the morphism  $\Delta$  satisfies

$$\Delta(\text{Ad}(g)x) = \text{Ad}(g)\Delta(x), \quad g \in G, x \in \mathcal{U}(\mathfrak{g}). \quad (3.3)$$

The next proposition shows that the operator  $P$  commutes with the adjoint action.

**Proposition 3.4.1.** *For all  $g \in G$ , and all  $x \in \mathcal{U}(\mathfrak{g})$ , we have*

$$\text{Ad}(g)P(x) = P(\text{Ad}(g)x).$$

*Proof.* Using the notation  $\Delta x = \sum x^1 \otimes x^2$  for  $x \in \mathcal{U}(\mathfrak{g})$ , we have

$$\text{Ad}(g)P(x) = \text{Ad}(g) \left( \sum x^1 \eta(x^2) \right) = \sum \text{Ad}(g)x^1 \eta(x^2),$$

and

$$\begin{aligned} P(\text{Ad}(g)x) &= \text{id} \otimes \eta \circ \Delta(\text{Ad}(g)x) = \text{id} \otimes \eta(\text{Ad}(g)\Delta x) \\ &= \sum \text{Ad}(g)x^1 \eta(x^2), \end{aligned}$$

since  $\eta$  is a trace.  $\square$

**Definition 3.4.2.** For a subgroup  $K$  of  $G$ , an element  $x \in \mathcal{U}(\mathfrak{g})$  is said to be  $K$ -invariant if

$$\text{Ad}(g)x = x, \quad \forall g \in K.$$

The set of  $K$ -invariant elements of  $\mathcal{U}(\mathfrak{g})$  is denoted  $\mathcal{U}(\mathfrak{g})^K$ . For  $n \in \mathbb{N}$ , we denote  $\mathcal{U}_n(\mathfrak{g})^K$  the subset of  $\mathcal{U}(\mathfrak{g})^K$  of elements whose leading term is of degree smaller than  $n$ . Proposition 3.4.1 implies the following one, which is fundamental for our purpose.

**Proposition 3.4.3.** *Let  $K$  be a subgroup of  $G$ . The subalgebra  $\mathcal{U}(\mathfrak{g})^K$  of  $K$ -invariant elements of  $\mathcal{U}(\mathfrak{g})$  is stable by  $P$ , i.e.*

$$P\mathcal{U}(\mathfrak{g})^K \subset \mathcal{U}(\mathfrak{g})^K.$$

Hence, the restriction of  $(j_n)_{n \geq 1}$  to  $\mathcal{U}(\mathfrak{g})^K$  defines a quantum Markov chain.

Let us focus on some particular invariant sets related to the minor process studied in [ANvM10]. For a fixed integer  $p \in \{0, \dots, d-1\}$ , we consider the block diagonal subgroup  $\mathrm{GL}_{d-p}(\mathbb{C}) \times \mathbb{C}^{*p}$  of  $G$  which consists of elements of the form

$$\begin{pmatrix} k & & & 0 \\ & k_1 & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & k_p \end{pmatrix},$$

with  $k \in \mathrm{GL}_{d-p}(\mathbb{C})$ , and  $k_1, \dots, k_p \in \mathbb{C}^*$ . For  $l, m \in \mathbb{N}^*$ , we denote  $\mathcal{M}_{l,m}$  the set of  $l \times m$  matrices with noncommutative entries in  $\mathcal{U}(\mathfrak{g})$ . We let  $\mathcal{M}_l = \mathcal{M}_{l,l}$ . The rules to add or multiply matrices of  $\mathcal{M}_{l,m}$  are the same as those for the commutative case replacing the usual addition and multiplication in a commutative algebra by the addition and the multiplication in  $\mathcal{U}(\mathfrak{g})$ . Moreover, if  $M = (m_{ij})_{1 \leq i, j \leq l}$  is a matrix in  $\mathcal{M}_l$ , then the element of  $\mathcal{U}(\mathfrak{g})$  equal to  $\sum_{i=1}^l m_{ii}$  is denoted  $\mathrm{Tr}(M)$ . We partition the matrix  $E = (e_{ij})_{1 \leq i, j \leq d}$  in block matrices in the form

$$E = \begin{bmatrix} E_{11} & \dots & E_{1p+1} \\ \vdots & & \vdots \\ E_{p+11} & \dots & E_{p+1p+1} \end{bmatrix},$$

where  $E_{11} \in \mathcal{M}_{d-p, d-p}$ ,  $E_{1i} \in \mathcal{M}_{d-p, 1}$ ,  $E_{i1} \in \mathcal{M}_{1, d-p}$ ,  $i \in \{2, \dots, p+1\}$ , and  $E_{ij} \in \mathcal{U}(\mathfrak{g})$ ,  $i, j \in \{2, \dots, d\}$ .

**Notation.** Entries of a matrix will be always denoted by small letters, while capital letters will refer to the partition defined above.

The next theorem, which has been proved by Klink and Ton-That, gives the generators of the subalgebra  $\mathcal{U}(\mathfrak{g})^{\mathrm{GL}_{d-p}(\mathbb{C}) \times \mathbb{C}^{*p}}$ .

**Theorem 3.4.4** ([KTT92]). *The subalgebra  $\mathcal{U}(\mathfrak{g})^{\mathrm{GL}_{d-p}(\mathbb{C}) \times \mathbb{C}^{*p}}$  is finitely generated by the constants and elements*

$$\mathrm{Tr}(E_{i_1 i_2} \cdots E_{i_q i_1}), \quad q \in \mathbb{N}^*, i_1, \dots, i_q \in \{1, \dots, p+1\}.$$

The two extreme cases of the above theorem give the following classical results. Actually for  $p = 0$ , it implies that the center of  $\mathcal{U}(\mathfrak{g})$  is generated by Casimir operators (see [Žel73])

$$\mathrm{Tr}(E^k), \quad k \in \mathbb{N}.$$

For  $p = d-1$ , we recover that the commutant of  $\{e_{ii}, i = 1, \dots, d\}$  in  $\mathcal{U}(\mathfrak{g})$  is generated by elements

$$e_{i_1 i_2} \cdots e_{i_q i_1}, \quad q \in \mathbb{N}, i_1, \dots, i_q \in \{1, \dots, p+1\}.$$

For  $a_1, \dots, a_n \in \mathcal{U}(\mathfrak{g})$ , we denote

$$\langle a_1, \dots, a_n \rangle,$$

the subalgebra of  $\mathcal{U}(\mathfrak{g})$  generated by the constants and elements  $a_1, \dots, a_n$ . Let us focus on the subalgebra  $\mathcal{U}(\mathfrak{g})^{\mathrm{GL}_{d-p}(\mathbb{C}) \times \mathbb{C}^{*p}}$  and its generators in the case when  $p = 1$  and  $p = 2$ . First we need the following lemmas.

**Lemma 3.4.5.** *If  $A = (a_{ij})_{1 \leq i, j \leq d}$ ,  $B = (b_{ij})_{1 \leq i, j \leq d} \in \mathcal{M}_d$ , with  $a_{ij} \in \mathcal{U}_n(\mathfrak{g})$ ,  $b_{ij} \in \mathcal{U}_m(\mathfrak{g})$ , for  $i, j = 1, \dots, d$ , then*

$$\mathrm{Tr}(AB) - \mathrm{Tr}(BA) \in \mathcal{U}_{m+n-1}(\mathfrak{g}).$$

*Proof.* This is a consequence of the commutation relations in  $\mathcal{U}(\mathfrak{g})$ .  $\square$

The following lemma claims that the subset of invariants  $\mathcal{U}(\mathfrak{g})^{\mathrm{GL}_{d-1}(\mathbb{C}) \times \mathbb{C}^*}$  is generated by the Casimir elements associated to the Lie algebra  $\mathcal{M}_d(\mathbb{C})$  and those associated to the subalgebra  $\{M \in \mathcal{M}_d(\mathbb{C}) : m_{id} = m_{di} = 0, i = 1, \dots, d\} \simeq \mathcal{M}_{d-1}(\mathbb{C})$ .

**Lemma 3.4.6.** *The subalgebra  $\mathcal{U}(\mathfrak{g})^{\mathrm{GL}_{d-1}(\mathbb{C}) \times \mathbb{C}^*}$  is generated by*

$$\mathrm{Tr}(E_{11}^{k-1}), \mathrm{Tr}(E^k), \quad k = 1, \dots, d.$$

*Proof.* For  $q \in \mathbb{N}^*$ , let  $\mathcal{T}_q$  be the subalgebra

$$\langle \mathrm{Tr}(E_{i_1 i_2} \cdots E_{i_k i_1}), k \in \{1, \dots, q\}, i_1, \dots, i_k = 1, 2 \rangle.$$

It is sufficient to prove that for every  $q \in \mathbb{N}^*$

$$\mathcal{T}_q = \langle \mathrm{Tr}(E_{11}^k), \mathrm{Tr}(E^k), k \in \{1, \dots, q\} \rangle. \quad (3.4)$$

For every  $q \in \mathbb{N}^*$  the inclusion

$$\langle \mathrm{Tr}(E_{11}^k), \mathrm{Tr}(E^k), k \in \{1, \dots, q\} \rangle \subset \mathcal{T}_q$$

follows from the fact that

$$\mathrm{Tr}(E^k) = \sum \mathrm{Tr}(E_{i_1 i_2} \cdots E_{i_k i_1}),$$

where the sum runs over all sequences  $i_1, \dots, i_k$  of integers in  $\{1, 2\}$ . Let us prove the reverse inclusion by induction on  $q$ . It is clearly true for  $q = 1$ . For  $q = 2$ , let us write

$$\mathrm{Tr}(E^2) = \mathrm{Tr}(E_{21}E_{12}) + \mathrm{Tr}(E_{12}E_{21}) + \mathrm{Tr}(E_{11}^2) + \mathrm{Tr}(E_{22}^2).$$

Thus the inclusion

$$\mathcal{T}_2 \subset \langle \mathrm{Tr}(E_{11}^k), \mathrm{Tr}(E^k), k = 1, 2 \rangle$$

follows from Lemma 3.4.5 which implies that

$$\mathrm{Tr}(E_{21}E_{12}) - \mathrm{Tr}(E_{12}E_{21}) \in \mathcal{U}_1^{\mathrm{GL}_{d-1} \times \mathbb{C}^*}(\mathfrak{g}) \subset \langle 1, E_{11}, E_{22} \rangle.$$

The case  $q = 3$  is proved in a similar way. Suppose that (3.4) is true for  $q - 1$ , for a fixed  $q \geq 4$ . Let  $i_1, i_2, \dots, i_q$ , be a sequence of integers in  $\{1, 2\}$ . If the sequence  $i_1, i_2, \dots, i_q$ , contains no successive integers equal to 1 then  $E_{i_1 i_2} \cdots E_{i_q i_1}$ , contains only factors equal to  $E_{21}E_{12}$ ,  $E_{12}E_{21}$ , or  $E_{22}$ . By lemma 3.4.5 and inclusion

$$\mathcal{U}_{q-1}(\mathfrak{g})^{\mathrm{GL}_{d-1}(\mathbb{C}) \times \mathbb{C}^*} \subset \mathcal{T}_{q-1}, \quad (3.5)$$

we can suppose that  $E_{i_1 i_2} \cdots E_{i_q i_1}$ , contains only factors equal to  $E_{21} E_{12}$ , or  $E_{22}$ , which belongs to the subalgebra

$$\langle \mathbf{Tr}(E_{11}^k), \mathbf{Tr}(E^k), k = 1, 2 \rangle.$$

If  $E_{i_1 i_2} \cdots E_{i_q i_1}$ , contains factors equal to  $E_{11}$  but strictly less than  $q - 2$ , then it contains at least one factor equal to  $E_{21} E_{11} E_{12}$ ,  $E_{11} E_{12} E_{21}$  or  $E_{12} E_{21} E_{11}$ . Thanks to lemma 3.4.5, and inclusion (3.5) we can suppose that  $i_1 = i_3 = 2$  and  $i_2 = 1$ . Thus

$$\mathbf{Tr}(E_{i_1 i_2} \cdots E_{i_q i_1}) = (E_{21} E_{11} E_{12}) \mathbf{Tr}(E_{2 i_4} \cdots E_{i_q 2}).$$

Then the induction hypothesis implies

$$\mathbf{Tr}(E_{i_1 i_2} \cdots E_{i_q i_1}) \in \langle \mathbf{Tr}(E_{11}^k), \mathbf{Tr}(E^k), k \in \{1, \dots, q - 1\} \rangle.$$

If  $E_{i_1 i_2} \cdots E_{i_q i_1} = E_{11}^d$  then

$$\mathbf{Tr}(E_{i_1 i_2} \cdots E_{i_q i_1}) = \mathbf{Tr}(E_{11}^q) \in \langle \mathbf{Tr}(E_{11}^k), \mathbf{Tr}(E^k), k \in \{1, \dots, q\} \rangle.$$

If  $E_{i_1 i_2} \cdots E_{i_q i_1}$  contains  $q - 2$  factors equal to  $E_{11}$ , then

$$\mathbf{Tr}(E_{i_1 i_2} \cdots E_{i_q i_1}) \in \{ \mathbf{Tr}(E_{11}^{q-2} E_{12} E_{21}), \mathbf{Tr}(E_{21} E_{11}^{q-2} E_{12}), \mathbf{Tr}(E_{12} E_{21} E_{11}^{q-2}) \}.$$

We write

$$\begin{aligned} \mathbf{Tr}(E^q) &= \mathbf{Tr}(E_{11}^q) + \mathbf{Tr}(E_{11}^{q-2} E_{12} E_{21}) + \mathbf{Tr}(E_{21} E_{11}^{q-2} E_{12}) + \mathbf{Tr}(E_{12} E_{21} E_{11}^{q-2}) \\ &\quad + \sum \mathbf{Tr}(E_{i_1 i_2} \cdots E_{i_q i_1}) \end{aligned}$$

where the sum runs over all sequences  $i_1, \dots, i_q$  of integers in  $\{1, 2\}$  containing strictly less than  $q - 1$  integers equal to 1. The previous cases, Lemma 3.4.5 and inclusion (3.5) imply that

$$\mathbf{Tr}(E^q) - 3\mathbf{Tr}(E_{i_1 i_2} \cdots E_{i_q i_1}) \in \langle \mathbf{Tr}(E_{11}^k), \mathbf{Tr}(E^k), k \in \{1, \dots, q\} \rangle.$$

Since it is known (see [Žel73]) that

$$\langle \mathbf{Tr}(E^k), k \in \{1, \dots, d\} \rangle = \langle \mathbf{Tr}(E^k), k \geq 1 \rangle,$$

and

$$\langle \mathbf{Tr}(E_{11}^k), k \in \{1, \dots, d - 1\} \rangle = \langle \mathbf{Tr}(E_{11}^k), k \geq 1 \rangle,$$

the proposition follows.  $\square$

**Remark 3.4.7.** When  $p \geq 2$ , the subalgebra  $\mathcal{U}(\mathfrak{g})^{\mathrm{GL}_{d-p}(\mathbb{C}) \times \mathbb{C}^{*p}}$  is not generated by the Casimir elements associated to the Lie algebras  $\{M \in \mathrm{M}_d(\mathbb{C}) : m_{ij} = m_{ji} = 0, i = 1, \dots, d, j = d - k + 1, \dots, d\} \simeq \mathrm{M}_{d-k}(\mathbb{C}), k \in \{1, \dots, p\}$ . For instance,

$$\mathbf{Tr}(E_{13} E_{31}) \notin \langle \mathbf{Tr}(E_{11}^k), \mathbf{Tr}\left(\begin{bmatrix} E_{11} & E_{12} \\ E_{21} & E_{22} \end{bmatrix}^k\right), \mathbf{Tr}(E^k), k \in \mathbb{N} \rangle$$

and thus

$$\langle \mathbf{Tr}(E_{11}^k), \mathbf{Tr}\left(\begin{bmatrix} E_{11} & E_{12} \\ E_{21} & E_{22} \end{bmatrix}^k\right), \mathbf{Tr}(E^k), k \in \mathbb{N} \rangle \subsetneq \mathcal{U}(\mathfrak{g})^{\mathrm{GL}_{d-2}(\mathbb{C}) \times \mathbb{C}^{*2}}.$$

The following theorem is a quantum analogue of theorems 2.2 of [ANvM10].

**Theorem 3.4.8.** *The restriction of the  $j_n$ 's to the subalgebra*

$$\langle \mathbf{Tr}(E_{11}^{k-1}), \mathbf{Tr}(E^k), k \in \{1, \dots, d\} \rangle,$$

*defines a quantum Markov process.*

*Proof.* Theorem follows immediately from proposition 3.4.3 and lemma 3.4.6.  $\square$

Note that the subalgebra

$$\langle \mathbf{Tr}(E_{11}^{k-1}), \mathbf{Tr}(E^k), k \in \{1, \dots, d\} \rangle,$$

is commutative. Thus, as in [Bia06] which focus on the  $d = 2$  case, the quantum Markov process in the above theorem is a noncommutative process, with a commutative Markovian operator. Taking  $d = 2$  in theorem 3.4.8 the Markovianity of the process (3.2) follows. The following theorem is an analogue of theorem 2.4 of [ANvM10] in a noncommutative context. The non-Markovianity comes from remark 3.4.7.

**Theorem 3.4.9.** *Consider the partition of  $E$  with  $p = 2$ . The restriction of the  $j_n$ 's to the subalgebra*

$$\langle \mathbf{Tr}(E_{11}^k), \mathbf{Tr}\left(\begin{bmatrix} E_{11} & E_{12} \\ E_{21} & E_{22} \end{bmatrix}^k\right), \mathbf{Tr}(E^k), k \in \mathbb{N} \rangle,$$

*does not define a quantum Markov process.*

*Proof.* We have to prove that the subalgebra

$$\mathcal{B} := \langle \mathbf{Tr}(E_{11}^k), \mathbf{Tr}\left(\begin{bmatrix} E_{11} & E_{12} \\ E_{21} & E_{22} \end{bmatrix}^k\right), \mathbf{Tr}(E^k), k \in \mathbb{N} \rangle,$$

is not stable by the operator  $P$ . Indeed, the partition of  $E$  for  $p = 2$  writes

$$E = \begin{bmatrix} E_{11} & E_{12} & E_{13} \\ E_{21} & E_{22} & E_{23} \\ E_{31} & E_{32} & E_{33} \end{bmatrix}.$$

One can prove by straightforward calculation that the element

$$a = E_{21}E_{12}(E_{31}E_{13} + E_{32}E_{23})^2$$

is in  $\mathcal{B}$ , but  $Pa$  does not, which proves the theorem.  $\square$

Let us choose an integer  $m$  large enough such that the subalgebras

$$\langle \mathbf{Tr}(E_{i_1 i_2} \cdots E_{i_q i_1}), \quad q \in \mathbb{N}^*, i_1, \dots, i_q \in \{1, \dots, p+1\} \rangle$$

and

$$\langle \mathbf{Tr}(E_{i_1 i_2} \cdots E_{i_q i_1}), \quad q = 1, \dots, m, i_1, \dots, i_q \in \{1, \dots, p+1\} \rangle$$

are equal. In the framework of this paper, the natural process which "contains" the one of theorem 3.4.9 and remains Markovian, is given in the following theorem taking  $p = 2$ .

**Theorem 3.4.10.** *The restriction of the  $j_n$ 's to the subalgebra*

$$\langle \mathbf{Tr}(E_{i_1 i_2} \cdots E_{i_q i_1}), \quad q \in \{1, \dots, m\}, i_1, \dots, i_q \in \{1, \dots, p+1\} \rangle,$$

*defines a quantum Markov process.*

*Proof.* Theorem follows from theorem 3.4.4 and proposition 3.4.3.  $\square$

### 3.5 Random matrices

Let  $H_d$  and  $H_d^0$  be respectively the set of  $d \times d$  complex Hermitian matrices and the set of  $d \times d$  complex Hermitian matrices with null trace, both endowed with the scalar product given by

$$\langle M, N \rangle = \text{Tr}(MN), \quad M, N \in H_d \text{ (resp. } H_d^0\text{)}.$$

For  $k, l \in \mathbb{N}^*$ , we denote  $M_{k,l}(\mathbb{C})$  the set of  $k \times l$  complex matrices and let  $M_k(\mathbb{C}) = M_{k,k}(\mathbb{C})$ . As in the noncommutative case, we partition a matrix  $M \in M_d(\mathbb{C})$  in block matrices in the form

$$M = \begin{bmatrix} M_{11} & \dots & M_{1p+1} \\ \vdots & & \vdots \\ M_{p+11} & \dots & M_{p+1p+1} \end{bmatrix},$$

where  $M_{11} \in M_{d-p,d-p}(\mathbb{C})$ ,  $M_{1i} \in M_{d-p,1}(\mathbb{C})$ ,  $M_{i1} \in M_{1,d-p}(\mathbb{C})$ ,  $i \in \{2, \dots, p+1\}$ , and  $M_{ij} \in \mathbb{C}$ ,  $i, j \in \{2, \dots, d\}$ .

Define the elements  $(x_{ij})_{1 \leq i, j \leq d}$  of  $\mathcal{U}(\mathfrak{g})$  by

$$x_{ij} = e_{ij}, \quad \text{for } 1 \leq i \neq j \leq d, \quad \text{and } x_{ii} = e_{ii} - \frac{1}{d}I, \quad \text{for } 1 \leq i \leq d.$$

Note all the  $x_{ij}$ 's are traceless elements of  $\mathfrak{g}$ . Let  $v = \frac{d}{d-1} \text{tr}(\rho(x_{ii})\rho(x_{ii}))$  which does not depend on  $i$ . Then we have the following theorem which is due to Biane.

**Theorem 3.5.1** (Biane, [Bia95]). *The law of the family of random variables on  $(\mathcal{W}, \omega)$*

$$\left( \frac{1}{\sqrt{nv}} j_{\lfloor nt \rfloor}(x_{ij}) \right)_{t \in \mathbb{R}_+, 1 \leq i, j \leq d}$$

converges as  $n$  goes to infinity towards the law of

$$(m_{jk}(t))_{t \in \mathbb{R}_+, 1 \leq i, j \leq d},$$

where  $(M(t) = (m_{ij}(t))_{1 \leq i, j \leq d}, t \geq 0)$  is a standard Brownian motion on  $H_d^0$ .

By the above theorem, we see that the law of the noncommutative process

$$\left( \frac{1}{\sqrt{nv}} j_{\lfloor nt \rfloor} \right)_{t \geq 0} \tag{3.6}$$

restricted to the subalgebra of theorem 3.4.8 converges, as  $n$  goes to infinity, towards the law of  $(\text{Tr}(M_{11}(t)^{k-1}), \text{Tr}(M(t)^k), k \geq 1, t \geq 0)$ . We will see that this process, which is equivalent to the process of eigenvalues of two consecutive minors of  $(M(t), t \geq 0)$ , is Markovian. More generally, if  $K$  is a subgroup of  $G$ , the law of the noncommutative process (3.6) restricted to the subalgebra  $\mathcal{U}(\mathfrak{g})^K$  converges, as  $n$  goes to infinity, to a commutative process which remains Markovian. The fact that the limit process is a Markov process will follow by Itô's calculus and invariant theory in a commutative framework. A function  $f: M_d(\mathbb{C}) \rightarrow \mathbb{C}$  is seen as a function from  $\mathbb{C}^{d^2}$  to  $\mathbb{C}$ .

**Definition 3.5.2.** Let  $K$  be a subgroup of  $G$ . A function  $f$  from  $M_d(\mathbb{C})$  to  $\mathbb{C}$  is said to be  $K$ -invariant if

$$\forall k \in K \quad \forall M \in M_d(\mathbb{C}), \quad f(kMk^{-1}) = f(M).$$

Let  $\mathcal{P}(\mathfrak{g})$  denote the algebra of all complex-valued polynomial functions on  $M_d(\mathbb{C})$ , i.e.  $\mathcal{P}(\mathfrak{g})$  is the set of all polynomials in coordinates of a matrix of  $M_d(\mathbb{C})$ . For any subgroup  $K$  of  $G$ , the set of  $K$ -invariant elements of  $\mathcal{P}(\mathfrak{g})$  is denoted  $\mathcal{P}(\mathfrak{g})^K$ . The following theorem, which is a commutative version of theorem 3.4.4, has been proved in ([KTT92]).

**Theorem 3.5.3** ([KTT92]). *It exists  $m \in \mathbb{N}$ , such that the subalgebra  $\mathcal{P}(\mathfrak{g})^{\mathrm{GL}_{d-p}(\mathbb{C}) \times \mathbb{C}^{*p}}$  is generated by the constants and polynomials*

$$M \in M_d(\mathbb{C}) \mapsto \mathrm{Tr}(M_{i_1 i_2} \cdots M_{i_q i_1}), \quad q \in \{1, \dots, m\}, \quad i_1, \dots, i_q \in \{1, \dots, p+1\}.$$

Let us recall the following property of Brownian motion and invariant functions. In what follows we denote by  $\langle \cdot, \cdot \rangle$  the usual quadratic covariation, and by  $d$  and  $d^2$  the usual first and second order differentials.

**Proposition 3.5.4.** *Let  $g \in \mathrm{GL}_d(\mathbb{C})$ , and  $f$  and  $h$  be twice differentiable functions from  $M_d(\mathbb{C})$  to  $\mathbb{C}$  such that*

$$\forall M \in M_d(\mathbb{C}) \quad f(gMg^{-1}) = f(M) \text{ and } h(gMg^{-1}) = h(M). \quad (3.7)$$

If  $B$  is a standard Brownian motion on  $H_d$ , then

$$\langle df(gMg^{-1})(dB), dh(gMg^{-1})(dB) \rangle = \langle df(M)(dB), dh(M)(dB) \rangle$$

and

$$\langle d^2 f(gMg^{-1})(dB), dB \rangle = \langle d^2 f(M)(dB), dB \rangle.$$

*Proof.* Since  $B$  is a standard Brownian motion on  $H_d$ ,

$$\langle (gdBg^{-1})_{ij}, (gdBg^{-1})_{kl} \rangle = \langle dB_{ij}, dB_{kl} \rangle, \quad i, j, k, l \in \{1, \dots, d\}.$$

Thus

$$\langle df(gMg^{-1})(dB), dh(gMg^{-1})(dB) \rangle = \langle df(gMg^{-1})(gdBg^{-1}), dh(gMg^{-1})(gdBg^{-1}) \rangle,$$

and

$$\langle d^2 f(gMg^{-1})(dB), dB \rangle = \langle d^2 f(gMg^{-1})(gdBg^{-1}), gdBg^{-1} \rangle.$$

Property (3.7) implies

$$\langle df(gMg^{-1})(gdBg^{-1}), dh(g^{-1}Mg)(gdBg^{-1}) \rangle = \langle df(M)(dB), dh(M)(dB) \rangle$$

$$\langle d^2 f(gMg^{-1})(gdBg^{-1}), gdBg^{-1} \rangle = \langle d^2 f(M)(dB), dB \rangle. \quad \square$$

The previous proposition implies the following one.

**Proposition 3.5.5.** *Let  $K$  be a subgroup of  $\mathrm{GL}_d(\mathbb{C})$ . If  $f$  and  $h$  are elements in  $\mathcal{P}(\mathfrak{g})^K$ , then the functions*

$$M \in M_d(\mathbb{C}) \mapsto \langle df(M)(dB), dh(M)(dB) \rangle,$$

and

$$M \in M_d(\mathbb{C}) \mapsto \langle d^2 f(M)(dB), dB \rangle$$

are also  $K$ -invariant polynomial functions.

For a twice continuously differentiable function  $f: M_d(\mathbb{C}) \rightarrow \mathbb{C}$ , multidimensional Itô's formula writes

$$df(B) = d f(B)(dB) + \frac{1}{2} \langle d^2 f(B)(dB), dB \rangle.$$

Thus proposition 3.5.5 leads to the next proposition in which the integer  $m$  is the one introduced in theorem 3.5.3.

**Proposition 3.5.6.** *If  $(B(t), t \geq 0)$  is a standard Brownian motion on  $H_d$ , the processes*

$$(\text{Tr}(B_{i_1 i_2}(t) \cdots B_{i_q i_1}(t)), t \geq 0),$$

$q \in \{1, \dots, m\}$ ,  $i_1, \dots, i_q \in \{1, \dots, p+1\}$ , form a Markov process on  $\mathbb{R}^r$ , with  $r = \sum_{k=1}^m (p+1)^k$ .

*Proof.* For  $p$  and  $q$  two integers in  $\{1, \dots, m\}$  and two sequences  $i_1, \dots, i_p$  and  $j_1, \dots, j_q$  of integers of  $\{1, \dots, p+1\}$ , let us consider the functions  $f$ ,  $g$  and  $h$  from  $M_d(\mathbb{C})$  to  $\mathbb{C}$  defined by

$$f(M) = \text{Tr}(M_{i_1 i_2} \cdots M_{i_p i_1}), \quad g(M) = \text{Tr}(M_{i_1 i_p} \cdots M_{i_2 i_1}), \quad M \in M_d(\mathbb{C}),$$

and

$$h(M) = \text{Tr}(M_{j_1 j_2} \cdots M_{j_q j_1}), \quad M \in M_d(\mathbb{C}).$$

Since  $\overline{f(M)} = g(M)$ , when  $M \in H_d$ , we have

$$\overline{\langle df(B)(dB), dh(B)(dB) \rangle} = \langle dg(B)(dB), dh(B)(dB) \rangle.$$

Proposition (3.5.5) implies that

$$\langle df(B)(dB), dh(B)(dB) \rangle, \quad \overline{\langle df(B)(dB), dh(B)(dB) \rangle},$$

and

$$\langle d^2 f(B)(dB), dB \rangle,$$

are polynomial functions in the processes

$$\text{Tr}(B_{i_1 i_2} \cdots B_{i_q i_1}),$$

$q \in \{1, \dots, m\}$ ,  $i_1, \dots, i_q \in \{1, \dots, p+1\}$ . Thus proposition follows from usual properties of diffusions (see [Øks03] for example).  $\square$

Let us give a formulation of the last proposition in term of eigenvalues of some particular submatrices of Brownian motion on  $H_d$ . In the following lemma a polynomial function

$$M \in M_d(\mathbb{C}) \mapsto f(M),$$

is just denoted  $f(M)$ .

**Lemma 3.5.7.** *For any positive integer  $q$ , and any sequence of integers  $i_1, \dots, i_q$  in  $\{1, \dots, p+1\}$ , the polynomial function*

$$\text{Tr}(M_{i_1 i_2} \cdots M_{i_q i_1})$$

is equal to a finite product of factors of the form

$$\begin{aligned} & \text{Tr}(M_{11}^n), \text{Tr}(M_{1i} M_{i1} M_{11}^m), \text{Tr}(M_{1i} M_{ij} M_{j1} M_{11}^n), \\ & M_{ii}, M_{ij} M_{ji}, (M_{ij} M_{ji})^{-1}, M_{ij} M_{jk} M_{ki}, \end{aligned}$$

where  $n \in \mathbb{N}$ , and  $i, j, k$ , are distinct integers in  $\{2, \dots, p+1\}$ .

*Proof.* The lemma, which is clearly true for  $q = 1, 2, 3$ , is proved by induction on  $q \in \mathbb{N}^*$ . Suppose such a decomposition exists up to  $q - 1$ , for a fixed integer  $q$  greater than 4. Let us consider a sequence of integers  $i_1, \dots, i_q$  in  $\{1, \dots, p + 1\}$ . If all the integers of the sequence or none of them are equal to 1, then the decomposition exists. If it exists two successive integers, say  $i_1$  and  $i_2$ , such that  $i_1 = 1, i_2 \neq 1$  then it exists integers  $k \leq q - 1$  and  $p \leq q$ , such that  $i_p \neq 1$ , and

$$\mathrm{Tr}(M_{i_1 i_2} \cdots M_{i_q i_1}) = M_{i_2 i_3} \cdots M_{i_p 1} M_{11}^k M_{1 i_2}.$$

If  $i_p = i_2$ , then

$$\mathrm{Tr}(M_{i_1 i_2} \cdots M_{i_q i_1}) = (M_{i_2 i_3} \cdots M_{i_{p-1} i_2})(M_{i_2 1} M_{11}^k M_{1 i_2}).$$

If  $i_p \neq i_2$ , then

$$\mathrm{Tr}(M_{i_1 i_2} \cdots M_{i_q i_1})(M_{i_2 i_p} M_{i_p i_2}) = (M_{i_2 i_3} \cdots M_{i_{p-1} i_p} M_{i_p i_2})(M_{i_p 1} M_{11}^k M_{1 i_2} M_{i_2 i_p}).$$

Induction hypothesis implies that the above polynomials can be written as a product of factors given in the lemma.  $\square$

**Proposition 3.5.8.** *If  $B$  is a Brownian motion on  $\mathbb{H}_d$ , then the processes*

$$\mathrm{Tr}(B_{11}^n), \mathrm{Tr}(B_{1i} B_{i1} B_{11}^m), \mathrm{Tr}(B_{1i} B_{ij} B_{j1} B_{11}^n), \\ B_{ii}, B_{ij} B_{ji}, B_{ij} B_{jk} B_{ki},$$

where  $n \in \mathbb{N}$ , and  $i, j, k$ , are distinct integers in  $\{2, \dots, p + 1\}$ , taken together, form a Markov process.

*Proof.* Lemma 3.5.7 implies that there is a bijection between the Markov process of proposition 3.5.6 and the process of proposition 3.5.8, which is consequently Markovian too.  $\square$

The following theorem is an immediate consequence of the previous proposition.

**Theorem 3.5.9.** *Let  $p$  be a positive integer and  $B$  be a Brownian motion on  $\mathbb{H}_d$ . Then the processes of the eigenvalues of the matrices,*

$$B_{11}, \left( \begin{array}{cc} B_{11} & B_{1i} \\ B_{i1} & B_{ii} \end{array} \right), \left( \begin{array}{ccc} B_{11} & B_{1i} & 0 \\ 0 & 0 & B_{ij} \\ B_{j1} & 0 & 0 \end{array} \right),$$

and the complex processes,

$$B_{ij} B_{ji}, B_{ij} B_{jk} B_{ki},$$

where  $i, j, k$ , are distinct integers in  $\{2, \dots, p + 1\}$ , taken together, form a Markov process.

Taking  $p = 1$  in theorem 3.5.9 we obtain the following corollary, which has been already proved in [ANvM10].

**Corollary 3.5.10.** *If  $(\Lambda^{(d)}(t), t \geq 0)$  is the process of eigenvalues of a standard Brownian motion on  $\mathbb{H}_d$  and  $(\Lambda^{(d-1)}(t), t \geq 0)$  is the process of eigenvalues of its principal minor of order  $d - 1$ , then the processes*

$$(\Lambda^{(d)}(t), \Lambda^{(d-1)}(t), t \geq 0)$$

is Markovian.



## Chapter 4

# Interlacing property of zeros of eigenvectors of Schrödinger operators on trees

We prove an analogue for trees of Courant's theorem on the interlacing property of zeros of eigenfunctions of a Schrödinger operator. Let  $\Gamma$  be a finite tree, and  $\mathcal{A}$  a Schrödinger operator on  $\Gamma$ . If the eigenvectors of  $\mathcal{A}$  are ordered according to increasing eigenvalues, and do not vanish on the vertices of  $\Gamma$ , then the  $n$ -th eigenvector has exactly  $n$  nodal domains, and the zeros of eigenvectors have the interlacing property.

### 4.1 Introduction

The famous Courant's theorem [CH53] about nodal domains of eigenfunctions of differential operators states that

**Theorem** (Courant's theorem). *Let  $L$  be a self-adjoint second order elliptic operator on a domain  $G$  with arbitrary boundary conditions. If its eigenfunctions are ordered according to increasing eigenvalues, then the nodes of the  $n$ -th eigenfunction  $u_n$  divide the domain into no more than  $n$  subdomains.*

The subdomains defined in the theorem are called nodal domains and are the connected components of the complement of the nodal set  $\{x \mid u_n(x) = 0\}$ , which are separated by the nodes, or zeros, of eigenfunctions of  $L$ .

If  $L$  is a Schrödinger operator on  $G = [a, b] \subset \mathbb{R}$ , that is  $L = \mathcal{L} + V$  where  $\mathcal{L}$  is the Laplacian and  $V$  some potential, Courant's theorem becomes: *The nodes of the  $n$ -th eigenfunction  $u_n$  divide  $G$  into exactly  $n$  nodal domains.* Besides, the zeros of eigenfunctions of  $L$  have an interlacing property: *Between two zeros of  $u_n$ , there is exactly one zero of  $u_{n+1}$ .*

Analogues of Courant's result on graph have recently received increasing attention, see for example [DGLS01, Bly03] and the recent book [BLS07]. Note also that it was pointed to us that some of the ideas here were already presented in [Fri93], but we were not aware of that. In [DGLS01], the authors Davies *et al.* prove an analogue of Courant's theorem on graph. Contrary to the situation when  $G$  is a manifold, since a function on a graph is only defined on the set of vertices, an eigenfunction can change its sign without passing through zero, hence the nodes are not well defined. So, Davies *et al.* introduce the notion of sign graph, which is a connected set of vertices, on which the eigenvector has

the same sign, and prove the analogue of Courant's result, about the maximal number of sign graphs of eigenvectors of a Schrödinger operator. Their proof are based on Courant's minimax theorem, see [CH53], and some straightforward algebra. In [Biy03], Biyikoğlu proves an analogue of Courant's theorem for trees: he characterises the maximal number of sign graphs of an eigenvector of a generalised Laplacian, and gives a computational algorithm to find an eigenvector with minimum number of sign graphs. In particular, he proves that if  $u$  is an eigenvector associated to the  $n$ -th ordered eigenvalue  $\lambda_n$  without a vanishing coordinate, then  $u$  has exactly  $n$  sign graphs. He also characterises the maximal number of sign graphs for eigenvalues with multiplicity greater than one.

Here, we will prove the analogue of Courant's interlacing property for Schrödinger operators on finite trees, under the assumption that the eigenvectors are without vanishing coordinates. The proof recover the previous result of Biyikoğlu [Biy03] but with a different method. Since on a tree there is a unique path connecting two vertices, we can extend a function by linearity on edges, which allows us to define the zeros of an eigenfunction. The situation becomes then very similar to what happens in the real unidimensional case. Both proof of Courant's nodal theorem and of the interlacing property of eigenfunctions of a Schrödinger operator on a tree follow the lines of the proof of Courant [CH53], which is based on Green's formula.

## 4.2 Notations

Let  $\Gamma = (V, E)$  be a finite tree, where  $V$  is the set of vertices and  $E$  the set of edges, with  $|V| = N$ , and  $|E| = N - 1$ . Recall that a tree is a connected graph without cycles. This means that on a tree, any two points (possibly on the edges) are connected by a unique path. We note for  $x, y \in V$ ,  $x \sim y$  if there is an edge connecting  $x$  and  $y$ , and  $x$  and  $y$  are said to be neighbours, or adjacent. We choose some vertex  $\emptyset$  with only one neighbour and call it the root of the tree. This gives an orientation of the edges, the positive orientation being the direction connecting the root  $\emptyset$  and the vertices. We note  $(x, y)$  the edge starting from  $x$  and ending at  $y$ . We consider weighted trees, that is there is a function  $c: V \times V \rightarrow \mathbb{R}$  such that

$$\begin{cases} c(x, y) = c(y, x) > 0, & \text{if } x \sim y, \\ c(x, y) = 0, & \text{otherwise.} \end{cases}$$

Let for  $x \sim y$ ,  $l(x, y) = \frac{1}{c(x, y)}$ .  $l(x, y)$  is called the length of the edge connecting  $x$  and  $y$ . Define  $L^2(V)$  the space of functions on  $V$  endowed with the scalar product

$$\langle u, v \rangle_V = \sum_{x \in V} u(x)v(x),$$

for  $u, v$  functions on  $V$ . Define also  $L^2(E)$  the space of functions  $f$  on  $E$  such that  $f(x, y) = -f(y, x)$  for all edges  $(x, y) \in E$ , endowed with the scalar product

$$\langle f, g \rangle_E = \sum_{(x, y) \in E} f(x, y)g(x, y) = \frac{1}{2} \sum_{x \in V} \sum_{y \in V, y \sim x} f(x, y)g(x, y),$$

for  $f, g \in L^2(E)$ , where we use the notation  $f(x, y) = f((x, y))$  for functions on  $E$  for clarity.

We define the derivative operator  $\partial: L^2(V) \rightarrow L^2(E)$  by

$$\partial u(x, y) = c(x, y)^{1/2}(u(x) - u(y)),$$

for  $u \in L^2(V)$ . Its adjoint  $\partial^*: L^2(E) \rightarrow L^2(V)$  is then given by

$$\partial^*g(x) = \sum_{y \sim x} c(x, y)^{1/2}g(x, y),$$

for  $g \in L^2(E)$ .

Let  $\mathcal{L} = \partial^*\partial: L^2(V) \rightarrow L^2(V)$ . Then  $\mathcal{L}$  is called the *Laplacian* on  $\Gamma$ , and for  $f \in L^2(V)$ , we have for all  $x \in V$ ,

$$\mathcal{L}f(x) = \sum_{y \in V, y \sim x} c(x, y)(f(x) - f(y)).$$

Note that  $\mathcal{L}$  is a self-adjoint operator on  $L^2(V)$ . If we see  $f$  as a vector in  $\mathbb{R}^N$ , then  $\mathcal{L}$  can be seen as a  $N \times N$  symmetric matrix whose entries are given by

$$\begin{cases} \mathcal{L}_{xy} = -c(x, y), & \text{for } x \sim y, \\ \mathcal{L}_{xx} = \sum_{y \sim x} c(x, y), & \text{on the diagonal.} \end{cases}$$

We can also introduce the notion of Schrödinger operator. Let  $r: V \rightarrow \mathbb{R}$  be some function on  $V$ , which plays the role of some potential. Define  $\mathcal{A} = \mathcal{L} + r$ . Then, for all  $f \in L^2(V)$ , and all  $x \in V$ ,

$$\mathcal{A}f(x) = \sum_{y \sim x} c(x, y)(f(x) - f(y)) + r(x)f(x).$$

$\mathcal{A}$  is called a *Schrödinger operator*, or a generalised Laplacian, on  $\Gamma$ . As for the Laplacian,  $\mathcal{A}$  can be seen as a  $N \times N$  symmetric matrix, with non-positive off-diagonal elements.

In the sequel, we will note  $\lambda_i$ ,  $i = 1, \dots, N$ , the (real) eigenvalues of  $\mathcal{A}$  satisfying

$$\lambda_1 \leq \lambda_2 \leq \dots \leq \lambda_N,$$

and such that the eigenspaces are orthogonal with respect to  $\langle \cdot, \cdot \rangle_V$ . It is well known that by the Perron-Frobenius theorem,  $\lambda_1$  is simple and the first eigenvector can be chosen everywhere positive, see [DGLS01]. By orthogonality, any eigenvector associated with an eigenvalue different from  $\lambda_1$  must then change sign on  $V$ .

An edge  $(x, y)$  can be identified with the real interval  $[0, l(x, y)]$ . A function  $u$  defined on  $V$  can then be extended on the edges by linearity. Let us call  $\tilde{u}_{xy}$  this extension on the edge  $(x, y)$ . We have then

$$\tilde{u}_{xy}(t) = \frac{u(y) - u(x)}{l(x, y)}t + u(x), \quad \text{for } t \in [0, l(x, y)].$$

When there is no risk of confusion, we will omit the index  $xy$ .

**Definition 4.2.1.** Let  $u$  be a function on  $V$ . A strong positive (resp. negative) sign graph of  $u$  is a maximal subtree  $S$  of  $\Gamma$  with  $u(x) > 0$  (resp.  $u(x) < 0$ ), for all vertices  $x$  of  $S$ .

Recall the theorem of Davies *et al.* [DGLS01], which is an analogue on graph of the Courant's nodal theorem.

**Theorem 4.2.2.** Let  $\lambda_1, \dots, \lambda_N$  be the ordered eigenvalues of a generalized Laplacian on  $V$ . Suppose  $\lambda_n$  is of multiplicity  $r$ . Then any eigenvector corresponding to  $\lambda_n$  has at most  $n + r - 1$  strong sign graphs.

For our context of Schrödinger operators, we will make the

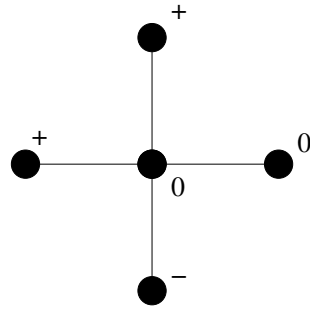


Figure 4.1: The star graph counterexample.

**Assumption A.** For all  $i = 1, \dots, N$ , and any eigenvector  $u_i$  associated with  $\lambda_i$ , we have  $u_i(x) \neq 0$ , for all  $x \in V$ .

By a result of Fiedler [Fie75], this implies that all eigenvalues are simple. The theorem of Davies *et al.* becomes then: any eigenvector associated with  $\lambda_n$  has at most  $n$  strong sign graphs, and Büyükoğlu proves under the same assumption that in fact any eigenvector associated with  $\lambda_n$  has exactly  $n$  strong sign graphs. We make this assumption because there exists some examples of eigenvectors associated with eigenvalues  $\lambda_n$  of multiplicity greater than one, which have more than  $n$  strong sign graphs. For example, this counterexample is taken from [BLS07]. Consider the tree which is a star with four edges. Let the weight  $c$  equal one for all edges, and look at the Laplacian  $\mathcal{L}$ . Its eigenvalues are  $\lambda_1 = 0$ ,  $\lambda_2 = \lambda_3 = \lambda_4 = 1$ , and  $\lambda_5 = 5$ , so  $\lambda_2$  has multiplicity 3. An eigenvector associated with  $\lambda_2$  is  $u_2 = (0, -1, 0, 1, 1)^t$ , hence  $u_2$  has 3 ( $> 2$ ) strong sign graphs, see figure 4.1.

**Definition 4.2.3.** Let  $u$  be a function on  $V$ , and  $\tilde{u}$  its linear extension on edges. A nodal domain of  $\tilde{u}$  is a maximal connected path on which  $\tilde{u}$  does not vanish.

Since a tree is connected, this notion is well defined. The different nodal domains of  $\tilde{u}$  are then separated by the zeros of  $\tilde{u}$ . A nodal domain of  $\tilde{u}$  can also be seen as a subtree of  $\Gamma$  with some incomplete edges.

Let  $G$  be a strong sign graph of  $u$ . Let  $(x, y)$  be an edge with  $x \in G$  and  $y \in V \setminus G$ . Then  $u(x)u(y) < 0$  on  $(x, y)$ , otherwise  $y$  would be in  $G$ . This implies that  $\tilde{u}$  must vanish on the interval  $]0, l(x, y)[$ . Hence,  $G$  defines uniquely a nodal domain  $\tilde{G}$  of  $\tilde{u}$ , because, since  $\tilde{u}$  is linear on any edge, we cannot have two zeros on the same edge, and a nodal domain contains at least one vertex. So, a function  $u$  having  $n$  strong sign graphs is equivalent to  $\tilde{u}$  having  $n$  nodal domains.

### 4.3 Green's formula

Let  $u$  be some function on  $V$ . The set  $\{x \in V \mid u(x) > 0\}$  is a forest, that is, a disjoint union of trees. Let  $G$  be one of this trees. Then  $G$  is a strong positive sign graph of  $u$ , so  $G$  determines a nodal domain  $\tilde{G}$  of  $\tilde{u}$ . Let us introduce some boundary sets:

$$\begin{aligned} \delta(G) &= \{x \in V \setminus G \mid x \sim y, \text{ for some } y \in G\}, \\ \partial(G) &= \{(x, y) \in E \mid x \in G, y \in \delta(G)\}. \end{aligned}$$

Since  $u(x) > 0$  for all  $x \in G$ , we have  $u(y) < 0$  for all  $y \in \delta(G)$ , otherwise  $y$  would be in  $G$ . This implies that  $\tilde{u}_{xy}$  vanishes on  $]0, l(x, y)[$ , where  $(x, y)$  is an edge belonging to  $\partial(G)$ .

Let us call  $t(x, y)$  the point of  $]0, l(x, y)[$  where  $\tilde{u}_{xy}$  vanishes. We have

$$t(x, y) = \frac{l(x, y)u(x)}{u(x) - u(y)}.$$

The boundary of  $\tilde{G}$  (depending on  $u$ ) is then defined by

$$\mathcal{B}(\tilde{G}) = \{t(x, y) \mid x \sim y, x \in G, y \in \delta(G)\}.$$

This boundary set is defined in the same way for  $G$  a strong negative sign graph.

Let  $\nabla$  be the usual gradient on  $\mathbb{R}$ . We have the analogue of the Green's formula,

**Proposition 4.3.1** (Green's formula). *Let  $\mathcal{A} = \mathcal{L} + r$  be a Schrödinger operator. Let  $u, v$  be functions on  $V$ , and  $\tilde{u}, \tilde{v}$  their linear extensions on edges. Let  $G$  be a strong sign graph of  $u$ , and  $\mathcal{B}(\tilde{G})$  the boundary of the corresponding nodal domain of  $\tilde{u}$ . Then, we have,*

$$\sum_{x \in G} \mathcal{A}u(x)v(x) - \sum_{x \in G} u(x)\mathcal{A}v(x) = - \sum_{t \in \mathcal{B}(\tilde{G})} \nabla \tilde{u}(t)\tilde{v}(t).$$

*Proof.* Since,

$$\sum_{x \in G} \mathcal{A}u(x)v(x) - \sum_{x \in G} u(x)\mathcal{A}v(x) = \sum_{x \in G} \mathcal{L}u(x)v(x) - \sum_{x \in G} u(x)\mathcal{L}v(x),$$

we only have to prove the proposition for the Laplacian  $\mathcal{L}$ .

We have,

$$\begin{aligned} \sum_{x \in G} \mathcal{L}u(x)v(x) &= \sum_{x \in G} \sum_{y \in V, y \sim x} c(x, y)(u(x) - u(y))v(x) \\ &= \sum_{x \in G} \sum_{y \in G, y \sim x} c(x, y)(u(x) - u(y))v(x) \\ &\quad + \sum_{x \in G} \sum_{y \in \delta(G), y \sim x} c(x, y)(u(x) - u(y))v(x). \end{aligned}$$

But, since

$$\begin{aligned} \sum_{x \in G} \sum_{y \in G, y \sim x} c(x, y)(u(x) - u(y))(v(x) - v(y)) \\ &= 2 \sum_{x \in G} \sum_{y \in G, y \sim x} c(x, y)(u(x) - u(y))v(x) \\ &= 2 \sum_{x \in G} \sum_{y \in G, y \sim x} c(x, y)(v(x) - v(y))u(x), \end{aligned}$$

we have,

$$\begin{aligned} \sum_{x \in G} \mathcal{L}u(x)v(x) &= \sum_{x \in G} \sum_{y \in G, y \sim x} c(x, y)(v(x) - v(y))u(x) \\ &\quad + \sum_{x \in G} \sum_{y \in \delta(G), y \sim x} c(x, y)(u(x) - u(y))v(x) \\ &= \sum_{x \in G} \mathcal{L}v(x)u(x) - \sum_{x \in G} \sum_{y \in \delta(G), y \sim x} c(x, y)(v(x) - v(y))u(x) \\ &\quad + \sum_{x \in G} \sum_{y \in \delta(G), y \sim x} c(x, y)(u(x) - u(y))v(x). \end{aligned}$$

On the interval  $[0, l(x, y)]$ , we have  $\tilde{v}(t) = \frac{v(y)-v(x)}{l(x,y)}t + v(x)$ , hence

$$\tilde{v}(t(x, y)) = -\frac{v(x) - v(y)}{u(x) - u(y)}u(x) + v(x),$$

for  $t(x, y) = \frac{l(x,y)u(x)}{u(x)-u(y)}$ . Furthermore, since  $\nabla$  is the usual derivate, we have

$$\nabla \tilde{u}(t) = \frac{u(y) - u(x)}{l(x, y)} = -c(x, y)(u(x) - u(y)),$$

for  $t \in [0, l(x, y)]$ . Hence, we have

$$\begin{aligned} & \sum_{t \in \mathcal{B}(\tilde{G})} \nabla \tilde{u}(t) \tilde{v}(t) \\ &= \sum_{x \in G} \sum_{y \in \delta(G), y \sim x} \nabla \tilde{u}(t(x, y)) \tilde{v}(t(x, y)) \\ &= \sum_{x \in G} \sum_{y \in \delta(G), y \sim x} (-1)c(x, y)(u(x) - u(y)) \tilde{v}(t(x, y)) \\ &= \sum_{x \in G} \sum_{y \in \delta(G), y \sim x} \left( c(x, y)(u(x) - u(y)) \frac{v(x) - v(y)}{u(x) - u(y)} u(x) \right. \\ &\quad \left. - c(x, y)(u(x) - u(y))v(x) \right) \\ &= \sum_{x \in G} \sum_{y \in \delta(G), y \sim x} c(x, y)(v(x) - v(y))u(x) \\ &\quad - \sum_{x \in G} \sum_{y \in \delta(G), y \sim x} c(x, y)(u(x) - u(y))v(x), \end{aligned}$$

so the proposition is proved.  $\square$

#### 4.4 Nodal theorem and zeros of eigenvectors

As in the classical result of Courant, we can now prove the nodal theorem and the interlacing property of the zeros of eigenvectors of  $\mathcal{A}$ .

**Theorem 4.4.1.** *Let  $\Gamma$  be a finite tree, and  $\mathcal{A}$  a Schrödinger operator on  $\Gamma$ . Let  $\lambda_n, n = 1, \dots, N$ , be the simple ordered eigenvalues of  $\mathcal{A}$ , and let  $u_n$  be an eigenvector associated with  $\lambda_n$  without vanishing coordinates. Then,  $\lambda_n$  has exactly  $n$  strong sign graphs, and the zeros of the eigenvectors  $\tilde{u}_n$  interlace, in the sense that in any nodal domain of  $\tilde{u}_{n-1}$  there is exactly one zero of  $\tilde{u}_n$ .*

*Proof.* Let  $\lambda$  and  $\mu$  be two eigenvalues of  $\mathcal{A}$  with  $\lambda < \mu$ , and let  $u$  and  $v$  be the associated eigenvectors. Let  $G$  be a strong positive sign graph of  $u$ , and  $\tilde{G}$  be the corresponding nodal domain of  $\tilde{u}$ , with boundary  $\mathcal{B}(\tilde{G})$ . Suppose that  $\tilde{v}$  does not change sign on  $\tilde{G}$ , and say  $\tilde{v} > 0$  on  $\tilde{G}$ . This implies that  $v(x) > 0$ , for all  $x \in G$ . By Green's formula, we have

$$(\lambda - \mu) \sum_{x \in G} u(x)v(x) = - \sum_{t \in \mathcal{B}(\tilde{G})} \nabla \tilde{u}(t) \tilde{v}(t).$$

The left hand side of the above expression is then negative. Since  $\nabla \tilde{u} = c(x, y)(u(y) - u(x)) < 0$  on the edges  $(x, y) \in \partial G$ , and  $\tilde{v} > 0$  on  $\tilde{G}$ , then the right hand side is non-negative. So there is a contradiction, and  $\tilde{v}$  must vanish and change sign on  $\tilde{G}$ . Using the

same argument on all of the sign graphs of  $u$ , we conclude that  $\tilde{v}$  has at least one more nodal domain than  $\tilde{u}$ . By Davies theorem, if all eigenvalues  $\lambda_i$  of  $\mathcal{A}$  are simple, then  $u_n$  has at most  $n$  strong sign graphs, and hence  $\tilde{u}_n$  has at most  $n$  nodal domains. So, we deduce from this by iteration, that  $\tilde{u}_n$  has exactly  $n$  nodal domains, and hence  $u_n$  has exactly  $n$  strong sign graphs.

Since on a tree, there is a unique path connecting any two points of the tree, the different nodal domains of  $\tilde{u}_n$  are separated by a unique zero of  $\tilde{u}_n$ . Since  $\tilde{u}_n$  has exactly  $n$  nodal domains separated by its zeros,  $\tilde{u}_n$  has exactly  $n - 1$  zeros in  $\Gamma$ . Hence, since  $\tilde{u}_n$  must vanish in the interior of every nodal domain of  $\tilde{u}_{n-1}$ , the zeros of the  $(\tilde{u}_n)_{1 \leq n \leq N}$  must interlace in the sense that in any nodal domain of  $\tilde{u}_{n-1}$ , there is exactly one zero of  $\tilde{u}_n$ .  $\square$



# Bibliographie

- [ANvM10] M. Adler, E. Nordenstam, and P. van Moerbeke, *Consecutive minors for Dyson's Brownian motions*, arXiv :1007.0220v1 [math.PR], 2010.
- [AZ06] M. Aigner and G.M. Ziegler, *La fonction cotangente et l'astuce de Herglotz, ch. 20*, Rraisonnements divins, Springer, Paris, 2006.
- [Bai97] Z.D. Bai, *Circular law*, Ann. Probab. **25** (1997), no. 1, 494–529.
- [BBO05] P. Biane, P. Bougerol, and N. O'Connell, *Littelman paths and Brownian paths*, Duke Math. J. **130** (2005), no. 1, 127–167.
- [BG97] G. Ben Arous and A. Guionnet, *Large deviations for Wigner's law and Voiculescu's non-commutative entropy*, Probab. Theory Related Fields **108** (1997), no. 4, 517–542.
- [Bia90] P. Biane, *Marches de Bernoulli quantiques*, Séminaire de Probabilités, XXIV, 1988/89, Lecture Notes in Math., vol. 1426, Springer, Berlin, 1990, pp. 329–344.
- [Bia91a] ———, *Quantum random walk on the dual of  $SU(n)$* , Probab. Theory Related Fields **89** (1991), no. 1, 117–129.
- [Bia91b] ———, *Some properties of quantum Bernoulli random walks*, Quantum probability & related topics, QP-PQ, VI, World Sci. Publ., River Edge, NJ, 1991, pp. 193–203.
- [Bia95] ———, *Permutation model for semi-circular systems and quantum random walks*, Pacific J. Math. **171** (1995), no. 2, 373–387.
- [Bia06] ———, *Le théorème de Pitman, le groupe quantique  $SU_q(2)$ , et une question de P. A. Meyer*, In memoriam Paul-André Meyer : Séminaire de Probabilités XXXIX, Lecture Notes in Math., vol. 1874, Springer, Berlin, 2006, pp. 61–75.
- [Bia08] ———, *Introduction to random walks on noncommutative spaces*, Quantum potential theory, Lecture Notes in Math., vol. 1954, Springer, Berlin, 2008, pp. 61–116.
- [Bia09] ———, *Matrix valued Brownian motion and a paper by Pólya*, Séminaire de probabilités XLII, Lecture Notes in Math., vol. 1979, Springer, Berlin, 2009, pp. 171–185.
- [Biy03] T. Bıyıkođlu, *A discrete nodal domain theorem for trees*, Linear Algebra and its Applications **360** (2003), 197–205.

- [BLS07] T. Bıyikođlu, J. Leydold, and P.F. Stadler, *Laplacian eigenvectors of graphs*, Springer-Verlag Berlin, 2007.
- [BtD95] T. Bröcker and T. tom Dieck, *Representations of compact Lie groups*, Graduate Texts in Mathematics, vol. 98, Springer-Verlag, New York, 1995, Translated from the German manuscript.
- [BZ98] G. Ben Arous and O. Zeitouni, *Large deviations from the circular law*, ESAIM Probab. Statist. **2** (1998), 123–134 (electronic).
- [CDG<sup>+</sup>08] O. Chybiryakov, N. Demni, L. Gallardo, M. Rösler, M. Voit, and M. Yor, *Harmonic & stochastic analysis of Dunkl processes*, Hermann, 2008.
- [CH53] R. Courant and D. Hilbert, *Methods of mathematical physics*, vol. 1, Wiley Classics Edition, 1953.
- [Chy08] O. Chybiryakov, *Skew-product representations of multidimensional Dunkl Markov processes*, Annales de l'Institut Henri Poincaré - Probabilités et Statistiques **44** (2008), 593–611.
- [Def10] M. Defosseux, *Orbit measures, random matrix theory and interlaced determinantal processes*, Ann. Inst. Henri Poincaré Probab. Stat. **46** (2010), no. 1, 209–249.
- [Dei99] P.A. Deift, *Orthogonal polynomials and random matrices : a Riemann-Hilbert approach*, Courant Lecture Notes in Mathematics, vol. 3, New York University Courant Institute of Mathematical Sciences, New York, 1999.
- [DGLS01] J.B. Davies, G.M.L. Gladwell, J. Leydold, and P.F. Stadler, *Discrete nodal domain theorems*, Linear Algebra and its Applications **336** (2001), 51–60.
- [Dix96a] J. Dixmier, *Les algèbres d'opérateurs dans l'espace hilbertien (algèbres de von Neumann)*, Les Grands Classiques Gauthier-Villars. [Gauthier-Villars Great Classics], Éditions Jacques Gabay, Paris, 1996, Reprint of the second (1969) edition.
- [Dix96b] ———, *Les C\*-algèbres et leurs représentations*, Les Grands Classiques Gauthier-Villars. [Gauthier-Villars Great Classics], Éditions Jacques Gabay, Paris, 1996, Reprint of the second (1969) edition.
- [Dun89] C.F. Dunkl, *Differential-difference operators associated to reflection groups*, Trans. Amer. Math. Soc. **311** (1989), no. 1, 167–183.
- [Dyn65] E.B. Dynkin, *Markov processes. Vols. I, II*, Academic Press Inc., Publishers, New York, 1965.
- [EK86] S.N. Ethier and T.G. Kurtz, *Markov Processes. Characterization and Convergence*, Wiley, New York, 1986.
- [Fie75] M. Fiedler, *Eigenvectors of acyclic matrices*, Czechoslovak Mathematical Journal **25** (1975), 607–618.
- [Fri93] J. Friedman, *Some geometric aspects of graphs and their eigenfunctions*, Duke Math. J. **69** (1993), no. 3, 487–525.

- [Gin65] J. Ginibre, *Statistical Ensembles of Complex, Quaternion, and Real Matrices*, Journal of Mathematical Physics **6** (1965), no. 3, 440–449.
- [Gir83] V.L. Girko, *The circle law*, Teor. Veroyatnost. i Mat. Statist. (1983), no. 28, 15–21.
- [GY05] L. Gallardo and M. Yor, *Some new examples of Markov processes which enjoy the time-inversion property*, Probab. Theory Related Fields **132** (2005), no. 1, 150–162.
- [GY06a] ———, *A chaotic representation property of the multidimensional Dunkl processes*, Ann. Probab. **34** (2006), no. 4, 1530–1549.
- [GY06b] ———, *Some remarkable properties of the Dunkl martingales*, In memoriam Paul-André Meyer : Séminaire de Probabilités XXXIX, Lecture Notes in Math., vol. 1874, Springer, Berlin, 2006, pp. 337–356.
- [Hum90] J.E. Humphreys, *Reflection groups and Coxeter groups*, Cambridge Studies in Advanced Mathematics, vol. 29, Cambridge University Press, Cambridge, 1990.
- [KS91] I. Karatzas and S.E. Shreve, *Brownian Motion and Stochastic Calculus*, second ed., Springer-Verlag, New York, 1991.
- [KTT92] W.H. Klink and T. Ton-That, *Invariant theory of the block diagonal subgroups of  $GL(n, \mathbf{C})$  and generalized Casimir operators*, J. Algebra **145** (1992), no. 1, 187–203.
- [Meh04] M.L. Mehta, *Random matrices*, third ed., Pure and Applied Mathematics (Amsterdam), vol. 142, Elsevier/Academic Press, Amsterdam, 2004.
- [Mey67] P-A. Meyer, *Intégrales stochastiques IV*, Séminaire de Probabilités (Univ. Strasbourg, Strasbourg, 1966/67), Vol. I, Springer, Berlin, 1967, pp. 142–162.
- [Mey93] ———, *Quantum probability for probabilists*, Lecture Notes in Mathematics, vol. 1538, Springer-Verlag, Berlin, 1993.
- [MOS66] W. Magnus, F. Oberhettinger, and R.P. Soni, *Formulas and theorems for the special functions of mathematical physics*, Springer-Verlag, New York, 1966.
- [Øks03] B. Øksendal, *Stochastic differential equations*, Universitext, Springer-Verlag, Berlin, 2003, An introduction with applications.
- [RV98] M. Rösler and M. Voit, *Markov processes related with Dunkl operators*, Adv. in Appl. Math. **21** (1998), no. 4, 575–643.
- [RY99] D. Revuz and M. Yor, *Continuous Martingales and Brownian Motion*, Springer, 1999.
- [Sch00] W. Schoutens, *Stochastic Processes and Orthogonal Polynomials*, Springer, 2000.
- [Sch07] B. Schapira, *The Heckman-Opdam Markov processes*, Probab. Theory Related Fields **138** (2007), no. 3–4, 495–519.

- [Sch09] ———, *Bounded harmonic functions for the Heckman-Opdam Laplacian*, Int. Math. Res. Not. IMRN (2009), no. 17, 3149–3159.
- [SV97] E.B. Saff and V. Totik, *Logarithmic Potentials with External Fields*, Springer-Verlag, 1997.
- [Sze75] G. Szegő, *Orthogonal polynomials*, American Mathematical Society, Providence, 1975.
- [Tak03] M. Takesaki, *Theory of operator algebras. I, II, III*, Springer-Verlag, New York, 2002–2003.
- [TV08] T. Tao and V. Vu, *Random matrices : the circular law*, Commun. Contemp. Math. **10** (2008), no. 2, 261–307.
- [VDN92] D.V. Voiculescu, K.J. Dykema, and A. Nica, *Free random variables*, CRM Monograph Series, vol. 1, American Mathematical Society, Providence, RI, 1992, A noncommutative probability approach to free products with applications to random matrices, operator algebras and harmonic analysis on free groups.
- [Wig58] E.P. Wigner, *On the distribution of the roots of certain symmetric matrices*, Ann. of Math. (2) **67** (1958), 325–327.
- [Žel73] D.P. Želobenko, *Compact Lie groups and their representations*, American Mathematical Society, Providence, R.I., 1973, Translated from the Russian by Israel Program for Scientific Translations, Translations of Mathematical Monographs, Vol. 40.
- [Zha97] F. Zhang, *Quaternions and Matrices of Quaternions*, Linear Algebra and its Applications **251** (1997), 21–57.