

GREQAM

Groupement de Recherche en Economie
Quantitative d'Aix-Marseille - UMR-CNRS 6579
Ecole des Hautes études en Sciences Sociales
Universités d'Aix-Marseille II et III

Document de Travail
n°2010-56

Barbut, Levy, Les Marchés Efficaces et Arrow

Alan Kirman

December 2010

DT-GREQAM

Barbut, Levy, Les Marchés Efficaces et Arrow

Alan Kirman
GREQAM, EHESS et Université Paul Cézanne

Abstract

Ce papier, préparé pour un symposium en l'honneur de Marc Barbut, discute des thèmes qui ont lié ses intérêts intellectuels et ceux de son laboratoire le CAMS aux thèmes de l'économie. En particulier il s'agit de l'historique de la notion de marchés efficaces et le refus systématique de la profession économique d'écouter les avertissements de Poincaré, Lévy, Mandelbrot et beaucoup d'autres quant à l'applicabilité de la théorie de Bachelier. Car c'est sur celle la qu'est basée la théorie moderne de la mathématique financière. Un deuxième thème concerne la structure mathématique du théorème d'impossibilité d'Arrow, des travaux de Guilbaud, le premier directeur du CAMS et Monjardet membre du CAMS, ayant largement contribué à notre compréhension de ce théorème.

Introduction

Je ne pourrais pas commencer cette contribution sans dire l'envergure de ma dette envers Marc Barbut. Sans son énergie et sa détermination, l'EHESS à la Vieille Charité à Marseille et le GREQAM en tant qu'équipe CNRS associée à l'EHESS n'auraient jamais existé. Mais l'objectif de cette note n'est pas de louer les capacités organisationnelles et de mener d'hommes de Marc Barbut mais d'exposer deux thèmes où nos chemins intellectuels se sont croisés.

Peut-être le plus naturelle aurait été de commencer avec Pareto et ses contributions. Marc Barbut s'est intéressé aux analyses de Pareto concernant des mesures des inégalités de revenus et j'ai moi-même écrit sur les contributions de ce pionnier de l'économie mathématique. Mais ce sujet est déjà traité dans ce numéro et je me limiterai à deux autres thèmes. Le premier est un exemple du mariage entre les mathématiques d'un côté et une autre discipline, la finance et par conséquent l'économie financière, de l'autre. Je voudrais suggérer que ce mariage tel qu'il fût consacré était un mariage malheureux et qu'une des sources de ce malheur se situe au niveau des distributions de probabilité sur lesquelles Marc Barbut a beaucoup travaillé. Mon exemple précis est celui de « l'hypothèse des marchés efficaces ou efficients », largement utilisé en finance et qui est à la base de la plus grande partie de la théorie financière moderne. Cette hypothèse peut s'énoncer comme suit : « Un marché financier est dit efficient si et seulement si l'ensemble des informations disponibles concernant chaque actif financier coté sur ce marché est immédiatement intégré dans le prix de cet actif. » Cette hypothèse remise en évidence au début des années 60, particulièrement par Eugène Fama, trouve ses origines dans les travaux de Bachelier (1900) et, sous une forme moins précise, dans les travaux de certains de ces prédécesseurs du XIXe siècle.¹ J'ai choisi ce thème car les conséquences réelles de l'utilisation d'une hypothèse mathématique pour

¹ L'oeuvre de Bachelier n'était pas le premier à avancer l'hypothèse des marchés efficaces. Déjà au milieu du dix neuvième siècle Regnault a écrit, « Le cours n'est pas toujours uniquement déterminé par les circonstances présentes ; il comprend encore toutes les espérances légitimes qui peuvent être renfermées dans cette situation » Regnault (1863)

l'activité économique se sont révélées être loin d'anodines. Comme Fama (1991) l'explique, « la littérature concernant les marchés efficients constitue le premier cas pour lequel la recherche académique a affecté les pratiques du monde réel. Avant les travaux sur l'efficacité, la présomption selon laquelle les gestionnaires de portefeuilles avaient accès à une masse d'informations non encore dévoilée était forte. Les recherches sur l'efficacité ont montré qu'en réalité, ce type d'information est rare ». La définition informelle de l'hypothèse des marchés efficaces de Fama mérite d'être donnée ici,

« [...] Sur un marché efficient, les actions conjuguées des nombreux opérateurs doivent amener le prix réel à fluctuer au hasard autour de la valeur intrinsèque. Si les divergences entre les prix réels et les valeurs intrinsèques sont systématiques plutôt que de nature aléatoire, la connaissance de ces divergences doit aider les opérateurs intelligents à mieux prédire le cheminement par lequel les prix réels vont se mouvoir en direction des valeurs intrinsèques. [...] Et bien que l'incertitude concernant les valeurs intrinsèques demeure, les prix réels vont fluctuer aléatoirement autour de celles-ci » (Fama, 1965).

Ce qui explique qu'il est possible d'affecter une distribution de probabilité aux prix mais ne justifie pas le choix d'une distribution particulière, en particulier l'hypothèse de normalité qui est toujours standard aujourd'hui. Qui plus est, Samuelson (1965) est allé plus loin et a montré que les prix de marché ne fluctuent pas autour de leur valeur fondamentale, mais ils y sont toujours égaux. Pour lui les prix des actifs sont toujours des prix d'équilibre. Evidemment ceci mène directement à un paradoxe, car comme remarque Grossman et Stiglitz (1980) :

« If a competitive equilibrium is defined as a situation in which prices are such that all arbitrage profits are eliminated, is it possible that a competitive economy can always be in equilibrium?

Clearly not, for then those who arbitrage make no (private) return from their (privately) costly activity. Hence, the assumption that all markets, including that for information, are always in equilibrium and always perfectly arbitrated is inconsistent when arbitrage is costly.”

Grossman et Stiglitz (1980) ont proposé une solution en disant que les prix ne sont pas toujours en équilibre mais sont cantonnés autour des valeurs des « fondamentaux » par le coût de l'information nécessaire pour faire un arbitrage profitable. Sans être explicite, il semble qu'un consensus se soit développé autour de l'idée que les échanges d'actifs que nous observons constituent les arbitrages qui ramènent les prix à l'équilibre. Évidemment, pour être rigoureux il faudrait démontrer que ce processus est stable autour des valeurs d'équilibre.

Avant d'examiner les origines et les difficultés de l'hypothèse des marchés efficaces il me faut expliquer les conséquences de son adoption. En fait, cette approche a amené les praticiens et les économistes à prôner la non-intervention sur les marchés. Car, si l'on accepte l'hypothèse, les investisseurs institutionnels ne bénéficient d'aucun avantage informationnel particulier par rapport aux petits porteurs, et qui plus est, la détention d'une information privilégiée ne procure aucun avantage pécuniaire à son détenteur. Cela suggère qu'il est souhaitable pour les autorités de ne pas intervenir sur les marchés quand ceux-là sont parfaitement efficaces, c'est-à-dire que les opérations effectuées par les différents intervenants ne nécessitent pas de surveillance particulière. L'argument entendu donc jusqu'aux événements récents était que la théorie des marchés efficients réduisait la tâche des autorités boursières à une surveillance minimale des marchés et permet d'assurer l'ensemble

des intervenants de « l'équité indispensable au bon fonctionnement des marchés ».

En particulier, l'hypothèse des marchés efficaces et les hypothèses sous-jacentes ont été utilisées pour justifier la notion que l'expansion des marchés financiers et les innovations financières basées sur ces hypothèses ont permis la diversification et la diminution des risques. Mais Fama (1965) lui-même a montré que la diversification, sans une hypothèse de normalité que je discuterai plus loin, n'est pas nécessairement justifiée!

Cependant, même des acteurs importants comme Warren Buffet sont restés sceptiques. Celui-ci n'acceptait pas l'idée que les instruments comme les Credit Default Swaps basés sur la même théorie puissent diminuer le risque systémique. Déjà en 2003 il écrivait :

« In our view, however, derivatives are financial weapons of mass destruction, carrying dangers that, while now latent, are potentially lethal. »

Chairman's letter to the shareholders of Berkshire Hathaway Inc. February 2003

Enfin, malgré le fait qu'il est souvent affirmé que Bachelier n'a pas vécu suffisamment de temps pour voir ses idées triompher, il a au moins évité d'entendre Alan Greenspan, ancien président de la Federal Reserve, dire en 2008, en parlant de l'Hypothèse des Marchés Efficaces :

« The whole intellectual edifice collapsed in the summer of last year »

Alan Greenspan, testimony to House of Representatives Committee on Government Oversight and Reform, October 23rd 2008

Maintenant, étant donné le rôle important qu'a joué la théorie des marchés efficaces, il est intéressant de comprendre l'origine et l'évolution de ces notions. Pour cela, je donne l'hypothèse de base qui est que les cours S_t d'une action suivent le processus suivant :

$$dS_t = S_t(\mu dt + \sigma dW_t)$$

C'est à dire qu'il y a une tendance et une variation aléatoires. Cette expression est la version moderne de celle de Bachelier. Tout tourne autour du processus suivi par les termes. L'idée de base de Bachelier était de représenter ces variations des cours par des variables aléatoires identiquement et indépendamment distribuées, de moyenne nulle. Cinq ans avant Einstein, Bachelier introduisit donc la notion de processus brownien dont Norbert Wiener devait donner la formalisation complète en 1923. Une conséquence de cette formalisation est que " [i] l semble que le marché, la collectivité des spéculateurs, à un instant donné, ne peut croire ni en une hausse ni en une baisse du marché, puisque, pour chaque prix coté, il y aura autant d'acheteurs que de vendeurs." Bachelier (1900 introduction).

Bachelier introduisait ainsi l'hypothèse que les cours boursiers suivent une marche aléatoire, i.e. l'hypothèse que les évolutions futures ne peuvent être prédites sur la base des actions passées. Dans ce cadre, Bachelier détermina donc l'équilibre en imposant la nullité de "l'espérance mathématique du spéculateur".² Puis il a développé les implications de sa

² Evidemment cette définition n'est pas complète parce qu'on doit spécifier par quoi l'espérance est conditionnée. Plus récemment des définitions différentes de l'hypothèse des marchés efficaces ont été données conditionnant l'espérance sur l'ensemble des informations disponibles au temps t .

modélisation sur la volatilité des marchés financiers et sur l'évaluation des options. Longtemps avant Black-Scholes Bachelier a proposé un modèle d'évaluation des options qu'il testa lui-même empiriquement sur les options portant sur les bonds d'Etat de la période 1894-98.

Il y avait alors, à la base de son modèle, deux hypothèses fondamentales sur le processus qui gouverne les W_t . L'hypothèse de la nullité de l'espérance et l'hypothèse d'une distribution Gaussienne. Bachelier a justifié celle-là en utilisant un raisonnement à la limite, et en prenant un processus continu, utilisant pour cela le théorème de la limite centrale pour la somme des variables aléatoires. Poincaré accepta cette justification, mais Lévy considéra que Bachelier avait fait une erreur et donna par conséquent un avis défavorable à la candidature de Bachelier à un poste de professeur à Dijon. Bachelier n'avait pas expliqué comment il avait pris la limite mais une fois ceci rendu explicite, Lévy s'excusa. Mais il faut aussi remarquer que Lévy n'a pas apprécié le thème de recherche de Bachelier et a écrit sur sa copie du livre de celui-ci, « trop sur la bourse ». ³

Si on en vient à regarder l'évolution du prix des actifs sur les marchés financiers, il y a une masse d'évidences qui montre que les changements du prix des actifs financiers n'ont pas une distribution normale. Fama (1965) lui même avait remarqué que l'on observe trop fréquemment des événements qui seraient de six à sept déviations standard de la moyenne si la distribution des changements du prix des actifs était réellement Gaussienne, et cette critique a donné lieu à une littérature abondante sur le fait que cette distribution a des queues épaisses, (voir Mandelbrot (2009) qui met aussi en cause l'hypothèse de la continuité du processus des changements des prix).

Mais Markowitz a développé sa théorie du portefeuille optimal sur la base de la même hypothèse. Le même problème existe pour Black-Scholes. Il est légitime de se demander pourquoi les économistes et les théoriciens de la finance ont ils persisté avec l'hypothèse Gaussien ? La réponse est claire, pour des raisons techniques. Si nous abandonnons l'hypothèse Gaussienne nous ne pouvons plus faire appel au théorème de limite centrale et nous perdons la variance finie (voir la discussion en Barbut 2000).

Mais l'approche qui consiste à travailler avec des hypothèses qui ne semblent pas être vérifiées empiriquement est peu scientifique. Des hypothèses alternatives ont été suggérées. Par exemple, il va de soi qu'un modèle basé sur d'autres processus de Lévy permettrait une meilleure adéquation aux données observées qu'un modèle basé sur un mouvement Brownien. Mais le modèle sera ensuite utilisé par les intervenants pour déterminer les couvertures de produits dérivés. Dans un modèle où le sous-jacent suit une diffusion markovienne, le calcul n'est pas compliqué mais comme Black a observé, l'information n'arrive pas de façon continue mais de façon brusque, entraînant des sauts dans les variations des prix et des distributions non-gaussiennes. Mais dans ce type de marché, notamment dans les modèles avec sauts, le problème de la couverture dynamique est loin d'être résolu. Les travaux académiques sont très nombreux dans ce domaine, mais considérés comme difficilement implémentables sur les marchés. En conséquence, l'approche standard a été appliquée sans vérifier si l'erreur résiduelle était acceptable.

³ Il a sans doute été persuadé de l'intérêt de l'œuvre de Bachelier quand il a vu que Kolmogorov s'y est intéressé, (voir Kolmogorov (1931).

Mais d'où viennent les problèmes de base de l'hypothèse des marchés efficients ? La réponse était donnée par Poincaré dans son rapport sur la thèse de Bachelier où il dit,

« Quand des hommes sont rapprochés, ils ne se décident plus au hasard et indépendamment les uns des autres ; ils réagissent les uns sur les autres. Des causes multiples entrent en action, et elles troublent les hommes, les entraînent à droite et à gauche, mais il y a une chose qu'elles ne peuvent détruire, ce sont leurs habitudes de moutons de Panurge. Et c'est cela qui se conserve »

Henri Poincaré cité en Courtault et al. (2002).

En d'autres termes les agents sur un marché ont tendance à regarder les actions des autres et à être influencés par celles-ci. Rien d'irrationnel dans cette influence, car si quelqu'un prend une décision et agit dans un monde rationnel, il le fait pour une bonne raison et un autre individu peut rationnellement essayer d'en inférer de l'information. Cependant, ceci veut dire que les éléments aléatoires dans l'équation du prix de l'actif ne peuvent pas être considérés comme indépendants.

C'est notamment ce que présageait Keynes (1912) : « Il est plus important de connaître les anticipations à court terme des agents que de déterminer parmi les futurs à long terme envisageables, celui qui se réalisera. »

Il faut aussi remarquer qu'il est faux de dire que les économistes ne s'intéressaient pas aux travaux de Bachelier avant les années 50. La citation de Keynes, par exemple, vient d'un rapport détaillé sur le livre de Bachelier dans le *Journal of the Royal Statistical Society*. Keynes partageait les réserves de Poincaré et n'était pas convaincu par l'utilité pratique de la théorie de Bachelier, ainsi a-t-il dit :

« M.Bachelier's volume is large and makes large claims... On what he has accomplished it is not very easy to pass judgement. The author is evidently of much ability and perseverance, and of great mathematical ingenuity ; and a good many of his results are undoubtedly novel. Yet, on the whole, I am inclined to doubt their value, and, in some important cases, their validity. His artificial hypotheses certainly make these results out of touch to a quite extraordinary degree with most important problems, and they can be capable of few applications. I do not make this judgement with complete confidence, for the book shows qualities of no negligible order », *Keynes (1912) p.57*

Encore une fois pour Keynes l'hypothèse de l'indépendance des mouvements des prix n'était pas acceptable. Il suffit, pour comprendre ces réserves, de considérer un exemple simple, même simpliste, où les individus sont rationnels mais arrivent à un résultat inefficace grâce à leur interaction et au fait qu'ils infèrent de l'information des actions des autres. Des individus veulent choisir "le meilleur" de deux restaurants A et B. Ils ont deux signaux quant à la qualité de deux restaurants A et B. Chaque individu reçoit deux signaux, un privé et un public. Le signal privé est 90% fiable et le signal public est 55% fiable. Supposons que A est "objectivement meilleur". A 90% les signaux privés disent que A est meilleur mais supposons que le signal public annonce que B est meilleur. Si cette information était entre les mains de tout le monde il n'y aurait aucun problème. Tous les individus choisiraient le restaurant A. Néanmoins, tout le monde peut se trouver en B. L'essence du problème est que les individus observent les choix des autres et tirent des conclusions quant à l'information dont ils

disposent. Imaginons qu'un des individus qui a reçu le signal que le restaurant B est meilleur arrive le premier. Il a deux signaux cohérents et choisit le restaurant B. Si l'individu qui suit a le même signal privé il va lui aussi aller directement au restaurant B. Mais si quelqu'un qui a reçu le signal A arrive en deuxième, il réfléchit, voit le premier individu dans le restaurant B et conclut que cet individu a du recevoir le signal privé B. Le signal privé de cet individu ayant la même valeur que le sien, il ne lui reste que le signal public, qui recommande B. Cet individu va alors se diriger vers restaurant B. La même chose s'applique au troisième individu et ainsi de suite. L'influence collective élimine l'information privée, ce qui constitue une contradiction avec "l'hypothèse des marchés efficaces".

Que s'est-il passé? Une information privée devient publique car l'individu qui possède cette information agit en conséquence et son action est visible aux autres. Mais si l'individu décide que ce qu'il a obtenu comme information en regardant les autres est plus important que son information privée, il agirait de telle manière que cela ne devient jamais connaissance commune. Ce raisonnement n'implique pas qu'il faille supposer que les agents économiques sont irrationnels. Dans cet exemple l'information concerne la qualité des deux restaurants mais sur les marchés l'information concerne les prix à l'avenir et ces prix sont déterminés par les anticipations de tous les agents. Les actions des agents sont conditionnées par leurs anticipations. Mais leurs anticipations sont influencées par celles des autres.

On retrouve ici l'argument de Poincaré, les individus ne suivent pas leur propres informations qui arrivent de manière aléatoire, mais considèrent les actions des autres et agissent en fonction de celles-ci. L'hypothèse de mouvements de prix indépendants et distribués de façon Gaussienne s'en trouve invalidée. Mais comme je l'ai expliqué, les principaux travaux en mathématique financière et en particulier dans ses applications empiriques, ont maintenu l'hypothèse des marchés efficaces. Par conséquent, à la fin d'un long chemin, nous sommes face aux mêmes difficultés qu'une série de mathématiciens comme Poincaré, Kolmogorov, Levy, et Mandelbrot ont soulevées depuis plus d'un siècle. Le fait que le processus empirique des prix ne corresponde pas à la théorie a été considéré comme peu commode, mais parce que la reformulation de cette théorie avec des hypothèses plus réalistes n'aurait pas permis d'utiliser des formules simple comme Black Scholes pour le prix des options, nous avons préféré poursuivre sur le même chemin, malgré les avertissements de mathématiciens et d'économistes distingués. Le développement d'une théorie avec des bases aussi douteuses n'était pas, en soi, un problème mais c'est l'application de cette théorie qui a généré des conséquences catastrophiques.

Le théorème d'Arrow

Mon deuxième exemple concerne le fameux Théorème d'Impossibilité d'Arrow, (Arrow (1951)). Il s'agit du problème posé par l'agrégation des préférences d'un groupe d'individus sur un ensemble donné d'alternatives et qui est, par conséquent, dans la droite ligne des œuvres de Condorcet et de Bentham. Malgré le choix de la terminologie en anglais « social choice theory » il s'agit plutôt de « social preferences ». La question se pose de la façon suivante : est-il possible de trouver une application des préférences des individus dans un groupe vers les préférences sociales, telles que certains axiomes sont satisfaits. Certains des axiomes sont tout à fait naturels, mais il y a au moins un qui a été contesté. L'idée est relativement simple, y'a-t-il une règle qui permet d'associer aux préférences des individus des préférences pour la société, qui garantit une certaine cohérence entre les préférences de la société ou groupe et celle des individus, et qui garantit aussi que ces préférences sociales satisfont les mêmes conditions que celles qui sont imposées sur les préférences des individus.

Par exemple, Condorcet a analysé la règle de la majorité simple, c'est à dire, si la majorité des individus préfèrent l'alternative x à alternative y alors la société doit préférer x à y pour les systèmes de vote. Il a démontré que, pour certaines configurations des préférences des votants, cette règle peut donner lieu à l'intransitivité des préférences sociales. Ceci est connu comme le paradoxe de Condorcet et le résultat d'Arrow est aussi paradoxal, car il montre que le seul système d'agrégation qui respecte les conditions qu'il impose est celui qui consiste à choisir un individu et à utiliser ses préférences comme préférences sociales, d'où le terme dictateur. Un peu plus formellement :

Théorème d'Arrow (1951)

Pour un ensemble X contenant au moins trois options et deux individus, il n'existe pas de fonction des préférences des individus \succ_a aux préférences sociales \succ_s satisfaisant les propriétés suivantes :

1. Unanimité $x \succ_a y \forall a \Rightarrow x \succ_s y$
2. Transitivité $x \succ_s y \quad y \succ_s z \Rightarrow x \succ_s z$
3. Indépendance par rapport aux alternatives non pertinentes : Si, dans deux « situations », les préférences entre x et y sont les mêmes pour tout a alors les préférences sociales entre x et y sont les mêmes dans les deux situations.
4. Absence de dictateur : Il n'existe pas un agent a tel que : $x \succ_a y \Rightarrow x \succ_s y \forall x, y$

Ce théorème est un des résultats les plus connus en économie, mais les démonstrations initialement données n'étaient pas pleinement satisfaisantes. Avec Dieter Sondermann, nous avons utilisé la structure mathématique des groupes décisifs dans le contexte donné par Arrow afin de donner une démonstration simple de ce fameux théorème.

Pour expliquer cela il faut donner deux définitions. D'abord celle d'un groupe décisif.

On appelle un groupe C *décisif*, si quand $x \succ_a y \forall a \in C \Rightarrow x \succ_s y \forall x, y$ c'est à dire quand tout les membres d'un tel groupe préfère x à y alors la société préfère x à y .

Puis nous devons définir un ultrafiltre.

Étant donné un ensemble X , un *ultrafiltre* sur X est un ensemble U formé de sous-ensembles d' X tel que

1. L'ensemble vide n'est pas un élément d' U
2. Si A et B sont des sous-ensembles d' X , A est un sous-ensemble de B , et A est un élément d' U , alors B est aussi un élément de U .
3. Si A et B sont des éléments d' U , alors l'intersection de A et B l'est également.
4. Si A est un sous-ensemble d' X , alors A ou son complémentaire $X \setminus A$ est un élément de U .

Théorème (Kirman et Sondermann (1973)) Les groupes décisifs forment un ultrafiltre.

Une fois énoncée, l'idée est très claire. Les seuls ultrafiltres sur un ensemble fini X sont ceux qui consistent en tous les sous ensembles d' X contenant un élément a . Alors il y a autant

d'ultrafiltres que d'éléments de X . Mais chaque ultrafiltre U_a désigne un dictateur car l'individu a est lui-même décisif. Ceci explique aussi pourquoi le théorème d'Arrow ne s'applique pas aux ensembles infinis, comme Fishburn (1970) l'a observé, car il y a des *ultrafiltres libres* sur de tels ensembles.

Pourquoi ceci a-t-il un intérêt dans le contexte de cette contribution ? A l'époque un certain nombre de personnes se ont intéressées à ce problème, mais nous avons pensé que nous étions les premiers à apercevoir la structure mathématique du théorème d'Arrow. Nous avons découvert plus tard la formulation du problème, sans démonstration explicite, dans ces termes par Bernard Monjardet, membre du CAMS, le groupe de recherche de Marc Barbut. Notre seul mérite était donc d'en avoir donné la démonstration. Nous étions convaincus de pouvoir attribuer à Monjardet le mérite d'avoir perçu la structure du problème. Mais après ma présentation au colloque en honneur de Marc Barbut, Bernard Monjardet m'a expliqué que, nous étions précédés par Guilbaud. Monjardet (2003) a trouvé chez Guilbaud un théorème et sa démonstration relevant du choix social arrowien. Et comme l'observent Mongin et Dietrich (2010) « ... on peut apercevoir chez Guilbaud le premier usage démonstratif des filtres et des ultrafiltres, dont les notions venaient d'entrer dans les mathématiques de l'époque. » Ainsi nos chemins se croisent encore, Guilbaud étant le premier directeur de ce qui est devenu le CAMS et c'est Marc Barbut qui lui a succédé. Nous devons donc nous contenter du fait que notre démonstration était suffisamment simple pour que, comme le remarquent Mongin et Dietrich (2010), « depuis Kirman et Sondermann (1972), la théorie du choix social et, désormais, celle de l'agrégation logique, emprunte couramment ce procédé ». Mais la perception de la structure mathématique de ce problème est née au CAMS.

J'espère avoir montré, avec ces deux petits exemples, que j'ai partagé avec Marc Barbut et son groupe de recherche quelques bouts de chemins intellectuels et que, pour moi au moins, cette expérience fut fort enrichissante.

Références

Arrow, K.J. (1951), *Social Choice and Individual Values*, New York, Cowles Foundation and Wiley

Barbut M, (1999), *Pareto et la Statistique. L'homme extrême de Pareto : sa postérité, son universalité* en Alban Bouvier ed, *Pareto aujourd'hui*, Presses Universitaires de France, Paris

Courtault J-M, Y Kabanov, B Bru, P Crepel, I Lebon et A Le Marchand, (2002), « Louis Bachelier on the Centenary of Théorie de la Spéculation », en *Louis Bachelier : Aux Origines de la Finance Mathématique*, eds, J.M Courtault et Y Kabanov, Presses Universitaires Franc-Comtoises, Paris.

El Karaoui Nicole et Monique Jeanblanc « Les Mathématiques financières et la crise financière » (2008) 1^{er} Novembre

Fama, E.F. (1965). « The Behavior of Stock Market Prices », *Journal of Business*, Vol. 38, No. 1, pp. 31-105.

Fishburn P (1970) « Arrow's impossibility theorem: Concise proof and infinite voters »
Journal of Economic Theory Vol. 2, pp. 103-106

Guilbaud, G.T. (1952), « Les théories de l'intérêt général et le problème logique de l'agrégation », *Economie appliquée*, 5, 501-551.

Jensen, M.C. (1978). « Some Anomalous Evidence Regarding Market Efficiency», *Journal of Financial Economics*, Vol. 6, pp. 95-101.

Keynes J.M. (1912), « Review of Louis Bachelier's Calcul des Probabilités », *Review of the Royal Statistical Society*, Décembre, réédité en *Collected Articles of John Maynard Keynes*, Macmillan and Cambridge University Press, 1983

Kirman A and D. Sondermann (1972) "Arrow's theorem many agents and invisible dictators", *Journal of Economic Theory*, no. 5 (3), pp. 308-35

Kolmogorov A.N. (1931), « Über die analitschen Methoden in der Wahrscheinlichkeitsrechnung » *Math. Annalen* vol 104 pp. 415-458

Monjardet, B. (2003), De Condorcet à Arrow via Guilbaud, Nakamura et les "jeux simples", *Mathématiques et sciences humaines / Mathematics and Social Sciences*, n° 163, 5-32.

Mongin P et F Dietrich (2010) "Un bilan interprétatif de la théorie de l'agrégation logique", *Cahier de Recherche du Groupe HEC*, n° 936

Regnault J. (1863) *Calcul des Chances et Philosophie de la Bourse*, Paris Mallet Bachelier et Castel.