



UNIVERSITÉ DE GRENOBLE

## THESE

pour obtenir le grade de

**DOCTEUR DE L'UNIVERSITE DE GRENOBLE**

Spécialité **MATHEMATIQUES**

Arrêté ministériel : 7 août 2006

Présentée et soutenue publiquement par :

**ABDALLAH HIBA**

Le 4 Octobre 2010

# PROCESSUS DE DIFFUSION SUR UN FLOT DE VARIÉTÉS RIEMANNIENNES

Thèse dirigée par **BESSON GÉRARD**

## JURY

Pierre BÉRARD	Professeur, Université Joseph Fourier	Président
Gérard BESSON	CNRS, Institut Fourier, Grenoble	Directeur
Ahmad EL SOUFI	Professeur, Université de Tours	Rapporteur
Alessandro SAVO	Professeur, Università di Roma, Rome, Italie	Rapporteur
Ali FARDOUN	Professeur, Université de Brest	Examineur



# Remerciements

Le moment le plus beau pendant ces quatre ans, c'est celui-ci : le moment où j'écris mes remerciements, et comme il m'est impossible de remercier toutes les personnes à qui je suis redevable, j'exprime ma gratitude et mes excuses aux personnes concernées.

Tout d'abord, je remercie Gérard Besson d'avoir cru en moi, et de m'avoir fourni l'occasion de faire mon doctorat. Dès le départ, il m'a aidée à préciser ma pensée, et à affecter mon écriture.

Je remercie Ahmad El Soufi et Alessandro Savo pour avoir accepté d'être rapporteurs de mon travail, Ali Fardoun pour être mon examinateur, et tous les trois pour avoir lu une première version de ce manuscrit et de m'avoir apporté des précisions.

Si j'ai pu réaliser ma thèse, c'est surtout grâce à Nazih Mokkaddem qui a semé en moi, quand j'étais en maîtrise à l'université Libanaise, l'amour de la recherche.

Depuis quatre ans, Mustafa Jazar et Charles Tabet étaient comme des pères intellectuels pour nous les thésards Libanais, et ils m'ont apporté dès le début les aides et le soutien, à la fois matériels et psychologiques, et à chacune de nos rencontres, nos discussions me font avancer.

J'ai eu la chance de travailler avec Pierre Bérard que je remercie pour son professionnalisme et son attention sincère. Toute ma reconnaissance à Sylvain Gallot pour son aide inestimable. Olivier Lablée a relu mon manuscrit de très près et formulé des commentaires pertinents.

Quant à l'environnement de travail, je remercie "TOUS" les collègues, doctorants, et professeurs de l'institut fourier pour leur accueil et leurs aide pertinente. Je remercie Jeff pour m'avoir supporté avec lui dans le même bureau trois ans, Alessandro, Sylvain, Vincent, Aline, Ximena, Alvaro, Hernan, Jean, et mêmes des anciens thésards comme Samuel, Nicolas et Joanna qui m'a spécialement aidée pour venir et m'inscrire à grenoble, et beaucoup d'autres. Je ne vais jamais oublier la gentillesse des membres de l'administration : Gaby, Marie-Hélène, Géraldine, Martine, Brigitte, Corinne, Chantal, Hervé, Simone, Robert, Françoise à qui j'ai donné un travail immense ces derniers temps ...

Merci aux personnels de la bibliothèque qui ne préservent ni temps, ni investissement pour nous fournir tout ce dont on a besoin comme livres et articles : Francesca, Marie-Noëlle, Boucif, et Ariane....

Il n'y a pas de mots pour exprimer ma gratitude envers mes soeurs Zeina et Mariam qui étaient toujours de mon côté, mes frères Walid et Alaa, et envers mes amies : Nala, Hanan, Souhila... À João, je dis : qu'aurais-je fait sans toi, Djondjin le maluco ?

Cette thèse est dédiée à Maman et Papa, à qui je dois tout ; ils étaient toujours là pour moi, et pour me montrer ce qui compte vraiment dans cette vie.

Mais avant tout : MERCI MON GRAND DIEU...

HIBA...



# Table des matières

<b>Preface (English version)</b>	<b>1</b>
<b>Préface</b>	<b>9</b>
<b>1 Préliminaires de géométrie riemannienne</b>	<b>19</b>
1.1 Eléments de théorie spectrale . . . . .	19
1.1.1 Opérateur de Laplace-Beltrami . . . . .	19
1.1.2 Le spectre, et les fonction propres du laplacien . . . . .	21
1.1.3 L'équation de la chaleur . . . . .	23
1.1.4 Le noyau de la chaleur . . . . .	24
1.1.5 La relation entre le noyau de la chaleur et les valeurs/fonctions propres	26
1.2 Construction du noyau de la chaleur sur une variété riemannienne compacte, et application à la géométrie . . . . .	27
1.2.1 Le paramétrix du noyau de la chaleur . . . . .	28
1.2.2 Construction du noyau de la chaleur. . . . .	30
1.2.3 Application à la géométrie. . . . .	31
1.2.4 Formule asymptotique du noyau de la chaleur hors de la diagonale .	32
1.3 Lemme de Moser et applications . . . . .	33
<b>2 Plongements des variétés riemanniennes à l'aide de leur propriétés de diffusion</b>	<b>35</b>
2.1 Plongements par les fonctions propres : motivation . . . . .	36
2.2 Quelques plongements de variétés riemanniennes à l'aide des fonctions propres du laplacien . . . . .	37
2.2.1 Cas d'une variété symétrique compacte de rang 1 . . . . .	37
2.2.2 Cas d'une variété riemannienne compacte . . . . .	40
2.3 Plongement et distance de diffusion . . . . .	40
2.4 Paramétrisations universelles locales à l'aide du noyau de la chaleur et des fonctions propres . . . . .	44
2.5 Généralisations au laplacien dépendant du temps . . . . .	47
2.5.1 Existence de valeurs et de fonctions propres analytiques du laplacien dépendant du temps . . . . .	47
2.5.2 Plongement d'une famille de variétés Riemanniennes dans un espace Euclidien à l'aide de un nombre fini de fonctions propres. . . . .	48
2.6 Plongement GPS d'une famille de variétés riemanniennes . . . . .	52
2.6.1 Existence d'une base complète de fonction propres du laplacien dé- pendant du temps. . . . .	53
2.6.2 Le plongement GPS ( signature globale du point sur une variété) . .	54

<b>3</b>	<b>La solution fondamentale d'une famille de variétés de volume constant</b>	<b>55</b>
3.1	Le laplacien dépendant du temps . . . . .	57
3.2	Construction du paramétrix de la solution fondamentale de l'équation de la chaleur non linéaire . . . . .	60
3.2.1	Le paramétrix de l'équation de la chaleur non linéaire. . . . .	64
3.2.2	Calcul des deux premiers coefficients du paramétrix de la solution fondamentale. . . . .	66
3.3	Convergence des séries d'intégrales . . . . .	71
3.4	La solution fondamentale de l'équation de chaleur non linéaire . . . . .	74
<b>4</b>	<b>Plongement d'un flot de variétés riemanniennes dans un espace de Hilbert à l'aide de sa solution fondamentale</b>	<b>85</b>
4.1	Le comportement du logarithme de la solution fondamentale pour les temps petits . . . . .	87
4.1.1	Quelques estimations utiles . . . . .	88
4.1.2	Corrélation entre le logarithme de la solution fondamentale et la distance riemannienne . . . . .	91
4.2	Plongement à l'aide du logarithme de la solution fondamentale . . . . .	92
4.3	Plongement à l'aide de la solution fondamentale. . . . .	99
4.4	Métrique image réciproque . . . . .	99
4.5	Reconstruction de la solution fondamentale avec ses coefficients dans la base des fonctions propres de $\Delta_{g(0)}$ . . . . .	105

# Preface (English version)

## Motivation

The heat diffusion characterizes the heat transfer with natural movement. On a homogeneous support  $D$  (a plane, a manifold, ...), we define a second order differential operator called the Laplacian. To this Laplacian, we associate the heat equation which describes the distribution of heat in  $D$  over time.

During the last years, a lot of very important researches has been done about the Laplace-Beltrami operator on a Riemannian manifold. The techniques used in these researches has englobed many fields of mathematics : geometry, in connection with the partial differential equations, dynamic systems and applications, mathematical physics, and topology.. In particular, the definition of this operator on a Riemannian manifold, and the determination of the eigenvalues and eigenfunctions, allow us to uncover geometrical informations about the manifold.

For example, the eigenvalues are the natural frequencies of vibration of the object when it's submitted to small deformations. And determining the spectrum gives the area of the plane, the length of its boundary, and its genus. This leads us to the question asked by Kac in 1966 : Can one hear the shape of a drum? [Kac66]. The answer was "no". In fact, it is now well known that two isometric manifolds are isospectral ( i.e. have the same spectrum), but the reverse is not true in general. In fact, there are some cases where an affirmative answer is obtained. For example, in 1964, J. Milnor [Mil64] showed that there exist 16-dimensional flat tori that are not isometric but have the same spectra. Since, many other examples were found. The latest was C. Gordon, D. Webb, and S. Wolpert in 1992 [GWW92], giving the first example of two isospectral but non-isometric domains in the plane (see fig. 1).

In their recent work in the field of computer science, and applied mathematics, Coifmann and Lafon [CL06], use the eigenfunctions of Markov matrices describing local transitions and random walks, to find new descriptions of data sets (graphs, subsets of  $\mathbb{R}^n$ ). More precisely, they embed the data into a Euclidian space via the "diffusion map". In this space, the data points are reorganised in such a way that the Euclidian distance corresponds to a "diffusion metric", i.e. describes the connectivity rate between two points of the set. Coifmann and Lafon describes these diffusion maps, as precisely the tools that allow us to relate the spectral properties of the diffusion process to the geometry of the data set.

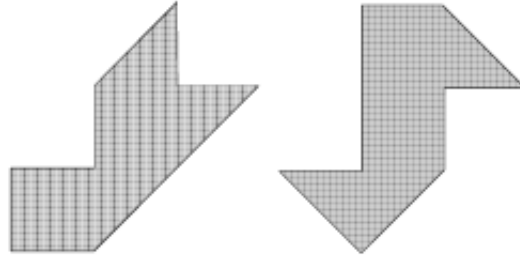


FIG. 1 – Two isospectral domains in the plane but non-isométric

## Relationship between diffusion and geometry

Let  $(M, g)$  be a Riemannian manifold. The diffusion operator related to the Laplacian is the heat operator, and it is an infinitely smoothing operator. It admits a fundamental solution of class  $C^\infty$ , which is called the heat kernel. If we denote this kernel by  $K(t, x, y)$ ,  $t > 0$ ,  $x, y \in M$ , then it verifies the following equation :

$$\left( \Delta_x - \frac{\partial}{\partial t} \right) K(t, x, y) = 0 \quad (0.0.1)$$

with initial data

$$\lim_{t \rightarrow 0} K(t, x, y) dx = \delta_y(x)$$

for each  $y \in M$ , i.e. for any continuous function  $f$  on  $M$ , with compact support, we have

$$\lim_{t \rightarrow 0} \int_M K(t, x, y) f(x) dv(x) = f(y).$$

The diffusion distance on  $(M, g)$ , is defined by

$$D_t^2(x, y) = \int_M (K(t, x, z) - K(t, y, z))^2 dv(z).$$

Although the name "diffusion distance" has been introduced by Coiffman and Lafon, in 2004, in their paper [CL06], this notion was not really new. In fact, in [BBG94], P. Bérard, G. Besson, and S. Gallot, used the heat kernel to embed a class of closed Riemannian manifolds in the same Hilbert space

$$l^2 = \{(a_j)_{j \geq 1}, a_j \in \mathbb{R}, \text{ tels que } \sum_{j \geq 1} |a_j|^2 < +\infty\},$$

and they interpret certain estimates on the heat kernel as giving a precompactness theorem on the class considered. More precisely, let  $(M, g)$  be a compact Riemannian manifold, without boundary,  $\Delta$  the Laplace-Beltrami operator on  $M$ . And let  $\lambda_0 < \lambda_1 \leq \lambda_2 \leq \lambda_3 \dots \nearrow \infty$ , the eigenvalues of  $\Delta$ , and  $a = \{\varphi_i^a\}_{i \geq 0}$  an orthonormal basis of real eigenfunctions of  $\Delta$ , the heat kernel of  $M$ , can be expressed by

$$K(t, x, y) = \sum_{i \in \mathbb{N}} e^{-\lambda_i t} \varphi_i^a(x) \varphi_i^a(y).$$

And we have the following theorem :

**Theorem 0.0.1.** [BBG94] *The map*

$$\begin{aligned} \psi_t^a : M &\rightarrow l^2 \\ x &\mapsto \sqrt{2}(4\pi)^{\frac{n}{4}} t^{(n+2)/4} \{e^{-\lambda_j t/2} \varphi_j^a(x)\}_{j \geq 1} \end{aligned}$$

is an embedding for each  $t > 0$ , and each orthonormal basis  $a$ . Moreover, the pulled-back metric  $(\psi_t^a)^*$  is asymptotic to the metric  $g$  of  $M$  when  $t$  goes to zero. More precisely,

$$(\psi_t^a)^* can = g + \frac{t}{3} \left( \frac{1}{2} Scal_{g,g} - Ric_g \right) + O(t^2), \text{ quand } t \rightarrow 0_+$$

where  $Scal_g$  et  $Ric_g$  are respectively the scalar curvature and the Ricci curvature tensor of the metric  $g$ .

**Remark 0.0.2.** *The constant  $\sqrt{2}(4\pi)^{\frac{n}{4}} t^{(n+2)/4}$  serves for the normalization. In fact, with this normalization, when we compute the pulled-back metric,  $\psi_t^a : M \rightarrow l^2$  is an isometry when  $t$  goes to 0. This embedding can be identified to the application  $\sqrt{2}(4\pi)^{\frac{n}{4}} t^{(n+2)/4} \mathcal{K}_t$ , where  $\mathcal{K}_t$  is defined by*

$$\begin{aligned} \mathcal{K}_t : (M, g) &\rightarrow L^2(M) \\ x &\mapsto K \left( \frac{t}{2}, x, \cdot \right). \end{aligned}$$

Then, the distance induced by the pull-back metric  $\mathcal{K}_t^*$  is the diffusion distance.

## The time-dependent Laplacian

In the remarkable recent papers of G. Perelman, this function plays a very important role. For example, one considers the equation 0.0.1, with a time-dependent Laplacian operator; it is in the case where the metric itself is time-dependent.

**Example 0.0.3.** *If  $S$  is a smooth plane endowed with a metric  $g$ , the Ricci flow is the process that deforms the metric  $g(t)$ , where  $t$  is a time parameter, with its Gaussian curvature  $k(t)$  (induces by  $g(t)$ ). This curvature evolves according to equation*

$$\frac{dg_{ij}(t)}{dt} = -2k(t)g_{ij}(t).$$

In the Ricci flow case, the Gaussian curvature evolves like the heat diffusion process

$$\left( \Delta_{g(t)} - \frac{\partial}{\partial t} \right) u = u^2.$$

We now consider a  $n$ -dimensional Riemannian manifold  $M$ . We endow  $M$  with a family of Riemannian metrics  $g(t)$ ,  $t \in [0, T]$ ,  $T > 0$ , and we search a fundamental solution  $P$  of the "nonlinear heat equation"

$$\Delta_{g(t)} - \frac{\partial}{\partial t}.$$

Then  $P$  is a continuous function on  $\{(t, s) \in \mathbb{R}^2, 0 \leq s < t \leq T\} \times M \times M$ ,  $C^1$  in the first two time variables, and  $C^2$  in the last two time variables. And

$$\begin{cases} \left( \Delta_{g(t)} - \frac{\partial}{\partial t} \right) P(t, s, x, y) = 0 \\ \lim_{t \rightarrow s} P(t, s, x, y) dv_0(x) = \delta_y(x). \end{cases} \quad (0.0.2)$$

In [CCG<sup>+</sup>ar], B. Chow proved that  $P$  exists, and can be written in the following form :

$$P(t, s, x, y) = (4\pi(t-s))^{-\frac{n}{2}} e^{-\frac{r_t^2(x,y)}{4(t-s)}} \sum_{k=0}^N (t-s)^k u_k(t, s, x, y) + O((t-s)^{N-\frac{n}{2}}), \quad (0.0.3)$$

where  $r_t$  is the Riemannian distance with respect to the metric  $g(t)$ ; et  $u_k$  are  $C^\infty$  functions over  $M \times M$ , and depend on the two parameters  $s$  et  $t$ . Whereas, in [Gue02], C. Guenther express it in the form

$$P(t, s, x, y) = (4\pi(t-s))^{-\frac{n}{2}} e^{-\frac{r_s^2(x,y)}{4(t-s)}} \sum_{k=0}^N (t-s)^k u_k(t, x, y) + O((t-s)^{N-\frac{n}{2}}), \quad (0.0.4)$$

where  $r_s$  is the Riemannian distance with respect to the metric  $g(s)$ ; and here, the  $u_k$ 's are  $C^\infty$  function over  $M \times M$ , and depend on the parameter  $t$ . And in both equations 0.0.10, et 0.0.11,  $N > \frac{n}{2} + 1$ ,  $x, y \in M$ , and  $0 \leq s < t \leq T$ .

## General presentation of the problem and the results

A question that G. Besson had ask, and which is related to [BBG94], and to the Laplacian depending on a parameter, is the following :

**Question 1 :** Let  $g(t)$  a Ricci flow solution, and  $P(t; \cdot, \cdot)$  the fundamental solution of the operator,

$$\Delta_{g(t)} - \frac{\partial}{\partial t}.$$

Can we embedd the family of metrics  $g(t)$  in the same Hilbert space by the heat kernel  $P$ , and realize the flow as a deformation of sub-manifolds of this Hilbert space?

This question was the original motivation of my thesis. While I was trying to solve it, I had encounter immediately an obstacle : The construction of the embedding adopted by P. Bérard, G. Besson, and S. Gallot, in [BBG94], can not be adapted to the case where the metric is time-dependent. In fact, in this case, we obtain a family of maps whose the target space depends on  $t$ , i.e. varies as  $t$  varies.

To solve this problem, it was necessary to consider the case where the metrics  $g(t)$  have the same volume, and use the following lemma due to Moser [Mos65] :

**Lemma 0.0.4.** *There exists a  $C^\infty$  family of diffeomorphisms  $\eta_t$ , such that*

$$\eta_t^* dv_{g(t)} = dv_{g(0)}, \text{ for all } t \in [0, T].$$

We denote  $\eta_t^*(g(t))$  by  $h(t)$ , and so, we obtain a family of metrics  $h(t)$ , such that

$$dv_{h(t)} = dv_{h(0)} = dv_{g(0)}, \quad (0.0.5)$$

for all  $t \in [0, T]$ , and the Hilbert space  $L^2(M, v_{h(t)})$  is constant in  $t$ .

And so, the question 1 is reduced to the following question :

**Question 2 :** Let  $(M, h(t))$ ,  $t \in [0, T]$  a family of closed Riemannian manifolds, such that  $dv_{h(t)}$  is constant in  $t \in [0, T]$ , and let  $P$  the fundamental solution of the nonlinear heat equation

$$\Delta_{h(t)} - \frac{\partial}{\partial t}.$$

Then the map

$$\begin{aligned} \mathcal{P}_t : M &\rightarrow L^2(M, v_{h(0)}), t \in [0, T] \\ x &\mapsto P(t, x, \cdot) \end{aligned}$$

is an embedding for  $t$  small enough.

To answer the question 2, I was naturally brought to search a suitable form of the fundamental solution on this family of manifolds. Thanks to the formula 0.0.5, I proved that we can express the kernel  $P$  in the particular, and very useful form. We have our first result, which is the following theorem :

**Théorème 0.0.5.** *The fundamental solution of the operator*

$$\Delta_{h(t)} - \frac{\partial}{\partial t}$$

can be expressed in the form

$$P(t, s, x, y) = (4\pi(t-s))^{-\frac{n}{2}} e^{-\frac{r^2(x,y)}{4(t-s)}} \sum_{k=0}^N (t-s)^k \tilde{u}_k(s, x, y) + O(t^{N-\frac{n}{2}}), \quad (0.0.6)$$

for  $N > \frac{n}{2} + 1$ ,  $x, y \in M$ , and  $0 \leq s < t \leq T$ , where  $r$  is the Riemannian distance of  $(M, g(0))$ , and  $\tilde{u}_k$ ,  $k = 0, \dots, N$  are functions in  $C^\infty([0, T] \times M \times M)$ .

A very important tool in the construction of the fundamental solution in the above form, is the parametrix of the heat operator. Here, the parametrix of the nonlinear heat operator  $\Delta_{h(t)} - \frac{\partial}{\partial t}$  is the initial term in the equation 0.0.6. More precisely, if we denoted it by  $P_N$ , then

$$P_N(t, s, x, y) = (4\pi(t-s))^{-\frac{n}{2}} e^{-\frac{r^2(x,y)}{4(t-s)}} \sum_{k=0}^N (t-s)^k \tilde{u}_k(s, x, y),$$

where the  $\tilde{u}_k$ ,  $k = 0, \dots, N$  are the functions given in the equation 0.0.13.

We prove the estimations of the parametrix  $P_N$ , and of  $(\Delta_{h(t)} - \frac{\partial}{\partial t}) P_N$ , and we have the second result which is the following :

**Théorème 0.0.6.** *for all  $s \in [0, T]$ , we have*

$$\lim_{t \rightarrow s^+} t \log P(t, s, x, y) = -\frac{r^2(x, y)}{4}, \quad \text{uniformly in } x, y \in M. \quad (0.0.7)$$

It is well known that an analogue result has been proven by Varadhan in his two papers [Var67b] and [Var67a], in the case where the metric is fixed. Here, to obtain the formula 0.0.6, we used the estimations of the heat operator, applied to the parametrix and its convolutions. Whereas in [Var67b], the author had used the Laplace transformations, and, in [Var67a], he used a probabilistic method. Note that the method used in this thesis, can be applied to the case of a fixed metric.

In my attempts to answer Question 2, I needed to prove an asymptotic formula for  $P(t, s, x, y)$  when  $t \rightarrow s^+$  and for  $x, y$  close enough. So I conjectured the following :

**Conjecture 0.0.7.** *The fundamental solution of the nonlinear heat equation has the following asymptotic formula :*

$$P(t, s, x, y) = (4\pi(t-s))^{-\frac{n}{2}} e^{-\frac{r^2(x,y)}{4(t-s)}} \left( \sum_{k=0}^N (t-s)^k \tilde{u}_k(s, x, y) + \Upsilon(t, s, x, y) \right)$$

when  $t \rightarrow s^+$ , and for  $x, y$  close enough in  $M$ , and  $N \in \mathbb{N}$ , where

$$\Upsilon(t, s, x, y) = O((t-s)^N),$$

and

$$\left| \frac{\partial}{\partial x^i} \Upsilon(t, s, x, y) \right| = O((t-s)^{N-1}), \text{ pour tout } i = 1, \dots, n,$$

for  $x, y$  close enough in  $M$ , where  $(\mathcal{U}, \{x^i\}_{i=1}^n)$  is a local coordinate system, and  $x \in \mathcal{U}$ .

To prove Conjecture 0.0.7, I studied the proof in the case where  $M$  is endowed with a fixed metric  $g$ . Many authors mention [BGM71], and [Cha84], as the references where the asymptotic formula is proved. But, it is not true : First, in [BGM71], Berger does not try to prove the off-diagonal asymptotic formula. Second, the prove of chavel in [Cha84] is false. Yet, the result is true. In fact, in [Kan77], Y. Kannai proved this formula using the fundamental solution  $w$  of the wave equation  $\Delta - \frac{\partial^2}{\partial t^2}$ , thanks to the "transmutation formula" :

$$K(t, x, y) = \frac{1}{(4\pi t)^{\frac{n}{2}}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{s^2}{4t}} w(s, x, y) ds.$$

But, to apply this method to our case, we need to know the fundamental solution of a semi-linear wave equation. I don't know that at the moment.

The method adopted in this thesis, beginning from the construction of the fundamental solution, up to the proof of the embedding (under condition that conjecture 0.0.7 is true), was motivated by the two papers of [Mor62a], and [Mor62b]. In these two papers, the author considers two differential manifolds of class  $C^s$ ,  $s > 0$ ,  $M$  and  $N$ , with  $N$  connexe. He denoted by  $Hom^s(M, N)$  the set of maps of class  $C^s$ , from  $M$  into  $N$ , and proved the following corollary :

**Corollary 0.0.8.** *([Mor62b], page 3, corollary 2) the set of embeddings of  $M$  into  $N$  is an open set in  $Hom^s(M, N)$  with respect to the topology  $C^s$  ( this set can be obviously empty).*

If we state the corollary above using sequences in  $Hom^s(M, N)$ , we have :

**Corollary 0.0.9.** *Let  $f : M \rightarrow N$  an embedding, and  $\{f_k\}_k$  a sequence in  $Hom^s(M, N)$ , so that  $\{f_k\}_k$  converges uniformly to  $f$  (with respect to the topology  $C^s$ ). Then, there exists  $k_0 \in \mathbb{N}^*$ , such that, for all  $k > k_0$ ,  $f_k$  is an embedding of  $M$  into  $N$ .*

## Layout of the thesis

In this section, we give a detailed outline of the presentation of work in this thesis :

## Chapter 1 : Preliminaries of Riemannian geometry

In this chapter, we give a quick preview and basic results and facts of Riemannian geometry, which are used in the later chapters. We begin section 1.1 with the definitions of the Laplace-Beltrami operator, and the associated heat kernel. These two notions are the basis of our work. We also recall the classic results of the spectral geometry. In section 1.2, we give a quick review of the fundamental solution construction on a closed Riemannian manifold, and the relationship between geometry and spectral properties of Riemannian manifolds. The third section is devoted to Moser's lemma, and its applications which are very important tools in our work.

## Chapter 2 : Embedding Riemannian manifolds by their diffusion properties

In this chapter, we describe some embeddings already constructed and their utilities. In the first section, we provide a justification for why the eigenfunctions of the Laplace-Beltrami operator have properties desirable for embedding. In the second section, we describe embeddings via a finite number of eigenfunctions of the Laplacian. In the third section, we define the diffusion maps and distances. We understand in this section the relationship between the heat kernel and the geometry of the Riemannian manifold. In section 2.4, we see how to construct local charts on the Riemannian manifolds via their eigenfunctions and their heat kernel. Then we endow the manifold  $M$  with a family of Riemannian metrics  $g(t)$ , analytic in  $t$ , and we generalize the stated theorems in the previous sections, when it is possible, to the case where the Laplacian is time dependent.

## Chapter 3 : The fundamental solution on manifolds with time-dependent metrics and constant volume

In this chapter, we discuss the form of the fundamental solutions on manifolds with time-dependent metrics and constant volume form, and we prove theorem 0.0.5. First, we give the form of the time-dependent Laplacian at the neighborhood of  $t = 0$ . Then, we introduce the application

$$S_N(t, s, x, y) = (4\pi(t-s))^{-\frac{n}{2}} e^{-\frac{r^2(x,y)}{4(t-s)}} \sum_{k=0}^N (t-s)^k u_k(s, x, y),$$

where  $u_k$  are  $C^\infty$  functions, defined on

$$U_\rho = \{(x, y) \in M \times M; \quad r(x, y) < \rho\},$$

and  $\rho$  is the injectivity radius of  $M$ , with respect to the metric  $h(0)$ . This is supported by the intuition that the heat kernel has the same behavior as the Euclidian heat kernel. We introduce a cut-off function  $\eta$ , in order to transform  $S_N$  into a  $C^\infty$  function in  $M \times M$ , et we prove that  $P_N = \eta S_N$  is the parametrix of the non linear heat equation. The estimations of the parametrix and its convolutions lead us to prove the theorem 0.0.5.

## Chapter 4 : Embedding a Riemannian manifolds flow into an Hilbert space by its fundamental solution

In this chapter, we answer Question 2. The processus has begun in Chapter 3, searching a suitable form for the fundamental solution, we continue studying sharper estimates of the parametrix  $P_N$ , and its convolutions, to prove Theorem 0.0.6.

Theorem 0.0.6, allow us to prove that the sequence  $\{t \log \mathcal{P}_t\}_t$  converges in  $L^2(M, v_{h(0)})$  to the maps  $\mathcal{R}$ , defined by

$$\begin{aligned} \mathcal{R} : M &\rightarrow L^2(M, v_{h(0)}) \\ x &\mapsto -\frac{r^2(x, \cdot)}{4}. \end{aligned}$$

Conjecture 0.0.7 lead us to define the family of maps

$$\begin{aligned} (t \log \mathcal{P}_t)_{\Omega_p} : \Omega_p &\rightarrow L^2(\Omega_p, v_{h(0)}), t \in [0, T] \\ x &\mapsto t \log P(t, x, \cdot), \end{aligned}$$

and the application

$$\begin{aligned} \mathcal{R}_{\Omega_p} : M &\rightarrow L^2(\Omega_p, v_{h(0)}) \\ x &\mapsto -\frac{r^2(x, \cdot)}{4}, \end{aligned}$$

where  $\Omega_p$  is a neighborhood of  $p \in M$ . We prove that if the conjecture 0.0.7 is true, then for all  $x \in \Omega_p$ ,  $V \in T_x^1 M$ , the sequence of applications  $d_x (t \log \mathcal{P}_t)_{\Omega_p} (V)$  converges in  $L^2(\Omega_p, v_{h(0)})$  to the application  $d_x \mathcal{R}_{\Omega_p} (V)$ . So, we have the necessary tools to answer the question 2. We have the following theorem :

**Theorem 0.0.10.** *If the conjecture 0.0.7 is true, then there exists  $\xi > 0$ , such that the map*

$$\begin{aligned} \mathcal{P}_t : M &\rightarrow L^2(M, v_{h(0)}) \\ x &\mapsto P(t, x, \cdot) \end{aligned}$$

*is an embedding for all  $t < \xi$ .*

We then prove then that the pull-back metric of the map

$$\Psi_t(x) := (4\pi)^{\frac{n}{4}} (2t)^{\frac{n}{4}+1} \mathcal{P}_t(x)$$

is asymptotic to  $h(0)$ , using the metric Theorem 2.2.3.

At the end of this chapter, we prove that the family of Riemannian manifolds  $(M, h(t))$ , and by consequence the family  $(M, g(t))$ , can be embedded in  $l^2$ , via an eigen-functions basis of  $\Delta_{g(0)} = \Delta_{h(0)}$ , at least for small time.

# Préface

## Motivation

La diffusion de la chaleur caractérise la transmission ou le transfert de chaleur avec un mouvement naturel. Sur un support homogène  $D$ , (une surface, ou plus généralement sur une variété ...), on peut en général définir un opérateur différentiel d'ordre 2 appelé le laplacien. A ce laplacien, on associe l'équation de la chaleur ; cette dernière décrit l'évolution de la chaleur sur  $D$ , en fonction du temps  $t$ .

Au cours de ces dernières années, beaucoup de recherches ont été menées sur l'opérateur de Laplace-Beltrami sur une variété riemannienne. Ceci a abouti à d'innombrables résultats et intérêts. Les techniques utilisées dans ces recherches englobent plusieurs champs des mathématiques : la géométrie, en connexion avec les équations aux dérivées partielles, les systèmes dynamiques, la physique mathématique, et la topologie... En particulier, la définition de cet opérateur sur une variété riemannienne, et la détermination de ses valeurs propres et de ses fonctions propres, nous permettent d'avoir des informations géométriques sur la variété en question.

Par exemple, les valeurs propres correspondent aux fréquences propres de vibration d'un objet lorsqu'il est soumis à une petite déformation. La connaissance du spectre (l'ensemble des valeurs propres), donne l'aire d'une surface, la longueur de son bord, et son genre. Ceci nous amène à la question posée par Kac en 1966 : Can one hear the shape of a drum? [Kac66] (peut-on entendre la forme d'un tambour?). La réponse est négative. En fait, il est connu que si deux variétés sont isométriques, elles sont isospectrales (c'est à dire, ont le même spectre). Mais la réciproque n'est pas vraie en général : en 1964, J.Milnor, [Mil64], donne un exemple de variétés isospectrales mais non isométriques, une paire de tores plats de dimension 16. Depuis, d'autres exemples ont été trouvés. Le dernier était de celui de C. Gordon, D. Webb, et S.Wolpert en 1992 [GWW92], donnant le premier exemple de deux domaines plans non isométriques, mais ayant tout de même un spectre commun (voir figure 2).

Dans des travaux récents d'informatique, et des mathématiques appliquées, Coifmann et Lafon dans [CL06], utilisent les fonctions propres de la matrice de Markov définissant une marche aléatoire, pour obtenir des nouvelles descriptions de l'ensemble des données (sous-ensembles de  $\mathbb{R}^n$ , graphes). Plus précisément, ils plongent un ensemble de données dans un espace Euclidien de sorte que la distance Euclidienne entre les images d'une paire de points, décrit le taux de connexion de ces deux points. Ceci définit une distance entre les données : ils donnent à cette distance le nom "distance de diffusion", et aux applications le

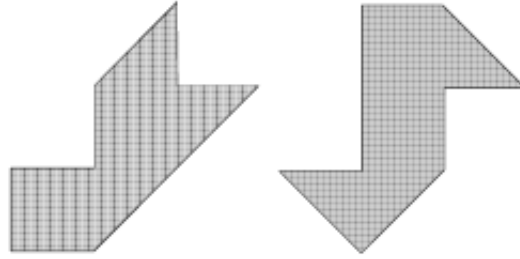


FIG. 2 – Contre-exemple de deux surfaces isospectrales mais non isométriques

nom d'"applications de diffusions". Ils les décrivent comme étant "exactement" les outils qui nous permettent de relier les propriétés spectrales du processus de diffusion et la géométrie de l'ensemble de données.

## Relation entre la diffusion et la géométrie

Soit  $(M, g)$  une variété riemannienne. L'opérateur de diffusion associé au laplacien est l'opérateur de la chaleur qui est infiniment régularisant ; Il possède donc un noyau de classe  $C^\infty$ , le noyau de la chaleur qui est une fonction de trois variables : deux spatiales et une temporelle. Si on appelle  $K(t, x, y)$  ce noyau, pour  $t > 0$  et  $x, y \in M$ , il vérifie l'équation :

$$\left( \Delta_x - \frac{\partial}{\partial t} \right) K(t, x, y) = 0 \quad (0.0.8)$$

avec comme donnée initiale

$$\lim_{t \rightarrow 0} K(t, x, y) dx = \delta_y(x)$$

pour tout  $y \in M$ . Ceci veut dire que, pour toute fonction  $f$  sur  $M$ , on a

$$\lim_{t \rightarrow 0} \int_M K(t, x, y) f(x) dv(x) = f(y).$$

La distance de diffusion sur  $(M, g)$ , est définie par

$$D_t^2(x, y) = \int_M (K(t, x, z) - K(t, y, z))^2 dv(z).$$

Bien que le nom de "distance de diffusion" a été donné par Coifmann et Lafon, en 2004, dans leur article [CL06]<sup>1</sup>, cette notion n'était pas tout à fait nouvelle. En fait, dans un travail datant de 1994, P. Bérard, G. Besson et S. Gallot [BBG94] ont utilisé le noyau de l'opérateur de la chaleur pour plonger toute une classe de variétés riemanniennes dans un même espace de Hilbert

$$l^2 = \{(a_j)_{j \geq 1}, a_j \in \mathbb{R}, \text{ tels que } \sum_{j \geq 1} |a_j|^2 < +\infty\},$$

<sup>1</sup>l'article étant publié en 2006.

et en déduire des théorème de précompacité, pour des variétés  $C^\infty$ . Plus précisément, soit  $(M, g)$  une variété riemannienne compacte, sans bord,  $\Delta$  son opérateur de Laplace-Beltrami. Soient  $\lambda_0 < \lambda_1 \leq \lambda_2 \leq \lambda_3 \dots \nearrow \infty$  les valeurs propres de  $\Delta$ , et  $a = \{\varphi_i^a\}_{i \geq 1}$  une base de fonctions propres (réelles) du laplacien de  $M$ , alors on peut écrire le noyau de la chaleur sous la forme

$$K(t, x, y) = \sum_{i \in \mathbb{N}} e^{-\lambda_i t} \varphi_i^a(x) \varphi_i^a(y).$$

Et on a le théorème suivant

**Théorème 0.0.11.** [BBG94] *L'application*

$$\begin{aligned} \psi_t^a : M &\rightarrow l^2 \\ x &\mapsto \sqrt{2}(4\pi)^{\frac{n}{4}} t^{(n+2)/4} \{e^{-\lambda_j t/2} \varphi_j^a(x)\}_{j \geq 1} \end{aligned}$$

est un plongement pour tout  $t > 0$ , pour toute base orthonormale de fonctions propres  $a$ . De plus, la métrique tirée en arrière  $(\psi_t^a)^*$  est asymptotique à la métrique  $g$  de  $M$ , quand  $t \rightarrow 0$ . Plus précisément

$$(\psi_t^a)^* \text{can} = g + \frac{t}{3} \left( \frac{1}{2} \text{Scal}_g \cdot g - \text{Ric}_g \right) + O(t^2), \text{ quand } t \rightarrow 0_+$$

où  $\text{Scal}_g$  et  $\text{Ric}_g$  sont respectivement la courbure scalaire et le tenseur courbure de Ricci de la métrique  $g$ .

**Remarque 0.0.12.** La constante  $\sqrt{2}(4\pi)^{\frac{n}{4}} t^{(n+2)/4}$  sert à la normalisation, et ceci pour pouvoir calculer la métrique tirée en arrière, et pour avoir l'isométrie quand  $t \rightarrow 0$ . De plus, remarquons que ce plongement peut être identifié à l'application,  $\sqrt{2}(4\pi)^{\frac{n}{4}} t^{(n+2)/4} \mathcal{K}_t$ , où  $\mathcal{K}_t$  est définie par

$$\begin{aligned} \mathcal{K}_t : (M, g) &\rightarrow L^2(M) \\ x &\mapsto K \left( \frac{t}{2}, x, \cdot \right). \end{aligned}$$

Alors, la distance induite par la métrique tirée en arrière  $\mathcal{K}_t^*$  est la distance de diffusion.

## Le laplacien associé à une métrique dépendant de $t$

Dans les remarquables travaux récents de G. Perelman, cette fonction joue un rôle très important. Par exemple, on est amené à considérer l'équation 0.0.8 ci-dessus avec un opérateur laplacien qui dépend du temps; c'est le cas si la métrique elle-même dépend de  $t$ .

**Exemple 0.0.13.** Si  $S$  est une surface  $C^\infty$  munie d'une métrique  $g$ , le flot de Ricci est le processus qui déforme la métrique  $g(t)$ , où  $t$  est le paramètre de temps, par sa courbure Gaussienne  $k(t)$  (induite par  $g(t)$ ). Cette courbure évolue selon l'équation

$$\frac{dg_{ij}(t)}{dt} = -2k(t)g_{ij}(t).$$

Dans le cas du flot de Ricci, l'évolution de la courbure Gaussienne est une solution de l'équation

$$\left( \Delta_{g(t)} - \frac{\partial}{\partial t} \right) k(t) = (k(t))^2.$$

Maintenant, considérons une variété  $M$  de dimension  $n$ . On munit  $M$  d'une famille de métriques riemanniennes  $g(t)$ , où  $t \in [0, T]$ ,  $T > 0$ , et on cherche une solution fondamentale  $P$  de "l'équation de la chaleur non linéaire" :

$$\left( \Delta_{g(t)} - \frac{\partial}{\partial t} \right).$$

Alors  $P$  est une fonction continue sur  $\{(t, s), 0 \leq s < t \leq T\} \times M \times M$ ,  $C^1$  par rapport aux variables de temps  $t, s$ , et est  $C^2$  par rapport aux deux variables spatiales  $x$  et  $y$ . Et

$$\begin{cases} \left( \Delta_{g(t)} - \frac{\partial}{\partial t} \right) P(t, s, x, y) = 0 \\ \lim_{t \rightarrow s} P(t, s, x, y) dv_0(x) = \delta_y(x). \end{cases} \quad (0.0.9)$$

Dans [CCG<sup>+</sup>ar], B. Chow démontre que  $P$  existe et peut être exprimé sous la forme

$$P(t, s, x, y) = (4\pi(t-s))^{-\frac{n}{2}} e^{-\frac{r_t^2(x,y)}{4(t-s)}} \sum_{k=0}^N (t-s)^k u_k(t, s, x, y) + O((t-s)^{N-\frac{n}{2}}), \quad (0.0.10)$$

où  $r_t$  est la distance riemannienne par rapport à la métrique  $g(t)$ ; et  $u_k$  sont des fonctions  $C^\infty$  sur  $M \times M$ , et dépendants des deux paramètres  $s$  et  $t$ . Tandis que, dans [Gue02], C. Guenther l'exprime sous la forme

$$P(t, s, x, y) = (4\pi(t-s))^{-\frac{n}{2}} e^{-\frac{r_s^2(x,y)}{4(t-s)}} \sum_{k=0}^N (t-s)^k u_k(t, x, y) + O((t-s)^{N-\frac{n}{2}}), \quad (0.0.11)$$

où  $r_s$  est la distance riemannienne par rapport à la métrique  $g(s)$ ; et ici, les  $u_k$  sont des fonctions  $C^\infty$  sur  $M \times M$ , et dépendants du paramètre  $t$ . Et dans les deux équations 0.0.10, et 0.0.11,  $N > \frac{n}{2} + 1$ ,  $x, y \in M$ , et  $0 \leq s < t \leq T$ .

## Présentation générale du problème et des résultats

Une question que G. Besson a posé, et liée à [BBG94] et au laplacien dépendant d'un paramètre  $t$ , est la suivante :

**Question 1 :** Soit  $g(t)$  une solution du flot de Ricci et  $P(t; \cdot, \cdot)$  la solution fondamentale de l'opérateur,

$$\left( \Delta_{g(t)} - \frac{\partial}{\partial t} \right).$$

Peut-on plonger la famille de métriques  $g(t)$  dans un même espace de Hilbert en utilisant le noyau  $P$  et ainsi réaliser le flot comme une déformation de sous-variétés d'un espace de Hilbert ?

Cette question a été la motivation de départ de ma thèse. Alors que je cherchais à la résoudre, j'ai rencontré immédiatement un obstacle : la construction du plongement adoptée par P. Bérard, G. Besson, et S. Gallot, citée auparavant, n'est pas toujours adaptée au cas où l'on a une famille de variétés riemanniennes  $(M, g(t))$ ,  $t \in \mathbb{R}$ . En fait, si nous l'appliquons à la situation actuelle, nous obtenons une famille d'applications dont l'ensemble d'arrivée dépend de la métrique  $g(t)$ , donc variable en  $t$ .

Pour y remédier, il est nécessaire de considérer le cas où les métriques  $g(t)$  ont le même volume, et utiliser le lemme suivant dû à Moser [Mos65] :

**Lemme 0.0.14.** *Il existe une famille  $C^\infty$  de difféomorphismes  $\eta_t$ , telle que  $h_t = \eta_t^* g_t$ ,  $h_0 = g_0$ , et  $h_t$  est de forme volume constant, c'est-à-dire*

$$dv(h_t) = dv_{g_0} = dv_0. \quad (0.0.12)$$

On obtient une nouvelle famille de métriques  $h(t)$ , telles que  $dv_{h(t)} = dv_{h(0)}$ , pour tout  $t \in [0, T]$ , et  $L^2(M, v_{h(t)})$  est invariant en  $t$ .

Ainsi, le problème donné dans la question 1, s'est réduit à la question suivante :

**Question 2 :** Soit  $(M, h(t)), t \in [0, T]$  une famille de variétés riemanniennes compactes, telles que  $dv_{h(t)}$  est invariant en  $t \in [0, T]$ , et soit  $P$  la solution fondamentale de l'équation de la chaleur non linéaire

$$\Delta_{h(t)} - \frac{\partial}{\partial t},$$

où  $P(t, x, y) = P(t, 0, x, y)$ . Alors est ce que l'application définie par

$$\begin{aligned} \mathcal{P}_t : M &\rightarrow L^2(M, v_{h(0)}), t \in [0, T] \\ x &\mapsto P(t, x, \cdot) \end{aligned}$$

est un plongement pour  $t$  suffisamment petit ?

Pour répondre à la question 2, j'ai été naturellement amenée à chercher une forme convenable, et plus flexible de la solution fondamentale sur cette famille de variétés. En fait, grâce à l'égalité 0.0.12, on peut exprimer cette solution fondamentale sous une forme particulière et jolie. On a notre premier résultat qui est le suivant :

**Théorème 0.0.15.** *La solution fondamentale de l'opérateur*

$$\left( \Delta_{h(t)} - \frac{\partial}{\partial t} \right)$$

*peut être exprimée sous la forme*

$$P(t, s, x, y) = (4\pi(t-s))^{-\frac{n}{2}} e^{-\frac{r^2(x,y)}{4(t-s)}} \sum_{k=0}^N (t-s)^k \tilde{u}_k(s, x, y) + O(t^{N-\frac{n}{2}}), \quad (0.0.13)$$

*pour  $N > \frac{n}{2} + 1$ ,  $x, y \in M$ , et  $0 \leq s < t \leq T$ ,  $r$  étant la distance riemannienne par rapport à la métrique  $g(0)$ , et  $\tilde{u}_k, k = 0, \dots, N$  sont des fonction  $C^\infty$  sur  $[0, T] \times M \times M$ .*

Un outil important dans la construction de la solution fondamentale sous la forme ci-dessus, et qui est d'une importance primordiale dans notre travail, est le paramétrix de l'opérateur de la chaleur. Ici, le paramétrix de l'opérateur de la chaleur non linéaire  $\Delta_{h(t)} - \frac{\partial}{\partial t}$  est le terme intiale dans l'équation 0.0.13. Plus précisément, si on le note par  $P_N$ , alors

$$P_N(t, s, x, y) = (4\pi(t-s))^{-\frac{n}{2}} e^{-\frac{r^2(x,y)}{4(t-s)}} \sum_{k=0}^N (t-s)^k \tilde{u}_k(s, x, y),$$

où les  $\tilde{u}_k, k = 0, \dots, N$  sont les fonctions présentes dans l'équation 0.0.13.

On interprète les estimations sur le paramétrix  $P_N$ , et celles de  $\left(\Delta_{h(t)} - \frac{\partial}{\partial t}\right) P_N$ , et on a le deuxième résultat suivant :

**Théorème 0.0.16.** *Pour tout  $s \in [0, T]$ , on a*

$$\lim_{t \rightarrow s^+} t \log P(t, s, x, y) = -\frac{r^2(x, y)}{4}, \text{ uniformément en } x, y \in M. \quad (0.0.14)$$

Il est bien connu qu'un résultat analogue a été prouvé par Varadhan dans ses deux articles [Var67b], [Var67a], dans le cas où la métrique riemannienne est fixe. Ici, pour obtenir la formule 4.1.1, on va utiliser les estimations de l'équation de la chaleur non linéaire, appliquée au paramétrix de la solution fondamentale et ses convolutions. Tandis que dans [Var67b], l'auteur a utilisé les transformations de Laplace, et dans [Var67a], il a utilisé une méthode plutôt probabiliste. Notons que la méthode faite dans cette thèse, est également applicable dans le cas où la métrique est fixe.

J'ai eu aussi besoin de la formule asymptotique du noyau de la chaleur quand  $t \rightarrow s^+$ , pour  $x, y$  assez proches dans  $M$ ; alors j'ai conjecturé le suivant :

**Conjecture 0.0.17.** *La solution fondamentale  $P$  de l'équation de la chaleur non linéaire admet la formule asymptotique suivante :*

$$P(t, s, x, y) = (4\pi(t-s))^{-\frac{n}{2}} e^{-\frac{r^2(x,y)}{4(t-s)}} \left( \sum_{k=0}^N (t-s)^k \tilde{u}_k(s, x, y) + \Upsilon(t, s, x, y) \right)$$

quand  $t \rightarrow s^+$ , et pour  $x, y$  assez proches dans  $M$ , et pour tout  $N \in \mathbb{N}$ , où

$$\Upsilon(t, s, x, y) = O((t-s)^N),$$

et

$$\left| \frac{\partial}{\partial x^i} \Upsilon(t, s, x, y) \right| = O((t-s)^{N-1}), \text{ pour tout } i = 1, \dots, n,$$

pour  $x, y$  assez proches dans  $M$ , où  $\{x^i\}_{i=1}^n$  est un système de coordonnées locales autour de  $x$ .

Dans le but de démontrer cette conjecture, j'ai étudié la démonstration du théorème analogue dans le cas où la variété compacte  $M$  est munie d'une métrique fixe. Plusieurs auteurs citent [BGM71], et [Cha84], comme étant les références où l'on a démontré ce résultat analogue. Or ceci est faux : D'abord dans [BGM71], Berger n'essaie même pas de le démontrer, et puis, dans [Cha84], la démonstration est fautive. Ceci ne veut pas dire que ce résultat est faux. En fait, dans [Kan77], Kannai démontre cette formule en utilisant la solution fondamentale  $w$  de l'équation des ondes  $\Delta - \frac{\partial^2}{\partial t^2}$ , grâce à la formule de "transmutation" :

$$K(t, x, y) = \frac{1}{(4\pi t)^{\frac{n}{2}}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{s^2}{4t}} w(s, x, y) ds.$$

Mais, pour l'appliquer à notre cas, on doit savoir la solution fondamentale d'une équation d'onde semi-linéaire et plus compliquée, ce qui était, pour moi, jusqu'à ce moment difficile à faire.

La démarche abordée dans la démonstration, depuis la construction de la solution fondamentale, jusqu'à la démonstration de plongement (sous condition que la conjecture 0.0.17 soit vraie), a été motivée par les deux articles [Mor62a], et [Mor62b]. Dans ces deux articles, l'auteur considère deux variétés  $M$  et  $N$  de classe  $C^s$ , qui sont des réunions dénombrables de compactes, et  $N$  connexe. Il note par  $Hom^s(M, N)$  l'ensemble des applications de classe  $C^s$  de  $M$  dans  $N$ , et il démontre le corollaire suivant :

**Corollaire 0.0.18.** (*[Mor62b], page 3, Corollaire 2*) *L'ensemble des plongements (applications propres et injectives et qui sont des immersions locales) de  $M$  dans  $N$  est un ouvert de  $Hom^s(M, N)$  pour la topologie  $C^s$  (Cet ouvert peut être évidemment vide).*

Si on énonce le corollaire ci-dessus en se servant des suites dans  $Hom^s(M, N)$ , on a

**Corollaire 0.0.19.** *Soit  $f : M \rightarrow N$  un plongement, et  $\{f_k\}_k$  une suite dans  $Hom^s(M, N)$ , telle que  $\{f_k\}_k$  converge uniformément vers  $f$  pour la topologie  $C^s$ . Alors, il existe  $k_0 \in \mathbb{N}^*$ , telle que, pour tout  $k > k_0$ ,  $f_k$  est un plongement de  $M$  dans  $N$ .*

## Plan de la thèse

Voici maintenant un résumé plus détaillé des travaux présentés dans ce mémoire :

### Chapitre 1 : Préliminaires de géométrie riemannienne

L'objectif de ce chapitre est de présenter quelques notions classiques de géométrie riemannienne qui nous serviront pour une meilleure compréhension du contexte de cette thèse. Dans la section 1.1, On rappelle la définition de l'opérateur Laplace-Beltrami, ainsi que celle du noyau de la chaleur qui lui est associé. Ces derniers sont des sujets de base pour ce travail. On rappelle aussi les résultats classiques de géométrie spectrale dont nous aurons besoin par la suite. Dans la section 1.2, on donne une idée sur la construction de la solution fondamentale sur une variété riemannienne compacte, et la liaison entre la géométrie de la variété et ses propriétés spectrales. La troisième section est consacrée au lemme de Moser, et ses applications qui sont indispensables dans notre thèse.

### Chapitre 2 : Plongements des variétés riemanniennes à l'aide de leur propriétés de diffusion

Ce chapitre est consacré à énoncer les plongements déjà disponibles dans la littérature et leurs utilités. Dans la première section de ce chapitre, on explique pourquoi les fonctions propres de l'opérateur de Laplace-Beltrami sont utiles. Dans la deuxième section, on énonce les plongements de variétés riemanniennes à l'aide d'un nombre fini de fonctions propres du laplacien. Dans la troisième section, on définit les plongements et les distances de diffusion : on comprend bien dans cette section la relation entre le noyau de la chaleur et la géométrie de la variété. Dans la section 2.4, on voit comment construire des cartes locales pour une variété riemannienne à l'aide des fonctions propres et du noyau de la chaleur. Dans la suite, on munit la variété  $M$  d'une famille de métriques riemanniennes  $g(t)$ , analytiques en  $t$ , et on généralise les théorèmes énoncés dans les sections précédentes, lorsque c'est possible, au cas où le laplacien dépend du paramètre  $t$ .

### Chapitre 3 : La solution fondamentale d'une famille de variétés de forme volume constante

Notre objectif dans ce chapitre, est d'étudier la solution fondamentale sur une famille de variétés riemanniennes compactes  $(M, h(t))$ ,  $t \in [0, T]$ , et de démontrer le théorème 0.0.15. D'abord, on donne la forme du laplacien dépendant d'un paramètre  $t$  au voisinage de  $t = 0$ . Puis on introduit une application

$$S_N(t, s, x, y) = (4\pi(t-s))^{-\frac{n}{2}} e^{-\frac{r^2(x,y)}{4(t-s)}} \sum_{k=0}^N (t-s)^k u_k(s, x, y),$$

où  $u_k$  sont des fonction  $C^\infty$ , définies uniquement sur

$$U_\rho = \{(x, y) \in M \times M; \quad r(x, y) < \rho\},$$

$\rho$  étant le rayon d'injectivité de la variété  $M$ , par rapport à la métrique  $h(0)$ . Ceci peut être expliqué brutalement par l'intuition que le noyau de la chaleur sur une variété admet un comportement semblable au noyau de la chaleur Euclidien. On introduit une fonction coupure  $\eta$ , dont l'objectif est de transformer  $S_N$  en une fonction  $C^\infty$  sur tout  $M \times M$ , et on démontre que  $P_N = \eta S_N$  est le paramétrix de l'équation de la chaleur non linéaire. On donne la formule exacte de la solution fondamentale en fonction du paramétrix  $P_N$ , et de ses convolutions. Les estimations sur ces derniers nous amènent à démontrer le théorème 0.0.15.

### Chapitre 4 : Plongement d'un flot de variétés riemanniennes dans un espace de Hilbert à l'aide de sa solution fondamentale

L'objectif de ce chapitre est de répondre à la question 2. Le processus ayant commencé dans le chapitre 3, en cherchant une forme convenable de la solution fondamentale  $P$ , on continue à étudier des estimations plus fines du paramétrix  $P_N$ , et de ses convolutions, pour démontrer le théorème 0.0.16.

Le théorème 0.0.16 nous permet de démontrer que la suite d'applications  $\{t \log \mathcal{P}_t\}_t$  converge dans  $L^2(M, v_{h(0)})$  vers l'application  $\mathcal{R}$  définie par

$$\mathcal{R} : M \rightarrow L^2(M, v_{h(0)})$$

$$x \mapsto -\frac{r^2(x, \cdot)}{4}.$$

La conjecture 0.0.17 nous amène à définir la famille d'applications de  $\Omega_p$  dans  $L^2(\Omega_p, v_{h(0)})$ , définies par

$$(t \log \mathcal{P}_t)_{\Omega_p}(x) = t \log P(t, x, \cdot), x \in \Omega_p, t \in [0, T],$$

et

$$\mathcal{R}_{\Omega_p}(x) = -\frac{r^2(x, \cdot)}{4},$$

où  $\Omega_p$  est un voisinage de  $p \in M$ . On démontre que si la conjecture 0.0.17 est vraie, alors pour tout  $x \in \Omega_p$ ,  $V \in T_x^1 M$ , la suite d'applications  $d_x(t \log \mathcal{P}_t)_{\Omega_p}(V)$  converge dans  $L^2(\Omega_p, dv_{h(0)})$  vers  $d_x \mathcal{R}_{\Omega_p}(V)$ . Ainsi, on a les outils nécessaires pour répondre à la question 2. On a le théorème suivant :

**Théorème 0.0.20.** *Si la conjecture 0.0.17 est vraie, alors il existe  $\xi > 0$ , tel que l'application*

$$\begin{aligned} \mathcal{P}_t : M &\rightarrow L^2(M, v_{h(0)}) \\ x &\mapsto P(t, x, \cdot) \end{aligned}$$

*est un plongement pour tout  $t < \xi$ .*

On démontre ensuite que la métrique tirée en arrière de l'application normalisée

$$\Psi_t(x) := (4\pi)^{\frac{n}{4}} (2t)^{\frac{n}{4}+1} \mathcal{P}_t(x)$$

est asymptotique à  $h(0)$ , en utilisant la métrique dans le théorème 0.0.11.

A la fin de ce chapitre, on démontre que la famille  $(M, h(t))$ , et par suite  $(M, g(t))$  (la famille de départ), peuvent être plongées dans  $l^2$ , avec les coefficients de  $P$ , dans la base des fonctions propres de  $\Delta_{g(0)} = \Delta_{h(0)}$  au moins pour les temps petits.



# Chapitre 1

## Préliminaires de géométrie riemannienne

Soit  $(M, g)$  une variété riemannienne de dimension finie  $n$ . Tout au long de notre travail, on suppose que les variétés sont de dimension au moins 2, munies d'une structure différentielle de classe  $C^\infty$ . On suppose aussi qu'elles sont connexes et complètes. Les propriétés différentielles des fonctions et tenseurs sur  $M$  se rapporteront à cette structure. On suppose que notre lecteur connaît les bases de géométrie riemannienne. Pour une présentation de ces notions, on peut se référer à [GHL04].

L'objectif de ce chapitre est de représenter le contexte dans lequel se situe la thèse. On rappelle quelques définitions dont on a besoin dans notre mémoire, et quelques résultats standards de la théorie spectrale et de la géométrie riemannienne. On insiste surtout à la liaison entre la géométrie de la variété, et ses propriétés spectrales.

### 1.1 Éléments de théorie spectrale

#### 1.1.1 Opérateur de Laplace-Beltrami

L'opérateur de Laplace-Beltrami est un opérateur différentiel de second degré, attaché intrinsèquement à  $M$ . On peut lui donner plusieurs définitions équivalentes. On commence avec la plus naturelle :

Comme on peut définir une dérivation seconde intrinsèque sur une variété riemannienne à l'aide de sa structure métrique (ce qui n'est pas le cas pour une variété avec uniquement une structure différentielle), on peut définir, pour toute fonction  $f \in C^2(M)$ , le Hessien de  $f$ , comme étant la forme quadratique bilinéaire symétrique formée par les dérivées secondes de  $f$ . En fait, en utilisant la dérivée covariante  $D$ , le Hessien de  $f$  est défini par

$$\text{Hess}f = Ddf.$$

Pour avoir une fonction numérique de ce Hessien, on a juste besoin de prendre la trace par rapport à la métrique  $g$ .

$$\Delta f = \text{trace}_g \text{Hess}f.$$

Puisque le long des géodésiques, la dérivée covariante seconde coïncide avec la dérivée seconde numérique, on définit le laplacien de  $f$ , en un point  $m$ , comme étant

$$\Delta f = \sum_{i=1}^n \frac{d^2}{dt^2} f(\gamma_i(t))|_{t=0},$$

où  $\gamma_i$  sont les géodésiques en  $m$ , dont les vitesses forment un système de coordonnées orthonormales de  $T_m M$ . En particulier, au centre  $m$  d'un système de coordonnées normales, on a

$$\Delta f = \sum_{i=1}^n \frac{\partial^2}{\partial x_i^2} f(m).$$

Dans un système de coordonnées quelconque, on trouve

$$\Delta f = \frac{1}{\sqrt{\det g_{ij}}} \sum_{i,j=1}^n \frac{\partial}{\partial x^i} \left( \sqrt{\det g_{ij}} g^{ij} \frac{\partial f}{\partial x^j} \right),$$

où  $g^{ij}$  sont les éléments de la matrice inverse à la matrice  $(g_{ij})$ .

Pour une autre expression utile de l'opérateur Laplace-Beltrami, on a besoin des définitions suivantes :

**Définition 1.1.1.** (*Gradient associé à une métrique riemannienne*) Le gradient d'une fonction (disons lisse)  $f$  est l'unique champ de vecteurs, noté  $\nabla f$ , tel que

$$g(X, \nabla f) = df(X)$$

pour tout champ de vecteurs  $X$ . En coordonnées locales,

$$\nabla f = \sum_{i=1}^n \left( \sum_{j=1}^n g^{ij} \frac{\partial f}{\partial x^j} \right) \frac{\partial}{\partial x^i}.$$

**Définition 1.1.2.** (*Divergence d'un champs de vecteurs*) La divergence d'un champs  $X$ , est donnée par

$$\operatorname{div}(X) = g^{ij} \nabla_i X_j.$$

**Définition 1.1.3.** Si  $f$  est une fonction  $C^2$  sur  $M$ . Le laplacien de  $f$  peut être exprimé par

$$\Delta f = \operatorname{div} \nabla f.$$

Notons que pour  $f, h \in C^2(M)$ , on a les propriétés suivantes :

1.  $\Delta(f + h) = \Delta f + \Delta h$ .
2.  $h \operatorname{div}(\nabla f) = h \Delta f + \langle \nabla f, \nabla h \rangle$ .
3.  $\Delta(fh) = h \Delta f + 2 \langle \nabla f, \nabla h \rangle + f \Delta h$ .

Pour faciliter notre tâche dans ce chapitre, ainsi que pour les chapitres suivants, on va citer deux théorèmes liés à l'opérateur de Laplace-Beltrami :

**Théorème 1.1.4.** (*Théorème de Stokes*) Soit  $X$  un champ de vecteur  $C^\infty$  sur  $M$ , et  $\nu$  un vecteur normal unitaire à  $\partial M$ , dirigé vers l'extérieur ( Dans le cas où  $\partial M \neq \emptyset$ ). Alors

$$\int_M \operatorname{div}(X) dv(x) = \int_{\partial M} \langle X, \nu \rangle dA(x)$$

où  $dA$  est la forme volume sur le bord de  $\partial M$ , associée à la métrique induite.

**Théorème 1.1.5.** (*Identités de Green*) Soit  $f, h \in C^\infty(M)$ , alors

1. (*première identité de Green*)

$$\int_M (f(x)\Delta h(x) + \langle \nabla f, \nabla h \rangle) dv(x) = \int_{\partial M} f(x) \frac{\partial h}{\partial \nu}(x) dA(x)$$

où  $\frac{\partial h}{\partial \nu}$  est la dérivée directionnelle dans la direction de  $\nu$ , en un point de  $\partial M$ .

2. (*deuxième identité de Green*)

$$\int_M (h(x)\Delta f(x) - f(x)\Delta h(x)) dv(x) = \int_{\partial M} \left( h(x) \frac{\partial f}{\partial \nu}(x) - f(x) \frac{\partial h}{\partial \nu}(x) \right) dA(x).$$

### 1.1.2 Le spectre, et les fonction propres du laplacien

Soit  $(M, g)$  une variété riemannienne compacte. Considérons le problème suivant :

$$\Delta \varphi + \lambda \varphi = 0. \quad (1.1.1)$$

Ce qui revient à trouver tous les nombres  $\lambda$ , pour les quelles il existe une solution non triviale  $\varphi \in C^\infty(M)$ . Ces nombres  $\lambda$  sont appelés valeurs propres du problème 1.1.1. Les fonctions correspondantes sont appelées fonctions propres associés à la valeur propre  $\lambda$ .

Dans [Bér86], et [Cha84], P. Bérard et I. Chavel listent trois problèmes de valeurs propres :

1. Problème de Dirichlet :  $\begin{cases} \Delta \varphi + \lambda \varphi = 0 \text{ sur } M \\ \varphi = 0 \text{ sur } \partial M \end{cases}$
2. Problème de Neumann :  $\begin{cases} \Delta \varphi + \lambda \varphi = 0 \\ \frac{\partial \varphi}{\partial \nu} = 0 \text{ sur } \partial M. \end{cases}$  où  $\nu$  est un vecteur normal unitaire à  $\partial M$ , et dirigé vers l'extérieur.
3. Problème fermé :  $\Delta \varphi + \lambda \varphi = 0$  (pas de bord dans ce cas, alors pas de conditions au bord).

**Théorème 1.1.6.** (*P.Bérard [Bér86]*) Soit  $(M, g)$  une variété riemannienne compacte. On a

(i) L'ensemble des valeurs propres du problème peut être arrangé suivant une suite discrète

$$(0 \leq) \lambda_0 \leq \lambda_1 \leq \dots \rightarrow \infty.$$

(ii) Pour le problème de Neumann et le problème fermé,  $\lambda_0 = 0$ . Tandis que pour le problème de Dirichlet,  $\lambda_0 > 0$ .

- (iii) Chacune des valeurs propres  $\lambda_i$  est répétée selon sa multiplicité, et l'espace propre associé  $E_{\lambda_i}$  est de dimension finie égale à la multiplicité de  $\lambda_i$ . De plus, les espaces propres correspondants à des valeurs propres distinctes sont deux à deux orthogonaux dans  $L^2(M, v_g)$ .
- iv  $L^2(M, v_g)$  admet une base orthonormale complète de fonctions propres de  $\Delta$ .

**Remarque 1.1.7.** On définit  $L^2(M, v_g)$  comme l'espace mesurable des fonctions sur  $(M, g)$ , telles que

$$\int_M |f(x)|^2 dv(x) < \infty.$$

Alors  $L^2(M, v_g)$  est un espace de Hilbert, et son produit intérieur est donné par

$$(f, h) = \int_M f(x)h(x)dv(x),$$

pour tout  $f, h \in L^2(M, v_g)$ .

**Preuve.** On va donner une preuve élémentaire de (ii) et de (iii). Pour la démonstration de (i) et de iv, on a besoin de méthodes plus sophistiquées (Consulter pour les détails[Bér86]).

Pour (ii), notons que si  $\varphi_i$  est une fonction propre associée à la valeur propre  $\lambda$ , alors  $\lambda$  est non-négative. En fait, d'après le théorème 1.1.5,

$$\int_M (\varphi \Delta \varphi + \langle \nabla \varphi, \nabla \varphi \rangle) dv = 0,$$

alors

$$\lambda = \frac{1}{\|\varphi\|^2} \int_M \langle \nabla \varphi, \nabla \varphi \rangle dv \geq 0.$$

Or,  $\lambda = 0$  implique que  $\varphi$  est la fonction constante. Alors, dans le problème fermé et le problème de Neumann,  $\lambda_0 = 0$ . Tandis que, dans le problème de Dirichlet,  $\lambda_0 = 0$  implique que  $\varphi_0 = 0$ , alors, dans ce cas,  $\lambda_0 > 0$ .

Pour (iii), l'orthogonalité des espaces propres est une conséquence du théorème 1.1.5. En fait, si  $\phi, \psi$  sont deux fonctions propres associées à deux valeurs propres distinctes  $\lambda$ , et  $\mu$ , alors

$$0 = \int_M (\varphi \Delta \psi - \psi \Delta \varphi) dv = (\lambda - \mu) \int_M \varphi \psi dv = c \langle \varphi, \psi \rangle.$$

D'où le résultat. □

Le spectre d'une variété riemannienne admet les propriétés suivantes :

1. Le spectre est invariant par isométrie car il dépend uniquement du gradient et de la divergence, qui, à leur tours, dépendent uniquement de la structure riemannienne de la variété.
2. Si  $n = 2$ , le spectre dépend continûment de la forme de la membrane ([CH53], p.366). De plus, on peut montrer avec des arguments similaires que le spectre dépend continûment de la métrique riemannienne en général.

Et comme le spectre n'est pas suffisant en général dans l'étude d'une variété riemannienne, on a besoin des fonctions propres associées :

1. Les fonctions propres sont invariantes par déformation isométrique de la variété  $M$  (voir figure 1.1).

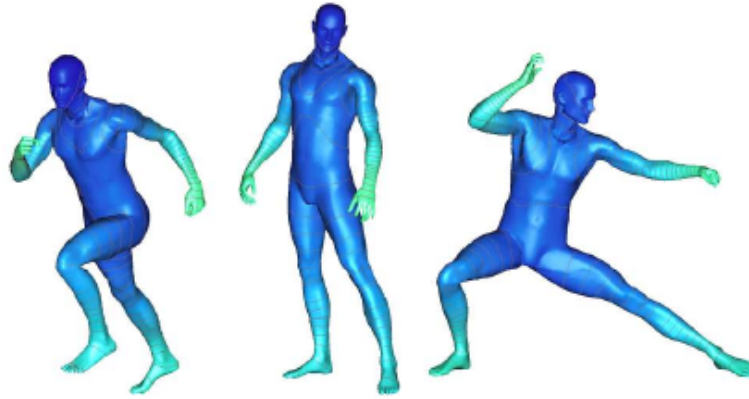


FIG. 1.1 – Une fonction propre de l'opérateur de Laplace-Beltrami calculée sur plusieurs déformations du corps humain montrant que les fonctions propres sont invariantes par déformation isométrique.

2. Deux variétés sont déformables l'une en l'autre si elles admettent la même décomposition en valeurs et en fonctions propres.

Pour être plus concrets, supposons qu'on a deux variétés riemanniennes  $M$  et  $N$ , et soit  $\Delta_M, \Delta_N$ , leurs opérateurs de Laplace-Beltrami associés. Un homéomorphisme  $T : M \rightarrow N$  préserve les distances géodésiques, si et seulement si pour toute fonction propre  $\phi_i$ , de  $\Delta_N$  associée à  $\lambda_i$ ,  $\phi_i \circ T$ , est une fonction propre de  $\Delta_M$  pour la même valeur propre  $\lambda_i$  (voir [SOG09]).

### 1.1.3 L'équation de la chaleur

L'équation de la chaleur décrit ce que se passe quand on commence avec une distribution donnée de la chaleur sur  $D$  en temps  $t$ , et demande comment la chaleur devient dans un temps ultérieur. En fait, considérons un support homogène  $M$ , et soit  $\Omega$  un domaine dans  $M$ . Soit  $u(x, t)$  la fonction de deux paramètres : d'espace et de temps, représentant la température d'un point  $x \in \Omega$ , à un temps  $t$  fixé. Supposons en plus qu'aucune source thermique agit à l'intérieur du domaine. Ce phénomène peut être exprimé mathématiquement par l'équation :

$$\frac{d}{dt} \int_{\Omega} u dv = - \int_{\partial\Omega} F \cdot \nu dA,$$

où  $F$  est le flux thermique, et  $\nu$  est un vecteur normal à  $M$ , dirigé vers l'extérieur. Or, dans plusieurs applications physiques,  $F$  est proportionnel à  $\nabla u$ . En supposant donc que

$$F = \nabla u,$$

on peut appliquer le théorème de Stokes 1.1.4, et on obtient

$$\int_{\Omega} \left( \frac{\partial}{\partial t} u(t, x) - \Delta u(t, x) \right) dv(x) = 0.$$

Comme  $\Omega$  est arbitraire, on a l'équation

$$\frac{\partial}{\partial t}u = \Delta u$$

qui est bien connue sous le nom d'"équation de la chaleur".

On peut introduire l'équation de la chaleur dans notre contexte en supposant  $M$  une variété riemannienne et  $\Delta$  l'opérateur de Laplace-Beltrami correspondant. On peut de plus, ajouter des conditions de Dirichlet au bord (si le bord est non vide), et une température initiale (elle peut être également une distribution), et on aura ainsi le problème

$$\begin{cases} \Delta u - \frac{\partial u}{\partial t} = 0 & \text{pour } x \in M \\ u(x, t) = 0 & \text{pour } x \in \partial M \\ u(x, 0) = u_0 & \text{pour } x \in M. \end{cases} \quad (1.1.2)$$

#### 1.1.4 Le noyau de la chaleur

Le noyau de la chaleur représente l'évolution de la température dans une région donnée, en plaçant une unité initiale de chaleur est placée en un point en temps  $t = 0$ . Si cette région admet un bord, ce bord admet une température particulière (typiquement zéro). Le noyau de la chaleur le plus connu est celui de l'espace Euclidien  $n$ -dimensionnel :

$$K(t, x, y) = \frac{1}{(4\pi t)^{n/2}} e^{-|x-y|^2/4t}. \quad (1.1.3)$$

Celui-ci vérifie l'équation

$$\frac{\partial K}{\partial t}(t, x, y) = \Delta_x K(t, x, y)$$

pour tous  $t > 0$ , et  $x, y \in \mathbb{R}^n$ , avec comme condition initiale

$$\lim_{t \rightarrow 0} K(t, x, y) dy = \delta(x - y) = \delta_x(y)$$

où  $\delta_x$  est la fonction de Dirac en  $x$ , et la limite est prise aux sens de distributions. Plus précisément, pour toute fonction continue  $\phi$  avec support compact, on a

$$\lim_{t \rightarrow 0} \int_{\mathbb{R}^n} K(t, x, y) \phi(y) dy = \phi(x).$$

La formule explicite 1.1.3 n'est pas en générale valable si on considère un domaine  $\Omega$  de  $\mathbb{R}^n$ . D'ailleurs, le noyau de la chaleur existe et il est  $C^\infty$  pour  $t > 0$ , sur les domaines arbitraires et sur n'importe quelle variété Riemannienne, avec ou sans bord (avec des conditions au bord si ce dernier n'est pas vide). Le noyau de la chaleur Euclidien intervient toujours dans la construction de ce noyau (comme on va le voir dans la section 1.2) par ce qu'une variété riemannienne de dimension  $n$  est localement difféomorphe à un ouvert dans l'espace Euclidien  $\mathbb{R}^n$ . Plus précisément,

**Définition 1.1.8.** (*Solution fondamentale de l'équation de la chaleur*) Une fonction  $K(t, x, y)$ , continue sur  $\overline{M} \times \overline{M} \times (0, \infty)$  qui est  $C^2$  par rapport aux variables spatiales  $x, y$ ; et  $C^1$  par rapport à la variable  $t$ , est une solution fondamentale du problème 1.1.2, si

1.  $\left( \Delta_x - \frac{\partial}{\partial t} \right) K = 0$ , sur  $M \times M \times (0, \infty)$ .

2.  $K(t, x, y) = 0$ , si  $x \in \partial M$ , (au cas où  $\partial M \neq \emptyset$ ).
3.  $\lim_{t \rightarrow 0^+} \int_M K(t, x, y) f(y) dv_0(y) = f(x)$ , uniformément pour toute fonction  $f$  continue sur  $\bar{M}$  et qui s'annule sur  $\partial M$  (éventuellement si  $\partial M \neq \emptyset$ ).

On dit qu'une solution fondamentale  $H$  de l'équation de la chaleur est la solution fondamentale positive minimale si  $H$  est positive, et si pour toute solution fondamentale  $h$ , on a  $h \geq H$ . Dans ce cas,  $H$  est appelée noyau de la chaleur. En particulier, on a le théorème suivant :

**Théorème 1.1.9.** (B. Chow [CCG<sup>+</sup> ar], page 216) Si  $(M, g)$  est une variété riemannienne compacte, sans bord, alors il existe une solution fondamentale  $K(t, x, y)$  de l'équation de la chaleur. De plus,  $K$  est unique, positive,  $C^\infty$ , symétrique en  $x$  et  $y \in M$ , et

$$\int_M K(t, x, y) dv(y) \equiv 1.$$

En particulier,  $K(t, x, y)$  est le noyau de la chaleur.

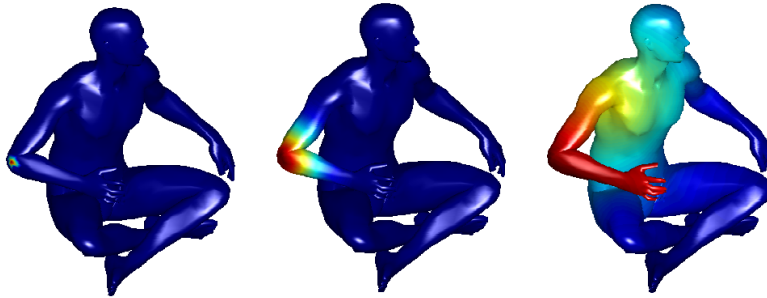


FIG. 1.2 – Le noyau de la chaleur représente l'évolution de la température dans une région donnée.

Un résultat important dans le domaine de la théorie spectrale et qui relie les propriétés spectrales à la géométrie de la variété est le suivant :

**Théorème 1.1.10.** (Varadhan [Var67b]) Si  $K$  est la solution fondamentale de l'équation de la chaleur sur une variété riemannienne  $(M, g)$ , alors

$$\lim_{t \rightarrow 0} \log K(t, x, y) = -\frac{r(x, y)^2}{4t},$$

pour tous  $x, y \in M$ , où  $r$  est la distance riemannienne de  $M$ .

**Proposition 1.1.11.** (Sun et al. [SOG09]) Soient  $M, N$  deux variétés riemanniennes,  $K_M$  et  $K_N$  sont respectivement les solutions fondamentales de l'équation de la chaleur de  $M$ , et  $N$ ; alors :  $T : M \rightarrow N$  est isométrique si et seulement si

$$K_M(t, x, y) = K_N(t, T(x), T(y)), \text{ pour tous } x, y \in M.$$

### 1.1.5 La relation entre le noyau de la chaleur et les valeurs/fonctions propres

Soit  $(M, g)$  une variété riemannienne compacte. Dans cette section, on va démontrer l'existence d'une équation reliant les valeurs et les fonctions propres de  $\Delta$ , et le noyau de la chaleur. Dans [Dod81], Dodziuk énonce le théorème suivant :

**Théorème 1.1.12.** *Si  $\{\varphi_i\}_{i \in \mathbb{N}}$  est une base complète de  $L^2(M, v_g)$ , de fonctions propres de  $\Delta$ , et si  $\lambda_i$  est la valeur propre correspondant à  $\varphi_i$ ,  $i \in \mathbb{N}$ , alors, le noyau de la chaleur peut être exprimé sous la forme*

$$K(t, x, y) = \sum_{i \in \mathbb{N}} e^{-\lambda_i t} \varphi_i(x) \varphi_i(y) \quad (1.1.4)$$

où la convergence est uniforme dans  $\overline{M} \times \overline{M} \times [\epsilon, \infty)$ , pour tout  $\epsilon > 0$ .

La démonstration de ce théorème 1.1.12, est fondée sur la propriété du semi-groupe de  $K(t, x, y)$ , et sur des propriétés de certains opérateurs intégraux auto-adjoints, et compacts. En fait, il est clair que  $\Delta$  est le générateur du semi-groupe  $\{P_t\}_{t>0}$ , défini par

$$P_t u(x) = \int_M K(t, x, y) u(y) dv(y)$$

pour tout  $u \in L^2(M, v_g)$  (voir figure 1.1.5).

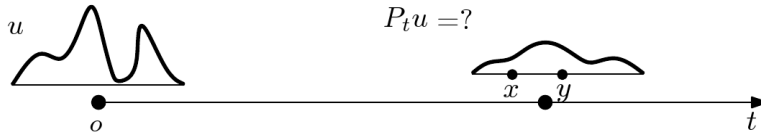


FIG. 1.3 – Une fois qu'on trouve la solution fondamentale, il est facile de trouver la solution désirée de l'équation originale. En fait, ce processus est réalisé par la convolution.

On a le théorème suivant de Mercer :

**Théorème 1.1.13.** *Soit  $K(x, y)$  une fonction continue sur  $\overline{M} \times \overline{M}$ , tel que  $K(x, y) = K(y, x)$ . Et considérons un opérateur  $A : L^2(M, v_g) \rightarrow L^2(M, v_g)$ , positif<sup>1</sup>, défini par*

$$Au(x) = \int_M K(x, y) u(y) dv(y),$$

pour  $u \in L^2(M, v_g)$ ; et soient  $\mu_i, \phi_i$ , respectivement les valeurs/fonctions propres correspondantes de  $A$ , alors  $\mu_i > 0$ , pour tout  $i \in \mathbb{N}$ , et

$$K(x, y) = \sum_{i \in \mathbb{N}} \mu_i \phi_i(x) \phi_i(y).$$

De plus, la série converge uniformément et absolument.

<sup>1</sup>Un opérateur  $A : L^2(M) \rightarrow L^2(M)$  est positif, si, pour tout  $f \in L^2(M)$ ,  $\langle Af, f \rangle_{L^2(M)} \geq 0$

Notons que  $P_t u(x) = \int_M K(t, x, y) u(y) dv(y)$ , est une solution de l'équation de la chaleur pour tout  $u \in L^2(M, v_g)$ . Puisqu'on a pour tous  $s, t > 0$ ,

$$K(t + s, x, y) = \int_M K(t, x, z) K(s, z, y) dv(z),$$

alors  $P_t$  admet la propriété de semi-groupe, i.e.  $P_t P_s = P_{t+s}$ . De plus, l'opérateur  $P_t$  est continu en  $t$ , compact et auto-adjoint. Alors il admet les  $\{e^{-\lambda_i t}\}_{i \in \mathbb{N}}$  comme valeurs propres. Soient  $\{\psi_i\}_{i \in \mathbb{N}}$  les fonctions propres correspondantes, qui forment une base orthonormale de  $L^2(M, v_g)$ . Et comme

$$P_t \psi_i(x) = e^{-\lambda_i t} \psi_i(x),$$

alors  $e^{-\lambda_i t} \psi_i(x)$ , est une solution de l'équation de la chaleur, et,

$$\begin{aligned} -\lambda_i e^{-\lambda_i t} \psi_i(x) &= \frac{\partial}{\partial t} (e^{-\lambda_i t} \psi_i(x)) \\ &= \Delta (e^{-\lambda_i t} \psi_i(x)) \\ &= e^{-\lambda_i t} \Delta \psi_i(x). \end{aligned}$$

Et  $\psi_i$  est une fonction propre de  $\Delta$ , associé à la valeur propre  $\lambda_i$ . En appliquant le théorème 1.1.13, on achève la démonstration du théorème 1.1.12.

Pour démontrer le théorème 1.1.12 avec une autre méthode, notamment avec les équations des dérivées partielles, on peut consulter [Ros97].

On a, comme conséquence du théorème 1.1.12

$$\int_M k(t, x, x) dv(x) = \int_M \sum_{i \in \mathbb{N}} e^{-\lambda_i t} (\varphi_i(x))^2 dv(x) = \sum_{i \leq 1} e^{-\lambda_i t} = Z(t), \quad (1.1.5)$$

où  $Z(t)$  est la fonction de partition<sup>2</sup> de  $(M, g)$ .

## 1.2 Construction du noyau de la chaleur sur une variété riemannienne compacte, et application à la géométrie

Cette partie est consacrée à la construction du noyau de la chaleur sur une variété riemannienne compacte sans bord (voir la définition 1.1.8). Cette construction n'utilise pas les valeurs et les fonctions propres. Pour plus de détails, on peut consulter [BGM71], [Cha84], et [CCG<sup>+</sup>ar].

Pour cette section, ainsi que pour notre travail dans cette thèse, on a besoin des quelques définitions.

<sup>2</sup>En physique statistique, c'est la fonction de partition canonique  $Z(t)$  du système pour la température inverse  $t$ .

Soient  $p \in M$ ,  $V \in T_p M$ , alors, il existe une géodésique unique  $\gamma_V$  dans  $M$ , telle que

$$\gamma_V(0) = p, \quad \dot{\gamma}_V(0) = V.$$

Toutes les variétés qu'on considère ici sont complètes, dans le sens que  $M$ , avec la métrique induite  $d_g$ , est un espace métrique complet. Selon le théorème de Hopf-Rinow, ceci est équivalent à la condition que  $(M, g)$  est géodésiquement complète, i.e.  $\gamma_V(t)$  est définie pour tout  $t \in \mathbb{R}$ .

Soit  $p \in M$ , on définit l'application exponentielle comme étant l'application

$$\exp : T_p M \rightarrow M$$

$$V \mapsto \gamma_V(1).$$

**Définition 1.2.1.** Le rayon d'injectivité  $inj(p)$  d'un point  $p \in M$  est défini comme étant la borne supérieure de tous les  $r > 0$ , tels que  $\exp_p$  est un difféomorphisme  $B(0, r) \subseteq T_p M$ , sur son image dans  $M$ .

Maintenant on va donner la forme du laplacien d'une fonction radiale. On a

**Proposition 1.2.2.** Le laplacien d'une fonction radiale, s'exprime sous la forme

$$\Delta u = \frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + \frac{\partial}{\partial r} \left( \log \sqrt{\det g} \right)$$

pour toute fonction radiale  $u \in C^2(M \times M)$ , où  $\sqrt{\det g}$  est le jacobien de l'application exponentielle de  $g$  au point  $p$  (plus précisément, la densité du volume dans les coordonnées polaires de voisinage  $p$ ).

**Définition 1.2.3.** Le rayon d'injectivité d'une variété riemannienne est l'infimum de tous les rayons d'injectivité des points de  $M$ .

$$inj(M, g) := \inf \{ inj(p); p \in M \}.$$

Lorsque  $M$  est compacte,  $inj(M)$  est strictement positif.

### 1.2.1 Le paramétrix du noyau de la chaleur

Le paramétrix est une approximation de la solution fondamentale d'un opérateur différentiel. Il a été introduit en 1907 par E. E. Levi dans deux articles fondamentaux [Lev07a] et [Lev07b], dans le cas d'un opérateur elliptique à coefficients constants. Puis, en 1974, A. Friedman a prouvé son existence pour un opérateur différentiel parabolique à coefficients variables (voir [Fri64]). Plus précisément,

**Définition 1.2.4.** On dit que  $P_N$  est le paramétrix de l'équation de la chaleur, si :

$$(\pi_1) \quad P_N \in C^\infty(\mathbb{R}^+ \times M \times M).$$

$$(\pi_2) \quad \left( \Delta - \frac{\partial}{\partial t} \right) P_N \text{ se prolonge en une fonction de } C^0(\overline{\mathbb{R}^+} \times M \times M).$$

$$(\pi_3) \quad \lim_{t \rightarrow 0} P_N(t, x, y) dv(x) = \delta_y(x) \text{ pour tout } y \in M.$$

Considérons le noyau de la chaleur de l'espace Euclidien  $\mathbb{R}^n$ ,

$$G(t, x, y) = (4\pi t)^{-\frac{n}{2}} e^{-\frac{r^2(x,y)}{4t}}.$$

$G(t, x, y)$  est considéré comme la première approximation de la solution fondamentale. La transplantation de  $G$  est expliquée par le fait que  $M$  est localement difféomorphe à l'espace Euclidien.

Maintenant, on tend à construire une deuxième approximation de la solution fondamentale, en multipliant  $G$  par une série finie de fonctions différentiables sur un domaine où  $G$  est elle-même différentiable. Plus précisément, posons  $\rho = \text{inj}(M)$ ,

$$U_\rho = \{(x, y) \in M \times M, r(x, y) < \rho\}.$$

Définissons  $H_N$ , par

$$S_N(t, x, y) = G(t, x, y) \sum_{i=0}^{\infty} t^i \psi_i(x, y), \quad (1.2.1)$$

où  $\psi_i \in C^\infty(U_\rho)$ , tels que

1.  $\psi_0(x, x) = 1$ , pour tout  $x \in M$ .
2.  $L_x S_N(t, x, y) = G(t, x, y) t^k \Delta_x \psi_k(t, x, y)$ , où  $L_x = \Delta_x - \frac{\partial}{\partial t}$ .

$H_N$  est alors une approximation de la solution fondamentale. Remarquons que  $S_N$  est définie uniquement pour  $(x, y) \in U_\rho$ , alors qu'on cherche une approximation définie pour tout  $(x, y) \in M \times M$ . Pour ce but, on considère une fonction radiale,  $C^\infty$  sur  $M \times M$ ,  $\eta : M \times M \rightarrow \mathbb{R}$ , telle que

$$\eta(x, y) = \begin{cases} 1 & \text{si } r(x, y) < \rho/4 \\ 0 & \text{si } r(x, y) > \rho/2. \end{cases}$$

**Proposition 1.2.5.** *Pour  $N > \frac{n}{2} + 1$ , l'application  $S_N = \eta H_N$  est le paramétrix du noyau de la chaleur.*

On peut calculer explicitement les  $\psi_i$ ,  $i=1, \dots, N$ ; Par exemple :

$$\psi_0(x, y) = \theta^{-\frac{1}{2}}(x, y)$$

$$\psi_j(x, y) = \theta^{-\frac{1}{2}}(x, y) r^{-j} \int_0^r \tau^{j-1} \left( \theta^{-\frac{1}{2}} \Delta \psi_{j-1} \right) (\exp_y \tau \xi, y) d\tau$$

où  $x = \exp_y r\xi$ , et  $\theta(x, y) = \frac{\sqrt{\det g}}{r^{n-1}}$ . En fait, on a bien

$$\lim_{r \rightarrow 0} \frac{\sqrt{\det g}}{r^{n-1}} = 1,$$

ce qui est bien conforme avec l'hypothèse  $\psi_0(x, x) = 1$ .

En particulier

$$\psi_1(y, y) = \frac{1}{6} s(y)$$

où  $s(y)$  est la courbure scalaire de  $(M, g)$  en  $y$ .

### 1.2.2 Construction du noyau de la chaleur.

Considérons deux fonctions  $H, J \in C^0([0, \infty) \times M \times M)$ . Leur convolution (espace-temps) est donnée par

$$(H * J)(t, x, y) \doteq \int_0^t ds \int_M H(s, x, z) J(t-s, z, y) dv(z).$$

Cette convolution est associative (voir [CCG<sup>+</sup>ar], page 228).

Maintenant on construit le noyau de la chaleur en utilisant la convolution, et on tend à le trouver sous la forme

$$K(t, x, y) \doteq S_N + S_N * H,$$

où  $H$  est une fonction continue sur  $[0, \infty) \times M \times M$ , à déterminer. On démontre que

$$L_x(S_N * H) = L_x S_N * H - H,$$

et ceci nous donne

$$0 = L_x K = L_x S_N + (L_x S_N) * H - H.$$

En faisant l'analogie avec l'équation  $x + xy - y = 0$ , dont la solution est

$$y = \frac{x}{1-x} = \sum_{k=1}^{\infty} x^k,$$

on peut voir que  $H$  s'écrit sous la forme

$$H \doteq \sum_{k=1}^{\infty} (L_x S_N)^{*k},$$

où

$$f^{*k} = f * \dots * f, \quad k \text{ fois } f.$$

Alors

$$K(t, x, y) = S_N + S_N * \sum_{k=1}^{\infty} (L_x S_N)^{*k}.$$

De plus,  $\sum_{k=1}^{\infty} (L_x S_N)^{*k}$  est  $m+l$  différentiable sur  $[0, \infty) \times M \times M$ , pour  $2l+m < N - \frac{n}{2}$ . Plus précisément

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\partial^l}{\partial t^l} \partial_x^m (L_x S_N)^{*k} \quad (1.2.2)$$

est absolument et uniformément convergente  $[0, T] \times \mathcal{K} \times \mathcal{K}$ , où  $\mathcal{K}$  est un compact dans un système de coordonnées locales  $(\mathcal{U}, \{x^i\}_{i=1}^n)$ .

**Remarque 1.2.6.** Dans 1.2.2,  $\partial_x^m = \partial_x \circ \dots \circ \partial_x$  est une notation<sup>3</sup> d'une  $m$ 'ième dérivation quelconque par rapport aux composantes de la variable  $x$  dans le système de coordonnées locales  $\{x^i\}_{i=1}^n$ .

<sup>3</sup>notation écrite par Chow dans [CCG<sup>+</sup>ar], page 223

On a (voir [CCG<sup>+</sup>ar], page 236)

$$\frac{\partial^l}{\partial t^l} \partial_x^m \sum_{k=1}^{\infty} (L_x S_N)^{*k} = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\partial^l}{\partial t^l} \partial_x^m (L_x S_N)^{*k} = O(t^{N-n2-2l-m+1}). \quad (1.2.3)$$

En conclusion, si on pose  $Q_N(t, x, y) = S_N * \sum_{k=1}^{\infty} (L_x S_N)^{*k}$ , alors

$$K(t, x, y) = G(t, x, y) \sum_{i=0}^{\infty} t^i \tilde{\psi}_i(x, y) + Q_N(t, x, y), \quad (1.2.4)$$

où  $\tilde{\psi}_i = \eta \psi_i$ , et

$$Q_N(t, x, y) = O(t^{N-\frac{n}{2}}) \text{ uniformément en } x, y \in M, \quad (1.2.5)$$

et

$$\frac{\partial}{\partial x^i} Q_N(t, x, y) = O(t^{N-\frac{n}{2}-1}), \quad i = 1, \dots, N, \quad (1.2.6)$$

uniformément en  $x, y \in M$ , où  $\{x^i\}_{i=1}^n$  est un système de coordonnées locales autour de  $x$  (voir [CCG<sup>+</sup>ar], page 232-236).

### 1.2.3 Application à la géométrie.

Rappelons le développement spectral de la solution fondamentale de l'équation de la chaleur 1.1.4, et celle de la fonction de partition  $Z(t)$  appropriée 1.1.5. Minakshisundaram et Pleijel ont construit des développements asymptotiques pour ces deux quantités dans [MP49]. Ces deux résultats sont d'une grande importance notamment pour les problèmes inverses i.e. si on a des informations sur le spectre de  $M$ , on a des informations géométriques intéressantes de  $M$  comme la dimension, le volume, la courbure scalaire et l'intégrale de cette dernière.

**Théorème 1.2.7.** (Développement asymptotique de Minakshisundaram-Pleijel) *Il existe une série de fonctions  $\psi_i$ ,  $i \in \mathbb{N}$ , telles que*

$$K(t, x, x) \sim_{t \rightarrow 0^+} (4\pi t)^{-\frac{n}{2}} \sum_{i=0}^{\infty} \psi_i(x, x) t^i$$

dans le sens que pour tout  $N \in \mathbb{N}$ ,

$$K(t, x, x) = (4\pi t)^{-\frac{n}{2}} \sum_{i=0}^N \psi_i(x, x) t^i + O(t^{N-\frac{n}{2}+1}).$$

De plus, il existe une série de nombres  $a_i$ ,  $i \in \mathbb{N}$ , tels que

$$Z(t) \sim_{t \rightarrow 0^+} (4\pi t)^{-\frac{n}{2}} \sum_{i=0}^{\infty} a_i t^i$$

où  $a_0 = \text{Vol}(M, g)$ , et  $a_1 = \frac{1}{6} \int_M s(x) dv(x)$ , où  $s(x)$  est la courbure scalaire de  $M$  au point  $x$ .

En particulier, dans le cas où la dimension de  $M$  est 2, le théorème de Gauss-Bonnet implique que la détermination de l'intégrale de la courbure scalaire donne la caractéristique d'Euler de  $M$ . Donc, si  $M$  est de dimension 2, le spectre nous permet de bien comprendre la topologie de  $M$ .

Un autre exemple du problème inverse, est la formule asymptotique de Weyl :

**Théorème 1.2.8.** (Formule asymptotique de Weyl [Cha84], page 8) Soit

$$N(\lambda) = \text{card}\{j \leq 1, \lambda_j \geq \lambda\},$$

et soit  $w_n$  le volume de la boule unité dans  $\mathbb{R}^n$ , alors

$$N(\lambda) \sim \frac{w_n \text{Vol}(M) \lambda^{\frac{n}{2}}}{(2\pi)^n}, \text{ quand } \lambda \rightarrow +\infty.$$

De plus,

$$(\lambda_k)^{\frac{n}{2}} \sim \frac{(2\pi)^n k}{w_n \text{Vol}(M)} \text{ quand } k \rightarrow +\infty.$$

### 1.2.4 Formule asymptotique du noyau de la chaleur hors de la diagonale

Dans [Kan77], Kannai démontre que la solution fondamentale de l'équation de la chaleur admet quand  $t \rightarrow 0$ , un développement asymptotique de la forme

$$K(t, x, y) \sim (4\pi t)^{-\frac{n}{2}} e^{-\frac{r^2(x,y)}{4t}} \sum_{i=0}^{\infty} t^i v_i(x, y), \quad t \rightarrow 0_+ \quad (1.2.7)$$

pour  $x, y$  assez voisins pour n'être joints que par une seule géodésique, et  $v_i$  sont des solutions de certains équations différentielles de transport. L'équation 1.2.7 veut dire que

$$K(t, x, y) - (4\pi t)^{-\frac{n}{2}} e^{-\frac{r^2(x,y)}{4t}} \sum_{i=0}^N t^i v_i(x, y) = O(t^{N-\frac{n}{2}}) e^{-\frac{r^2(x,y)}{4t}}, t \rightarrow 0$$

pour  $x, y$  assez proches.

La méthode, assez élémentaire, consiste à déduire ce développement de celui de la solution fondamentale  $w$  de l'équation des ondes  $\Delta - \frac{\partial^2}{\partial t^2}$ , grâce à la formule de "transmutation" :

$$K(t, x, y) = \frac{1}{\sqrt{4\pi t}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{s^2}{4t}} w(s, x, y) ds.$$

**Proposition 1.2.9.** (Y. Kannai [Kan77]) Soit  $w(t)$  la solution de l'équation des ondes

$$\left( \Delta - \frac{\partial^2}{\partial t^2} \right) w = 0$$

telle que

$$w(t), \frac{\partial}{\partial t} w(t), \frac{\partial^2}{\partial t^2} w(t) = O(e^{\epsilon t^2}) \quad (1.2.8)$$

pour tout  $\epsilon > 0$ ,  $|t| \rightarrow \infty$ . Alors la fonction  $V(t)$  définie pour  $t > 0$  par

$$V(t) = \frac{1}{\sqrt{4\pi t}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{s^2}{4t}} w(s, x, y) ds, \quad (1.2.9)$$

est la solution de l'équation de la chaleur

$$\Delta V = \frac{\partial}{\partial t} V,$$

pour  $t > 0$ , et la limite  $V(0) = \lim_{t \rightarrow 0} V(t)$  existe. De plus,

$$V(0) = w(0).$$

**Preuve.** En fait, les estimations 1.2.8 impliquent la convergence absolue de l'intégrale 1.2.9 pour tout  $t > 0$ , et nous permet de faire l'intégration par parties suivante :

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} V(t) &= \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\partial}{\partial t} \left( \frac{e^{-\frac{s^2}{4t}}}{\sqrt{4\pi t}} \right) w(s, x, y) ds = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\partial^2}{\partial s^2} \left( \frac{e^{-\frac{s^2}{4t}}}{\sqrt{4\pi t}} \right) w(s, x, y) ds \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{-\frac{s^2}{4t}}}{\sqrt{4\pi t}} \frac{\partial^2}{\partial s^2} w(s, x, y) ds = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{-\frac{s^2}{4t}}}{\sqrt{4\pi t}} \Delta w(s, x, y) ds \\ &= \Delta V(t) \end{aligned}$$

en utilisant le fait que l'opérateur  $\Delta$  est fermé. Enfin, la relation

$$\lim_{t \rightarrow 0} \frac{e^{-\frac{s^2}{4t}}}{\sqrt{4\pi t}} = \delta_0(s),$$

où  $\delta_0$  est la fonction de Dirac en 0, nous donne  $V(0) = w(0)$ . Pour plus de détails sur la formule de transmutation, consulter [Kan77].

D'après l'unicité de la solution fondamentale de l'équation de la chaleur, les  $v_i, i = 1, \dots, N$  ne sont autres que les  $\tilde{\psi}_i$  (voir section 1.2.2) pour  $x, y$  assez proches. Plus précisément, d'après la section 1.2.2, on a

$$K(t, x, y) = (4\pi t)^{-\frac{n}{2}} e^{-\frac{r^2(x, y)}{4t}} \left( \sum_{i=0}^N t^i \tilde{\psi}_i(x, y) + \Gamma_N(t, x, y) \right), \quad (1.2.10)$$

pour  $x, y$  assez proche et  $t \rightarrow \infty$ , où  $\Gamma_N(t, x, y) = O(t^N)$ , et

$$\frac{\partial}{\partial x^i} \Gamma_N(t, x, y) = O(t^N), \quad i = 1, \dots, n$$

pour  $x, y$  assez proches, où  $\{x^i\}_{i=1}^n$  est un système de coordonnées locales autour de  $x$ .

### 1.3 Lemme de Moser et applications

Soit  $g(t)$ ,  $0 \leq t \leq T$ ,  $T > 0$ , une famille  $C^\infty$  de métriques Riemanniennes sur une variété compacte  $M$  de dimension finie  $n$  telles que  $\text{vol}(M, g(t))$  est constant pour  $0 \leq t \leq T$ . Alors

**Lemme 1.3.1.** *Il existe une famille  $C^\infty$  de difféomorphismes  $\eta_t$ , telle que  $h(t) = \eta_t^* g(t)$ ,  $h_0 = g$ , et  $h(t)$  est de forme volume constant, c'est-à-dire  $dv(h(t)) = dv_g = dv$ .*

Le lemme ci-dessus est une conséquence immédiate du lemme suivant dû à Moser [Mos65].

**Lemme 1.3.2.** *Soit  $\mu_t$  une déformation  $C^\infty$  de  $n$ -formes non-dégénérées sur  $M$ , avec  $\int_M \mu_t = \int_M \mu_0$  pour tout  $0 < t < T$ . Alors, il existe une famille  $\eta_t$  d'automorphismes de  $M$ ,  $C^\infty$  en  $t$ , telle que  $\eta_t^* \mu_t = \mu_0$ , et  $\eta_0$  est l'application identité.*

## Chapitre 2

# Plongements des variétés riemanniennes à l'aide de leur propriétés de diffusion

**Définition 2.0.3.** *soit  $f : M \rightarrow E$  une application  $C^k$  d'une variété  $M$ , dans un espace de Banach  $E$ . On dit que  $f$  est un  $C^k$  plongement, si  $f$  est  $C^k$ , et si de plus pour tout  $x \in M$ , l'application linéaire tangente  $Tf(x)$  est injective, et si en outre  $f$  est un homéomorphisme de  $M$  sur  $f(M)$ . Un plongement est donc un  $C^k$ -difféomorphisme sur son image. Cette image est une sous-variété différentielle de  $E$ .*

Rappelons qu'il existe des plongements canoniques des sphères et des espaces projectifs réels qui sont réalisés par des fonctions propres du premier sous-espace propre pour le cas de la sphère, et du deuxième sous-espace propre pour les cas le espace projectif [BGM71].

Dans ce chapitre, on va fournir une explication partielle de ce phénomène, et donner quelques autres plongements importants, ainsi que leurs utilités, et ceci dans le cas où on a une variété compacte  $(M, g)$ .

Ensuite, nous munissons  $M$  d'une famille analytique de métriques riemanniennes  $g(t)$  à un paramètre qui varie dans  $\mathbb{R}^+$ . On désigne par  $\Delta_t$ , le laplacien associé à  $g(t)$ , et on généralise les plongements décrits dans les sections précédentes, au moins pour les temps petits : dans un premier temps, on considère une famille quelconque de métriques  $g(t)$ , analytiques en  $t$ , et on démontre l'existence d'une famille finie de fonctions propres analytique en  $t$ , pour  $t$  suffisamment petit. Ainsi on peut construire le plongement avec un nombre fini de fonctions propres.

Dans la section suivante, on suppose que le volume de  $(M, g(t))$  est constant en  $t$ , et on va se servir du lemme de Moser 1.3.2, pour avoir une famille de variétés riemanniennes  $h(t)$ , dont la forme volume est constante en  $t$ . Par suite l'espace de Hilbert  $L^2(M, v_{h(t)})$  est constant. On a dans ce cas, une famille holomorphe de type A au sens de Kato (voir définition 2.6.1). On peut ainsi construire un plongement dans  $l^2$ , avec une base complète de fonctions propres.

## 2.1 Plongements par les fonctions propres : motivation

Dans cette section, on va justifier le fait que les fonctions propres de l'opérateur de Laplace-Beltrami sont utiles pour plonger.

On considère une variété riemannienne  $(M^n, g)$ , différentiable, compacte et sans bord. On cherche une fonction  $f \in C^2(M)$ , qui preserve d'une manière optimale l'information locale, au sens où : si deux points  $x, y$  sont proches dans  $M$  alors leurs images  $f(x)$ , et  $f(y)$  sont aussi proches dans  $\mathbb{R}$ . Plus précisément, on a la proposition suivante :

**Proposition 2.1.1.** *Soit  $f \in C^2(M)$ , et soient  $x, y \in M$ , alors*

$$|f(y) - f(x)| \leq r(x, y) \|\nabla f(x)\| + O(r^2(x, y))$$

où  $r$  est la distance riemannienne de  $(M, g)$ .

**Preuve.** Soit  $V \in T_x M$ , alors  $d_x f(V) = \langle \nabla f(x), V \rangle$ , et soit  $\gamma : [0, r(x, y)] \rightarrow M$  la géodésique reliant  $x$  à  $y$  dans  $M$ , et telle que  $|\dot{\gamma}(s)| = 1$ , pour tout  $s \in [0, r(x, y)]$ . Alors

$$\begin{aligned} f(y) &= f(x) + \int_0^{r(x, y)} d_x f(\dot{\gamma}(s)) ds \\ &= f(x) + \int_0^{r(x, y)} \langle \nabla f(\gamma(s)), \dot{\gamma}(s) \rangle ds \end{aligned}$$

Par l'inégalité de Schwartz, on a

$$\langle \nabla f(\gamma(s)), \dot{\gamma}(s) \rangle \leq \|\nabla f(\gamma(s))\| \|\dot{\gamma}(s)\| \leq \|\nabla f(\gamma(s))\|.$$

Par un développement de Taylor à l'ordre 1 au voisinage de  $s = 0$ , on a :

$$\|\nabla f(\gamma(s))\| = \|\nabla f(\gamma(0))\| + O(s) = \|\nabla f(x)\| + O(s),$$

alors,

$$f(y) \leq f(x) + \int_0^{r(x, y)} (\|\nabla f(x)\| + O(s)) ds = r(x, y) \|\nabla f(x)\| + O(r^2(x, y)),$$

d'où le résultat. □

Le lemme 2.1.1 précise de quoi dépend la distance entre deux points images par une fonction  $f$ . On cherche une fonction qui peut préserver en moyenne la position des points voisins. Un bon candidat est :

$$\operatorname{argmin}_{\|f\|_{L^2(M)}=1} \int_M \|\nabla f(x)\|^2 dv(x).$$

Malheureusement, cette fonction est la fonction constante  $\varphi_0 \equiv 1$ . L'image de  $M$  par cette fonction est donc un point. Pour éviter ce cas trivial, on exige que la fonction  $f$  soit orthogonale à  $\varphi_0 \equiv 1$ . On recherche maintenant :

$$\operatorname{argmin}_{\substack{\|f\|_{L^2(M)}=1 \\ \int_M f(x) dv(x) = 0}} \int_M \|\nabla f(x)\|^2 dv(x).$$

On peut remarquer qu'il s'agit de la première fonction propre  $\varphi_1$  de  $\Delta$ , relative à la première valeur propre non nulle  $\lambda_1$ . En effet, par la formule de Stokes :

$$\int_M \|\nabla f(x)\|^2 dv(x) = - \int_M f(x) \Delta f(x) dv(x)$$

puisque  $\partial M = \emptyset$ .

Ainsi, si la multiplicité de  $\lambda_1$  est  $m_1$ , on peut considérer les fonctions propres  $\varphi_1, \dots, \varphi_{m_1}$  relatives à  $\lambda_1$ . Par exemple, dans le cas de la sphère, cela donne bien un plongement. Sinon, on considère les fonctions propres relatives à la valeur propre suivante, et ainsi de suite. Finalement, on obtient un plongement par un nombre fini ou infini de fonctions propres. Si on a un nombre infini, on peut normaliser chaque fonction propre dans le plongement, de manière à avoir un plongement bien défini.

## 2.2 Quelques plongements de variétés riemanniennes à l'aide des fonctions propres du laplacien

Dans [BBG94], P. Bérard, G. Besson, et S. Gallot, démontrent qu'on peut plonger toute une classe de variétés riemanniennes compactes dans  $l^2$  par toutes les fonction propres (c.f. théorème 0.0.11). Mais, on se demandait si on peut plonger une variété riemannienne par un nombre fini de fonctions propres. Ceci pour mettre en pratique cette théologie. La réponse était heureusement positive. En fait, en 1978, A. Besse plonge une certaine classe de variétés riemanniennes dans un espace euclidien par un seul espace propre. Et puisque on ne peut pas espérer toujours de le faire pour une variété riemannienne quelconque, P. Bérard utilise les fonctions propres jusqu'à un certain rang.

### 2.2.1 Cas d'une variété symétrique compacte de rang 1

**Définition 2.2.1.** Une variété riemannienne connexe, est un espace symétrique si, pour tout  $m \in M$ , il existe une isométrie involutive,  $s_m : M \rightarrow M$ , telle que

$$s_m \circ \exp_m = \exp_m \circ s_m.$$

Le rang d'un espace symétrique est défini par la dimension maximale des sous-variétés plates (i.e. de courbure nulle), qui sont totalement géodésiques<sup>1</sup> dans  $M$ .

**Exemple.** Les espaces symétriques de rang 1, non compactes, sont les espaces hyperboliques correspondant à  $\mathbb{R}, \mathbb{C}, \mathbb{H}$ , et  $\mathbb{C}a$ , et d'une manière duale, les espaces symétriques compactes de rang 1, sont les différents  $\mathbb{K}P^n$ , et les sphères Euclidiennes, i.e.  $S^n, \mathbb{R}P^n, \mathbb{C}P^n, \mathbb{H}P^n, \mathbb{C}aP^2$ , munis de la métrique canonique.

On suppose maintenant que  $(M, g)$  est une variété compacte, alors elle admet une solution fondamentale unique de l'équation de la chaleur  $K : \mathbb{R}_+^* \times M \times M$ . Si  $M$  est un espace symétrique de rang 1, alors l'unicité et l'invariance de ce noyau, nous implique que  $K$  dépend uniquement de la distance riemannienne  $r$ , i.e. il existe une application

$$\Xi : \mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R},$$

<sup>1</sup>une sous-variété est dite totalement géodésique, si, pour tout vecteur normal, la seconde forme fondamentale s'annule.

telle que  $K(t, x, y) = \Xi(t, r(x, y))$ , pour tout  $x, y \in M$ , et  $t > 0$ .

**Lemme 2.2.2.** [Bes78] Si  $(M, g)$  est un espace symétrique compact de rang 1, et  $\Delta$  est l'opérateur de Laplace-Beltrami associé, alors, pour toute valeur propre  $\mu$ , de multiplicité  $N_\mu$ , il existe une application

$$F_\mu : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R},$$

telle que

$$\sum_{i=1}^{\mu} \varphi_i^\mu(x) \varphi_i^\mu(y) = F_\mu(r(x, y)), \text{ pour tout } x, y \in M^2.$$

Soit  $(M, g)$  un espace symétrique compact de rang 1, de dimension  $n$ . Et soit  $\lambda \in \text{Spec}(M, g)$ , de multiplicité  $N$ , et soit  $\varphi_1, \dots, \varphi_N$  une base  $L^2(M, g)$ -orthonormée de l'espace propre associé  $E_\lambda$ .

On considère l'application

$$\begin{aligned} \Lambda : M &\rightarrow \mathbb{R}^{N+1} \\ x &\mapsto (\varphi_0(x), \dots, \varphi_N(x)). \end{aligned}$$

**Théorème 2.2.3.** ([Bes78], page 174) On a

1.  $\Lambda$  est une immersion de  $M$  dans la sphère  $S(0, R)$ , dans  $\mathbb{R}^{N+1}$ , de rayon  $R = \left( \frac{N}{\text{vol}(M, g)} \right)^{\frac{1}{2}}$ .
2.  $\Lambda^* \bar{g} = kg$ , où  $\bar{g}$  est la métrique riemannienne induite par celle de  $\mathbb{R}^{N+1}$ , sur  $\Lambda(M)$ , et  $k = \frac{\lambda R^2}{n}$ .
3.  $\Lambda$  est un plongement de  $M$  dans  $\mathbb{R}^N$ , sauf dans le cas où  $M = S^n$ , et  $\Lambda(M) = \mathbb{R}P^N$ .

**Esquisse de la preuve.** l'idée de la preuve est basée sur le lemme 2.2.2. Il existe une application  $F_\lambda : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}$ , telle que

$$\sum_{i=1}^N \varphi_i(x) \varphi_i(y) = F_\lambda(r(x, y)), \text{ pour tout } x, y \in M. \quad (2.2.1)$$

Alors on a

$$\left\{ \begin{aligned} \langle \Lambda(x), \Lambda(x) \rangle &= \sum_{i=1}^N \varphi_i^2(x) = F_\lambda(0) \\ F_\lambda(0) \text{Vol}(M, g) &= \sum_{i=1}^N \int_M \varphi_i^2(x) dv(x) = \sum_{i=1}^N \|\varphi_i\|_{L^2(M, v_g)}^2 = N \end{aligned} \right. \quad (2.2.2)$$

Alors,

$$\Lambda(M) \subset S(0, R) = \left( \frac{N}{\text{Vol}(M, g)} \right)^{\frac{1}{2}}.$$

<sup>2</sup>En particulier, pour tout point  $x \in M$ , il existe une fonction  $F : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ , telle que la fonction,  $f : M \rightarrow \mathbb{R}$ , définie par  $y \mapsto F(r(x, y))$ , est  $C^\infty$ , et satisfait,  $\Delta f = \mu f$ , avec  $\mu > 0$ .

Différentions 2.2.2 deux fois. On a

$$\sum_{i=1}^N \varphi_i d\varphi_i = 0, \quad \sum_{i=1}^N d\varphi_i \otimes d\varphi_i + \sum_{i=1}^N \varphi_i \text{Hess}\varphi_i = 0$$

et en différentiant 2.2.1, on obtient

$$\sum_{i=1}^N \varphi_i \text{Hess}\varphi_i = F''_\lambda(0)g,$$

ce qui nous donne que

$$\sum_{i=1}^N d\varphi_i \otimes d\varphi_i = -F''_\lambda(0)g. \tag{2.2.3}$$

Or  $\Lambda^* \bar{g} = \sum_{i=1}^N d\varphi_i \otimes d\varphi_i = -F''_\lambda(0)g$ , alors, pour calculer la constante  $-F''_\lambda(0)$ , on calcule la trace

$$\begin{aligned} \text{trace} \sum_{i=1}^N \varphi_i \text{Hess}\varphi_i &= - \sum_{i=1}^N \varphi_i \Delta \varphi_i = -\lambda \sum_{i=1}^N \varphi_i \\ &= \lambda R^2 = \text{trace}(g) F''_\lambda(0) = n F''_\lambda(0) \end{aligned}$$

et d'après 2.2.3, l'application est une immersion. Ensuite, si  $\Lambda(x) = \Lambda(y)$ , alors  $x = y$ , sauf dans la cas où  $M = S^n$ , et  $x, y$  sont antipodales ( pour les détails, consulter [Bes78], chapitres 5, et 6).

□

Un intérêt du plongement par les fonctions propres, est la détermination du volume des ensembles nodaux des fonctions propres du laplacien. En particulier, on peut démontrer en plongeant une classe de variétés, dans un espace Euclidien que le volume moyen des ensembles nodaux des fonctions propres associée à une valeur propre donnée  $\lambda$  est proportionnel à  $\text{Vol}(M, g)/\lambda$ .

Soit  $H_a$  l'hyperplan vectoriel de  $\mathbb{R}^{N+1}$ , défini par l'équation

$$(H_a) \quad a_0 X_1 + \dots + a_N X_N$$

où l'on voit  $(a_0, \dots, a_N)$  comme un point  $a$  de  $\mathbb{R}P^N$ . Dans [Bér85], Bérard reformule une égalité de Santalo (voir la formule initiale dans [San76], page 245, et 309), et nous donne

$$\text{Vol}(\bar{M}, \bar{g}) = \frac{\text{Vol}(S^n(R))}{\text{Vol}(S^{n-1}(R))} \frac{1}{\text{Vol}(\mathbb{R}P^N)} \int_{\mathbb{R}P^N} \text{Vol}(\bar{M} \cap H_a, \bar{g}) da$$

où  $da$  est le volume de  $\mathbb{R}P^N$ , et  $(\bar{M}, \bar{g})$  est l'image  $\Lambda(M)$  muni de la métrique induite par celle de  $\mathbb{R}^N$ , et  $R = \left( \frac{N}{\text{vol}(M, g)} \right)^{\frac{1}{2}}$ .

**Remarque 2.2.4.** Remarquons que  $\bar{M} \cap H_a$  n'est autre que l'image par  $\Lambda$  de l'ensemble nodal

$$N_a(\lambda) = \left( \sum_{i=0}^N a_i \varphi_i \right)^{-1} (0), a = (a_0, \dots, a_N).$$

Alors

**Théorème 2.2.5.** (Bérard [Bér85]) Avec les hypothèses et les notations ci-dessus, on a

$$\frac{1}{\text{Vol}(\mathbb{R}P^N)} \int_{\mathbb{R}P^N} \text{Vol}(N_a(\lambda), \bar{g}) da = \frac{\text{Vol}(S^{n-1}(1))}{\sqrt{n} \text{Vol}(S^n(1))} \text{Vol}(M, g) \sqrt{\lambda}.$$

### 2.2.2 Cas d'une variété riemannienne compacte

Soient  $(M, g)$  une variété riemannienne compacte,  $0 = \lambda_0 < \lambda_1 \leq \lambda_2 \leq \dots$  le spectre de  $(M, g)$ ,  $\{\varphi_i\}_{i \in \mathbb{N}}$  une base orthonormée de  $L^2(M, v_g)$  de fonctions propres associées, et soient

$$N(\lambda) = \text{card}\{j \in \mathbb{N}, \lambda_j \leq \lambda\},$$

et

$$\nu(x, \lambda) = \left( \sum_{\lambda_j \leq \lambda} \varphi_j^2(x) \right)^{\frac{1}{2}} = \frac{\lambda^{\frac{n}{2}}}{(4\pi)^{\frac{n}{2}} \Gamma(\frac{n}{2} + 1)} (1 + a(x, \lambda))$$

où  $a(x, \lambda) = o(\lambda^{-\frac{1}{2}})$ , uniformément en  $x \in M$ , quand  $\lambda \rightarrow \infty$  (c.f. Bérard [Bér85])

**Théorème 2.2.6.** (Bérard [Bér85]) L'application

$$\begin{aligned} \Phi_\lambda : M &\rightarrow \mathbb{R}^{N(\lambda)+1} \\ x &\mapsto \left( \frac{\varphi_0(x)}{\nu(x, \lambda)}, \dots, \frac{\varphi_{N(\lambda)}(x)}{\nu(x, \lambda)} \right) \end{aligned}$$

est un plongement pour  $\lambda$  assez grand. De plus,  $\Phi_\lambda(M) \subset S^{N(\lambda)}(1)$  (sphère de rayon 1 dans  $\mathbb{R}^{N(\lambda)+1}$ ), et, pour tout  $V \in TM \setminus \{0\}$ ,

$$\|d\Phi_\lambda(V)\|_{\mathbb{R}^{N(\lambda)+1}}^2 = \frac{\lambda}{n+2} [g_0(V, V) + b(V, \lambda)],$$

où  $b(V, \lambda) = o(1)$ , uniformément en  $V$ , quand  $\lambda$  tend vers l'infini.

**Corollaire 2.2.7.**

$$\frac{1}{\text{Vol}(\mathbb{R}P^{N(\lambda)})} \int_{\mathbb{R}P^{N(\lambda)}} \text{Vol}(N_a(\lambda), \bar{g}) da = \frac{\text{Vol}(S^{n-1}(1))}{\sqrt{n+2} \text{Vol}(S^n(1))} \text{Vol}(M, g) \sqrt{\lambda} (1 + o(1))$$

quand  $\lambda$  tend vers  $\infty$ , où,

$$N_a(\lambda) = \left( \sum_{i=0}^{N(\lambda)} a_i \varphi_i \right)^{-1} (0), \quad a = (a_0, \dots, a_{N(\lambda)}) \in \mathbb{R}P^{N(\lambda)}.$$

### 2.3 Plongement et distance de diffusion

Soit  $(M, g)$  une variété riemannienne compacte, et  $K(t, \cdot, \cdot)$  son noyau de la chaleur. On considère le plongement du théorème 0.0.11 (à une constante près)

$$\begin{aligned} \Phi_t : M &\rightarrow l^2, \quad t > 0 \\ x &\mapsto \{e^{-\lambda_i t} \varphi_i(x)\}_{i \geq 1}. \end{aligned}$$

où  $\lambda_i$  et  $\varphi_i$  sont respectivement les valeurs et les fonctions propres du laplacien  $\Delta_g$ .

Dans l'article [CL06], Coiffman et Lafon reprennent ce plongement et l'appellent famille d'"applications de diffusion". Ils leur associent une famille de "distances de diffusions"  $D_t$  (distance au temps  $t$ ) définies par

$$\begin{aligned} D_t^2(x, y) &= \sum_{j \geq 0} e^{-\lambda_j t} (\varphi_j(x) - \varphi_j(y))^2 \\ &= \|\Phi_t(x) - \Phi_t(y)\|_{l^2}^2 \end{aligned}$$

pour tout  $x, y \in M$ .

$D_t$  est bien une distance sur  $M$  pour tout  $t > 0$ . En fait :  $D_t$  est symétrique, puisque, pour tout  $x, y \in M$ ,

$$\|\Phi_t(x) - \Phi_t(y)\|_{l^2} = \|\Phi_t(y) - \Phi_t(x)\|_{l^2}.$$

De plus, si  $D_t(x, y) = 0$ , alors  $\varphi_j(x) = \varphi_j(y)$ , pour tout  $j > 1$ . Le fait que  $\{\varphi_i\}_{i \in \mathbb{N}}$  soit une base complète nous donne que  $x = y$ . Enfin, il est facile de voir que

$$D_t(x, y) \leq D_t(x, z) + D_t(z, y), \text{ pour tous } x, y, z \in M.$$

On voit ainsi que  $\Phi_t$  réalise un plongement isométrique de l'espace métrique  $M$  (muni de la métrique  $D_t$ ) dans l'espace Euclidien.

L'idée d'appeler ainsi la distance de diffusion, est motivée par l'égalité

$$\|\Phi_t(x) - \Phi_t(y)\|_{l^2}^2 = \int_M (K(t, x, z) - k(t, y, z))^2 dv(z), \quad x, y \in M,$$

la quantité  $K(t, x, y)$  étant la probabilité de la transition de  $x$  à  $y$  en temps  $t$ . A ce processus de diffusion est associé la distance  $D_t$  qui reflète le "taux de connexion" des points  $x, y \in M$ . Plus il y a une grande probabilité de transiter de  $x$  à  $y$  et plus,  $D_t(x, y)$  est petite.

Pour utiliser en pratique la distance de diffusion, on peut l'approcher par un nombre fini de valeurs propres en retenant uniquement les termes  $e^{-\lambda_i t} \varphi_i$  pour lesquels les valeurs  $e^{-2\lambda_i t}$  restent significatives : en fait, pour  $x \in M$  fixée,  $K(t, x, \cdot)$  est une fonction cut-off centrée en  $x$ . Quand  $t$  devient plus grand, le support de  $K(t, x, \cdot)$  devient plus large, et le nombre de valeurs propres qui peuvent donner une signification à cette fonction, devient plus petit (voir figure 2.1).

Par conséquent, on a le théorème suivant :

**Théorème 2.3.1.** *Pour tout  $t > 0$ , et tout  $\delta > 0$ , il existe une constante  $s(\delta, t)$  tel que l'application*

$$\begin{aligned} \Psi_t^s : M &\rightarrow \mathbb{R}^{s(\delta, t)} \\ x &\mapsto (e^{-\lambda_1 t} \varphi_1(x), \dots, e^{-\lambda_{s(\delta, t)} t} \varphi_{s(\delta, t)}(x)) \end{aligned}$$

*est un plongement de  $M$  dans l'espace Euclidien de dimension  $s(\delta, t)$ . Dans cet espace, la distance Euclidienne, est égale à la distance de diffusion, à un degré d'exactitude de  $\delta$ . i.e.*

$$|D_t(x, y) - \|\Psi_t^s(x) - \Psi_t^s(y)\|_{\mathbb{R}^{s(\delta, t)}}| \leq \delta$$

pour tout  $x, y \in M$ .

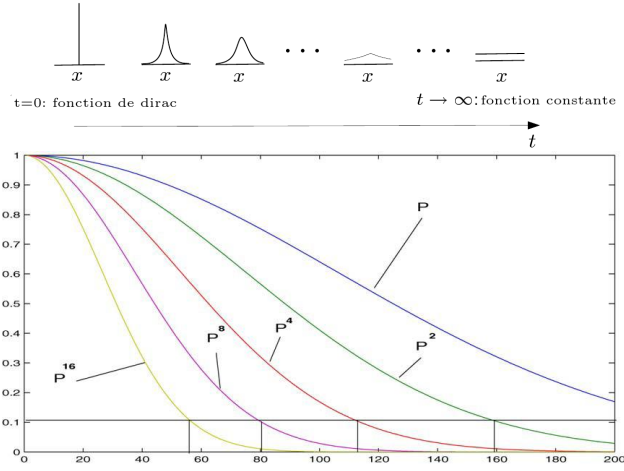


FIG. 2.1 – Quand  $t$  augmente, le support de  $k(t, x, \cdot)$  devient plus grand, et le nombre de valeurs propres significatives de  $P_t = e^{-t\Delta}$  diminue.

**Preuve.** D'après le théorème 2.2.6, il existe bien  $N_0 \in \mathbb{N}$ , tel que l'application

$$\Psi_t^{N_0} : M \rightarrow \mathbb{R}^{N_0}$$

$$x \mapsto (e^{-\lambda_1 t} \varphi_1(x), \dots, e^{-\lambda_{N_0} t} \varphi_{N_0}(x))$$

est un plongement de  $M$  dans  $\mathbb{R}^n$ . De plus,

$$\sum_{i=0}^{\infty} e^{-2\lambda_i t} (\varphi_i(x) - \varphi_i(y))^2 = K(2t, x, x) + K(2t, y, y) - 2K(2t, x, y),$$

pour tout  $t > 0$ , et tous  $x, y \in M$ . Alors, pour tous  $t > 0$ ,  $x, y \in M$ ,  $\delta > 0$ , il existe  $s > 0$ , tel que

$$\sum_{i=s}^{\infty} e^{-2\lambda_i t} (\varphi_i(x) - \varphi_i(y))^2 \leq \delta.$$

Or, la suite des fonction  $f_n$  définies par

$$f_n(t, x, y) = \sum_{i=n}^{\infty} e^{-2\lambda_i t} (\varphi_i(x) - \varphi_i(y))^2$$

est monotone (car pour tout  $n \in \mathbb{N}$ , et tout  $x, y \in M$ ,  $f_{n+1}(t, x, y) > f_n(t, x, y)$ ), alors d'après le théorème de Dini<sup>3</sup>, on a : pour tous  $t > 0$ ,  $\delta > 0$ , il existe  $s_0(\delta, t) > 0$ , tel que

$$\sum_{i=s_0(\delta, t)}^{\infty} e^{-2\lambda_i t} (\varphi_i(x) - \varphi_i(y))^2 \leq \delta$$

pour tous  $x, y \in M$ . Enfin, pour tout  $s(\delta, t) > s_0(\delta, t)$ , on a

$$\sum_{i=s(\delta, t)}^{\infty} e^{-2\lambda_i t} (\varphi_i(x) - \varphi_i(y))^2 \leq \delta$$

<sup>3</sup>La convergence simple d'une suite montone de fonctions définies et continues sur un espace compact vers une fonction continue implique sa convergence uniforme.

pour tous  $x, y \in M$ . En choisissant  $s(\delta, t) \geq N_0$ , on a le résultat. □

La figure 2.2, illustre le théorème 2.3.1, pour  $t > 0$  fixé où  $\mathbb{R}^{s(\delta, t)} = \mathbb{R}^3$ . La distance de diffusion entre deux points dans l'espace de plongement est la longueur de la corde qui les relie.

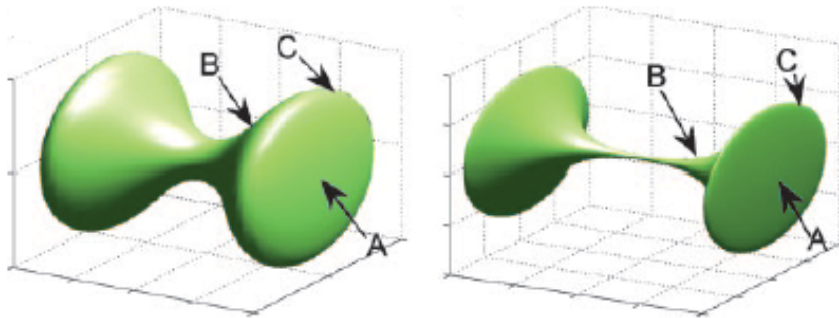


FIG. 2.2 – Haltère original (à gauche) et son plongement (à droite) à l'aide des premières 3 fonctions propres. Puisque la diffusion est plus lente sur le cou, les points sont plus loin l'un de l'autre dans l'espace de plongement.

**Remarque 2.3.2.** Le théorème 2.3.1, s'applique aussi sur les graphes et les ensembles de donnée (voir figure 2.3).

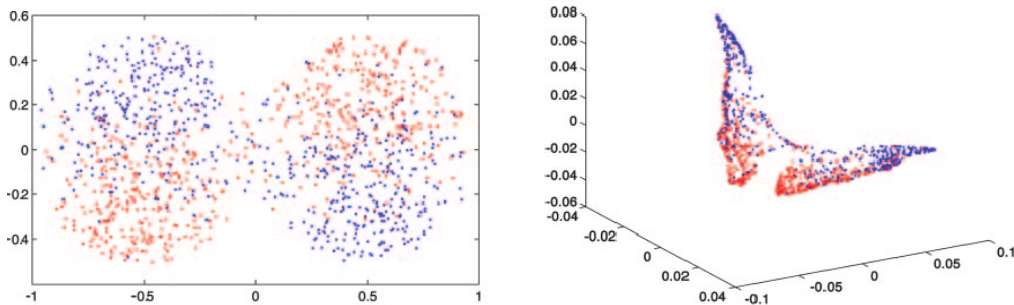


FIG. 2.3 – L'ensemble de points original (à gauche), est plongé sous la forme d'un papillon (à droite), et les phases sont organisées selon la diffusion qu'ils engendrent : la longueur de la corde entre deux points dans l'espace d'arrivée mesure la quantité de chaleur qui peut être transmise entre ces deux points.

## 2.4 Paramétrisations universelles locales à l'aide du noyau de la chaleur et des fonctions propres

Dans beaucoup d'applications récentes, on tend à trouver des représentations d'ensembles de données, et il était observé dans plusieurs cas que les fonctions propres d'un laplacien sur un graphe d'ensembles de données fournit un système robuste de coordonnées locales utile pour réduire la dimension (voir [Coi05], [BN02], et [CL06]).

Dans cette section, on va donner des énoncés analogues pour les variétés, en introduisant des systèmes de coordonnées à l'aide des noyaux de la chaleur.

Dans des travaux récents de Jones, Maggioni, et Shull (voir [JMS08]), les auteurs utilisent les solutions fondamentales et les fonctions propres du laplacien pour construire des coordonnées locales sur les larges classes de domaines Euclidiens et des variétés riemanniennes (pas nécessairement lisses). Ces coordonnées sont bi-lipshitzziennes sur un large voisinage du domaine ou de la variété, avec des constantes contrôlant la distortion et le volume des voisinages qui dépendent uniquement des propriétés géométriques du domaine ou de la variété.

Plus précisément, soit  $M$  une variété riemannienne de dimension  $n$ , et considérons une boule  $B(z, r) \subseteq M$ . Alors on peut trouver exactement  $n$  fonctions propres qui constituent un système de coordonnées "robuste"<sup>4</sup> sur  $B(z, cr)$ , où  $c$  est une constante qui dépend de  $M$ .

D'abord on traite le cas des domaines Euclidiens. On considère un domaine  $\Omega$  de volume fini dans  $\mathbb{R}^n$ , avec les conditions au bord de Dirichlet

$$\begin{cases} \left( \Delta - \frac{\partial}{\partial t} \right) u(x, t) = 0 \\ u|_{\partial\Omega} = 0 \end{cases}$$

ou de Neumann

$$\begin{cases} \left( \Delta - \frac{\partial}{\partial t} \right) u(x, t) = 0 \\ \partial_\nu u|_{\partial\Omega} = 0 \end{cases}$$

où  $\nu$  est le vecteur normal orienté vers l'extérieur, et  $\Delta$  est le laplacien sur  $\Omega$ . Dans ces deux cas, on considère seulement les domaines où le spectre du laplacien est discret, et le noyau de la chaleur correspondant, peut être écrit sous la forme :

$$K(t, x, y) = \sum_{i \in \mathbb{N}} e^{-\lambda_i t} \varphi_i(x) \varphi_i(y)$$

où  $\{\varphi_i\}_{i \in \mathbb{N}}$  est une base orthonormale de fonctions propres de  $\Delta$ . On suppose en plus qu'il existe une constante  $C_{Weyl, \Omega}$  telle que, pour tout  $\lambda > 0$ ,

$$\text{card}\{i, \lambda_i \leq \lambda\} \leq C_{Weyl, \Omega} \lambda^{\frac{d}{2}} \text{Vol}(\Omega).$$

La condition ci-dessus est toujours satisfaite si on a les conditions de Dirichlet au bord, mais elle n'est pas toujours vraie si on a les conditions de Neumann au bord (voir [NS05], et [HSS91]).

<sup>4</sup>dans le sens qu'il est stable sous les perturbations

**Théorème 2.4.1.** [JMS08](Système de coordonnées de fonctions propres, pour les domaines Euclidiens) Soit  $\Omega$  un domaine dans  $\mathbb{R}^n$ , renormalisé tel que  $\text{Vol}(\Omega) = 1$ . Il existe des constantes  $c_1, \dots, c_6$ , qui dépendent de  $n$  et de  $C_{weyl, \Omega}$ , satisfaisant les propriétés suivantes : pour tout  $z \in \Omega$ , posons  $R_z \leq \text{dist}(z, \partial\Omega)$ , alors, il existe  $n$  fonctions propres  $\varphi_{i_k}$ ,  $k = 1, \dots, n$ , du laplacien  $\Delta_\Omega$ , et des constantes

$$c_6 R_z^{\frac{n}{2}} \leq \gamma_1 = \gamma_1(z), \dots, \gamma_n = \gamma_n(z) \leq 1,$$

dépendantes uniquement du choix de  $z$ , telles que

1. l'application

$$\begin{aligned} \Phi : B(z, c_1 R_z) &\rightarrow \mathbb{R}^n \\ x &\mapsto (\gamma_1 \varphi_{i_1}(x), \dots, \gamma_n \varphi_{i_n}(x)) \end{aligned}$$

est un plongement, et satisfait, pour tout  $x, y \in B(z, c_1 R_z)$ ,

$$\frac{c_2}{R_z} \|x - y\| \leq \|\Phi(x) - \Phi(y)\| \leq \frac{c_3}{R_z} \|x - y\|; \quad (2.4.1)$$

2. les valeurs propres associées satisfont

$$c_4 R_z^{-2} \leq \lambda_{i_1}, \dots, \lambda_{i_n} \leq c_5 R_z^{-2}.$$

**Remarque 2.4.2.** on a besoin de la dépendance de la constante  $C_{Weyl, \Omega}$  seulement dans le cas où on a les conditions de Neumann au bord.

Une des particularités de ce plongement, (comme l'on peut le voir d'après l'équation 2.4.1) est que les fonctions propres sélectionnées agissent comme un microscope sur  $B(z, c_1 R_z)$ , dans le sens que, le diamètre de l'image de  $B(z, c_1 R_z)$  par ce plongement est  $\sim 1$ .

Le résultat ci-dessus peut être vrai pour une classe de variété riemanniennes. Soit  $M$  une variété riemannienne compacte, avec ou sans bord, et  $g$  une métrique riemannienne  $C^\alpha$ , pour  $\alpha > 0$ . Pour tout  $z \in M$ , soit  $(\mathcal{U}, u)$  un système de cartes tel que  $z \in U$ , et

(i)  $g^{il}(u(z)) = \delta^{il}$ .

(ii) Pour tout  $x \in \mathcal{U}$ , et tous  $\xi, \nu \in \mathbb{R}^d$ ,

$$c_{min}(g) \|\xi\|_{\mathbb{R}^d}^2 \leq \sum_{i,j=1}^d g^{ij}(u(x)) \xi_i \xi_j \leq c_{max}(g) \|\xi\|_{\mathbb{R}^d} \|\nu\|_{\mathbb{R}^d}.$$

Soit  $r_M(z) = \sup\{r > 0; B_r(u(z)) \subseteq u(\mathcal{U})\}$ . Soit

$$\|g\|_{\alpha \wedge 1} = \max_{i,j=1, \dots, n} \left( \int_{\mathbb{U}} (g^{ij}(x))^{\alpha-1} dv(x) \right)^{\frac{1}{\alpha-1}},$$

où  $\alpha \wedge 1 = \inf \alpha, 1$ . Alors on a

**Théorème 2.4.3.** [JMS08](Système de coordonnées de fonctions propres, pour les variétés Riemanniennes) Soit  $(M, g)$  une variété riemannienne compacte,  $z \in M$ , et  $(\mathcal{U}, u)$ , comme ci-dessus. Supposons en plus, que  $\text{vol}(M) = 1$ . Il existe des constantes  $c_1, \dots, c_6 > 0$ , dépendants de  $d, c_{min}, c_{max}, \|g\|_{\alpha \wedge 1}, \alpha \wedge 1$ , et  $C_{Weyl, M}$ , tel que les propriétés suivantes sont

satisfaites : Soit  $R_z = r_M(z)$ , alors il existe  $d$  fonctions propres  $\varphi_{i_k}$  du laplacien  $\Delta_M$ ,  $k = 1, \dots, d$ , et des constantes

$$c_6 R_z^{\frac{d}{2}} \leq \gamma_1 = \gamma(z), \dots, \gamma_d = \gamma_d(z) \leq 1,$$

telles que

1. l'application

$$\begin{aligned} \Phi : B(z, c_1 R_z) &\rightarrow \mathbb{R}^d \\ x &\mapsto (\gamma_1 \varphi_{i_1}(x), \dots, \gamma_d \varphi_{i_d}(x)) \end{aligned}$$

est un plongement, et satisfait, pour tout  $x, y \in B(z, c_1 R_z)$ ,

$$\frac{c_2}{R_z} r(x, y) \leq \|\Phi(x) - \Phi(y)\| \leq \frac{c_3}{R_z} r(x, y);$$

2. les valeurs propres associées satisfont

$$c_4 R_z^{-2} \leq \lambda_{i_1}, \dots, \lambda_{i_d} \leq c_5 R_z^{-2}.$$

**Remarque 2.4.4.** Dans les deux théorèmes 2.4.1, et 2.4.5, les constantes  $\gamma_j$  sont données par

$$\gamma_j = \left( \int_{B(z, cR_z)} \varphi_{i_j}(z')^2 dz' \right)^{-\frac{1}{2}}.$$

**Théorème 2.4.5.** (Système de coordonnées de chaleur) Soit  $(M, g)$  une variété riemannienne, de dimension  $n$ ,  $z \in M$ , et  $(\mathcal{U}, u)$  comme ci-dessus, sauf que  $\text{vol}(M)$  peut être  $\infty$ . Soient  $R_z \leq \min\{1, u\}$ ,  $p_1, \dots, p_d$  sont  $p$  directions linéaires linéairement indépendants. Alors, il existe des constantes  $c_1, \dots, c_6 > 0$ , dépendants de  $n, c_{\min}, c_{\max}, \|g\|_{\alpha \wedge 1}, \alpha \wedge 1$ , et la plus petite et plus grande valeur propre de la matrice de Gram  $(p_i, p_j)_{i,j=1, \dots, n}$ , tels que les propriétés suivantes sont satisfaites : Soit  $y_i$  tel que le vecteur  $y_i - z$  est colinéaire à  $p_i$ , avec

$$c_4 R_z \leq r(y, z) \leq c_5 R_z, \text{ pour tout } i = 1, \dots, n,$$

et soit  $t_z = c_6 R_z^2$ . Alors, l'application

$$\begin{aligned} \Phi : B(z, c_1 R_z) &\rightarrow \mathbb{R}^n \\ x &\mapsto (R_z^d K_{t_z}(x, y_1), \dots, R_z^n K_{t_z}(x, y_n)) \end{aligned}$$

est un plongement, et satisfait, pour tout  $x_1, x_2 \in B(z, c_1 R_z)$ ,

$$\frac{c_2}{R_z} r(x_1, x_2) \leq \|\Phi(x_1) - \Phi(x_2)\| \leq \frac{c_3}{R_z} r(x_1, x_2).$$

**Remarque 2.4.6.** Ce théorème est vrai dans le cas Euclidien et dans le cas des variétés riemanniennes, et dépend uniquement des estimations du noyau de la chaleur et son gradient. Les démonstrations dans ces deux cas sont presque similaires. Pour voir les détails, consulter [JMS08]. Il faut noter de plus que la preuve est faite sur une carte locale (qu'on choisit) contenant une boule suffisamment large autour de  $z$ . Dans le cas de la variété riemannienne, on utilise uniquement la norme  $\|g\|_{\alpha \wedge 1}$  de  $g$  restreinte sur la carte choisie. Notons aussi que le théorème est vrai si on choisit  $R_z \leq r_M(z)$ .

**Exemple dans l'espace Euclidien  $\mathbb{R}^2$ .** Soient  $n = 2$ ,  $R_z = 1$ ,  $z = 0$ ,  $y_1 = (-1, 0)$ , et  $y_2 = (0, -1)$ , et soit  $k(t, \cdot, \cdot)$  le noyau de la chaleur de  $\mathbb{R}^2$ , i.e.  $K(t, x, y) = (4\pi t)^{-1} e^{-\frac{|x-y|^2}{4t}}$ . Alors l'application

$$\begin{aligned} \Phi : \mathbb{R}^2 \supset B_{\frac{1}{2}}((0, 0)) &\rightarrow \mathbb{R}^2 \\ x &\mapsto (K(1, x, y_1), K(1, x, y_2)) \end{aligned}$$

est un plongement bi-lipschitzien. La démonstration est assez facile, par ce qu'on peut tout simplement calculer  $K(1, x, y_1)$ , et  $K(1, x, y_2)$ .

## 2.5 Généralisations au laplacien dépendant du temps

Dans cette section on considère une variété compacte munie d'une famille de métriques  $g(t)$  analytique en  $t \in ]-T, T[$ , où  $T > 0$ . D'abord, on va démontrer l'existence d'un nombre fini de fonctions propres du laplacien  $\Delta_{g(t)}$ , analytiques en  $t$  dans un voisinage de  $t = 0$ . On va ainsi généraliser les plongements des section précédentes avec un nombre fini de fonctions propres.

### 2.5.1 Existence de valeurs et de fonctions propres analytiques du laplacien dépendant du temps

On commence par le lemme suivant concernant une valeur propre  $\lambda$  de  $\Delta_0 = \Delta_{g(0)}$ . Ensuite, on le généralise pour un nombre fini de valeur propres.

**Lemme 2.5.1.** (*M. Berger [Ber73]*) Soit  $\lambda$  une valeur propre de l'opérateur  $\Delta_0$ , de multiplicité  $k$ . Alors, il existe  $\epsilon > 0$ , et  $k$  fonctions scalaires  $\lambda_i(t)$ ,  $1 \leq i \leq k$ , et  $k$  fonctions à valeurs dans  $C^\infty(M)$ ,  $\varphi_i(t)$ , analytiques en  $t$ , pour  $t \leq \epsilon$ , et vérifiant :

- (i)  $\Delta_t \varphi_i(t) = \lambda_i(t) \varphi_i(t)$ , pour  $1 \leq i \leq k$ ,  $t \leq \epsilon$ ;
- (ii)  $\lambda_i(0) = \lambda$ ,  $1 \leq i \leq k$ ;
- (iii)  $\{\varphi_i(t)\}_{1 \leq i \leq k}$ , est un système orthonormé de  $L^2(M, v_t)$ , pour  $t \leq \epsilon$ , où  $v_t$  désigne la mesure riemannienne associée à la métrique  $g(t)$ .

**Remarque 2.5.2.** La démonstration de ce lemme dans [Ber73] était insuffisante; pour cette raison, et vu l'importance du résultat et de ses applications, P. Bérard donne la démonstration complète dans [Bér]. En fait, cette preuve est calquée sur celle du théorème 1, de [Rel69], I§1, page 33, où l'auteur a considéré une fois pour toute un espace vectoriel  $\mathcal{D}$ , de dimension finie, contrairement aux conditions du lemme où l'espace de Hilbert varie en  $z$  (mais avec une dimension finie invariante en  $z$ ).

**Lemme 2.5.3.** Avec les mêmes hypothèses que celles du lemme 2.5.1, supposons que l'intervalle  $[\lambda - d_1, \lambda + d_2]$ , où  $d_1, d_2 > 0$ , ne contient comme valeur propre de  $A$ , que  $\lambda$ . Alors, pour tous  $d'_1, d'_2$ , tels que,  $0 < d'_1 < d_1$ ,  $0 < d'_2 < d_2$ , il existe  $\epsilon > 0$ , tel que le spectre de  $A(t)$  dans l'intervalle  $\lambda - d'_1 < \mu < \lambda + d'_2$ , contient exactement les points  $\lambda_1(t), \dots, \lambda_h(t)$ , pour tout  $|t| < \epsilon$ .

**Preuve** Ce lemme est une conséquence immédiate de la séparation du spectre pour une variété riemannienne compacte, de l'analyticit e de  $\lambda_i(t)$ ,  $i = 1, \dots, k$ , et de leur convergence vers  $\lambda$ .

□

**Lemme 2.5.4.** Soient  $\lambda_0 \leq \lambda_1 \leq \dots \leq \lambda_k$ , les  $k$  premières valeurs propres de  $\Delta_0$ ,  $k$  suffisamment grand. Alors il existe un  $\epsilon_k > 0$ , et, pour tout entier  $i = 1, \dots, k$ , il existe une fonction  $\lambda_i(t)$ , et une fonction  $\varphi_i(t)$ , analytiques en  $|t| \leq \epsilon_k$ , et vérifiant :

- (i')  $\Delta_t \varphi_i(t) = \lambda_i(t) \varphi_i(t)$ , pour tout  $|t| \leq \epsilon_k$ .
- (ii')  $\lambda_i(0) = \lambda_i$ .
- (iii')  $\{\varphi_i(t)\}_{i \leq k}$  est un système orthonormé de  $L^2(M, v_t)$ , pour tout  $|t| \leq \epsilon_k$ .

**Preuve.** Soient  $\nu_1 < \dots < \nu_p$ , les premières valeurs propres distinctes de  $\Delta_0$ , de multiplicité  $m_i$  respectivement,  $i = 1, \dots, p$ . Alors, d'après le lemme 2.5.1, il existe pour tout  $i = 1, \dots, p$ ,  $\epsilon_i > 0$ ,  $m_i$  fonctions scalaires  $\lambda_{il}(t)$ ,  $l = 1, \dots, m_i$ , et  $m_i$  fonctions  $\varphi_{il}(t)$  à valeurs dans  $C^\infty(M)$ , analytiques en  $|t| \leq \epsilon_i$ , et vérifiant :

- (1)  $\Delta_t \varphi_{il}(t) = \lambda_{il}(t) \varphi_{il}(t)$ , pour tout  $|t| < \epsilon_i$ .
- (2)  $\lambda_{il}(0) = \nu_i$ .
- (3)  $\{\varphi_{il}(t)\}_{l=1}^{m_i}$ , est un système orthonormé de  $L^2(M, v_t)$ , pour tout  $|t| < \epsilon_i$ .
- (4) Puisque la variété  $M$ , est compacte, son spectre est séparé, et pour  $|t| < \epsilon_i$ ,  $i = 1, \dots, p$ , le spectre de  $\Delta_{g(t)}$  dans l'intervalle  $[\mu_i, \mu_{i+1}[$  contient exactement les points  $\lambda_{il}(t)$ ,  $l = 1, \dots, m_i$ .

Pour démontrer maintenant (i'), (ii'), et (iii'), posons  $\epsilon_k = \inf_{i=1}^p \{\epsilon_i\}$ , et désignons  $\varphi_{1i}$ , par  $\varphi_1, \dots, \varphi_{m_1}$ , les  $\varphi_{2i}$ , par  $\varphi_{m_1+1}, \dots, \varphi_{m_1+m_2}$ , et ainsi de suite. De cette façon, on obtient  $k$  fonctions  $\phi_i(t)$ , et  $k$  fonctions  $\lambda_i(t)$ , analytiques en  $t$ , pour  $|t| \leq \epsilon_k$ , telles que

- (i')  $\Delta_t \varphi_i(t) = \lambda_i(t) \varphi_i(t)$ , pour tout  $|t| \leq \epsilon_k$ .
- (ii')  $\lambda_i(0) = \lambda_i$ .
- (iii') - Si  $\lambda_i = \lambda_j$ , alors d'après la partie (2) de cette preuve,  $\langle \phi_i(t), \phi_j(t) \rangle_{g(t)} = \delta_{ij}$ .  
- Si  $\lambda_i \neq \lambda_j$ , alors, d'après (4),  $\lambda_i(t) \neq \lambda_j(t)$ , et comme  $\Delta_{g(t)}$  est un opérateur autoadjoint,

$$\langle \Delta_{g(t)} \phi_i(t), \phi_j(t) \rangle_{g(t)} = \langle \phi_i(t), \Delta_{g(t)} \phi_j(t) \rangle_{g(t)},$$

i.e.,

$$\langle \lambda_i(t) \varphi_i(t), \varphi_j(t) \rangle_{g(t)} = \langle \varphi_i(t), \lambda_j(t) \varphi_j(t) \rangle_{g(t)},$$

alors  $\langle \varphi_i(t), \varphi_j(t) \rangle_{g(t)} = 0$ , ainsi

$$\langle \varphi_i(t), \varphi_j(t) \rangle_{g(t)} = \delta_{ij}, \text{ et } \|\varphi_i(t)\|_{g(t)} = 1, \text{ pour tout } i, j = 1, \dots, k.$$

□

### 2.5.2 Plongement d'une famille de variétés Riemanniennes dans un espace Euclidien à l'aide de un nombre fini de fonctions propres.

On commence d'abord en énonçant les théorèmes Taubériens de Hardy-Littlewood avec reste. On a

**Théorème 2.5.5.** [Kor04] Supposons que, pour une constante  $A$  et  $\alpha, \beta > 0$ , on a

$$F(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = [A + O(1-x)^\beta] \frac{1}{(1-x)^\alpha}, \text{ quand } x \nearrow 1$$

avec  $a_n \geq 0$ , ou  $a_n \geq -Cn^{\alpha-1}$ , pour tout  $n \in \mathbb{N}$ . Alors

$$\sum_{n=0}^N a_n = \left[ A + O\left(\frac{1}{\log N}\right) \right] \frac{N^\alpha}{\Gamma(\alpha+1)}, \text{ quand } N \rightarrow \infty.$$

On a alors le corollaire suivant

**Corollaire 2.5.6.** Soit  $F(s) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n e^{-ns}$ , où  $a_n \geq 0$ . Supposons que

$$F(s) = As^{-\alpha}(1 + o(s)), \text{ quand } s \rightarrow 0,$$

où  $\alpha > 0$ , et  $A > 0$ , alors

$$\sum_{n \leq \lambda} a_n = \frac{\lambda^{-\alpha}}{\Gamma(1+\alpha)} \left( A + O\left(\frac{1}{\ln \lambda}\right) \right) \text{ quand } \lambda \rightarrow \infty.$$

On a aussi besoin pour cette section du corollaire suivant :

**Corollaire 2.5.7.** ([Mor62b], page 3, Corollaire 2) Soient  $M, N$  deux variétés différentiables. L'ensemble des plongements (applications propres et injectives et qui sont des immersions locales) de  $M$  dans  $N$  est un ouvert de  $C^s(M, N)$  pour la topologie  $C^s$  (Cet ouvert peut être évidemment vide).

Maintenant, considérons une famille de variétés riemanniennes  $(M, g(t))$ , où  $g(t)$  sont analytiques en  $t \in [-T, T]$ ,  $T > 0$ . On a le théorème suivant

**Théorème 2.5.8.** Il existe  $\epsilon_0 > 0$ , et  $N_0 \in \mathbb{N}$ , tel que l'application

$$\begin{aligned} \Phi_t : (M, g(t)) &\rightarrow \mathbb{R}^{N_0+1} \\ x &\mapsto \frac{2(4\pi)^{\frac{n}{2}} \Gamma\left(\frac{n}{2} + 2\right)}{(\lambda_{N_0}(t))^{\frac{n}{2}+1}} (\varphi_0(t, x), \dots, \varphi_{N_0}(t, x)) \end{aligned}$$

où  $\varphi_i(t), i = 0, \dots, N_0$ , sont des fonctions propres analytiques en  $t \in [-\epsilon_1, \epsilon_1]$ ,  $\epsilon_1 > 0$ , est un plongement pour tout  $0 \leq t < \epsilon_0$ . De plus, la métrique tirée en arrière de  $\Phi_t$ , est de la forme

$$(\Phi_t)^* Can = g(t) \left( 1 + O\left(\frac{1}{\ln(\lambda_{N_0}(t))}\right) \right)$$

où  $Can$  est la métrique Euclidienne de  $\mathbb{R}^{N_0+1}$ .

**Remarque 2.5.9.** On constate que, plus le nombre de fonction propres en jeu est grand, plus on est proche d'avoir un plongement isométrique. Constatons aussi que ce plongement est défini pour  $t = 0$ , contrairement au plongement construit dans le théorème 0.0.11.

**Preuve.** D'après le théorème 2.2.6, il existe  $N_0 \in \mathbb{N}$ , tel que l'application

$$\begin{aligned} \Phi_0 : (M, g(t)) &\rightarrow \mathbb{R}^{N_0+1} \\ x &\mapsto \frac{2(4\pi)^{\frac{n}{2}} \Gamma\left(\frac{n}{2} + 2\right)}{(\lambda_{N_0})^{\frac{n}{2}+1}} (\varphi_0(0, x), \dots, \varphi_{N_0}(0, x)), \end{aligned}$$

où  $\varphi_i(0), i = 0, \dots, N_0, N_0 + 1$  sont les premières fonctions propres de  $\Delta_{g(0)}$ . De plus, d'après le lemme 2.5.4, il existe  $\epsilon_1 > 0, N_0 + 1$  fonctions scalaires  $\lambda_i(t)$  et  $N_0 + 1$  fonctions  $\varphi_i(t)$ , toutes analytiques en  $|t| \leq \epsilon_1$ , telles que

$$\Delta_{g(t)}\varphi_i(t) = \lambda_i(t)\varphi_i(t), \text{ pour tout } |t| \leq \epsilon_1,$$

et pour tout  $|t| \leq \epsilon_1, \{\varphi_i(t)\}_{i \leq N_0}$  est un système orthonormé de  $L^2(M, v_{g(t)})$ . Ce qui montre que l'application  $\Phi_t$  est bien définie pour tout  $|t| \leq \epsilon_1$ .

D'abord,  $\Phi_t \in C^\infty(M, \mathbb{R}^{N_0+1})$ , puisque chacune des valeurs propres  $\varphi_i(t) \in C^\infty(M)$ . De plus, est clair d'après l'analyticité des  $\varphi_i(t)$ , et des  $\lambda_{N_0}(t)$ , pour  $|t| \leq \epsilon_1$ , que

$$\lim_{t \rightarrow 0} \|\Phi_t(x) - \Phi_0(x)\|_{\mathbb{R}^{N_0+1}} = 0, \text{ pour tout } x \in M. \quad (2.5.1)$$

Comme  $M$  est compacte, l'équation 2.5.1 nous donne que  $\Phi_t$  converge uniformément vers  $\Phi_0$  dans  $C^0(M, \mathbb{R}^{N_0+1})$ .

D'autre part, pour tout  $i = 0, \dots, N_0, \varphi_i(t)$  est développable en série entière<sup>5</sup> au voisinage de  $t = 0$ . On peut écrire  $\varphi_i(t), i = 0, \dots, N_0$ , sous la forme

$$\varphi_i(t) = \sum_{l=0}^{\infty} \psi_{i,l} t^l, \quad |t| \leq \epsilon_2, \quad (2.5.2)$$

où  $\epsilon_2 > 0$ , et  $\psi_{i,l}$  sont des fonctions  $C^\infty$  sur  $M$ .

Fixons  $i \in \{0, \dots, N_0\}$ . Par définition de la diff rentiability, on a pour tout  $l \in \mathbb{N}$ ,

$$|\psi_{i,l} \circ \exp_x(\vartheta) - \psi_{i,l} \circ \exp_x(0) - d_x \psi_{i,l}(\vartheta)| = o_l(|\vartheta|)$$

où pour tout  $l \in \mathbb{N}, o_l(|\vartheta|) = o(|\vartheta|)$ , et

$$\exp_x : T_x M \supseteq B(0, \frac{\rho}{2}) \rightarrow B(x, \frac{\rho}{2}), \quad \rho = \inf\{inj(M, g(t)), t \in [0, \epsilon_2]\}$$

est une carte locale autour de  $x$ , et  $\psi_{i,l} \circ \exp_x$  est différentiable en 0, avec  $T_0 \exp_x(\vartheta) = \vartheta$ . Ce qui nous donne

$$|d_x \psi_{i,l}(\vartheta)| \leq |\psi_{i,l} \circ \exp_x(\vartheta) - \psi_{i,l} \circ \exp_x(0)| + o_l(|\vartheta|).$$

Alors

$$t^l |d_x \psi_{i,l}(\vartheta)| \leq t^l |\psi_{i,l} \circ \exp_x(\vartheta) - \psi_{i,l} \circ \exp_x(0)| + t^l o_l(|\vartheta|).$$

Or, il existe  $C_0 > 0, \xi_0 > 0$ , tel que, pour tout  $l \in \mathbb{N}$ , et tout  $\vartheta \in T_x M$  :

$$|\vartheta| \leq \xi_0 \Rightarrow |\psi_{i,l} \circ \exp_x(\vartheta) - \psi_{i,l} \circ \exp_x(0)| \leq C_0.$$

<sup>5</sup>Par définition de l'analyticité des  $\varphi_i(t), i = 0, \dots, N_0$ .

En fait, sinon, alors pour tous  $C > 0$ ,  $\xi > 0$ , il existe  $l \in \mathbb{N}$ ,  $\vartheta \in T_x M$ , tel que  $|\vartheta| \leq \xi$ , et

$$|\psi_{i,l} \circ \exp_x(\vartheta) - \psi_{i,l} \circ \exp_x(0)| > C.$$

Ce qui est absurde car pour tout  $l \in \mathbb{N}$ ,

$$\lim_{|\vartheta| \rightarrow 0} |\psi_{i,l} \circ \exp_x(\vartheta) - \psi_{i,l} \circ \exp_x(0)| = 0$$

de même pour  $o_l(|\vartheta|)$  i.e. il existe  $C_1 > 0$ ,  $\xi_1 > 0$ , tel que pour tout  $l \in \mathbb{N}$ ,

$$|\vartheta| \leq \xi_2 \Rightarrow |o_l(|\vartheta|)| \leq \varepsilon |\vartheta|.$$

En fait, supposons par absurde que pour tous  $C > 0$ ,  $\xi > 0$ , il existe  $l \in \mathbb{N}$ , et  $\vartheta \in T_x M$ , tel que  $|\vartheta| \leq \xi$ , et  $|o_l(|\vartheta|)| > C$ . Or<sup>6</sup>, pour tout  $\varepsilon > 0$ , il existe  $\xi > 0$ , tel que

$$|\vartheta| \leq \xi \Rightarrow |o_l(|\vartheta|)| \leq \varepsilon |\vartheta|.$$

Alors, pour tous  $C > 0$ ,  $\varepsilon > 0$ , il existe  $\xi > 0$ , tel que  $|\vartheta| \leq \xi$ , et  $C \leq \varepsilon |\vartheta|$ , ce qui est absurde.

En posant  $\xi_2 = \inf\{\xi_0, \xi_1\}$ , on a

$$t^l |d_x \psi_{i,l}(\vartheta)| \leq t^l (C + C_1), \text{ pour tous } l \in \mathbb{N}, |\vartheta| < \xi_2.$$

Soit  $\vartheta \in T_x M$  tel que  $0 < |\vartheta| < \xi_2$ . Pour  $|t| < 1$ , on a

$$t^l \left| d_x \psi_{i,l} \left( \frac{\vartheta}{|\vartheta|} \right) \right| \leq \frac{(C + C_1)}{|\vartheta|} t^l, \text{ pour tous } l \in \mathbb{N}.$$

Ce qui nous donne que, pour  $|t| \leq \inf\{\varepsilon_2, 1\}$  ( $\varepsilon_2$  définie dans l'équation 2.5.2), la série  $\sum_{l=0}^{\infty} t^l |d_x \psi_{i,l}|$  est normalement convergente sur l'ensemble

$$\{\vartheta \in T_x M; \quad |\vartheta| \leq \xi_2\}$$

et

$$d_x \varphi_i(t, \vartheta) = \sum_{l=0}^{\infty} t^l |d_x \psi_{i,l}(\vartheta)|,$$

pour tout  $\vartheta \in T_x M$  tel que  $|\vartheta| \leq \xi_2$ . En raison de la linéarité de  $d_x \varphi_i(t, \cdot)$ , on a

$$\lim_{t \rightarrow 0} \|d_x \varphi_i(t, V) - d_x \varphi_i(0, V)\| = 0, \text{ uniformément en } V \in T_x^1 M,$$

car  $T_x^1 M$  compacte.

On a démontré que  $\varphi_i(t)$  converge vers  $\varphi_i(0)$  dans  $C^1(M, \mathbb{R}^{N_0+1})$ , pour la topologie  $C^1$ . Alors, d'après le corollaire 2.5.7, il existe  $\varepsilon_0 > 0$ , tel que, pour tout  $|t| < \varepsilon_0$ ,  $\Phi_t$  est un plongement de  $(M, g(t))$  dans  $\mathbb{R}^{N_0+1}$ .

<sup>6</sup>D'après la définition de  $o(|\vartheta|)$

pour démontrer la formule de la métrique tirée en arrière, soient

$$0 = \lambda_0(t) \leq \lambda_1(t) \leq \dots$$

les valeurs propres du laplacien  $\Delta_{g(t)}$ , et  $\{\varphi_i(t)\}_{i \geq 0}$  une base de fonctions propres associés (on ne prétend pas que les  $\varphi_i(t)$  sont continues en  $t$ ). Pour tout  $t$  fixé, soit  $K_{g(t)}(s, \cdot, \cdot)$  le noyau de la chaleur de  $(M, g(t))$  i.e. la solution fondamentale du problème

$$\begin{cases} (\Delta_{g(t)} - \frac{\partial}{\partial s}) K_{g(t)}(s, x, y) = 0 \\ \lim_{s \rightarrow 0} K_{g(t)}(s, x, y) = \delta_x(y) \end{cases}$$

On a (cf. théorème 1.1.12),

$$K_{g(t)}(s, x, y) = \sum_{j \geq 1} e^{-\lambda_j(t)s} \varphi_j^2(t, x).$$

Comme, pour tout  $t$  fixé (cf. section 1.2.2, en remplaçant  $t$  par  $s$ )

$$K_{g(t)}(s, x, y) = \frac{1}{(4\pi s)^{\frac{n}{2}}} (1 + a(s, t))$$

où  $a(s, t) = O(s)$ , pour tout  $t$  fixé. De plus, d'après [BBG94],

$$\sum_{j \geq 1} e^{-\lambda_j(t)s} (d_x \varphi_j(t, V))^2 = d_s K_{g(t)}(s, V, V)|_{x=y} = \frac{g(t)(V, V)}{2(4\pi)^{\frac{n}{2}} s^{\frac{n}{2}+1}} (1 + b(t, s))$$

où  $d_s f$  est le "seconde dérivation mixte" de  $f$  définie par :

$$d_s f|_{(x,x)} = d_{2,y} d_{1,x} f(x, y)|_{(x,x)},$$

$d_1, d_2$  étant respectivement les dérivations par rapport aux variables  $x$ , et  $y$ , et  $b(t, s) = O(s)$ , pour tout  $t$  fixé. Alors, d'après le corollaire 2.5.6,

$$\sum_{\lambda_i(t) \leq \lambda(t)} (d_x \varphi_i(t, V))^2 = \frac{(\lambda(t))^{\frac{n}{2}+1} g(t)(V, V)}{2(4\pi)^{\frac{n}{2}} \Gamma(\frac{n}{2} + 2)} \left( 1 + d \left( V, \frac{1}{\ln \lambda(t)} \right) \right),$$

avec

$$d \left( V, \frac{1}{\ln \lambda(t)} \right) = O \left( \frac{1}{\ln \lambda(t)} \right), \text{ quand } \lambda(t) \rightarrow \infty,$$

uniformément en  $V \in T_x^1 M$ ,  $x \in M$ . D'où

$$(\Phi_t)^* Can = g(t) \left( 1 + O \left( \frac{1}{\ln(\lambda_{N_0}(t))} \right) \right)$$

où  $Can$  est la métrique Euclidienne de  $\mathbb{R}^{N_0+1}$ . □

**Remarque 2.5.10.** Avec la même méthode utilisée pour démontrer la première partie de ce théorème, on peut généraliser aussi le théorème 2.4.5.

## 2.6 Plongement GPS d'une famille de variétés riemanniennes

Dans cette section, on va plonger une famille de variétés riemanniennes en utilisant un système orthonormal complet de fonctions propres du laplacien perturbé. Et puisque on n'est pas sûr de l'existence d'un tel système dans le cas où la variété  $M$  est munie d'une famille quelconque de métriques  $g(t)$  analytiques en  $t$  au voisinage de  $t = 0$ , on va supposer en plus, que  $dv_{g(t)}$  est invariant en  $t$ .

### 2.6.1 Existence d'une base complète de fonction propres du laplacien dépendant du temps.

Soit  $g(t)$  une famille analytique de métriques à un paramètre  $t$ , qui varie dans  $\mathbb{R}$ . Développons  $g(t)$  en série au voisinage de 0

$$g(t) = \sum_{i=0}^{\infty} a_i t^i,$$

et étendons la famille  $g$  à des valeurs complexes  $z$  du paramètre, au voisinage de 0 dans  $\mathbb{C}$ , par la formule

$$g(z) = \sum_{i=0}^{\infty} a_i z^i.$$

Associons à  $g(z)$  l'opérateur  $\Delta_{g(z)}$ , de  $C^\infty(M, \mathbb{C})$ , dans lui-même définie en coordonnées locales, par

$$\Delta_{g(z)} f = g^{ij}(z) \left[ \frac{\partial^2}{\partial x^i \partial x^j} f - \Gamma_{ij}^k \frac{\partial}{\partial x^k} f \right]$$

où  $(g^{ij}(z))_{i,j} = g(z)^{-1}$ , et

$$\Gamma_{ij}^k(z) = g^{kl}(z) \left( \frac{\partial}{\partial x^i} g_{lj}(z) + \frac{\partial}{\partial x^j} g_{li} - \frac{\partial}{\partial x_l} g_{ij}(z) \right).$$

On commence d'abord par la définition d'une famille holomorphe de type (A) au sens de Kato ;

**Définition 2.6.1.** (Famille holomorphe de type (A) au sens Kato [Kat76]) Une famille d'opérateurs  $A(z)$ , définie pour  $z \in D_0$ , où  $D_0$  est un domaine dans le plan complexe, est dite holomorphe de type (A) (au sens Kato), si

1. Le domaine  $D$  de  $A(z)$ , est indépendant de  $z$  ;
2.  $A(z)u$  est holomorphe en tout  $u \in D$ , pour tout  $z \in D_0$ .

**Théorème 2.6.2.** (Kato [Kat76], p. 392) Soit  $A(t)$  une famille analytiques d'opérateurs de type (A). Supposons qu'elle est définie dans un voisinage  $D_0$  du plan complexe. En particulier, supposons qu'elle est définie dans un voisinage d'un intervalle  $I_0$  de l'axe réel, et supposons que  $A(t)$  admet une resolvente compacte. Alors, toutes les valeurs propres de  $A(t)$ , peuvent être représentés par des fonction analytiques sur  $I_0$ . Plus précisément il existe une suite de fonctions scalaires  $\mu_n(t)$ , et une suite de fonctions  $\phi_n(t)$ , toutes analytiques sur  $I_0$ , et telles que pour  $t \in I_0$ , les  $\mu_n(t)$ , représentent toutes les valeurs propres de  $A(t)$  comptés avec leurs répétitions, et les  $\varphi_n(t)$  forment une famille complète de fonctions propres associés de  $A(t)$ .

On a

**Proposition 2.6.3.** (Bérard [Bér])  $\Delta_{g(t)}$  est une famille d'opérateurs de type (A) au sens de Kato.

La proposition 2.6.3 nous assure qu'il existe une suite de fonctions scalaires  $\lambda_i(t)$ , et de fonctions  $\varphi_i(t)$ , toutes analytiques en  $t$ , au voisinage de  $t = 0$ , telles que  $\lambda_i(t)$  est une valeur propre de  $\Delta_{h(t)}$ , et les  $\varphi_i(t)$ , forment une famille complète de fonctions propres associés de  $\Delta_{h(t)}$ .

### 2.6.2 Le plongement GPS ( signature globale du point sur une variété)

Le nom GPS pour une application a été introduit par Rustmanov dans son article [Rus07]. L'idée provient du fait que ce vecteur de dimension infinie est une signature, c'est une caractérisation du point dans le contexte global de la surface : en fait, deux surfaces isométriques ont la même image par le plongement GPS. Ceci revient au fait que les valeurs propres et les vecteurs propres de l'opérateur Laplace Beltrami détermine d'une manière unique le tenseur métrique.

Soit  $(M, g(t))$ ,  $t \in [-T, T]$ , avec  $T > 0$  une famille de variétés riemanniennes telle que  $g(t)$  est analytique dans un voisinage ouvert de  $[-T, T]$ ,  $dv_{g(t)} = dv_{g(0)}$ , pour tout  $t \in [-T, T]$ . D'après le lemme 2.6.2, et 2.6.3, il existe une base complète de fonctions propres  $\varphi_i(t)$ , de  $\Delta_{g(t)}$ , et des fonction scalaires  $\lambda_i(t)$ , toutes analytiques sur  $[-T, T]$ , telles que

$$\Delta_{g(t)}\varphi_i(t) = \lambda_i(t)\varphi_i(t),$$

pour tout  $i \in \mathbb{N}$ , et tout  $t \in [-T, T]$ .

On a le théorème suivant :

**Théorème 2.6.4.** *L'application*

$$\begin{aligned} \Phi_t : (M, h(t)) &\rightarrow l^2, \quad t \in ]0, T] \\ x &\mapsto (2\pi t)^{\frac{n}{4}} \left\{ e^{-\frac{\lambda_i(t)}{2}} \varphi_i(t, x) \right\}_{i \geq 1} \end{aligned}$$

est un GPS plongement pour tout  $t \in ]0, T]$ . Et

$$\Phi_t^*(V, V) = h(t)(V, V) + t Ric_{h(t)}(V, V) + O(t).$$

**Preuve.** Soit  $k_s : \mathbb{R}_+^* \times M \times M$  le noyau de la chaleur de la variété  $(M, h(s))$ . Alors, pour tout  $t \in I_0$ , et tout  $x \in M$ ,

$$\|\Phi_t(x)\|_{l^2}^2 = \sum_{i>0} e^{-\lambda_i(t)} \varphi_i^2(t, x) = k_t(t, x, x)$$

et l'application  $\Phi_t$  est bien définie, puisque pour tout  $x \in M$ ,  $\Phi_t(x) \in l^2$ . De plus,  $\Phi_t$  est bien un plongement de  $(M, h(t))$  dans  $l^2$ , et continue en  $t$ . La preuve est la même que celle du théorème 0.0.11. De plus

$$\Phi_t^*(V, V) = h(t)(V, V) + t Ric_{h(t)}(V, V) + O(t), \text{ quand } t \rightarrow 0.$$

□

## Chapitre 3

# La solution fondamentale d'une famille de variétés de volume constant

Soit  $h(t)$ ,  $t \in [0, T]$ , avec  $T > 0$ , une famille  $C^\infty$  de métriques Riemanniennes sur une variété compacte  $M$  de dimension finie  $n$  telles que

$$L^2(M, v_0) = L^2(M, v_{h(0)}) = L^2(M, v_{h(t)}).$$

Définissons l'opérateur

$$\square_t = \Delta_{h(t)} - \frac{\partial}{\partial t}$$

où  $\Delta_{h(t)}$  est le laplacien par rapport à la métrique  $h(t)$ . La solution fondamentale pour l'opérateur  $\square_t$  est une fonction  $P$  continue sur  $\mathbb{R}_T^2 \times M \times M$ , où

$$\mathbb{R}_T^2 = \{(t, s) \in \mathbb{R}^2, 0 \leq s < t \leq T\},$$

$C^1$  par rapport aux deux premières variables temporelles, et  $C^2$  par rapport aux deux variables spatiales, telle que

$$\begin{cases} \square_t P(t, s, x, y) = 0 \\ \lim_{t \rightarrow s} P(t, s, x, y) dv_0(x) = \delta_y(x). \end{cases} \quad (3.0.1)$$

**Remarque 3.0.5.** *L'opérateur  $\square_t$  agit sur la première variable spatiale  $x$ .*

Rappelons que l'existence de la solution fondamentale de 3.0.1 a été démontré dans plusieurs travaux récents, notamment dans [CCG<sup>+</sup>ar] et [Gue02]. Cette solution est strictement positive et unique. Elle est exprimée dans [CCG<sup>+</sup>ar] sous la forme

$$P(t, s, x, y) = (4\pi(t-s))^{-\frac{n}{2}} e^{-\frac{r_t^2(x,y)}{4(t-s)}} \sum_{k=0}^N (t-s)^k v_k(t, s, x, y) + O((t-s)^{N-\frac{n}{2}}) \quad (3.0.2)$$

où  $r_t$  est la distance riemannienne par rapport à la métrique  $g(t)$ ; et  $v_k$  sont des fonctions  $C^\infty$  sur  $M \times M$ , et dépendants des deux paramètres  $s$  et  $t$ . Dans [Gue02], cette solution

est exprimée sous la forme

$$P(t, s, x, y) = (4\pi(t-s))^{-\frac{n}{2}} e^{-\frac{r_s^2(x,y)}{4(t-s)}} \sum_{k=0}^N (t-s)^k v_k(t, x, y) + O((t-s)^{N-\frac{n}{2}}) \quad (3.0.3)$$

où  $r_s$  est la distance riemannienne par rapport à la métrique  $g(s)$ , et les  $v_k$  sont des fonctions  $C^\infty$  sur  $M \times M$ , et dépendants du paramètre  $t$ .

**Remarque 3.0.6.** Dans les deux équations 3.0.2, et 3.0.3  $N > \frac{n}{2} + 1$ ,  $x, y \in M$ , et  $0 \leq s < t \leq T$ .

Notre but dans ce chapitre est de démontrer que la solution fondamentale  $P$  peut être exprimée sous la forme :

$$P(t, s, x, y) = (4\pi(t-s))^{-\frac{n}{2}} e^{-\frac{r^2(x,y)}{4(t-s)}} \sum_{k=0}^N (t-s)^k \tilde{u}_k(s, x, y) + \Theta_N(t, s, x, y)$$

où  $r$  est la distance riemannienne par rapport à la métrique  $h(0)$ ,  $\tilde{u}_k$ ,  $k = 1, \dots, N$ , sont des fonctions (qu'on va définir ultérieurement)  $C^\infty$  sur  $M \times M$ , dépendants de la variable  $s \in [0, T]$ , et  $\Theta_N$  est une fonction  $C^1$  par rapport aux deux variables du temps  $s$  et  $t$ ,  $C^2$  par rapport aux deux variables spatiales, avec  $\Theta_N(t, s, x, y) = O((t-s)^{N-\frac{n}{2}})$ .

D'abord, on démontre que la fonction  $P_N$  définie par

$$P_N(t, s, x, y) = (4\pi(t-s))^{-\frac{n}{2}} e^{-\frac{r^2(x,y)}{4(t-s)}} \sum_{k=0}^N (t-s)^k \tilde{u}_k(s, x, y)$$

est le paramétrix de l'équation de la chaleur non linéaire  $\square_t$ , et on calcule les deux fonctions  $\tilde{u}_0$ , et  $\tilde{u}_1$ , au moins pour  $x, y$  assez proches.

Puis, on définit la convolution en espace-temps par

$$(H * J)(t, s, x, y) = \int_s^t d\tau \int_M H(t, \tau, x, z) J(\tau, s, z, y) dv_0(z).$$

Cette convolution est associative, (voir la preuve [CCG<sup>+</sup>ar] page 269). On pose

$$\begin{aligned} \Phi_1(t, s, x, y) &= \square_t P_N(t, s, x, y), \\ \Phi_2(t, s, x, y) &= (\square_t P_N * \Phi_1)(t, s, x, y) = (\square_t P_N)^{*2}(t, s, x, y), \\ \Phi_{m+1}(t, s, x, y) &= (\square_t P_N * \Phi_m)(t, s, x, y) = (\square_t P_N)^{*m+1}(t, s, x, y), \\ \Theta_N(t, s, x, y) &= \left( P_N * \sum_{m=1}^{\infty} \Phi_m \right)(t, s, x, y), \end{aligned} \quad (3.0.4)$$

et on se propose de démontrer que  $P_N + \Theta_N$  est la solution fondamentale de 3.0.1 pour  $0 \leq s < t \leq T$ . Pour ce but, il faut démontrer que la série  $\sum_{m=1}^{\infty} \Phi_m(t, s, x, y)$  converge pour  $0 \leq s < t \leq T$  et que,

$$\square_t \Theta_N(t, s, x, y) = \int_s^t d\tau \int_M \square_t P_N(t, \tau, x, z) \sum_{m=1}^{\infty} \Phi_m(\tau, s, z, y) dv_0(z) - \sum_{m=1}^{\infty} \Phi_m(t, s, x, y), \quad (3.0.5)$$

ce qui nous donne

$$\begin{aligned} (\square_t P_N + \square_t \Theta_N)(t, s, x, y) &= \square_t P_N(t, s, x, y) + \left( \square_t P_N * \sum_{m=1}^{\infty} \Phi_m \right)(t, s, x, y) - \sum_{m=1}^{\infty} \Phi_m(t, s, x, y) \\ &= \square_t P_N(t, s, x, y) + \sum_{m=2}^{\infty} \Phi_m(t, s, x, y) - \sum_{m=1}^{\infty} \Phi_m(t, s, x, y) \\ &= 0. \end{aligned}$$

Ainsi, on démontre que  $P$  est  $C^\infty$  sur  $\mathbb{R}_T^2 \times M \times M$ , donc c'est exactement le noyau de l'équation de la chaleur non linéaire  $\square_t$ .

### 3.1 Le laplacien dépendant du temps

Dans un système de coordonnées locales,  $(\mathcal{U}, \{x^i\}_{i=1}^n)$ , le laplacien par rapport à la métrique  $h(t)$ , et donné par

$$\Delta_{h(t)} = h^{ij}(t) \left[ \frac{\partial^2}{\partial x^i \partial x^j} - \Gamma(t)_{ij}^k \frac{\partial}{\partial x^k} \right],$$

pour tout  $t \in [0, T]$ ,  $(h^{ij}(t))_{i,j}$  étant la matrice inverse de  $(h_{ij}(t))_{i,j}$ , et  $\Gamma(t)_{ij}^k$ ,  $i, j, k = 1, \dots, N$ , les symboles de Cristoffel de la métrique  $h(t)$ . Dans cette section, on va donner le développement limité de  $\Delta_{h(t)}$  au voisinage de  $t = 0$ .

Dans un voisinage de  $t = 0$ , on peut écrire  $h(t)$  sous la forme

$$h(t) = h(0) + \sum_{m=1}^N \frac{1}{m!} \frac{\partial^m h}{\partial t^m}(0) t^m + O(t^{N+1}), \quad N > \frac{n}{2}, \quad 0 \leq t \leq T \quad (3.1.1)$$

où  $\frac{1}{m!} \frac{\partial^m h}{\partial t^m}(0)$  est un tenseur symétrique  $C^\infty$  et de type  $(2, 0)$  sur  $M$ .

L'égalité 3.1.1 veut dire qu'il existe  $C > 0$ ,  $\tau_0 > 0$ , tels que, pour tous  $t < \tau_0$ ,  $x \in M$  et  $V \in T_x M$ , unitaire par rapport à la métrique  $h(0)$ , on a

$$\left| h(t)(V, V) - h(0)(V, V) + \sum_{m=1}^N \frac{1}{m!} \frac{\partial^m h}{\partial t^m}(V, V) t^m \right| \leq C t^{N+1}. \quad (3.1.2)$$

Et comme la famille  $h(t)$  est continue en  $t \in [0, T]$ , il existe  $0 < C < +\infty$ , tel que

$$C^{-1} h(0)(V, V) \leq h(t)(V, V) \leq C h(0)(V, V), \quad \text{pour tout } 0 \leq t \leq T, V \in TM.$$

Donc, dans 3.1.2, on peut prendre  $V$  unitaire par rapport à n'importe quelle métrique  $h(t)$ ,  $0 \leq t \leq T$ .

Le tenseur  $h(t)^{-1}$  sur le fibré cotangent  $T^*M \rightarrow M$ , est bien défini pour tout  $t \in [0, T]$ , et

$$h(t)^{-1} = h^{ij}(t) \frac{\partial}{\partial x^i} \otimes \frac{\partial}{\partial x^j}$$

pour tout système de coordonnées locales  $(M, \{x^i\}_{i=1}^n)$ .

On a

$$\begin{aligned} h(t)^{-1} &= \left( h(0) + \sum_{m=1}^N \frac{1}{m!} \frac{\partial^m h}{\partial t^m} t^m + O(t^{N+1}) \right)^{-1} \\ &= \left[ h(0) \left( I + h(0)^{-1} \sum_{m=1}^N \frac{1}{m!} \frac{\partial^m h}{\partial t^m} t^m + h(0)^{-1} O(t^{N+1}) \right) \right]^{-1} \\ &= \left( I + h(0)^{-1} \sum_{m=1}^N \frac{1}{m!} \frac{\partial^m h}{\partial t^m} t^m + h(0)^{-1} O(t^{N+1}) \right)^{-1} h(0)^{-1}. \end{aligned}$$

En développant le terme  $\left( I + h(0)^{-1} \sum_{m=1}^N \frac{1}{m!} \frac{\partial^m h}{\partial t^m} t^m + h(0)^{-1} O(t^{N+1}) \right)^{-1}$  au voisinage de  $t = 0$ , on a

$$h(t)^{-1} = h(0)^{-1} - \sum_{i=1}^N \left( h(0)^{-1} \sum_{m=1}^N \frac{1}{m!} \frac{\partial^m h}{\partial t^m} (0) t^m + h(0)^{-1} O(t^{N+1}) \right)^i h(0)^{-1} + O(t^{N+1}),$$

et pour tout  $i, j = 1, \dots, n$ , on a

$$h(t)^{ij} = h(0)^{ij} + \sum_{m=1}^N w_m^{ij} t^m + O(t^{N+1}),$$

où les  $w_m$  sont des tenseurs  $C^\infty$  de type  $(0, 2)$  sur  $M$ . Plus précisément,

$$w_1^{ij} = -h^{ik}(0) \left( \frac{\partial h}{\partial t}(0) \right)_{kl} h^{lj}(0),$$

et

$$w_2^{ij} = -h^{ik}(0) \left( \frac{1}{2} \frac{\partial^2 h}{\partial t^2}(0) \right)_{kl} h^{lj}(0) + h^{ik}(0) \left( \frac{\partial h}{\partial t}(0) \right)_{kl} h^{lm}(0) \left( \frac{\partial h}{\partial t}(0) \right)_{mr} h^{rj}.$$

Les symboles de Cristoffel de  $h(t)$  dans un voisinage de  $t = 0$ , sont donnés par

$$\begin{aligned} \Gamma(t)_{ij}^k &= \frac{1}{2} h(t)^{kl} \left( \frac{\partial}{\partial x^i} h(t)_{jl} + \frac{\partial}{\partial x^j} h(t)_{il} - \frac{\partial}{\partial x^l} h(t)_{ij} \right) \\ &= \frac{1}{2} \left[ h(0)^{kl} + \sum_{m=1}^N w_m^{kl} t^m + O(t^{N+1}) \right] \\ &\quad \times \left[ \frac{\partial}{\partial x^i} \left( h(0)_{jl} + \sum_{m=1}^N \left( \frac{1}{m!} \frac{\partial^m h}{\partial t^m}(0) \right)_{jl} t^m + O(t^{N+1}) \right) \right. \\ &\quad \left. + \frac{\partial}{\partial x^j} \left( h(0)_{il} + \sum_{m=1}^N \left( \frac{1}{m!} \frac{\partial^m h}{\partial t^m}(0) \right)_{il} t^m + O(t^{N+1}) \right) \right. \\ &\quad \left. - \frac{\partial}{\partial x^l} \left( h(0)_{ij} + \sum_{m=1}^N \left( \frac{1}{m!} \frac{\partial^m h}{\partial t^m}(0) \right)_{ij} t^m + O(t^{N+1}) \right) \right] \\ &= \Gamma(0)_{ij}^k + \sum_{p=1}^N (A_p)_{ij}^k t^p + O(t^{N+1}), \end{aligned}$$

où

$$(A_p)^k_{ij} = \frac{1}{2} h(0)^{kl} \left[ \frac{\partial}{\partial x_i} \left( \frac{1}{p!} \frac{\partial^p h}{\partial t^p}(0) \right)_{jl} + \frac{\partial}{\partial x_j} \left( \frac{1}{p!} \frac{\partial^p h}{\partial t^p}(0) \right)_{il} - \frac{\partial}{\partial x_l} \left( \frac{1}{p!} \frac{\partial^p h}{\partial t^p}(0) \right)_{ij} \right] \\ + \frac{1}{2} \sum_{m+q=p} w_m^{kl} \left[ \frac{\partial}{\partial x_i} \left( \frac{1}{q!} \frac{\partial^q h}{\partial t^q}(0) \right)_{jl} + \frac{\partial}{\partial x_j} \left( \frac{1}{q!} \frac{\partial^q h}{\partial t^q}(0) \right)_{il} - \frac{\partial}{\partial x_l} \left( \frac{1}{q!} \frac{\partial^q h}{\partial t^q}(0) \right)_{ij} \right].$$

Alors le Laplacien par rapport à la métrique  $h(t)$  dans un voisinage de  $t = 0$  s'écrit sous la forme

$$\Delta_{h(t)} = h(t)^{ij} \left[ \frac{\partial^2}{\partial x^i \partial x^j} - \Gamma(t)^k_{ij} \frac{\partial}{\partial x^k} \right] \\ = \left[ h^{ij}(0) + \sum_{m=1}^N w_m^{ij} t^m + O(t^{N+1}) \right] \\ \times \left[ \frac{\partial^2}{\partial x^i \partial x^j} - \left( \Gamma(0)^k_{ij} + \sum_{p=1}^N (A_p)^k_{ij} t^p + O(t^{N+1}) \right) \frac{\partial}{\partial x^k} \right] \\ = \Delta_{h(0)} + \sum_{m=1}^N t^m w_m^{ij} \frac{\partial^2}{\partial x^i \partial x^j} - \sum_{p=1}^N t^p h(0)^{ij} (A_p)^k_{ij} \frac{\partial}{\partial x^k} - \sum_{m=1}^N t^m w_m^{ij}(0) \Gamma(0)^k_{ij} \frac{\partial}{\partial x^k} \\ - \sum_{m=1}^N \sum_{p=1}^{N-m} t^{m+p} w_m^{ij} (A_p)^k_{ij} \frac{\partial}{\partial x^k} + O(t^{N+1}) \left( \frac{\partial^2}{\partial x^i \partial x^j} + \frac{\partial}{\partial x^k} \right).$$

En ré-organisant les indices selon les puissances de  $t$ , on a

$$\Delta_{h(t)} = \Delta_{h(0)} + \sum_{m=1}^N t^m w_m^{ij} \frac{\partial^2}{\partial x^i \partial x^j} - \sum_{m=1}^N t^m h(0)^{ij} (A_m)^k_{ij} \frac{\partial}{\partial x^k} - \sum_{m=1}^N t^m w_m^{ij} \Gamma(0)^k_{ij} \frac{\partial}{\partial x^k} \\ - \sum_{m=1}^N \sum_{p=1}^{N-m} t^{m+p} w_m^{ij} (A_p)^k_{ij} \frac{\partial}{\partial x^k} + O(t^{N+1}) \left( \frac{\partial^2}{\partial x^i \partial x^j} + \frac{\partial}{\partial x^k} \right) \\ = \Delta_{h(0)} + \sum_{m=1}^N t^m w_m^{ij} \left( \frac{\partial^2}{\partial x^i \partial x^j} - \Gamma(0)^k_{ij} \frac{\partial}{\partial x^k} \right) - \sum_{m=1}^N t^m h(0)^{ij} (A_m)^k_{ij} \frac{\partial}{\partial x^k} \\ - \sum_{m=1}^N \sum_{p+q=m} t^m w_p^{ij} (A_q)^k_{ij} \frac{\partial}{\partial x^k} + O(t^{N+1}) \left( \frac{\partial^2}{\partial x^i \partial x^j} + \frac{\partial}{\partial x^k} \right).$$

Et, en notant  $\nabla_i = \nabla_{\frac{\partial}{\partial x^i}}$  la dérivée covariante dans la direction du vecteur  $\frac{\partial}{\partial x^i}$ , par rapport

à la métrique  $h(0)$ , on a

$$\begin{aligned}\Delta_{h(t)} &= \Delta_{h(0)} + \sum_{m=1}^N t^m w_m^{ij} \nabla_i \nabla_j - \sum_{m=1}^N t^m h(0)^{ij} (A_m)^k_{ij} \frac{\partial}{\partial x^k} \\ &\quad - \sum_{m=1}^N \sum_{p+q=m} t^m w_p^{ij}(0) (A_q)^k_{ij}(0) \frac{\partial}{\partial x^k} + O(t^{N+1}) \left( \frac{\partial^2}{\partial x^i \partial x^j} + \frac{\partial}{\partial x^k} \right) \\ &= \Delta_{h(0)} + \sum_{m=1}^N t^m w_m^{ij} \nabla_i \nabla_j - \sum_{m=1}^N t^m \left( h(0)^{ij} (A_m)^k_{ij} + \sum_{p+q=m} w_p^{ij} (A_q)^k_{ij} \right) \frac{\partial}{\partial x^k} \\ &\quad + O(t^{N+1}) \left( \frac{\partial^2}{\partial x^i \partial x^j} + \frac{\partial}{\partial x^k} \right).\end{aligned}$$

Et

$$\Delta_{h(t)} = \Delta_{h(0)} + \sum_{m=1}^N t^m (w_m^{ij} \nabla_i \nabla_j + v_m^k \nabla_k) + O(t^{N+1}) \left( \frac{\partial^2}{\partial x^i \partial x^j} + \frac{\partial}{\partial x^k} \right)$$

où  $v_m = v_m^k \frac{\partial}{\partial x^k}$  est le champs de vecteurs tel que

$$v_m^k = -h(0)^{ij} (A_m)^k_{ij} - \sum_{p+q=m} w_p^{ij} (A_q)^k_{ij}.$$

### 3.2 Construction du paramétrix de la solution fondamentale de l'équation de la chaleur non linéaire

Dans cette section, nous discutons l'existence d'un paramétrix de la solution fondamentale sur  $(M, h(t))$ , sous la forme

$$P_N(t, s, x, y) = (4\pi(t-s))^{-\frac{n}{2}} e^{-\frac{r^2(x,y)}{4(t-s)}} \sum_{k=0}^N (t-s)^k \tilde{u}_k(s, x, y)$$

où  $r$  est la distance riemannienne par rapport à la métrique  $h(0)$ , et  $\tilde{u}_k$  sont des fonctions  $C^\infty$  sur  $M \times M$ . Pour ce but, on utilise la technique décrite dans [CCG<sup>+</sup>ar], [GL88], [GL89], et [Gue02].

Soit  $\rho > 0$ , le rayon d'injectivité de la métrique  $h(0)$ , et soit

$$U_\rho = \{(x, y) \in M \times M; \quad r(x, y) < \rho\},$$

alors la fonction  $e^{-\frac{r^2}{4(t-s)}}$  est  $C^\infty$  sur  $U_\rho$ . Et soit

$$G(t, s, x, y) = (4\pi(t-s))^{-\frac{n}{2}} e^{-\frac{r^2(x,y)}{4(t-s)}}, \quad 0 \leq s < t \leq T.$$

Posons

$$S_N(t, s, x, y) = G(t, s, x, y) \sum_{k=1}^N (t-s)^k u_k(s, x, y), \quad 0 \leq s < t \leq T \quad (3.2.1)$$

où  $u_0, \dots, u_N$  sont des fonctions  $C^\infty$  sur  $[0, T] \times U_\rho$ , tels que

$$\begin{cases} \square_t S_N(t, s, x, y) = O((t-s)^N) G \\ \lim_{t \rightarrow s} S_N(t, s, x, y) dv_0(x) = \delta_y(x). \end{cases} \quad (3.2.2)$$

On a

$$\square_t S_N = \sum_{k=1}^N u_k(t-s)^k \square_t G + G \square_t \left( \sum_{k=0}^N u_k(t-s)^k \right) + 2 \left\langle \nabla G; \nabla \sum_{k=0}^N u_k(t-s)^k \right\rangle_{h(t)}.$$

En calculant terme par terme, on a,

$$\begin{aligned} \Delta_{h(t)} G &= \Delta_{h(0)} G + \sum_{m=1}^N t^m (w_m^{ij} \nabla_i \nabla_j G + v_m^k \nabla_k G) + O(t^{N+1}) \left( \frac{\partial^2}{\partial x^i \partial x^j} + \frac{\partial}{\partial x^k} \right) G \\ &= \Delta_{h(0)} G + \sum_{m=1}^N t^m (w_m^{ij} \nabla_i \nabla_j G + v_m^k \nabla_k G) \\ &\quad + O(t^{N+1}) \left( -\frac{1}{4(t-s)} \frac{\partial^2 r^2}{\partial x^i \partial x^j} + \frac{1}{4(t-s)^2} \frac{\partial r^2}{\partial x^i} \frac{\partial r^2}{\partial x^j} - \frac{1}{4(t-s)} \frac{\partial r^2}{\partial x^k} \right) G \\ &= \Delta_{h(0)} G + \sum_{m=1}^N t^m (w_m^{ij} \nabla_i \nabla_j G + v_m^k \nabla_k G) + O(t^{N+1}) \left( \frac{1}{t-s} + \frac{r^2}{(t-s)^2} \right) G. \end{aligned}$$

Et puisque  $G$  est une fonction radiale, par rapport à la métrique  $h(0)$ , on a

$$\begin{aligned} \Delta_{h(0)} G &= \frac{\partial^2 G}{\partial r^2} + \frac{\partial \log \sqrt{\det h(0)_{ij}}}{\partial r} \frac{\partial G}{\partial r} \\ &= \left( -\frac{1}{2(t-s)} + \frac{r^2}{4(t-s)^2} - \frac{r}{2(t-s)} \frac{\partial \log \sqrt{\det h(0)_{ij}}}{\partial r} \right) G, \end{aligned}$$

où  $\sqrt{\det h(0)_{ij}} = J_0$  est le Jacobien de l'application exponentielle de  $h(0)$  au point  $x$ , i.e. la densité du volume dans les coordonnées polaires au voisinage de  $x$ . D'où

$$\begin{aligned} \Delta_t G &= \left( -\frac{1}{2(t-s)} + \frac{r^2}{4(t-s)^2} - \frac{r}{2(t-s)} \frac{\partial \log J_0}{\partial r} \right) G \\ &\quad - \frac{1}{4(t-s)} \sum_{m=1}^N t^m (w_m^{ij} \nabla_i \nabla_j r^2 + v_m^k \nabla_k r^2) G + \frac{1}{16(t-s)^2} \sum_{m=1}^N t^m w_m^{ij} \nabla_i r^2 \nabla_j r^2 G \\ &\quad + O(t^{N+1}) \left( \frac{1}{t-s} + \frac{r^2}{(t-s)^2} \right) G, \end{aligned}$$

et par suite

$$\begin{aligned}
 \square_t G &= \left( -\frac{1}{2(t-s)} + \frac{r^2}{4(t-s)^2} - \frac{r}{2(t-s)} \frac{\partial \log J_0}{\partial r} \right) G - \left( -\frac{n}{2(t-s)} + \frac{r^2}{4(t-s)^2} \right) G \\
 &\quad - \frac{1}{4(t-s)} \sum_{m=1}^N t^m (w_m^{ij} \nabla_i \nabla_j r^2 + v_m^k \nabla_k r^2) G \\
 &\quad + \frac{1}{16(t-s)^2} \sum_{m=1}^N t^m w_m^{ij} \nabla_i r^2 \nabla_j r^2 G + O(t^{N+1}) \left( \frac{1}{t-s} + \frac{r^2}{(t-s)^2} \right) G \\
 &= \frac{r}{2(t-s)} \left( \frac{n-1}{r} - \frac{\partial \log J_0}{\partial r} \right) G \\
 &\quad - \frac{1}{4(t-s)} \sum_{m=1}^N t^m (w_m^{ij} \nabla_i \nabla_j r^2 + v_m^k \nabla_k r^2) G + \frac{1}{16(t-s)^2} \sum_{m=1}^N t^m w_m^{ij} \nabla_i r^2 \nabla_j r^2 G \\
 &\quad + O(t^{N+1}) \left( \frac{1}{t-s} + \frac{r^2}{(t-s)^2} \right) G \\
 &= -\frac{r}{2(t-s)} \frac{\partial}{\partial r} \left( \log \frac{J_0}{r^{n-1}} \right) G - \frac{1}{4(t-s)} \sum_{m=1}^N t^m (w_m^{ij} \nabla_i \nabla_j r^2 + v_m^k \nabla_k r^2) G \\
 &\quad + \frac{1}{16(t-s)^2} \sum_{m=1}^N t^m w_m^{ij} \nabla_i r^2 \nabla_j r^2 G + O(t^{N+1}) \left( \frac{1}{t-s} + \frac{r^2}{(t-s)^2} \right) G,
 \end{aligned}$$

toujours pour  $0 \leq s < t \leq T$ . Posons  $\theta_0 = \frac{J_0}{r^{n-1}}$ , alors

$$\begin{aligned}
 \square_{h(t)} G &= -\frac{r}{2(t-s)} \frac{\partial \log \theta_0}{\partial r} G - \frac{1}{4(t-s)} \sum_{m=1}^N t^m (w_m^{ij} \nabla_i \nabla_j r^2 + v_m^k \nabla_k r^2) G \\
 &\quad + \frac{1}{16(t-s)^2} \sum_{m=1}^N t^m w_m^{ij} \nabla_i r^2 \nabla_j r^2 G + O(t^{N+1}) \left( \frac{1}{t-s} + \frac{r^2}{(t-s)^2} \right) G.
 \end{aligned}$$

Posons  $\psi_N(t, s, \dots) = \sum_{k=0}^N u_k(s, \dots)(t-s)^k$ , et calculons  $\langle \nabla G; \nabla \psi_N \rangle_{h(t)}$ . On a

$$\begin{aligned}
 \langle \nabla G, \nabla \psi_N \rangle_{h(t)} &= h(t)^{ij} \nabla_i G \nabla_j \psi_N \\
 &= \left( h^{ij}(0) + \sum_{m=1}^N w_m^{ij}(0) t^m + O(t^{N+1}) \right) \nabla_i G \nabla_j \psi_N \\
 &= \langle \nabla G, \nabla \psi_N \rangle_{h(0)} + \sum_{m=1}^N \sum_{k=0}^N t^m (t-s)^k w_m^{ij} \nabla_i G \nabla_j u_k + O(t^{N+1}) \frac{G}{(t-s)} \sum_{k=0}^N (t-s)^k \nabla_j u_k.
 \end{aligned}$$

Or

$$\langle \nabla G, \nabla \psi_N \rangle_{h(0)} = \frac{\partial G}{\partial r} \frac{\partial \psi_N}{\partial r},$$

alors

$$\begin{aligned} \langle \nabla G, \nabla \psi_N \rangle_{h(t)} &= \frac{\partial G}{\partial r} \frac{\partial \psi_N}{\partial r} + \sum_{m=1}^N \sum_{k=0}^N t^m (t-s)^k w_m^{ij} \nabla_i G \nabla_j u_k + O(t^{N+1}) G \sum_{k=0}^N (t-s)^{k-1} \nabla_j u_k \\ &= -\frac{r}{2(t-s)} G \sum_{k=0}^N (t-s)^k \frac{\partial u_k}{\partial r} - \frac{1}{4(t-s)} G \sum_{m=1}^N \sum_{k=0}^N t^m (t-s)^k w_m^{ij} \nabla_i r^2 \nabla_j u_k \\ &\quad + O(t^{N+1}) G \sum_{k=0}^N (t-s)^{k-1} \nabla_j u_k. \end{aligned}$$

Donc

$$\begin{aligned} \square_t S_N &= -\frac{G}{2} \sum_{k=0}^N (t-s)^{k-1} \frac{\partial \log \theta_0}{\partial r} u_k - \frac{G}{4} \sum_{k=0}^N \sum_{m=1}^N t^m (t-s)^{k-1} (w_m^{ij} \nabla_i \nabla_j r^2 + v_m^k \nabla_k r^2) u_k \\ &\quad + \frac{G}{16} \sum_{k=0}^N \sum_{m=1}^N t^m (t-s)^{k-2} w_m^{ij} \nabla_i r^2 \nabla_j r^2 u_k + G \sum_{k=0}^N (t-s)^k \Delta u_k(s, \cdot, \cdot) \\ &\quad + G \sum_{k=0}^N \sum_{m=1}^N t^m (t-s)^k w_m^{ij} \nabla_i \nabla_j u_k + G \sum_{k=0}^N \sum_{m=1}^N t^m (t-s)^k v_m^l \nabla_l u_k \\ &\quad - G \sum_{k=0}^N k (t-s)^{k-1} u_k - G \sum_{k=0}^N (t-s)^{k-1} r \frac{\partial u_k}{\partial r} \\ &\quad - \frac{G}{2} \sum_{k=0}^N \sum_{m=1}^N t^m (t-s)^{k-1} w_m^{ij} \nabla_i r^2 \nabla_j u_k + O(t^{N+1}) \sum_{k=1}^N (t-s)^{k-1} G u_k \\ &\quad + O(t^{N+1}) \sum_{k=0}^N (t-s)^{k-2} G u_k + O(t^{N+1}) G \sum_{k=0}^N (t-s)^{k-1} \nabla_j u_k. \end{aligned}$$

Pour que  $\square_t S_N$  vérifie 3.2.2, on suppose que tous les coefficients de  $(t-s)^p$ , avec  $p < N$ , sont identiquement nuls, et

$$\square_t S_N = G(t-s)^N \Delta u_N + G \sum_{m=1}^N t^m (t-s)^N w_m^{ij} \nabla_i \nabla_j u_N + G \sum_{m=1}^N t^m (t-s)^N v_m^l \nabla_l u_N.$$

Plus particulièrement, en raison de la compacité de  $M$  et de  $[0, T]$ , il existe une constante  $C > 0$ , telle que, pour tous  $x, y \in M$ , et tout  $(t, s) \in \mathbb{R}^2$ ,

$$|\square_t S_N| \leq CG(t, s, x, y)(t-s)^N \quad (3.2.3)$$

Rappelons que  $S_N(t, s, \cdot, \cdot)$  est définie uniquement pour  $(x, y) \in U_\rho$ , alors qu'on cherche une approximation de la solution fondamentale  $C^\infty$  sur  $M \times M$ . Pour ce but, on va introduire une fonction radiale

$$\eta : M \times M \rightarrow [0, 1],$$

$C^\infty$  sur  $M \times M$ , décroissante en  $r(x, y)$ , telle que

$$\eta(x, y) = \begin{cases} 1 & \text{si } (x, y) \in U_{\rho/4} \\ 0 & \text{si } (x, y) \in M \times M - U_{\rho/2}. \end{cases} \quad (3.2.4)$$

Posons

$$U_N(t, s, x, y) = \eta(x, y) \sum_{k=0}^N (t-s)^k u_k(s, x, y). \quad (3.2.5)$$

Comme pour tout  $i = 0, 1, \dots, N$ ,  $u_i$  est  $C^\infty$  sur  $([0, T] \times M \times M)$  qui est compacte, alors pour tout  $i = 0, 1, \dots, N$ ,  $u_i$  est majoré par  $c_i > 0$  et

$$\left| \sum_{i=1}^N (t-s)^i u_i(s, x, y) \right| \leq \sum_{i=1}^N t^i c_i = C \sum_{i=0}^N t^i \leq CNT^i$$

avec  $C = \max\{c_i, i = 0, 1, \dots, N\}$  indépendant de  $x, y \in M$  et de  $s \in [0, T]$ . D'où l'existence d'une constante positive  $C_{N,T}$ , dépendante uniquement de  $N$ , et de  $T$ , telle que

$$|U_N(t, s, x, y)| \leq C_{N,T}. \quad (3.2.6)$$

### 3.2.1 Le paramétrix de l'équation de la chaleur non linéaire.

Posons

$$P_N(t, s, x, y) = G(t, s, x, y)U_N(t, s, x, y).$$

On a le lemme suivant

**Lemme 3.2.1.** *Si  $N > \frac{n}{2}$ , et  $u_0(s, x, x) = 1$ , pour tout  $x \in M$ , et tout  $s \in [0, T]$ , alors  $P_N$  est le paramétrix de l'équation de la chaleur non linéaire, i.e.*

(II<sub>1</sub>)  $P_N \in C^\infty(\mathbb{R}_T^2 \times M \times M)$ .

(II<sub>2</sub>)  $\square_t P_N$  se prolonge en une fonction de  $C^0(\overline{\mathbb{R}_T^2} \times M \times M)$ , où

$$\overline{\mathbb{R}_T^2} = \{(t, s) \in \mathbb{R}^2; \quad 0 \leq s \leq t \leq T\}.$$

(II<sub>3</sub>)  $\lim_{t \rightarrow s} P_N(t, s, x, y) dv_0(x) = \delta_y(x)$  pour tout  $y \in M$ .

**Preuve.**

(II<sub>1</sub>) Il est clair que  $P_N$  est différentiable sur  $\mathbb{R}_T^2 \times M \times M$ .

(II<sub>2</sub>) On a

$$\square_t P_N(t, s, x, y) = \eta \square_t S_N + (\Delta_{h(t)} \eta) S_N + 2 \langle d\eta, dS_N \rangle_{h(t)}.$$

(a) Sur  $\mathbb{R}_T^2 \times (M \times M - U_{\rho/2})$ ,  $\square_t P_N(t, s, x, y) = 0$ , donc, on peut prolonger par continuité par 0 pour  $(t, s) \in \overline{\mathbb{R}_T^2}$ , tel que  $t = s$ .

(b) Sur  $\mathbb{R}_T^2 \times U_{\rho/4}$ ,

$$\square_t P_N(t, s, x, y) = \square_t S_N(t, s, x, y) \leq C(t-s)^N G(t, s, x, y).$$

Donc  $\square_t P_N$  est prolongeable par continuité en une fonction définie sur  $\overline{\mathbb{R}_T^2} \times U_{\rho/4}$  prenant la valeur 0 pour  $(t, s) \in \overline{\mathbb{R}_T^2}$ , tel que  $t = s$ , puisque  $N > \frac{n}{2}$  et  $e^{-\frac{r^2(x,y)}{4(t-s)}}$  est bornée uniformément.

(c) Sur  $\mathbb{R}_T^2 \times (U_{\rho/2} - U_{\rho/4})$ ,

$$\square_t P_N(t, s, x, y) = \eta(x, y) \square_t S_N(t, s, x, y) + (\Delta_{h(t)} \eta(x, y)) S_N(t, s, x, y) + 2 \langle d\eta(x, y), dS_N(t, s, x, y) \rangle_{h(t)}.$$

Or  $\eta$  est  $C^\infty$  sur  $M \times M$ , alors  $|\eta|, |\Delta_{h(t)} \eta|, et |\nabla \eta|$ , sont bornées uniformément, en particulier  $|\eta| < 1$ , alors, il existe  $C > 0$  indépendante de  $x, y \in M$ , tel que

$$\begin{aligned} |\square_t P_N(t, s, x, y)| &\leq C (|\square_t S_N| + |S_N| + 2|\nabla S_N|)(t, s, x, y) \\ &\leq C' G(t, s, x, y) ((t-s)^N + 1 + (t-s)^{-1}) \\ &\leq C' (4\pi(t-s)^{-\frac{n}{2}}) e^{-\frac{\rho^2}{64(t-s)}} ((t-s)^N + (t-s)^{-1} + 1), \end{aligned}$$

où  $C'$  est une constante positive indépendante de  $t, s, x, y$ , puisque dans la région  $(U_{\rho/2} - U_{\rho/4})$ ,  $r(x, y) > \rho/4$ . Alors,  $|\square_t P_N(t, s, x, y)| \rightarrow 0$  quand  $t \rightarrow s$ , uniformément en  $x, y \in (U_{\rho/2} - U_{\rho/4})$ .

Et  $(\Pi_2)$  est démontré.

$(\Pi_3)$  Soient  $f \in C^0(M)$  et  $y \in M$ , alors

$$\lim_{t \rightarrow s} \int_M P_N(t, s, x, y) f(x) dv_0(x) = \sum_{k=0}^N \lim_{t \rightarrow s} (t-s)^k \int_M G(t, s, x, y) \eta(x, y) u_k(s, x, y) f(x) dv_0(x). \quad (3.2.7)$$

Soit  $B_y(\frac{\rho}{4})$  la boule de centre  $y$  et de rayon  $\rho/4$ , par rapport à la métrique  $h(0)$ . On évalue cette limite dans l'égalité 3.2.7 terme à terme selon les puissances de  $(t-s)$ . Pour tout  $k = 1, \dots, n$ , on a

$$\begin{aligned} &(t-s)^k \int_M G(t, s, x, y) \eta(x, y) u_k(s, x, y) f(x) dv_0(x) \\ &= (t-s)^k \left[ \int_{B_y(\frac{\rho}{4})} G(t, s, x, y) \eta(x, y) u_k(s, x, y) f(x) dv_0(x) + \int_{M \setminus B_y(\frac{\rho}{4})} G(t, s, x, y) \eta(x, y) u_k(s, x, y) f(x) dv_0(x) \right]. \end{aligned}$$

D'une part,  $r(x, y) > \frac{\rho}{4}$ , pour tout  $x \in M \setminus B_y(\frac{\rho}{4})$ , alors

$$\begin{aligned} &(t-s)^k \int_{M \setminus B_y(\frac{\rho}{4})} G(t, s, x, y) \eta(x, y) u_k(s, x, y) f(x) dv_0(x) \\ &\leq (t-s)^k \int_{M \setminus B_y(\frac{\rho}{4})} (4\pi)^{-\frac{n}{2}} (t-s)^{-\frac{n}{2}} e^{-\frac{\rho^2}{64(t-s)}} \eta(x, y) u_k(s, x, y) f(x) dv_0(x) \leq C(t-s)^k \end{aligned}$$

où  $C$  est une constante positive indépendante de  $x \in M \setminus B_y(\frac{\rho}{4})$ , et de  $(t, s) \in \mathbb{R}_T^2$ , (l'application  $\tau \mapsto \tau^{-\frac{n}{2}} e^{-\frac{\rho^2}{64\tau}}$  est bornée, et les trois fonctions  $\eta(\cdot, y)$ ,  $u_k(s, \cdot, y)$ , et  $f$  sont continues sur  $M$  qui est compacte, donc bornées). Alors

$$\lim_{t \rightarrow s} (t-s)^k \int_{M \setminus B_y(\frac{\rho}{4})} G(t, s, x, y) \eta(x, y) u_k(s, x, y) f(x) dv_0(x) = 0$$

D'autre part, posons  $B_{\rho/4}$  la boule de centre 0 et de rayon  $\rho/4$  dans  $T_y M$  (par rapport à la métrique  $h(0)$ ). En coordonnées données par l'application exponentielle, par rapport à la métrique  $h(0)$ , et en posant  $\exp_y \vartheta = x$ ,

$$\begin{aligned} & (t-s)^k \int_{B_y(\frac{\rho}{4})} G(t, s, x, y) \eta(x, y) u_k(s, x, y) f(x) dv_0(x) \\ &= (t-s)^k \int_{B_{\rho/4}} G(t, s, \exp_y \vartheta, y) \eta(\exp_y \vartheta, y) u_k(\exp_y \vartheta, y) f(\exp_y \vartheta) (\exp_y)^* dv_0(\vartheta) \end{aligned} \quad (3.2.8)$$

Or

$$(\exp_y)^* dv_0(\vartheta) = \left( 1 - \frac{1}{6} Ric_{h(0)}(\vartheta, \vartheta) + o(|\vartheta|_{h(0)}^2) \right) dv_{eucl}(\vartheta),$$

$dv_{eucl}$  étant la forme volume Euclidienne, (voir [GHL04], page 169), et  $Ric_{h(0)}$  le tenseur courbure de Ricci par rapport à la métrique  $h(0)$ . Par conséquent, l'équation 3.2.8 est égale à

$$(t-s)^k \int_{B_{\rho/4}} G(t, s, \exp_y \vartheta, y) \eta(\exp_y \vartheta, y) u_k(\exp_y \vartheta, y) f(\exp_y \vartheta) \left( 1 - \frac{1}{6} Ric_{h(0)}(\vartheta, \vartheta) + o(|\vartheta|_{h(0)}^2) \right) dv_{eucl}(\vartheta)$$

qui est à son tour égal à

$$(t-s)^k \int_{B_{\rho/4}} G_{\mathbb{R}^2}(t, s, \vartheta, 0) \eta(\exp_y \vartheta, y) u_k(\exp_y \vartheta, y) f(\exp_y \vartheta) \left( 1 - \frac{1}{6} Ric_{h(0)}(\vartheta, \vartheta) + o(|\vartheta|_{h(0)}^2) \right) dv_{eucl}(\vartheta) \quad (3.2.9)$$

où  $G_{\mathbb{R}^n}$  est le noyau de la chaleur Euclidien<sup>1</sup> ( puisque  $r(x, y) = |\vartheta|^2$ ), et

$$G_{\mathbb{R}^n}(t, s, \vartheta, 0) = \frac{e^{-\frac{|\vartheta|^2}{4(t-s)}}}{(4\pi(t-s))^{\frac{n}{2}}} = \frac{e^{-\frac{r^2(x,y)}{4(t-s)}}}{(4\pi(t-s))^{\frac{n}{2}}} = G(t, s, x, y).$$

Comme  $G(t, s, \vartheta, 0) dv_{eucl}(\vartheta)$  tend vers  $\delta_y(0)$ , quand  $t \rightarrow s$ , on peut voir que la limite de l'expression 3.2.9, lorsque  $t \rightarrow s$ , est

$$\begin{cases} u_0(\exp_y(0), \exp_y(0)) f(\exp_y(0)) = u_0(y, y) & \text{pour } k = 0 \\ 0 & \text{pour } k > 0 \end{cases}$$

En supposant  $u_0(s, y, y) = 1$ , pour tout  $s \in [0, T]$  on a

$$\lim_{t \rightarrow s} \int_M P_N(t, s, x, y) f(x) dv_0(x) = f(y),$$

et  $(\Pi_3)$  est démontré. □

### 3.2.2 Calcul des deux premiers coefficients du paramétrix de la solution fondamentale.

Dans cette section, on va calculer explicitement les deux premiers coefficients du paramétrix  $P_N$ ,  $u_0$  et  $u_1$  au temps  $s = 0$ . Rappelons qu'on a supposé que  $u_0(0, x, x) = 1$ , pour tout  $x \in M$ . Puisqu'il n'y a pas d'ambiguïté, on pose  $u_0(x, y) = u_0(0, x, y)$ , et  $u_1(x, y) = u_1(0, x, y)$ , pour  $(x, y) \in U_\rho$ .

<sup>1</sup>On rappelle que  $G$  à la même forme de celle du noyau de la chaleur Euclidien  $G_{\mathbb{R}^2}$ , mais c'est une fonction dont les variables spatiales sont les points de la variété  $M$ .

**Corollaire 3.2.2.** Pour  $(x, y) \in U_\rho$ , on a

$$u_0(x, y) = \theta_0^{-\frac{1}{2}}(x, y)e^{f(x, y)} \quad (3.2.10)$$

où

$$f(x, y) = \sum_{i, j=1}^n \left( \frac{1}{8} w_1^{ij}(y) x^i(x) x^j(x) + \frac{1}{12} \left( \nabla_k w_1^{ij} \right) (y) x^i(x) x^j(x) x^k(x) \right) + \Lambda(x, y); \quad (3.2.11)$$

$x^i(x)$  sont les coordonnées de  $x$  dans un système de coordonnées géodésiques normales centré en  $y$ , et  $w_1$  est le 2-tenseur défini par

$$w_1^{ij} = -h^{ik}(0) \left( \frac{\partial h}{\partial t}(0) \right)_{kl} h^{lj}(0),$$

et  $\Lambda$  est une fonction  $C^\infty$  sur  $U_\rho$ , avec  $\Lambda(x, y) = O(r(x, y))$ ,  $\nabla_i \Lambda(x, y) = O(r(x, y))$ , et  $\nabla_i \nabla_j \Lambda(x, y) = O(r(x, y))$ , pour tout  $i, j = 1, \dots, n$ .

**Preuve.** D'après 3.2.2, et le développement de  $\square_t S_N$ , on a

$$\frac{1}{2} r \frac{\partial \log \theta_0}{\partial r}(\cdot, y) u_0(\cdot, y) + r \frac{\partial u_0}{\partial r}(\cdot, y) - \frac{1}{16} w_1^{ij} \nabla_i r^2 \nabla_j r^2 u_0(\cdot, y) = 0.$$

Alors,

$$\frac{1}{2} r \frac{\partial \log \theta_0}{\partial r}(\cdot, y) u_0(\cdot, y) + r \frac{\partial u_0}{\partial r}(\cdot, y) - \frac{4r^2}{16} w_1^{ij} \nabla_i r \nabla_j r u_0(\cdot, y) = 0.$$

Et

$$\frac{\partial u_0}{\partial r}(\cdot, y) u_0^{-1}(\cdot, y) = -\frac{1}{2} \frac{\partial \log \theta_0}{\partial r}(\cdot, y) + \frac{1}{4} r w_1(\nabla r(\cdot, y), \nabla r(\cdot, y)). \quad (3.2.12)$$

Soit  $x \in M$  et  $\gamma : [0, r(x, y)] \rightarrow M$ , la géodésique qui relie  $y$  à  $x$ , et tel que  $\gamma(0) = y$ , et tel que  $|\dot{\gamma}(s)| = 1, \forall s \in [0, r(x, y)]$ , alors  $\nabla r(\gamma(s), y) = \dot{\gamma}(s)$ , et

$$\frac{\partial u_0}{\partial s}(\gamma(s), y) u_0^{-1}(\gamma(s), y) = -\frac{1}{2} \frac{\partial \log \theta_0}{\partial s}(\gamma(s), y) + \frac{1}{4} r w_1(\dot{\gamma}(s), \dot{\gamma}(s)). \quad (3.2.13)$$

En intégrant le long de la géodésique  $\gamma, s \in [0, r(x, y)]$ , on a

$$\frac{u_0(x, y)}{u_0(y, y)} = \frac{\theta_0^{-\frac{1}{2}}(x, y)}{\theta_0^{-\frac{1}{2}}(y, y)} \exp \left( \int_0^{r(x, y)} \frac{1}{4} s w_1(\dot{\gamma}(s), \dot{\gamma}(s)) ds \right).$$

Soit  $\{x^i\}$  le système de coordonnées géodésiques normales centré en  $y$ , par rapport à la métrique  $h(0)$ , alors

$$\gamma(s)^i \doteq x^i(\gamma(s)) = \frac{s x^i(x)}{r(x, y)}$$

où  $x^i(x)$  sont les coordonnées de  $x$ . Par suite

$$\dot{\gamma}(s)^i \doteq x^i(\gamma(s)) = \frac{x^i(x)}{r(x, y)},$$

et

$$\begin{aligned} \int_0^{r(x,y)} \frac{1}{4} s w_1(\dot{\gamma}(s), \dot{\gamma}(s)) ds &= \sum_{i,j=1}^n \int_0^{r(x,y)} \frac{1}{4} s w_1^{ij}(\gamma(s)) \dot{\gamma}(s)^i \dot{\gamma}(s)^j ds \\ &= \sum_{i,j=1}^n \int_0^{r(x,y)} \frac{1}{4} s w_1^{ij}(\gamma(s)) \frac{x^i(x)}{r(x,y)} \frac{x^j(x)}{r(x,y)} ds \end{aligned}$$

En développant  $w_1^{ij} \circ \gamma$  au voisinage de  $s = 0$ , on a

$$\begin{aligned} w_1^{ij}(\gamma(s)) &= w_1^{ij}(y) + s \dot{\gamma}(s)^k \left( \nabla_k w_1^{ij} \right) (y) + O(s^2) \\ &= w_1^{ij}(y) + s \frac{x^k(x)}{r(x,y)} \left( \nabla_k w_1^{ij} \right) (y) + O(s^2). \end{aligned}$$

Ainsi

$$\int_0^{r(x,y)} \frac{1}{4} s w_1(\dot{\gamma}(s), \dot{\gamma}(s)) ds = \sum_{i,j=1}^n \left( \frac{1}{8} w_1^{ij}(y) x^i(x) x^j(x) + \frac{1}{12} \left( \nabla_k w_1^{ij} \right) (y) x^i(x) x^j(x) x^k(x) \right) + O(r^3(x,y)).$$

De plus,  $u_0(y, y) = 1$ , et  $\theta_0^{-\frac{1}{2}}(y, y) = \lim_{r(x,y) \rightarrow 0} \theta_0^{-\frac{1}{2}}(x, y) = 1$  (voir [BGM71], page 56-57),

alors

$$u_0(x, y) = \theta_0^{-\frac{1}{2}}(x, y) e^{f(x,y)},$$

où

$$f(x, y) = \sum_{i,j=1}^n \left( \frac{1}{8} w_1^{ij}(y) x^i(x) x^j(x) + \frac{1}{12} \left( \nabla_k w_1^{ij} \right) (y) x^i(x) x^j(x) x^k(x) \right) + O(r^3(x,y)).$$

Le fait que,  $\Lambda$  soit une fonction  $C^\infty$  sur  $U_\rho$ , avec  $\Lambda(x, y) = O(r(x, y))$ ,  $\nabla_i \Lambda(x, y) = O(r(x, y))$ , et  $\nabla_i \nabla_j \Lambda(x, y) = O(r(x, y))$ , pour tout  $i, j = 1, \dots, n$ , est dû au développement de Taylor de  $w_1^{ij}(\gamma(s))$  au voisinage de  $s = 0$ . □

**Corollaire 3.2.3.** *Pour  $(x, y) \in U_\rho$ , on a*

$$\begin{aligned} u_1(x, y) &= r^{-1} u_0(x, y) \int_0^r \Delta \theta_0^{-\frac{1}{2}} \cdot \theta_0^{\frac{1}{2}}(\gamma(s), y) ds \\ &+ r^{-1} u_0(x, y) \int_0^r \Delta f(\gamma(s), y) + \langle \nabla f(\gamma(s), y), \nabla f(\gamma(s), y) \rangle + \langle \nabla \log \theta_0, \nabla f \rangle (\gamma(s), y) ds \\ &- r^{-1} u_0(x, y) \int_0^r \left[ \frac{1}{2} w_1(\nabla r^2(\gamma(s), y), \nabla(\log u_0)(\gamma(s), y)) - \frac{1}{4} (w_1^{ij} \nabla_i \nabla_j r^2(\gamma(s), y) + v_1^l \nabla_l r^2(\gamma(s), y)) \right] ds, \end{aligned}$$

où  $\gamma : [0, r(x, y)] \rightarrow M$  est la géodésique qui relie  $y$  à  $x$ , et tel que  $\gamma(0) = y$ , et tel que  $|\dot{\gamma}(s)| = 1, \forall s \in [0, r(x, y)]$ . En particulier

$$u_1(y, y) = \frac{\tau_0}{6} + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n w_1^{ii}(y) + \frac{1}{4} \sum_{i,j=1}^n h(0)^{ij} w_1^{ij}(y)$$

et ceci pour tout  $y \in M$ .

### 3.2 Construction du paramétrix de la solution fondamentale de l'équation de la chaleur non linéaire 69

**Preuve** Toujours d'après 3.2.2, et le développement de  $\square_t S_N$ , on a,

$$r \frac{\partial u_1}{\partial r} + \left( 1 + \frac{r}{2} \frac{\partial(\log \theta_0)}{\partial r} - \frac{1}{16} w_1^{ij} \nabla_i r^2 \nabla_j r^2 \right) u_1 = \Delta u_0 - \frac{1}{2} w_1^{ij} \nabla_i r^2 \nabla_j u_0 - \frac{1}{4} (w_1^{ij} \nabla_i \nabla_j r^2 + v_1^l \nabla_l r^2) u_0. \quad (3.2.14)$$

Nous appliquons la méthode des variations des constantes, et l'équation différentielle homogène associée à 3.2.14, est

$$r \frac{\partial u_1}{\partial r} + \left( 1 + \frac{r}{2} \frac{\partial(\log \theta_0)}{\partial r} - \frac{1}{16} w_1^{ij} \nabla_i r^2 \nabla_j r^2 \right) u_1 = 0,$$

ce qui nous donne que

$$\frac{\partial u_1}{\partial r} u_1^{-1} = - \left( \frac{1}{r} + \frac{1}{2} \frac{\partial(\log \theta_0)}{\partial r} - \frac{1}{4} r w_1^{ij} \nabla_i r \nabla_j r \right),$$

alors, en intégrant selon la géodésique  $\gamma$ , qui relie  $y$  à  $x$ , et telle que  $|\dot{\gamma}(s)| = 1$ , pour tout  $s \in [0, r(x, y)]$ , on trouve

$$u_1(x, y) = c(x, y) r^{-1}(x, y) \theta_0^{-\frac{1}{2}}(x, y) e^{f(x, y)} = c(x, y) r^{-1}(x, y) u_0(x, y),$$

où  $c$  est une fonction de  $(x, y) \in M \times M$ , et  $f$  la fonction définie dans le corollaire 3.2.2. En remplaçant  $u_1$  par sa valeur  $c r^{-1} u_0$ , dans l'équation 3.2.14, on a,

$$\frac{\partial c}{\partial r} = u_0^{-1} \Delta u_0 - \frac{1}{2} u_0^{-1} w_1^{ij} \nabla_i r^2 \nabla_j u_0 - \frac{1}{4} (w_1^{ij} \nabla_i \nabla_j r^2 + v_1^l \nabla_l r^2),$$

avec

$$\begin{aligned} u_0^{-1} \Delta u_0 &= \theta_0^{\frac{1}{2}} \Delta \theta_0^{-\frac{1}{2}} + e^{-f} \Delta e^f + 2\theta_0^{\frac{1}{2}} \langle \nabla \theta_0^{-\frac{1}{2}}, \nabla e^f \rangle . e^{-f} \\ &= \theta_0^{\frac{1}{2}} \Delta \theta_0^{-\frac{1}{2}} + \Delta f + \langle \nabla f, \nabla f \rangle + \langle \nabla \log \theta_0, \nabla f \rangle . \end{aligned}$$

Ainsi

$$\begin{aligned} c(x, y) &= \int_0^r \theta_0^{\frac{1}{2}} \Delta \theta_0^{-\frac{1}{2}}(\gamma(s), y) + \Delta f(\gamma(s), y) + \langle \nabla f(\gamma(s), y), \nabla f(\gamma(s), y) \rangle + \langle \nabla \log \theta_0, \nabla f \rangle(\gamma(s), y) ds \\ &\quad - \int_0^r \left[ \frac{1}{2} w_1(\nabla r^2(\gamma(s), y), \nabla(\log u_0)(\gamma(s), y)) - \frac{1}{4} (w_1^{ij} \nabla_i \nabla_j r^2(\gamma(s), y) + v_1^l \nabla_l r^2(\gamma(s), y)) \right] ds + \alpha. \end{aligned}$$

Calculons  $\alpha$ . On a  $u_1(x, y) = c(x, y) r^{-1} u_0(x, y)$ , alors  $c(x, y) = \frac{u_1(x, y) r}{u_0(x, y)}$ , et

$$\alpha = \lim_{r \rightarrow 0} \frac{u_1(x, y) r}{u_0(x, y)} = 0$$

car  $u_0$  et  $u_1$  sont par définition dans  $C^\infty(M \times M)$ , donc bornées uniformément sur  $M \times M$ .

Ainsi

$$\begin{aligned} u_1(x, y) &= r^{-1} u_0(x, y) \int_0^r \Delta \theta_0^{-\frac{1}{2}} . \theta_0^{\frac{1}{2}}(\gamma(s), y) ds \\ &\quad + r^{-1} u_0(x, y) \int_0^r \Delta f(\gamma(s), y) + \langle \nabla f(\gamma(s), y), \nabla f(\gamma(s), y) \rangle + \langle \nabla \log \theta_0, \nabla f \rangle(\gamma(s), y) ds \\ &\quad - r^{-1} u_0(x, y) \int_0^r \left[ \frac{1}{2} w_1(\nabla r^2(\gamma(s), y), \nabla(\log u_0)(\gamma(s), y)) - \frac{1}{4} (w_1^{ij} \nabla_i \nabla_j r^2(\gamma(s), y) + v_1^l \nabla_l r^2(\gamma(s), y)) \right] ds. \end{aligned}$$

D'après Berger-Mazet-Gauduchon ([BGM71], page 221-222)

$$\lim_{r(x,y) \rightarrow 0} r^{-1} \theta_0^{-\frac{1}{2}}(x, y) \int_0^{r(x,y)} \Delta \theta_0^{-\frac{1}{2}}(\gamma(s), y) \cdot \theta_0^{\frac{1}{2}}(\gamma(s), y) ds = \frac{\tau_0}{6}$$

où  $\tau_0$  est la courbure scalaire de  $(M, h(0))$ . D'autre part

$$\begin{aligned} \lim_{r \rightarrow 0} r^{-1} u_0(x, y) & \left[ \int_0^r \Delta f(\gamma(s), y) + \langle \nabla f(\gamma(s), y), \nabla f(\gamma(s), y) \rangle + \langle \nabla \log \theta_0, \nabla f \rangle(\gamma(s), y) ds \right. \\ & \left. - \int_0^r \left[ \frac{1}{2} w_1(\nabla r^2(\gamma(s), y), \nabla(\log u_0)(\gamma(s), y)) - \frac{1}{4} (w_1^{ij} \nabla_i \nabla_j r^2(x, y) + v_1^l \nabla_l r^2(x, y)) \right] ds \right] \\ & = \Delta f(y, y) + \langle \nabla f(y, y), \nabla f(y, y) \rangle + \langle \nabla \log \theta_0(y, y), \nabla f(y, y) \rangle \\ & \quad - \frac{1}{2} w_1(\nabla r^2(y, y), \nabla(\log u_0)(y, y)) + \frac{1}{4} (w_1^{ij} \nabla_i \nabla_j r^2(y, y) + v_1^l \nabla_l r^2(y, y)). \end{aligned}$$

On a

$$\begin{aligned} \Delta f(x, y) & = \sum_{i,j=1}^n \frac{1}{8} \left[ w_1^{ij}(y) \cdot \Delta x^i(x) \cdot x^j(x) + w_1^{ij}(y) \cdot x^i(x) \cdot \Delta x^j(x) \right] + \frac{1}{4} w_1^{ij}(y) \langle \nabla x^i(x), \nabla x^j(x) \rangle \\ & \quad + \frac{1}{12} \nabla_k w_1^{ij}(y) \left[ \Delta x^i(x) x^j(x) x^k(x) + x^i(x) \Delta x^j(x) x^k(x) + x^i(x) x^j(x) \Delta x^k(x) \right] \\ & \quad + \frac{1}{12} \nabla_k w_1^{ij}(y) \left[ x^i(x) \langle \nabla x^j(x), \nabla x^k(x) \rangle + x^j(x) \langle \nabla x^i(x), \nabla x^k(x) \rangle + x^k(x) \langle \nabla x^i(x), \nabla x^j(x) \rangle \right] \\ & \quad + \Delta \Lambda(x, y). \end{aligned}$$

Quand  $r(x, y)$  tend vers 0,  $x^i$  tend vers 0, pour tout  $i = 1, \dots, n$ , car,  $r^2(x, y) = \sum_{i=1}^n (x^i)^2$ , alors, chacun des termes de  $\Delta f(x, y)$  tendent vers 0, lorsque  $r(x, y)$  tend vers 0, sauf le terme  $\frac{1}{4} \sum_{i,j=1}^n w_1^{ij} \langle \nabla x^i, \nabla x^j \rangle$ , puisque

$$\begin{aligned} \frac{1}{4} \sum_{i,j=1}^n w_1^{ij} \langle \nabla x^i, \nabla x^j \rangle & = \frac{1}{4} w_1^{ij} g^{kl} \nabla_k x^i \nabla_l x^j \\ & = \frac{1}{4} w_1^{ij} h(0)^{kl} \delta_{ik} \delta_{lj} = \frac{1}{4} \sum_{i,j=1}^n w_1^{ij} h(0)^{ij} \end{aligned}$$

et

$$\Delta f(y, y) = \frac{1}{4} \sum_{i,j=1}^n w_1^{ij} h(0)^{ij}.$$

De même, chacun des termes  $\langle \nabla f(y, y), \nabla f(y, y) \rangle$ ,  $\langle \nabla \log \theta_0(y, y), \nabla f(y, y) \rangle$ ,  $\frac{1}{2} w_1(\nabla r^2(y, y), \nabla(\log u_0)(y, y))$  et  $v_1^l \nabla_l r^2(y, y)$  est nul, et

$$\begin{aligned} \frac{1}{4} w_1^{ij} \nabla_i \nabla_j r^2(y, y) & = \frac{1}{2} w_1^{ij} \left( \frac{\partial^2}{\partial x^i \partial x^j} - \Gamma_{ij}^l \frac{\partial}{\partial x^l} \right) r^2(y, y) \\ & = \frac{1}{2} w_1^{ij} \left( \delta_{ij} + 2 \sum_{l=1}^n \Gamma_{ij}^l x^l(y) \right) = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n w_1^{ii}. \end{aligned}$$

Enfin, on a

$$u_1(y, y) = \frac{\tau_0}{6} + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n w_1^{ii}(y) + \frac{1}{4} \sum_{i,j=1}^n h(0)^{ij} w_1^{ij}(y)$$

et ceci pour tout  $y \in M$ .  $\square$

On peut comparer  $u_0$ , et  $u_1$ , avec les coefficients du paramétrix de l'équation de la chaleur sur une variété  $(M, g(0))$  (i.e. muni d'une métrique fixe), puisque les deux sont un produit de  $G$  ( définie dans ) avec une fonction continue, et on voit bien que les résultats sont différents (voir section 1.2.1).

### 3.3 Convergence des series d'intégrales

Dans cette section, on va démontrer la convergence des séries  $\sum_{m=1}^{\infty} \Phi_m(t, s, x, y)$  et que  $\Theta_N$  est bien définie, et est égale à  $O((t-s)^{N-\frac{n}{2}})$ .

**Lemme 3.3.1.** *Il existe une constante  $C_1 > 0$  telle que pour tous  $x, y \in M$ , et tous  $0 \leq s < t \leq T$ , on a*

$$|\square_t P_N(t, s, x, y)| \leq C_1 (t-s)^{N-\frac{n}{2}}. \quad (3.3.1)$$

**Preuve.** Soit  $0 \leq s < t \leq T$ . En considérant les cas a), b) et c) de  $\Pi_2$  dans la preuve du lemme 3.2.1, on a :

a) Si  $(x, y) \in (M \times M - U_{\rho/2})$ ,  $\square_t P_N(t, s, x, y) = 0 < C(t-s)^{N-\frac{n}{2}}$ .

b) Si  $(x, y) \in U_{\rho/4}$ ,  $\square_t P_N(t, s, x, y) = \square_t S_N(t, s, x, y) \leq C(t-s)^{N-\frac{n}{2}}$ .

c) Si  $(x, y) \in (U_{\rho/2} - U_{\rho/4})$ ,

$$\begin{aligned} |\square_t P_N(t, s, x, y)| &\leq C \left( (t-s)^{N-\frac{n}{2}} e^{-\frac{r^2(x,y)}{4(t-s)}} + (t-s)^{-\frac{n}{2}} e^{-\frac{r^2(x,y)}{4(t-s)}} + (t-s)^{-\frac{n}{2}-1} e^{-\frac{r^2(x,y)}{4(t-s)}} \right) \\ &\leq C(t-s)^{N-\frac{n}{2}} e^{-\frac{r^2(x,y)}{4(t-s)}} (1 + (t-s)^{-N} + (t-s)^{-N-1}). \end{aligned}$$

Et dans ce cas,  $r > \frac{\rho}{4}$ , alors  $e^{-\frac{r^2(x,y)}{4(t-s)}} \leq e^{-\frac{\rho^2}{64(t-s)}}$  et

$$\begin{aligned} |\square_t P_N(t, s, x, y)| &\leq C(t-s)^{N-\frac{n}{2}} e^{-\frac{\rho^2}{64(t-s)}} (1 + (t-s)^{-N} + (t-s)^{-N-1}) \\ &\leq C(t-s)^{N-\frac{n}{2}}, \end{aligned}$$

puisque la fonction  $\tau \rightarrow e^{-\frac{\rho^2}{64\tau}} (1 + (\tau)^{-N-1} + (\tau)^{-N-1})$ ,  $\tau > 0$  est uniformément bornée. Ici,  $C$  est chaque fois une constante positive indépendante de  $x, y \in M$ , et de  $(t, s) \in \mathbb{R}_T^2$ .

En prenant  $C_1$ , la borne maximale des constantes  $C$ , le lemme est démontré.  $\square$

Pour la suite, il est utile de faire quelques remarques. La remarque 3.3.2 sert à se débarrasser du facteur exponentiel qui existe dans le paramétrix, et d'avoir une estimation dépendante uniquement de  $(t, s) \in \mathbb{R}_T^2$ , et de la distance riemannienne  $r(x, y)$ , par rapport à la métrique  $h(0)$ . La remarque 3.3.3, est à propos du changement de variables et le changement du domaine d'intégration de  $M$  en  $T_x M$ , en utilisant les coordonnées sphériques de  $T_x M$ .

**Remarque 3.3.2.** La fonction  $f(\sigma) = \sigma^\lambda e^{-\sigma}$ ,  $\sigma \geq 0$ , est bornée pour tout  $\lambda > 0$ . En fait,  $f'(\sigma) = (\lambda - \sigma)\sigma^{\lambda-1} e^{-\sigma}$ , alors  $f'$  s'annule en  $\sigma = \lambda$ , et  $f$  est nulle en  $\sigma = 0$ , croissante dans l'intervalle  $[0, \lambda]$ , pour prendre la valeur  $\lambda^\lambda e^{-\lambda}$  en  $\sigma = \lambda$ , puis décroissante sur  $[\lambda, +\infty]$  avec  $\lim_{\sigma \rightarrow +\infty} f(\sigma) = 0$ .

**Remarque 3.3.3.**  $vol_{euc}$  est la forme volume Euclidienne de  $T_x M$ , déterminée par la métrique définie positive  $h(0)$ , et  $v$  le vecteur variable dans  $T_x M$ . Soit  $\mathbf{S}(1)$  la sphère unité dans  $T_x M$ , par rapport à la métrique  $h(0)$ , alors tout vecteur non nul  $v \in T_x M$  peut être exprimé sous une forme unique

$$v = r\vartheta, \quad \vartheta = \frac{v}{|v|}, \quad r > 0.$$

La forme volume Euclidienne admet la décomposition

$$vol_{euc}(r, \vartheta) = r^{n-1} dr d\mu(\vartheta)$$

où  $(r, \vartheta)$  sont les coordonnées polaires de  $v$ , et  $d\mu(\vartheta)$  est la mesure en coordonnées sphériques, par rapport à la métrique  $h(0)$ , ainsi

$$(\exp_x)^*(dv_0)(v) = (\exp_x)^*(dv_0)(r\vartheta) = J(r, \vartheta) dv_{euc} = J(r, \vartheta) r^{n-1} dr d\mu(\vartheta)$$

avec

$$J(r, \vartheta) = \left( 1 - \frac{1}{6} Ric_{h(0)}(r\vartheta, r\vartheta) + o(r^2) \right).$$

**Lemme 3.3.4.** Pour tous  $m \in \mathbb{N}$ ,  $x, y \in M$ , et  $(t, s) \in \mathbb{R}_T^2$ , on a

$$|\Phi_m(t, s, x, y)| \leq \frac{(C_1)^m Vol(M)^{m-1}}{(m-1)!(N - \frac{n}{2} + 1)^{m-1}} (t-s)^{m(N - \frac{n}{2} + 1) - 1} \quad (3.3.2)$$

où  $\Phi_m$  sont les fonctions données par les équations 3.0.4,  $C_1$  est la constante du lemme 3.3.1, et  $Vol(M) = volume(M, h(0))$ . Par conséquent, la série  $\sum_{m=1}^\infty \Phi_m(t, s, x, y)$  est absolument convergente pour tout  $(t, s) \in \mathbb{R}_T^2$ .

**Preuve.** Pour  $m = 1$ , l'inégalité 3.3.2 est vraie (c.f. lemme 3.3.1). Supposons que 3.3.2 est vraie pour  $m > 1$ , et démontrons le pour  $m + 1$ . On a

$$\begin{aligned} |\Phi_{m+1}(t, s, x, y)| &\leq \int_s^t d\tau \int_M |\square_t P_N(t, \tau, x, z)| (C_1)^m Vol(M)^{m-1} (s-\tau)^{m(N - \frac{n}{2} + 1) - 1} dv_0(z) \\ &\leq \int_s^t d\tau \int_M C_1 (t-\tau)^{N - \frac{n}{2}} \frac{(C_1)^m Vol(M)^{m-1}}{(m-1)!(N - \frac{n}{2} + 1)^{m-1}} (s-\tau)^{m(N - \frac{n}{2} + 1) - 1} dv_0(z). \end{aligned}$$

Et comme  $s < \tau < t$ , alors  $t - \tau < t - s$ , et  $s - \tau < t - \tau$ , alors

$$(t - \tau)^{N - \frac{n}{2}} (s - \tau)^{m(N - \frac{n}{2} + 1) - 1} \leq (t - s)^{(m+1)(N - \frac{n}{2} + 1) - 2},$$

et

$$\begin{aligned} |\Phi_{m+1}(t, s, x, y)| &\leq \int_s^t d\tau \int_M \frac{(C_1)^{m+1} \text{Vol}(M)^{m-1}}{(m-1)!(N - \frac{n}{2} + 1)^{m-1}} (t-s)^{(m+1)(N - \frac{n}{2} + 1) - 2} dv_0(z) \\ &\leq \frac{(C_1)^{m+1} \text{Vol}(M)^m}{m!(N - \frac{n}{2} + 1)^m} (t-s)^{(m+1)(N - \frac{n}{2} + 1) - 1}. \end{aligned}$$

D'où 3.3.2, pour tout  $m \in M$ . Ainsi,

$$\begin{aligned} \sum_{m=1}^{\infty} |\Phi_m(t, s, x, y)| &= \sum_{m=1}^{\infty} \frac{(C_1)^m \text{Vol}(M)^{m-1} (t-s)^{m(N - \frac{n}{2} + 1) - 1}}{(m-1)!(N - \frac{n}{2} + 1)^{m-1}} \\ &= C_1 (t-s)^{N - \frac{n}{2}} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{(C_1)^{m-1} \text{Vol}(M)^{m-1} (t-s)^{(m-1)(N - \frac{n}{2} + 1)}}{(m-1)!(N - \frac{n}{2} + 1)^{m-1}} \\ &= C_1 (t-s)^{N - \frac{n}{2}} \exp\left(\frac{C_1 \text{Vol}(M) (t-s)^{N - \frac{n}{2} + 1}}{N - \frac{n}{2} + 1}\right) \\ &\leq C_1 (t-s)^{N - \frac{n}{2}} \exp\left(\frac{C_1 \text{Vol}(M) T^{N - \frac{n}{2} + 1}}{N - \frac{n}{2} + 1}\right) < \infty. \end{aligned}$$

□

Posons maintenant  $F_N(t, s, x, y) = \sum_{m=1}^{\infty} \Phi_m(t, s, x, y)$ , alors, pour tous  $x, y \in M$  et tout  $(t, s) \in \mathbb{R}_T^2$ , on a

$$|F_N(t, s, x, y)| \leq C_1 \exp\left(\frac{C_1 \text{Vol}(M) T^{N - \frac{n}{2} + 1}}{N - \frac{n}{2} + 1}\right) (t-s)^{N - \frac{n}{2}}. \quad (3.3.3)$$

**Corollaire 3.3.5.** *L'intégrale impropre*

$$\Theta_N(t, s, x, y) = \int_s^t d\tau \int_M P_N(t, \tau, x, z) F_N(\tau, s, z, y) dv_0(z) \quad (3.3.4)$$

converge absolument pour tous  $(t, s) \in \mathbb{R}_T^2$ ,  $x, y \in M$ . En particulier,

$$\Theta_N(t, s, x, y) = O((t-s)^{N - \frac{n}{2}}), \text{ quand } t \rightarrow s.$$

**Preuve.** L'intégrale

$$\Theta_N(t, s, x, y) = \int_s^t d\tau \int_M P_N(t, \tau, x, z) F_N(\tau, s, z, y) dv_0(z) \quad (3.3.5)$$

est impropre, ayant une singularité en  $(z, \tau) = (x, t)$ . Cette intégrale converge absolument, et la singularité est intégrable. En fait, d'après 3.3.3

$$|\Theta_N(t, s, x, y)| \leq C (t-s)^{N - \frac{n}{2}} \int_s^t d\tau \int_M |P_N(t, \tau, z, y)| dv_0(y),$$

et,

$$\begin{aligned} |P_N(t, \tau, x, z)| &\leq C_{N,T} e^{-\frac{r^2(x,z)}{4(t-\tau)}} (t-\tau)^{\frac{n}{2}} \\ &\leq C_{N,T} (r^2(x, z))^{-\frac{n}{2} + \alpha} (t-\tau)^{-\alpha} \frac{(r^2(x, z))^{-\frac{n}{2} + \alpha}}{(t-\tau)^{\frac{n}{2} - \alpha}} e^{-\frac{r^2(x,z)}{4(t-\tau)}} \end{aligned}$$

pour tout  $\alpha > 0$ . Or, d'après la remarque 3.3.2, en posant  $\sigma = e^{-\frac{r^2(x,z)}{4(t-s)}}$ ,

$$\frac{(r^2(x,z))^{-\frac{n}{2}+\alpha}}{(t-\tau)^{\frac{n}{2}-\alpha}} e^{-\frac{r^2(x,z)}{4(t-\tau)}} \leq \left(\frac{n}{2} - \alpha\right)^{\frac{n}{2}-\alpha} e^{-\frac{n}{2}+\alpha},$$

alors

$$|P_N(t, \tau, x, z)| \leq Cr^{-n+2\alpha}(x, z)(t-\tau)^{-\alpha},$$

où  $C$  une constante positive indépendante de  $t, \tau, x$  et de  $z$ . Comme  $\text{supp}(P_N) \subseteq U_{\frac{\rho}{2}}$  ( $\text{supp}(P_N)$  est le support de  $P_N$ ), alors, en passant en coordonnées polaires (c.f. remarque 3.3.3), on a

$$\int_s^t d\tau \int_{B(x, \frac{\rho}{2})} |P_N(t, \tau, x, z)| dv_0(z) \leq C \int_s^t (t-\tau)^{-\alpha} d\tau \int_0^{\rho/2} r^{-n+2\alpha} r^{n-1} dr,$$

et en posant  $\alpha = \frac{1}{2}$ , on obtient

$$\int_s^t d\tau \int_{B(x, \frac{\rho}{2})} |P_N(t, \tau, x, z)| dv_0(z) \leq C \int_s^t (t-\tau)^{-\frac{1}{2}} d\tau \leq C(t-s)^{\frac{1}{2}}.$$

D'où

$$|\Theta_N(t, s, x, y)| \leq C(t-s)^{N-\frac{n}{2}+\frac{1}{2}}$$

où  $C$  est chaque fois une constante positive indépendante de  $(t, s) \in \mathbb{R}_T^2$  et de  $x, y \in M$ . □

### 3.4 La solution fondamentale de l'équation de chaleur non linéaire

Dans cette section, on va prouver que  $P_N + \Theta_N$  est la solution fondamentale de la variété  $(M, h(t))$  pour  $t \in ]0, T]$ . D'abord, on va estimer les dérivées partielles premières et secondes du paramétrix. Cela va nous servir, avec les estimations de l'opérateur de chaleur non linéaire agissant sur le paramétrix, à démontrer la convergence de la série  $\sum_{m=1}^{\infty} \Phi_m(t, s, x, y)$ , et à démontrer l'égalité 3.0.5, et le théorème 3.4.8.

**Lemme 3.4.1.** (Continuité de la convolution) Soit  $H \in C^0(\mathbb{R}_T^2 \times M \times M)$ , alors l'application

$$J_N : \mathbb{R}_T^2 \times M \times M \rightarrow \mathbb{R}$$

définie par

$$J_N(t, s, \tau, x, y) = \int_M P_N(t, \tau, x, z) H(\tau, s, z, y) dv_0(z)$$

est continue pour tous  $x, y \in M$ , et  $0 < s < \tau < t < T$ , et

$$\lim_{\tau \rightarrow t} J_N(t, s, \tau, x, y) = H(t, s, x, y).$$

**Preuve** La continuité est démontrée par Friedman [Fri64], page 4-6, dans le cas Euclidien, et la limite provient de la partie  $\Pi_3$ , dans la preuve du lemme 3.2.1.  $\square$

**Lemme 3.4.2.** (*Dérivée partielle première de la convolution avec le Paramétrix*) Soient  $(\mathcal{U}, \{x^i\}_{i=1}^n)$  un système de coordonnées locales sur  $M$ , et  $x \in \mathcal{U}$ , et soit  $H \in C^0(\mathbb{R}_T^2 \times M \times M)$ , alors,  $P_N * H$  est  $C^1$  par rapport à la première variable spatiale, et, pour  $x \in \mathcal{U}$ , on a

$$\frac{\partial}{\partial x^i} P_N * H(t, s, x, y) = \int_s^t d\tau \int_M \frac{\partial P_N}{\partial x^i}(t, \tau, x, z) H(\tau, s, z, y) dv_0(z). \quad (3.4.1)$$

**Preuve.** Soient  $(\mathcal{U}, \{x^i\}_{i=1}^n)$  un système de coordonnées local sur  $M$ , et  $x \in \mathcal{U}$ . Pour tout  $z \in M$ , on a

$$\begin{aligned} \left| \frac{\partial P_N}{\partial x^i}(t, \tau, x, z) \right| &= \left| \frac{\partial}{\partial x^i} \left( \frac{e^{-\frac{r^2(x,z)}{4(t-\tau)}}}{(4\pi(t-\tau))^{\frac{n}{2}}} U_N(t, \tau, x, z) \right) \right| \\ &= \left| \left( \frac{-\frac{\partial r^2(x,z)}{\partial x^i}}{4(t-\tau)} U_N(t, \tau, x, z) + \frac{\partial U_N}{\partial x^i}(t, \tau, x, z) \right) \frac{e^{-\frac{r^2(x,z)}{4(t-\tau)}}}{(4\pi(t-\tau))^{\frac{n}{2}}} \right|. \end{aligned}$$

Or  $P_N(t, \tau, \cdot, \cdot)$  a un support compacte dans  $\bar{U}_{\frac{\rho}{2}}$ , d'où  $\frac{\partial r^2}{\partial x^i}(x, z)$  est bornée uniformément en  $(x, z) \in \bar{U}_{\frac{\rho}{2}}$ . Elle s'annule pour  $x = y$ , et pour  $x \neq y$ , on a

$$\frac{\partial r^2}{\partial x^i}(x, z) = 2r(x, y) \frac{\partial r}{\partial x^i}(x, z).$$

Pour  $x \neq y$ ,  $\left| \frac{\partial r}{\partial x^i}(x, z) \right|$  est bornée par 1. De même,  $U_N(t, \tau, \cdot, \cdot)$  est  $C^\infty$  sur  $\bar{U}_{\frac{\rho}{2}}$ , donc bornée uniformément. Par suite, il existe une constante  $C > 0$ , indépendante de  $x$  et de  $z$ , telle que

$$\left| \frac{\partial P_N}{\partial x^i}(t, \tau, x, z) \right| \leq C \left( 1 + \frac{r(x, z)}{(t-\tau)} \right) \frac{e^{-\frac{r^2(x,z)}{4(t-\tau)}}}{(t-\tau)^{\frac{n}{2}}}.$$

D'autre part, on a, pour tout  $\alpha > 0$ ,

$$\begin{aligned} \left( 1 + \frac{r(x, z)}{(t-\tau)} \right) \frac{e^{-\frac{r^2(x,z)}{4(t-\tau)}}}{(t-\tau)^{\frac{n}{2}}} &= (t-\tau)^{-\alpha} (t-\tau)^{-\frac{n}{2}+\alpha} (r^2(x, z))^{\alpha-\frac{n}{2}} (r^2(x, z))^{\frac{n}{2}-\alpha} \left( 1 + \frac{r(x, z)}{(t-\tau)} \right) e^{-\frac{r^2(x,z)}{4(t-\tau)}} \\ &= (t-\tau)^{-\alpha} (r^2(x, z))^{\alpha-\frac{n}{2}} \left( \frac{(r^2(x, z))^{\frac{n}{2}-\alpha}}{(t-\tau)^{\frac{n}{2}-\alpha}} + \frac{(r^2(x, z))^{\frac{n}{2}-\alpha+1} r^{-1}(x, z)}{(t-\tau)^{\frac{n}{2}-\alpha+1}} \right) e^{-\frac{r^2(x,z)}{4(t-\tau)}}. \end{aligned}$$

D'après la remarque 3.3.2, en posant  $\sigma = e^{-\frac{r^2(x,z)}{4(t-\tau)}}$ , il existe une constante  $C > 0$ , tel que, pour tout  $x, z \in M$

$$\left( 1 + \frac{r(x, z)}{(t-\tau)} \right) \frac{e^{-\frac{r^2(x,z)}{4(t-\tau)}}}{(t-\tau)^{\frac{n}{2}}} \leq C (t-\tau)^{-\alpha} r^{2\alpha-n-1}(x, z)$$

et

$$\left| \frac{\partial P_N}{\partial x^i}(t, \tau, x, z) H(\tau, s, z, y) \right| \leq C (t-\tau)^{-\alpha} r^{2\alpha-n-1}(x, z).$$

Par suite,

$$\int_M \left| \frac{\partial P_N}{\partial x^i}(t, \tau, x, z) H(\tau, s, z, y) \right| dv_0(z) \leq \int_{B(x, \frac{\rho}{2})} C(t - \tau)^{-\alpha} r^{2\alpha - n - 1}(x, z) dv_0(z).$$

En passant par les coordonnées données par l'application exponentielle  $\exp_x$ , par rapport à la métrique  $h(0)$ , on aura

$$\int_{B(x, \frac{\rho}{2})} r^{2\alpha - n - 1}(x, z) dv_0(z) = \int_{B_{T \times M}(0, \frac{\rho}{2})} r^{2\alpha - n - 1}(x, \exp_x v) (\exp_x)^* dv_0(v)$$

Alors

$$\int_{B(x, \frac{\rho}{2})} r^{2\alpha - n - 1}(x, z) dv_0(z) = \int_{\mathbf{S}(1)} \int_0^{\frac{\rho}{2}} r^{2\alpha - 2} J(r, \vartheta) dr d\mu(\vartheta) \quad (3.4.2)$$

Si  $\alpha > \frac{1}{2}$ , alors  $\int_0^{\frac{\rho}{2}} r^{2\alpha - 2} dr$  converge, et dans ce cas, il existe  $C > 0$ , dépendant de  $\alpha$ , tel que pour tout  $x \in M$ ,

$$\int_M \left| \frac{\partial P_N}{\partial x^i}(t, \tau, x, z) H(\tau, s, z, y) \right| dv_0(z) \leq C(t - \tau)^{-\alpha}, \quad (3.4.3)$$

et pour  $\frac{1}{2} < \alpha < 1$ , l'intégrale  $\int_s^t d\tau \int_M \frac{\partial P_N}{\partial x^i}(t, \tau, x, z) H(\tau, s, z, y) dv_0(z)$  converge absolument. Posons

$$J_N(t, s, \tau, x, y) = \int_M P_N(t, \tau, x, z) H(\tau, s, y, z) dv_0(z) \quad (3.4.4)$$

alors  $J_N$  est une fonction continue en  $x, y \in M$  et  $0 \leq s < \tau < t \leq T$  (lemme 3.4.1). Comme  $P_N$ , et  $H$  sont respectivement  $C^\infty$  et  $C^0$  sur  $[0, T] \times M \times M$ , avec  $M$  compacte, alors l'intégrale  $\int_M \frac{\partial P_N}{\partial x^i}(t, \tau, x, z) H(\tau, s, y, z) dv_0(z)$  est convergente, et

$$\frac{\partial J_N}{\partial x^i}(t, s, \tau, x, y) = \int_M \frac{\partial P_N}{\partial x^i}(t, \tau, x, z) H(\tau, s, y, z) dv_0(z) \quad (3.4.5)$$

pour  $y \in M$ , et  $0 \leq s < \tau < t \leq T$ . Il nous reste à démontrer 3.4.1, i.e.

$$\frac{\partial}{\partial x^i} P_N * H(t, s, x, y) = \frac{\partial}{\partial x^i} \int_s^t J_N(t, s, \tau, x, y) d\tau = \int_s^t \frac{\partial}{\partial x^i} J_N(t, s, \tau, x, y) d\tau$$

ceci est vrai, et démontré dans [CCG<sup>+</sup>ar], page 240. □

**Lemme 3.4.3.** (Dérivée partielle seconde de la convolution avec le paramétrix) Soit  $H \in C^0(\mathbb{R}_T^2 \times M \times M)$ , alors,  $P_N * H$  est  $C^2$  par rapport à la première variable spatiale, et pour tout  $0 \leq s < t \leq T$ , on a

$$\frac{\partial^2}{\partial x^j \partial x^i} P_N * H(t, s, x, y) = \int_s^t d\tau \int_M \frac{\partial^2 P_N}{\partial x^j \partial x^i}(t, \tau, x, z) H(\tau, s, z, y) dv_0(z) \quad (3.4.6)$$

où  $(\mathcal{U}, \{x^i\}_{i=1}^n)$  sont les coordonnées géodésiques de centre  $x \in M$ , par rapport à la métrique  $h(0)$ , tels que  $\mathcal{U} \subset B(x, \frac{\rho}{2})$ .

**Remarque 3.4.4.** Soit  $z \in M$ . En essayant d'estimer  $\frac{\partial^2 P_N}{\partial x^j \partial x^i}(t, \tau, x, z)$  comme on l'a fait dans le lemme 3.4.2, on aura

$$\left| \frac{\partial^2 P_N}{\partial x^j \partial x^i}(t, \tau, x, z) \right| \leq C \left( 1 + \frac{1}{(t-\tau)} + \frac{r^2(x, z)}{(t-\tau)^2} \right) \frac{e^{-\frac{r^2(x, z)}{4(t-\tau)}}}{(t-\tau)^{\frac{n}{2}}}$$

où  $C$  est une constante positive indépendante de  $x$  et de  $z$ . Mais cette estimation ne nous permet pas de démontrer ce que l'on veut, car l'intégrale

$$\int_s^t d\tau \int_M \left( 1 + \frac{1}{(t-\tau)} + \frac{r^2(x, z)}{(t-\tau)^2} \right) \frac{e^{-\frac{r^2(x, z)}{4(t-\tau)}}}{(t-\tau)^{\frac{n}{2}}} dv_0(z)$$

n'est pas convergente (voir [Fri64], page 10). L'idée pour résoudre ce problème, est l'intégration par parties. Cette dernière est utilisée dans [CCG<sup>+</sup>ar], chapitre 23, page 242-246, pour résoudre le même problème, dans le cas d'une variété riemannienne munie d'une métrique fixe. Ci-dessus, on va suivre les mêmes étapes. On va dériver par rapport à la variable  $z$ , alors, soit  $\frac{\partial}{\partial x_x^j}$  la notation de la dérivée partielle par rapport à la première variable spatiale  $x$  dans les coordonnées géodésiques  $\{x^i\}_{i=1}^n$  de centre  $x$ , par rapport à la métrique  $h(0)$ , et soit  $\frac{\partial}{\partial x_z^j}$  la notation de la dérivée partielle par rapport à la deuxième variable spatiale  $z$ , dans le même système de coordonnées  $\{x^i\}_{i=1}^n$ . Cette dernière notation est bien définie puisque  $z \in \mathcal{U}$ , car le support de  $\text{supp}(P_N(t, s, x, \cdot)) \subseteq B(x, \frac{\rho}{2})$ . Alors on peut écrire

$$\begin{aligned} \int_M \frac{\partial^2 P_N}{\partial x_x^j \partial x_x^i}(t, \tau, x, z) H(\tau, s, z, y) dv_0(z) &= \int_M \left( \frac{\partial^2 P_N}{\partial x_x^j \partial x_x^i} - \frac{\partial^2 P_N}{\partial x_z^j \partial x_z^i} \right) (t, \tau, x, z) H(\tau, s, z, y) dv_0(z) \\ &+ \int_M \frac{\partial^2 P_N}{\partial x_z^j \partial x_z^i}(t, \tau, x, z) H(\tau, s, z, y) dv_0(z). \end{aligned}$$

Pour la preuve du théorème 3.4.3, on a besoin d'un lemme fait dans [CCG<sup>+</sup>ar], ici, dans la démonstration, nous donnons plus de détails :

**Lemme 3.4.5.** [CCG<sup>+</sup>ar] Si  $\{x^i\}$  sont les coordonnées normales centrées en  $x$  par rapport à la métrique  $h(0)$ , alors, pour tout  $i = 1, \dots, n$ ,

$$\frac{\partial r^2}{\partial x_x^i}(x, z) = -\frac{\partial r^2}{\partial x_z^i}(x, z) \quad (3.4.7)$$

et

$$\frac{\partial^2 r^2}{\partial x_x^j \partial x_x^i}(x, z) - \frac{\partial^2 r^2}{\partial x_z^j \partial x_z^i}(x, z) = O(r^2(x, z)) \quad (3.4.8)$$

pour tout  $z \in B(x, \rho)$ .

**Preuve.**

(1) Soit  $z \in B(x, \rho)$ . D'une part

$$\frac{\partial r^2}{\partial x_z^i}(x, z) = \frac{\partial}{\partial x_z^i} \left( \sum_{j=1}^n x^j(z)^2 \right) = 2x^i(z),$$

i.e.

$$\frac{\partial r}{\partial x_z^i}(x, z) = \frac{x^i(z)}{r(x, z)}$$

et d'autre part

$$\begin{aligned} \frac{\partial r}{\partial x_x^i}(x, z) &= \left\langle \nabla_x r(x, z), \frac{\partial}{\partial x_x^i} \right\rangle_{h(0)} \\ &= \left\langle \dot{\beta}(r(x, z)), \frac{\partial}{\partial x_x^i} \right\rangle_{h(0)} \end{aligned}$$

où  $\beta : [0, r(x, z)]$  est la géodésique telle que  $\beta(0) = z$ ,  $\beta(r(x, z)) = x$ , et  $\dot{\beta}(s) = 1$ , pour tout  $s \in [0, r(x, z)]$ . Pour arriver à l'égalité 3.4.7, on doit écrire  $\beta(r(x, z))$  en fonction des termes  $x^j(z)$ , et  $\frac{\partial}{\partial x_x^i}$ ,  $i, j = 1, \dots, n$ , alors, on considère la géodésique  $\gamma : [0, r(x, z)]$ , telle que  $\gamma(0) = x$ ,  $\gamma(r(x, z)) = z$ , et  $\dot{\gamma}(s) = 1$ , pour tout  $s \in [0, r(x, z)]$ . On peut voir que cette géodésique, se confond avec  $\beta$  (voir figure 3.1), mais paramétrée différemment, et que  $\dot{\beta}(r(x, z)) = -\dot{\gamma}(0)$ , (car  $r(x, z) < \rho$ , alors la géodésique reliant  $x$  à  $z$  est unique.)



FIG. 3.1 – la géodésique reliant  $x$  à  $y$  est unique. Les 2 vecteurs unitaires  $\dot{\gamma}(0)$  et  $\dot{\beta}(r(x, z))$  sont colinéaires et de sens opposés

Or

$$\gamma(s)^j = \frac{sx^j(z)}{r(x, z)}, \text{ pour tous } s \in [0, r(x, z)], \text{ et } i = 1, \dots, n,$$

et  $\dot{\gamma}(0)$  s'écrit dans la base  $\left\{ \frac{\partial}{\partial x_x^j} \right\}_j$  sous la forme  $\frac{x^j(z)}{r(x, z)} \frac{\partial}{\partial x_x^j}$ , par la suite

$$\dot{\beta}(r(x, z)) = -\frac{x^j(z)}{r(x, z)} \frac{\partial}{\partial x_x^j},$$

et

$$\frac{\partial r}{\partial x_x^i}(x, z) = \left\langle -\frac{x^j(z)}{r(x, z)} \frac{\partial}{\partial x_x^j}, \frac{\partial}{\partial x_x^i} \right\rangle_{h(0)} = -\frac{x^i(z)}{r(x, z)}, \quad (3.4.9)$$

d'où 3.4.7.

(2) Démontrons maintenant 3.4.8. En fait,

$$\frac{\partial^2 r^2}{\partial x_z^i \partial x_z^j}(x, z) = \frac{\partial^2}{\partial x_z^i \partial x_z^j} \sum_{k=1}^n (x^k(z))^2 = 2\delta_{ij}. \quad (3.4.10)$$

D'autre part,

$$\frac{\partial^2 r^2}{\partial x_x^i \partial x_x^j}(x, z) = 2r(x, z) \frac{\partial^2 r}{\partial x_x^i \partial x_x^j} r(x, z) + 2 \frac{\partial r}{\partial x_x^i}(x, z) \frac{\partial r}{\partial x_x^j}(x, z). \quad (3.4.11)$$

Or

$$\frac{\partial^2 r}{\partial x_x^i \partial x_x^j}(x, z) = \nabla_i \nabla_j r(x, z) - \Gamma_{ij}^k(x) \frac{\partial r}{\partial x_x^k}.$$

Et puisque  $\{x^i\}$  sont les coordonnées géodésiques centrées en  $x$ , alors  $\Gamma_{ij}^k(x) = 0$ , et

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 r}{\partial x_x^i \partial x_x^j}(x, z) &= \nabla_i \nabla_j r(x, z) \\ &= \nabla^2 r \left( \frac{\partial}{\partial x_x^i}, \frac{\partial}{\partial x_x^j} \right) \end{aligned}$$

Et comme  $\nabla^2 r(\nabla r, \cdot) = 0$ , alors

$$\begin{aligned} \nabla^2 r \left( \frac{\partial}{\partial x_x^i}, \frac{\partial}{\partial x_x^j} \right) &= \nabla^2 r \left( \frac{\partial}{\partial x_x^i} - \frac{\partial r}{\partial x_x^i}(x, z) \nabla r(x, z), \frac{\partial}{\partial x_x^j} - \frac{\partial r}{\partial x_x^j}(x, z) \nabla r(x, z) \right) \\ &= II \left( \frac{\partial}{\partial x_x^i} - \frac{\partial r}{\partial x_x^i}(x, z) \nabla r(x, z), \frac{\partial}{\partial x_x^j} - \frac{\partial r}{\partial x_x^j}(x, z) \nabla r(x, z) \right) \end{aligned}$$

où  $II$  est la seconde forme fondamentale <sup>2</sup> de la sphère distance  $S(z, r) = \{x \in M, d(x, z) = r\}$ .

Or, d'après [CLN06], page 62, on a

$$II_{ij} = \frac{1}{r} h_{ij}(0) + O(r).$$

En coordonnées géodésiques, on a  $h_{ij}(0) = \delta_{ij} + O(r^2)$ , (voir [SY94], page 210), alors,

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 r}{\partial x_x^i \partial x_x^j}(x, z) &= \frac{1}{r} \left\langle \frac{\partial}{\partial x_x^i} - \frac{\partial r}{\partial x_x^i}(x, z) \nabla r(x, z), \frac{\partial}{\partial x_x^j} - \frac{\partial r}{\partial x_x^j}(x, z) \nabla r(x, z) \right\rangle_{h(0)} + O(r) \\ &= \frac{1}{r} \delta_{ij} - \frac{1}{r} \frac{\partial r}{\partial x_x^i} \frac{\partial r}{\partial x_x^j} + O(r). \end{aligned}$$

Et avec l'équation 3.4.11, on a

$$\frac{\partial^2}{\partial x_x^i \partial x_x^j} r^2(x, z) = 2\delta_{ij} + O(r^2) \quad (3.4.12)$$

Les deux équations 3.4.10 et 3.4.12, nous donnent 3.4.8, et le lemme est démontré.  $\square$

<sup>2</sup>En fait  $\nabla^2 r(u, v) = \langle \nabla_{\nabla_u}(\nabla r), v \rangle$ , (puisque  $\nabla$  est de torsion nulle), et  $\nabla r$  est le vecteur normal à la sphère  $S(z, r) = \{x \in M, d(x, z) = r\}$

**Preuve du lemme 3.4.3.** En posant  $t - \tau = v$ , on a

$$\frac{\partial^2 P_N}{\partial x^j \partial x^i} = \left[ \frac{G}{16v^2} \frac{\partial r^2}{\partial x^j} \frac{\partial r^2}{\partial x^i} U_N - \frac{G}{4v} \frac{\partial r^2}{\partial x^j} \frac{\partial U_N}{\partial x^i} - \frac{G}{4v} \frac{\partial^2 r^2}{\partial x^j \partial x^i} U_N - \frac{G}{4v} \frac{\partial r^2}{\partial x^i} \frac{\partial U_N}{\partial x^j} + G \frac{\partial^2 U_N}{\partial x^j \partial x^i} \right]$$

Et

$$\frac{\partial^2 P_N}{\partial x_x^j \partial x_x^i} - \frac{\partial^2 P_N}{\partial x_z^j \partial x_z^i} = \frac{G}{16v^2} \left( \frac{\partial r^2}{\partial x_x^j} \frac{\partial r^2}{\partial x_x^i} - \frac{\partial r^2}{\partial x_z^j} \frac{\partial r^2}{\partial x_z^i} \right) U_N \quad (3.4.13)$$

$$- \frac{G}{4v} \left( \frac{\partial^2 r^2}{\partial x_x^j \partial x_x^i} - \frac{\partial^2 r^2}{\partial x_z^j \partial x_z^i} \right) U_N \quad (3.4.14)$$

$$- \frac{G}{4v} \left( \frac{\partial r^2}{\partial x_x^i} \frac{\partial U_N}{\partial x_x^j} + \frac{\partial r^2}{\partial x_x^j} \frac{\partial U_N}{\partial x_x^i} - \frac{\partial r^2}{\partial x_z^i} \frac{\partial U_N}{\partial x_z^j} - \frac{\partial r^2}{\partial x_z^j} \frac{\partial U_N}{\partial x_z^i} \right) \quad (3.4.15)$$

$$- G \left( \frac{\partial^2 U_N}{\partial x_x^i \partial x_x^j} - \frac{\partial^2 U_N}{\partial x_z^i \partial x_z^j} \right) \quad (3.4.16)$$

D'après l'égalité 3.4.7, le terme (3.4.13) est nul. Le terme (3.4.14) en valeur absolue est égale à

$$\left| \frac{G}{4v} o(r(x, y)) U_N \right| \leq C \frac{r(x, z)}{v} G.$$

On peut aussi majorer la valeur absolue de (3.4.15) par  $C \frac{r(x, z)}{v} G$ , car

$$\frac{\partial r^2}{\partial x_x^i} \frac{\partial U_N}{\partial x_x^j} + \frac{\partial r^2}{\partial x_x^j} \frac{\partial U_N}{\partial x_x^i} - \frac{\partial r^2}{\partial x_z^i} \frac{\partial U_N}{\partial x_z^j} - \frac{\partial r^2}{\partial x_z^j} \frac{\partial U_N}{\partial x_z^i} = 2r \left( \frac{\partial r}{\partial x_x^i} \frac{\partial U_N}{\partial x_x^j} + \frac{\partial r}{\partial x_x^j} \frac{\partial U_N}{\partial x_x^i} - \frac{\partial r}{\partial x_z^i} \frac{\partial U_N}{\partial x_z^j} - \frac{\partial r}{\partial x_z^j} \frac{\partial U_N}{\partial x_z^i} \right).$$

Enfin, le terme (3.4.16) en valeur absolue est majoré par  $CG$ , où  $C$  est chaque fois une constante positive indépendante de  $x, y \in M$  (la majoration uniforme des tous ces termes est due à continuité des fonctions étudiés, ainsi que leur dérivées totales et partielles, et à la compacité de  $M$ ). Alors, il existe  $C > 0$ , tel que pour tout  $x, z \in M$ ,

$$\left| \left( \frac{\partial^2 P_N}{\partial x_x^j \partial x_x^i} - \frac{\partial^2 P_N}{\partial x_z^j \partial x_z^i} \right) (t, \tau, x, z) \right| \leq C \left( 1 + \frac{r(x, z)}{t - \tau} + \frac{r^2(x, z)}{t - \tau} \right) G(t, \tau, x, z).$$

Donc comme on l'a démontré pour  $\frac{\partial P_N}{\partial x^i}(t, s, x, z)$ , pour  $\alpha \in (0, \frac{1}{2})$ , il existe  $C > 0$ , indépendant de  $x \in M$ , tel que

$$\int_M \left| \left( \frac{\partial^2 P_N}{\partial x_x^j \partial x_x^i} - \frac{\partial^2 P_N}{\partial x_z^j \partial x_z^i} \right) (t, \tau, x, z) H(\tau, s, z, y) \right| dv_0(z) \leq C(t - s)^{-\alpha}.$$

Estimons maintenant  $\int_M \left| \frac{\partial^2 P_N}{\partial x_z^j \partial x_z^i} (t, \tau, x, z) H(\tau, s, z, y) \right| dv_0(z)$ , on a

$$\begin{aligned} \int_M \frac{\partial^2 P_N}{\partial x_z^j \partial x_z^i} (t, \tau, x, z) H(\tau, s, z, y) dv_0(z) &= \frac{\partial}{\partial x_z^j} \int_M \frac{\partial P_N}{\partial x_z^i} (t, \tau, x, z) H(\tau, s, z, y) dv_0(z) \\ &- \int_M \frac{\partial P_N}{\partial x_z^i} (t, \tau, x, z) \frac{\partial H}{\partial x_z^j} (\tau, s, z, y) dv_0(z) - \int_M \frac{\partial P_N}{\partial x_z^i} (t, \tau, x, z) \frac{\partial \sqrt{(\det g_{ij}(0))(z)}}{\partial x_z^j} H(\tau, s, z, y) dz^1 \wedge \dots \wedge dz^n. \end{aligned}$$

Alors puisque

$$\frac{\partial}{\partial x_z^j} \int_M \frac{\partial P_N}{\partial x_z^i}(t, \tau, x, z) H(\tau, s, z, y) dv_\tau(z) = 0,$$

et  $\frac{\partial H}{\partial x_z^j}$  et  $\frac{\partial}{\partial x_z^j} \sqrt{(\det g_{ij}(\tau))(z)}$  sont bornées uniformément, car  $M$  compacte, on a, d'après la preuve du lemme 3.4.2, équation 3.4.3,

$$\int_M \left| \frac{\partial^2 P_N}{\partial x_x^j \partial x_x^i}(t, \tau, x, z) H(\tau, s, z, y) \right| dv_0(z) \leq C(t-s)^{-\alpha} \quad (3.4.17)$$

où  $C$  est chaque fois une constante positive indépendante de  $x$ . Si, en particulier,  $\alpha \in (\frac{1}{2}, 1)$ , alors, en intégrant par rapport à  $s \in [0, t]$ , on démontre que

$$\int_s^t d\tau \int_M \frac{\partial^2 P_N}{\partial x_x^j \partial x_x^i}(t, \tau, x, z) H(\tau, s, z, y) dv_0(z)$$

est absolument convergente, i.e., l'intégrale  $\int_s^t \frac{\partial^2 J_N}{\partial x^i \partial x^j}(t, s, \tau, x, y) d\tau$ , où  $J_N$  est la fonction définie dans 3.4.4, est absolument convergente. Ceci nous donne d'après [CCG<sup>+</sup>ar], page 247, que

$$\frac{\partial^2}{\partial x^j \partial x^i} P_N * H(t, s, x, y) = \int_s^t d\tau \int_M \frac{\partial^2 P_N}{\partial x^j \partial x^i}(t, \tau, x, z) H(\tau, s, z, y) dv_0(z) \quad (3.4.18)$$

pour tout  $(t, s, x, y) \in \mathbb{R}_T^2 \times M \times M$ .

□

**Lemme 3.4.6.** (Dérivation par rapport au temps d'une convolution avec le paramétrix)<sup>3</sup> Pour tout  $(t, s, x, y) \in \mathbb{R}_T^2 \times M \times M$ , on a

$$\frac{\partial}{\partial t} P_N * H(t, s, x, y) = \int_s^t d\tau \int_M \frac{\partial P_N}{\partial t}(t, \tau, x, z) H(\tau, s, x, z) + H(t, s, x, y). \quad (3.4.19)$$

**Preuve.** Puisque  $P_N$  est  $C^\infty$  sur  $\mathbb{R}_T^2 \times M \times M$ , alors

$$\frac{\partial J_N}{\partial t}(t, s, \tau, x, y) = \frac{\partial}{\partial t} \int_M P_N(t, \tau, x, z) H(\tau, s, y, z) dv_0(z) = \int_M \frac{\partial P_N}{\partial t}(t, \tau, x, z) H(\tau, s, z, y) dv_0(z). \quad (3.4.20)$$

Estimons alors  $\left| \frac{\partial J_N}{\partial t}(t, s, \tau, x, y) \right|$ . D'après l'équation 3.3.1, on a

$$\begin{aligned} \left| \frac{\partial J_N}{\partial t}(t, s, \tau, x, y) \right| &= \left| \int_M \frac{\partial P_N}{\partial t}(t, \tau, x, z) H(\tau, s, z, y) dv_0(z) \right| \\ &\leq \left| \int_M \Delta_{h(t)} P_N(t, \tau, x, z) H(\tau, s, z, y) dv_0(z) \right| \\ &\quad + C_1 \left| \int_M (\tau - s)^{N-\frac{n}{2}} H(\tau, s, z, y) dv_0(z) \right| \leq C(t-s)^\alpha + C, \end{aligned}$$

<sup>3</sup>Ce même travail est fait dans [Fri64] et [CCG<sup>+</sup>ar], et il n'y a pas de différence, par ce que  $J_N$  dépend toujours de la même façon du Paramétrix des solutions fondamentales dans les références cités, ainsi que dans notre travail.

avec  $\alpha \in (\frac{1}{2}, 1)$ , et  $C$  une constante positive indépendante de  $t, s, \tau, x$ , et  $y$ . En plus, on a

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} \int_s^t J_N(t, s, \tau, x, y) d\tau &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h} \left( \int_s^{t+h} J_N(t+h, s, \tau, x, y) d\tau - \int_s^t J_N(t, s, \tau, x, y) d\tau \right) \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \left( \frac{1}{h} \int_t^{t+h} J_N(t+h, s, \tau, x, y) d\tau + \int_s^t \frac{J_N(t+h, s, \tau, x, y) - J_N(t, s, \tau, x, y)}{h} d\tau \right) \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \left( \frac{1}{h} \int_t^{t+h} J_N(t+h, s, \tau, x, y) d\tau + \int_s^t \frac{\partial J_N}{\partial t}(t^*, s, \tau, x, y) d\tau \right) \end{aligned}$$

où  $t^* \in ]t, t+h[$ . On a

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h} \int_t^{t+h} J_N(t+h, s, \tau, x, y) d\tau = H(t, s, x, y)$$

et

$$\lim_{h \rightarrow 0} \int_s^t \frac{\partial J_N}{\partial t}(t^*, s, \tau, x, y) d\tau = \int_s^t \frac{\partial J_N}{\partial t}(t, s, \tau, x, y)$$

d'où le lemme. □

**Lemme 3.4.7.** Pour  $N - \frac{n}{2} > l + 2k + p + 2q$ ,  $\Theta_N$  est respectivement  $C^p$ , et  $C^l$ , par rapport aux deux variables spatiales  $x$  et  $y$ , et respectivement  $C^q$ , et  $C^k$  par rapport aux deux variables temporelles  $t$ , et  $s$ .

**Preuve.** En fait, si on cherche une estimation de  $\frac{\partial^k}{\partial s^k} D_y^l \square_t P_N$ , où  $D_y^l$  est une dérivation par rapport à la deuxième variable  $y$  d'indice  $l$ , on aura, avec la même technique utilisée dans le lemme 3.3.1, que

$$\left| \frac{\partial^k}{\partial s^k} D_y^l \square_t P_N \right| \leq C t^{N - \frac{n}{2} - l - 2k}.$$

Ceci nous donne, par récurrence, comme dans le lemme 3.3.4, que

$$\left| \frac{\partial^k}{\partial s^k} D_y^l \Phi_m(t, s, x, y) \right| \leq \frac{(C)^m \text{Vol}(M)^{m-1}}{(m-1)! (N - \frac{n}{2} - l - 2k + 1)^{m-1}} (t-s)^{m(N - \frac{n}{2} - l - 2k + 1) - 1},$$

et par suite que

$$\left| \frac{\partial^k}{\partial s^k} D_y^l F_N(t, s, x, y) \right| C (t-s)^{N - \frac{n}{2} - l - 2k} \exp\left(\frac{C \text{Vol}(M) T^{N - \frac{n}{2} - l - 2k + 1}}{N - \frac{n}{2} - l - 2k + 1}\right) < \infty,$$

si  $N - \frac{n}{2} > l + 2k$ .  $C$  est chaque fois une constante positive indépendante de  $t, s, x$  et  $y$ . Ceci nous donne la convergence absolue et uniforme de

$$\int_s^t d\tau \int_M \frac{\partial^q}{\partial t^q} D_x^p P_N(t, \tau, x, z) \frac{\partial^k}{\partial s^k} D_y^l F_N(\tau, s, z, y) dv_0(z)$$

pour  $N - \frac{n}{2} > l + p + 2k + 2q$ . Donc, comme on l'a démontré dans les lemmes 3.4.2, 3.4.3, et 3.4.6,  $\Theta_N$  est respectivement  $C^p$ ,  $C^l$  par rapport aux deux variables spatiales  $x$  et  $y$ , et respectivement  $C^q$ ,  $C^k$  par rapport aux deux variables temporelles  $t$ , et  $s$ , pour  $N - \frac{n}{2} > l + p + 2k + 2q$ . □

**Théorème 3.4.8.** Pour  $N > \frac{n}{2}$ ,  $P = P_N + \Theta_N$  est la solution fondamentale de 3.0.1, et, elle est  $C^\infty$  sur  $\mathbb{R}_T^2 \times M \times M$ .

**Preuve.** En appliquant les lemmes 3.4.2, 3.4.3, et 3.4.6, on a

$$\begin{aligned}
\Box_t(P_N + \Theta_N)(t, s, x, y) &= \Box_t P_N(t, s, x, y) + \Box_t \int_s^t d\tau \int_M P_N(t, \tau, x, z) F_N(\tau, s, z, y) dv_0(z) \\
&= \Box_t P_N(t, s, x, y) + \int_s^t d\tau \int_M \Box_t P_N(t, \tau, x, z) F_N(\tau, s, z, y) dv_0(z) - F_N(t, s, x, y) \\
&= \Box_t P_N(t, s, x, y) + \sum_{m=1}^{\infty} \Phi_m(t, s, x, y) - \sum_{m=0}^{\infty} \Phi_m(t, s, x, y) \\
&= 0.
\end{aligned}$$

De plus, si  $f$  est une fonction continue sur  $M$ , alors

$$\begin{aligned}
&\lim_{t \rightarrow s} \int_M (P_N(t, s, x, y) + \Theta_N(t, s, x, y)) f(x) dv_0(x) \\
&= \lim_{t \rightarrow s} \int_M P_N(t, s, x, y) f(x) dv_0(x) + \lim_{t \rightarrow s} \int_M \Theta_N(t, s, x, y) f(x) dv_0(x) = f(y)
\end{aligned}$$

car  $\lim_{t \rightarrow s} \int_M \Theta_N(t, s, x, y) f(y) dv_0(x) = 0$ . Alors  $P_N + \Theta_N$  est bien une solution du problème 3.0.1.

Il nous reste à démontrer que  $P$  est  $C^\infty$  sur  $\mathbb{R}_T^2 \times M \times M$ . En fait, puisque la solution fondamentale de l'équation de la chaleur est unique, alors,  $P_N + \Theta_N$  est indépendant de  $N$ , pour  $N - \frac{n}{2} > 0$ . Or  $P_N \in C^\infty(\mathbb{R}_T^2 \times M \times M)$ , et, d'après le lemme 3.4.7,  $\Theta_N \in C^{l+2k+p+2q}(\mathbb{R}_T^2 \times M \times M)$ , pour  $N$  suffisamment large, donc  $\Theta_N \in C^\infty(\mathbb{R}_T^2 \times M \times M)$ , quand  $N$  tend vers l'infini. D'où  $P$  est  $C^\infty$  pour tout  $N > \frac{n}{2}$ .  $\square$



## Chapitre 4

# Plongement d'un flot de variétés riemanniennes dans un espace de Hilbert à l'aide de sa solution fondamentale

Soit  $g(t)$ ,  $0 \leq t \leq T$ ,  $T > 0$ , une famille  $C^\infty$  de métriques Riemanniennes sur une variété compacte  $M$ , de dimension finie  $n$ , telle que  $\text{vol}(M, g_t)$  est invariant pour  $0 \leq t \leq T$ .

Le but de ce chapitre, est de construire un plongement d'une famille de variétés  $(M, g(t))$  dans l'espace de Hilbert  $L^2(M, v_{g(0)})$  au moins pour les temps petits à l'aide de sa solution fondamentale. D'abord, par le lemme 1.3.1, on associe à  $(M, g(t))$ , une famille de variétés  $(M, h(t))$ , diffeomorphes à  $(M, g(t))$ , telle que

$$dv_{h(t)} = dv_{h(0)} = dv_{g(0)}, \text{ pour tout } t \in [0, T]. \quad (4.0.1)$$

Ceci implique que l'espace de Hilbert  $L^2(M, dv_{h(t)})$  est constant en  $t$ .

Posons  $\square_t = \Delta_{h(t)} - \frac{\partial}{\partial t}$ , et  $P(t, x, y) = P(t, 0, x, y)$ , où  $P$  est la solution fondamentale du problème de Cauchy

$$\begin{cases} \square_t P(t, s, x, y) = 0 \\ \lim_{t \rightarrow s} P(t, s, x, y) dv_0(x) = \delta_y(x). \end{cases} \quad (4.0.2)$$

Dans le chapitre précédent, on a démontré que

$$P(t, s, x, y) = P_N(t, s, x, y) + \Theta_N(t, s, x, y)$$

où  $N > \frac{n}{2} + 1$ ,  $P_N$  est le paramétrix du noyau de la chaleur, et

$$\Theta_N(t, s, x, y) = O((t-s)^{N-\frac{n}{2}}), \text{ uniformément en } x, y \in M$$

et

$$\frac{\partial}{\partial x^i} \Theta_N(t, s, x, y) = O((t-s)^{N-\frac{n}{2}-1}), \text{ uniformément en } x, y \in M \quad (4.0.3)$$

où  $\{x^i\}_{i=1}^n$  est un système de coordonnées locales sur autour de  $x$ .

On émet la conjecture suivante :

**Conjecture 4.0.9.** *La solution fondamentale  $P$  de l'équation de la chaleur non linéaire admet la formule asymptotique suivante :*

$$P(t, s, x, y) = (4\pi(t-s))^{-\frac{n}{2}} e^{-\frac{r^2(x,y)}{4(t-s)}} \left( \sum_{k=0}^N (t-s)^k \tilde{u}_k(s, x, y) + \Upsilon(t, s, x, y) \right)$$

quand  $t \rightarrow s^+$ , et pour  $x, y$  assez proches dans  $M$ , et pour tout  $N \in \mathbb{N}$ , où

$$\Upsilon(t, s, x, y) = O((t-s)^N),$$

et

$$\left| \frac{\partial}{\partial x^i} \Upsilon(t, s, x, y) \right| = O((t-s)^{N-1}), \text{ pour tout } i = 1, \dots, n,$$

pour  $x, y$  assez proches dans  $M$ , où  $\{x^i\}_{i=1}^n$  est un système de coordonnées locales autour de  $x$ .

On a alors le théorème suivant :

**Théorème 4.0.10.** *Si la conjecture 4.0.9 est vraie, alors il existe  $\xi > 0$ , tel que l'application*

$$\mathcal{P}_t : M \rightarrow L^2(M, v_0) \\ x \mapsto P(t, x, \cdot)$$

est un plongement pour tout  $t < \xi$ .

Pour démontrer notre théorème, on va se servir du corollaire 0.0.19. Or, ici, on a trois points qu'on doit y faire attention :

Le premier, c'est que notre espace d'arrivée n'est pas une variété différentiable de dimension finie, mais un espace de Hilbert. Ceci peut être réglé par des méthodes techniques.

Le deuxième, c'est que l'application  $\mathcal{P}_t$  présente une singularité en  $t = 0$ . On est ramené donc à étudier la convergence de l'application

$$t \log \mathcal{P}_t : M \rightarrow L^2(M, v_0) \\ x \mapsto t \log P(t, x, \cdot)$$

quand  $t$  tend vers 0. On considère alors

$$\mathcal{R} : M \rightarrow L^2(M, v_0) \\ x \mapsto -\frac{r^2(x, \cdot)}{4}.$$

L'idée d'introduire cette application est motivée par la forme du paramétrix du noyau de la chaleur  $P_N(t, s, x, y) = e^{-\frac{r^2(x,y)}{4(t-s)}} U_N(t, s, x, y)$ , où  $U_N \in C^\infty([0, T] \times [0, T] \times M \times M)$ , puisque

$$\lim_{t \rightarrow 0} \left| t \log P_N(t, x, y) + \frac{r^2(x, y)}{4} \right| = 0 \text{ uniformément en } x, y \in M.$$

Pour cela il faut d'abord démontrer que pour tout  $s \in [0, T]$ ,

$$\lim_{t \rightarrow s} \left| \log P(t, s, x, y) + \frac{r^2(x, y)}{4} \right| = 0$$

uniformément en  $x, y \in M$ .

Le troisième point, c'est qu'on ne sait pas vraiment si

$$\lim_{t \rightarrow 0} \|t \nabla \log \mathcal{P}_t(x) - \nabla \mathcal{R}(x)\|_{L^2(M, v_0)} = 0$$

uniformément en  $x \in M$ . Or, sous la condition que la conjecture 4.0.9 est vraie, on démontre qu'il existe pour tout  $p \in M$ , un voisinage de  $p$ , noté  $\Omega_p$ , tel que, pour tous  $x, y \in \Omega_p$ , le noyau de la chaleur est de la forme

$$P(t, s, x, y) = \frac{e^{-\frac{r^2(x, y)}{4(t-s)}}}{(4\pi(t-s))^{-\frac{n}{2}}} \left( \sum_{k=0}^N \tilde{u}_k(s, x, y) + \Upsilon_N(t, s, x, y) \right),$$

où  $0 \leq s < t \leq T$ ,

$$\Upsilon_N(t, s, x, y) = O((t-s)^N),$$

et

$$\left| \frac{\partial}{\partial x^i} \Upsilon_N(t, s, x, y) \right| = O((t-s)^{N-1}), \text{ pour tout } i = 1, \dots, n,$$

pour  $x, y \in \Omega_p$ , où  $\{x^i\}_{i=1}^n$  est un système de coordonnées autour de  $x$ . quand  $t$  tend vers  $s$ . Alors, on introduit deux autres applications

$$\begin{aligned} \mathcal{R}_{\Omega_p} : \Omega_p &\rightarrow L^2(\Omega_p) \\ x &\mapsto -\frac{r^2(x, \cdot)}{4} \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned} (t \log \mathcal{P}_t)_{\Omega_p} : \Omega_p &\rightarrow L^2(\Omega_p) \\ x &\mapsto t \log P(t, x, \cdot). \end{aligned}$$

Et on démontre que  $\mathcal{R}_{\Omega_p}$  est un plongement de  $\Omega_p$  dans  $L^2(\Omega_p)$  et que

$$\lim_{t \rightarrow 0} \|d_x(t \log \mathcal{P}_t)_{\Omega_p}(V) - d_x \mathcal{R}_{\Omega_p}(V)\|_{L^2(\Omega_p)} = 0$$

uniformément en  $x \in \Omega_p$ ,  $V \in T_x^1 M$ . Ceci va nous aider à démontrer que l'application  $t \log \mathcal{P}_t$ , et par conséquent l'application  $\mathcal{P}_t$  est un plongement de  $M$  dans  $L^2(M, v_0)$ , pour  $t$  suffisamment petit.

## 4.1 Le comportement du logarithme de la solution fondamentale pour les temps petits

Dans cette section, on va démontrer que

$$\lim_{t \rightarrow s^+} (t-s) \log P(t, s, x, y) = -\frac{r^2(x, y)}{4} \tag{4.1.1}$$

uniformément en  $x, y \in M$ , où  $s \in [0, T]$ , et  $r$  est la distance riemannienne par rapport à  $g(0) = h(0)$ .

Pour cela, on va utiliser les estimations de l'équation de la chaleur non linéaire, appliquée au paramétrix de la solution fondamentale et ses convolutions.

### 4.1.1 Quelques estimations utiles

Le but de cette section est de démontrer qu'il existe une constante  $C_\Theta > 0$  tel que, pour tous  $x, y \in M$ ,  $(t, s) \in \mathbb{R}_T^2$ , et tout  $0 < \varepsilon < 1$ , on a

$$|\Theta_N(t, s, x, y)| \leq C_\Theta e^{-\frac{r^2(x,y)}{(4+\varepsilon)(t-s)}} (t-s)^{N-\frac{n}{2}+\frac{1}{2}} \varepsilon^{-(N+\frac{n}{2}+\frac{1}{2})} e^{C_\Theta \varepsilon^{-(N+1)} (t-s)^{N-\frac{n}{2}+1}}.$$

**Lemme 4.1.1.** *Il existe  $C_2 > 0$ , tel que pour tous  $x, y \in M$ ,  $(t, s) \in \mathbb{R}_T^2$ , et tout  $0 < \varepsilon < 1$ , on a*

$$|\square_t P_N(t, s, x, y)| \leq C_2 \varepsilon^{-(N+1)} e^{-\frac{r^2(x,y)}{(4+\varepsilon)(t-s)}} (t-s)^{N-\frac{n}{2}}. \quad (4.1.2)$$

**Preuve.** Soit  $0 < \varepsilon < 1$ . Revenons aux 3 cas de la preuve du lemme 3.3.1, on a

a) Si  $(x, y) \in (M \times M - U_{\frac{\rho}{2}})$ ,

$$|\square_t P_N(t, s, x, y)| = 0 \leq C_2 \varepsilon^{-(N+1)} e^{-\frac{r^2(x,y)}{(4+\varepsilon)(t-s)}} (t-s)^{N-\frac{n}{2}}.$$

b) Si  $(x, y) \in U_{\frac{\rho}{4}}$ ,

$$|\square_t P_N(t, s, x, y)| = |\square_t S_N(t, s, x, y)| \leq C_2^1 e^{-\frac{r^2(x,y)}{4(t-s)}} (t-s)^{N-\frac{n}{2}},$$

avec  $C_2^1 > 0$  indépendant de  $(t, s) \in \mathbb{R}_T^2$  et de  $x, y \in M$ . Et puisque  $\varepsilon^{-(N+1)} > 1$ , et

$$e^{-\frac{r^2(x,y)}{4(t-s)}} \leq e^{-\frac{r^2(x,y)}{(4+\varepsilon)(t-s)}},$$

alors

$$|\square_t P_N(t, s, x, y)| \leq C_2^1 \varepsilon^{-(N+1)} e^{-\frac{r^2(x,y)}{(4+\varepsilon)(t-s)}} (t-s)^{N-\frac{n}{2}}.$$

c) Si  $(x, y) \in U_{\frac{\rho}{2}} - U_{\frac{\rho}{4}}$ , alors

$$|\square_t P_N(t, s, x, y)| \leq C_2^2 e^{-\frac{r^2(x,y)}{(4+\varepsilon)(t-s)}} e^{-\frac{\varepsilon r^2(x,y)}{4(4+\varepsilon)(t-s)}} (t-s)^{N-\frac{n}{2}} (1 + (t-s)^{-N} + (t-s)^{-N-1}).$$

Or, dans cette région,  $r(x, y) \geq \frac{\rho}{4}$ , alors

$$|\square_t P_N(t, s, x, y)| \leq C_2^2 e^{-\frac{r^2(x,y)}{(4+\varepsilon)(t-s)}} e^{-\frac{\varepsilon \rho^2}{64(4+\varepsilon)(t-s)}} (t-s)^{N-\frac{n}{2}} (1 + (t-s)^{-N} + (t-s)^{-N-1}).$$

D'après la remarque 3.3.2, on a, pour tous  $k \in \mathbb{R}$ , et  $0 < \varepsilon < 1$ ,

$$\begin{aligned} e^{-\frac{\varepsilon \rho^2}{64(4+\varepsilon)(t-s)}} (t-s)^{-k} &= \left( \frac{\varepsilon \rho^2}{64(4+\varepsilon)} \right)^{-k} \left( \frac{\varepsilon \rho^2}{64(4+\varepsilon)(t-s)} \right)^k e^{-\frac{\varepsilon \rho^2}{64(4+\varepsilon)(t-s)}} \\ &\leq \left( \frac{\varepsilon \rho^2}{64(4+\varepsilon)} \right)^{-k} k^k e^{-k} \\ &\leq \varepsilon^{-k} \left( \frac{320}{\rho^2} \right)^k k^k e^{-k}. \end{aligned}$$

Alors

$$|\square_t P_N(t, s, x, y)| \leq C_2^3 e^{-\frac{r^2(x,y)}{(4+\varepsilon)(t-s)}} (t-s)^{N-\frac{n}{2}} \varepsilon^{-(N+1)},$$

où

$$C_2^3 = C_2^2 \left[ 1 + \left( \frac{320}{\rho^2} \right)^N N^N e^{-N} + \left( \frac{320}{\rho^2} \right)^{N+1} (N+1)^{N+1} e^{-(N+1)} \right].$$

En posant  $C_2 = \max \{C_2^1, C_2^3\}$ , on obtient l'estimation 4.1.2, pour tous  $x, y \in M$ ,  $(t, s) \in \mathbb{R}_T^2$ , et tout  $0 < \varepsilon < 1$ . □

**Lemme 4.1.2.** *Pour tous  $m \in \mathbb{N}^*$ ,  $x, y \in M$ ,  $(t, s) \in \mathbb{R}_T^2$ , et tout  $0 < \varepsilon < 1$ , on a*

$$|\Phi_m(t, s, x, y)| \leq \frac{C_2^m \varepsilon^{-m(N+1)} \text{Vol}(M)^{m-1}}{(m-1)!(N-\frac{n}{2}+1)^{m-1}} (t-s)^{m(N-\frac{n}{2}+1)-1} e^{-\frac{r^2(x,y)}{(4+\varepsilon)(t-s)}} \quad (4.1.3)$$

où  $\text{Vol}(M)$  est le volume de  $M$ . Comme conséquence, on a

$$|F_N(t, s, x, y)| \leq C_2 \varepsilon^{-(N+1)} (t-s)^{N-\frac{n}{2}} \exp\left(\frac{C_2 \text{Vol}(M) \varepsilon^{-(N+1)} (t-s)^{N-\frac{n}{2}+1}}{N-\frac{n}{2}+1}\right) e^{-\frac{r^2(x,y)}{(4+\varepsilon)(t-s)}} \quad (4.1.4)$$

où

$$F_N(t, s, x, y) = \sum_{m=1}^{\infty} \Phi_m(t, s, x, y).$$

**Preuve.** Pour  $m = 1$ , l'inégalité 4.1.3 est vraie (lemme 4.1.1). Supposons que 4.1.3 est vraie pour  $m \in \mathbb{N}^*$ , et démontrons le pour  $m + 1$ . On a,

$$\begin{aligned} |\Phi_{m+1}(t, s, x, y)| &\leq \int_s^t d\tau \int_M |\square_t P_N(t, \tau, x, z)| \frac{C_2^m \varepsilon^{-m(N+1)} \text{Vol}(M)^{m-1}}{(m-1)!(N-\frac{n}{2}+1)^{m-1}} (\tau-s)^{m(N-\frac{n}{2}+1)-1} e^{-\frac{r^2(z,y)}{(4+\varepsilon)(\tau-s)}} dv_0(z) \\ &\leq \int_s^t d\tau \int_M C_2 \varepsilon^{-(N+1)} e^{-\frac{r^2(x,z)}{(4+\varepsilon)(t-\tau)}} (t-\tau)^{N-\frac{n}{2}} \frac{C_2^m \varepsilon^{-m(N+1)} \text{Vol}(M)^{m-1}}{(m-1)!(N-\frac{n}{2}+1)^{m-1}} (\tau-s)^{m(N-\frac{n}{2}+1)-1} e^{-\frac{r^2(z,y)}{(4+\varepsilon)(\tau-s)}} dv_0(z). \end{aligned}$$

Et puisque  $t - \tau < t - s$ , alors

$$\begin{aligned} &|\Phi_{m+1}(t, s, x, y)| \\ &\leq \frac{C_2^{m+1} \varepsilon^{-(m+1)(N+1)} \text{Vol}(M)^{m-1}}{(m-1)!(N-\frac{n}{2}+1)^{m-1}} (t-s)^{N-\frac{n}{2}} \int_s^t d\tau \int_M e^{-\frac{r^2(x,z)}{(4+\varepsilon)(t-\tau)}} e^{-\frac{r^2(z,y)}{(4+\varepsilon)(\tau-s)}} (\tau-s)^{m(N-\frac{n}{2}+1)-1} dv_0(z). \end{aligned}$$

Or<sup>1</sup>

$$\frac{r^2(x, z)}{(t-\tau)} + \frac{r^2(z, y)}{(\tau-s)} \geq \frac{(r(x, z) + r(z, y))^2}{(t-s)} \geq \frac{r^2(x, y)}{(t-s)}, \quad (4.1.5)$$

alors,

$$e^{-\frac{r^2(x,z)}{(4+\varepsilon)(t-\tau)}} e^{-\frac{r^2(z,y)}{(4+\varepsilon)(\tau-s)}} \leq e^{-\frac{r^2(x,y)}{(4+\varepsilon)(t-s)}}, \quad (4.1.6)$$

<sup>1</sup>Pour  $a, b \in \mathbb{R}$ , et  $c, d > 0$ , on a  $\frac{a^2}{c} + \frac{b^2}{d} \geq \frac{(a+b)^2}{c+d}$ , (voir [CCG+ar], page 234)

et,

$$\begin{aligned} |\Phi_{m+1}(t, s, x, y)| &\leq \frac{C_2^{m+1} \varepsilon^{-(m+1)(N+1)} \text{Vol}(M)^m}{(m-1)!(N - \frac{n}{2} + 1)^{m-1}} e^{-\frac{r^2(x,y)}{(4+\varepsilon)(t-s)}} (t-s)^{N-\frac{n}{2}} \int_s^t (\tau-s)^{m(N-\frac{n}{2}+1)-1} d\tau \\ &= \frac{C_2^{m+1} \varepsilon^{-(m+1)(N+1)} \text{Vol}(M)^m}{m!(N - \frac{n}{2} + 1)^m} e^{-\frac{r^2(x,y)}{(4+\varepsilon)(t-s)}} (t-s)^{(m+1)(N-\frac{n}{2}+1)-1}, \end{aligned}$$

d'où 4.1.3 est vraie pour tout  $m \in \mathbb{N}^*$ . Par conséquent

$$\begin{aligned} \sum_{m=1}^{\infty} |\Phi_m(t, s, x, y)| &\leq \sum_{m=1}^{\infty} \frac{C_2^m \varepsilon^{-m(N+1)} \text{Vol}(M)^{m-1}}{(m-1)!(N - \frac{n}{2} + 1)^{m-1}} (t-s)^{m(N-\frac{n}{2}+1)-1} e^{-\frac{r^2(x,y)}{(4+\varepsilon)(t-s)}} \\ &\leq C_2 e^{-\frac{r^2(x,y)}{(4+\varepsilon)(t-s)}} (t-s)^{N-\frac{n}{2}} \varepsilon^{-(N+1)} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{C_2^{m-1} \varepsilon^{-(m-1)(N+1)} \text{Vol}(M)^{m-1} (t-s)^{(m-1)(N-\frac{n}{2}+1)}}{(m-1)!(N - \frac{n}{2} + 1)^{m-1}} \\ &\leq C_2 e^{-\frac{r^2(x,y)}{(4+\varepsilon)(t-s)}} (t-s)^{N-\frac{n}{2}} \varepsilon^{-(N+1)} \exp\left(\frac{C_2 \varepsilon^{-(N+1)} \text{Vol}(M) (t-s)^{N-\frac{n}{2}+1}}{N - \frac{n}{2} + 1}\right). \end{aligned}$$

□

**Lemme 4.1.3.** *Il existe une constante  $C_\Theta > 0$ , telle que, pour tous  $(t, s) \in \mathbb{R}_T^2$ ,  $x, y \in M$ , et tout  $0 < \varepsilon < 1$ , on a*

$$|\Theta_N(t, s, x, y)| \leq C_\Theta e^{-\frac{r^2(x,y)}{(4+\varepsilon)(t-s)}} (t-s)^{N-\frac{n}{2}+\frac{1}{2}} \varepsilon^{-(N+\frac{n}{2}+\frac{1}{2})} e^{C_\Theta \varepsilon^{-(N+1)} (t-s)^{N-\frac{n}{2}+1}}. \quad (4.1.7)$$

**Preuve.** Soit  $0 < \varepsilon < 1$ . Pour tous  $(t, s) \in \mathbb{R}_T^2$ ,  $x, y \in M$ , et tout  $\alpha \in \mathbb{R}$ , on a

$$\begin{aligned} |P_N(t, \tau, x, z)| &\leq C_{N,T} (t-\tau)^{-\frac{n}{2}} e^{-\frac{r^2(x,z)}{4(t-\tau)}} \\ &\leq C_{N,T} (t-\tau)^{-\frac{n}{2}} e^{-\frac{\varepsilon r^2(x,z)}{4(4+\varepsilon)(t-\tau)}} e^{-\frac{r^2(x,z)}{(4+\varepsilon)(t-\tau)}} \\ &\leq C_{N,T} (t-\tau)^{-\alpha} \left(\frac{\varepsilon r^2(x,z)}{4(4+\varepsilon)(t-\tau)}\right)^{\frac{n}{2}-\alpha} \left(\frac{\varepsilon r^2(x,z)}{4(4+\varepsilon)}\right)^{-\frac{n}{2}+\alpha} e^{-\frac{\varepsilon r^2(x,z)}{4(4+\varepsilon)(t-\tau)}} e^{-\frac{r^2(x,z)}{(4+\varepsilon)(t-\tau)}}. \end{aligned}$$

Toujours d'après la remarque 3.3.2,

$$\left(\frac{\varepsilon r^2(x,z)}{4(4+\varepsilon)(t-\tau)}\right)^{\frac{n}{2}-\alpha} e^{-\frac{\varepsilon r^2(x,z)}{4(4+\varepsilon)(t-\tau)}} \leq \left(\frac{n}{2}\right)^{\frac{n}{2}-\alpha} e^{-\frac{n}{2}+\alpha}.$$

Alors

$$|P_N(t, \tau, x, z)| \leq C (t-\tau)^{-\alpha} \varepsilon^{-\frac{n}{2}+\alpha} r^{-n+2\alpha}(x, z) \exp\left(-\frac{r^2(x,z)}{(4+\varepsilon)(t-\tau)}\right)$$

où  $C$  est une constante positive indépendante de  $t, s, x, y$  et  $\varepsilon$ , d'où

$$\begin{aligned} &|P_N(t, \tau, x, z) F_N(\tau, s, z, y)| \\ &\leq C (t-\tau)^{-\alpha} \varepsilon^{-\frac{n}{2}+\alpha} e^{-\frac{r^2(x,z)}{(4+\varepsilon)(t-\tau)}} e^{-\frac{r^2(z,y)}{(4+\varepsilon)(\tau-s)}} (\tau-s)^{N-\frac{n}{2}} \varepsilon^{-(N+1)} r^{-n+2\alpha}(x, z) e^{\frac{C \varepsilon^{-(N+1)} \text{Vol}(M) (\tau-s)^{N-\frac{n}{2}+1}}{N-\frac{n}{2}+1}}, \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned} &|\Theta_N(t, s, x, y)| \\ &\leq C e^{-\frac{r^2(x,y)}{(4+\varepsilon)(t-s)}} (t-s)^{N-\frac{n}{2}} \varepsilon^{-(N+1+\frac{n}{2}-\alpha)} e^{\frac{C \varepsilon^{-(N+1)} \text{Vol}(M) (t-s)^{N-\frac{n}{2}+1}}{N-\frac{n}{2}+1}} \int_s^t d\tau \int_{B(x, \frac{\rho}{2})} (t-\tau)^{-\alpha} r^{-n+2\alpha}(x, z) dv_0(z). \end{aligned}$$

En passant par les coordonnées polaires (c.f. remarque 3.3.3), on a

$$\int_{B(x, \frac{\rho}{2})} r^{-n+2\alpha}(x, z) dv_0(z) \leq C \int_0^{\frac{\rho}{2}} r^{2\alpha-1} dr,$$

où  $C$  dépend de la métrique  $g(0) = h(0)$ . En posant  $\alpha = \frac{1}{2}$ , on a

$$|\Theta_N(t, s, x, y)| \leq C_\Theta e^{-\frac{r^2(x, y)}{(4+\varepsilon)(t-s)}} (t-s)^{N-\frac{n}{2}+\frac{1}{2}} \varepsilon^{-(N+\frac{n}{2}+\frac{1}{2})} e^{C_\Theta \varepsilon^{-(N+1)}(t-s)^{N-\frac{n}{2}+1}},$$

où  $C_\Theta > 0$ , est une constante indépendante de  $t, s, x, y$ , et de  $\varepsilon$ . □

#### 4.1.2 Corrélation entre le logarithme de la solution fondamentale et la distance riemannienne

On est prêt maintenant à démontrer la formule 4.1.1.

**Théorème 4.1.4.** *Pour tout  $s \in [0, T]$*

$$\lim_{t \rightarrow s^+} \left| (t-s) \log P(t, s, x, y) + \frac{r^2(x, y)}{4} \right| = 0 \quad (4.1.8)$$

uniformément en  $x, y \in M$ . En particulier, pour tous  $x, y \in M$ , on a

$$\lim_{t \rightarrow s^+} (t-s) \log P(t, s, x, y) = -\frac{r^2(x, y)}{4}.$$

**Preuve.** On a

$$\begin{aligned} \left| (t-s) \log P(t, s, x, y) + \frac{r^2(x, y)}{4} \right| &= \left| (t-s) \log (P_N(t, s, x, y) + \Theta_N(t, s, x, y)) + \frac{r^2(x, y)}{4} \right| \\ &= \left| (t-s) \log \left( e^{-\frac{r^2(x, y)}{4(t-s)}} (4\pi(t-s))^{-\frac{n}{2}} U_N(t, s, x, y) + \Theta_N(t, s, x, y) \right) + \frac{r^2(x, y)}{4} \right| \\ &= \left| (t-s) \log \left( (4\pi(t-s))^{-\frac{n}{2}} U_N(t, s, x, y) + e^{\frac{r^2(x, y)}{4(t-s)}} \Theta_N(t, s, x, y) \right) \right|. \end{aligned}$$

D'après 4.1.7, on a, pour tout  $0 < \varepsilon < 1$ ,

$$e^{\frac{r^2(x, y)}{4\tau}} |\Theta_N(t, s, x, y)| \leq C_\Theta e^{\frac{\varepsilon r^2(x, y)}{4(4+\varepsilon)\tau}} \tau^{N-\frac{n}{2}+\frac{1}{2}} \varepsilon^{-(N+\frac{n}{2}+\frac{1}{2})} e^{C_\Theta \varepsilon^{-(N+1)} \tau^{N-\frac{n}{2}+1}}, \quad (4.1.9)$$

où  $\tau = t-s$ ,  $C_\Theta > 0$  est une constante indépendante de  $x, y \in M$ , et de  $(t, s) \in \mathbb{R}_T^2$ , et de  $0 < \varepsilon < 1$ . En plus, puisque

$$1 < e^{\frac{\varepsilon r^2(x, y)}{4(4+\varepsilon)\tau}} \varepsilon^{-(N+\frac{n}{2}+\frac{1}{2})} e^{C_\Theta \varepsilon^{-(N+1)} \tau^{N-\frac{n}{2}+1}},$$

et

$$|U_N(t, s, x, y)| \leq C_{N, T}, \text{ pour tout } t \in ]0, T], \text{ et tous } x, y \in M, \text{ (c.f. équation 3.2.6),}$$

alors

$$(4\pi\tau)^{-\frac{n}{2}} |U_N(t, s, x, y)| \leq C_{N, T} (4\pi\tau)^{-\frac{n}{2}} e^{\frac{\varepsilon r^2(x, y)}{4(4+\varepsilon)\tau}} \varepsilon^{-(N+\frac{n}{2}+\frac{1}{2})} e^{C_\Theta \varepsilon^{-(N+1)} \tau^{N-\frac{n}{2}+1}}. \quad (4.1.10)$$

Les deux estimations 4.1.9 et 4.1.10 nous donnent que

$$\begin{aligned} (4\pi\tau)^{-\frac{n}{2}} |U_N(t, s, x, y)| + e^{\frac{r^2(x,y)}{4\tau}} |\Theta_N(t, s, x, y)| \\ \leq \left( C_{N,T} (4\pi\tau)^{-\frac{n}{2}} + C_\Theta \tau^{N-\frac{n}{2}+\frac{1}{2}} \right) e^{\frac{\varepsilon r^2(x,y)}{4(4+\varepsilon)\tau}} \varepsilon^{-(N+\frac{n}{2}+\frac{1}{2})} e^{C_\Theta \varepsilon^{-(N+1)}} \tau^{N-\frac{n}{2}+1} \\ \leq C \tau^{-\frac{n}{2}} e^{\frac{\varepsilon r^2(x,y)}{4(4+\varepsilon)\tau}} \varepsilon^{-(N+\frac{n}{2}+\frac{1}{2})} e^{C_\Theta \varepsilon^{-(N+1)}} \tau^{N-\frac{n}{2}+1}, \end{aligned}$$

avec  $C \doteq C_{N,T} (4\pi)^{-\frac{n}{2}} + C_\Theta T^{N+\frac{1}{2}}$ . Ainsi

$$\begin{aligned} \tau \log \left( (4\pi\tau)^{-\frac{n}{2}} |U_N(t, s, x, y)| + e^{\frac{r^2(x,y)}{4\tau}} |\Theta_N(t, s, x, y)| \right) \\ \leq \tau \log \left( C \tau^{-\frac{n}{2}} \varepsilon^{-(N+\frac{n}{2}+\frac{1}{2})} \right) + \frac{\varepsilon r^2(x,y)}{4(4+\varepsilon)} + \tau C_\Theta \varepsilon^{-(N+1)} \tau^{N-\frac{n}{2}+1} \\ \leq \tau \log \left( C \tau^{-\frac{n}{2}} \varepsilon^{-(N+\frac{n}{2}+\frac{1}{2})} \right) + \frac{\varepsilon (D_M)^2}{16} + \tau C_\Theta \varepsilon^{-(N+1)} \tau^{N-\frac{n}{2}+1}, \end{aligned}$$

où  $D_M$  est le diamètre de  $(M, h(0))$ , et ceci pour tout  $0 < \varepsilon < 1$ . En posant  $\varepsilon = \tau^{\frac{1}{N+1}}$ , on a

$$\tau \log \left( (4\pi\tau)^{-\frac{n}{2}} |U_N(t, s, x, y)| + e^{\frac{r^2(x,y)}{4\tau}} |\Theta_N(t, s, x, y)| \right) \leq \tau \log \left( C \tau^{-\frac{n}{2}-1+\frac{-n-1}{2(N+1)}} \right) + \frac{D_M^2}{16} \tau^{\frac{1}{N+1}} + C_\Theta \tau^{N-\frac{n}{2}+1}$$

qui tend vers 0 uniformément en  $x, y \in M$ , quand  $\tau$  tend vers 0. □

## 4.2 Plongement à l'aide du logarithme de la solution fondamentale

Dans cette section on va démontrer que si la conjecture 4.0.9 est vraie, alors l'application

$$\begin{aligned} t \log \mathcal{P}_t : M &\rightarrow L^2(M, v_0) \\ x &\mapsto t \log P(t, x, \cdot) \end{aligned}$$

est un plongement pour  $t$  suffisamment proche de 0.

**Lemme 4.2.1.** *L'application*

$$\begin{aligned} \mathcal{R} : M &\rightarrow L^2(M, v_0) \\ x &\mapsto -\frac{r^2(x, \cdot)}{4} \end{aligned}$$

*est continue en tout  $x \in M$ , et injective.*

**Preuve.**

(1) L'application  $\mathcal{R} : M \rightarrow L^2(M, v_0)$  est bien définie car  $M$  compacte. De plus, pour tous  $x, y \in M$ , on a

$$\begin{aligned} \|\mathcal{R}(x) - \mathcal{R}(y)\|_{L^2(M, v_0)}^2 &= \frac{1}{16} \int_M (r^2(x, z) - r^2(y, z))^2 dv_0(z) \\ &= \frac{1}{16} \int_M (r(x, z) - r(y, z))^2 (r(x, z) + r(y, z))^2 dv_0(z) \end{aligned}$$

Or,  $r(x, z) - r(y, z) \leq r(x, y)$ , et  $r(x, z) + r(y, z) \leq 2D_M$ , pour tout  $z \in M$ , où  $D_M$  est le diamètre de  $M$ , alors

$$\|\mathcal{R}(x) - \mathcal{R}(y)\|_{L^2(M, v_0)}^2 \leq \frac{D_M^2}{4} Vol(M) r^2(x, y).$$

D'où  $\mathcal{R}$  est lipschitzienne sur  $M$ , donc continue.

(2)  $\mathcal{R}$  est injective : En fait, soient  $x, y \in M$ , tels que  $\mathcal{R}(x) = \mathcal{R}(y)$ , alors  $r(x, z) = r(y, z)$ , pour presque tout  $z \in M$ , et par continuité pour tout  $z \in M$ . En particulier  $r(x, y) = r(y, y) = 0$ , et  $x = y$ . □

**Lemme 4.2.2.** On a

$$\lim_{t \rightarrow 0} \|t \log \mathcal{P}_t(x) - \mathcal{R}(x)\|_{L^2(M, v_0)} = 0$$

uniformément en  $x \in M$ .

**Preuve.** Le lemme est un résultat immédiat du théorème 4.1.4 □

Soit  $\Omega$  un ouvert quelconque de  $M$ , de diamètre inférieur à  $\frac{\rho}{2}$ , par rapport à la métrique  $h(0)$ . Considérons  $L^2(\Omega) = L^2(\Omega, dv_0)$ ; et considérons l'application

$$\begin{aligned} \mathcal{R}_\Omega : \quad \Omega &\rightarrow L^2(\Omega) \\ x &\mapsto -\frac{r^2(x, \cdot)}{4}. \end{aligned}$$

**Lemme 4.2.3.**  $\mathcal{R}_\Omega$  est un plongement<sup>2</sup> de  $\Omega$  dans  $L^2(\Omega)$ .

**Preuve.**

(1)  $\mathcal{R}_\Omega$  est bien définie, puisque  $Vol(\Omega) < \infty$ . De plus, elle est lipschitzienne sur  $\Omega$ . En fait, si  $x, y \in \Omega$ , alors

$$\begin{aligned} \|\mathcal{R}_\Omega(x) - \mathcal{R}_\Omega(y)\|_{L^2(M, v_0)}^2 &= \frac{1}{16} \int_\Omega [r^2(x, z) - r^2(y, z)]^2 dv_0(z) \\ &\leq \frac{1}{16} \int_\Omega [r(x, y) + r(y, z)]^2 [r(x, y) - r(y, z)]^2 dv_0(z) \\ &\leq \frac{\rho^2}{16} Vol(\Omega) r^2(x, y). \end{aligned}$$

<sup>2</sup>Pour la preuve du théorème 4.0.10, on n'a pas vraiment besoin que  $R_\Omega$  soit un plongement de  $\Omega$  dans  $L^2(\Omega)$ . Le fait qu'elle soit une immersion suffit.

(2)  $\mathcal{R}_\Omega$  est de classe  $C^1$  sur  $\Omega$  : En fait, soit  $x \in \Omega$ . Puisque  $\text{Diam}(\Omega) < \frac{\rho}{2}$ , alors on peut considérer l'application

$$\exp_x : \mathbb{R}^n \simeq T_x M \supseteq \exp_x^{-1}(\Omega) \rightarrow \Omega$$

où  $\exp_x$  est l'application exponentielle en  $x$  par rapport à la métrique  $h(0)$ , comme carte locale autour de  $x$ .

De plus,  $\mathcal{R}_\Omega \circ \exp_x$  est différentiable en 0. Sa dérivée en 0 est l'application linéaire

$$\begin{aligned} L & : T_x M \rightarrow L^2(\Omega) \\ V & \mapsto -\frac{d_x r^2(V, \cdot)}{4}. \end{aligned}$$

Pour le prouver, démontrons que

$$\frac{\|\mathcal{R} \circ \exp_x(\vartheta) - \mathcal{R} \circ \exp_x(0) - L(\vartheta)\|_{L^2(\Omega)}}{|\vartheta|} \rightarrow 0, \text{ quand } \vartheta \rightarrow 0,$$

i.e.

$$\lim_{\vartheta \rightarrow 0} \int_{\Omega} \frac{|r^2(\exp_x(\vartheta), z) - r^2(\exp_x(0), z) - d_x r^2(\vartheta, z)|^2}{|\vartheta|^2} dv_0(z) = 0.$$

Considérons  $z \in \Omega$ . L'application

$$\begin{aligned} r_z^2 & : \Omega \rightarrow \mathbb{R} \\ x & \mapsto r^2(x, z), \end{aligned}$$

est différentiable en tout  $x \in \Omega$ , car  $\Omega \subseteq M \setminus \text{Cut}_z$ , où  $\text{Cut}_z$  est le cut locus de  $z$ , et  $d_x r_z^2 \circ T_0 \exp_x$  est la différentielle de l'application

$$r_z^2 \circ \exp_x : \exp_x^{-1}(\Omega) \rightarrow \mathbb{R},$$

$T_0 \exp_x$  est bien entendu l'application tangente de  $\exp_x$  en  $0 \in T_x M$ . Notons bien que,  $T_0 \exp_x(\vartheta) = \vartheta$ , pour tout  $\vartheta \in \exp_x^{-1}(\Omega) \subseteq T_x M$ , (voir [DC92], [GHL04]). Alors

$$\lim_{\vartheta \rightarrow 0} \frac{|r^2(\exp_x(\vartheta), z) - r^2(\exp_x(0), z) - d_x r^2(\vartheta, z)|}{|\vartheta|} = 0, \vartheta \in T_x M,$$

avec

$$\begin{aligned} & \frac{|r^2(\exp_x(\vartheta), z) - r^2(\exp_x(0), z) - d_x r^2(\vartheta, z)|^2}{|\vartheta|^2} \\ & \leq \frac{|r^2(\exp_x(\vartheta), z) - r^2(\exp_x(0), z)|^2 + 2|r^2(\exp_x(\vartheta), z) - r^2(\exp_x(0), z)| |d_x r^2(\vartheta, z)| + |d_x r^2(\vartheta, z)|^2}{|\vartheta|^2}. \end{aligned}$$

Or

$$\begin{aligned} |r^2(\exp_x(\vartheta), z) - r^2(\exp_x(0), z)| & = |r(\exp_x(\vartheta), z) + r(\exp_x(0), z)| |r(\exp_x(\vartheta), z) - r(\exp_x(0), z)| \\ & \leq \rho r(\exp_x(\vartheta), \exp_x(0)), \end{aligned}$$

ce qui nous donne

$$\begin{aligned} & \frac{|r^2(\exp_x(\vartheta), z) - r^2(\exp_x(0), z) - d_x r^2(\vartheta, z)|^2}{|\vartheta|^2} \\ & \leq \frac{\rho^2 r^2(\exp_x(\vartheta), \exp_x(0)) + 2\rho r(\exp_x(\vartheta), \exp_x(0)) |d_x r^2(\vartheta, z)| + |d_x r^2(\vartheta, z)|^2}{|\vartheta|^2}. \end{aligned}$$

Et puisque  $r(\exp_x(\vartheta), \exp_x(0)) = |\vartheta|$  ( $\exp_x$  est un difféomorphisme de  $\exp_x^{-1}(\Omega) \subseteq T_x M$  dans  $\Omega$ ), et  $|d_x r^2(\vartheta, z)| \leq 2r(x, z)|\nabla_x r(x, z)||\vartheta| \leq \rho|\vartheta|$  (car  $|\nabla_x r(x, z)| = 1$ , pour tout  $x \in M \setminus Cut_z$ ), on a

$$\frac{|r^2(\exp_x(\vartheta), z) - r^2(\exp_x(0), z) - d_x r^2(\vartheta, z)|^2}{|\vartheta|^2} \leq 4\rho^2.$$

Par le théorème de la convergence dominée,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_{\Omega} \frac{|r^2(\exp_x(\vartheta_n), z) - r^2(\exp_x(0), z) - d_x r^2(\vartheta_n, z)|^2}{|\vartheta_n|^2} = 0$$

pour toute suite de vecteurs  $\vartheta_n \in T_x M$ , convergente vers 0, quand  $n$  tend vers l'infini. Et comme

$$\int_{\Omega} \frac{|r^2(\exp_x(\vartheta), z) - r^2(\exp_x(0), z) - d_x r^2(\vartheta, z)|^2}{|\vartheta|^2} \in [0, 4\text{Vol}(\Omega)\rho^2]$$

alors,

$$\lim_{|\vartheta| \rightarrow 0} \int_{\Omega} \frac{|r^2(\exp_x(\vartheta), z) - r^2(\exp_x(0), z) - d_x r^2(\vartheta, z)|^2}{|\vartheta|^2} = 0, \vartheta \in \exp_x^{-1}(\Omega) \subset T_x M,$$

et,

$$\lim_{|\vartheta| \rightarrow 0} \frac{\|\mathcal{R} \circ \exp_x(\vartheta) - \mathcal{R} \circ \exp_x(0) - L(\vartheta)\|_{L^2(\Omega)}}{|\vartheta|} = 0.$$

Ainsi  $\mathcal{R}_{\Omega}$  est dérivable en  $x$  et sa dérivée  $d_x \mathcal{R}_{\Omega}$  en  $x$ , est une application qui associe à tout vecteur  $V$  de  $T_x M$ , l'application

$$d_x \mathcal{R}_{\Omega}(V) : \quad \Omega \rightarrow \mathbb{R} \\ y \mapsto -\frac{d_x r^2(V, y)}{4}.$$

(3)  $\mathcal{R}_{\Omega}$  est une immersion en tout point de  $\Omega$  : Soit  $x \in \Omega$ , et  $V$  un vecteur unitaire  $T_x M$  par rapport à la métrique  $h(0)$ , alors  $d_x \mathcal{R}_{\Omega}(V)(y) = \frac{1}{4} \langle -\nabla_x r^2(x, y), V \rangle_{h(0)}$ , pour tout  $y \in \Omega$ . En particulier, il existe  $y \in \Omega$ , distinct de  $x$ , tel que  $\frac{-\nabla r^2(x, y)}{2r(x, y)} = V$ , alors

$$\langle -\nabla r^2(x, y), V \rangle_{h(0)} = 2r(x, y) \neq 0.$$

Comme la fonction distance  $r(x, \cdot)$  est continue sur  $\Omega$  ( car  $\Omega \subseteq M \setminus Cut_x$ ), il existe  $\eta > 0$ , tel que  $B(y, \eta) \subseteq \Omega$ , et  $\langle -\nabla r^2(x, z), V \rangle_{h(0)} \neq 0$ , pour tout  $z \in B(y, \eta)$ . La boule  $B(y, \eta)$  étant de volume non nul, alors  $d_x \mathcal{R}_{\Omega}(V) \neq 0$  dans  $L^2(\Omega)$ , et  $\mathcal{R}_{\Omega}$  est une immersion.

(4) Enfin,  $\mathcal{R}_{\Omega}$  est injective. En effet, si  $x, y \in \Omega$  sont tels que  $\mathcal{R}_{\Omega}(x) = \mathcal{R}_{\Omega}(y)$ , alors  $r^2(x, z) = r^2(y, z)$ , presque pour tout  $z \in \Omega$ . Les applications  $r_y^2 : y \rightarrow r^2(x, z)$ , et  $r_x^2 : z \rightarrow r^2(y, z)$ , de  $\Omega$  dans  $\mathbb{R}$ , étant continues sur  $\Omega$ , alors  $r^2(x, z) = r^2(y, z)$ , pour tout  $z \in \Omega$ , donc  $r^2(x, y) = r^2(y, y) = 0$ , et  $x = y$ . □

Puisque  $R_\Omega$  est une immersion, on a le lemme suivant :

**Lemme 4.2.4.** *Soit  $\mathcal{K}$  un compact de  $\Omega$ , alors, il existe  $b > 0$ , tel que*

$$\|d_x \mathcal{R}_\Omega(V)\|_{L^2(\Omega)} \geq b,$$

pour tout  $(x, V) \in T^1\mathcal{K}$  (Le fibré unitaire tangent à  $\mathcal{K}$ ).

Considérons maintenant l'application  $(t \log \mathcal{P}_t)_\Omega$  définie par

$$(t \log \mathcal{P}_t)_\Omega : \begin{array}{l} \Omega \rightarrow L^2(\Omega) \\ x \mapsto t \log P(t, x, \cdot) \end{array}$$

où  $\Omega$  est un ouvert quelconque de  $M$ .

**Lemme 4.2.5.** *Supposons que la conjecture 4.0.9 est vraie, alors pour tout  $p \in M$ , il existe un voisinage ouvert  $\Omega_p$  de  $p$ , de diamètre inférieur à  $\frac{\rho}{2}$  par rapport à la métrique  $h(0)$ , tel que*

$$\lim_{t \rightarrow 0} \|d_x(t \log \mathcal{P}_t)_{\Omega_p}(V) - d_x \mathcal{R}_{\Omega_p}(V)\|_{L^2(\Omega_p)} = 0$$

uniformément en  $x \in \Omega_p$ ,  $V \in T_x^1 M$  (unitaire par rapport à la métrique  $h(0)$ ).

**Preuve.** Soit  $p \in M$ . Si la conjecture 4.0.9 est vraie, alors il existe un voisinage ouvert  $\Omega_p$  de  $p$ , de diamètre inférieur à  $\frac{\rho}{2}$ , par rapport à la métrique  $h(0)$ , tel que,

$$P(t, x, y) = (4\pi t)^{-\frac{n}{2}} e^{-\frac{r^2(x, y)}{4t}} (\tilde{u}_0(x, y) + O(t)),$$

avec

$$d_x P(t, V, y) = -\frac{d_x r^2(V, y)}{4t} \frac{e^{-\frac{r^2(x, y)}{4t}}}{(4\pi t)^{-\frac{n}{2}}} (\tilde{u}_0(x, y) + O(t)) + \frac{e^{-\frac{r^2(x, y)}{4t}}}{(4\pi t)^{-\frac{n}{2}}} (d_x \tilde{u}_0(V, y) + O(1)),$$

pour tous  $x, y \in \Omega_p$ ,  $V \in T_x^1 M$ . Alors

$$\frac{d_x P(t, V, y)}{P(t, x, y)} = -\frac{d_x r^2(V, y)}{4t} + \frac{d_x \tilde{u}_0(V, y) + O(t^N)}{\tilde{u}_0(x, y) + O(t)},$$

et

$$\frac{d_x P(t, V, y)}{P(t, x, y)} + \frac{d_x r^2(V, y)}{4t} = \frac{d_x \tilde{u}_0(V, y) + O(1)}{\tilde{u}_0(x, y) + O(t)}.$$

Rappelons que (c.f. section 3.2),

$$\tilde{u}_0(x, y) = \eta(x, y)u_0(x, y)$$

où  $\eta$  est une fonction radiale  $C^\infty$  sur  $M \times M$ , strictement positive pour  $(x, y) \in U_{\frac{\rho}{4}}$ , et  $u_0$  est une fonction  $C^\infty$  et strictement positive sur  $U_\rho$ . Ce qui nous donne que  $\tilde{u}_0$  est strictement positive sur  $U_{\frac{\rho}{4}}$ . En veillant bien à choisir  $\Omega_p$  comme voisinage de  $p$ , de diamètre inférieur à  $\frac{\rho}{4}$ , on pose :

$$c_0 = \inf\{\tilde{u}_0(x, y); x, y \in \overline{\Omega_p}\}.$$

$c_0$  est strictement positif car  $\overline{\Omega}_p$  est compacte. De plus, il existe  $C_0 > 0$ ,  $t_0 > 0$ , tel que, pour tout  $t < t_0$ ,

$$|O(t)| \leq C_0 t$$

qui tend vers 0, quand  $t$  tend vers 0, uniformément en  $x, y \in \Omega_p$ . Alors, pour  $0 < c_1 < c_0$ , il existe  $t_1 > 0$ , tel que, pour tout  $t < t_1$ ,

$$|O(t)| < c_1.$$

De plus, il existe  $C_1 > 0$ , tel que pour tout  $x, y \in \Omega_p$ , et tout  $t < t_0$ , et tout  $V \in T_x^1 M$ ,

$$|d_x \tilde{u}_0(V, y) + O(1)| < C_1.$$

Ainsi, pour tous  $x, y \in \Omega_p$ , et tout  $t < t_0$ , on a

$$\left| \frac{d_x P(t, V, y)}{P(t, x, y)} + \frac{d_x r^2(V, y)}{4t} \right| \leq \frac{C_1}{c_0 - c_1}$$

et

$$\int_{\Omega_p} \left[ \frac{t d_x P(t, V, y)}{P(t, x, y)} + \frac{d_x r^2(V, y)}{4} \right]^2 dv_0(y) \leq \text{vol}(\Omega_p) \frac{t^2 C_1^2}{(c_0 - c_1)^2} \rightarrow 0$$

uniformément en  $x \in \Omega_p$ , et  $V \in T_x^1 M$ , quand  $t \rightarrow 0$ . D'où le lemme.  $\square$

**Lemme 4.2.6.** *Supposons que la conjecture 4.0.9 est vraie. Alors il existe  $\xi > 0$ , tel que, pour tout  $t < \xi$ , l'application  $t \log \mathcal{P}_t$  est un plongement de  $M$  dans  $L^2(M, v_0)$ .*

**Preuve.**

(a) Il existe  $\xi_1 > 0$ , tel que pour tout  $t < \xi_1$ ,  $t \log \mathcal{P}_t$  est une immersion en tout point  $x \in M$  : En fait, supposons par l'absurde que pour tout  $k \in \mathbb{N}^*$ , il existe  $t_k \leq \frac{1}{k}$ ,  $x_k \in M$ , et  $V_k \in T_{x_k}^1 M$ , tels que  $d_{x_k}(t \log \mathcal{P}_{t_k})(V_k) = 0$  dans  $L^2(M, v_0)$ . Puisque le fibré unitaire  $T^1 M$  est compact ( $M$  compacte), on peut extraire de la suite  $\{(x_k, V_k)\}_k$ , une sous-suite  $\{(x_k, V_k)\}_k$ , (par abus de notation), convergente vers  $(p, V_p) \in T^1 M$ . D'après le lemme 4.2.5, il existe un voisinage ouvert  $\Omega_p$  de  $p$ , tel que

$$\lim_{t \rightarrow 0} \|d_x(t \log \mathcal{P}_t)_{\Omega_p}(V) - d_x \mathcal{R}_{\Omega_p}(V)\|_{L^2(\Omega_p)} = 0$$

uniformément en  $x \in \Omega_p$ ,  $V \in T_x^1 M$ . Or, il existe  $k_0 \in \mathbb{N}^*$ , tel que, pour tout  $k > k_0$ ,  $x_k \in \Omega_p$ , et

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \|d_{x_k}(t_k \log \mathcal{P}_{t_k})_{\Omega_p}(V_k) - d_{x_k} \mathcal{R}_{\Omega_p}(V_k)\|_{L^2(\Omega_p)} = 0,$$

avec

$$\|d_{x_k}(t_k \log \mathcal{P}_{t_k})_{\Omega_p}(V_k)\|_{L^2(\Omega_p)} \leq \|d_{x_k}(t_k \log \mathcal{P}_{t_k})(V_k)\|_{L^2(M, v_0)} = 0, \text{ pour tout } k > k_0,$$

ce qui nous donne que

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \|d_x \mathcal{R}_{\Omega_p}(V_k)\|_{L^2(\Omega_p)} = 0,$$

et

$$\|d_p \mathcal{R}_{\Omega_p}(V_p)\|_{L^2(\Omega_p)} = 0.$$

Ainsi,  $d_p \mathcal{R}_{\Omega_p}(V_p)$  est identiquement nulle dans  $L^2(\Omega_p)$ , ce qui est absurde, car  $V_p$  est unitaire, et  $\mathcal{R}_{\Omega_p}$  est une immersion en tout point de  $\Omega_p$ .

(b) Démontrons maintenant par l'absurde qu'il existe  $\xi_2 > 0$ , tel que pour tout  $t < \xi_2$ ,  $t \log \mathcal{P}_t$  est injective : Supposons que, pour tout  $k \in \mathbb{N}^*$ , il existe  $t_k \leq \frac{1}{k}$ ,  $x_k \neq y_k$  dans  $M$ , avec,  $t_k \log \mathcal{P}_{t_k}(x_k) = t_k \log \mathcal{P}_{t_k}(y_k)$ . D'après le lemme 4.2.2, on a

$$\lim_{t \rightarrow 0} \|t \log \mathcal{P}_t(x) - \mathcal{R}(x)\|_{L^2(M, v_0)} = 0$$

uniformément en  $x \in M$ . Et on a

$$\begin{aligned} \|\mathcal{R}(x_k) - \mathcal{R}(y_k)\|_{L^2(M, v_0)} &\leq \|t_k \log \mathcal{P}_{t_k}(x_k) - \mathcal{R}(x_k)\|_{L^2(M, v_0)} + \|t_k \log \mathcal{P}_{t_k}(x_k) - t_k \log \mathcal{P}_{t_k}(y_k)\|_{L^2(M, v_0)} \\ &\quad + \|t_k \log \mathcal{P}_{t_k}(y_k) - \mathcal{R}(y_k)\|_{L^2(M, v_0)}, \end{aligned}$$

alors

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \|\mathcal{R}(x_k) - \mathcal{R}(y_k)\|_{L^2(M, v_0)} = 0.$$

En passant par deux sous-suites de  $\{x_k\}_k$ , et  $\{y_k\}_k$ , notées également  $\{x_k\}_k$ , et  $\{y_k\}_k$  (par abus de notation) et convergentes respectivement vers  $x_\infty$ , et  $y_\infty$ , on a,  $\mathcal{R}(x_\infty) = \mathcal{R}(y_\infty)$  d'après la continuité de  $\mathcal{R}$ , et,  $x_\infty = y_\infty$ , d'après l'injectivité de  $\mathcal{R}$  (c.f. lemme 4.2.1).

Posons  $x_\infty = y_\infty = p$ . D'après le lemme 4.2.5, il existe un voisinage ouvert  $\Omega_p$  de  $x_p$ , tel que, pour tout  $a > 0$ , il existe  $\xi_2 > 0$ , tel que pour tout  $t < \xi_2$ ,  $x \in \Omega_p$ , et tout  $V \in T_x^1 M$ , on a

$$\|d_x(t \log \mathcal{P}_t)_{\Omega_p}(V) - d_x \mathcal{R}_{\Omega_p}(V)\|_{L^2(\Omega_p)} \leq a.$$

Soit  $K_p$  un voisinage compact de  $p$ , tel que  $K_p \subset \Omega_p$ . D'une part, le lemme 4.2.4 nous donne l'existence de  $b > 0$ , tel que,

$$\|d_x \mathcal{R}_{\Omega_p}(V)\|_{L^2(\Omega_p)} > b, \text{ pour tous } x \in K_p, V \in T_x^1 M. \quad (4.2.1)$$

D'autre part, soit  $a > 0$ , tel que  $a < b$ . Comme

$$\lim_{t \rightarrow 0} \|d_x \mathcal{R}_{\Omega_p}(V) - d_x(t \log \mathcal{P}_t)_{\Omega_p}(V)\|_{L^2(\Omega_p)} = 0,$$

alors il existe  $\xi_2 > 0$ , tel que, pour tout  $t < \xi_2$ ,

$$\|d_x \mathcal{R}_{\Omega_p}(V)\|_{L^2(\Omega_p)} - \|d_x(t \log \mathcal{P}_t)_{\Omega_p}(V)\|_{L^2(\Omega_p)} \leq a, \text{ pour tous } x \in K_p, V \in T_x^1 M. \quad (4.2.2)$$

Les deux équations 4.2.1, et 4.2.2 impliquent que pour tout  $t < \xi_2$ , et tous  $x \in K_p, V \in T_x^1 M$ , on a

$$\begin{aligned} \|d_x(t \log \mathcal{P}_t)_{\Omega_p}(V)\|_{L^2(\Omega_p)} &\geq \|d_x \mathcal{R}_{\Omega_p}(V)\|_{L^2(\Omega_p)} - a \\ &\geq (b - a). \end{aligned}$$

Considérons maintenant  $y, z \in K_p$ . En intégrant le long de la géodésique  $\gamma$  reliant  $y$  à  $z$ , et telle que  $|\dot{\gamma}(s)| = 1$ , pour tout  $s \in [0, r(y, z)]$ , on a

$$\int_0^{r(y, z)} \|d_{\gamma(s)}(t \log \mathcal{P}_t)_{\Omega_p}(\dot{\gamma}(s))\|_{L^2(\Omega_p)} ds \geq (b - a) \int_0^{r(y, z)} |\dot{\gamma}(s)| ds$$

et

$$\|(t \log \mathcal{P}_t)_{\Omega_p}(y) - (t \log \mathcal{P}_t)_{\Omega_p}(z)\|_{L^2(\Omega_p)} \geq (b - a)r(y, z).$$

Or, il existe  $k_0 \in \mathbb{N}^*$ , tel que, pour tout  $k > k_0$ ,  $x_k, y_k \in \mathbb{N}^*$ ,

$$0 = \|(t \log \mathcal{P}_t)_{\Omega_p}(x_k) - (t \log \mathcal{P}_t)_{\Omega_p}(y_k)\|_{L^2(\Omega_p)} \geq (b-a)r(x_k, y_k)$$

et  $r(x_k, y_k) = 0$  pour tout  $k > k_0$ , ce qui est absurde car  $x_k \neq y_k$ , pour tout  $k \in \mathbb{N}^*$ . Donc,  $t \log \mathcal{P}_t$  est injective pour tout  $t < \xi_2$ , où  $0 < \xi_2 < \xi_1$ .  $\square$

### 4.3 Plongement à l'aide de la solution fondamentale.

Dans cette section, on va achever la démonstration du théorème 4.0.10.

**Preuve du théorème 4.0.10.** Soit  $\xi > 0$ , comme dans le lemme 4.2.6, alors, si la conjecture 4.0.9 est vraie,

(a)  $\mathcal{P}_t$  est une immersion pour  $t < \xi$  : En fait, si  $x \in M$ , et  $V \in T_x^1 M$ , alors,

$$td_x \log \mathcal{P}_t(V) \neq 0 \text{ dans } L^2(M, v_0),$$

puisque  $t \log \mathcal{P}_t$  est une immersion de  $M$  dans  $L^2(M, v_0)$ , pour  $t > \xi$ . Et comme  $P(t, x, y) > 0$ , pour tous  $x, y \in M$ , alors

$$d_x \mathcal{P}_t(V) \neq 0 \text{ dans } L^2(M, v_0),$$

et  $\mathcal{P}_t$  est une immersion pour  $t < \xi$ .

(b) Soient  $x, y \in M$ , et  $t < \xi$ . Si  $\mathcal{P}_t(x) = \mathcal{P}_t(y)$ , alors  $t \log \mathcal{P}_t(x) = t \log \mathcal{P}_t(y)$ , et  $x = y$ . Ainsi  $\mathcal{P}_t$  est injective pour tout  $t < \xi$ .  $\square$

### 4.4 Métrique image réciproque

Définissons l'application

$$\Psi_t : M \rightarrow L^2(M, v_0), t \in [0, \xi]$$

$$x \mapsto (4\pi)^{\frac{n}{4}} (2t)^{\frac{n+2}{4}} \mathcal{P}_t(x),$$

où  $\xi > 0$  tel que  $\mathcal{P}_t$  est un plongement pour tout  $t < \xi$ .

Le but de cette section est de démontrer que, sous la condition que la conjecture 4.0.9 soit vraie, la métrique tirée en arrière  $\Psi_t^*$  est asymptotique à  $h(0)$  quand  $t \rightarrow 0$ . Pour ce but, on démontre le lemme suivant :

**Lemme 4.4.1.** *Si la conjecture 4.0.9 est vraie, alors*

$$\lim_{t \rightarrow 0} t^{\frac{n}{2}+1} \int_M |d_x P(t, V, y) - d_x K(t, V, y)|^2 dv_0(x) = 0$$

uniformément en  $x \in M$ ,  $V \in T_x^1 M$ , où  $K(t, \dots)$  est le noyau de la chaleur de la variété  $(M, h(0))$ .

L'idée est motivée par la forme et les propriétés de  $K(t, \cdot, \cdot)$ . D'abord, si  $\{\lambda_i\}_{i \in \mathbb{N}}$  et  $\{\varphi_i\}_{i \in \mathbb{N}}$  sont respectivement les valeurs propres et une base orthonormale de fonctions propres de  $\Delta_{h(0)}$ , alors

$$K(t, x, y) = \sum_{i \in \mathbb{N}} e^{-\lambda_i t} \varphi_i(x) \varphi_i(y), \quad x, y \in M.$$

D'après [BBG94], page 379,

$$\int_M |d_x K(t, V, y)|^2 dv_0(x) = \sum_{i \in \mathbb{N}} e^{-2\lambda_i t} d_x \varphi_i(V) d_x \varphi_i(V) = d_s K(2t, V, V)|_{(x,x)}.$$

où  $d_s f$  est "la seconde dérivation mixte" de  $f$ , définie par :

$$d_s f_{(x,x)} = d_{2,y} d_{1,x} f(x, y)|_{(x,x)},$$

$d_1$  et  $d_2$  étant respectivement les dérivations par rapport aux variables spatiales  $x$  et  $y$ .

De plus, dans [BBG94], on démontre que

$$2(4\pi)^{\frac{n}{2}} (2t)^{\frac{n}{2}+1} d_s K(2t, V, V)|_{(x,x)} = h(0)(V, V) + \frac{2t}{3} \left( \frac{1}{2} Scal_{h(0)} h(0) - Ric_{h(0)} \right) + O(t^2), \quad \text{quand } t \rightarrow 0^+,$$

où  $Scal_{h(0)}$ ,  $Ric_{h(0)}$  sont respectivement la courbure scalaire et le tenseur courbure de Ricci de la métrique  $h(0)$ . Ainsi, en démontrant le lemme 4.4.1, on démontre que

$$\lim_{t \rightarrow 0} 2(4\pi)^{\frac{n}{2}} (2t)^{\frac{n}{2}+1} \int_M |d_x P(t, V, y)|^2 dv_0(y) = h(0)(V, V), \quad \text{pour tous } x \in M, V \in T_x^1 M.$$

**Rappel.**  $K(t, x, y)$  s'écrit sous la forme (c.f. sections 1.2.2, et 1.2.4)

$$K(t, x, y) = H_N(t, x, y) + Q_N(t, x, y), \quad N > \frac{n}{2} + 1$$

où

$$H_N(t, x, y) = \frac{e^{-\frac{r^2(x,y)}{4t}}}{(4\pi t)^{\frac{n}{2}}} \sum_{k=0}^N t^k \tilde{\psi}_k(x, y), \quad Q_N(t, x, y) = O(t^{N-\frac{n}{2}}),$$

et

$$\frac{\partial}{\partial x^i} Q_N(t, x, y) = O(t^{N-\frac{n}{2}-1}), \tag{4.4.1}$$

uniformément en  $x, y \in M$ , où  $\{x^i\}_{i=1}^n$  est un système de coordonnées locales autour de  $x$ , et  $\tilde{\psi}_k$ ,  $k = 0, \dots, N$ , sont des fonctions  $C^\infty$  sur  $M \times M$ , avec

$$\tilde{\psi}_0 = \eta(x, y) \theta^{-\frac{1}{2}}(x, y),$$

et  $\eta$  une la fonction coupure définie dans l'équation 3.2.4.

De plus, d'après l'équation 1.2.10, il existe, pour tout  $x \in M$ , un voisinage ouvert  $\Omega_x^K$  de  $x$ , tel que pour tout  $y \in \Omega_x^K$ ,

$$K(t, x, y) = \frac{e^{-\frac{r^2(x,y)}{4t}}}{(4\pi t)^{\frac{n}{2}}} (\tilde{\psi}_0 + O(t)).$$

Maintenant, Pour démontrer le lemme 4.4.1, il nous faut les lemmes 4.4.3, et 4.4.3.

**Lemme 4.4.2.** *Pour tout  $x \in M$  il existe  $C > 0$ , un voisinage ouvert  $\Omega_x^K$  de  $x$ , tel que pour tous  $V \in T_x^1 M$ ,  $y \in \Omega_x^K$ ,*

$$\left| \frac{d_x K(t, V, y)}{K(t, x, y)} + \frac{d_x r^2(V, y)}{4t} \right| \leq C.$$

Par conséquent, si la conjecture 4.0.9 est vraie, il existe un voisinage  $\Omega_x$  de  $x$ , tel que pour tout  $V \in T_x^1 M$ ,  $y \in T_x M$ ,

$$\left| \frac{d_x P(t, V, y)}{P(t, x, y)} - \frac{d_x K(t, V, y)}{K(t, x, y)} \right| \leq C. \quad (4.4.2)$$

**Preuve.** La preuve de ce lemme est identique à celle utilisée pour démontrer le lemme 4.2.5. On doit juste remplacer  $\tilde{u}_0$ , par  $\tilde{\psi}_0$ . □

**Lemme 4.4.3.** *Si la conjecture 4.0.9 est vraie, alors pour tout  $x \in M$ , il existe un voisinage ouvert  $\Omega_x$ ,  $t_0 > 0$ , et  $C > 0$ , vérifiant la propriété suivante : pour tout  $t < t_0$ , et tout  $y \in \Omega_x$ ,*

$$\frac{P(t, x, y)}{K(t, x, y)} \leq e^{O(r)} + Ct, \quad (4.4.3)$$

**Preuve.** Soit  $x \in M$ . Sous condition que la conjecture 4.0.9 soit vraie, il existe un voisinage ouvert  $\Omega_x^P$  de  $x$ , tel que, pour tout  $y \in \Omega_x^P$ ,

$$P(t, x, y) = \frac{e^{-\frac{r^2(x, y)}{4t}}}{(4\pi t)^{\frac{n}{2}}} (\tilde{\psi}_0 + O(t)).$$

De même, comme mentionné dans le rappel ci-dessus, il existe un voisinage ouvert  $\Omega_x^K$  de  $x$ , tel que pour tout  $y \in \Omega_x^K$ ,

$$K(t, x, y) = \frac{e^{-\frac{r^2(x, y)}{4t}}}{(4\pi t)^{\frac{n}{2}}} (\tilde{\psi}_0 + O(t)).$$

Si on pose

$$\Omega_x = \Omega_x^P \cap \Omega_x^K,$$

on a, pour tout  $y \in \Omega_x$ ,

$$\frac{P(t, x, y)}{K(t, x, y)} = \frac{\tilde{u}_0(x, y) + O(t)}{\tilde{\psi}_0(x, y) + O(t)}.$$

Or

$$\begin{aligned} \left| \frac{\tilde{u}_0(x, y)}{\tilde{\psi}_0(x, y) + O(t)} - \frac{\tilde{u}_0(x, y)}{\tilde{\psi}_0(x, y)} \right| &= \left| \frac{\tilde{u}_0(x, y) \tilde{\psi}_0(x, y) - \tilde{u}_0(x, y) (\tilde{\psi}_0(x, y) + O(t))}{\tilde{\psi}_0(x, y) (\tilde{\psi}_0(x, y) + O(t))} \right| \\ &= \left| \frac{\tilde{u}_0(x, y) O(t)}{\tilde{\psi}_0(x, y) (\tilde{\psi}_0(x, y) + O(t))} \right|. \end{aligned}$$

En posant  $c_0 = \inf_{y \in \Omega_x} \tilde{\psi}_0(x, y)$  (on veille bien à choisir  $\Omega_x^K \subseteq B(x, \frac{\rho}{4})$ ), alors, pour  $c_1 < c_0$ , il existe  $t_0 > 0$ , tel que, pour  $t < t_0$ ,  $|O(t)| < c_1$ . Par suite, il existe  $C > 0$ , tel que

$$\left| \frac{\tilde{u}_0(x, y)}{\tilde{\psi}_0(x, y) + O(t)} - \frac{\tilde{u}_0(x, y)}{\tilde{\psi}_0(x, y)} \right| \leq \left| \frac{\tilde{u}_0(x, y)O(t)}{c_0(c_0 - c_1)} \right| \leq Ct$$

pour  $t < t_0$ , et tout  $y \in \Omega_x$ .

De même, il existe  $C > 0$ , tel que, pour tout  $t < t_0$ ,

$$\left| \frac{O(t)}{\tilde{\psi}_0(x, y) + O(t)} \right| \leq \left| \frac{O(t)}{c_0 - c_1} \right| \leq Ct.$$

Ce qui nous donne l'existence de  $C > 0$ ,  $t_0 > 0$ , tels que pour tout  $t < t_0$ ,

$$\left| \frac{P(t, x, y)}{K(t, x, y)} - \frac{\tilde{u}_0(x, y)}{\tilde{\psi}_0(x, y)} \right| \leq Ct.$$

et

$$\left| \frac{P(t, x, y)}{K(t, x, y)} \right| \leq \frac{\tilde{u}_0(x, y)}{\tilde{\psi}_0(x, y)} + Ct.$$

Or (c.f. section 3.2.2), pour  $y \in B(x, \frac{\rho}{4})$ ,

$$\tilde{u}_0(x, y) = u_0(x, y) = \theta_0^{-\frac{1}{2}}(x, y)e^{f(x, y)}$$

où  $f$  est définie dans l'équation 3.2.11. En particulier,

$$f(x, y) = O(r(x, y)).$$

De plus, pour  $y \in B(x, \frac{\rho}{4})$ ,

$$\tilde{\psi}(x, y) = \theta_0^{-\frac{1}{2}}(x, y).$$

Alors, pour  $y \in \Omega_x \subseteq B(x, \frac{\rho}{4})$ , on a

$$\frac{\tilde{u}_0(x, y)}{\tilde{\psi}_0(x, y)} = e^{O(r)},$$

et

$$\left| \frac{P(t, x, y)}{K(t, x, y)} \right| \leq e^{O(r)} + Ct.$$

□

**Preuve du lemme 4.4.1** Puisqu'il existe, d'après l'équation 4.4.2,  $C > 0$ ,  $t_0 > 0$ , tel que pour tous  $x, y \in M$ ,  $V \in T_x^1 M$ , et tout  $t < t_0$ ,

$$\left| \frac{d_x P(t, V, y)}{P(t, x, y)} - \frac{d_x K(t, V, y)}{K(t, x, y)} \right| \leq C.$$

Alors

$$\left| \frac{d_x P(t, V, y)K(t, x, y) - d_x K(t, V, y)P(t, x, y)}{P(t, x, y)K(t, x, y)} \right| \leq C$$

et

$$|d_x P(t, V, y) - d_x K(t, V, y)| \leq CP(t, x, y) + \left| d_x K(t, V, y) \left( \frac{P(t, x, y)}{K(t, x, y)} - 1 \right) \right|.$$

Par l'équation 4.4.3, on a

$$|d_x P(t, V, y) - d_x K(t, V, y)| \leq CP(t, x, y) + d_x K(t, V, y) (e^{O(r)} + Ct - 1),$$

Or  $e^{O(r)} - 1 = O(r)$ , alors

$$|d_x P(t, V, y) - d_x K(t, V, y)| \leq CP(t, x, y) + d_x K(t, V, y) (O(r) + Ct)$$

Elevons au carré, et développons, on a

$$|d_x P(t, V, y) - d_x K(t, V, y)|^2 \leq [CP(t, x, y)]^2 + [d_x K(t, V, y) (O(r) + Ct)]^2 + 2CP(t, x, y)d_x K(t, V, y) (O(r) + Ct).$$

En intégrant sur  $\Omega_x$  par rapport à la variable  $y$ , on a

$$\begin{aligned} \int_{\Omega_x} |d_x P(t, V, y) - d_x K(t, V, y)|^2 dv_0(y) &\leq \int_{\Omega_x} (CP(t, x, y))^2 dv_0(y) + \int_{\Omega_x} (d_x K(t, V, y) (O(r) + Ct))^2 dv_0(y) \\ &\quad + \int_{\Omega_x} 2CP(t, x, y)d_x K(t, V, y) (O(r) + Ct) dv_0(y), \end{aligned}$$

D'après la construction du noyau de la chaleur  $K(t, x, y)$  (c.f le rappel ci-dessus, et section 1.2.2), et celle de la solution fondamentale  $P(t, x, y)$  dans le chapitre 3, et puisque  $\Omega_x$  et  $M$  sont compactes, on a

$$\begin{aligned} t^{\frac{n}{2}+1} \int_{\Omega_x} |d_x P(t, V, y) - d_x K(t, V, y)|^2 dv_0(y) &\leq Ct^{\frac{n}{2}+1} \int_{\Omega_x} \frac{e^{-\frac{r^2(x,y)}{2t}}}{(4\pi t)^n} dv_0(y) \\ &\quad + Ct^{\frac{n}{2}+1} \int_{\Omega_x} \frac{r^2(x,y)}{t^2} \frac{e^{-\frac{r^2(x,y)}{2t}}}{(4\pi t)^n} (r^2 + 2rt + t^2) dv_0(y) + Ct^{\frac{n}{2}+1} \int_{\Omega_x} \frac{r(x,y)}{t} \frac{e^{-\frac{r^2(x,y)}{2t}}}{(4\pi t)^n} (r+t) dv_0(y) \end{aligned}$$

où  $C > 0$  indépendante de  $y \in \Omega_x$ , et de  $t < t_0, t_0 > 0$ . Ainsi,

$$\begin{aligned} t^{\frac{n}{2}+1} \int_{\Omega_x} |d_x P(t, V, y) - d_x K(t, V, y)|^2 dv_0(y) &\leq \int_{\Omega_x} t^{-\frac{n}{2}+1} e^{-\frac{r^2(x,y)}{2t}} dv_0(y) \\ &\quad + \int_{\Omega_x} t^{-\frac{n}{2}-1} r^2(x,y) e^{-\frac{r^2(x,y)}{2t}} (r^2 + 2rt + t^2) dv_0(y) + \int_{\Omega_x} t^{-\frac{n}{2}} r(x,y) e^{-\frac{r^2(x,y)}{2t}} (r+t) dv_0(y) \end{aligned}$$

Supposons que  $\text{Diam}(\Omega_x) < 2a$ , où  $a > 0$ . En passant par les coordonnées polaires, et d'après la remarque 3.3.2, il existe  $C > 0$ , tel que, pour tout  $t < t_0$ ,

$$\begin{aligned} t^{\frac{n}{2}+1} \int_{\Omega_x} |d_x P(t, V, y) - d_x K(t, V, y)|^2 dv_0(y) &\leq C \int_0^a t^{-\frac{n}{2}+1} e^{-\frac{r^2(x,y)}{2t}} r^{n-1} dr \\ &\quad + C \int_0^a t^{-\frac{n}{2}-1} r^2(x,y) e^{-\frac{r^2(x,y)}{2t}} (r^2 + 2rt + t^2) r^{n-1} dr + C \int_0^a t^{-\frac{n}{2}} r(x,y) e^{-\frac{r^2(x,y)}{2t}} (r+t) r^{n-1} dr. \end{aligned}$$

En développant,

$$\begin{aligned} t^{\frac{n}{2}+1} \int_{\Omega_x} |d_x P(t, V, y) - d_x K(t, V, y)|^2 dv_0(y) &\leq C \int_0^a t^{-\frac{n}{2}+1} e^{-\frac{r^2(x,y)}{2t}} r^{n-1} dr \\ &\quad + C \int_0^a t^{-\frac{n}{2}-1} e^{-\frac{r^2(x,y)}{2t}} r^{n+3} dr + C \int_0^a t^{-\frac{n}{2}} e^{-\frac{r^2(x,y)}{2t}} r^{n+2} dr + C \int_0^a t^{-\frac{n}{2}+1} e^{-\frac{r^2(x,y)}{2t}} r^{n+1} dr \\ &\quad (4.4.4) \\ &\quad + C \int_0^a t^{-\frac{n}{2}} e^{-\frac{r^2(x,y)}{2t}} r^{n+1} dr + C \int_0^a t^{-\frac{n}{2}+1} e^{-\frac{r^2(x,y)}{2t}} r^n dr \end{aligned}$$

les termes à droite de l'inégalité ci-dessus, sont de la forme  $\int_0^a t^{-i} e^{-\frac{r^2(x,y)}{2t}} r^j dr$ . Or (c.f. remarque 3.3.3)

$$\begin{aligned} t^{-i} e^{-\frac{r^2(x,y)}{2t}} r^j dr &= t^\alpha r^{-2(i+\alpha)} \frac{r^{2(i+\alpha)}}{t^{i+\alpha}} e^{-\frac{r^2(x,y)}{2t}} r^j \\ &= t^\alpha r^{j-2(i+\alpha)} \frac{r^{2(i+\alpha)}}{t^{i+\alpha}} e^{-\frac{r^2(x,y)}{2t}} \leq C t^\alpha r^{j-2(i+\alpha)}, \quad \alpha > 0, C > 0. \end{aligned}$$

Et comme

$$\lim_{t \rightarrow 0} \int_0^a t^\alpha r^{j-2(i+\alpha)} dr = 0 \text{ si } j - 2(i + \alpha) > -1, \alpha > 0$$

ce qui est le cas pour tous les termes à droite de l'inégalité 4.4.4, alors

$$\lim_{t \rightarrow 0} t^{\frac{n}{2}+1} \int_{\Omega_x} |d_x P(t, V, y) - d_x K(t, V, y)|^2 dv_0(y) = 0.$$

D'autre part, pour tout  $y \in M \setminus \Omega_x$ ,  $r(x, y) \leq \text{dist}(x, \partial\Omega_x)$ , (la distance entre  $x$  et le bord de  $\Omega_x$  est positive puisque  $\Omega_x$  est un voisinage de  $x$ ), et,

$$d_x Q_N(t, V, y) = O(t^{N-\frac{n}{2}-1}) \text{ (c.f. équation 4.4.1),}$$

$$d_x \Theta_N(t, V, y) = O(t^{N-\frac{n}{2}-1}) \text{ (c.f. équation 4.0.3).}$$

Alors, avec le même calcul fait ci-dessus, on a

$$\lim_{t \rightarrow 0} t^{\frac{n}{2}+1} \int_{M \setminus \Omega_x} |d_x P(t, V, y) - d_x K(t, V, y)|^2 dv_0(y) = 0$$

et

$$\lim_{t \rightarrow 0} t^{\frac{n}{2}+1} \int_M |d_x P(t, V, y) - d_x K(t, V, y)|^2 dv_0(y) = 0$$

pour tout  $x \in M$ ,  $V \in T_x^1 M$ . D'où le lemme. □

**Corollaire 4.4.4.**

$$\lim_{t \rightarrow 0} \Psi_t^*(V, V) = h(0)(V, V).$$

**Preuve.** On a

$$\int_M |d_x K(t, V, y)|^2 dv_0(y) = \sum_{i \leq 0} e^{-2\lambda_i t} (d_x \varphi_i(V))^2 = d_s K(2t, V, V)|_{(x,x)},$$

et d'après la métrique réciproque dans le théorème 0.0.11, en faisant bien attention qu'on remplace ici  $t$  par  $2t$ , on a

$$\lim_{t \rightarrow 0} 2^{\frac{n}{2}} (4\pi)^{\frac{n}{2}} (2t)^{\frac{n}{2}+1} d_s K(2t, V, V)|_{(x,x)} = h(0)(V, V).$$

□

## 4.5 Reconstruction de la solution fondamentale avec ses coefficient dans la base des fonctions propres de $\Delta_{g(0)}$

Soit  $a = \{\phi_i(0)\}_{i \in \mathbb{N}}$  une base orthonormale de fonctions propres de  $\Delta_{g(0)}$  dans  $L^2(M, dv_0)$ , alors comme  $P(t, \cdot, \cdot) \in L^2(M, v_0) \times L^2(M, v_0)$ , on peut l'écrire sous la forme

$$P(t, x, y) = \sum_{i, j \geq 0} a_{ij}(t) \phi_i(0, x) \phi_j(0, y), \quad x, y \in M$$

où

$$\sum_{i \geq 0} a_{ij}(t) \phi_i(t, x) = \int_M P(t, x, y) \phi_j(0, y) dv_0(y),$$

et  $a_{ij}(t)$  est une fonction continue sur  $[0, T]$  définie par

$$a_{ij}(t) = \int_M \int_M P(t, x, y) \phi_i(0, x) \phi_j(0, y) dv_0(x) dv_0(y).$$

Alors on a

**Corollaire 4.5.1.** *L'application*

$$\Psi_t^a : (M, h(t)) \rightarrow l^2$$

$$x \mapsto \left\{ \sum_{i \geq 0} a_{ij}(t) \phi_i(0, x) \right\}_{j \in \mathbb{N}}$$

est un plongement pour tout  $t < \xi$ , où  $\xi$  est le même nombre positif présent dans le théorème 4.0.10. Par conséquent,  $\Psi_t^a \circ \eta_t$  est un plongement de  $(M, g(t))$  dans  $L^2(M, v_0)$ , pour  $t < \xi$ , où  $\eta_t$  est la famille de difféomorphismes de  $M$ , définie dans 1.3.2.

**Preuve.** Considérons l'application

$$I^a : L^2(M, v_0) \rightarrow l^2$$

$$f \mapsto \{c_i(f)\}_{i \in \mathbb{N}}$$

où  $c_i(f) = \int_M f(y) \phi_i(0, y) dv_0(y)$  sont les coefficients de  $f$  dans la base de fonctions propres de  $\Delta_{g(0)}$ . Alors, pour tout  $x \in M$ ,  $\Psi_t(x) = I^a \circ \mathcal{P}_t(x)$ ,  $\mathcal{P}_t$  étant l'application définie dans le théorème 4.0.10.

1.  $\Psi_t^a$  est continue en  $(t, x)$ , pour  $0 < t < \xi$ , et  $x \in M$ . En fait, d'une part, si  $(t_n, x_n)$  converge vers  $(t, x)$ , alors par la continuité de  $P$  sur  $]0, T[ \times M \times M$ , on a

$$\lim_{t \rightarrow 0} \|\mathcal{P}_{t_n}(x_n) - \mathcal{P}_t(x)\|_{L^2(M, v_0)} = 0.$$

D'autre part, si  $\{f_n\}_n$  est une suite dans  $L^2(M, v_0)$  qui converge vers  $f$  (pour la norme de  $L^2(M, v_0)$ ), alors

$$\begin{aligned} \|I^a(f_n) - I^a(f)\|_{l^2}^2 &= \sum_{i \in \mathbb{N}} \left| \int_M (f_n - f)(y) \phi_i(0, y) dv_0(y) \right|^2 \\ &= \|f_n - f\|_{L^2(M, v_0)}^2 \rightarrow 0 \end{aligned}$$

quand  $n \rightarrow \infty$ . Ce qui nous donne que,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \|\Psi_{t_n}^a(x_n) - \Psi_t^a(x)\|_{l^2} = \lim_{n \rightarrow \infty} \|I^a(\mathcal{P}_{t_n}(x_n)) - I^a(\mathcal{P}_t(x))\|_{L^2(M, v_0)} = 0.$$

2. Supposons que  $\Psi_t^a(x) = \Psi_t^a(y)$ , pour  $x, y \in M$ , et  $t < \xi$ , alors,

$$I^a \circ \mathcal{P}_t(x) = I^a \circ \mathcal{P}_t(y).$$

Ceci nous donne, puisque la base  $\{\phi_i(0)\}_{i \in \mathbb{N}}$  est complète, que  $\mathcal{P}_t(x) = \mathcal{P}_t(y)$ , alors  $x = y$  (d'après l'injectivité de  $\mathcal{P}_t$  pour  $t < \xi$ ). D'où l'injectivité de  $\Psi_t^a$  pour  $t < \xi$ .

3.  $\Psi_t^a$  est une immersion pour  $t < \xi$ . En fait, supposons que  $d_x \Psi_t^a(V) = 0$  pour  $x \in M$ ,  $V \in T_x M$ , alors  $\sum_{i \geq 0} a_{ij}(t) d_x \phi_i(0, V) = 0$ , pour tout  $j \in \mathbb{N}$ , ce qui nous donne que  $d_x \mathcal{P}_t(V) = 0$ , et  $V = 0$  (puisque  $\mathcal{P}_t$  est une immersion pour  $t < \xi$ ).

# Bibliographie

- [BBG94] Pierre Bérard, G. Besson, and S. Gallot. Embedding Riemannian manifolds by their heat kernel. *Geom. Funct. Anal.*, 4(4) :373–398, 1994.
- [Bér] Pierre Bérard. Sur un lemme de perturbation. A paraître.
- [Ber73] Marcel Berger. Sur les premières valeurs propres des variétés riemanniennes. *Compositio Math.*, 26 :129–149, 1973.
- [Bér85] P. Bérard. Volume des ensembles nodaux des fonctions propres du laplacien. In *Bony-Sjöstrand-Meyer seminar, 1984–1985*, pages Exp. No. 14 , 10. École Polytech., Palaiseau, 1985.
- [Bér86] Pierre H. Bérard. *Spectral geometry : direct and inverse problems*, volume 1207 of *Lecture Notes in Mathematics*. Springer-Verlag, Berlin, 1986. With appendixes by Gérard Besson, and by Bérard and Marcel Berger.
- [Bes78] Arthur L. Besse. *Manifolds all of whose geodesics are closed*, volume 93 of *Ergebnisse der Mathematik und ihrer Grenzgebiete [Results in Mathematics and Related Areas]*. Springer-Verlag, Berlin, 1978. With appendixes by D. B. A. Epstein, J.-P. Bourguignon, L. Bérard-Bergery, M. Berger and J. L. Kazdan.
- [BGM71] Marcel Berger, Paul Gauduchon, and Edmond Mazet. *Le spectre d'une variété riemannienne*. Lecture Notes in Mathematics, Vol. 194. Springer-Verlag, Berlin, 1971.
- [BN02] Mikhail Belkin and Partha Niyogi. Using manifold structure for partially labelled classification. In *NIPS*, pages 929+, 2002.
- [CCG<sup>+</sup>ar] Bennett Chow, Sun-Chin Chu, David Glickenstein, Christine Guenther, James Isenberg, Tom Ivey, Dan Knopf, Peng Lu, Feng Luo, and Lei Ni. The Ricci flow : techniques and applications. Part III. Analytic aspects, 2010, (To appear).
- [CH53] R. Courant and D. Hilbert. *Methods of mathematical physics. Vol. I*. Interscience Publishers, Inc., New York, N.Y., 1953.
- [Cha84] Isaac Chavel. *Eigenvalues in Riemannian geometry*, volume 115 of *Pure and Applied Mathematics*. Academic Press Inc., Orlando, FL, 1984. Including a chapter by Burton Randol, With an appendix by Jozef Dodziuk.
- [CL06] Ronald R. Coifman and Stéphane Lafon. Diffusion maps. *Appl. Comput. Harmon. Anal.*, 21(1) :5–30, 2006.
- [CLN06] Bennett Chow, Peng Lu, and Lei Ni. *Hamilton's Ricci flow*, volume 77 of *Graduate Studies in Mathematics*. American Mathematical Society, Providence, RI, 2006.
- [Coi05] R. R. Coifman. Perspectives and challenges to harmonic analysis and geometry in high dimensions : geometric diffusions as a tool for harmonic analysis and

- structure definition of data. In *Perspectives in analysis*, volume 27 of *Math. Phys. Stud.*, pages 27–35. Springer, Berlin, 2005.
- [DC92] Manfredo Perdigão Do Carmo. *Riemannian geometry*. Mathematics : Theory & Applications. Birkhäuser Boston Inc., Boston, MA, 1992. Translated from the second Portuguese edition by Francis Flaherty.
- [Dod81] Jozef Dodziuk. Eigenvalues of the Laplacian and the heat equation. *Amer. Math. Monthly*, 88(9) :686–695, 1981.
- [Fri64] Avner Friedman. *Partial differential equations of parabolic type*. Prentice-Hall Inc., Englewood Cliffs, N.J., 1964.
- [GHL04] Sylvestre Gallot, Dominique Hulin, and Jacques Lafontaine. *Riemannian geometry*. Universitext. Springer-Verlag, Berlin, third edition, 2004.
- [GL88] Nicola Garofalo and Ermanno Lanconelli. Wiener’s criterion for parabolic equations with variable coefficients and its consequences. *Trans. Amer. Math. Soc.*, 308(2) :811–836, 1988.
- [GL89] Nicola Garofalo and Ermanno Lanconelli. Asymptotic behavior of fundamental solutions and potential theory of parabolic operators with variable coefficients. *Math. Ann.*, 283(2) :211–239, 1989.
- [Gue02] Christine M. Guenther. The fundamental solution on manifolds with time-dependent metrics. *J. Geom. Anal.*, 12(3) :425–436, 2002.
- [GWW92] C. Gordon, D. Webb, and S. Wolpert. Isospectral plane domains and surfaces via Riemannian orbifolds. *Invent. Math.*, 110(1) :1–22, 1992.
- [HSS91] Rainer Hempel, Luis A. Seco, and Barry Simon. The essential spectrum of Neumann Laplacians on some bounded singular domains. *J. Funct. Anal.*, 102(2) :448–483, 1991.
- [JMS08] Peter W. Jones, Mauro Maggioni, and Raanan Schul. Manifold parametrizations by eigenfunctions of the Laplacian and heat kernels. *Proc. Natl. Acad. Sci. USA*, 105(6) :1803–1808, 2008.
- [Kac66] Mark Kac. Can one hear the shape of a drum? *Amer. Math. Monthly*, 73(4, part II) :1–23, 1966.
- [Kan77] Y. Kannai. Off diagonal short time asymptotics for fundamental solutions of diffusion equations. *Commun. Partial Differ. Equations*, 2(8) :781–830, 1977.
- [Kat76] Tosio Kato. *Perturbation theory for linear operators*. Springer-Verlag, Berlin, second edition, 1976. Grundlehren der Mathematischen Wissenschaften, Band 132.
- [Kor04] Jacob Korevaar. *Tauberian theory*, volume 329 of *Grundlehren der Mathematischen Wissenschaften [Fundamental Principles of Mathematical Sciences]*. Springer-Verlag, Berlin, 2004. A century of developments.
- [Lev07a] Eugenio Elia Levi. Sulle equazioni lineari alle derivate parziali totalmente ellittiche. *Rend. R. Acc. Lincei, Classe Sci (V)*, 16, 1907.
- [Lev07b] Eugenio Elia Levi. Sulle equazioni lineari totalmente ellittiche alle derivate parziali. *Rend. Circ. Mat. Palermo*, 24 :275–317, 1907.
- [Mil64] J. Milnor. Eigenvalues of the Laplace operator on certain manifolds. *Proc. Nat. Acad. Sci. U.S.A.*, 51 :542, 1964.
- [Mor62a] Claude Morlet. Le lemme de Thom et les théorèmes de plongement de Whitney. I. Les topologies des espaces d’applications. In *Séminaire Henri Cartan, 1961/62, Exp. 4*, page 5. Secrétariat mathématique, Paris, 1961/1962.

- [Mor62b] Claude Morlet. Le lemme de Thom et les théorèmes de plongement de Whitney. II. Quelques ouverts fondamentaux des espaces d'applications. In *Séminaire Henri Cartan, 1961/62, Exp. 5*, page 6. Secrétariat mathématique, Paris, 1961/1962.
- [Mos65] Jürgen Moser. On the volume elements on a manifold. *Trans. Amer. Math. Soc.*, 120 :286–294, 1965.
- [MP49] S. Minakshisundaram and Å. Pleijel. Some properties of the eigenfunctions of the Laplace-operator on Riemannian manifolds. *Canadian J. Math.*, 1 :242–256, 1949.
- [NS05] Yu. Netrusov and Yu. Safarov. Weyl asymptotic formula for the Laplacian on domains with rough boundaries. *Comm. Math. Phys.*, 253(2) :481–509, 2005.
- [Rel69] Franz Rellich. *Perturbation theory of eigenvalue problems*. Assisted by J. Berkowitz. With a preface by Jacob T. Schwartz. Gordon and Breach Science Publishers, New York, 1969.
- [Ros97] Steven Rosenberg. *The Laplacian on a Riemannian manifold*, volume 31 of *London Mathematical Society Student Texts*. Cambridge University Press, Cambridge, 1997. An introduction to analysis on manifolds.
- [Rus07] Raif M. Rustamov. Laplace-beltrami eigenfunctions for deformation invariant shape representation. In *SGP '07 : Proceedings of the fifth Eurographics symposium on Geometry processing*, pages 225–233, Aire-la-Ville, Switzerland, Switzerland, 2007. Eurographics Association.
- [San76] Luis A. Santaló. *Integral geometry and geometric probability*. Addison-Wesley Publishing Co., Reading, Mass.-London-Amsterdam, 1976. With a foreword by Mark Kac, *Encyclopedia of Mathematics and its Applications*, Vol. 1.
- [SOG09] Jian Sun, Maks Ovsjanikov, and Leonidas Guibas. A concise and provably informative multi-scale signature based on heat diffusion. In *SGP '09 : Proceedings of the Symposium on Geometry Processing*, pages 1383–1392, Aire-la-Ville, Switzerland, Switzerland, 2009. Eurographics Association.
- [SY94] R. Schoen and S.-T. Yau. *Lectures on differential geometry*. Conference Proceedings and Lecture Notes in Geometry and Topology, I. International Press, Cambridge, MA, 1994. Lecture notes prepared by Wei Yue Ding, Kung Ching Chang [Gong Qing Zhang], Jia Qing Zhong and Yi Chao Xu, Translated from the Chinese by Ding and S. Y. Cheng, Preface translated from the Chinese by Kaising Tso.
- [Var67a] S. R. S. Varadhan. Diffusion processes in a small time interval. *Comm. Pure Appl. Math.*, 20 :659–685, 1967.
- [Var67b] S. R. S. Varadhan. On the behavior of the fundamental solution of the heat equation with variable coefficients. *Comm. Pure Appl. Math.*, 20 :431–455, 1967.

## Résumé

Le but de la thèse est de relier entre les propriétés de diffusion des variétés riemanniennes et leur géométrie. On veut plonger une famille de variétés riemanniennes dont la métrique est dépendante d'un paramètre  $t$  dans un espace de Hilbert par ces propriétés de diffusion. Plus précisément, à l'aide des fonctions propres du laplacien correspondant ou de son noyau de la chaleur. On démontre qu'on peut construire des plongements par un nombre fini de fonctions propres pour toute famille de variétés riemanniennes  $(M, g(t))$  telle que la métrique  $g(t)$  est analytique en fonction de  $t$ . Dans le cas où  $g(t)$  est de volume constant, on peut construire un plongement avec toutes les fonctions propres. Ce dernier s'appelle plongement G.P.S et donne beaucoup d'informations sur cette famille de variétés. Ensuite, on construit la solution fondamentale  $P$  de l'équation de la chaleur non linéaire sur  $(M, g(t))$  telle que  $g(t)$  soit de volume constant. Finalement, on émet une conjecture sur ce noyau de la chaleur. Si cette dernière s'avérait vraie, on pourrait plonger  $(M, g(t))$  dans un espace de Hilbert à l'aide de  $P$ .

## Abstract

In this thesis, we create links between the properties of diffusion of the Riemannian manifold and its geometry. We embed a family of Riemannian manifolds whose metric is time dependent, into a Hilbert space with its diffusion properties. Namely, via the eigenfunctions of the corresponding laplacian or its heat kernel. We prove that we can construct embeddings via a finite number of eigenfunctions for all families of Riemannian manifolds  $(M, g(t))$  such that  $g(t)$  is analytic in  $t$ . If the volume of  $(M, g(t))$  is constant, we can construct an embedding with a complete eigenfunctions basis. This embedding will be called the G.P.S embedding. This embedding is very informative regarding this family of manifolds. Then, we construct the fundamental solution  $P$  for the non-linear heat equation acting on  $(M, g(t))$ , such that the volume  $(M, g(t))$  is constant. Finally we give a conjecture on the asymptotic formula of  $P$ , and we prove that, if this conjecture is true, we can embed  $(M, g(t))$  into a Hilbert space via  $P$ .

## Mots clés

Géométrie riemannienne, variété compacte, laplacien, valeurs/fonctions propres, diffusion, équation de la chaleur, solution fondamentale, paramétrix, plongement.

Riemannian geometry, compact manifold, Laplacian, eigenvalues/eigenfunctions, diffusion, heat equation, fundamental solution, parametrix, embedding.

## Classification mathématique

47A10, 47B40, 51K05, 53B21, 53B50, 53C05, 53C21, 53C25, 53C44, 54A20, 54B10, 58A32, 58C40, 58J60.