N° d'ordre 322-2009 Année 2009

Université Claude Bernard - Lyon 1
Doctorat de Mathématiques

(arrêté du 7 août 2006)

THÈSE

Chaînes et dépendance

Ricardo DE ALDAMA SÁNCHEZ

Thèse soutenue le 18 décembre 2009

Directeur :
Frank WAGNER

Rapporteurs :
Luc BÉLAIR
Dugald MACPHERSON

Jury :
Luc BÉLAIR
Dugald MACPHERSON
Françoise POINT
Patrick SIMONETTA
Frank WAGNER

Remerciements :

Je souhaite remercier premièrement les membres du jury, et en particulier les rapporteurs pour leur lecture détaillée du manuscrit. Un grand merci pour mon directeur de thèse, qui a toujours été prêt à répondre mes questions et a su me donner les bonnes pistes dans les moments délicats. Merci aussi à Tuna pour son engagement aux débuts de mon doctorat. Merci Amador, Juan, Julien, Thomas et tous les autres « grands » qui m'ont fait ressentir que je pouvais compter sur eux. Merci Cédric et Jean pour le temps que nous avons partagé ensemble, le monde tourne moins vite après nos discussions. Merci à tous ceux qui sont passé par le bureau 105 ces dernières années, s'il y a des fautes d'orthographe dans cette thèse ce n'est sûrement pas de ses fautes.

Je souhaite bien sûr remercier aussi ma famille et mes proches. Merci beaucoup en premier ma chérie, t'as subi mon surplus de travail ces derniers temps avec stoïcisme et tendresse. Merci aussi ma deuxième chérie Jibouillle… t'inquiète, il y a toujours de la place pour toi dans mon cœur. Muchísimas gracias papá y mamá por haberme apoyado siempre, vuestro amor incondicional ha sido, y es, la raíz de mi fuerza; si esta tesis va dedicada a alguien, es a vosotros. Muchas gracias por supuesto Mañuñúmero porque sí (nooormal), y su querida Dinininina porque también. Gracias al resto de la familia, incluyendo a los que ya no están, por el calorcito transmitido. Muchas gracias finalmente a todos mis colegas, y en especial a los costrillas que han venido hasta Lyon para verme el día de la defensa : Alfa, Dave, Migüi, Osowaken, Pezner y Victoraño.

> « La mirada miró a la mirada y saltaron estrellitas de todos los colores… y un enano que pasaba por allí dijo : "¡Coño, qué bonito es esto !" » .

Résumé :

Le cadre général de cette thèse est celui de la propriété d'indépendance en théorie des modèles. Les théories sans cette propriété sont appelées NIP ou dépendantes. L'objective principal est de trouver de nouveaux exemples de théories appartenant à cette classe.

Nous montrons d'abord un résultat isolé qui répond une question de Pillay : dans un groupe NIP possédant une partie infinie de classe de nilpotence finie, on y trouve un sous-groupe définissable de même classe de nilpotence et contenant cette partie infinie. Le reste de la thèse est motivé par deux cadres extrêmement proches : les groupes abéliens munis d'une chaîne de sous-groupes uniformément définissables, et les groupes abéliens valués. Dans le premier cas nous identifions une certaine théorie et nous étudions plusieurs extensions de cette théorie. Nous prouvons une élimination des quantificateurs dans chacune des ses extensions, grâce à laquelle la NIP en découle facilement. Le dernier résultat est le plus substantiel. Nous montrons qu'une théorie naturelle de chaîne colorée munie quasi-automorphismes n'a pas la propriété d'indépendance. Nous appliquons ensuite ce résultat à une certaine théorie de groupes valués, étudiée par Simonetta dans le contexte des groupes C-minimaux, pour en conclure qu'elle est NIP. Nous montrons aussi d'une façon assez directe (en utilisant des résultats de Rubin et Poizat) qu'une chaîne colorée munie d'automorphismes est NIP.

Mots clés : théorie de modèles, propriété d'indépendance, NIP, groupes abéliens valués, chaînes.

Abstract :

This PhD thesis is in the general area of the independence property in model theory. Theories without this property are called NIP or dependent. The main objective of this thesis is to find new examples belonging to this class.

Firstly, we prove an isolated result that answers a question stated by Pillay : if a NIP group contains an infinite set of finite nilpotency class, then there exists a definable subgroup of the same nilpotency class containing this set. The rest of this thesis is motivated by two extremely closed related contexts : abelian groups equipped with an uniformly definable chain of subgroups, and valued groups. In the first case we identify a theory and study several extensions of it. We prove quantifier elimination in each of these extensions, and use it to easily conclude that they are NIP. The last result is the most significant one. We prove that a natural theory of linear orderings equipped with quasi-automorphisms doesn't have the independence property. Then we apply this result to a particular theory of valued abelian groups, which has been studied by Simonetta in the context of C-minimal groups, to conclude that it is NIP. We also prove in a rather straightforward way (using results by Rubin and Poizat) that a linear ordering equipped with automorphisms is NIP.

Keywords : model theory, independence property, NIP, valued abelian groups, linear orderings.

Table des matières

Chapitre 1

Introduction

Depuis son apparition dans les années 70, la théorie de la classification introduite par Shelah se trouve au cœur de la théorie des modèles. L'idée principale de ce programme consiste à tracer des frontières, au goût très combinatoire, permettant de donner une « bonne » carte des théories du premier ordre. La référence incontournable est sans doute [26].

La première et plus importante des frontières tracées est celle qui distingue la classe des théories stables, dont l'importance est telle que son étude est presque un synonyme de ce que l'on appelle « théorie pure des modèles » . Dans cette classe nous retrouvons des nombreuses propriétés, notamment l'existence d'une notion générale d'indépendance, qui ont permis de développer la théorie de la stabilité au point de la faire devenir une puissante machinerie avec des applications parfois surprenantes comme par exemple la fameuse preuve de Hrushovski de la conjecture de Mordell-Lang (cf. [10]).

Inspirées par le succès des théories stables, d'autres classes plus générales dans lesquelles quelques bonnes propriétés sont préservées, ont été étudiées intensément. L'exemple le plus remarquable est peut-être celui des théories simples (une référence très complète est [34]), dont l'étude semble se ralentir depuis quelques années.

Situées à l'opposé des théories stables, on peut trouver la classe de théories qui rivalise en applications avec ces dernières : les théories o-minimales. Avec une inspiration moins combinatoire que les théories stables (on peut trouver ses origines dans la géométrie semi-algébrique), les deux classes partagent quelques propriétés remarquables : notion de dimension, conditions de chaîne, etc. Une réference standard est dans l'étude des théories o-minimales est [31].

Plus récemment, une vieille classe introduite par Shelah dans [28] prend une place très importante dans la recherche actuelle : les théories sans la propriété d'indépendance, aussi appelées théories dépendantes ou théories NIP (nous utiliserons le plus souvent cette dernière appellation). Les références classiques dans lesquels elle est étudiée sont Shelah [28] et Poizat [16]. On peut trouver une excellente exposition de ces travaux dans le livre de Poizat [18].

Même si au moment de leur apparition la o-minimalité n'existait pas encore, l'une des raisons pour lesquelles les théories sans la propriété d'indépendance ont vu leur renaissance actuelle est le fait qu'elles généralisent les théories stables et les théories o-minimales en même temps. La résolution de la conjecture de Pillay dans le contexte NIP (cf.[11]) et le développement ultérieur de la notion de mesure par Hrushovski et Pillay dans [12] — motivé par les résultats obtenus par Haskell, Macpherson et Hrushovski dans les corps values (cf.[6, 7, 9]) — ont donné un fort élan à l'étude de cette classe, qui semble être le bon cadre pour développer une puissante théorie.

Les résultats que nous venons de mentionner, et des travaux relativement récents de Shelah comme [29] ou [27], inspirent de nouvelles et prometteuses recherches, dont le nombre a explosé ces dernières années. Une possible référence pour avoir un aperçu général de la situation actuelle est l'article de Adler [1] (il s'oriente cependant vers l'étude des notions générales d'indépendance, sans rentrer dans les aspects plus algébriques de la théorie).

Ainsi, le travail que nous présentons dans cette thèse se situe au sein de l'étude des théories NIP. Mis à part le théorème 2.1.18, le reste des résultats seront de caractère appliqué : nous tâchons de montrer que certaines théories n'ont pas la propriété d'indépendance, avec l'espoir que cela puisse aider à comprendre un peu mieux quel type de phénomènes ont lieu en l'absence de cette propriété.

Dans le chapitre présent nous donnons quelques définitions et résultats bien connus, dont nous aurons besoin par la suite. Nous présentons aussi le théorème 2.1.18, répondant positivement à une question de Anand Pillay (posée en novembre 2006 lors de d'un exposé à la conférence MODNET-Antalya) sur l'existence de sous-groupes nilpotents définissables dans le contexte des groupes NIP. L'énoncé précis est le suivant :

Théorème (2.1.18)**.** *Soit G un groupe NIP. Si G contient un sous-ensemble A tel que $[x_0, \ldots x_n] = 1$ pour tout $x_1, \ldots, x_n \in A$, alors il existe un sous-groupe définissable de G contenant A, qui est nilpotent de classe n.*

Ce théorème généralise un résultat de Shelah apparu dans [27], dans lequel il montre que dans un groupe NIP G, s'il existe un sous-groupe infini de G abélien, alors il existe un sous-groupe infini de G, définissable et abélien.

Note: Pour éviter l'introduction de conceptes qui seront présentés plus tard, dans le reste de l'introduction nous présentons les résultats d'une façon assez imprécise. Nous donnons cependant les références aux résultats correspondants.

Dans le chapitre 3, inspiré par l'exemple algébrique qui est devenu paradigme de théories NIP, à savoir les corps valués (voir par exemple le travail classique de Delon [4]), nous étudierons la théorie $\mathcal{T}$ d'un groupe abélien avec une chaîne de sous-groupes emboîtés. La théorie $\mathcal{T}$ a deux sortes, G pour le groupe et Γ pour l'ordre, et inclut le prédicat $H(x, t)$, avec x dans la sorte du groupe et t dans la sorte de l'ordre, tel que $H(G, \gamma)$ est un sous-groupe de G pour chaque $\gamma \in \Gamma$. L'expression « sous-groupes emboîtés » veut dire :

$$H(G, \gamma_1) \subsetneq H(G, \gamma_2) \text{ ssi } \gamma_1 < \gamma_2, \text{ pour tous } \gamma_1, \gamma_2 \in \Gamma.$$

Si G est sous-entendu, nous écrirons souvent H_γ a lieu de $H(G, \gamma)$. En plus de cela, $\mathcal{T}$ affirmera aussi que Γ est dense.

Cette théorie, proposée par Dugald Macpherson, généralise la situation que nous trouvons dans les corps et groupes valués avec les chaînes des boules fermées et boules ouvertes. Nous donnerons à la fin une réponse positive à la question sur la NIP dans différentes extensions de $\mathcal{T}$. Nous ferons cela au moyen d'une élimination de quanteurs dans un langage convenable, et montrant ensuite que les formules atomiques dans ce langage n'ont pas la propriété d'indépendance.

Soit $\precsim$ la relation binaire sur G définie par :

$$g_1 \precsim g_2 \text{ si pour tout } \gamma \in \Gamma \ (g_2 \in H_\gamma \Rightarrow g_1 \in H_\gamma).$$

Cette relation permettra, entre autres, de définir une notion de boule fermée et boule ouverte d'un certain rayon x. La relation unaire $C_n(x)$ signifiera que l'ordre du quotient de ces deux boules est n. Les relations $v(g, \gamma)$ et $v'(g, \gamma)$ signifieront $\gamma = \min\{t \in \Gamma : g \in H_\gamma\}$ et $\gamma = \max\{t \in \Gamma : g \notin H_\gamma\}$ respectivement.

Considérons d'autre part les axiomes suivants :

$(d.st)$ H_γ est divisible et sans torsion pour tout $\gamma \in \Gamma$;

$(ex.p)$ H_γ est d'exposant p pour tout $\gamma \in \Gamma$, avec p un certain nombre premier.

Les extensions de $\mathcal{T}$ que nous allons considérer sont $\mathcal{T}_i \cup (d.st)$ et $\mathcal{T}_i \cup (ex.p)'$, avec $i = 1, 2, 3$, où chaque $\mathcal{T}_i$ est une certaine extension de $\mathcal{T}$, et $(ex.p)'$ est $(ex.p)$ plus le schéma affirmant que chaque C_n est dense (dans un sens qu'on devra préciser) ou vide. Les théories $\mathcal{T}_1$, $\mathcal{T}_2$ et $\mathcal{T}_3$ seront introduites dans la section 3.2.2, dans laquelle on verra comment chacune établit un lien différent entre les H_γ et les boules ouvertes et fermées d'un groupe valué. Nous montrerons donc en premier une élimination des quanteurs :

Théorème. *Pour $i = 1, 2, 3$ nous avons :*

1. *La théorie $\mathcal{T}_i \cup (d.st)$ élimine les quanteurs dans un certain langage faisant intervenir H, $\precsim$, v et v'.*
2. *Toute completion de la théorie $\mathcal{T}_i \cup (ex.p)'$ élimine les quanteurs dans un certain langage faisant intervenir H, $\precsim$, v, v' et les C_n.*

Cette énoncé essaye résumer ce que nous montrons dans le théorème 3.4.1 et les corollaires 3.4.6 et 3.4.7. Cette élimination des quanteurs peut être présentée sous des différentes formes et avec des différents langages. Nous essayerons de donner la preuve dans un langage le plus compact possible (cf. théorème 3.4.1).

On montrera ensuite dans la section 3.5(voir les théorèmes 3.5.5 et 3.5.6) en étudiant les formules atomiques, que les théories considérées sont NIP :

Théorème. *Les théories $\mathcal{T}_i \cup (d.st)$ et $\mathcal{T}_i \cup (ex.p)'$, avec $i = 1, 2, 3$, sont NIP.*

Nous finirons le chapitre 3 en appliquant cela aux groupes valués. On note $\bar{B}_\gamma$ (resp. B°_γ) la boule fermée (resp. la boule ouverte) de rayon γ dans un groupe valué. Le résultat suivant est donné par le corollaire 3.5.7 :

Théorème. *Soit $\mathcal{G}$ un groupe abélien valué avec un ordre dense, et C_n l'ensemble des éléments γ de l'ordre tels que $\mid \bar{B}_\gamma / B^\circ_\gamma \mid = n$.*

1. *Si toute boule $\bar{B}_\gamma$, ou toute boule B°_γ, est divisible et sans torsion, alors $\mathcal{G}$ est NIP.*
2. *Si $\mathcal{G}$ est d'exposant p, et C_n et $\neg \bigvee_{1\leq i\leq n} C_n$ sont vides ou denses pour chaque $n \in \mathbb{N}$, alors $\mathcal{G}$ est NIP.*

Après avoir vu que le lien entre les théories étudies dans le chapitre 3 et les groupes valués est fort, nous tournerons notre attention vers ces derniers. Néanmoins, cet intérêt ne sera évident que dans la section 5.9 avec le théorème 5.9.9. Entre-temps nous travaillerons avec des théories de chaînes colorées, munies de certaines fonctions. Nous arriverons à des résultats que nous croyons intéressants en eux mêmes, indépendamment de leur application ultérieure aux groupes valués.

Même si les travaux modèle-théoriques sur les corps valués sont nombreux, ceux qui se centrent exclusivement dans les groupes valués sont plus rares. Nous devons citer comme références pour cette thèse les travaux de Simonetta [30] et Schmitt [25, 24] (le premier de façon directe, et le deuxième de façon plutôt indirecte).

En effet, la motivation originale qui a donné lieu aux chapitres 4 et 5 est le théorème 5.9.9, dans lequel nous montrons que la théorie de groupes valués étudié par Simonetta dans [30] est NIP. Cette théorie, que nous notons par $\mathcal{T}_S^{(p,q)}$, est une théorie de groupe abélien valué où la valuation est compatible dans un certain sens avec la multiplication.

Le point de départ pour montrer $\mathcal{T}_S^{(p,q)}$ est NIP est le Théorème 3.3 de [30], dans lequel l'auteur, inspiré par le travail de Schmitt, montre une élimination de quanteurs relative à l'ordre (qui lui sert à caractériser les théories C-minimales pour les modèles de la théorie en question). La morale de ce résultat est que la plus grande partie de l'information du groupe valué est codifiée dans l'ordre. La stratégie pour montrer que $\mathcal{T}_S^{(p,q)}$ NIP sera donc d'étudier la structure induite sur l'ordre, que nous notons $\mathcal{T}_{ord}$ (cf. définition 5.9.2, page 98), voir qu'elle ne peut pas avoir la propriété d'indépendance, et ensuite faire un argument de transfert pour montrer que le groupe valué tout entier doit être NIP.

Puisque $\mathcal{T}_{ord}$ comporte, en plus de prédicats unaires, des fonctions qui sont « presque » des automorphismes, notre première tentative sera d'étudier si la théorie de chaînes colorées (*i.e.* avec des prédicats unaires) munies d'automorphismes peut avoir la propriété d'indépendance. Nous réussirons dans cette tâche et montrerons dans le chapitre 4 (voir le théorème 4.4.19) que cette théorie est NIP :

Théorème. *Une théorie de chaîne colorée avec automorphismes ne peut avoir la propriété d'indépendance.*

Pour cela nous utiliserons de façon fondamentale un théorème de Poizat [16, Théorème 9] affirmant que la théorie de chaînes colorées est NIP. Des travaux assez proches de cette thèse, comme l'étude de groupes abéliens ordonnés proposée par Gurevich et Schmitt dans [5] ou celui celui de Parigot sur les arbres dans [15], ont été inspirés par ce résultat de Poizat.

Ensuite, pour traiter la théorie $\mathcal{T}_{ord}$, où au lieu d'avoir des automorphismes nous avons des « quasi-automorphismes » (le sens de cela sera précisé ultérieurement), la stratégie initiale consistait à émuler l'argument utilisé dans le chapitre 4 ; celui-là, brièvement, consiste à trouver une astuce appropriée pour pouvoir appliquer le théorème de Poizat mentionné ci-dessus. Cette approche cependant ne fonctionne pas, et nous serons obligé de donner un argument plus élaboré. Dans le chapitre 5 nous développons certains outils, qui nous mèneront au théorème 5.7.4. Avec ce résultat clé nous parviendrons à caractériser les types d'une façon convenable, inspirée du théorème de Rubin (cf. [22]) utilisé par Poizat dans [16, Théorème 9] :

Fait (Théorème de Rubin). Deux n-uplets croissants, $a_1 < \cdots < a_n$ extrait d'une chaîne colorée A et $b_1 < \cdots < b_n$ extrait d'une chaîne colorée B, ont le même type (sur $\emptyset$) ssi

$$tp(a_i a_{i+1}) = tp(b_i b_{i+1}) \text{ pour } i = 1, \ldots, n-1.$$

Dans notre cas, le fait d'avoir des fonctions compliquera la tâche de caractériser les types. Étant donné un uplet $\bar{a}$, nous allons considérer un certain ordre associé à $\bar{a}$ qui tient compte de ces fonctions ; nous le noterons $\mathcal{O}_{\bar{a}}(\bar{x})$. Ce que que nous montrons dans le théorème 5.7.4 sera le suivant :

Théorème. *Soit un n-uplet $\bar{a}$ extrait d'un modèle de $\mathcal{T}_{ord}$. Alors $tp(\bar{a})$ dépend seulement de $\mathcal{O}_{\bar{a}}(\bar{x})$ et de certains 2-types $tp(\alpha_1(c)\alpha_2(c))$; où c varie parmi les coupures associées à $\mathcal{O}_{\bar{a}}(\bar{x})$, et $\alpha_1(c)$, $\alpha_2(c)$ sont des éléments qui dépendent de c.*

Ce résultat nous permettra de compter le nombre de cohériters d'un type avec une relative facilité, pour montrer finalement que la théorie $\mathcal{T}_{ord}$ n'a pas la propriété d'indépendance.

Pour être plus précis, nous tenons à remarquer que nous montrerons quelque chose de plus fort que la NIP pour $\mathcal{T}_{ord}$: en effet, la théorie que nous étudierons dans le chapitre 5 est une théorie plus générale que $\mathcal{T}_{ord}$. Ainsi, pour une certaine théorie $\mathcal{T}$, dans le même langage que $\mathcal{T}_{ord}$ et avec $\mathcal{T}_{ord} \vdash \mathcal{T}$ (cela sera montré a posteriori dans la proposition 5.9.3), nous montrerons dans le théorème 5.8.3 le suivant :

Théorème. *La théorie $\mathcal{T}$ n'a pas la propriété d'indépendance. En particulier $\mathcal{T}_{ord}$ est NIP.*

Nous considérons que ce résultat sur la théorie $\mathcal{T}$ est intéressant en soi, sans avoir besoin de l'appliquer à $\mathcal{T}_{ord}$ ou $\mathcal{T}_S^{(p,q)}$. Nous ferons néanmoins un petit effort en plus pour arriver notre objectif : pour finir, nous montrerons dans le théorème 5.9.9, grâce à un argument de transfert à partir de $\mathcal{T}_{ord}$, que la théorie de groupes valués considérée par Simonetta dans [30] est NIP :

Théorème. *La théorie $\mathcal{T}_S^{(p,q)}$ n'a pas la propriété d'indépendance.*

Nous voudrions finalement mentionner les références [3] et [21] dans le contexte des corps et modules valués. Des questions semblables à certaines traitées dans cette thèse peuvent s'y retrouver : chaînes des sous-groupes indexés par un ordre, élimination des quanteurs, ou encore la NIP (cette dernière dans [3]).

Chapitre 2

Préliminaires

2.1 La propriété d'indépendance

Dans cette section nous allons présenter quelques résultats classiques concernant la propriété d'indépendance, qui seront fondamentaux par la suite. Les lecteurs intéressés peuvent consulter, par exemple, les ouvrages de Poizat ou Adler [18, 1]. Nous ne donnons pas pas de preuves puisque soit elles se trouvent dans les références que nous venons de mentionner, soit elles sont triviales.

Nous considérons une théorie $\mathcal{T}$ dans un certain langage $\mathcal{L}$. Les formules qui nous mentionnerons seront toujours des $\mathcal{L}$-formules.

Définition 2.1.1. La formule $\phi(\bar{x}, \bar{y})$ a la *propriété d'indépendance* (par rapport à $\mathcal{T}$) si pour tout n le suivant est consistent avec $\mathcal{T}$:

$$\exists \bar{x}_1 \dots \exists \bar{x}_n \left[\bigwedge_{I \subseteq \{1,\dots,n\}} \exists \bar{y} \left(\bigwedge_{i \in I} \phi(\bar{x}_i, \bar{y}) \wedge \bigwedge_{i \notin I} \neg\phi(\bar{x}_i, \bar{y}) \right) \right]$$

On dit que $\mathcal{T}$ a la *propriété d'indépendance*, s'il existe une formule $\phi(\bar{x}, \bar{y})$ qui a la propriété d'indépendance (par rapport à $\mathcal{T}$). On dira que $\mathcal{T}$ est NIP, ou dépendante, si elle n'a pas la propriété d'indépendance. On dira aussi qu'une structure est NIP si sa théorie l'est.

Par compacité, $\phi(\bar{x}, \bar{y})$ a la propriété d'indépendance ssi il existe un modèle $\mathcal{M}$ de $\mathcal{T}$, et deux suites $(a_i)_{i\in\omega}$ et $(b_I)_{I\subseteq\omega}$ appartenant à M tels que :

$$\mathcal{M} \models \phi(a_i, b_I) \Leftrightarrow i \in I.$$

Remarque 2.1.2. Les affirmations suivantes sont équivalentes :

1. $\mathcal{T}$ est NIP ;
2. $\mathcal{T}'$ est NIP, pour toute $\mathcal{L}$-théorie $\mathcal{T}'$ complétant $\mathcal{T}$;
3. $\mathcal{T}'$ est NIP, pour toute $\mathcal{L}$-théorie $\mathcal{T}'$ impliquant $\mathcal{T}$.

Note: La propriété d'indépendance est souvent définie seulement pour une théorie complète. Une fois que nous avons fixé le langage, la définition pour les théories incomplètes ne pose pas de problème.

Remarque 2.1.3. Soient $\mathcal{T}$ une $\mathcal{L}$-théorie et $\mathcal{T}'$ une $\mathcal{L}'$-théorie (pour certains langages $\mathcal{L}$ et $\mathcal{L}'$). Si nous pouvons définir $\mathcal{L}'$ dans $\mathcal{L}$ de façon que $\mathcal{T}$ avec ces définitions implique $\mathcal{T}'$, et $\mathcal{L}$ dans $\mathcal{L}'$ de façon que $\mathcal{T}'$ avec ces définitions implique $\mathcal{T}$ (nous dirons dans ce cas que $\mathcal{T}$ et $\mathcal{T}'$ sont *interdéfinissables*), alors $\mathcal{T}$ est NIP ssi $\mathcal{T}'$ est NIP.

Remarque 2.1.4. $\mathcal{T}$ est NIP ssi $\mathcal{T}^{eq}$ est NIP.

Remarque 2.1.5. Si tout modèle d'une théorie $\mathcal{T}$ est interprétable dans un modèle d'une théorie $\mathcal{T}'$ et $\mathcal{T}'$ est NIP, alors $\mathcal{T}$ est NIP.

Définition 2.1.6. Le *nombre d'alternance* de la formule $\phi(\bar{x}, \bar{b})$ sur la suite $(\bar{a}_i)_{i\in\omega}$ est le nombre minimal d'intervalles de ω tel que $\vDash \phi(\bar{a}_i, \bar{b})$ ssi $\vDash \phi(\bar{a}_j, \bar{b})$ pour tous les i et j appartenant au même intervalle.

Fait 2.1.7 (Poizat [16, 17])**.** *Si pour une suite indiscernable $(\bar{a}_i)_{i\in\omega}$ et des paramètres $\bar{b}$ le nombre d'alternance de la formule $\phi(\bar{x}, \bar{b})$ sur $(\bar{a}_i)_{i\in\omega}$ est ω, alors $\phi(\bar{x}, \bar{y})$ a la propriété d'indépendance.*

Fait 2.1.8 (Shelah [28])**.** *Si $\mathcal{T}$ a la propriété d'indépendance, alors il existe une formule $\phi(x, \bar{y})$, avec x un uplet de taille* 1*, qui a la propriété d'indépendance (par rapport à $\mathcal{T}$).*

Fait 2.1.9 (Poizat [16])**.** *La propriété d'indépendance est symétrique dans les variables $\bar{x}$ et $\bar{y}$: si la formule $\phi(\bar{x}, \bar{y})$ a la propriété d'indépendance, alors la formule $\phi(\bar{y}, \bar{x})$ a aussi la propriété d'indépendance.*

Nous rappelons les deux définitions suivantes :

Définition 2.1.10. Soient $A \subseteq B$ et Σ un type partiel sur B. On dit que Σ est *finiment satisfaisable* dans A si toute conjonction finie de formules dans Σ est satisfaite pour un uplet appartenant à A.

Définition 2.1.11. Soient un modèle $\mathcal{M} \vDash \mathcal{T}$, un type $p \in S(M)$ et un ensemble B contenant M. On dit qu'une extension $q \in S(B)$ de p est un *cohéritier* de p, si elle est finiment satisfaisable dans M.

Fait 2.1.12 (Poizat [16])**.** *S'il existe un cardinal λ, tel que pour tout modèle $\mathcal{M} \vDash \mathcal{T}$ et tout type $p \in S_1(M)$, le nombre des cohéritiers de p (sur une extension quelconque de $\mathcal{M}$) est majorée par λ, alors $\mathcal{T}$ est NIP.*

Le résultat suivant a probablement été remarqué par Shelah et Poizat il y a longtemps. Nous pouvons en trouver une preuve dans [1].

Fait 2.1.13. *L'ensemble des formules NIP est clos par combinaisons booléennes.*

Corollaire 2.1.14. *Si toute complétion de $\mathcal{T}$ élimine les quanteurs, et toute formule atomique du type $\phi(x, \bar{y})$ est NIP, alors $\mathcal{T}$ est NIP.*

2.1.1 Un résultat sur les groupes NIP

Un des résultats que Shelah montre dans [27](cf. 4.3) affirme qu'étant donné un groupe NIP avec un sous-ensemble infini d'éléments qui commutent deux-à-deux, on peut trouver un sous-groupe définissable abélien infini. Nous répondons positivement à une question posée par Pillay (posée en novembre 2006 lors de d'un exposé à la conférence MODNET-Antalya), en généralisant ce résultat au cas nilpotent.

Nous donnons d'abord un lemme bien connu de théorie des groupes.

Soit G un groupe et $x, y, x_1, \ldots, x_n \in G$. On considère $x^y = y^{-1}xy$, $[x,y] = x^{-1}y^{-1}xy$ et $[x_1, \ldots, x_n] = [[x_1, \ldots, x_{n-1}], x_n]$.

Lemme 2.1.15. *Soit G un groupe et $A \subseteq G$ un sous-ensemble. Si pour tout $a_0, \ldots, a_n \in A$ on a $[a_0, \ldots, a_n] = 1$, avec n minimal, alors $\langle A \rangle$ est nilpotent de classe n.*

Démonstration. Étant donnés $z_1, \ldots, z_n \in \langle A \rangle$, on montre par récurrence que

$$[z_1, \ldots, z_n] = \bar{a}_1^{f_1} \cdot \ldots \cdot \bar{a}_m^{f_m},$$

où $\bar{a}_j = [a_{j_0}, \ldots, a_{j_n}]$, $a_{j_k} \in A$ et $f_1, \ldots, f_m \in \langle A \rangle$.

Nous pouvons utiliser pour cela les identités suivantes bien connues :

$$[x, y^{-1}] = [y,x]^{y^{-1}} \qquad [x^{-1}, y] = [y,x]^{x^{-1}}$$
$$[xy, z] = [x,z]^y \cdot [y,z] \qquad [x, yz] = [x,z] \cdot [x,y]^z$$

L'énoncé du lemme en découle trivialement. □

Avant le théorème, nous montrons deux lemmes préliminaires. Le premier est dû à Baldwin-Saxl [2]. Nous travaillons dans une certaine théorie T dont le modèle monstre est noté $\mathfrak{C}$. Nous considérons G définissable dans T.

Lemme 2.1.16. *Supposons que $\{H_{a_i}\}_{i\in\omega}$ est une famille uniformement définissable de sous-groupes de G, disons $H_a = \phi(x,a)$ pour une certaine formule $\phi(x,y)$ sans paramètre. Supposons qu'il existent deux suites $(a_i)_{i\in\omega}$ et $(g_i)_{i\in\omega}$ telles $g_i \in H_{a_j}$ ssi $i \neq j$. Alors T a la propriété d'indépendance.*

Démonstration. Soit $I = \{i_0, \ldots, i_n\} \subset \omega$, avec $i_0 < \ldots < i_n$. On définit $g_I = g_{i_0} \cdot \ldots \cdot g_{i_n}$.

Soit $i \in I$, disons $i = i_k$. Par hypothèse $g_{i_k} \notin H_{a_{i_k}}$, mais $g_{i_j} \in H_{a_{i_k}}$ pour $j \neq k$. On en déduit :

$$g_I \notin H_{a_i}.$$

D'autre part, si $i \notin I$, alors $g_{i_j} \in H_{a_i}$ pour tout $j \in \{0, \ldots, n\}$, et alors :

$$g_I \in H_{a_i}.$$

Par compacité, pour tout $I \subseteq \omega$ il existe $g_I \in G$ tel que $g_I \notin H_{a_i}$ ssi $i \in I$. Cela montre que la formule $\neg\phi(y,x)$ a la propriété d'indépendance. □

Dorénavant, pour le reste de la section nous considérons que la théorie T n'a pas la propriété d'indépendance.

Lemme 2.1.17. *Soit A un sous-groupe de G, avec $|A| < |\mathfrak{C}|$. Considérons*

$$\Phi = \left\{\phi \in \mathscr{L}(\mathfrak{C}) : A \subseteq \phi^{\mathfrak{C}}\right\} \text{ et } \Psi = \left\{\psi \in \mathscr{L}(\mathfrak{C}) : Z(A) \subseteq \psi^{\mathfrak{C}}\right\}.$$

Alors $\Phi(x) \cup \Psi(y) \vdash x \cdot y = y \cdot x$.

Démonstration. Supposons le contraire pour arriver à une contradiction. Alors on peut trouver une suite $(a_n, b_n)_{n\in\omega}$ d'éléments de G tels que $(a_n, b_n) \models \Phi(x) \cup \Psi(y) \restriction (A \cup \{a_i, b_i : i < n\})$ et $a_n \cdot b_n \neq b_n \cdot a_n$.

Soit $b \in Z(A)$. Alors $A \subseteq \phi^{\mathfrak{C}}$ pour $\phi(x, b) \equiv x \cdot b = b \cdot x$. Par définition de Φ nous avons $\phi(x, b) \in \Phi$. Puisque $b \in Z(A) \subseteq A$, on a $\phi(x, b) \in \Phi \restriction A$. Mais $a_i \models \Phi \restriction A$ pour tout $i \in \omega$. Cela montre donc :

$$\text{si } b \in Z(A) \text{ alors } a_i \cdot b = b \cdot a_i \text{ pour tout } i \in \omega.$$

Alors pour tout $i \in \omega$ nous avons $Z(A) \subseteq \psi^{\mathfrak{C}}$ pour $\psi(x, a_i) \equiv x \cdot a_i = a_i \cdot x$. Par définition Ψ on a $\psi(x, a_i) \in \Psi \restriction a_i$. Mais $b_j \models \Psi \restriction a_i$ pour tout $j > i$. On en déduit :

$$\text{si } j > i \text{ alors } b_j \cdot a_i = a_i \cdot b_j. \tag{2.1}$$

Soit maintenant $a \in A$. Alors $Z(A) \subseteq \psi^{\mathfrak{C}}$ pour $\psi(x, a) \equiv x \cdot a = a \cdot x$, et donc $\psi(x, a) \in \Psi \restriction a$. Comme $b_j \models \Psi \restriction A$ pour tout $j \in \omega$, nous avons :

$$\text{si } a \in A \text{ alors } b_j \cdot a = a \cdot b_j \text{ pour tout } j \in \omega.$$

Alors pour tout $j \in \omega$ on a $A \subseteq \phi^{\mathfrak{C}}$, où $\phi(x, b_j) \equiv x \cdot b_j = b_j \cdot x$. Mais $a_i \models \Phi \restriction b_j$ pour tout $i > j$. On en déduit :

$$\text{si } i > j \text{ alors } a_i \cdot b_j = b_j \cdot a_i. \tag{2.2}$$

D'après 2.1 et 2.2 on conclut que $a_i \in C(b_j)$ ssi $i \neq j$. Cela contredit le lemme 2.1.16. □

Théorème 2.1.18. *Si G contient un sous-ensemble A tel que $[x_0, \ldots x_n] = 1$ pour tout $x_0, \ldots, x_n \in A$, avec n minimal, alors il existe un sous-groupe définissable $E \leq G$ contenant A, qui est nilpotent de classe n.*

Démonstration. Sans perte de généralité on peut supposer $|A| < |\mathfrak{C}|$, et par le lemme 2.1.15 on peut supposer A sous-groupe. Maintenant, soient Φ et Ψ comme dans lemme le lemme 2.1.17. Alors par compacité on trouve $\phi \in \Phi$ et $\psi \in \Psi$ tels que $\phi(x) \wedge \psi(y) \models x \cdot y = y \cdot x$. On prouve le théorème par récurrence sur n.

Si $n = 1$, alors A est abélien et $Z(A) = A$, donc $\Phi = \Psi$ et $A \subseteq (\phi \wedge \psi)^{\mathfrak{C}}$. Alors $Z(C_G(\phi \wedge \psi)^{\mathfrak{C}})$ est un groupe abélien contenant A.

Soit maintenant A nilpotent de classe n, et posons $H = Z(C_G(\psi^{\mathfrak{C}}))$. Notons d'abord que $H = C_G(C_G(\psi^{\mathfrak{C}})) \cap C_G(\psi^{\mathfrak{C}})$.

Puisque $\phi(x) \wedge \psi(y) \models x \cdot y = y \cdot x$ et $A \subseteq \phi^{\mathfrak{C}}$, nous avons $A \leq C_G(\psi^{\mathfrak{C}}) \leq C_G(H)$. D'autre part :

$$Z(A) \subseteq \psi^{\mathfrak{C}} \cap A \subseteq C_G(C_G(\psi^{\mathfrak{C}})) \cap C_G(\psi^{\mathfrak{C}}) = H.$$

Puisque H est abélien $H \leq C_G(H)$, et alors $AH/H \leq C_G(H)/H$. Comme $Z(A) \leq H$, nous avons que AH/H est nilpotent de classe $n-1$.

Mais $C_G(H)/H$ est interprétable dans $\mathfrak{C}$, donc d'après la remarque 2.1.5 $C_G(H)/H$ est NIP. On peut alors appliquer l'hypothèse de récurrence pour trouver un certain E/H interprétrable dans $\mathfrak{C}$ et nilpotent de classe $n-1$ tel que

$$AH/H \leq E/H \leq C_G(H)/H.$$

Alors E est un sous-groupe définissable et nilpotent de classe n. □

Note: Le résultat original n'affirmait pas $A \leq E$.

Question : *Trouver un analogue du théorème 2.1.18 dans le cas résoluble.*

2.2 Groupes valués

Nous donnons dans cette section la définition de groupe valué, et quelques propriétés basiques. Nous pouvons trouver une bonne exposition sur les groupes valués dans le livre (en préparation) de Kuhlmann [13]. Des auteurs classiques sur le sujet sont, entre autres, Richman et Walker (cf.[19, 20]).

Soit G un groupe abélien et $\Gamma \cup \{\infty\}$ une chaîne avec ∞ le plus grand élément. Nous dirons qu'une application $v : G \to \Gamma \cup \{\infty\}$ est une *valuation* si pour tout $x, y \in G$:

(V1) $v(x) = \infty$ ssi $x = 0$;

(V2) $v(x-y) \geq \min\{v(x), v(y)\}$.

Étant donnés G, Γ et v avec les propriétés précédentes, nous appellerons (G, Γ, v), ou simplement (G, v), un *groupe abélien valué*. Puisque nous travaillerons toujours dans des groupes commutatifs, nous omettrons souvent le mot « abélien » .

Remarque 2.2.1. Nous pouvons toujours supposer, sans perte de généralité, que ∞ appartient à Γ.

Nous donnons ensuite quelques propriétés basiques des groupes valués.

Proposition 2.2.2. *Pour tout $x, y \in G$:*

1. $v(-x) = v(x)$;
2. $v(x+y) \geq \min\{v(x), v(y)\}$;

3. $v(nx) \geq v(x)$ *pour tout* $n \in \mathbb{Z}^*$ *;*

4. si $v(x) < v(y)$ *alors* $v(x+y) = v(x-y) = v(-x+y) = v(-x-y) = v(x)$*.*

Démonstration. D'après (V2) et (V1) nous avons d'une part

$$v(-x) = v(0-x) \geq \min\{v(0), v(x)\} = v(x),$$

et d'autre part

$$v(x) = v(0-(-x)) \geq \min\{v(0), v(-x)\} = v(-x).$$

Cela montre *1.* Les points *2*, *3* et *4* suivent facilement de *1.*

□

Proposition 2.2.3. *Soit* $g \in G$ *et supposons que* $n_0 = \min\{n \in \mathbb{N}^* : v(g) < v(ng)\}$ *existe. Pour tout* $n \in \mathbb{Z}$ *nous avons alors :*

$$n_0 \nmid n \Rightarrow v(ng) = v(g).$$

Démonstration. Puisque $v(x) = v(-x)$ pour tout $x \in G$, il suffit de montrer l'énoncé pour $n \in \mathbb{N}^*$. Soit donc $n \in \mathbb{N}^*$ tel que $n_0 \nmid n$, et supposons pour arriver à une contradiction que $v(ng) \neq v(g)$, c'est-à-dire $v(ng) > v(g)$.

Il existent des entiers naturels k et r, avec $0 < r < n_0$ tels que $n = k \cdot n_0 + r$. Nous avons alors $ng = (k \cdot n_0 + r)g$ et donc $rg = ng - (kn_0)g$. On en déduit $v(rg) \geq \min\{v(ng), v((kn_0)g)\}$. Or $v(ng) > v(g)$ et $v((kn_0)g) \geq v(n_0 g) > v(g)$ par hypothèse. On conclut alors que $v(rg) > v(g)$, ce qui contredit la minimalité de n_0. □

Définition 2.2.4. Étant donné $\gamma \in \Gamma \cup \{\infty\}$, nous appelons *boule fermée de rayon* γ *et centre* 0 l'ensemble $\bar{B}_\gamma(0) = \{g \in G : v(g) \geq \gamma\}$, et *boule ouverte de rayon* γ *et centre* 0 l'ensemble $B^\circ_\gamma(0) = \{g \in G : v(g) > \gamma\}$. Nous écrirons aussi $\bar{B}_\gamma$ et B°_γ, ou si l'on veut être explicite sur le groupe de base, $\bar{B}(G, \gamma)$ et $B^\circ(G, \gamma)$.

Pour tout $g \in G$ nous pouvons aussi définir, même si nous n'en aurons pas besoin, la *boule fermée de rayon* γ *et centre* g et la *boule ouverte de rayon* γ *et centre* g : $\bar{B}_\gamma(g) = g + \bar{B}_\gamma(0)$ et $B^\circ_\gamma(g) = g + B^\circ_\gamma(0)$.

Remarque 2.2.5. D'après la proposition 2.2.2, $\bar{B}_\gamma$ et B°_γ sont des sous-groupes de G, avec évidemment $B^\circ_\gamma \leq \bar{B}_\gamma$.

On peut alors considérer le quotient $\bar{B}_\gamma / B^\circ_\gamma$, qui est un objet fondamental dans l'étude des groupes valués.

2.3 Ensembles d'élimination

Nous donnons une version légèrement généralisée d'un théorème classique sur les ensembles d'élimination (voir par exemple [8] ou [18]).

Fixons une théorie T dans un certain langage L.

Définition 2.3.1. On dira qu'un ensemble (non vide) de formules $\Theta(\bar{x})$ est un *ensemble d'élimination relatif à* $\Psi(\bar{x})$, avec $\Psi(\bar{x})$ un certain type partiel, si pour toute pair de n-uplets $\bar{a}, \bar{b}$ satisfaisant $\Psi(\bar{x})$, on a que $\bar{a}$ et $\bar{b}$ ont le même type dès qu'ils satisfont les mêmes formules dans $\Theta(\bar{x})$.

Remarque 2.3.2. Un ensemble d'élimination, avec la définition usuelle, est un ensemble d'élimination relatif à $\emptyset$.

Proposition 2.3.3. *Si* $\Theta(\bar{x})$ *est un ensemble d'élimination relatif à* $\Psi(\bar{x})$*, alors pour toute formule* $\phi(\bar{x})$*, il existe une combinaison booléenne* $\theta(\bar{x})$ *de formules de* $\Theta(\bar{x})$ *tel que*

$$\Psi(\bar{x}) \vdash \theta(\bar{x}) \leftrightarrow \phi(\bar{x}).$$

Démonstration. Soit $\phi(\bar{x})$ une formule. Si elle n'est pas consistante avec $\Psi(\bar{x})$, il suffit de choisir un $\theta(\bar{x})$ quelconque dans $\Theta(\bar{x})$ et alors :

$$\Psi(\bar{x}) \vdash (\theta(\bar{x}) \wedge \neg\theta(\bar{x})) \leftrightarrow \phi(\bar{x}).$$

Supposons alors que $\phi(\bar{x})$ est consistante avec $\Psi(\bar{x})$, et soit alors $p \in [\Psi(\bar{x}) \wedge \phi(\bar{x})]$. Par hypothèse, p induit un type partiel Θ^p composé de formules de Θ, ou ses négations, tel que $\Psi(\bar{x}) \wedge \Theta^p(\bar{x}) \vdash p(\bar{x})$. Par compacité, il existe une partie finie θ^p de Θ^p tel que $\Psi(\bar{x}) \wedge \theta^p(\bar{x}) \vdash \phi(\bar{x})$, et donc :

$$\Psi(\bar{x}) \vdash \theta^p(\bar{x}) \to \phi(\bar{x}) \tag{2.3}$$

D'autre part, puisque pour chaque $p \in [\Psi(\bar{x}) \wedge \phi(\bar{x})]$, la formule $\theta^p(\bar{x})$ est contenue dans $p(\bar{x})$, nous avons aussi :

$$\Psi(\bar{x}) \wedge \phi(\bar{x}) \vdash \bigvee_{p \in [\Psi(\bar{x}) \wedge \phi(\bar{x})]} \theta^p(\bar{x}).$$

Par compacité, pour un certain $n < \omega$ et des types $p_1, \ldots, p_n \in [\Psi(\bar{x}) \wedge \phi(\bar{x})]$ on a

$$\Psi(\bar{x}) \wedge \phi(\bar{x}) \vdash \bigvee_{i=1}^{n} \theta^{p_i}(\bar{x}),$$

et alors

$$\Psi(\bar{x}) \vdash \phi(\bar{x}) \to \bigvee_{i=1}^{n} \theta^{p_i}(\bar{x}). \tag{2.4}$$

D'après (2.3) et (2.4) on conclut :

$$\Psi(\bar{x}) \vdash \phi(\bar{x}) \leftrightarrow \bigvee_{i=1}^{n} \theta^{p_i}(\bar{x}).$$

□

Chapitre 3

Groupes, sous-groupes et valuations

3.1 La théorie de base $\mathcal{T}_0$

3.1.1 Introduction

Dans les corps valués et groupes valués, un des objets fondamentaux qui apparaît de façon naturelle est la boule fermée ou ouverte. Si l'on considère celles qui sont centrées en 0, on obtient une chaîne de sous-groupes emboîtés. Motivé par ce phénomène, nous tâchons d'étudier la théorie d'un groupe abélien avec une famille de sous-groupes emboîtés, indexés par un ordre.

Nous dénotons notre théorie de base par $\mathcal{T}_0$, et le langage avec lequel nous travaillons au départ par $\mathcal{L}_0 = \{P_G, P_\Gamma, H, +, \leq, 0, -\infty\}$. Les symboles P_G et P_Γ sont des prédicats unaires, dont les ensembles des réalisations, que nous noterons G et Γ respectivement, forment une partition. $\mathcal{T}_0$ affirme que $(G, +, 0)$ est un groupe abélien et $(\Gamma, \leq, -\infty)$ une chaîne avec $-\infty$ comme plus petit élément. Nous faisons souvent souvent l'abus de langage de parler de G en tant que la « sorte du groupe » et de Γ en tant que la « sorte de l'ordre » . L'addition $+$ ne sera définie que sur G ; de même l'ordre $\leq$ ne sera défini que sur Γ.

Si nous voulons formaliser cela, il suffit de dire, par exemple, que $a + b = -\infty$ si a ou b n'appartient pas à G.

Le symbole H représente une relation binaire, avec laquelle nous voulons capturer le concept de chaîne de sous-groupes emboîtés. Ainsi, $\mathcal{T}_0$ affirme, pour tous $\gamma, \gamma_1, \gamma_2 \in \Gamma$:

(a1) $H(\cdot, \gamma)$ est un sous-groupe de G ;

(a2) $H(\cdot, \gamma_1) \subsetneq H(\cdot, \gamma_2)$ ssi $\gamma_1 < \gamma_2$.

Puisque $H(\cdot, x)$ seulement nous intéresse quand x appartient à la sorte de l'ordre, nous pouvons dire que $\mathcal{T}_0$ contient l'énoncé « $\forall x \forall y\ [P_G(x) \to (\neg H(y, x))]$ » .

Très souvent nous dénotons le sous-groupe $H(\cdot, \gamma)$ par H_γ. Parfois nous écrivons aussi G ou Γ, sans préciser le modèle $\mathcal{M}$ pour lequel $G = P_G(M)$ ou $\Gamma = P_\Gamma(M)$; soit le contexte indique de quel $\mathcal{M}$ nous parlons, soit il s'agit d'un $\mathcal{M}$ quelconque.

Remarque 3.1.1. Pour tout $\gamma \in \Gamma$, on a que $\bigcup_{\gamma' < \gamma} H_{\gamma'}$ et $\bigcap_{\gamma' > \gamma} H_{\gamma'}$ sont des sous-groupes de G, et $\bigcup_{\gamma' < \gamma} H_{\gamma'} \leq H_\gamma \leq \bigcap_{\gamma' > \gamma} H_{\gamma'}$.

Une fois établi ce cadre de départ, nous restreignons notre attention à certaines complétions de $\mathcal{T}_0$, dans lesquelles nous pouvons éliminer les quanteurs dans une certaine expansion de $\mathcal{L}_0$. Ensuite, grâce au corollaire 2.1.14, nous montrons la NIP en étudiant les formules sans quanteurs. Mais avant cela, nous donnons quelques conséquences de $\mathcal{T}_0$.

3.1.2 Interprétabilité des groupes valués

Nous allons définir des nouvelles relations dans G, qui serviront à établir le lien avec les groupes valués.

Définition 3.1.2. Pour tout $g_1, g_2 \in G$ on définit :
(i) $g_1 \precsim g_2$ si $(g_2 \in H_\gamma \Rightarrow g_1 \in H_\gamma)$ pour tout $\gamma \in \Gamma$;
(ii) $g_1 \sim g_2$ si $g_1 \precsim g_2$ et $g_2 \precsim g_1$;
(iii) $g_1 \prec g_2$ si $g_1 \precsim g_2$ et $g_1 \nsim g_2$.

Remarque 3.1.3. De façon équivalente on aurait pu définir :
– $g_1 \prec g_2$ s'il existe $\gamma \in \Gamma$ tel que $\models H(g_1, \gamma)$ et $\not\models H(g_2, \gamma)$;
– $g_1 \sim g_2$ si $g_1 \nprec g_2$ et $g_2 \nprec g_1$;
– $g_1 \precsim g_2$ si $g_1 \prec g_2$ ou $g_1 \sim g_2$.

Remarque 3.1.4. Il est évident que $\precsim$, $\sim$ et $\prec$ sont définissables dans $\mathcal{L}_0$.

Lemme 3.1.5. *Avec les définitions précédentes, on a que :*
– *la relation $\precsim$ est un préordre dans G ;*
– *la relation $\sim$ est une relation d'équivalence dans G.*

Définition 3.1.6. Étant donné $g \in G$, on notera par $[g]_\sim$ sa classe modulo $\sim$.

Remarque 3.1.7. D'après le lemme 3.1.5, $\precsim$ induit un ordre (total) sur $G/\sim$, qu'on notera $\leq_{G/\sim}$: pour $g, g' \in G$, $[g]_\sim \leq_{G/\sim} [g']_\sim$ si $g \precsim g'$. On peut définir de façon analogue $<_{G/\sim}$.

Proposition 3.1.8. *Considérons $\mathcal{M}$ un modèle de $\mathcal{T}_0$. Pour tous $g, g_1, g_2 \in G$ on a :*

1. $0 \precsim g$;
2. $g \sim -g$;
3. *si $g_1 \prec g_2$ alors $g_1 + g_2 \sim g_2$;*
4. *si $g_1 \sim g_2$ alors $g_1 + g_2 \precsim g_i$, $i = 1, 2$.*

Démonstration. Ils sont des conséquences immédiates du fait que H_γ est un sous-groupe pour tout $\gamma \in \Gamma$. □

Considérons un groupe valué $\mathcal{G}$, consistant en un groupe abélien $(\mathsf{G}, +^{\mathcal{G}}, 0^{\mathcal{G}})$, un ordre $(\Gamma, \leq^{\mathcal{G}}, \infty^{\mathcal{G}})$ avec $\infty^{\mathcal{G}}$ son plus grand élément, et $v^{\mathcal{G}} : \mathsf{G} \to \Gamma$ une valuation. Cela peut être exprimé au premier ordre dans le langage $\mathsf{L} = \{+, \leq, v, 0, \infty\}$, c'est-à-dire on regarde $\mathcal{G}$ en tant que L-structure. Rappelons que $\bar{B}_\gamma = \bar{B}(G, \gamma)$ dénote la boule fermée de rayon γ centrée en 0.

Soit maintenant $\mathcal{M}$ la $\mathcal{L}_0$-structure suivante :

– G et $\mathsf{\Gamma}$ les deux ensembles de base de chaque sorte ;
– $+^{\mathcal{M}}$ est interprété comme $+^{\mathcal{G}}$;
– $\leq^{\mathcal{M}}$ est interprété comme l'ordre inverse de $\leq^{\mathcal{G}}$;
– $H^{\mathcal{M}}$ est interprété comme $\bar{B}$;
– $0^{\mathcal{M}}$ est interprété comme $0^{\mathcal{G}}$;
– $-\infty^{\mathcal{M}}$ est interprété comme $\infty^{\mathcal{G}}$.

On peut facilement voir que $\mathcal{M}$ est un modèle de $\mathcal{T}_0$. En plus, $\mathcal{G}$ est interprétable dans $\mathcal{M}$: $v(g)$ sera interprété comme $[g]_\sim$, et le reste sera interprété de la façon que naturellement suggère la construction de $\mathcal{M}$.

Nous avons donc défini une application σ, qui envoi un élément dans la classe $\mathbf{G^{ab}_{val}}$ des groupes abéliens valués, vers un élément dans la classe $\mathbf{Mod}(\mathcal{T}_\mathbf{0})$ des modèles de $\mathcal{T}_0$.

Soit $\mathcal{M} \vDash \mathcal{T}_0$. Voyons comment interpréter un groupe valué dans $\mathcal{M}$. Soit R la relation d'équivalence sur G définit par $g_1 R g_2 \Leftrightarrow g_1 - g_2 \sim 0$. Elle est évidemment définissable dans $\mathcal{L}_0$. Nous avons alors :

1. $+$ induit une opération $+_R$ sur G/R (on peut facilement voir qu'elle est bien définie) telle que $(G/R, +_R, [0]_R)$ est un groupe.
2. D'après la remarque 3.1.7, si on note $\leq'_{G/\sim}$ l'ordre inverse de $\leq_{G/\sim}$, alors $(G/\sim, \leq'_{G/\sim}, [0]_\sim)$ est un ordre total avec $[0]_\sim$ le plus grand élément.
3. L'application $v : G/R \to G/\sim$, avec $v([g]_R) = [g]_\sim$ est bien définie : si $[g]_\sim \neq [g']_\sim$, disons $g \prec g'$, alors par la proposition 3.1.8 $g' \nsim 0$ et $\sim g - g' \sim 0 \prec g'$, donc $g - g' \sim g' \nsim 0$; on en conclut $[g]_R \neq [g']_R$.
4. Si $v([g]_R) = [0]_\sim$ alors par définition $g - 0 = g \sim 0$ et donc $gR0$. D'autre part $v([0]_R) = [0]_\sim$.
5. Une conséquence facile de la proposition 3.1.8 et du fait que $[g]_R = [g']_R$ implique $[g]_\sim = [g']_\sim$ (par 3.) est que $v([g]_R - [g']_R) \geq \min\{v([g]_R), v([g']_R)\}$

Nous pouvons ainsi interpréter un groupe valué dans $\mathcal{M}$ en prenant $(G/R, +_R, [0]_R)$ comme le groupe, $(G/\sim, \leq'_{G/\sim}, [0]_\sim)$ comme l'ensemble des valuations, et v comme la valuation.

Nous avons de cette façon une application $\tau : \mathbf{Mod}(\mathcal{T}_\mathbf{0}) \to \mathbf{G^{ab}_{val}}$. Elle vérifie $\tau \circ \sigma = Id$; cependant $\sigma \circ \tau \neq Id$: nous avons $\sigma \circ \tau(\mathcal{M}) = \mathcal{M}$ seulement dans le cas où « $\mathcal{M}$ soit un groupe valué, avec H jouant le rôle de la boule fermée ». Cette affirmation, qui pour l'instant est assez ambiguë, deviendra plus évidente dans la section 3.2.2.

3.1.3 Préordre sur $\Gamma \cup G$

Dans la section précédente nous avons défini la relation $\precsim$. Nous avons alors trois relations binaires : $\precsim$, $\leq$ et H. La tâche principale de cette section est de voir qu'en fait les trois relations peuvent être regardées comme la même (voir la remarque 3.1.13).

Rappelons la définition suivante :

Définition 3.1.9. Une *coupure* (ou *coupure de Dedekind*) sur une chaîne Γ est une partition (A, B) de Γ, tel que tout élément de A est plus petit que tout élément de B. Nous appelons *coupure irrationnelle* (ou *gap*) une coupure (A, B) telle que A n'a pas de plus grand élément, ni B a de plus petit élément. Une *coupure rationelle* sera une coupure non-irrationnelle.

On remarque naturellement que tout $g \in G$ détermine une coupure dans Γ de façon canonique : si $\overrightarrow{\Gamma}_g := \{\gamma \in \Gamma : g \notin H_\gamma\}$ et $\overleftarrow{\Gamma}_g := \{\gamma \in \Gamma : g \in H_\gamma\}$, alors $(\overrightarrow{\Gamma}_g, \overleftarrow{\Gamma}_g)$ est clairement une coupure.

Le lemme suivant nous donne l'équivalence entre les relations définies auparavant et les coupures de Γ déterminées par les éléments de G.

Lemme 3.1.10. *Pour tout $g_1, g_2 \in G$ on a :*
- $g_1 \precsim g_2$ *ssi* $\overrightarrow{\Gamma}_{g_1} \subseteq \overrightarrow{\Gamma}_{g_2}$ *ssi* $\overleftarrow{\Gamma}_{g_1} \supseteq \overleftarrow{\Gamma}_{g_2}$ *;*
- $g_1 \sim g_2$ *ssi* $\overrightarrow{\Gamma}_{g_1} = \overrightarrow{\Gamma}_{g_2}$ *ssi* $\overleftarrow{\Gamma}_{g_1} = \overleftarrow{\Gamma}_{g_2}$ *;*
- $g_1 \prec g_2$ *ssi* $\overrightarrow{\Gamma}_{g_1} \subsetneq \overrightarrow{\Gamma}_{g_2}$ *ssi* $\overleftarrow{\Gamma}_{g_1} \supsetneq \overleftarrow{\Gamma}_{g_2}$.

Démonstration. Elles sont des conséquences immédiates des définitions. □

Définition 3.1.11. Si $g \in G$ et $\gamma \in \Gamma$, nous écrirons $v(g, \gamma)$ pour signifier $\gamma = \min\{t \in \Gamma : g \in H_t\}$, et $v'(g, \gamma)$ pour signifier $\gamma = \max\{t \in \Gamma : g \notin H_t\}$.

Remarque 3.1.12. L'existence de ces maximums et minimums n'est pas nécessaire.

Considérons maintenant $\Lambda = \Gamma \cup G$ (il s'agit simplement de l'ensemble de base d'un modèle quelconque de $\mathcal{T}_0$). Grâce au lemme 3.1.10, on peut facilement munir Λ d'une structure de préordre. Cependant on peut faire cela de deux façons différentes, $\precsim^v$ et $\precsim^{v'}$, que nous noterons :

1. si $\gamma_1, \gamma_2 \in \Gamma$, alors $\gamma_1 \precsim^v \gamma_2$ ssi $\gamma_1 \precsim^{v'} \gamma_2$ ssi $\gamma_1 \leq \gamma_2$;
2. si $g_1, g_2 \in G$, alors $g_1 \precsim^v g_2$ ssi $g_1 \precsim^{v'} g_2$ ssi $g_1 \precsim g_2$;
3. si $\gamma \in \Gamma$ et $g \in G$, alors :
   (a) – $g \precsim^v \gamma$ si $g \in H_\gamma$,
   – $\gamma \precsim^v g$ si $g \notin H_\gamma$ ou si $v(g, \gamma)$;
   (b) – $\gamma \precsim^{v'} g$ si $g \notin H_\gamma$,
   – $g \precsim^{v'} \gamma$ si $g \in H_\gamma$ ou si $v'(g, \gamma)$.

Remarque 3.1.13. La relation $\precsim^v$ est définissable sans quanteurs à partir de $\{H, \precsim, v\}$ et $\precsim^{v'}$ à partir de $\{H, \precsim, v'\}$. D'autre part on peut définir H, $\leq$ et $\precsim$ sans quanteurs avec $\{P_G, P_\Gamma, \precsim^v, v\}$, et aussi avec $\{P_G, P_\Gamma, \precsim^{v'}, v'\}$.

Définition 3.1.14. Nous écrirons $x \sim^v y$ pour dénoter que $x \precsim^v y$ et $y \precsim^v x$; et $x \prec^v y$ pour dénoter que $x \precsim^v y$ et $x \nsim^v y$. Nous écrirons aussi $x \sim^{v'} y$ et $x \prec^{v'} y$ pour les définitions analogues à partir de $\precsim^{v'}$.

Remarque 3.1.15. Les nouvelles relations étendent $\leq$, $<$ et $=$ dans Γ, et $\precsim$, $\prec$ et $\sim$ dans G.

Remarque 3.1.16. Si $g \in G$ et $\gamma \in \Gamma$ alors :

1. – $g \sim^v \gamma$ ssi $v(g, \gamma)$;
   – $g \prec^v \gamma$ ssi $g \in H_\gamma$ et $\neg v(g, \gamma)$;
   – $\gamma \prec^v g$ ssi $g \notin H_\gamma$.
2. – $\gamma \sim^{v'} g$ ssi $v'(g, \gamma)$;
   – $\gamma \prec^{v'} g$ ssi $g \notin H_\gamma$ et $\neg v'(g, \gamma)$;
   – $g \prec^{v'} \gamma$ ssi $g \in H_\gamma$.

Remarque 3.1.17. D'après la remarque 3.1.16, si $g \in G$ et $\gamma \in \Gamma$, alors :

1. – $g \precsim^v \gamma$ ssi $g \prec^{v'} \gamma$,
   – $\gamma \precsim^v g$ ssi $\gamma \prec^{v'} g$ ou $v(g, \gamma)$ ou $v'(g, \gamma)$;
2. – $\gamma \precsim^{v'} g$ ssi $\gamma \prec^v g$,
   – $g \precsim^{v'} \gamma$ ssi $g \prec^v \gamma$ ou $v(g, \gamma)$ ou $v'(g, \gamma)$.

Proposition 3.1.18. *Avec ces définitions on a :*

1. *Les relations $\precsim^v$ et $\precsim^{v'}$ sont des préordres sur Λ ;*
2. *Les relations $\sim^v$ et $\sim^{v'}$ sont des relations d'équivalence sur Λ.*

Démonstration. La réflexivité dans (*1*) est une conséquence de la remarque 3.1.15. Pour montrer la transitivité, il suffit de considérer tous les cas possibles et appliquer les définitions correspondantes. On obtient (*2*) d'après (*1*) et les définitions de $\sim^v$ et $\sim^{v'}$. $\square$

3.2 Étendre $\mathcal{T}_0$

3.2.1 La théorie $\mathcal{T}$

Nous présentons ici quelques axiomes qu'on rajoutera à $\mathcal{T}_0$ pour constituer la théorie $\mathcal{T}$ sur laquelle on travaillera. On considère $\mathcal{B}$ la collection suivante d'axiomes :

(b1) $(\Gamma, \leq, -\infty)$ est un ordre dense sans plus grand élément ;

(b2) $\{0\} = \bigcap_{\gamma \in \Gamma \setminus \{-\infty\}} H_\gamma$;

(b3) $G = \bigcup_{\gamma \in \Gamma} H_\gamma$.

Dorénavant nous travaillerons toujours sur la théorie $\mathcal{T} = \mathcal{T}_0 \cup \mathcal{B}$, dont on étudiera différentes complétions.

Nous avons choisi de fixer cette théorie pour rendre plus abordable l'élimination des quanteurs, mais d'autres extensions de notre théorie originelle $\mathcal{T}_0$ pourraient sans doute être considérées. Par exemple, dans le souci de maintenir les symétries, nous pourrions introduire une nouvelle constante ∞, qui serait le plus grand élément de Γ, et rajouter aussi l'axiome « $G = H_\infty$ » . Nous n'avons pas voulu faire cela, pour garder les analogies avec les groupes valués.

Nous voyons ensuite quelques conséquences de $\mathcal{T}$. Dorénavant, si nous ne disons pas le contraire, $\mathcal{M}$ dénotera un modèle de $\mathcal{T}$, et G et Γ correspondront à $P_G(M)$ et P_Γ respectivement.

Le lemme suivant nous dit que Γ et G sont (presque) denses l'un dans l'autre :

Lemme 3.2.1. *Pour tout $\gamma_1, \gamma_2 \in \Gamma$ et $g_1, g_2 \in G$ on a :*

1. *si $\gamma_1 < \gamma_2$ alors :*
   - *il existe $g \in G$ tel que $\gamma_1 \prec^v g \prec^v \gamma_2$,*
   - *il existe $g' \in G$ tel que $\gamma_1 \prec^{v'} g' \prec^{v'} \gamma_2$;*
2. *si $g_1 \prec g_2$ alors il existe $\gamma \in \Gamma$ tel que :*
   - *$g_1 \precsim^v \gamma \prec^v g_2$,*
   - *$g_1 \prec^{v'} \gamma \precsim^{v'} g_2$.*

Démonstration.

1. Si $\gamma_1 < \gamma_2$, par l'axiome (b1) il existe $\gamma \in \Gamma$ tel que $\gamma_1 < \gamma < \gamma_2$. Nous avons alors, d'après l'axiome (a2) $H_{\gamma_1} \subsetneq H_\gamma \subsetneq H_{\gamma_2}$.
   Soit donc $g \in H_\gamma \setminus H_{\gamma_1}$. Par définition $\gamma_1 \prec^v g \precsim^v \gamma$, et alors par la remarque 3.1.15 nous avons $\gamma_1 \prec^v g \prec^v \gamma_2$.
   Soit d'autre part $g' \in H_{\gamma_2} \setminus H_\gamma$. Par définition $\gamma \precsim^{v'} g' \prec^{v'} \gamma_2$, et encore par la remarque 3.1.15 on conclut $\gamma_1 \prec^{v'} g' \prec^{v'} \gamma_2$.
2. Si $g_1 \prec g_2$, il existe un $\gamma \in \Gamma$ tel que $g_1 \in H_\gamma$ et $g_2 \notin H_\gamma$. Par définition $g_1 \precsim^v \gamma \prec^v g_2$ et $g_1 \prec^{v'} \gamma \precsim^{v'} g_2$.

□

Remarque 3.2.2. Comme le lemme 3.2.1 laisse penser, il se peut que $(G/\sim, \leq_{G/\sim})$ ne soit pas un ordre dense. En effet, il est possible que pour certains $g_1, g_2 \in G$ avec $g_1 \prec g_2$, le seul $\gamma \in \Gamma$ tel que $g_1 \in H_\gamma$ et $g_2 \notin H_\gamma$, soit dans la même $\sim^v$-classe que g_1 et dans la même $\sim^{v'}$-classe que g_2. Dans ce cas nous aurons $v(g_1, \gamma)$ et $v'(g_2, \gamma)$.

Lemme 3.2.3. *Il n'existe pas de $g \in G$ et $\gamma_1, \gamma_2 \in \Gamma$ avec $v'(g, \gamma_1)$ et $v(g, \gamma_2)$.*

Démonstration. Si des tels $g \in G$ et $\gamma_1, \gamma_2 \in \Gamma$ existaient, alors $\gamma_1 \neq \gamma_2$ puisque $g \notin H_{\gamma_1}$ et $g \in H_{\gamma_2}$. Par l'axiome (a2) on a $\gamma_1 < \gamma_2$, et d'après l'axiome (b1) on peut trouver un γ tel que $\gamma_1 < \gamma < \gamma_2$. Si $g \in H_\gamma$ on arriverait à une contradiction avec la minimalité de γ_2, et si $g \notin H_\gamma$ on arriverait à une contradiction avec la maximalité de γ_1. □

3.2.2 Axiomes concernant le préordre : fixer le lien entre H_γ et les boules d'un groupe valué

Dans cette section nous présentons quelques axiomes possibles, mutuellement contradictoires, qui servent à homogénéiser le rapport entre l'ordre de Γ et celui de $G/\sim$. Cela permet de définir une nouvelle relation $\precsim^*$, grâce à laquelle on peut traiter de façon uniforme les relations $\precsim^v$ et $\precsim^{v'}$. Avant cela, nous voyons comment ces axiomes établissent d'une part le lien entre les H_γ et les boules ouvertes et fermées d'un groupe valué, et d'autre part le lien entre les relations $\sim^v$ et $\sim^{v'}$ et la valuation d'un groupe valué.

Les théories $\mathcal{T}_1$, $\mathcal{T}_2$ et $\mathcal{T}_3$

Voici donc les axiomes :

(c1) $\forall x \exists t\ v(x,t) \wedge \forall t \exists x\ v(x,t)$;

(c2) $\forall x \exists t\ v'(x,t) \wedge \forall t \exists x\ v'(x,t)$;

(c3) $\forall x \forall t[(x \neq 0 \vee t \neq -\infty) \Rightarrow \neg v(x,t) \wedge \neg v'(x,t)]$.

Dorénavant, si $i \in \{1,2,3\}$, nous notons par $\mathcal{T}_i$ la théorie $\mathcal{T} \cup \{(ci)\}$.

Remarque 3.2.4. Soit $\mathcal{M}$ un modèle de $\mathcal{T}$.

1. $\mathcal{M} \models \forall t \exists x\ v(x,t)$ ssi $\bigcup_{\substack{\gamma' \in \Gamma \\ \gamma' < \gamma}} H_{\gamma'} \subsetneq H_\gamma$ pour tout $\gamma \in \Gamma$;
2. $\mathcal{M} \models \forall t \exists x\ v'(x,t)$ ssi $H_\gamma \subsetneq \bigcap_{\substack{\gamma' \in \Gamma \\ \gamma' > \gamma}} H_{\gamma'}$ pour tout $\gamma \in \Gamma$.

Le lemme suivant est une sorte de dual du lemme 3.2.3.

Lemme 3.2.5. *Si $\mathcal{M} \models \mathcal{T}_i$, avec $i \in \{1,2,3\}$, alors il n'existe pas de $\gamma \in \Gamma$ et $g_1, g_2 \in \Gamma$ avec $v(g_1,\gamma)$ et $v'(g_2,\gamma)$.*

Démonstration. Supposons que des tels $\gamma \in \Gamma$ et $g_1, g_2 \in G$ existent.

Si $\mathcal{M} \models (c1)$, alors il existe $\gamma_2 \in \Gamma$ avec $v(g_2,\gamma_2)$. Cela, en conjonction avec $v'(g_2,\gamma)$, contredit le lemme 3.2.3.

Si $\mathcal{M} \models (c2)$ nous arrivons à une contradiction de façon analogue : il existerait $\gamma_1 \in \Gamma$ avec $v'(g_1,\gamma_1)$, qui rajouté à nos hypothèses contredirait le lemme 3.2.3.

Le cas où $\mathcal{M}$ satisfait $(c3)$ est trivial. □

Remarque 3.2.6. La preuve du lemme 3.2.5 montre :

– si $\mathcal{M} \models \mathcal{T}_1$ alors $\mathcal{M} \models \forall x \forall t\ \neg v'(x,t)$;
– si $\mathcal{M} \models \mathcal{T}_2$ alors $\mathcal{M} \models \forall x \forall t\ \neg v(x,t)$.

Lemme 3.2.7. *Soit $\mathcal{M}$ un modèle de $\mathcal{T}$.*

1. *$\mathcal{M} \models \forall x \forall t\ \neg v'(x,t)$ ssi $H_\gamma = \bigcap_{\substack{\gamma \in \Gamma \\ \gamma' > \gamma}} H_{\gamma'}$ pour tout $\gamma \in \Gamma$;*
2. *$\mathcal{M} \models \forall x \forall t\ \neg v(x,t)$ ssi $H_\gamma = \bigcup_{\substack{\gamma \in \Gamma \\ \gamma' < \gamma}} H_{\gamma'}$ pour tout $\gamma \in \Gamma$.*

Démonstration.

1. S'il existe $g \in G$ et $\gamma \in \Gamma$ tels que $\mathcal{M} \models v'(g, \gamma)$, alors, d'après la définition et l'axiome (a2), $g \in \bigcap_{\substack{\gamma \in \Gamma \\ \gamma' > \gamma}} H_{\gamma'} \setminus H_\gamma$. Réciproquement, d'après la remarque 3.1.1 il suffit de considérer $g \in \bigcap_{\substack{\gamma \in \Gamma \\ \gamma' > \gamma}} H_{\gamma'} \setminus H_\gamma$; nous voyons ensuite, d'après la définition, que $\mathcal{M} \models v'(g, \gamma)$.
2. Analogue au cas précédent.

$\square$

Proposition 3.2.8. *Soit $\mathcal{M}$ un modèle de $\mathcal{T}$.*

1. *si $\mathcal{M} \models (c1)$ alors $\bigcup_{\substack{\gamma \in \Gamma \\ \gamma' < \gamma}} H_{\gamma'} \subsetneq H_\gamma = \bigcap_{\substack{\gamma \in \Gamma \\ \gamma' > \gamma}} H_{\gamma'}$;*
2. *si $\mathcal{M} \models (c2)$ alors $\bigcup_{\substack{\gamma \in \Gamma \\ \gamma' < \gamma}} H_{\gamma'} = H_\gamma \subsetneq \bigcap_{\substack{\gamma \in \Gamma \\ \gamma' > \gamma}} H_{\gamma'}$;*
3. *$\mathcal{M} \models (c3)$ ssi $\bigcup_{\substack{\gamma \in \Gamma \\ \gamma' < \gamma}} H_{\gamma'} = H_\gamma = \bigcap_{\substack{\gamma \in \Gamma \\ \gamma' > \gamma}} H_{\gamma'}$.*

Démonstration. Nous obtenons 1. et 2. d'après les remarques 3.2.4 et 3.2.6 et le lemme 3.2.5. Le point 3. est une conséquence immédiate du lemme 3.2.7 et du fait que le quanteur existentiel commute avec la conjonction.

$\square$

Les modèles de $\mathcal{T}_1$ sont, dans le sens qu'on voulait anticiper dans la section 3.1.2, « des groupes valués avec H jouant le rôle de la boule fermée ». Plus précisement, tout modèle de $\mathcal{T}_1$ est interprétable dans un groupe valué et viceversa (si l'on considère des groupes valués avec un ordre dense). D'une part H_γ et la boule fermée $\bar{B}_\gamma$ sont chacun l'interprétation de l'autre, et d'autre part la classe modulo $\sim^v$ et la valuation v sont chacun l'interprétation de l'autre. En effet, si $\mathcal{M} \models \mathcal{T}_1$, alors pour tout $g \in G$ il existe $\gamma \in \Gamma$ tel que $g \sim^v \gamma$, ce qui est l'interprétation de « v est une application de G vers Γ ». De même, si $\gamma \in \Gamma$ il existe $g \in G$ tel que $g \sim^v \gamma$, ce qui se traduit par « v est surjective ». On vérifie le reste des propriétés d'après la proposition 3.1.8. Cependant il ne faut pas oublier que l'ordre dans Γ (qui peut être identifie à $G/\sim$) est inversé par rapport à celui d'un groupe valué usuel.

Les modèles de $\mathcal{T}_2$ seront eux aussi bi-interprétables avec des groupes valués, mais cette fois-ci, H_γ s'interprétera comme la boule ouverte (et viceversa). La valuation dans ce cas correspond à la classe modulo $\sim^{v'}$.

Exemple : Soit $\mathcal{G} = \bigoplus_{i \in \mathbb{Q}_{\leq 0}} \mathbb{Q}$ (si $x = (x_i)_{i \in \mathbb{Q}_{\leq 0}} \in \mathcal{G}$, alors l'ensemble $supp(x) = \{i \in \mathbb{Q}_{\leq 0}\}$ est fini). Considérons l'application $v : \mathcal{G} \to \mathbb{Q}_{\leq 0}$ définie par $v((x_i)_{i \in \mathbb{Q}_{\leq 0}}) = \min\{i \in \mathbb{Q}_{\leq 0} : x_i \neq 0\}$. Alors $\mathcal{G}$ avec v dévient un groupe abélien valué, et si l'on considère la l'application σ définie dans la page 15, alors $\sigma(\mathcal{G})$ est un modèle de $\mathcal{T}_1$.

Nous pouvons trouver également des modèles de $\mathcal{T}_2$ en modifiant légèrement σ : au lieu d'interpréter H_γ comme la boule fermée, il suffit de l'interpréter comme la boule ouverte.

Les modèles de $\mathcal{T}_3$, quant à eux, sont un peu plus exotiques, mais assez faciles à construire. Soit $\mathcal{G}$ un abélien groupe valué, avec un certain $(G, +, 0)$ comme groupe, et qui a $(\mathbb{Q} \cup \{\infty\}, \leq)$ comme ensemble de valuation. Considérons la $\mathcal{L}_0$-structure $\mathcal{M}$ qui a le même $(G, +, 0)$ comme groupe, $(\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}) \cup \{\infty\}$ avec l'ordre usuel inversé comme ensemble de valuation, et tel que pour chaque $\gamma \in (\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}) \cup \{\infty\}$ l'ensemble $H_\gamma^{\mathcal{M}}$ est défini, par exemple, comme $\bigcup_{\substack{x \in \mathbb{Q} \cup \{\infty\} \\ x > \gamma}} \bar{B}_x$. On peut voir sans beaucoup d'effort que $\mathcal{M}$ est un modèle de $\mathcal{T}_3$.

Préordre $\precsim^*$, boules ouvertes et boules fermées

D'après les définitions de $\precsim^v$ et $\precsim^{v'}$, nous remarquons que dans les modèles de $\mathcal{T}_3$ les deux relations coïncident. Nous allons présenter dans cette section une nouvelle relation, qui généralise $\precsim^v$ et $\precsim^{v'}$ dans les modèles de $\mathcal{T}_i$. Nous noterons cette relation « $\precsim^*$ » .

Définition 3.2.9.

1. si γ_1 et γ_2 appartiennent à Γ, alors $\gamma_1 \precsim^* \gamma_2$ si $\gamma_1 \leq \gamma_2$;
2. si g_1 et g_2 appartiennent à G, alors $g_1 \precsim^* g_2$ si $g_1 \precsim g_2$;
3. si $\gamma \in \Gamma$ et $g \in G$, alors :
   - $g \precsim^* \gamma$ si $g \in H_\gamma$ ou $v'(g, \gamma)$;
   - $\gamma \precsim^* g$ si $g \notin H_\gamma$ ou $v(g, \gamma)$.

Nous écrirons $x \sim^* y$ pour désigner « $x \precsim^* y$ et $y \precsim^* x$ » , et $x \prec^* y$ pour désigner « $x \precsim^* y$ et $x \nsim^* y$ » .

Remarque 3.2.10. Si $g \in G$ et $\gamma \in \Gamma$ alors :
- $g \sim^* \gamma$ ssi $v(g, \gamma)$ ou $v'(g, \gamma)$;
- $g \prec^* \gamma$ ssi $g \in H_\gamma$ et $\neg v(g, \gamma)$;
- $\gamma \prec^* g$ ssi $g \notin H_\gamma$ et $\neg v'(g, \gamma)$.

Remarque 3.2.11. Dans les modèles de $\mathcal{T}_1$ ou $\mathcal{T}_3$ la relation $\precsim^*$ est équivalente à $\precsim^v$, et dans les modèles de $\mathcal{T}_2$ ou $\mathcal{T}_3$ elle est équivalente à $\precsim^{v'}$. Dans les modèles de $\mathcal{T} \cup \{(c1) \vee (c2) \vee (c3)\}$ la relation $\precsim^*$ est alors un préordre, et $\sim^*$ est une relation d'équivalence.

Nous avons donc défini un préordre dans les modèles de $\mathcal{T} \cup \{(c1) \vee (c2) \vee (c3)\}$, qui nous permet de traiter de façon uniforme les relations $\precsim^v$ et $\precsim^{v'}$. Nous donnons ensuite des propriétés de $\mathcal{T}_1$, $\mathcal{T}_2$ et $\mathcal{T}_3$ exprimées en termes de $\precsim^*$.

Remarque 3.2.12. Par la proposition 3.1.18, on peut considérer $\Lambda/\sim^*$, et définir $\leq^*$ comme l'ordre (total) induit sur $\Lambda/\sim^*$ par $\precsim^*$; on voit aisément que $\leq^*$ étend $\leq$ et $\leq_{G/\sim}$. De même, on peut définir $<^*$ étendant $<$ et $<_{G/\sim}$, et $=^*$ étendant l'égalité sur Γ et l'égalité sur $G/\sim$.

Si $\lambda \in \Lambda$, on note $[\lambda]_{\sim^*}$ sa classe modulo $\sim^*$, ou simplement $[\lambda]$. Puisque $\Lambda/\sim^*$ peut être vu comme une sorte d'extension de Γ, on le notera parfois $\bar{\Gamma}$.

Lemme 3.2.13. *Soit $\mathcal{M}$ un modèle de $\mathcal{T}$.*

1. *Si $\mathcal{M} \models (c1) \vee (c2)$, alors pour tout $g \in G$ il existe $\gamma \in \Gamma$ tel que $g \sim^* \gamma$, et pour tout $\gamma \in \Gamma$ il existe $g \in G$ tel que $g \sim^* \gamma$.*
2. *Si $\mathcal{M} \models (c3)$, alors pour tout $g \in G$ et $\gamma \in \Gamma$ on a $g \nsim^* \gamma$.*

Démonstration. C'est une conséquence immédiate de la remarque 3.2.10.

□

Lemme 3.2.14. *Si $\mathcal{M} \models \mathcal{T}_i$, avec $i \in \{1,2,3\}$, alors pour tout $g_1, g_2 \in G$ tels que $g_1 \prec^* g_2$, il existe $\gamma \in \Gamma$ tel que $g_1 \prec^* \gamma \prec^* g_2$.*

Démonstration. Si $\mathcal{M} \models \mathcal{T}_1$ ou $\mathcal{M} \models \mathcal{T}_2$, alors, d'après le lemme 3.2.13 il existe $\gamma_1, \gamma_2 \in \Gamma$ avec $\gamma_1 \sim^* \gamma_2$ et $\gamma_2 \sim^* g_2$. Puisque $g_1 \prec^* g_2$ nous avons $\gamma_1 \prec^* g_2$, et alors $\gamma_1 < \gamma_2$ d'après les remarques 3.2.11 et 3.1.15. Par l'axiome (b1) il existe $\gamma \in \Gamma$ tel que $\gamma_1 < \gamma < \gamma_2$. On en déduit, encore par les remarques 3.2.11 et 3.1.15, que $\gamma_1 \prec^* \gamma \prec^* \gamma_2$. Puisque $\gamma_1 \sim^* g_1$ et $\gamma_2 \sim^* g_2$, nous avons donc $g_1 \prec^* \gamma \prec^* g_2$.

Supposons $\mathcal{M} \models \mathcal{T}_3$. Puisque $\prec^*$ étend $\prec$, il existe $\gamma \in \Gamma$ tel que $g_1 \in H_\gamma$ et $g_2 \notin H_\gamma$. Par définition $g_1 \precsim^v \gamma \prec^v g_2$ et $g_1 \prec^{v'} \gamma \precsim^{v'} g_2$. D'après la remarque 3.2.11 et le lemme 3.2.13 nous avons $g_1 \prec^* \gamma \prec^* g_2$.

□

Lemme 3.2.15. *Si $\mathcal{M} \models \mathcal{T}_i$, avec $i \in \{1,2,3\}$, alors pour tout $g_1, g_2 \in G$ tels que $g_1 \prec^* g_2$, il existe $g \in G$ tel que $g_1 \prec^* g \prec^* g_2$.*

Démonstration. Puisque $g_1 \prec g_2$, et alors par le lemme 3.2.14 il existe $\gamma \in \Gamma$ tel que $g_1 \in H_\gamma$ et $g_2 \notin H_\gamma$. D'après le lemme 3.2.5, soit $\mathcal{M} \models \neg v(g_1, \gamma)$, soit $\mathcal{M} \models \neg v'(g_2, \gamma)$.

Si $\mathcal{M} \models \neg v(g_1, \gamma)$ alors il existe $\gamma' \in \Gamma$ tel que $g_1 \in H_{\gamma'}$ et $\gamma' < \gamma$. Par le lemme 3.2.1 il existe $g \in G$ tel que $\gamma' \prec^* g \prec^* \gamma$. Par définition $g_1 \precsim^v \gamma' \prec^* g \prec^* \gamma \prec^v g_2$ et $g_1 \prec^{v'} \gamma' \prec^* g \prec^* \gamma \precsim^{v'} g_2$. Alors d'après la remarque 3.2.11 nous avons $g_1 \prec^* g \prec^* g_2$.

Dans le cas où $\mathcal{M} \models \neg v'(g_2, \gamma)$, il existera $\gamma' \in \Gamma$ tel que $g_2 \notin H_{\gamma'}$ et $\gamma < \gamma'$. Nous trouvons, encore par le lemme 3.2.1, un $g \in G$ tel que $\gamma \prec^* g \prec^* \gamma'$. Par définition $g_1 \precsim^v \gamma \prec^* g \prec^* \gamma' \prec^v g_2$ et $g_1 \prec^{v'} \gamma \prec^* g \prec^* \gamma' \precsim^{v'} g_2$. Nous avons donc $g_1 \prec^* g \prec^* g_2$.

□

Proposition 3.2.16. *Soit $\mathcal{M}$ un modèle de $\mathcal{T}_i$, avec $i \in \{1,2,3\}$. Soient $\lambda_1, \lambda_2 \in M$ tels que $\lambda_1 \prec^* \lambda_2$. Alors :*

1. *Il existe $g \in G$ tel que $\lambda_1 \prec^* g \prec^* \lambda_2$;*
2. *Il existe $\gamma \in \Gamma$ tel que $\lambda_1 \prec^* \gamma \prec^* \lambda_2$.*

Démonstration. Dans tous les cas, c'est-à-dire $\mathcal{M} \models \mathcal{T}_i$ avec $i \in \{1,2,3\}$, si λ_1 et λ_2 appartiennent tous les deux à la même sorte, d'après l'axiome (b1) et les lemmes 3.2.1, 3.2.14 et 3.2.15, on conclut qu'il existent $\gamma \in \Gamma$ et $g \in G$ tels que $\lambda_1 \prec^* \gamma \prec^* \lambda_2$ et $\lambda_1 \prec^* g \prec^* \lambda_2$.

Supposons $g \in G$ et $\gamma \in \Gamma$ tels que $g \prec^* \gamma$. D'après la remarque 3.2.10 $g \in H_\gamma$ et il existe $\gamma_0 \in \Gamma$, avec $\gamma_0 < \gamma$ et $g \in H_{\gamma_0}$, donc $g \precsim^v \gamma_0$ et $g \prec^{v'} \gamma_0$.

D'une part, d'après le lemme 3.2.1 il existe $g_0 \in G$ tel que $\gamma_0 \prec^* g_0 \prec^* \gamma$. Nous avons alors $g \precsim^v \gamma_0 \prec^* g_0 \prec^* \gamma$ et $g \prec^{v'} \gamma_0 \prec^* g_0 \prec^* \gamma$. D'après la remarque 3.2.11 nous avons toujours $g \prec^* g_0 \prec^* \gamma$. D'autre part, par l'axiome (b1) il existe $\gamma_1 \in \Gamma$ tel que $\gamma_0 < \gamma_1 < \gamma$. Alors $g \precsim^v \gamma_0 \prec^* \gamma_1 \prec^* \gamma$ et $g \prec^{v'} \gamma_0 \prec^* \gamma_1 \prec^* \gamma$. Nous avons alors $g \prec^* \gamma_1 \prec^* \gamma$.

Supposons maintenant $g \in G$ et $\gamma \in \Gamma$ tels que $\gamma \prec^* g$. D'après la remarque 3.2.10, $g \notin H_\gamma$ et il existe $\gamma_0 \in \Gamma$ avec $\gamma < \gamma_0$ et $g \notin H_{\gamma_0}$, donc $\gamma_0 \precsim^{v'} g$ et $\gamma_0 \prec^v g$.

D'une part, encore d'après le lemme 3.2.1 il existe $g_0 \in G$ tel que $\gamma \prec^* g_0 \prec^* \gamma_0$. Nous avons alors $\gamma \prec^* g_0 \prec^* \gamma_0 \precsim^{v'} g$ et $\gamma \prec^* g_0 \prec^* \gamma_0 \prec^v g$. Nous avons alors $\gamma \prec^* g_0 \prec^* g$. D'autre part, par l'axiome (b1) il existe $\gamma_1 \in \Gamma$ tel que $\gamma < \gamma_1 < \gamma_0$. Alors $\gamma \prec^* \gamma_1 \prec^* \gamma_0 \precsim^{v'} g$ et $\gamma \prec^* \gamma_1 \prec^* \gamma_0 \prec^v g$. Nous avons donc dans tous les cas $\gamma \prec^* \gamma_1 \prec^* g$.

□

Nous allons généraliser la définition de H_γ. Rappelons que $\Lambda = \Gamma \uplus G$ (l'ensemble de base d'un modèle).

Définition 3.2.17. Étant donné $\lambda \in \Lambda$, on appelle *boule fermée de rayon* $[\lambda]$ *et centre* 0 l'ensemble $\bar{H}_\lambda = \{g \in G : g \precsim^* \lambda\}$. On appelle *boule ouverte de rayon* $[\lambda]$ *et centre* 0 l'ensemble $H^\circ_\lambda := \{g \in G : g \prec^* \lambda\}$.

Remarque 3.2.18. Pour tout $\lambda \in \Lambda$, les définitions de $\bar{H}_\lambda$ et H°_λ dépendent seulement de $[\lambda]$: si $\lambda' \sim^* \lambda$, on a bien $\{g \in G : g \precsim^* \lambda'\} = \{g \in G : g \precsim^* \lambda\}$, et aussi $\{g \in G : g \prec^* \lambda'\} = \{g \in G : g \prec^* \lambda\}$.

Proposition 3.2.19. *Soit $\mathcal{M} \models \mathcal{T}_i$, avec $i \in \{1,2,3\}$. Alors pour tout $\lambda \in M$:*

1. $\bigcup_{\substack{\lambda' \in \Lambda \\ \lambda' \prec^* \lambda}} \bar{H}_{\lambda'} = \bigcup_{\substack{\lambda' \in \Lambda \\ \lambda' \prec^* \lambda}} H^\circ_{\lambda'} = \bigcup_{\substack{\gamma \in \Gamma \\ \gamma \prec^* \lambda}} H_\gamma = H^\circ_\lambda$;
2. $\bigcap_{\substack{\lambda' \in \Lambda \\ \lambda \prec^* \lambda'}} \bar{H}_{\lambda'} = \bigcap_{\substack{\lambda' \in \Lambda \\ \lambda \prec^* \lambda'}} H^\circ_{\lambda'} = \bigcap_{\substack{\gamma \in \Gamma \\ \lambda \prec^* \gamma}} H_\gamma = \bar{H}_\lambda$.

Démonstration.

1. D'après les définitions nous avons $\bigcup_{\substack{\lambda' \in \Lambda \\ \lambda' \prec^* \lambda}} H^\circ_{\lambda'} \subseteq \bigcup_{\substack{\lambda' \in \Lambda \\ \lambda' \prec^* \lambda}} \bar{H}_{\lambda'} \subseteq H^\circ_\lambda$. Soit maintenant $g \in H^\circ_\lambda$. Alors $g \prec^* \lambda$, et par la proposition 3.2.16 il existe $\lambda_0 \in M$ tel que $g \prec^* \lambda_0 \prec^* \lambda$. Par définition $g \in H^\circ_{\lambda_0}$ et donc $g \in \bigcup_{\substack{\lambda' \in \Lambda \\ \lambda' \prec^* \lambda}} H^\circ_{\lambda'}$. Cela montre $\bigcup_{\substack{\lambda' \in \Lambda \\ \lambda' \prec^* \lambda}} H^\circ_{\lambda'} = \bigcup_{\substack{\lambda' \in \Lambda \\ \lambda' \prec^* \lambda}} \bar{H}_{\lambda'} = H^\circ_\lambda$.

   Voyons que $\bigcup_{\substack{\gamma \in \Gamma \\ \gamma \prec^* \lambda}} H_\gamma = H^\circ_\lambda$. Si $g \in \bigcup_{\substack{\gamma \in \Gamma \\ \gamma \prec^* \lambda}} H_\gamma$, alors pour un certain $\gamma \in \Gamma$, avec $\gamma \prec^* \lambda$, nous avons $g \in H_\gamma$. Par définition $g \precsim^v \gamma$ et $g \prec^{v'} \gamma$. Puisque $\precsim^*$ coïncide soit avec $\precsim^v$ soit avec $\precsim^{v'}$, on en conclut $g \precsim^* \gamma \prec^* \lambda$, et donc $g \in H^\circ_\lambda$. D'autre part, si $g \in H^\circ_\lambda$, alors $g \prec^* \lambda$ et d'après la proposition 3.2.16 il existe $\gamma \in \Gamma$ tel que $g \prec^* \gamma \prec^* \lambda$. Puisque $g \prec^* \gamma$ nous avons soit $g \prec^v \gamma$, soit $g \prec^{v'} \gamma$; dans les deux cas g appartient à H_γ, et donc $g \in \bigcup_{\substack{\gamma \in \Gamma \\ \gamma \prec^* \lambda}} H_\gamma$.

2. D'après les définitions nous avons $\bar{H}_\lambda \subseteq \bigcap_{\substack{\lambda' \in \Lambda \\ \lambda' \prec^* \lambda}} H^\circ_{\lambda'} \subseteq \bigcap_{\substack{\lambda' \in \Lambda \\ \lambda' \prec^* \lambda}} \bar{H}_{\lambda'}$.

   D'autre part, si $g \notin \bar{H}_\lambda$ alors $\lambda \prec^* g$, et par la proposition 3.2.16 il existe $\lambda_0 \in M$ tel que $\lambda \prec^* \lambda_0 \prec^* g$. Alors $g \notin \bar{H}_{\lambda_0}$ et donc $g \notin \bigcap_{\substack{\lambda' \in \Lambda \\ \lambda' \prec^* \lambda}} \bar{H}_{\lambda'}$. Cela montre $\bar{H}_\lambda = \bigcap_{\substack{\lambda' \in \Lambda \\ \lambda' \prec^* \lambda}} H^\circ_{\lambda'} = \bigcap_{\substack{\lambda' \in \Lambda \\ \lambda' \prec^* \lambda}} \bar{H}_{\lambda'}$.

   Voyons que $\bigcap_{\substack{\gamma \in \Gamma \\ \lambda \prec^* \gamma}} H_\gamma = \bar{H}_\lambda$. Si $g \notin \bar{H}_\lambda$ alors $\lambda \prec^* g$, et par la proposition 3.2.16 il existe $\gamma \in \Gamma$ tel que $\lambda \prec^* \gamma \prec^* g$. Nous avons donc soit $\gamma \prec^v g$, soit $\gamma \prec^{v'} g$. Dans les deux cas $g \notin H_\gamma$ et donc $g \notin \bigcap_{\substack{\gamma\in\Gamma \\ \lambda\prec^*\gamma}} H_\gamma$. D'autre part, si $g \notin \bigcap_{\substack{\gamma\in\Gamma \\ \lambda\prec^*\gamma}} H_\gamma$, alors $g \notin H_\gamma$ pour un certain $\gamma \in \Gamma$, avec $\lambda \prec^* \gamma$. Par définition $\gamma \precsim^{v'} g$ et $\gamma \prec^v g$. Puisque $\precsim^*$ coïncide soit avec $\precsim^v$ soit avec $\precsim^{v'}$, on conclut $\lambda \prec^* \gamma \precsim^* g$, et donc $g \notin \bar{H}_\lambda$.

□

Remarque 3.2.20. D'après les propositions 3.2.8 et 3.2.19 nous avons :

1. Si $\mathcal{M} \vDash \mathcal{T}_1$, alors $H_\gamma = \bar{H}_\gamma$ pour tout $\gamma \in \Gamma$;
2. Si $\mathcal{M} \vDash \mathcal{T}_2$, alors $H_\gamma = H^\circ_\gamma$ pour tout $\gamma \in \Gamma$;
3. Si $\mathcal{M} \vDash \mathcal{T}_3$, alors $H_\gamma = \bar{H}_\gamma = H^\circ_\gamma$ pour tout $\gamma \in \Gamma$.

Proposition 3.2.21. *Dans les modèles de $\mathcal{T}_i$, $i = 1, 2, 3$, pour tout $\lambda \in \Lambda$, on a que $\bar{H}_\lambda$ et H°_λ sont des sous-groupes de G, avec $H^\circ_\lambda \leq \bar{H}_\lambda$. En plus, $H^\circ_\lambda = H_\lambda$ ssi il n'existe pas de $g \in G$ avec $g \sim^* \lambda$.*

Démonstration. Comme la réunion et l'intersection d'une chaîne de sous-groupes est un sous-groupe, d'après la proposition 3.2.19 et l'axiome (a1), $\bar{H}_\lambda$ et H°_λ sont des sous-groupes pour tout $\lambda \in \Lambda$.

D'après les définitions $H^\circ_\lambda \subseteq \bar{H}_\lambda$ pour tout $\lambda \in \Lambda$, et $H^\circ_\lambda = \bar{H}_\lambda$ ssi il n'existe pas de $g \in G$ avec $g \sim^* \lambda$. □

Par la proposition 3.2.21, on peut s'intéresser naturellement au quotient $\bar{H}_\lambda / H^\circ_\lambda$. On se demande alors immédiatement quel peut être l'ordre de cet quotient. Nous traiterons cette question ultérieurement, mais nous pouvons introduire tout de suite le langage avec lequel nous travaillons.

Définition 3.2.22. Pour chaque $n \in \mathbb{N}^*$, nous écrirons $C_n(\lambda)$ si l'ordre de $\bar{H}_\lambda / H^\circ_\lambda$ est égal à n. Nous écrirons aussi $C_0(\lambda)$ si $\lambda = 0$ ou $\lambda = -\infty$. Le type partiel $\bigwedge_{n\in\mathbb{N}} \neg C_n$ sera noté C_∞.

On voit facilement que les C_n, avec $n \in \mathbb{N}$, sont définissables. Nous définissons $\mathcal{L}'_0$ comme le langage $\mathcal{L}_0 \cup \{(C_n)_{n\in\mathbb{N}}\}$.

Remarque 3.2.23. Chaque $\lambda \in \Lambda$ satisfait exactement un C_k, avec $k \in \mathbb{N} \cup \{\infty\}$.

Remarque 3.2.24. D'après la proposition 3.2.21, un $\lambda \in \Lambda$ satisfait C_1 ssi $\lambda \in \Gamma$ et il n'existe pas de $g \in G$ avec $g \sim^* \lambda$.

Remarque 3.2.25. D'après l'axiome (c3) et les remarques 3.2.6 et 3.2.24 on a :

1. Si $\mathcal{M} \vDash \mathcal{T}_3$ alors :
   - pour tout $\gamma \in \Gamma \setminus \{-\infty\}$, $\mathcal{M} \vDash C_1(\gamma)$,
   - pour tout $g \in G \setminus \{0\}$, $\mathcal{M} \vDash C_k(g)$ pour un certain $k \in (\mathbb{N} \setminus \{1\}) \cup \{\infty\}$.
2. Si $\mathcal{M} \vDash \mathcal{T}_1$ ou $\mathcal{M} \vDash \mathcal{T}_2$ alors pour tout $\gamma \in \Gamma$ il existe $g \in G$ tel que $g \sim^* \gamma$, et vice-versa ; ils satisferont donc tous les deux le même C_k, avec $k \in (\mathbb{N} \setminus \{1\}) \cup \{\infty\}$.

Définition 3.2.26. Étant donnés $\lambda \in \Lambda$ et $g \in G$, nous écrirons $[g]_{H_\lambda^\circ}$ ou $g + H_\lambda^\circ$ pour désigner la classe de g modulo H_λ°.

Lemme 3.2.27. *Soit $\mathcal{M} \models \mathcal{T}_i$, avec $i \in \{1,2,3\}$. Pour tout $\lambda \in M$ différent de 0 et $-\infty$, et pour tout $g \in G$, la classe $[g]_{H_\lambda^\circ}$ est infinie. En particulier $\bar{H}_g \setminus H_g^\circ$ est infini pour tout $g \in G \setminus \{0\}$.*

Démonstration. Il suffit de voir que H_λ° est infini. Voyons d'abord qu'il existe $\gamma \in \Gamma \setminus \{-\infty\}$ tel que $\gamma \prec^* \lambda$:
Si $\lambda \in \Gamma$, puisque $\lambda \neq -\infty$ il existe $\gamma \in \Gamma$ tel que $-\infty < \gamma < \lambda$ d'après l'axiome (b1), c'est-à-dire $-\infty \prec^* \gamma \prec^* \lambda$. Si $\lambda \in G$, puisque $\lambda \neq 0$, d'après l'axiome (b2) il existe un $\gamma' \in \Gamma \setminus \{-\infty\}$ tel que $\lambda \notin H_{\gamma'}$; d'après l'axiome (b1) il existe $\gamma \in \Gamma$ tel que $-\infty < \gamma < \gamma'$, et alors $\neg v'(\lambda, \gamma)$, c'est-à-dire $\gamma \prec^* \lambda$.

Par densité de Γ il existe une infinité d'éléments de γ plus petits que Γ. D'après le lemme 3.2.1 nous trouvons alors une infinité d'éléments du groupe plus petits que λ, c'est-à-dire appartenant à H_λ°. □

3.2.3 Axiomes concernant le groupe

Nous présentons dans cette section certains axiomes relatifs aux propriétés de groupes de notre structure, qui nous servent à compléter les théories $\mathcal{T}_i$ de différentes façons. Dans cette section $\mathcal{M}$ est un modèle de l'un des $\mathcal{T}_i$, $i = 1, 2, 3$.

Soient les conditions suivantes :

(d.st) H_γ est divisible et sans torsion, pour tout $\gamma \in \Gamma$;

(ex.p) H_γ est d'exposant p pour tout $\gamma \in \Gamma$, avec p un certain nombre premier.

Remarque 3.2.28. D'après l'axiome (b3), si $\mathcal{M} \models (d.st)$ alors G est divisible et sans torsion, et si $\mathcal{M} \models (ex.p)$ alors G est d'exposant p.

Lemme 3.2.29. *Soit $\mathcal{M} \models (ex.p)$. Pour tout $g \in G$, si $p \nmid n$ alors il existe $g' \in G$ tel que $ng' = g$.*

Démonstration. Puisque $n \not\equiv 0\ [p]$, la classe de n est une unité dans $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$. Il existent alors $m, k \in \mathbb{Z}$ tels que $n \cdot m = k \cdot p + 1$. On en déduit que $nmg = kpg + g$. Puisque G est d'exposant p, nous avons $nmg = g$, et il suffit donc de choisir $g' = mg$. □

Proposition 3.2.30. *Pour tout $g \in G$ et $n \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$ on a :*

1. *Si $\mathcal{M} \models (d.st)$ alors $ng \sim^* g$;*
2. *Si $\mathcal{M} \models (ex.p)$, alors soit $ng = 0$, soit $ng \sim^* g$.*

Démonstration.

1. Si $g = 0$, c'est trivial. Supposons alors $g \neq 0$. Par la proposition 3.1.8 , on a $ng \precsim g$ pour tout $n \in \mathbb{Z}$. Supposons pour arriver à une contradiction que $ng \prec g$ pour un certain $n \in \mathbb{Z}$. Soit alors $\gamma \in \Gamma$ tel que $ng \in H_\gamma$ et $g \notin H_\gamma$. Puisque H_γ est divisible, il existe $g' \in H_\gamma$ tel que $ng' = ng$, c'est-à-dire $n(g - g') = 0$. Puisque G n'a pas de torsion alors $g' = g$. Mais cela est absurde puisque $g' \in H_\gamma$ et $g \notin H_\gamma$.

2. Supposons que $ng \neq 0$; nous avons donc $p \nmid n$. Puisque dans $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$ tout élément différent de 0 est une unité, il existe $k \in \mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$ tel que $kn \equiv 1 \mod p$, c'est-à-dire $k \cdot n = k' \cdot p + 1$ pour un certain $k' \in \mathbb{Z}$. On en déduit alors $k(ng) = (k' \cdot p + 1)g = g$. D'une part, puisque $\bar{H}_{ng}$ est un groupe d'après la proposition 3.2.21 et $ng \in \bar{H}_{ng}$, on a $k(ng) \in \bar{H}_{ng}$; donc $k(ng) \precsim^* ng$. D'autre part, puisque $\bar{H}_g$ est aussi un groupe et $g \in \bar{H}_g$, on a $ng \precsim^* g$. Nous avons alors $k(ng) \precsim^* ng \precsim^* g$. Or $k(ng) = g$, d'où $ng \sim^* g$.

□

Le résultat suivant jouera un rôle important lors de la preuve de l'élimination des quanteurs.

Proposition 3.2.31. *Si $\mathcal{M} \vDash (d.st)$, alors $\mid \bar{H}_g/H_g^\circ \mid = \infty$ pour tout $g \in G$.*

Démonstration. Puisqu'il n'y a pas de torsion, $n_1 g - n_2 g \neq 0$ pour tout $n_1, n_2 \in \mathbb{Z}$ différents. Par la proposition 3.2.30 on a $(n_1 - n_2)g \sim^* g$, et donc $n_1 g - n_2 g \in H_g$ et $n_1 g - n_2 g \notin H_g^\circ$. Cela montre donc que chaque ng est dans une classe modulo H_g° différente. □

Le fait que dans une structure satisfaisant $(ex.p)$ le sous-groupe engendré par un élément soit fini, fait qu'on ne peut pas y montrer la proposition 3.2.31 (au mieux $\mid \bar{H}_g/H_g^\circ \mid \geq p$). Derrière cela se cache le fait que tandis que $\mathcal{T}_i \cup \{(d.st)\}$ est une théorie complète pour chaque $i \in \{1, 2, 3\}$, ceci n'est pas le cas pour $\mathcal{T}_i \cup (ex.p)$. En effet, les trois énoncés suivants, par exemple, sont consistants avec $\mathcal{T}_i \cup (ex.p)$:

- $C_p(g)$ pour tout $g \in G \setminus \{0\}$;
- $\neg C_n(g)$ pour tout $g \in G \setminus \{0\}$, avec $n \in \mathbb{N}$;
- $C_{n_1}(g_1)$ et $C_{n_2}(g_2)$ avec $n_1 \neq n_2$, pour certains $g_1, g_2 \in G$.

Puisque contrôler la valeur des $\mid \bar{H}_g/H_g^\circ \mid$ joue un rôle important dans la preuve de l'élimination des quanteurs, nous allons considérer, plutôt que l'axiome $(ex.p)$, un autre axiome plus fort qui permet d'homogénéiser ces valeurs. Pour cela, nous devons utiliser le langage $\mathcal{L}_0'$.

Nous allons considérer deux schéma d'axiomes : l'un affirme que chaque C_n, avec $n \in \mathbb{N}^*$, est vide ou dense ; l'autre affirme que chaque $\bigvee_{0<i\leq n} C_n$ est vide ou dense, ce qui servira pour contrôler le type partiel C_∞.

Plus précisement, considérons d'abord le schéma en $n \in \mathbb{N}^*$ suivant :

$$\forall x\ (\neg C_n(x)) \vee \forall x \forall y\ [x \prec^* y \to \exists z\ ((x \prec^* z \prec^* y) \wedge C_n(z))] \tag{E1}$$

Nous considérons aussi le schéma en $n \in \mathbb{N}^*$ suivant :

$$\forall x\ \left(\bigvee_{0<i\leq n} C_i(x)\right) \vee \forall x \forall y\ \left[x \prec^* y \to \exists z\ \left((x \prec^* z \prec^* y) \wedge \neg\left(\bigvee_{0<i\leq n} C_i(z)\right)\right)\right] \tag{E2}$$

Nous dénoterons la réunion de ces deux schémas par (E).

$$E1 \cup E2 \tag{E}$$

Remarque 3.2.32. Soit $\mathcal{M}$ un modèle de (E). Considérons les deux cas possibles :

1. Il existe $n_0 \in \mathbb{N}^*$ maximal tel que $C_{n_0}(M) \neq \emptyset$. Alors :
   - soit $C_\infty(M) = \emptyset$,
   - soit $C_\infty(M) \neq \emptyset$ et alors par (E2) $C_\infty(M)$ est dense ;
2. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ il existe $m \in \mathbb{N}^*$ tel que $m > n$ et on a $C_m(M) \neq \emptyset$. Il existent alors $n_0 < n_1 < \cdots < n_k < \ldots$ in $\mathbb{N}^*$ tel que, d'après (E1), chaque $C_{n_k}(M)$ avec est dense. Mais puisque $C_{n_k}(M) \subset \bigcap_{i<n_k}(C_i(M))^c$, on a alors que pour chaque n_k l'ensemble $\bigcap_{i<n_k}(C_i(M))^c$ est dense. Ainsi, d'après la définition de C_∞, si $\mathcal{M}$ est saturé alors C_∞ est dense.

On en conclut donc que si $\mathcal{M}$ est saturé, alors $C_k(M)$ est vide ou dense pour tout $k \in \mathbb{N}^* \cup \{\infty\}$ (et cela dépend seulement de $Th(\mathcal{M})$).

Au lieu de l'axiome $(ex.p)$, nous allons considérer la conjonction de l'axiome $(ex.p)$ avec (E), plus les définitions pour les prédicats C_n dans le langage $\mathcal{L}_0$. Nous notons cela par $(ex.p)'$.

Notons que (E) est bien consistant : par exemple, les modèles de $\mathcal{T}_i$, $i = 1, 2, 3$, tels que $\mid \bar{H}_\lambda / H^\circ_\lambda \mid$ prend la même valeur pour tout $\lambda \in \Lambda \setminus \{-\infty, 0\}$, sont des structures satisfaisant (E).

3.3 La théorie $\mathscr{T}$

La théorie que nous présentons dans cette section, et les résultats démontrés dans les sections 3.4 et 3.5, peuvent être considérés de façon indépendante de ce que nous avons fait jusqu'à maintenant. Bien sûr, les motivations sont évidemment marquées par les résultats précédents : nous donnons une preuve d'élimination de quanteurs, et de la NIP, qui est applicable aux théories $\mathcal{T}_i \cup (d.st)$ et $\mathcal{T}_i \cup (ex.p)'$.

Considérons le langage

$$\mathscr{L} = \{P_G, P_\Gamma, \precsim^*, +, 0, -\infty\}.$$

Les symboles P_G et P_Γ sont encore des prédicats unaires, dont les ensembles des réalisations, que nous notons par G et Γ respectivement, forment une partition. Nous parlons aussi de sorte du groupe et sorte de l'ordre, et écrivons Λ pour dénoter $\Gamma \dot\cup G$. La constante 0 appartient à la sorte du groupe, et constante $-\infty$ à la sorte de l'ordre.

La $\mathscr{L}$-théorie $\mathscr{T}$ affirme que $(G, +, 0)$ est un groupe abélien, et que $(\Lambda, \precsim^*, 0, -\infty)$ est un préordre, avec 0 et $-\infty$ les seuls éléments minimaux. Nous utilisons aussi les symboles $\sim^*$ et $\prec^*$ avec les significations semblables aux sections précédentes.

Nous allons ensuite rajouter comme axiomes de $\mathscr{T}$ certaines propriétés qui sont apparues dans les sections précédentes :

(A1) pour tous $g, g_1, g_2 \in G$:

– $0 \precsim^* g$,
– $g \sim^* -g$,
– si $g_1 \prec^* g_2$ alors $g_1 + g_2 \sim^* g_2$,
– si $g_1 \sim^* g_2$ alors $g_1 + g_2 \precsim^* g_1$;

(A2) pour tous $\lambda_1, \lambda_2 \in \Lambda$ tels que $\lambda_1 \prec^* \lambda_2$:
– il existe $g \in G$ tel que $\lambda_1 \prec^* g \prec^* \lambda_2$,
– il existe $\gamma \in \Gamma$ tel que $\lambda_1 \prec^* \gamma \prec^* \lambda_2$;

(A3) pour tous $\gamma_1, \gamma_2 \in \Gamma$, si $\gamma_1 \sim^* \gamma_2$ alors $\gamma_1 = \gamma_2$.

Ce sont les axiomes qui forment notre théorie $\mathscr{T}$.
On pose $\bar{H}_\lambda = \{g \in G : g \precsim^* \lambda\}$, et $H^\circ_\lambda = \{g \in G : g \prec^* \lambda\}$.

Remarque 3.3.1. D'après l'axiome (A1) nous avons $H^\circ_\lambda \leq \bar{H}_\lambda \leq G$.

Remarque 3.3.2. D'après l'axiome (A2), pour chaque $\lambda \in \Lambda$ différent de 0 et $-\infty$, le sous-groupe H°_λ est infini. En particulier, pour chaque $g \in G \setminus \{0\}$, la classe $g + H^\circ_g$ est infinie.

Étant donné $\lambda \in \Lambda$, nous écrirons $C_n(\lambda)$, avec $n \in \mathbb{N}^*$, pour signifier que l'ordre du groupe quotient $\bar{H}_\lambda / H^\circ_\lambda$ est n. Nous écrirons aussi $C_0(\lambda)$ si $\lambda = 0$ ou $\lambda = -\infty$. Le type partiel $\bigwedge_{n\in\mathbb{N}} \neg C_n$ sera noté par C_∞.

Remarque 3.3.3. Chaque $\lambda \in \Lambda$ satisfait exactement un C_k, avec $k \in (\mathbb{N} \cup \{\infty\})$.

Nous considérons ensuite deux extensions de $\mathscr{T}$ mutuellement contradictoires :

(B1) – pour tout $g \in G$, il existe $\gamma \in \Gamma$ tel que $g \sim^* \gamma$,
– pour tout $\gamma \in \Gamma$, il existe $g \in G$ tel que $g \sim^* \gamma$;

(B2) ils n'existent pas de $g \in G$ et $\gamma \in \Gamma$ tels que $g \sim^* \gamma$.

Par la suite nous dénoterons la théorie $\mathscr{T} \cup (Bi)$, avec $i \in \{1, 2\}$, par $\mathscr{T}_i$.

Remarque 3.3.4.

1. Si $\mathscr{M} \vDash \mathscr{T}_1$ alors pour tout $\gamma \in \Gamma$ il existe $g \in G$ tel que $g \sim^* \gamma$, et vice-versa ; ils satisferont donc tous les deux le même C_k, avec $k \in (\mathbb{N} \setminus \{1\}) \cup \{\infty\}$;
2. Si $\mathscr{M} \vDash \mathscr{T}_2$ alors :
   – pour tout $\gamma \in \Gamma \setminus \{-\infty\}$, $\mathcal{M} \vDash C_1(\gamma)$,
   – pour tout $g \in G \setminus \{0\}$, $\mathcal{M} \vDash C_k(g)$ pour un certain $k \in (\mathbb{N} \setminus \{1\}) \cup \{\infty\}$.

Nous considérons d'abord une première extension de $\mathscr{T}_i$:

(C0) G est divisible et sans torsion ;

(C1) $ng \sim^* g$ pour tout $g \in G$ et $n \in \mathbb{Z}^*$.

Nous noterons par (C) la conjonction de l'axiome (C0) et l'axiome (C1).

Remarque 3.3.5. Dans les modèles de $\mathscr{T}_1 \cup (C)$ tous les éléments différents de $-\infty$ et 0 satisfont le type partiel C_∞. Dans les modèles de $\mathscr{T}_2 \cup (C)$ tous les éléments du groupe différents de 0 satisfont C_∞, et tous les éléments de l'ordre différents de $-\infty$ satisfont C_1.

La deuxième extension de $\mathscr{T}_i$ sera exprimé dans le langage

$$\mathscr{L}' = \{P_G, P_\Gamma, \precsim^*, (C_n)_{n\in\mathbb{N}}, +, 0, -\infty\}.$$

Voici les axiomes que nous rajoutons à $\mathscr{T}_i$:

(D0) G est d'exposant p ;

(D1) Pour tout $g \in G$ et tout $n \in \mathbb{Z}$, soit $ng \sim^* g$ soit $ng = 0$;

(D2) Le schéma (E) mentionné dans la section 3.2.2, qui affirme que C_n est soit vide soit dense, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$; et qui assure aussi que si le modèle considéré est saturé, alors le type partiel C_∞ est aussi soit vide soit dense ;

(D3) Les définitions des symboles C_n dans le langage $\mathscr{L}$.

Nous noterons par (D) la conjonction des ces axiomes.

Remarque 3.3.6. Dans les modèles de $\mathscr{T}_i \cup (D)$, pour tout $g \in G$, si $p \nmid n$ alors il existe $g' \in G$ tel que $ng' = g$.

La remarque suivante établit le lien avec ce que nous avons fait dans les sections précédentes.

Remarque 3.3.7. Les modèles de $\mathcal{T}_1 \cup (d.st)$ ou $\mathcal{T}_2 \cup (d.st)$ deviennent des modèles de $\mathscr{T}_1 \cup (C)$, en interprétant $\precsim^*$ par $\precsim^v$ ou $\precsim^{v'}$ respectivement. Dans les modèles de $\mathcal{T}_3 \cup (d.st)$ les relations $\precsim^v$ et $\precsim^{v'}$ coïncident ; il suffira alors d'interpréter $\precsim^*$ par $\precsim^v$ ou $\precsim^{v'}$ pour obtenir un modèle de $\mathscr{T}_2 \cup (C)$. De même, les modèles de $\mathcal{T}_1 \cup (ex.p)'$ ou $\mathcal{T}_2 \cup (ex.p)'$ peuvent être regardés comme des modèles de $\mathscr{T}_1 \cup (D)$, et les modèles de $\mathcal{T}_3 \cup (ex.p)'$ comme des modèles de $\mathscr{T}_2 \cup (D)$.

3.4 Élimination des quanteurs

3.4.1 Préliminaires

Nous avons jusqu'à maintenant présenté plusieurs extensions de notre théorie $\mathscr{T}$, à savoir $\mathscr{T}_i \cup (C)$ et $\mathscr{T}_i \cup (D)$, pour $i = 1, 2$. Nous voulons éliminer les quanteurs dans chacune de ces extensions (dans $\mathscr{L}$ pour $\mathscr{T}_i \cup (C)$, et dans $\mathscr{L}'$ pour $\mathscr{T}_i \cup (C)$), pour ensuite, grâce au corollaire 2.1.14, montrer la NIP en étudiant une par une les formules atomiques.

La théorie $\mathscr{T}_i \cup (D)$ est consistante, par exemple, avec les deux énoncés suivants :

– $\mid \bar{H}_g / H_g^\circ \mid = p$ pour tout $g \in G \setminus \{0\}$;
– $\mid \bar{H}_g / H_g^\circ \mid \neq p$ pour tout $g \in G \setminus \{0\}$.

Alors $\mathscr{T}_i \cup (D)$ ne pourra pas éliminer les quanteurs dans le sens strict de la définition, c'est-à-dire « pour toute formule $\phi(\bar{x})$, où $\bar{x} = (x_1, \ldots, x_n)$ et $n > 0$, il existe $\psi(\bar{x})$ sans quanteurs tel que $\mathscr{T}_i \cup (D) \vdash \forall \bar{x}(\phi(\bar{x}) \leftrightarrow \psi(\bar{x}))$ » , puisqu'elle est incomplète et la sous-structure engendrée par $\emptyset$ est triviale. Mais il est possible, et en fait nous le montrons, que tout complétion de $\mathscr{T}_i \cup (D)$ élimine les quanteurs. Ainsi, $\mathscr{T}_i \cup (D)$ montre que toute formule est équivalente à une autre sans quanteurs, mais cette dernière dépent de la complétion considérée. En revanche, les théories $\mathscr{T}_i \cup (C)$ sont complètes.

On pourra alors montrer la NIP pour les théories $\mathscr{T}_i \cup (C)$ et $\mathscr{T}_i \cup (D)$ en étudiant les formules sans quanteurs.

Théorème 3.4.1. *Pour $i \in \{1,2\}$ on a :*

A) La théorie $\mathscr{T}_i \cup (C)$ élimine les quanteurs dans le langage

$$\mathscr{L} = \{P_G, P_\Gamma, \precsim^*, +, 0, -\infty\}\ ;$$

B) Toute complétion de la théorie $\mathscr{T}_i \cup (D)$ élimine les quanteurs dans le langage

$$\mathscr{L}' = \{P_G, P_\Gamma, \precsim^*, (C_n)_{n\in\mathbb{N}^*}, +, 0, -\infty\}.$$

Avant d'attaquer la preuve du théorème, il faut introduire un peu de notation.

Définition 3.4.2. Si $\bar{x} = (x_1, \ldots, x_n)$ est un uplet dans un modèle de $\mathscr{T}$, et R et S sont les sous-ensembles de $\{1, \ldots, n\}$ tels que $\{1, \ldots, n\} = R \uplus S$, avec $x_r \in \Gamma$ pour tout $r \in R$ et $x_s \in G$ pour tout $s \in S$, nous écrirons $\langle \bar{x} \rangle$ pour signifier l'ensemble $\{x_r : r \in R\} \cup \{\sum_{s\in S} k_s x_s : k_s \in \mathbb{N}\}$. Nous dénotons éventuellement par $\sum_{1\le i\le n} k_i x_i$ un élément quelconque de $\langle \bar{x} \rangle$, en sachant que si cet élément appartient à Γ, alors tous les k_i seront égaux à 0, sauf un qui sera égal à 1. Si $\bar{a} = (a_1, \ldots, a_n)$ est un autre uplet avec les mêmes R et S associés, on dénotera par $\sum_{1\le i\le n} k_i x_i(\bar{a})$ l'élément $\sum_{1\le i\le n} k_i a_i$.

Soit $\bar{a}$ un uplet de M, où $\mathscr{M}$ est un modèle de $\mathscr{T}_i \cup (C)$. Nous dénoterons par $\operatorname{diag}(\bar{a})$ le *diagramme libre* de $\bar{a}$ dans le langage $\mathscr{L}$; ou autrement dit : l'ensemble de $\mathscr{L}$-formules $\phi(\bar{x})$ sans quanteurs telles que $\mathscr{M} \vDash \phi(\bar{a})$. Nous voudrons aussi distinguer entre types partiels contenus dans $\operatorname{diag}(\bar{a})$:

1. $\operatorname{diag}_=(\bar{a})$ est le sous-ensemble de formules de $\operatorname{diag}(\bar{a})$ dans lesquelles seulement des relations d'égalité, ou sa négation, apparaissent ;
2. $\operatorname{diag}_P(\bar{a})$ est le sous-ensemble de formules de $\operatorname{diag}(\bar{a})$ dans lesquelles seulement des relations P_G ou P_Γ apparaissent ;
3. $\operatorname{diag}_{\precsim^*}(\bar{a})$ est le sous-ensemble de formules de $\operatorname{diag}(\bar{a})$ dans lesquelles seulement des relations $\precsim^*$ apparaissent.

Note: Dans les types partiels que nous venons de définir nous permettons aussi l'apparition de l'opération $+$ et les constantes 0 et $-\infty$.

Nous écrirons $\mathcal{O}_{\bar{a}}$ pour désigner le diagramme libre positif de $\bar{a}$ dans le langage $\{\prec^*, \sim^*$ $\}$, c'est-à-dire les formules atomiques (sans négations) satisfaites par $\bar{a}$ dans ce langage. Puisque « $x \precsim^* y$ » est équivalent à « $x \prec^* y$ ou $x \sim^* y$ » et sa négation est équivalente à « $y \prec^* x$ » , on voit clairement que $\operatorname{diag}_{\precsim^*}(\bar{a})$ et $\mathcal{O}_{\bar{a}}$ sont équivalents. D'autre part, si on note $\mathcal{P}_{\bar{a}}$ le diagramme libre positif de $\bar{a}$ dans le langage $\{P_G, P_\Gamma\}$, puisque chacun est la négation de l'autre, $\operatorname{diag}_P(\bar{a})$ est équivalent à $\mathcal{P}_{\bar{a}}$. Nous avons alors que $\operatorname{diag}(\bar{a})$ est équivalent à $\operatorname{diag}_=(\bar{a}) \cup \mathcal{P}_{\bar{a}} \cup \mathcal{O}_{\bar{a}}$.

Également, si $\bar{a}$ est un uplet de M avec $\mathscr{M}$ un modèle de $\mathscr{T}_i \cup (D)$, nous considérons $\mathrm{diag}(\bar{a})$, le diagramme libre de $\bar{a}$ dans le langage $\mathscr{L}'$. Dans ce cas, si nous dénotons par $\mathrm{diag}_C(\bar{a})$ le sous-ensemble de formules de $\mathrm{diag}(\bar{a})$ dans lesquelles seulement des prédicats C_n , ou ses négations, apparaissent, on a que $\mathrm{diag}(\bar{a})$ est équivalent à $\mathrm{diag}_=(\bar{a}) \cup \mathrm{diag}_P(\bar{a}) \cup \mathrm{diag}_{\precsim^*}(\bar{a}) \cup \mathrm{diag}_C(\bar{a})$.

On ne peut pas réduire $\mathrm{diag}_C(\bar{a})$ à des conditions positives : si un $a_i \in \bar{a}$ satisfait le type partiel C_∞, c'est-à-dire $\neg C_n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$, alors $\mathrm{diag}_C(\bar{a})$ ne sera pas déterminé par des formules positives.

Néanmoins, puisque chaque $\lambda \in \Lambda$ satisfait exactement un C_k, avec $k \in \mathbb{N} \cup \{\infty\}$, nous pouvons considérer la partie de $\mathrm{diag}_C(\bar{a})$, que nous notons par $\mathcal{C}_{\bar{a}}$, composée des formules suivantes :

$$\mathcal{C}_{\bar{a}}(\bar{x}) = \{C_k(t(\bar{x})) : t(\bar{a}) \vDash C_k, \text{ où } t(\bar{a}) \in \langle \bar{a} \rangle \text{ et } k \in \mathbb{N} \cup \{\infty\}\}.$$

Nous avons alors que $\mathrm{diag}_C(\bar{a})$ et $\mathcal{C}_{\bar{a}}$ sont équivalents. Dans ce cas $\mathrm{diag}(\bar{a})$ est équivalent à $\mathrm{diag}_=(\bar{a}) \cup \mathcal{P}_{\bar{a}} \cup \mathcal{O}_{\bar{a}} \cup \mathcal{C}_{\bar{a}}$.

3.4.2 Démonstration du théorème 3.4.1

Soient $\mathscr{M}$ et $\mathscr{N}$ deux modèles saturés de la théorie considérée, et supposons que nous avons deux n-uplets $\bar{a} \in M$ et $\bar{b} \in N$ tels que $\mathrm{diag}(\bar{a}) = \mathrm{diag}(\bar{b})$. Ensuite, on suppose qu'on nous donne un élément $\alpha \in M$, et on veut montrer qu'il existe $\beta \in N$ tel que $\mathrm{diag}(\bar{a}\alpha) = \mathrm{diag}(\bar{b}\beta)$.

Nous dénotons par $\varphi^{\mathcal{P}}(\bar{x})$ la formule qui nous donne la sorte de chaque a_i :

$$\varphi^{\mathcal{P}}(\bar{x}) \equiv \bigwedge_{r \in R} P_\Gamma(x_r) \wedge \bigwedge_{s \in S} P_G(x_s)$$

où $\mathscr{M} \vDash \varphi^{\mathcal{P}}(\bar{a})$, avec $R, S \subseteq \{1, \ldots, n\}$ et $\{1, \ldots, n\} = R \cup S$.

Si $\alpha = \sum_{1 \le i \le n} k_i a_i \in \langle \bar{a} \rangle$, alors il suffit de choisir $\beta = \sum_{1 \le i \le n} k_i b_i$, et nous obtenons $\mathrm{diag}(\bar{a}\alpha) = \mathrm{diag}(\bar{b}\beta)$ d'après $\mathrm{diag}(\bar{a}) = \mathrm{diag}(\bar{b})$. Également, si $\alpha = -\infty$ ou $\alpha = 0$, il suffit de choisir $\beta = -\infty$ ou $\beta = 0$ respectivement. Nous supposons donc $\alpha \notin \langle \bar{a} \rangle$, $\alpha \neq -\infty$ et $\alpha \neq 0$.

Note: Dans l'élimination des quanteurs nous allons considérer des formules du type $\phi(\bar{x}, y)$, et nous cherchons un $\beta \in N$ tel que $\mathscr{N} \vDash \phi(\bar{b}, \beta)$. Nous exprimons $\phi(\bar{x}, y)$ comme conjonctions de formules dans lesquelles y intervient. Cela est justifié du fait que $\exists y\ [\theta_1(\bar{x}, y) \wedge \theta_2(\bar{x})]$ est équivalent à $\exists y \theta_1(\bar{x}, y) \wedge \theta_2(\bar{x})$, pour toutes formules $\theta_1(\bar{x}, y)$ et $\theta(\bar{x})$.

Cas A : divisible sans torsion

Puisque $\mathrm{diag}(\bar{x}y)$ est équivalent à $\mathrm{diag}_=(\bar{x}y) \cup \mathcal{P}_{\bar{x}y} \cup \mathcal{O}_{\bar{x}y}$, il suffit de trouver un $\beta \in N$ tel que $\mathrm{diag}_=(\bar{a}\alpha) \cup \mathcal{P}_{\bar{a}\alpha} \cup \mathcal{O}_{\bar{a}\alpha} = \mathrm{diag}_=(\bar{b}\beta) \cup \mathcal{P}_{\bar{b}\beta} \cup \mathcal{O}_{\bar{b}\beta}$. Nous notons $\Phi_{\bar{a}\alpha}(\bar{x}, y)$ le type partiel $\mathrm{diag}_=(\bar{a}\alpha) \cup \mathcal{P}_{\bar{a}\alpha} \cup \mathcal{O}_{\bar{a}\alpha}$. Remarquons que $\Phi_{\bar{a}\alpha}(\bar{x}, y)$ est clos par conjonctions finies.

Par compacité, et saturation de $\mathscr{N}$, il suffit de montrer que pour chaque formule $\phi(\bar{x}, y)$ dans $\Phi_{\bar{a}\alpha}(\bar{x}, y)$, il existe un β dans N tel que $\mathscr{N} \vDash \phi(\bar{b}, \beta)$. Soit donc $\phi(\bar{x}, y)$ une telle formule. Nous supposons que $\phi(\bar{x}, y)$ implique soit $\varphi^{\mathcal{P}}(\bar{x}) \wedge P_\Gamma(y)$, soit $\varphi^{\mathcal{P}}(\bar{x}) \wedge P_G(y)$. Nous notons $\phi_1^{\mathcal{P}}(\bar{x}, y)$ la formule $\varphi^{\mathcal{P}}(\bar{x}) \wedge P_\Gamma(y)$, et $\phi_2^{\mathcal{P}}(\bar{x}, y)$ la formule $\varphi^{\mathcal{P}}(\bar{x}) \wedge P_G(y)$.

Nous avons donc $\phi(\bar{x}, y) \equiv \phi_i^{\mathcal{P}}(\bar{x}, y) \wedge \phi^{=}(\bar{x}, y) \wedge \phi^{\mathcal{O}}(\bar{x}, y)$, avec $i = 1$ ou $i = 2$, où la formule $\phi^{=}(\bar{x}, y)$ appartient à $\mathrm{diag}_{=}(\bar{a}\alpha)$, et la formule $\phi^{\mathcal{O}}(\bar{x}, y)$ appartient à $\mathcal{O}_{\bar{a}\alpha}$.

Élimination dans Γ Considérons d'abord que $\mathscr{M} \models P_\Gamma(\alpha)$. Dans ce cas, puisque par hypothèse α est différent de tout élément appartenant à $\langle \bar{a} \rangle$, on a les expressions suivantes pour $\phi^{=}(\bar{x}, y)$ et $\phi^{\mathcal{O}}(\bar{x}, y)$:

$$\phi^{=}(\bar{x}, y) \equiv \bigwedge_{i \in I} y \neq w_i \tag{3.1}$$

$$\phi^{\mathcal{O}}(\bar{x}, y) \equiv \bigwedge_{j \in J_1} w_j \prec^* y \wedge \bigwedge_{j \in J_2} y \prec^* w_j \wedge \bigwedge_{j \in J_3} y \sim^* w_j \tag{3.2}$$

Les w_i et w_j sont des éléments de $\langle \bar{x} \rangle$.

Nous rajoutons ensuite à $\phi(\bar{x}, y)$ les formules dans $\Phi_{\bar{a}\alpha}(\bar{x}, y)$ nécessaires pour compléter l'information donné sur chaque w, c'est-à-dire un w apparaît dans $\phi^{=}(\bar{x}, y)$ ssi il apparaît dans $\phi^{\mathcal{O}}(\bar{x}, y)$. Ainsi nous obtenons une formule, équivalente au diagramme libre de α plus tous les $w_i(\bar{a})$, dans le langage sans l'addition. Nous considérons alors que $\phi(\bar{x}, y)$ est déjà *complète* dans ce sens.

Supposons $J_3 = \emptyset$. Si l'on trouve $\beta \in N$ tel que :

$$\mathscr{N} \models \bigwedge_{j \in J_1} w_j(\bar{b}) \prec^* \beta \wedge \bigwedge_{j \in J_2} \beta \prec^* w_j(\bar{b}) \ , \tag{3.3}$$

alors $\mathscr{N} \models \phi(\bar{b}, \beta)$. En effet, puisque $\phi(\bar{x}, y)$ est complète, si l'on trouve $\beta \in N$ tel que (3.3), on aura $\mathscr{N} \models \bigwedge_{i \in I} \beta \neq w_i(\bar{b})$, et donc $\mathscr{N} \models \phi(\bar{b}, \beta)$.

Soit $j_1 \in J_1$ tel que $w_{j_1}(\bar{a}) = \max\{w_j(\bar{a}) : j \in J_1\}$, et $j_2 \in J_2$ tel que $w_{j_2}(\bar{a}) = \min\{w_j(\bar{a}) : j \in J_2\}$. Puisque $\mathscr{M} \models \phi(\bar{a}, \alpha)$, on a $\mathscr{M} \models w_{j_1}(\bar{a}) \prec^* \alpha \prec^* w_{j_2}(\bar{a})$. On en déduit, d'après $\mathrm{diag}(\bar{a}) = \mathrm{diag}(\bar{b})$, que $\mathscr{N} \models w_{j_1}(\bar{b}) \prec^* w_{j_2}(\bar{b})$. Nous pouvons alors appliquer l'axiome (A2) pour conclure qu'il existe un $\beta \in N$ tel que $\mathscr{N} \models w_{j_1}(\bar{b}) \prec^* \beta \prec^* w_{j_2}(\bar{b})$ et $\beta \in \Gamma$. En choisissant ce β nous avons, évidemment, (3.3).

Considérons ensuite le cas $J_3 \neq \emptyset$, disons $\alpha \sim^* w_{j_0}(\bar{a})$. Alors nous affirmons que $\mathscr{M} \models P_G(w_{j_0}(\bar{a}))$: si $\mathscr{M} \models P_\Gamma(w_{j_0}(\bar{a}))$, puisque $\mathscr{M} \models P_\Gamma(\alpha)$, on aurait $\alpha = w_{j_0}(\bar{a})$ par l'axiome (A3), ce qui contredit nos hypothèses de départ.

Si la théorie traitée est $\mathscr{T}_2 \cup (C)$, ce cas est impossible d'après l'axiome (B2). Si la théorie traitée est $\mathscr{T}_1 \cup (C)$, alors par l'axiome (B1) il existe toujours un $\beta \in N$, avec $\mathscr{N} \models P_\Gamma(\beta)$, tel que $\beta \sim^* w_{j_0}(\bar{b})$.

D'autre part, puisque $\alpha \sim^* w_{j_0}(\bar{a})$, on a que $\mathscr{M} \models \phi^{\mathcal{O}}(\bar{a}, w_{j_0}(\bar{a}))$. D'après l'égalité $\mathrm{diag}(\bar{a}) = \mathrm{diag}(\bar{b})$, nous déduisons $\mathscr{N} \models \phi^{\mathcal{O}}(\bar{b}, w_{j_0}(\bar{b}))$, et comme $\beta \sim^* w_{j_0}(\bar{b})$, alors $\mathscr{N} \models \phi^{\mathcal{O}}(\bar{b}, \beta)$. Nous affirmons que nous avons aussi $\mathscr{N} \models \phi^{=}(\bar{b}, \beta)$:

Si ce n'était pas le cas, alors $\beta = w_i(\bar{b})$ pour un certain $i \in I$; dans ce cas, puisque $\mathscr{N} \models P_\Gamma(\beta)$, alors $\mathscr{N} \models P_\Gamma(w_i(\bar{b}))$. En plus, puisque $w_i(\bar{b}) = \beta \sim^* w_{j_0}(\bar{b})$, par $\mathrm{diag}(\bar{a}) = \mathrm{diag}(\bar{b})$, on aurait que $\mathscr{M} \models w_i(\bar{a}) \sim^* w_{j_0}(\bar{a}) \wedge P_\Gamma(w_i(\bar{a}))$. Alors on a

$$\mathscr{M} \models (w_i(\bar{a}) \sim^* w_{j_0}(\bar{a}) \sim^* \alpha) \wedge P_\Gamma(w_i(\bar{a})) \wedge P_\Gamma(\alpha).$$

On en déduit $\alpha = w_i(\bar{a})$ par l'axiome (A3), ce qui contredit nos hypothèses.

Nous avons donc $\mathscr{N} \vDash \phi^{=}(\bar{b}, \beta) \wedge \phi^{\mathcal{O}}(\bar{b}, \beta)$, c'est-à-dire $\mathscr{N} \vDash \phi(\bar{b}, \beta)$.

Élimination dans G Supposons maintenant que $\mathscr{M} \vDash P_G(\alpha)$.

Soit $\phi^{=}(\bar{x}, y) \equiv \phi_1^{=}(\bar{x}, y) \wedge \phi_2^{=}(y)$, avec les expressions explicites suivantes :

$$\phi_1^{=}(\bar{x}, y) \equiv \bigwedge_{i \in I_1} k_i y = w_i \wedge \bigwedge_{i \in I_2} k_i y \neq w_i \tag{3.4}$$

$$\phi_2^{=}(y) \equiv \bigwedge_{i \in I_3} k_i y = k'_i y \wedge \bigwedge_{i \in I_4} k_i y \neq k'_i y \tag{3.5}$$

Soit aussi $\phi^{\mathcal{O}}(\bar{x}, y) \equiv \phi_1^{\mathcal{O}}(\bar{x}, y) \wedge \phi_2^{\mathcal{O}}(\bar{x}, y) \wedge \phi_3^{\mathcal{O}}(y)$, avec les expressions suivantes :

$$\phi_1^{\mathcal{O}}(\bar{x}, y) \equiv \bigwedge_{j \in J_1} w_j \prec^* k_j y + v_j \wedge \bigwedge_{j \in J_2} k_j y + v_j \prec^* w_j \wedge \bigwedge_{j \in J_3} k_j y + v_j \sim^* w_j \tag{3.6}$$

$$\phi_2^{\mathcal{O}}(\bar{x}, y) \equiv \bigwedge_{j \in J_4} k_j y + v_j \prec^* k'_j y + v'_j \wedge \bigwedge_{j \in J_5} k_j y + v_j \sim^* k'_j y + v'_j \tag{3.7}$$

$$\phi_3^{\mathcal{O}}(y) \equiv \bigwedge_{j \in J_6} k_j y \prec^* k'_j y \wedge \bigwedge_{j \in J_7} k_j y \sim^* k'_j y \tag{3.8}$$

Dans les expressions précédentes, les v et w représentent des éléments de $\langle \bar{x} \rangle$; les k et k' sont des nombres entiers différents de 0. Nous notons V l'ensemble de tous les v_j et v'_j, et W l'ensemble de tous les w_i et w_j. Soit $Z = V \cup W$. Un élément quelconque de V, W ou Z sera noté v, w ou z respectivement.

Notons d'abord que la condition (3.5) est triviale : en effet, puisque G n'a pas de torsion $k_i y = k'_i y$ ssi $k_i = k'_i$. N'importe quel élément satisfera alors cette formule. D'après l'axiome (C1), la même chose arrive avec la condition (3.8). Nous pouvons donc supposer que ces deux conditions n'apparaissent pas.

Soit N le produit de tous les k et k', qui figurent comme coefficients de y dans (3.4), (3.6) et (3.7). Puisque G n'a pas de torsion, pour tout $g_1, g_2 \in G$ et $n \in \mathbb{Z}^*$, on a que $g_1 = g_2$ ssi $ng_1 = ng_2$. Nous pouvons donc « multiplier » chaque équation et inéquation dans (3.4) par l'entier correspondant, pour obtenir dans toutes le même coefficient N pour y. De même, d'après l'axiome (C1) nous pouvons « multiplier » chaque terme dans (3.6) et (3.7) par l'entier nécessaire pour obtenir des conditions équivalentes dans lesquelles chaque coefficient de y est égal à N. Nous avons obtenu ainsi une formule $\phi'(\bar{x}, y)$ équivalente à $\phi(\bar{x}, y)$ dans laquelle tous les coefficients de y dans toutes les expressions sont égaux. Puisque G est divisible, $\exists y \phi'(\bar{x}, Ny)$ est équivalent à $\exists y \phi'(\bar{x}, y)$. Nous pouvons alors supposer que ce coefficient est 1. Alors, puisque par hypothèse $\alpha \notin \langle \bar{a} \rangle$, on aura $I_1 = \emptyset$.

Nous faisons ensuite comme dans le cas précédent : nous rajoutons à $\phi(\bar{x}, y)$ les formules de $\Phi(\bar{x}, y)$ nécessaires, pour compléter l'information donnée sur les différents z et $y + v$; c'est-à-dire nous obtenons une formule équivalente au diagramme libre, dans le langage sans l'addition, de tous les $z(\bar{a})$ et $\alpha + v(\bar{a})$ (y compris α). On suppose donc que $\phi(\bar{x}, y)$ est complète dans ce sens.

Notons aussi que pour tout v et z on a $y+v \neq z$ (sinon on aurait $\alpha \in \langle \bar{a} \rangle$). Puisque $\phi(\bar{x}, y)$ est complète, on peut aussi supposer que pour tout v et v' on a $y+v \neq y+v'$ (sinon il y aurait des conditions redondantes). D'autre part, si $v(\bar{a}) \neq 0$, nous pouvons supposer que nous avons toujours la condition $y \sim^* v$ pour tout $v \in V$: si $y \prec^* v$ ou $v \prec^* y$, alors $y+v \sim^* v$ ou $y+v \sim^* y$, et donc nous pourrions exprimer la condition sur $y+v$ seulement en termes de v ou de y.

Soit $V_M \subseteq V$ l'ensemble des v_m tels que la $\sim^*$-classe de $\alpha + v_m(\bar{a})$ est minimale parmi toutes les classes des $\alpha + v(\bar{a})$. Pour trouver le $\beta \in N$ souhaité, nous distinguons deux cas :

1. Il n'existe pas de $z \in Z$ tel que $z(\bar{a}) \sim^* \alpha + v_m(\bar{a})$, avec $v_m \in V_M$;
2. Pour un certain $Z_M \subseteq Z$, avec $Z_M \neq \emptyset$, on a $z_m(\bar{a}) \sim^* \alpha + v_m(\bar{a})$ pour tout $z_m \in Z_M$ et $v_m \in V_M$.

Remarque 3.4.3. Rappelons que la $\sim^*$-classe de α coïncide avec celle de tous les $v(\bar{a})$. Cela implique, par l'axiome (A1), que $\alpha + v(\bar{a}) \precsim^* \alpha \sim^* v(\bar{a})$ pour tout $v \in V$. En particulier, le cas où tous les $\alpha + v(\bar{a})$ sont dans la même classe que α, sera inclus dans 2.

Cas 1. Soit $w_{k_0}(\bar{a}) = \max\{w(\bar{a}) : w(\bar{a}) \prec^* \alpha + v_m(\bar{a}) \text{ et } w \in W\}$; si un tel élément n'existe pas, nous pouvons choisir 0 ou $-\infty$. Soit aussi $z_{k_1} = \min\{z(\bar{a}) : \alpha + v_m(\bar{a}) \prec^* z(\bar{a}) \text{ et } z \in Z\}$. Si un tel élément n'existe pas, on aura en particulier $V = \emptyset$; nous pourrons alors raisonner comme dans le cas où α est dans la sorte Γ, pour trouver le β souhaité.

Notons d'abord que par la remarque 3.4.3 nous avons $z_{k_1}(\bar{a}) \precsim^* v_m(\bar{a})$ pour tout $v_m \in V_M$.

Par hypothèse, nous avons $\alpha + v_m(\bar{a}) \sim^* \alpha + v_{m'}(\bar{a}) \prec^* \alpha + v_k(\bar{a})$, pour tout $v_m, v_{m'} \in V_M$ et $v_k \in V \setminus V_M$; et alors, d'après l'axiome (A1) on a

$$v_m(\bar{a}) - v_{m'}(\bar{a}) \precsim^* \alpha + v_m(\bar{a}) \prec^* \alpha + v_k(\bar{a}) \sim^* v_k(\bar{a}) - v_m(\bar{a}).$$

Nous obtenons donc, pour tous $v_m, v_{m'} \in V_M$ et $v_k \in V \setminus V_M$:

- $w_{k_0}(\bar{a}) \prec^* v_k(\bar{a}) - v_m(\bar{a})$;
- $v_m(\bar{a}) - v_{m'}(\bar{a}) \prec^* z_{k_1}(\bar{a})$;
- $v_m(\bar{a}) - v_{m'}(\bar{a}) \prec^* v_k(\bar{a}) - v_m(\bar{a})$.

Nous avons aussi, bien sûr, $w_{k_0}(\bar{a}) \prec^* z_{k_1}(\bar{a})$.

On peut alors appliquer l'hypothèse $\mathrm{diag}(\bar{a}) = \mathrm{diag}(\bar{b})$, pour déduire que les mêmes conditions sont vraies dans $\mathscr{N}$, si on remplace $\bar{a}$ par $\bar{b}$. D'après l'axiome (A2), il existe donc $g_0 \in N$ dans la sorte du groupe tel que :

$$\begin{gathered} w_{k_0}(\bar{b}) \prec^* g_0 \prec^* z_{k_1}(\bar{b}) \\ v_m(\bar{b}) - v_{m'}(\bar{b}) \prec^* g_0 \prec^* v_k(\bar{b}) - v_m(\bar{b}) \end{gathered} \tag{3.9}$$

Soit maintenant un $v_{m_0} \in V_M$ quelconque. Par la remarque 3.3.2, on peut toujours trouver un $g \in G$, avec $g \sim^* g_0$, et tel que pour tout $v \in V$ et $z \in Z$:

$$g - v_{m_0}(\bar{b}) + v(\bar{b}) \neq z(\bar{b}) \tag{3.10}$$

Nous posons alors $\beta = g - v_{m_0}(\bar{b})$. D'après (3.10) et nos hypothèses, on voit immédiatement que $\mathscr{N} \models \phi^{=}(\bar{b}, \beta)$.

Notons que puisque $z_{k_1}(\bar{a}) \precsim^* v_m(\bar{a})$ pour tout $v_m \in V_M$ et $\operatorname{diag}(\bar{a}) = \operatorname{diag}(\bar{b})$, alors $z_{k_1}(\bar{b}) \precsim^* v_m(\bar{b})$. D'autre part, puisque $g \prec^* z_{k_1}(\bar{b})$, par l'axiome (A1) on a que $\beta = g - v_m(\bar{b}) \sim^* v_m(\bar{b})$, et donc $\beta \sim v(\bar{b})$ pour tout $v \in V$ (rappelons nous qu'on peut supposer que tous les $v \in V$ sont dans la même $\sim^*$-classe). Voyons que $(\bar{b}, \beta)$ satisfait aussi le reste des conditions de $\phi^{\mathcal{O}}(\bar{x}, y)$.

Si $v_m \in V_M$, nous avons $\beta + v_m(\bar{b}) = g - v_{m_0}(\bar{b}) + v_m(\bar{b})$. Puisque $g \sim^* g_0$, d'après l'axiome (A1) et (3.9) on a $\beta + v_m(\bar{b}) \sim^* g$. D'après (3.9) on a alors, pour tout $v_m, v_{m'} \in V_M$, le suivant :

$$\begin{aligned} \beta + v_m(\bar{b}) &\sim^* \beta + v_{m'}(\bar{b}) \\ w_{k_0}(\bar{b}) \prec^* \beta + v_m(\bar{b}) &\prec^* z_{k_1}(\bar{b}) \end{aligned} \tag{3.11}$$

La position alors de tous les $\beta + v_m(\bar{b})$ est celle que nous souhaitons.

Si $v_k \in V \setminus V_M$, alors $\beta + v_k(\bar{b}) = g - v_{m_0}(\bar{b}) + v_k(\bar{b})$, et encore par $g \sim^* g_0$, (3.9) et l'axiome (A1), nous obtenons :

$$\beta + v_k(\bar{b}) \sim^* v_k(\bar{b}) - v_{m_0}(\bar{b}). \tag{3.12}$$

La $\sim^*$-classe de $\beta + v_k(\bar{b})$ dépend alors seulement de $\operatorname{diag}(\bar{b})$. On en déduit donc, d'après $\operatorname{diag}(\bar{a}) = \operatorname{diag}(\bar{b})$, que les conditions qui font seulement intervenir y et des $v_k \in V \setminus V_M$, sont satisfaites.

D'autre part, nous avons aussi, pour tout $v_m \in V_M$ et $v_k \in V \setminus V_M$:

$$\beta + v_m(\bar{b}) \sim^* g \sim^* g_0 \prec^* v_k(\bar{b}) - v_{m_0}(\bar{b}) \sim^* \beta + v_k(\bar{b}). \tag{3.13}$$

On peut donc conclure que les conditions faisant intervenir y, et tous les v confondus, sont aussi satisfaites.

Nous avons alors $\mathscr{N} \models \phi^{\mathcal{O}}(\bar{b}, \beta)$, et donc $\mathscr{N} \models \phi(\bar{b}, \beta)$.

Cas 2. D'après l'axiome (A1) et les définitions de V_M et Z_M, pour tout $v_m, v_{m'} \in V_M$ et $z_m \in Z_M$ nous avons $v_m(\bar{a}) - v_{m'}(\bar{a}) \precsim^* z_m(\bar{a})$, et donc $v_m(\bar{b}) - v_{m'}(\bar{b}) \precsim^* z_m(\bar{b})$, par l'hypothèse $\operatorname{diag}(\bar{a}) = \operatorname{diag}(\bar{b})$. D'après la remarque 3.3.5, on peut trouver $g_0 \in N$ dans la sorte du groupe, avec $g_0 \sim^* z_m(\bar{b})$, et tel que pour tout $v_m, v_{m'} \in V_M$:

$$g_0 + H^{\circ}_{z_m(\bar{b})} \neq (v_m(\bar{b}) - v_{m'}(\bar{b})) + H^{\circ}_{z_m(\bar{b})}. \tag{3.14}$$

Dans le cas où $V \subseteq Z_M$, on peut choisir g_0 satisfaisant en plus, pour tout $v \in V$:

$$g_0 + H^{\circ}_{z_m(\bar{b})} \neq v(\bar{b}) + H^{\circ}_{z_m(\bar{b})}. \tag{3.15}$$

Soit un $v_{m_0} \in V_M$ quelconque. Par la remarque 3.3.2 il existe $g \in N$ dans la sort du groupe, avec $g \sim^* g_0$, satisfaisant la même condition (3.10) que dans le cas précédent, et en plus :

$$g + H^{\circ}_{z_m(\bar{b})} = g_0 + H^{\circ}_{z_m(\bar{b})}. \tag{3.16}$$

Nous posons $\beta := g - v_{m_0}(\bar{b})$. Puisque pour tout $v \in V$ et $z \in Z$ on a $g - v_{m_0}(\bar{b}) + v(\bar{b}) \neq z(\bar{b})$, alors $\mathscr{N} \vDash \phi^{=}(\bar{b}, \beta)$.

Notons d'abord que si $v_{m_0} \notin Z_M$, d'après la minimalité de z_m on a $z_m(\bar{a}) \prec^* v_{m_0}(\bar{a})$, et alors $z_m(\bar{b}) \prec^* v_{m_0}(\bar{b})$ par $\mathrm{diag}(\bar{a}) = \mathrm{diag}(\bar{b})$. Dans ce cas, puisque $g \sim^* z_m(\bar{b})$, on déduit par l'axiome (A1) que $\beta \sim v_{m_0}(\bar{b})$, et donc $\beta \sim v(\bar{b})$ pour tout $v \in V$. Si $v_{m_0} \in Z_M$, alors $V \subseteq Z_M$, et donc d'après (3.15) on obtient aussi $\beta \sim^* z_m(\bar{b}) \sim^* v(\bar{b})$. Voyons ensuite pourquoi $(\bar{b}, \beta)$ satisfait le reste de conditions de $\phi^{\mathcal{O}}(\bar{x}, y)$.

Si $v_m \in V_M$, alors $\beta + v_m(\bar{b}) = g - v_{m_0}(\bar{b}) + v_m(\bar{b})$, et par (3.14) et (3.16) nous avons, pour tout $z_m \in Z_M$:

$$\beta + v_m(\bar{b}) \sim^* g \sim^* z_m(\bar{b}). \tag{3.17}$$

D'autre part, si $v_k \in V \setminus V_M$ et $v_m \in V_M$, on a $v_m(\bar{a}) \prec^* v_k(\bar{a})$ par minimalité de V_M, et par hypothèse $v_m(\bar{a}) \sim^* z_m(\bar{a})$ pour tout $z_m \in Z_M$. Alors, par l'axiome (A1), $z_m(\bar{a}) \prec^* v_k(\bar{a}) - v_m(\bar{a})$. Puisque $\mathrm{diag}(\bar{a}) = \mathrm{diag}(\bar{b})$, nous avons $z_m(\bar{b}) \prec^* v_k(\bar{b}) - v_m(\bar{b})$, et donc $g \prec^* v_k(\bar{b}) - v_m(\bar{b})$. Nous en déduisons alors, encore par l'axiome (A1), que pour tout $v_k \in V \setminus V_M$ et $z_m \in Z_M$ on a :

$$\beta + v_k(\bar{b}) = g - v_{m_0}(\bar{b}) + v_k(\bar{b}) \sim^* v_k(\bar{b}) - v_m(\bar{b}). \tag{3.18}$$

D'après (3.17), (3.18) et $\mathrm{diag}(\bar{a}) = \mathrm{diag}(\bar{b})$, nous déduisons que $\mathscr{N} \vDash \phi^{\mathcal{O}}(\bar{b}, \beta)$, et donc $\mathscr{N} \vDash \phi(\bar{b}, \beta)$.

Cas B : exposant p

Ce cas est très similaire au cas divisible et sans torsion. Il faut néanmoins donner quelques arguments en plus sur certains points, et tenir en compte que les théories $\mathscr{T}_1 \cup (D)$ et $\mathscr{T}_2 \cup (D)$ que nous considérons ne sont pas complètes. Nous essayerons de préserver la même notation que dans le cas précédent.

Maintenant $\mathrm{diag}(\bar{x}y)$ est équivalent à $\mathrm{diag}_{=}(\bar{x}y) \cup \mathcal{P}_{\bar{x}y} \cup \mathcal{O}_{\bar{x}y} \cup \mathcal{C}_{\bar{x},y}$; nous voulons donc trouver un $\beta \in N$ tel que :

$$\mathrm{diag}_{=}(\bar{a}\alpha) \cup \mathcal{P}_{\bar{a}\alpha} \cup \mathcal{O}_{\bar{a}\alpha} \cup \mathcal{C}_{\bar{a}\alpha} = \mathrm{diag}_{=}(\bar{b}\beta) \cup \mathcal{P}_{\bar{b}\beta} \cup \mathcal{O}_{\bar{b}\beta} \cup \mathcal{C}_{\bar{b}\beta}. \tag{3.19}$$

Pour chaque $\phi(\bar{x}, y)$ dans $\mathrm{diag}_{=}(\bar{a}\alpha) \cup \mathcal{P}_{\bar{a}\alpha} \cup \mathcal{O}_{\bar{a}\alpha}$, on considère la partie de $\mathcal{C}_{\bar{a}\alpha}$ qui donne les C_k, avec $k \in \mathbb{N} \cup \{\infty\}$, satisfaits par chacun des éléments de $\langle \bar{x} \rangle$ qui apparaissent dans $\phi(\bar{x}, y)$ (suivant la notation précédente, il suffit de considérer les C_k satisfaits par y, plus les v, w et z) ; on la dénotera par $\theta^{\mathcal{C}}(\bar{x}, y)$.

Remarque. En général $\theta^{\mathcal{C}}(\bar{x}, y)$ sera un type partiel ; mais si C_∞ n'apparaît pas dans $\theta^{\mathcal{C}}(\bar{x}, y)$, alors il s'agira d'une formule.

Nous verrons que pour chaque formule $\phi(\bar{x}, y)$ dans $\mathrm{diag}_{=}(\bar{a}\alpha) \cup \mathcal{P}_{\bar{a}\alpha} \cup \mathcal{O}_{\bar{a}\alpha}$, il existe un β dans N tel que $\mathscr{N} \vDash \phi(\bar{b}, \beta) \wedge \theta^{\mathcal{C}}(\bar{b}, \beta)$. Par saturation de $\mathcal{N}$ et compacité, cela suffit pour montrer (3.19).

Soit donc $\phi(\bar{x}, y)$ une telle formule. Suivant la même notation, nous supposons que $\phi(\bar{x}, y)$ implique soit $\phi_1^{\mathcal{P}}(\bar{x}, y)$, soit $\phi_2^{\mathcal{P}}(\bar{x}, y)$.

Nous avons alors

$$\phi(\bar{x}, y) \equiv \phi_i^{\mathcal{P}}(\bar{x}, y) \wedge \phi^{=}(\bar{x}, y) \wedge \phi^{\mathcal{O}}(\bar{x}, y),$$

avec $i = 1$ ou $i = 2$. Nous distinguons aussi les cas $i = 1$ et $i = 2$ (y dans Γ et y dans G respectivement).

Faisons d'abord une remarque importante (déjà faite dans la section 3.2.3 — voir la remarque 3.2.32 — dans le contexte des théories $\mathcal{T}_i$) :

Remarque 3.4.4. Soit T une complétion de $\mathscr{T}_i(D)$, avec $i \in \{1, 2\}$. Si $\mathscr{M}$ est un modèle saturé de T, alors C_k est dense ou vide pour tout $k \in \mathbb{N}^* \cup \{\infty\}$. En plus, cela dépend seulement de T.

Élimination dans Γ Les expressions de $\phi^{=}(\bar{x}, y)$ et $\phi^{\mathcal{O}}(\bar{x}, y)$ coïncident avec (3.1) et (3.2). Nous considérons l'expression suivante pour le type partiel $\theta^{\mathcal{C}}(\bar{x}, y)$:

$$\theta^{\mathcal{C}}(\bar{x}, y) \equiv C_{n_0}(y) \wedge \bigwedge_{k \in K} C_{n_k}(w_k), \tag{3.20}$$

avec $n_j \in \mathbb{N} \cup \{\infty\}$, où $j = K \cup \{0\}$, et K fini.

Remarquons d'abord que puisque $\mathscr{M} \vDash C_{n_0}(\alpha)$, d'après la remarque 3.4.4 et saturation de $\mathscr{M}$, on a que $C_{n_0}(M)$ est dense dans M. Encore par la remarque 3.4.4, nous sommes dans une complétion T de $\mathscr{T}_i \cup (D)$ telle que dans tout modèle saturé de T l'ensemble des réalisations du type partiel C_{n_0} est dense. En particulier :

$$C_{n_0}(N) \text{ est dense dans } N. \tag{3.21}$$

Nous complétons ensuite $\phi(\bar{x}, y)$, pour obtenir une formule équivalente au diagramme libre de α plus tous les $w(\bar{a})$, dans le langage sans les C_n et sans l'addition. Nous considérons que le type partiel $\theta^{\mathcal{C}}(\bar{x}, y)$ nous donne l'ordre de y et de tous les $w(\bar{x})$ apparaissant dans $\phi(\bar{x}, y)$.

Si la $\sim^*$-classe de α est différente de celle de tous les $w(\bar{a})$ ($J_3 = \emptyset$ avec la notation précédente), il suffit de trouver $\beta \in N$ dans la sorte de l'ordre, tel que $\mathscr{N} \vDash C_{n_0}(\beta)$ et $\mathscr{N} \vDash w_{j_1}(\bar{b}) \prec^* \beta \prec^* w_{j_2}(\bar{b})$, où nous suivons la notation précédente pour w_{j_1} et w_{j_2}.

D'après (3.21) et $\mathscr{N} \vDash w_{j_1}(\bar{b}) \prec^* w_{j_2}(\bar{b})$, nous pouvons trouver un β' tel que

$$\mathscr{N} \vDash (w_{j_1}(\bar{b}) \prec^* \beta \prec^* w_{j_2}(\bar{b})) \wedge C_{n_0}(\beta').$$

Si $\beta' \in \Gamma$ nous avons fini. Supposons alors que $\beta' \in G$.

Si la théorie considérée est $\mathscr{T}_1 \cup (D)$, alors par l'axiome (B1) il existe $\beta \in \Gamma$, avec $\beta \sim^* \beta'$. Ce β satisfait alors les conditions souhaitées.

Si la théorie considérée est $\mathscr{T}_2 \cup (D)$, puisque α est dans la sorte de l'ordre et $\mathscr{M} \vDash C_{n_0}(\alpha)$, d'après la remarque 3.3.4, $n_0 = 1$. Dans ce cas, puisque $\mathscr{N} \vDash C_{n_0}(\beta')$, nous déduissons que $\beta' \in \Gamma$, encore par la remarque 3.3.4. Il suffit alors de prendre $\beta = \beta'$.

Supposons maintenant que $\alpha \sim^* w_{j_0}(\bar{a})$ pour un certain w_{j_0} ($J_3 \neq \emptyset$ avec la notation précédente). Puisque $\mathscr{M} \vDash C_{n_0}(\alpha)$, nous avons aussi $\mathscr{M} \vDash C_{n_0}(w_{j_0}(\bar{a}))$, et d'après $\operatorname{diag}(\bar{a}) = \operatorname{diag}(\bar{b})$ on obtient $\mathscr{N} \vDash C_{n_0}(w_{j_0}(\bar{b}))$.

Nous trouvons un $\beta \in \Gamma$ tel que $\beta \sim^* w_{j_0}(\bar{b})$ de la même façon que nous l'avons fait dans le cas divisible sans torsion, et puisque $\mathscr{N} \vDash C_{n_0}(w_{j_0}(\bar{b}))$, l'élément β trouvé satisfait aussi C_{n_0}.

On en conclut donc que $\mathscr{N} \vDash \phi(\bar{b}, \beta) \wedge \theta^{\mathcal{C}}(\bar{b}, \beta)$.

Élimination dans G Nous présentons ensuite un résultat un peu technique, nécessaire pour l'élimination des quanteurs dans ce cas.

Considérons la formule $\psi_k(g_1, \ldots, g_n, \lambda)$ exprimant que tous les g_i sont dans $\bar{H}_\lambda$ et que $|\{[g_i]_{H_\lambda^\circ} : i \leq n\}| \leq k$, avec $k \in \mathbb{N}$. Notons que cette formule ψ_k peut être exprimée sans quanteurs dans le langage $\mathscr{L}'$.

Lemme 3.4.5. *Soit $z \in \Lambda$ satisfaisant C_{k_0}, et $v_1, \ldots, v_n \in G$ tous dans la même $\sim^*$-classe. Considérons la formule $\psi(\bar{v}, z)$, exprimant qu'il existe un élément y dans la sorte du groupe tel que $\bigwedge_{i=1}^n y \sim^* v_i$ et $\bigwedge_{i=1}^n y + v_i \sim^* z$.*

1. *Si $\bigwedge_{i=1}^n v_i \sim^* z$, alors $\psi(\bar{v}, z)$ ssi $\psi_{k_0-2}(\bar{v}, z)$;*
2. *Si $\bigwedge_{i=1}^n z \prec^* v_i$, alors $\psi(\bar{v}, z)$ ssi $\psi_{k_0-1}(v_{i_0} - v_1, \ldots, v_{i_0} - v_n, z)$ pour chaque $i_0 \leq n$.*

Démonstration.

1. S'il existe un y dans la même $\sim^*$-classe que z et que tous les v_i, tel que $\bigwedge_{i=1}^n y + v_i \sim^* z$, alors $v_i - (-y) \in \bar{H}_z \setminus H_z^\circ$ pour chaque $i \leq n$, c'est-à-dire $[y]_{H_z^\circ} \neq [v_i]_{H_z^\circ}$ pour chaque $i \leq n$. D'autre part, $y \notin H_z^\circ$ et $v_i \notin H_z^\circ$ pour chaque $i \leq n$; nous avons donc $[y]_{H_z^\circ} \neq [0]_{H_z^\circ}$ et $[v_i]_{H_z^\circ} \neq [0]_{H_z^\circ}$ pour chaque $i \leq n$. Puisque z satisfait C_{k_0}, on en déduit que $|\{[v_i]_{H_z^\circ} : i \leq n\}| \leq k_0 - 2$.

   Réciproquement, si nous avons $\psi_{k_0-2}(\bar{v}, z)$, puisque z satisfait C_{k_0}, il existe un $y' \in \bar{H}_z$ avec $[y']_{H_z^\circ} \neq [v_i]_{H_z^\circ}$ et $[y']_{H_z^\circ} \neq [0]_{H_z^\circ}$. Dans ce cas, si $y := -y'$, nous avons $[y]_{H_z^\circ} \neq [0]_{H_z^\circ}$, c'est-à-dire $y \sim^* z$, et $\bigwedge_{i=1}^n y + v_i \sim^* z$.
2. S'il existe un y dans la même $\sim^*$-classe que tous les v_i, tel que $\bigwedge_{i=1}^n y + v_i \sim^* z$, alors $[y + v_i]_{H_z^\circ} \neq [0]_{H_z^\circ}$ pour chaque $i \leq n$, et donc $\psi_{k_0-1}(y + v_1, \ldots, y + v_n, z)$. En plus, par l'axiome (A1) $(v_i - v_j) \in \bar{H}_\lambda$ pour tous $i, j \leq n$.

   D'autre part, pour chaque $i, j \leq n$ nous avons

   $$[y + v_i]_{H_z^\circ} = [y + v_j]_{H_z^\circ} \text{ ssi } v_i - v_j \in H_z^\circ. \tag{3.22}$$

   Mais pour chaque $i_0 \leq n$ on a

   $$v_i - v_j \in H_z^\circ \text{ ssi } [v_{i_0} - v_i]_{H_z^\circ} = [v_{i_0} - v_j]_{H_z^\circ}. \tag{3.23}$$

   On déduit $\psi_{k_0-1}(v_{i_0} - v_1, \ldots, v_{i_0} - v_n, z)$, pour chaque $i_0 \leq n$, de (3.22) et (3.23).

   Réciproquement, supposons $\psi_{k_0-1}(v_i - v_1, \ldots, v_i - v_n, z)$ pour chaque $i \leq n$. Fixons un $i_0 \leq n$. Nous avons que z satisfait C_{k_0} et $|\{[v_{i_0} - v_i]_{H_\lambda^\circ} : i \leq n\}| \leq k - 1$. Mais $[0]_{H_z^\circ} \in \{[v_{i_0} - v_i]_{H_z^\circ} : i \leq n\}$. Nous pouvons donc trouver un $y' \in \bar{H}_z$ tel que $[y']_{H_z^\circ} \neq [v_{i_0} - v_i]_{H_z^\circ}$ pour tout $i \leq n$, et $[y']_{H_z^\circ} \neq [0]_{H_z^\circ}$, c'est-à-dire $y' \sim^* z$. Soit $y := y' - v_{i_0}$. Puisque $y' \sim^* z \prec^* v_{i_0}$, par l'axiome (A1) nous avons $y = y' - v_{i_0} \sim^* v_{i_0}$. En plus, comme $y' \sim^* z$, et $\psi_{k_0-1}(v_i - v_1, \ldots, v_i - v_n, z)$ implique que $v_{i_0} - v_i \in \bar{H}_z$

pour chaque $i \leq n$, nous avons $y+v_i \in \bar{H}_z$ pour chaque $i \leq n$. D'autre part, puisque $[y']_{H_z^\circ} \neq [v_{i_0} - v_i]_{H_z^\circ}$ pour chaque $i \leq n$, nous avons $[y + v_i]_{H_z^\circ} \neq [0]_{H_z^\circ}$, c'est-à-dire $y + v_i \sim^* z$, pour chaque $i \leq n$.

□

Avec la même notation que dans le cas divisible sans torsion, dans ce cas, les expressions de $\phi^=(\bar{x}, y)$ et $\phi^{\mathcal{O}}(\bar{x}, y)$ coïncident avec (3.4), (3.5) et (3.6), (3.7), (3.8) respectivement. Il faut aussi rajouter à cela le type partiel $\theta^{\mathcal{C}}(\bar{x}, y)$. Disons :

$$\theta^{\mathcal{C}}(\bar{x}, y) \equiv \bigwedge_{L \in L_1} C_{n_l}(k_l y + v_l) \wedge \bigwedge_{L \in L_2} C_{n_l}(w_l), \tag{3.24}$$

avec $n_l \in \mathbb{N} \cup \{\infty\}$, où $l \in L_1 \cup L_2$, et $L_1 \cup L_2$ fini.

Nous supposons dans ce cas que tous les coefficients k de y qui apparaissent dans $\phi(\bar{x}, y)$ sont différents de 0 modulo p. Notons aussi que puisque $ky = 0$ ssi $k \mid p$, la satisfaction de $\phi_2^=(y)$ est triviale. De même, d'après l'axiome (D1), $\phi_3^{\mathcal{O}}(y)$ est trivial.

D'autre part, puisque tous les coefficients de y sont différents de 0 modulo p, d'après la remarque 3.3.6 et l'axiome (D1), nous pouvons « multiplier » chaque équation et inéquation dans $\phi_1^=(\bar{x}, y)$ et chaque terme dans $\phi_1^{\mathcal{O}}(\bar{x}, y)$ et $\phi_2^{\mathcal{O}}(\bar{x}, y)$ par l'entier nécessaire, pour obtenir une formule équivalente avec 1 comme coefficient de tous les y. Nous considérons, comme dans les cas précédents, que $\phi(\bar{x}, y)$ est complète dans le sens déjà mentionné. Nous supposons aussi que nous avons la condition $y \sim^* v$ pour tout $v \in V$.

Puisque $\mathscr{M} \vDash \bigwedge_{L \in L_2} C_{n_l}(w_l)(\bar{a})$ et $\mathrm{diag}(\bar{a}) = \mathrm{diag}(\bar{b})$, nous pouvons finalement considérer que $\theta^{\mathcal{C}}(\bar{x}, y)$ est le type partiel suivant :

$$\bigwedge_{v_m \in V_M} C_{n_0}(y + v_m) \wedge \bigwedge_{v_k \in V \setminus V_M} C_{n_k}(y + v_k), \tag{3.25}$$

avec n_0 et les n_k appartenant à $\mathbb{N} \cup \{\infty\}$, et avec V fini bien entendu.

Nous distinguons aussi deux cas :

1. Il n'existe pas de $z \in Z$ tel que $z(\bar{a}) \sim^* \alpha + v_m(\bar{a})$, avec $v_m \in V_M$;
2. Pour un certain $Z_M \subseteq Z$, avec $Z_M \neq \emptyset$, on a $z_m(\bar{a}) \sim^* \alpha + v_m(\bar{a})$ pour tout $z_m \in Z_M$ et $v_m \in V_M$.

Cas 1. Puisque $\mathcal{M} \vDash \bigwedge_{v_m \in V_M} C_{n_0}(y + v_m)$, ou de façon équivalente $\mathcal{M} \vDash C_{n_0}(y + v_m)$ pour un certain $v_m \in V_M$ (rappelons que $y + v_m \sim^* y + v_{m'}$ pour tout $v_m, v_{m'} \in V_M$), d'après la remarque 3.4.4 et saturation de $\mathscr{M}$, on a que $C_{n_0}(M)$ est dense dans M. Encore par la remarque 3.4.4, nous sommes dans une complétion T de $\mathscr{T}_i \cup (D)$ telle que dans tout modèle saturé de T l'ensemble des réalisations du type partiel C_{n_0} est dense. En particulier :

$$C_{n_0}(N) \text{ est dense dans } N. \tag{3.26}$$

Nous affirmons qu'on peut alors trouver un $g_0 \in N$ dans la sorte du groupe, satisfaisant les conditions (3.9), et en plus C_{n_0} :

Puisque $\mathscr{M} \models C_{n_0}(\alpha + v_m(\bar{a}))$, et $\alpha + v_m(\bar{a})$ est bien un élément du groupe (différent de 0), nous avons que $n_0 \neq 0$ et $n_0 \neq 1$. D'autre part, d'après (3.26) nous pouvons trouver $c \in N$ satisfaisant (3.9) et en plus C_{n_0}. Si c appartient à la sorte du groupe, alors on choisit $g_0 = c$. Si c appartient à la sorte de l'ordre, alors par la remarque 3.3.4 $\mathscr{N}$ ne peut pas être un modèle de $\mathscr{T}_2$. Il doit être alors un modèle de $\mathscr{T}_1$. Dans ce cas, il existe par l'axiome (B1) un c' dans la sorte du groupe avec $c' \sim^* c$. Nous choisirons alors $g_0 = c'$.

Nous définissons ensuite g et puis β, de la même façon que nous l'avons fait dans le cas divisible sans torsion. Nous avons alors $\mathscr{N} \models \phi^=(\bar{b}, \beta) \wedge \phi^{\mathcal{O}}(\bar{b}, \beta)$, et en plus, puisque par construction $\mathscr{N} \models \beta + v_m(\bar{b}) \sim^* g_0$ pour tout $v_m \in V_M$, on en déduit $\mathscr{N} \models C_{n_0}(\beta + v_m(\beta))$ pour tout $v_m \in V_M$.

D'autre part nous avons, pour tout $v_k \in V \setminus V_M$:

$$\begin{aligned} \mathscr{N} \models & (\beta + v_k(\bar{b})) \sim^* (v_k(\bar{b}) - v_{m_0}(\bar{b})), \\ \mathscr{M} \models & [(\alpha + v_k(\bar{a})) \sim^* (v_k(\bar{a}) - v_{m_0}(\bar{a}))] \wedge C_{n_0}(\alpha + v_k(\bar{a})). \end{aligned}$$

D'après $\mathrm{diag}(\bar{a}) = \mathrm{diag}(\bar{b})$ nous en déduisons alors :

$$\mathscr{N} \models \bigwedge_{v_k \in V \setminus V_M} C_{n_0}(\beta + v_k(\bar{b})).$$

Cela montre que $\mathscr{N} \models \theta^{\mathcal{C}}(\bar{b}, \beta)$, et donc $\mathscr{N} \models \phi(\bar{b}, \beta) \wedge \theta^{\mathcal{C}}(\bar{b}, \beta)$.

Cas 2. Soit un $z_m \in Z_M$, c'est-à-dire pour tout $v_m \in V_M$ nous avons :

$$z_m(\bar{a}) \sim^* \alpha + v_m(\bar{a}).$$

Disons aussi que $\mathscr{M} \models C_{n_0}(z_m(\bar{a}))$, et rappelons nous que nous pouvons supposer $\alpha \sim^* v(\bar{a})$, pour tout $v \in V$.

Si $n_0 = \infty$, nous pouvons raisonner exactement de la même façon que dans le cas divisible sans torsion pour trouver le β souhaité. On suppose alors $n_0 \in \mathbb{N}^*$.

Nous considérerons deux sous-cas :

1. $\alpha + v_m(\bar{a}) \sim^* z_m \sim^* v_m(\bar{a}) \sim^* \alpha$, pour tout $v_m \in V_M$ et $z_m \in Z_M$;
2. $\alpha + v_m(\bar{a}) \sim^* z_m \prec^* v_m(\bar{a}) \sim^* \alpha$, pour tout $v_m \in V_M$ et $z_m \in Z_M$.

Nous allons traiter d'abord (1). Notons que dans ce cas, puisque $\alpha \sim^* v(\bar{a})$ pour tout $v \in V$, et donc $\alpha + v(\bar{a}) \precsim^* \alpha \sim^* v(\bar{a})$, par définition de V_M nous avons $V_M = V$.

D'après le lemme 3.4.5, les $v(\bar{a})$ avec $z_{m_0}(\bar{a})$ satisfont la formule $\psi_{n_0-2}(\bar{v}, z)$ qui apparaît dans l'énoncé de ce lemme, c'est-à-dire :

$$\mid \{[v(\bar{a})]_{H^\circ_{z_m(\bar{a})}} : v \in V\} \mid \leq n_0 - 2.$$

Puisque cela peut être exprimé sans quanteurs dans le langage $\mathscr{L}'$, et par hypothèse $\mathrm{diag}(\bar{a}) = \mathrm{diag}(\bar{b})$ (en particulier $\mathscr{N} \models C_{n_0}(z_m(\bar{b}))$), nous avons aussi :

$$\mid \{[v(\bar{b})]_{H^\circ_{z_m(\bar{b})}} : v \in V\} \mid \leq n_0 - 2.$$

Nous pouvons alors utiliser encore le lemme 3.4.5, pour trouver un $\beta \in N$ dans la sorte du groupe tel que pour tout $v \in V$ et $z_m \in Z_M$:

$$\begin{aligned} \beta \sim^* v(\bar{b}) \sim^* z_m(\bar{b}) \\ \beta + v(\bar{b}) \sim^* z_m(\bar{b}) \end{aligned} \tag{3.27}$$

D'après la remarque 3.3.2, nous pouvons choisir ce β de façon que $\beta \neq v(\bar{b})$ pour tout $v \in V$, et $\beta \neq z_m(\bar{b})$ pour tout $z_m \in Z_M$; donc $\beta \neq z(\bar{b})$ pour tout $z \in Z$. Cela implique $\mathscr{N} \vDash \phi^{=}(\bar{b}, \beta)$.

D'après (3.27) et $\mathrm{diag}(\bar{a}) = \mathrm{diag}(\bar{b})$, nous avons aussi $\mathscr{N} \vDash \phi^{\mathcal{O}}(\bar{b}, \beta)$ et $\mathscr{N} \vDash \theta^{\mathcal{C}}(\bar{b}, \beta)$. On conclut donc $\mathscr{N} \vDash \phi(\bar{b}, \beta) \wedge \theta^{\mathcal{C}}(\bar{b}, \beta)$.

Traitons ensuite le sous-cas (2). Si $v_{m_0} \in V_M$ et $z_m \in Z_M$, d'après le lemme 3.4.5 nous avons :

$$| \{[v_{m_0}(\bar{a}) - v_m(\bar{a})]_{H^\circ_{z_m(\bar{a})}} : v_m \in V_M\} | \leq n_0 - 1.$$

Cela encore peut être exprimé sans quanteurs dans le langage $\mathscr{L}'$. Puisque $\mathrm{diag}(\bar{a}) = \mathrm{diag}(\bar{b})$, nous avons aussi :

$$| \{[v_{m_0}(\bar{b}) - v_m(\bar{b})]_{H^\circ_{z_m(\bar{b})}} : v_m \in V_M\} | \leq n_0 - 1.$$

Nous pouvons encore appliquer le lemme 3.4.5 pour trouver un $\beta \in N$ dans la sorte du groupe tel que pour tout $v_m \in V_M$ et $z_m \in Z_M$:

$$\begin{aligned} \beta \sim^* v_m(\bar{b}) \\ \beta + v_m(\bar{b}) \sim^* z_m(\bar{b}) \end{aligned} \tag{3.28}$$

D'après la remarque 3.3.2, on peut supposer que $\beta \neq z(\bar{b})$ pour tout $z \in Z$, et donc $\mathscr{N} \vDash \phi^{=}(\bar{b}, \beta)$.

D'autre part, par définition de V_M, pour tout $z_m \in Z_M$, $v_m \in V_M$ et $v_k \in V \setminus V_M$ nous avons :

$$z_m(\bar{a}) \sim^* \alpha + v_m(\bar{a}) \prec^* \alpha + v_k(\bar{a}).$$

D'après l'axiome (A1) on obtient $\mathscr{M} \vDash z_m(\bar{a}) \prec^* v_k(\bar{a}) - v_m(\bar{a})$. Ainsi, par $\mathrm{diag}(\bar{a}) = \mathrm{diag}(\bar{b})$, $\mathscr{N} \vDash z_m(\bar{b}) \prec^* v_k(\bar{b}) - v_m(\bar{b})$ pour tout $z_m \in Z_M$, $v_m \in V_M$. Nous voyons ensuite la position de $\beta + v_k(\bar{b})$.

Puisque $\beta + v_m(\bar{b}) \sim^* z_m(\bar{b}) \prec^* v_k(\bar{b}) - v_m(\bar{b})$, on en déduit, d'après l'axiome (A1), que pour tout $v_m \in V_M$ et $v_k \in V \setminus V_M$ on a :

$$\beta + v_k(\bar{b}) \sim^* v_k(\bar{b}) - v_m(\bar{b}) \tag{3.29}$$

D'après (3.28), (3.29) et $\mathrm{diag}(\bar{a}) = \mathrm{diag}(\bar{b})$, on conclut d'une part $\mathscr{N} \vDash \phi^{\mathcal{O}}(\bar{b}, \beta)$, et d'autre part $\mathscr{N} \vDash \theta^{\mathcal{C}}(\bar{b}, \beta)$.

Nous avons donc finalement $\mathscr{N} \vDash \phi(\bar{b}, \beta) \wedge \theta^{\mathcal{C}}(\bar{b}, \beta)$.

□

Cela termine la preuve de l'élimination des quanteurs. Même si ce n'est pas nécessaire pour montrer la NIP dans les extensions $\mathcal{T}_i \cup (d.st)$ et $\mathcal{T}_i \cup (ex.p)'$ de $\mathcal{T}$, nous pouvons appliquer immédiatement l'élimination des quanteurs à ces théories.

3.4.3 Application aux extensions de $\mathcal{T}$

Soient $(\mathcal{T}_i \cup (d.st))^v$ et $(\mathcal{T}_i \cup (ex.p)')^v$ les théories $\mathcal{T}_i \cup (d.st)$ et $\mathcal{T}_i \cup (ex.p)'$ exprimées en termes de $\precsim^v$. De même, dénotons par $(\mathcal{T}_i \cup (d.st))^{v'}$ et $(\mathcal{T}_i \cup (ex.p)')^{v'}$ ces théories exprimées en termes de $\precsim^{v'}$. On a le résultat suivant :

Corollaire 3.4.6.

1. *(a) La théorie $(\mathcal{T}_1 \cup (d.st))^v$ élimine les quanteurs dans le langage $\{P_G, P_\Gamma, \precsim^v, +, 0, -\infty\}$,*
   (b) La théorie $(\mathcal{T}_2 \cup (d.st))^{v'}$ élimine les quanteurs dans le langage $\{P_G, P_\Gamma, \precsim^{v'}, +, 0, -\infty\}$,
   (c) Les théories $(\mathcal{T}_3 \cup (d.st))^v$ et $(\mathcal{T}_3 \cup (d.st))^{v'}$ éliminent les quanteurs dans les langages $\{P_G, P_\Gamma, \precsim^v, +, 0, -\infty\}$ et $\{P_G, P_\Gamma, \precsim^{v'}, +, 0, -\infty\}$;
2. *(a) Toute complétion de la théorie $(\mathcal{T}_1 \cup (ex.p)')^v$ élimine les quanteurs dans le langage $\{P_G, P_\Gamma, \precsim^v, (C_n)_{n\in\mathbb{N}^*}, +, 0, -\infty\}$,*
   (b) Toute complétion de la théorie $(\mathcal{T}_2 \cup (ex.p)')^{v'}$ élimine les quanteurs dans le langage $\{P_G, P_\Gamma, \precsim^{v'}, (C_n)_{n\in\mathbb{N}^*}, +, 0, -\infty\}$,
   (c) Toute complétion des théories $(\mathcal{T}_3 \cup (ex.p)')^v$ ou $(\mathcal{T}_3 \cup (d.st))^{v'}$ éliminent les quanteurs dans les langages $\{P_G, P_\Gamma, \precsim^v, (C_n)_{n\in\mathbb{N}^*}, +, 0, -\infty\}$ ou $\{P_G, P_\Gamma, \precsim^{v'}, (C_n)_{n\in\mathbb{N}^*}, +, 0, -\infty\}$.

Démonstration. C'est immédiat d'après la remarque 3.3.7 et le théorème 3.4.1. □

Si l'on considère les relations $\precsim$, v et v', et les théories $(\mathcal{T}_i \cup (d.st))^+$ et $(\mathcal{T}_i \cup (ex.p)')^+$ désignant $\mathcal{T}_i \cup (d.st)$ et $\mathcal{T}_i \cup (ex.p)'$ plus les définitions de ces relations dans le langage $\mathcal{L}_0 = \{P_G, P_\Gamma, H, +, \leq, 0, -\infty\}$, on obtient aussi :

Corollaire 3.4.7.

1. *(a) La théorie $(\mathcal{T}_1 \cup (d.st))^+$ élimine les quanteurs dans le langage $\{P_G, P_\Gamma, H, \leq, \precsim, v, +, 0, -\infty\}$,*
   (b) La théorie $(\mathcal{T}_2 \cup (d.st))^+$ élimine les quanteurs dans le langage $\{P_G, P_\Gamma, H, \leq, \precsim, v', +, 0, -\infty\}$,
   (c) La théories $(\mathcal{T}_3 \cup (d.st))^+$ élimine les quanteurs dans le langage $\{P_G, P_\Gamma, H, \leq, \precsim, +, 0, -\infty\}$;
2. *(a) Toute completion de la théorie $(\mathcal{T}_1 \cup (ex.p)')^+$ élimine les quanteurs dans le langage $\{P_G, P_\Gamma, H, \precsim, v, (C_n)_{n\in\mathbb{N}^*}, +, 0, -\infty\}$,*
   (b) Toute completion de la théorie $(\mathcal{T}_2 \cup (ex.p)')^+$ élimine les quanteurs dans le langage $\{P_G, P_\Gamma, H, \precsim, v', (C_n)_{n\in\mathbb{N}^*}, +, 0, -\infty\}$,
   (c) Toute completion de la théorie $(\mathcal{T}_3 \cup (ex.p)')^+$ élimine les quanteurs dans les langage $\{P_G, P_\Gamma, H, \precsim, (C_n)_{n\in\mathbb{N}^*}, +, 0, -\infty\}$.

Démonstration. D'après la remarque 3.1.13 et le corollaire 3.4.6. Dans le cas de $\mathcal{T}_3$ nous n'avons pas besoin de v ni v' puisque ces relations ne sont jamais satisfaites.

□

3.5 NIP

D'après le théorème 3.4.1 et le corollaire 2.1.14, pour montrer que les théories $\mathscr{T}_i \cup (C)$ et $\mathscr{T}_i \cup (D)$, avec $i = 1, 2$, sont NIP, il suffit de prouver que les formules atomiques dans les langages $\mathscr{L}$ et $\mathscr{L}'$ sont NIP (modulo la théorie considérée). Nous montrerons en fait qu'elles sont NIP modulo $\mathscr{T}$.

Le cas des relations P_G, P_Γ et $=$ trivial. Nous montrons la NIP pour les relations $\precsim^*$ et C_n. Par le fait 2.1.8, nous pouvons restreindre notre attention à des formules du type $\phi(x, \bar{y})$.

Note: Dans cette section nous utilisons très souvent l'axiome (A1) sans le mentionner de façon explicite.

Considérons la relation $\prec^*$, avec la définition en termes de $\precsim^*$ que nous avons déjà donnée.

Lemme 3.5.1. *La formule $mx - y \prec^* m'x - y'$ est NIP.*

Démonstration. Supposons qu'elle a la propriété d'indépendance, pour les suites $(a_i)_{i\in\omega}$ et $(\bar{b}_I)_{I\subseteq\omega}$, où $\bar{b}_I = (b_I, b'_I)$.

Nous colorions $\omega \times \omega$ avec deux couleurs, rouge et vert, de la façon suivante :

- (i, j) est rouge si $m'(a_i - a_j) \precsim^* m(a_i - a_j)$
- (i, j) est vert si $m(a_i - a_j) \prec^* m'(a_i - a_j)$

D'après le théorème de Ramsey, on peut trouver une suite infinie $I_0 \subseteq \omega$ qui soit monochrome. Nous avons donc deux cas :

(R) I_0 est rouge
(V) I_0 est vert

Supposons d'abord que nous avons trouvé I_0 rouge. Nous affirmons que pour tout $i, j \in I_0$ et $I \subseteq I_0$ tels que $i \in I$ et $j \notin I$, on a :

$$ma_i - b_I \prec^* ma_j - b_I. \tag{3.30}$$

Supposons pour arriver à une contradiction que $ma_j - b_I \precsim^* ma_i - b_I$. Alors, par l'axiome (A1) :

$$ma_i - ma_j = (ma_i - b_I) - (ma_j - b_I) \precsim^* ma_i - b_I \tag{3.31}$$

D'autre part, d'après la propriété d'indépendance nous avons :

$$ma_i - b_I \prec^* m'a_i - b'_I \tag{3.32}$$
$$m'a_j - b'_I \precsim^* ma_j - b_I \tag{3.33}$$

D'après (3.31) et (3.32) nous déduisons :

$$m(a_i - a_j) \prec^* m'a_i - b'_I. \tag{3.34}$$

Puisque par hypothèse $ma_j - b_I \precsim^* ma_i - b_I$, d'après (3.32) et (3.33) on obtient aussi :

$$m'a_j - b'_I \prec^* m'a_i - b'_I.$$

Alors $m'a_i - m'a_j = (m'a_i - b'_I) - (m'a_j - b'_I) \sim^* m'a_i - b'_I$. D'après cela, plus (3.34), nous déduisons $m(a_i - a_j) \prec^* m'(a_i - a_j)$. Cela contredit (R).

Soient $i, j \in I_0$ et $I, J \subseteq I_0$ tels que $i \in I \setminus J$, et $j \in J \setminus I$. D'après (3.30) $ma_i - ma_j = (ma_i - b_I) - (ma_j - b_I) \sim^* ma_j - b_I$ et aussi $ma_i - ma_j = (ma_i - b_J) - (ma_j - b_J) \sim^* ma_i - b_J$. Cela montre donc :

$$ma_j - b_I \sim^* ma_i - b_J. \tag{3.35}$$

D'après (3.30) on obtient, par exemple en supposant $0, 1, 2 \in I_0$:

1. $ma_0 - b_{\{0,2\}} \prec^* ma_1 - b_{\{0,2\}}$;
2. $ma_0 - b_{\{0,1\}} \prec^* ma_2 - b_{\{0,1\}}$;
3. $ma_1 - b_{\{0,1\}} \prec^* ma_2 - b_{\{0,1\}}$.

On en déduit alors :

$$ma_0 - ma_1 = (ma_0 - b_{\{0,2\}}) - (ma_1 - b_{\{0,2\}}) \sim^* ma_1 - b_{\{0,2\}} \tag{3.36}$$
$$ma_0 - ma_1 = (ma_0 - b_{\{0,1\}}) - (ma_1 - b_{\{0,1\}}) \prec^* ma_2 - b_{\{0,1\}} \tag{3.37}$$

Mais cela est en contradiction avec $ma_1 - b_{\{0,2\}} \sim^* ma_2 - b_{\{0,1\}}$, qui est une conséquence de (3.35) .

Considérons maintenant que nous avons trouvé I_0 vert. On affirme que pour tout $i, j \in I_0$ et $I \subseteq I$ tels que $i \in I$ et $j \notin I$, on a :

$$m'a_j - b'_I \prec^* m'a_i - b'_I. \tag{3.38}$$

Supposons pour arriver à une contradiction que $m'a_i - b'_I \precsim^* m'a_j - b'_I$. Nous avons donc :

$$m'a_i - m'a_j = (m'a_i - b'_I) - (m'a_j - b'_I) \precsim^* m'a_j - b'_I. \tag{3.39}$$

D'autre part, d'après la propriété d'indépendance :

$$ma_i - b_I \prec^* m'a_i - b'_I \tag{3.40}$$
$$m'a_j - b'_I \precsim^* ma_j - b_I \tag{3.41}$$

D'après (3.39) et (3.41) :

$$m'(a_i - a_j) \precsim^* ma_j - b_I. \tag{3.42}$$

Puisque par hypothèse $m'a_i - b'_I \precsim^* m'a_j - b'_I$, d'après (3.40) et (3.41) on obtient :

$$ma_i - b_I \prec^* ma_j - b_I. \tag{3.43}$$

Alors $ma_i - ma_j = (ma_i - b_I) - (ma_j - b_I) \sim^* ma_j - b_I$. D'après cela et (3.42), on conclut $m'(a_i - a_j) \precsim^* m(a_i - a_j)$. Mais cela contredit (V).

Soient $i, j \in I_0$ et $I, J \subseteq I_0$ tels que $i \in I \setminus J$, et $j \in J \setminus I$. D'après (3.38) $m'a_i - m'a_j = (m'a_i - b'_I) - (m'a_j - b'_I) \sim^* m'a_i - b'_I$ et aussi $m'a_i - m'a_j = (m'a_i - b'_J) - (m'a_j - b'_J) \sim^* m'a_j - b'_J$. Cela montre donc :

$$m'a_i - b'_I \sim^* m'a_j - b'_J. \tag{3.44}$$

D'après (3.38) on obtient, par exemple en supposant $0, 1, 2 \in I_0$

1. $m'a_0 - b'_{\{1\}} \prec^* m'a_1 - b'_{\{1\}}$
2. $m'a_0 - b'_{\{2\}} \prec^* m'a_2 - b'_{\{2\}}$
3. $m'a_1 - b'_{\{2\}} \prec^* m'a_2 - b'_{\{2\}}$

On en déduit le suivant :

$$m'a_0 - m'a_1 = (m'a_0 - b'_{\{1\}}) - (m'a_1 - b'_{\{1\}}) \sim^* m'a_1 - b'_{\{1\}} \tag{3.45}$$
$$m'a_0 - m'a_1 = (m'a_0 - b'_{\{2\}}) - (m'a_1 - b'_{\{2\}}) \prec^* m'a_2 - b'_{\{2\}} \tag{3.46}$$

Cela est en contradiction avec $m'a_1 - b'_{\{1\}} \sim^* m'a_2 - b'_{\{2\}}$, qui est une conséquence de (3.44).

□

Proposition 3.5.2. *La formule $z_1 \precsim^* z_2$, avec $\bar{y} = (y_1, \ldots, y_n)$ et $z_1, z_2 \in \langle x, \bar{y} \rangle$ est NIP.*

Démonstration. Puisque la relation $z_1 \precsim^* z_2$ peut être exprimée comme une combinaison booléenne en termes de $\prec^*$, il suffit de voir que $z_1 \prec^* z_2$, avec $z_1, z_2 \in \langle x, \bar{y} \rangle$ est NIP. On peut supposer que x et toutes les $\bar{y}$ appartiennent à la sorte du groupe : si une variable appartient à la sorte de l'ordre, il suffit de considérer que son coefficient est 1, et qu'elle n'est pas additionnée avec aucun élément de $\langle x, \bar{y} \rangle$.

Le cas à traiter est donc $mx + \sum_{k \leq n} n_k y_k \prec^* m'x + \sum_{k \leq n} n'_k y_k$, avec $m, m', n_k, n'_k \in \mathbb{Z}$. Mais si cette formule a la propriété d'indépendance, à partir des suites en témoignant, nous pouvons trouver trivialement des suites témoignant de la propriété d'indépendance pour la formule $mx - y \prec^* m'x - y'$. Il suffit donc de montrer que la formule $mx - y \prec^* m'x - y'$ est NIP, qui est exactement ce que nous avons fait dans le lemme 3.5.1. □

Soit $C(x)$ un formule à une variable, dont la valeur de vérité dépend seulement de la $\sim^*$-classe de x. Nous dirons que C est *$\sim^*$-invariante.*

Lemme 3.5.3. *La formule $C(x - y)$ est NIP.*

Démonstration. Supposons alors que $C(x-y)$ a la propriété d'indépendance pour $(a_i)_{i \in \omega}, (b_I)_{I \subseteq \omega}$.

Nous affirmons que $(a_i)_{i \in \omega}$ est partitionné en au plus deux $\sim^*$-classes :

Supposons que ce n'est pas le cas. Quitte à renommer les indices, nous pouvons supposer $a_0 \prec^* a_1 \prec^* a_2$. Considérons P l'ensemble des entiers pairs. Si $a_1 \prec^* b_P$ alors :

$$a_0 - b_P \sim^* b_P$$
$$a_1 - b_P \sim^* b_P$$

Mais d'après la propriété d'indépendance, nous avons d'une part $\models C(a_0 - b_P)$, et de l'autre $\not\models C(a_0 - b_P)$. Cela contredit alors la $\sim^*$-invariance de C.

D'autre part, si P' est l'ensemble des entiers impairs et $a_1 \prec^* b_{P'}$, alors :

$$a_0 - b_{P'} \sim^* b_{P'}$$
$$a_1 - b_{P'} \sim^* b_{P'}$$

Mais d'après la propriété d'indépendance $\models C(a_1 - b_{P'})$ et $\not\models C(a_0 - b_{P'})$, ce qui contredit encore la $\sim^*$-invariance de C.

Nous avons donc $b_P \precsim^* a_1$, et $b_{P'} \precsim^* a_1$. Mais $b_P \prec^* a_2$ et $b_{P'} \prec^* a_2$ implique :

$$a_2 - b_P \sim^* a_2$$
$$a_2 - b_{P'} \sim^* a_2$$

Cela contredit $\models C(a_2 - b_P)$ et $\not\models C(a_2 - b_{P'})$.

Nous avons donc montré que $(a_i)_{i\in\omega}$ est partitionné en au plus deux $\sim^*$-classes. Alors au moins l'une des deux contient une sous-suite infinie de $(a_i)_{i\in\omega}$. Quitte à renommer les indices, nous pouvons alors supposer que tous les a_i sont dans la même $\sim^*$-classe.

Nous remarquons ensuite que si $(a_i)_{i\in\omega}$ et $(b_I)_{I\subseteq\omega}$ témoignent de la propriété d'indépendance pour $C(x-y)$, alors quelque soit $g \in G$, les suites $(a_i - g)_{i\in\omega}$ et $(b_I - g)_{\eta\subseteq\omega}$ en témoignent aussi. Prenons alors, par exemple, $g = a_0$. Par le même argument qu'on vient de donner, il existe une sous-suite infinie de $(a_i - a_0)_{i\in\omega}$, qui est toute entière dans une seule $\sim^*$-classe. Appelons $I_1 = (a_i^1 - a_0)_{i\in\omega}$ cette sous-suite, avec $a_i^1 \in I_0 := (a_i^0)_{i\in\omega} \subseteq (a_i)_{i\in\omega}$.

Nous pouvons répéter alors le même processus pour $g = a_0^1 - a_0$, et obtenir ainsi une sous-suite infinie de $(a_i^1 - a_0^1)_{i\in\omega}$, qu'on dénote par $I_2 = (a_i^2 - a_0^1)_{i\in\omega}$, et tel que tous ses éléments se trouvent dans la même classe. On itère cette opération, pour obtenir en général une suite $I_j = (a_i^j - a_0^{j-1})_{i\in\omega}$ telle que :

– $a_i^j \in \{a_i^{j-1}\}_{i\in\omega}$;
– I_j est contenue dans une seule $\sim^*$-classe.

Considérons maintenant la suite $S = (c_j)_{j\in\omega}$, avec $c_j = a_0^j$. Alors S est une sous-suite de notre I_0 original, tel que pour tout $j, j' \in \omega$:

$$\text{la } \sim^*\text{-classe de } c_j - c_{j'} \text{ dépend seulement du } \min\{j, j'\}. \tag{3.47}$$

En effet, si on suppose par exemple $j < j'$, alors $a_0^{j'} \in \{a_i^{j+1}\}_{i\in\omega}$ par construction, donc $a_0^{j'} - a_0^j \in I_{j+1}$; d'autre part $c_j - c_{j'} \sim^* c_{j'} - c_j = a_0^{j'} - a_0^j$.

Notons maintenant $(d_I)_{I\subseteq\omega}$ le sous-ensemble de $(b_I)_{I\subseteq\omega}$ (avec les indices éventuellement renommés) tel que $(c_j)_{j\in\omega}$ et $(d_I)_{I\subseteq\omega}$ témoignent de la propriété d'indépendance pour $C(x-y)$.

Remarquons d'abord que par la propriété d'indépendance et la $\sim^*$-invariance de C, nous avons le suivant :

$$\text{si } i \in I \text{ et } i' \notin I',\ \text{alors } a_i - b_I \nsim^* a_{i'} - b_{I'} \tag{3.48}$$

Si nous considérons la suite $(c_j - d_P)_{j\in\omega}$, où P désigne l'ensemble des entiers pairs, par les mêmes arguments que nous avons donnés précédemment, nous pouvons conclure qu'elle est partitionnée dans au plus deux $\sim^*$-classes. D'après (3.48), la seule option possible est que cette partition soit formée par l'ensemble $A = \{c_j - d_P : j \in P\}$ dans une classe, et l'ensemble $B = \{c_j - d_P : j \notin P\}$ dans l'autre.

Supposons par exemple $A \prec^* B$. Dans ce cas $c_0 - d_P \prec^* c_1 - d_P$, et donc par l'axiome (A1) nous avons $c_0 - c_1 = (c_0 - d_P) - (c_1 - d_P) \sim^* c_1 - d_P$. D'autre part, puisque $c_0 - d_P \sim^* c_2 - d_P$ on a $c_0 - c_2 = (c_0 - d_P) - (c_2 - d_P) \precsim^* c_0 - d_P$. On conclut donc :

$$c_0 - c_2 \prec^* c_0 - c_1.$$

Mais cela contredit (3.47).

Si $B \prec^* A$, nous arrivons à une contradiction de façon analogue. □

Proposition 3.5.4. *La formule $C_n(z)$, avec $n \in \mathbb{N}$, $\bar{y} = (y_1, \ldots, y_l)$ et $z \in \langle x, \bar{y}\rangle$ est NIP.*

Démonstration. Si z est dans la sorte de l'ordre, c'est trivial. Supposons alors que z est dans la sorte du groupe, et $z = mx + \sum_{k\leq l} n_k y_k$.

Si la formule $C_n(mx + \sum_{k\leq l} n_k y_k)$ a la propriété d'indépendance, nous pouvons trouver trivialement une suite témoignant de la propriété d'indépendance pour la formule $C_n(x - y)$. Mais puisque C_n est $\sim^*$-invariant, nous arrivons à une contradiction avec le lemme 3.5.3. □

Théorème 3.5.5. *Les théories $\mathscr{T}_i \cup (C)$ et $\mathscr{T}_i \cup (D)$, avec $i = 1, 2$, sont NIP.*

Démonstration. Par le théorème 3.4.1, les propositions 3.5.2 et 3.5.4, et le corollaire 2.1.14. □

3.5.1 Application aux extensions de $\mathcal{T}$

Nous appliquons ensuite le théorème 3.5.5 aux différentes extensions de notre théorie $\mathcal{T}$ originelle.

Théorème 3.5.6. *Les $\mathcal{L}_0$-théories $\mathcal{T}_i \cup (d.st)$ et $\mathcal{T}_i \cup (ex.p)'$, avec $i = 1, 2, 3$, sont NIP.*

Démonstration. Supposons que $\mathcal{T}_1 \cup (d.st)$ ou $\mathcal{T}_3 \cup (d.st)$ a la propriété d'indépendance, c'est-à-dire $\mathcal{T} \cup \{(c1) \vee (c3)\} \cup (d.st)$ a la propriété d'indépendance. Cette théorie est exprimée dans le langage $\mathcal{L}_0 = \{P_G, P_\Gamma, H, +, \leq, 0, -\infty\}$.

Considérons maintenant la relation $\precsim^v$ et le langage $L = \{P_G, P_\Gamma, \precsim^v, 0, -\infty\}$. D'après la définition que nous avons donné de $\precsim^v$ dans la section 3.1.3 (page 16), nous voyons clairement que $\mathcal{L}_0$ et L sont interdéfinissables, et nous pouvons considérer la L-théorie T qui exprime les axiomes de $\mathcal{T} \cup \{(c1) \vee (c3)\} \cup (d.st)$ dans le langage L. Ainsi, ces deux théories sont interdéfinissables dans le sens de la remarque 2.1.3, et alors l'une est NIP ssi l'autre l'est.

D'autre part, cette théorie T implique $\mathscr{T} \cup (C)$ (en interprétant $\precsim^*$ par $\precsim^v$). On en déduit d'après le théorème 3.5.5 et la remarque 2.1.2 que T est NIP, et donc $\mathcal{T} \cup \{(c1) \vee (c3)\} \cup (d.st)$ aussi est NIP.

Si la $\mathcal{L}_0$-théorie considérée au départ était $\mathcal{T} \cup \{(c2) \vee (c3)\} \cup (d.st)$ au lieu de $\mathcal{T} \cup \{(c1) \vee (c3)\} \cup (d.st)$, l'argument serait le même, en prenant $\precsim^{v'}$ au lieu de $\precsim^{v}$.

Pour les théories $\mathcal{T}_i \cup (ex.p)'$, avec $i = 1, 2, 3$, le raisonnement est tout à fait le même, mais cette fois-ci en rajoutant aux langages considérés les relations C_n. □

Corollaire 3.5.7. *Soit $\mathcal{G}$ un groupe abélien valué avec un ordre dense, et C_n l'ensemble des éléments γ de l'ordre tels que $\mid \bar{B}_\gamma / B^\circ_\gamma \mid = n$ (avec $n \in \mathbb{N}$).*

1. *Si toute boule $\bar{B}_\gamma$, ou toute boule B°_γ, est divisible et sans torsion, alors $\mathcal{G}$ est NIP.*
2. *Si $\mathcal{G}$ est d'exposant p, et C_n et $\neg \bigvee_{1 \leq i \leq n} C_n$ sont vides ou denses pour chaque $n \in \mathbb{N}$, alors $\mathcal{G}$ est NIP.*

Démonstration. D'après le théorème 3.5.6, les discussions de la section 3.2.2 et la remarque 2.1.5. □

Chapitre 4

Chaînes colorées avec automorphismes

4.1 Introduction

Motivé par le travail de Simonetta [30], nous voulons montrer que la théorie de groupes valués $\mathcal{T}_S^{(p,q)}$ qu'il étudie n'a pas la propriété d'indépendance.

On sait d'après [30, Théorème 3.3] que la théorie $\mathcal{T}_S^{(p,q)}$ dépend fortement de $\mathcal{T}_{ord}$, la théorie qu'elle induit sur l'ordre. Puisque $\mathcal{T}_{ord}$ est proche d'une chaîne colorée munie d'automorphismes, la première approche est de montrer que cette théorie n'a pas la propriété d'indépendance, avec l'idée de pouvoir utiliser des méthodes semblables pour étudier $\mathcal{T}_{ord}$.

Nous traitons d'abord la théories de chaînes et la théorie de chaînes colorées.

Note: Dans ce chapitre, les théories notées par T, $\mathcal{T}$ ou $\mathscr{T}$ ne sont pas le mêmes que dans le chapitre précédent.

4.2 Chaînes

Tout ce que nous présenterons dans cette section et la section 4.3 est essentiellement du à Poizat [16]. Il a montré que toute théorie de chaîne est NIP. Pour cela il utilise de façon fondamentale le théorème de Rubin (cf. [22]), qui permet de caractériser les n-types à partir des 2-types. On peut consulter [18] pour des détails supplémentaires.

Soit $L = \{\leq\}$ et T la théorie des chaînes, c'est-à-dire la L-théorie affirmant que $\leq$ est un ordre total.

Définition 4.2.1. Soit $\mathscr{L}$ un langage contenant L et $\mathscr{T}$ une $\mathscr{L}$-théorie contenant T. Nous dirons que $\mathscr{T}$ *a peu de types par coupure* si le nombre de types réalisant une coupure quelconque est borné. Plus précisément : il existe un cardinal λ tel que pour tout modèle $\mathscr{M} \models \mathscr{T}$ et toute coupure (A, B) de $\mathscr{M}$ le nombre de 1-types sur M contenant $A < x < B$ est majoré par λ.

Proposition 4.2.2. *Si $\mathscr{T}$ est une théorie avec peu de types par coupure, alors elle est n'a pas la propriété d'indépendance.*

Démonstration. Soit $p \in S_1(M)$, avec $\mathscr{M}$ un modèle de $\mathscr{T}$. Voyons qu'il a au une borne au nombre de cohéritiers sur n'importe quel modèle $\mathscr{N} \succeq \mathscr{M}$.

Si le type est algébrique, c'est évident. On suppose alors qu'il ne l'est pas.

Fixons un modèle $\mathscr{N} \succeq \mathscr{M}$ et considérons $A = \{a \in M : p \vdash a < x\}$, $B = \{b \in M : p \vdash x < b\}$, et $C = \{c \in N : A < c < B\}$.

Soit $q \in S_1(N)$ un cohéritier de p. Nous affirmons que :

(1) soit $q \vdash a < x < c$ pour tout $a \in A$, $c \in C$,

(2) soit $q \vdash c < x < b$ pour tout $c \in C$, $b \in B$.

Si ce n'était pas le cas, alors $q \vdash c_1 \leq x \leq c_2$ pour certains $c_1, c_2 \in C$; ce qui n'est pas réalisable dans $\mathscr{M}$.

Considérons $c_1 = (A_1, B_1) = (\{u \in N : \exists a \in A,\, u \leq a\}, \{u \in N : a < u,\, \forall a \in A\})$ et $c_2 = (A_2, B_2) = (\{u \in N : \forall b \in B,\, b < u\}, \{u \in N : \exists b \in B,\, b \leq u\})$ deux coupures de N.

Si nous sommes dans le cas (1) alors $A_1 < x < B_1 \in q$. Si nous sommes dans le cas (2) alors $A_2 < x < B_2 \in q$. Or, par hypothèse, le nombre des types sur N qui contiennent $A_1 < x < B_1$ est borné, disons par λ. De même pour les types qui contiennent $A_2 < x < B_2$.

On a donc que le nombre de différent q possibles est majoré par $2 \cdot \lambda$. Il suffit alors d'appliquer le fait 2.1.12. $\square$

Verbovskiy a montré [33, Fact 1.4] que une théorie o-stable n'a pas la propriété d'indépendance ; cela est plus fort que la proposition 4.2.2 (cf. [32, 33]).

4.3 Chaînes colorées

Considérons le langage $\mathcal{L} = \{\leq, (P_i)_{i \in I}\}$, avec $\leq$ un symbole de prédicat binaire, et les P_i des prédicats unaires indexés par un ensemble I quelconque. On va d'abord traiter dans cette section le cas de la $\mathcal{L}$-théorie $\mathcal{T}$, affirmant seulement que $\leq$ est un ordre total.

Définition 4.3.1. Si a et b sont deux élément d'une chaîne A, et $S = (\phi_1(x), \ldots, \phi_n(x))$ une suite de formules à une variable libre, nous dirons que *S est réalisée entre a et b*, s'il existe des éléments $c_1, \ldots, c_n$, avec $a < c_1 < \cdots < c_n < b$, et chaque c_i satisfaisant le $\phi_i(x)$ correspondant.

Le théorème suivant a été énoncé par Rubin dans [22, Lemma 7.9] sans en donner de preuve. On peut en trouver une dans [23] ou [18].

Fait 4.3.2 (Théorème de Rubin)**.** *Deux n-uplets croissants, $a_1 < \cdots < a_n$ extrait d'une chaîne colorée A, et $b_1 < \cdots < b_n$ extrait d'une chaîne colorée B, ont le même type (sur $\emptyset$) s'ils satisfont les conditions suivantes :*

1. *$a_i \equiv b_i$ pour chaque $i \leq n$*

2. *Pour toute S suite finie de formules et $i < n$, S est réalisée entre a_i et a_{i+1} ssi S est réalisée entre b_i et b_{i+1}.*

Remarque 4.3.3. La réciproque est évidemment vraie.

Remarque 4.3.4. Les conditions mentionnées dans le fait 4.3.2 sont évidemment incluses dans

$$tp(a_i a_{i+1}) = tp(b_i b_{i+1}) \text{ pour chaque } i < n.$$

C'est-à-dire les n-types sont déterminés par les 2-types d'éléments consécutifs.

Nous considérons maintenant la théorie $\mathcal{T}$ décrite précédemment.

Théorème 4.3.5. *Modulo $\mathcal{T}$, toute formule $\phi(x_0, \dots, x_n)$, avec $x_0 < \dots < x_n$, est équivalente à une combinaison booléenne de formules à deux variables consécutives. En particulier, $\phi(\bar{x})$ est équivalente à une disjonction de formules du type $\phi_0(x_0, x_1) \wedge \dots \wedge \phi_{n-1}(x_{n-1}, x_n)$.*

Démonstration. Suivant la définition donnée dans la section 2.3, d'après la remarque 4.3.4 l'ensemble de formules du type $\phi(x_i, x_{i+1})$ est un ensemble d'élimination relatif à $x_1 < \dots < x_n$. Nous pouvons donc appliquer la proposition 2.3.3 pour en déduire l'énoncé. □

Proposition 4.3.6. *Étant donnés un modèle $\mathcal{N}$ de $\mathcal{T}$ et une coupure $\mathfrak{C}$ de N, il y a au plus $2^{|I|+\aleph_0}$ types sur N réalisant $\mathfrak{C}$.*

Démonstration. Soient $\mathcal{N}'' \succeq \mathcal{N}' \succeq \mathcal{N}$, où $\mathcal{N}'$ réalise tous les types sur N, et $\mathcal{N}''$ tous les types sur $\mathcal{N}'$.
La coupure δ dans N détermine deux coupures dans N' : l'une correspondante à la partie gauche de δ, et l'autre à la partie droite. On les dénotera par $\mathfrak{C}_a$ et $\mathfrak{C}_b$.
Considérons maintenant $\gamma_1, \gamma_2 \in N'$ réalisant tous les deux $\mathfrak{C}$, et $\alpha, \beta \in N''$ réalisant $\mathfrak{C}_a$ et $\mathfrak{C}_b$ respectivement. On affirme alors que $\alpha\gamma_1 \equiv \alpha\gamma_2$ et $\gamma_1\beta \equiv \gamma_2\beta$ implique $tp(\gamma_1/N) = tp(\gamma_2/N)$.

Soit $\phi(x, \bar{m}) \in tp(\gamma_1/N)$. On peut écrire de façon triviale $\phi(x, \bar{n}) = \phi(x, \bar{n}; \alpha, \beta)$, et d'après le théorème 4.3.5, pour un certain K fini :

$$\mathcal{N}'' \models \phi(x, \bar{n}; \alpha, \beta) \leftrightarrow \bigvee_{k \in K} \Phi^k(x, \bar{n}; \alpha, \beta),$$

où $\Phi^k(x, \bar{n}; \alpha, \beta) \equiv \psi^k(\bar{n}, \alpha, \beta) \wedge \phi_1^k(\alpha, x) \wedge \phi_2^k(x, \beta)$ pour certaines formules $\psi^k, \phi_1^k, \phi_2^k$. Mais par hypothèse $\alpha\gamma_1 \equiv \alpha\gamma_2$ et $\gamma_1\beta \equiv \gamma_2\beta$; donc si pour $k_0 \in K$ γ_1 réalise $\phi_1^{k_0}(\alpha, x)$ et $\phi_2^{k_0}(x, \beta)$, alors γ_2 les réalise aussi. C'est-à-dire $\mathcal{N}'' \models \Phi^k(\gamma_1\bar{n}; \alpha, \beta) \leftrightarrow \Phi^k(\gamma_2\bar{n}; \alpha, \beta)$ pour chaque $k \in K$, et donc $\mathcal{N}'' \models \phi(\gamma_1, \bar{n}; \alpha, \beta)$ ssi $\mathcal{N}'' \models \phi(\gamma_2, \bar{n}; \alpha, \beta)$.

Maintenant il ne reste plus qu'à compter le nombre de possibilités pour $tp(\alpha\gamma/\emptyset)$ et $tp(\gamma\beta/\emptyset)$, où $\gamma \in N'$ et $\gamma \models \mathfrak{C}$. Comme la cardinalité du langage est majorée par $|I| + \aleph_0$, le nombre de 2-types sur $\emptyset$ est majorée par $2^{|I|+\aleph_0}$. Nous avons ainsi que le nombre de types réalisant $\mathfrak{C}$ est majoré par $2 \cdot 2^{|I|+\aleph_0} = 2^{|I|+\aleph_0}$. □

Théorème 4.3.7. *La théorie $\mathcal{T}$ est NIP.*

Démonstration. C'est une conséquence des propositions 4.2.2 et 4.3.6. □

4.4 Chaînes colorées avec automorphismes

Soit $\mathscr{L}$ le langage $\mathcal{L} \cup \{\sigma_j\}_{j\in J}$, avec les σ_j des symboles de fonctions unaires et J un ensemble quelconque. Dans cette section nous montrerons la NIP pour la $\mathscr{L}$-théorie $\mathscr{T}$ étendant $\mathcal{T}$, qui affirme que $\leq$ est un ordre total, et que les σ_j sont des *mcl*-automorphismes.

Nous pouvons supposer que $\{\sigma_j\}_{j\in J}$ est un groupe, par interdéfinissabilité avec le groupe engendré par $\{\sigma_j\}_{j\in J}$ et la remarque 2.1.3. Nous noterons alors $\{\sigma_j\}_{j\in J}$, G.

Soit Θ_0 l'ensemble de $\mathcal{L}$-formules à deux variables libres. Nous considérons maintenant le langage $\mathcal{L}_0 = \mathcal{L} \cup \{P_{\phi,\sigma}\}_{\phi\in\Theta_0,\sigma\in G}$, avec chaque $P_{\phi,\sigma}$ un symbole de prédicat unaire. Ensuite, on définit par récurrence Θ_n comme l'ensemble de $\mathcal{L}_{n-1}$-formules à deux variables libres, et $\mathcal{L}_n = \mathcal{L} \cup \{P_{\phi,\sigma}\}_{\phi\in\Theta_n,\sigma\in G}$, avec chaque $P_{\phi,\sigma}$ un symbole de prédicat unaire. Nous considérons finalement les langages $\mathcal{L}^+ = \bigcup_{n=0}^{\infty} \mathcal{L}_n$ et $\mathscr{L}^+ = \mathcal{L}^+ \cup G$. Nous écrirons aussi $\Theta = \bigcup_{n=0}^{\infty} \Theta_n$.

Nous allons ensuite modifier légèrement nos théories. Considérons la $\mathscr{L}^+$-théorie suivante :

$$\mathscr{T}^+ = \mathscr{T} \cup \{\forall x(P_{\phi,\sigma}(x) \leftrightarrow \phi(x, \sigma(x))) : \phi \in \Theta, \sigma \in G\}.$$

Nous écrirons $\mathcal{T}^+$ pour désigner la théorie $\mathcal{T}$ considérée en tant que $\mathcal{L}^+$-théorie.

Remarque 4.4.1. Puisque $\mathcal{T}^+$ est toujours une théorie de chaîne colorée, on peut lui appliquer le théorème 4.3.5.

Définition 4.4.2. Soit $\phi(x_0, \ldots, x_n)$ une $\mathscr{L}^+$-formule. Pour $i \in \{1, \ldots, n\}$, on appellera *ϕ-développement de x_i*, et on écrira $\langle x_i\rangle_\phi$, l'ensemble de tous les $\sigma(x_i)$, avec $\sigma \in G$ qui apparaissent dans $\phi(\bar{x})$. Plus généralement $\langle x_{i_0}, \ldots, x_{i_l}\rangle_\phi$ signifiera $\bigcup_{k=0}^{l} \langle x_{i_k}\rangle_\phi$.

Note: Dans une formule $\phi(\bar{x})$ nous ne comptons pas $\tau(x_i)$ dans $\langle x_i\rangle_\phi$, si à chaque occurrence de $\tau(x_i)$ dans ϕ il y a un autre automorphisme agissant sur $\tau(x_i)$. Par exemple, si $\phi(x_1, x_2) \equiv \sigma(\tau(x_1)) \leq \sigma'(\tau(x_2))$, alors $\langle(x_1, x_2)\rangle_\phi = \{\sigma \circ \tau(x_1), \sigma' \circ \tau(x_1)\}$.

Définition 4.4.3. Si $\phi(x_0, \ldots, x_n)$ est une $\mathscr{L}^+$-formule et $\langle\bar{x}\rangle_\phi = \{\alpha_0(x_{i_0}), \ldots, \alpha_m(x_{i_m})\}$, on écrira $\hat{\phi}(u_0, \ldots, u_m)$ pour dénoter l'unique $\mathscr{L}^+$-formule avec

$$\phi(x_0, \ldots, x_n) \equiv \hat{\phi}(\alpha_0(x_{i_0}), \ldots, \alpha_m(x_{i_m}))$$

telle qu'aucun automorphisme n'agit sur $u_0, \ldots, u_m$.

Remarque 4.4.4. Si $\phi(x_0, \ldots, x_n)$ est une $\mathscr{L}^+$-formule telle que $\langle\bar{x}\rangle_\phi \subseteq \{x_0, \ldots, x_m\}$ alors ϕ et $\hat{\phi}$ sont exactement la même formule.

Définition 4.4.5. On dira que $\mathcal{O}(\bar{x}) = \bigwedge_{k=0}^{m-1} \alpha_k(x_{i_k}) < \alpha_{k+1}(x_{i_{k+1}})$, où les $\alpha_k \in G$ sont des automorphismes tels que $\{\alpha_0(x_{i_0}), \ldots, \alpha_m(x_{i_m})\} = \langle x_0, \ldots, x_n\rangle_\phi$, est un *ordre compatible avec* $\phi(\bar{x})$ s'il ordonne $\langle x_0, \ldots, x_n\rangle_\phi$ de façon non-contradictoire avec $\phi(\bar{x})$. Nous écrirons parfois $\mathcal{O} : \alpha_0(x_{i_0}) < \cdots < \alpha_m(x_{i_m})$, ou $\mathcal{O} : \alpha_0 < \cdots < \alpha_m$ si ce n'est pas nécessaire de préciser la variable sur laquelle agit chaque automorphisme.
On dénotera par Δ_ϕ l'ensemble des ordres compatibles avec ϕ.

Définition 4.4.6. Soit $\phi(\bar{x})$ une $\mathscr{L}^+$-formule. On dira que $\phi(x)$ est *jolie* s'il n'y a pas d'occurrence d'automorphisme agissant sur des variables quantifiées.

Remarque 4.4.7. Soit $\phi(\bar{x})$ une formule jolie avec $\langle \bar{x} \rangle_\phi = \{\alpha_0(x_{i_0}), \ldots, \alpha_m(x_{i_m})\}$ et $\phi(\bar{x}) \equiv \hat{\phi}(\alpha_0(x_{i_0}), \ldots, \alpha_m(x_{i_m}))$. D'après la définition de jolie, la formule $\hat{\phi}(u_0, \ldots, u_m)$ est une $\mathcal{L}^+$-formule.

Proposition 4.4.8. *Soit $\phi(\bar{x})$ est une formule jolie avec $\langle \bar{x} \rangle_\phi = \{\alpha_0(x_{i_0}), \ldots, \alpha_m(x_{i_m})\}$. Alors $\phi(\bar{x}) \wedge \alpha_0(x_{i_0}) < \cdots < \alpha_m(x_{i_m})$ est équivalente modulo $\mathscr{T}^+$ à un combinaison booléenne de formules jolies du type $\psi_k(\alpha_k(x_{i_k}), \alpha_{k+1}(x_{i_{k+1}}))$, où $\psi_k(u, v)$ est une $\mathcal{L}^+$-formule.*

Démonstration. Par définition $\phi(x_0, \ldots, x_n) \equiv \hat{\phi}(\alpha_0(x_{i_0}), \ldots, \alpha_m(x_{i_m}))$. Si on remplace $\alpha_0(x_{i_0}), \ldots, \alpha_m(x_{i_m})$ par les variables $u_0, \ldots, u_m$, alors $\hat{\phi}(u_0, \ldots, u_m) \wedge u_0 < \cdots < u_m$ devient, d'après la remarque 4.4.7, une $\mathcal{L}^+$-formule. D'après la remarque 4.4.1 nous avons

$$\mathcal{T}^+ \vdash \forall u_0 \ldots \forall u_m \ [(\hat{\phi}(u_0, \ldots, z_m) \wedge u_0 < \cdots < u_m) \leftrightarrow \Phi(u_0, \ldots, u_m)],$$

où $\Phi(\bar{z})$ est une disjonction de formules du type $\psi_0(u_0, u_1) \wedge \cdots \wedge \psi_{m-1}(u_{m-1}, u_m)$. Puisque $\mathscr{T}^+ \supset \mathcal{T}^+$, on en déduit que $\mathscr{T}^+$ implique cette équivalence pour le choix particulier de $(u_0, \ldots, u_m) = (\alpha_0(x_{i_0}), \ldots, \alpha_m(x_{i_m}))$. □

Proposition 4.4.9. *Soit $\phi(\bar{x})$ une formule jolie. Alors $\mathscr{T}^+$ montre*

$$\forall x_0, \ldots, \forall x_n \left(\phi(\bar{x}) \leftrightarrow \bigvee_{\mathcal{O} \in \Delta_\phi} \Phi^{\mathcal{O}}(\bar{x}) \right),$$

où $\Phi^{\mathcal{O}}(\bar{x})$ est une disjonction de formules jolies du type $\phi_0(\alpha_0, \alpha_1) \wedge \cdots \wedge \phi_{m-1}(\alpha_{m-1}, \alpha_m)$, avec chaque $\phi_k(u, v)$ une $\mathcal{L}^+$-formule, $\mathcal{O} : \alpha_0 < \cdots < \alpha_m$.

Démonstration. Il est évident que $\phi(\bar{x})$ est équivalente à $\bigvee_{\mathcal{O} \in \Delta_\phi} \phi(\bar{x}) \wedge \mathcal{O}$. Le reste découle de la proposition 4.4.8. □

Nous avons besoin de la définition suivante, qui donne une certaine mesure de la complexité d'une formule, pour faire ultérieurement des raisonnements par récurrence.

Définition 4.4.10. Étant donné une $\mathscr{L}^+$-formule $\phi(\bar{x})$, nous définisons sa *compléxité* $C(\phi)$ de la façon suivante :
- si ϕ est une $\mathscr{L}$-formule atomique $C(\phi) = 0$,
- si $\phi(\bar{x}) \equiv Qy\psi(\bar{x}, y)$, alors $C(\phi) = C(\psi) + 1$,
- si $l(\bar{x}) = 1$ et $\phi(x) \equiv P_{\psi,\sigma}(\tau(x))$, avec $\sigma, \tau \in G$, alors $C(\phi) = C(\psi) + 1$,
- si $\phi \equiv \psi_1 \wedge \psi_2$, alors $C(\phi) = \max\{C(\psi_1), C(\psi_2)\} + 1$,
- si $\phi \equiv \psi_1 \vee \psi_2$, alors $C(\phi) = \max\{C(\psi_1), C(\psi_2)\} + 1$,
- si $\phi \equiv \neg\psi$, alors $C(\phi) = C(\psi) + 1$.

Définition 4.4.11. Si $\sigma, \tau \in G$, nous définissons $\tau^\sigma = \sigma^{-1} \circ \tau \circ \sigma$.

Définition 4.4.12. Étant donné une $\mathscr{L}^+$-formule $\phi(x_1, \ldots, x_n)$ et $\sigma \in G$, nous définisons $\phi^\sigma(\bar{x})$ comme le résultat d'échanger dans $\phi(\bar{x})$ chaque occurrence d'un prédicat $P_{\psi,\tau}$ pour $P_{\psi^\sigma,\tau^\sigma}$ et chaque occurrence d'un $\tau(x_i)$, avec $\tau \in G$ et $i \leq n$, par $\tau^\sigma(x_i)$.

Remarque 4.4.13. D'après la définition, pour tout $\sigma \in G$ et toutes $\mathscr{L}^+$-formules ϕ, ψ on a :

- $(\phi \wedge \psi)^\sigma \equiv \phi^\sigma \wedge \psi^\sigma$,
- $(\phi \vee \psi)^\sigma \equiv \phi^\sigma \vee \psi^\sigma$,
- $(\neg\phi)^\sigma \equiv \neg\phi^\sigma$.

Lemme 4.4.14. *Si $\phi(\bar{x})$ est une $\mathcal{L}^+$-formule et $\sigma \in G$ alors $\phi^\sigma(\bar{x})$ est une $\mathcal{L}^+$-formule.*

Démonstration. Nous le montrons par récurrence sur la compléxité.

Si $C(\phi) = 0$, alors $\phi(\bar{x})$ est une $\mathcal{L}$-formule atomique. Dans ce cas $\phi^\sigma(\bar{x}) \equiv \phi(\bar{x})$ par définition.

Supposons ensuite l'énoncé vrai pour toute formule ψ avec $C(\psi) \leq n$ et supposons $C(\phi) = n + 1$.

1. Si $\phi(\bar{x})$ est une combinaison booléenne de formules de compléxité plus petite ou égal à n, le résultat découle immédiatement de l'hypothèse de récurrence et la remarque 4.4.13.
2. Si $\phi(\bar{x}) \equiv Qy\psi(\bar{x}, y)$, puisque par récurrence $\psi^\sigma(\bar{x}, y)$ est une $\mathcal{L}^+$-formule et $\phi^\sigma(\bar{x}) \equiv (Qy\psi(\bar{x}, y))^\sigma \equiv Qy\psi^\sigma(\bar{x}, y)$, on conclut que $\phi^\sigma(\bar{x})$ est une $\mathcal{L}^+$-formule.
3. Si $l(\bar{x}) = 1$ et $\phi(x) \equiv P_{\psi,\tau}(x)$ (remarquons que le cas $P_{\psi,\tau}(\rho(x))$ n'est pas possible puisque $\phi(x)$ est une $\mathcal{L}^+$-formule par hypothèse), alors $\phi^\sigma(x) \equiv P_{\psi^\sigma,\tau^\sigma}(x)$. Par hypothèse de récurrence ψ^σ est une $\mathcal{L}^+$-formule, et comme $\tau^\sigma \in G$ alors $P_{\psi^\sigma,\tau^\sigma}(x)$ est bien définit et donc $\phi^\sigma(x)$ est une $\mathcal{L}^+$-formule.

□

Remarque 4.4.15. Pour toute $\mathscr{L}^+$-formule $\phi(\bar{x})$ et tout $\sigma \in G$ nous avons $C(\phi^\sigma) = C(\phi)$. La preuve de cela peut se faire facilement par récurrence sur la compléxité.

Lemme 4.4.16. *Pour toute $\mathscr{L}^+$-formule $\phi(x_1, \ldots, x_n)$ et tout $\sigma \in G$ on a :*

$$\mathscr{T}^+ \vdash \forall\bar{x}\, [\phi^\sigma(x_1, \ldots, x_n) \leftrightarrow \phi(\sigma(x_1), \ldots, \sigma(x_n))]$$

Démonstration. Nous le montrons par récurrence sur la compléxité. Soit $\sigma \in G$ arbitraire.

(a) Si $\phi \equiv \phi(x) \equiv P_i(\tau(x))$, avec $i \in I$ et $\tau \in G$, alors par définition $\phi^\sigma(x) \equiv P_i(\tau^\sigma(x))$. D'autre part, puisque σ^{-1} est un automorphisme on a

$$\mathscr{T}^+ \vdash \forall x \left[P_i(\sigma^{-1}(\tau \circ \sigma(x))) \leftrightarrow P_i(\tau \circ \sigma(x))\right]$$

On en déduit alors

$$\mathscr{T}^+ \vdash \forall x\, [\phi^\sigma(x) \leftrightarrow \phi(\sigma(x))]$$

(b) Si $\phi \equiv \phi(x_1, x_2) \equiv \tau_1(x_1) \leq \tau_2(x_2)$, avec $\tau_1, \tau_2, \in G$, alors $\phi^\sigma(x_1, x_2) \equiv \tau_1^\sigma(x_1) \leq \tau_2^\sigma(x_2)$ par définition. D'autre part, puisque σ^{-1} est un automorphisme on a

$$\mathscr{T}^+ \vdash \forall x_1, x_2 \left[[\sigma^{-1}(\tau_1 \circ \sigma(x_1))) \leq \sigma^{-1}(\tau_2 \circ \sigma(x_2))] \leftrightarrow [\tau_1 \circ \sigma(x_1) \leq \tau_2 \circ \sigma(x_2)]\right]$$

On en déduit alors

$$\mathscr{T}^+ \vdash \forall x_1, x_2 \left[\phi^\sigma(x_1, x_2) \leftrightarrow \phi(\sigma(x_1, x_2))\right]$$

Cela montre le cas $C(\phi) = 0$.

Supposons donc vrai l'énoncé du lemme pour toute formule ψ avec $C(\psi) \leq n$, et soit $\phi(\bar{x})$ avec $C(\phi) = n + 1$.

1. Si $\phi(\bar{x})$ est une combinaison booléenne de formules de complexité plus petite ou égal à n, le résultat découle immédiatement de l'hypothèse de récurrence et la remarque 4.4.13.
2. Si $\phi(\bar{x}) \equiv Qy\psi(\bar{x}, y)$, pour une certaine $\mathscr{L}^+$-formule $\psi(\bar{x}, y)$, alors par définition $\phi^\sigma(\bar{x}) \equiv Qy\psi^\sigma(\bar{x}, y)$. D'autre part, par hypothèse de récurrence on a

$$\mathscr{T}^+ \vdash \forall \bar{x} \forall y \left[\psi^\sigma(x_1, \ldots, x_n, y) \leftrightarrow \psi(\sigma(x_1), \ldots, \sigma(x_n), \sigma(y))\right]$$

   Mais par surjectivité de σ la formule $Qy\psi(\sigma(x_1), \ldots, \sigma(x_n), \sigma(y))$ est équivalente à la formule $Qy\psi(\sigma(x_1), \ldots, \sigma(x_n), y)$, donc

$$\mathscr{T}^+ \vdash \forall \bar{x} \left[\phi^\sigma(x_1, \ldots, x_n) \leftrightarrow \phi(\sigma(x_1), \ldots, \sigma(x_n))\right].$$

3. Si $l(\bar{x}) = 1$ et $\phi(x) \equiv P_{\psi,\tau}(\rho(x))$, pour une certaine $\mathscr{L}^+$-formule ψ et certains automorphismes τ et ρ, alors $\phi^\sigma(x) \equiv P_{\psi^\sigma,\tau^\sigma}(\rho^\sigma(x))$ par définition. D'une part, par définition de $\mathscr{T}^+$, nous avons

$$\mathscr{T}^+ \vdash P_{\psi^\sigma,\tau^\sigma}(\rho^\sigma(x)) \leftrightarrow \psi^\sigma(\rho^\sigma(x), \tau^\sigma(\rho^\sigma(x))) \tag{4.1}$$
$$\mathscr{T} + \vdash P_{\psi,\tau}(\rho(x)) \leftrightarrow \psi(\rho(x), \tau(\rho(x))), \tag{4.2}$$

   et d'autre part nous avons, par hypothèse de récurrence, le suivant :

$$\mathscr{L}^+ \vdash \psi^\sigma(\rho^\sigma(x), \tau^\sigma(\rho^\sigma(x))) \leftrightarrow \psi(\rho(\sigma(x)), \tau(\rho(\sigma(x)))). \tag{4.3}$$

   Grâce à 4.1, 4.2, 4.3 et $\phi(x) \equiv P_{\psi,\tau}(\rho(x))$ on peut conclure

$$\mathscr{T}^+ \vdash \phi^\sigma(x) \leftrightarrow \phi(\sigma(x)).$$

□

Proposition 4.4.17. *Toute $\mathscr{L}^+$-formule est équivalente modulo $\mathscr{T}^+$ à une formule jolie.*

Démonstration. On le montrera par récurrence sur le degré de quantification de la formule.

Si la formule est sans quantificateurs, elle est jolie par définition.

Soit maintenant $\phi(\bar{x}) \equiv Qy\psi(\bar{x},y)$, avec $\psi(\bar{x},y)$ une formule jolie. Par la proposition 4.4.9 $\psi(\bar{x},y)$ est équivalente à $\bigvee_{\mathcal{O}\in\Delta_\psi} \Psi^{\mathcal{O}}(\bar{x},y)$, où $\Psi^{\mathcal{O}}(\bar{x},y)$ est une disjonction de formules jolies du type $\phi_0(\alpha_0,\alpha_1) \wedge \cdots \wedge \phi_{m-1}(\alpha_{m-1},\alpha_m)$, pour $\mathcal{O} : \alpha_0 < \cdots < \alpha_m$ et $\{\alpha_0,\ldots,\alpha_m\} = \langle \bar{x},y\rangle_\psi$; en plus chaque $\phi_k(u,v)$ est une $\mathcal{L}^+$-formule.

Soit $\{\beta_0(y),\ldots,\beta_l(y)\} = \langle y\rangle_\psi$ et $\beta_0(y) < \cdots < \beta_l(y)$ l'ordre induit par $\mathcal{O}$. On va transformer de la façon suivante les formules ϕ_k dans lesquelles y intervient :

(a) Si $\phi_k \equiv \phi_k(\alpha_k(x_{i_k}),\beta_{k'}(y))$, alors ϕ_k devient $\phi_k^* \equiv \phi_k^{\beta_{k'}}(\beta_{k'}^{-1}\circ\alpha_k(x_{i_0}),y)$;

(b) Si $\phi_k \equiv \phi_k(\beta_{k'}(y),\beta_{k'+1}(y))$, alors ϕ_k devient $\phi_k^* \equiv \phi_k^{\beta_{k'}}(y,\beta_{k'}^{-1}\circ\beta_{k'+1}(y))$.

D'après le lemme 4.4.16, chaque ϕ_k du type (a) ou du type (b) est équivalente à la formule ϕ_k^* correspondante.

Si $\phi_k(\alpha_k(x_{i_k}),\beta_{k'}(y))$ est une formule du type (a), puisque $\phi_k(u,v)$ est une $\mathcal{L}^+$-formule le seul automorphisme qui agit sur la variable y est $\beta_{k'}$. Cela implique que dans la formule $\phi_k(\beta_{k'}^{-1}\circ\alpha_k(x_{i_0}),y)$ aucun automorphisme n'agit sur y. En plus, puisqu'aucune variable quantifiée n'a été modifiée, $\phi_k(\beta_{k'}^{-1}\circ\alpha_k(x_{i_0}),y)$ est toujours jolie. Alors, si on applique la définition 4.4.12 nous avons le suivant :

1. Dans la formule $\phi_k^{\beta_{k'}}(\beta_{k'}^{-1}\circ\alpha_k(x_{i_0}),y)$ aucun automorphisme n'agit sur y ;
2. La formule $\phi_k^{\beta_{k'}}(\beta_{k'}^{-1}\circ\alpha_k(x_{i_0}),y)$ est jolie.

De même, si $\phi_k \equiv \phi_k(\beta_{k'}(y),\beta_{k'+1}(y))$ est une formule du type (b), alors la formule $\phi_k^* \equiv \phi_k^{\beta_{k'}}(y,\beta_{k'}^{-1}\circ\beta_{k'+1}(y))$ correspondante est aussi jolie, et en plus . comme $\phi_k(u,v)$ est une $\mathcal{L}^+$-formule, d'après le lemme 4.4.14 $\phi_k^{\beta_{k'}}(u,v)$ est aussi une $\mathcal{L}^+$-formule, c'est-à-dire elle est une $\mathcal{L}_n$-formule pour un certain $n<\omega$. Alors, par définition des prédicats $P_{\phi,\sigma}$, la formule $\phi_k^{\beta_{k'}}(y,\beta_{k'}^{-1}\circ\beta_{k'+1}(y))$ est équivalente à $P_{\phi_k^{\beta_{k'}},\beta_{k'}^{-1}\circ\beta_{k'+1}}(y)$.

Ainsi, nous avons transformé chaque ϕ_k dans laquelle la variable y apparaissait, pour obtenir finalement une formule jolie, équivalente à $\psi(\bar{x},y)$, et telle qu'aucun automorphisme n'agit sur y. On en déduit alors que $Qy\psi^*(\bar{x},y)$ est jolie et équivalente à $\phi(\bar{x})$. $\square$

Lemme 4.4.18. *Si $\mathscr{T}^+$ est NIP alors $\mathscr{T}$ est NIP.*

Démonstration. Puisque $\mathscr{T}^+$ est une expansion définissable de $\mathscr{T}$, il suffit d'appliquer la remarque 2.1.3. $\square$

Théorème 4.4.19. *La théorie $\mathscr{T}$ est NIP.*

Démonstration. Par le lemme 4.4.18, il suffit de prouver que $\mathscr{T}^+$ est NIP.

Supposons que $\mathscr{T}^+$ a la propriété d'indépendance. D'après la la proposition 4.4.17, on peut supposer qu'il y a une $\mathscr{L}^+$-formule jolie $\phi(\bar{x},\bar{y})$ qui a la propriété d'indépendance par rapport à $\mathscr{T}^+$. Si $\langle\bar{x}\rangle_\phi = \{\alpha_0(x_{k_0}),\ldots,\alpha_r(x_{k_r})\}$ et $\langle\bar{y}\rangle_\phi = \{\beta_0(y_{l_0}),\ldots,\beta_s(y_{l_s})\}$, on peut considérer trivialement :

$$\phi(\bar{x},\bar{y}) \equiv \hat{\phi}(\alpha_0(x_{k_0}),\ldots,\alpha_r(x_{k_r});\beta_0(y_{l_0}),\ldots,\beta_s(y_{l_s})).$$

Puisque ϕ est une formule jolie, d'après la remarque 4.4.7, si $\bar{u} = (u_0, \ldots, u_r)$ et $\bar{v} = (v_0, \ldots, v_s)$, alors $\hat{\phi}(u_0, \ldots, u_r; v_0, \ldots, v_s)$ est une $\mathcal{L}^+$-formule.

Dissons que pour un certain modèle $\mathcal{M} \models \mathscr{T}^+$, les suites $(\bar{a}^i)_{i\in\omega}, (\bar{b}^I)_{I\subseteq\omega} \subset M$, avec $\bar{a}^i = (a_0^i, \ldots, a_n^i)$ et $\bar{b}^I = (b_0^I, \ldots, b_m^I)$, témoignent la propriété d'indépendance pour $\phi(\bar{x}, \bar{y})$. Alors les suites $(\alpha_0(a_{k_0}^i), \ldots, \alpha_r(a_{k_r}^i))_{i\in\omega}$ et $(\beta_0(b_{l_0}^I), \ldots, \beta_s(b_{l_s}^I))_{I\subseteq\omega}$ témoignent la propriété d'indépendance pour $\phi(u_0, \ldots, u_r; v_0, \ldots, v_s)$. Or $\mathcal{T}^+ \subset \mathscr{T}^+$ implique $\mathcal{M} \models \mathcal{T}^+$. Nous avons donc trouvé une formule $\mathcal{L}^+$-formule $\phi(u_0, \ldots, u_r; v_0, \ldots, v_s)$, un modèle $\mathcal{M}$ de $\mathcal{T}^+$, et deux suites $(\bar{\alpha}_i)_{i\in\omega} = (\alpha_0(a_{k_0}^i), \ldots, \alpha_r(a_{k_r}^i))_{i\in\omega}$ et $(\bar{\beta}_I)_{I\subseteq\omega} = ((\beta_0(b_{l_0}^I), \ldots, \beta_s(b_{l_s}^I))_{I\subseteq\omega}$ dans ce modèle, tels que $\mathcal{M} \vDash \phi(\bar{\alpha}_k, \bar{\beta}_I)$ ssi $i \in I$.

Mais puisque $\mathcal{T}^+$ est une théorie de chaîne colorée, cela contredit le théorème 4.3.7.

$\square$

Chapitre 5

Chaînes colorées avec quasi-automorphismes

5.1 Introduction

Dans le chapitre précédent nous avons montré que la théorie de chaînes colorées munies d'automorphismes est NIP. Même si ce résultat est intéressant en soi, il peut être aussi vu comme une première approche pour montrer que la théorie $\mathcal{T}_{ord}$ est NIP. Celle-ci est obtenue en considérant la théorie (dans un certain langage) induite par $\mathcal{T}_S^{(p,q)}$, étudiée par Simonetta dans [30], sur l'ensemble des valuations (voir la définition 5.9.2 pour les définitions précises).

Note: Dans ce chapitre, la théorie $\mathcal{T}$ désigne une autre théorie que celles que nous avons traitées dans les chapitres précédents. De même pour le langage $\mathcal{L}$.

Nous étudions dans ce chapitre une théorie $\mathcal{T}$ de chaîne colorée munie de certaines fonctions, qu'on appelle *quasi-automorphismes*, plus générale que la théorie $\mathcal{T}_{ord}$. Les arguments utilisés dans le chapitre 4 ne sont pas valides ici, mais nous sommes inspirés par certaines idées, notamment la caractérisation des types et le comptage de cohéritiers.

Nous développons d'abord les outils nécessaires pour pouvoir caractériser les types, et ensuite nous comptons le nombre de cohéritiers en utilisant cette caractérisation. Nous montrerons par cette méthode que $\mathcal{T}$ est NIP.

Comme résultats finaux, nous appliquons cela à la théorie $\mathcal{T}_S^{(p,q)}$ étudiée dans [30] : nous montrons $\mathcal{T}_{ord} \vdash \mathcal{T}$, et alors $\mathcal{T}_{ord}$ n'a pas la propriété d'indépendance ; ensuite nous transférons cela à $\mathcal{T}_S^{(p,q)}$.

5.2 Présentation des axiomes

Considérons le langage $\mathcal{L} = \{\leq, (P_i)_{i\in I}, (f_n)_{n\in\mathbb{N}^*}, \infty\}$, avec $\leq$ un symbole de relation binaire, les P_i des prédicats unaires, les f_n des fonctions unaires et ∞ une constante.

Juste comme notation pour l'instant, on écrira Γ pour indiquer le domaine des fonctions f_n (c'est-à-dire l'ensemble de base d'une certaine structure).

Soit la $\mathcal{L}$-théorie $\mathcal{T}$ qui dit que $\leq$ est un ordre total, avec un plus grand élément ∞, et affirmant pour tout $m, n \in \mathbb{N}^*$:

Axiomes généraux

(a1) $f_1 = Id_\Gamma$ et $f_n(\infty) = \infty$, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$

(a2) $f_m \circ f_n = f_{m \cdot n}$, pour tout $n, m \in \mathbb{N}^*$

(a3) $\forall x (f_n(x) \geq x)$

Dans [30], les fonctions f_n sont des fonctions sur l'ensemble des valuations définies par $f_n(v(x)) = v(nx)$ (nous donnerons plus de détails dans la section 5.9). Cela justifie les axiomes que nous venons de donner.

Axiomes de régularité particuliers à la théorie de Simonetta

(b1) $\forall x, y \; [(x \notin f_n^{-1}(\{\infty\})) \Rightarrow (x < y \Leftrightarrow f_n(x) < f_n(y))]$

(b2) $\forall x, y \; [(x \in f_n(\Gamma) \wedge x \leq y) \Rightarrow y \in f_n(\Gamma)]$

Ces énoncés (ou plutôt des axiomes qui les impliquent immédiatement) sont considérés dans [30] pour garantir une certaine compatibilité entre la valuation et le produit d'un élément du groupe par un entier.

Axiomes de confluence (à gauche et à droite)

(c1) $\forall x, y, z \; [(f_p(x) = f_q(y) = z \wedge z \neq \infty) \Rightarrow \exists u (f_q(u) = x \wedge f_p(u) = y)]$, pour tous nombres premiers p et q différents.

(c2) $\forall x \; [(f_p(x) \neq \infty \wedge f_q(x) \neq \infty) \Rightarrow f_{p \cdot q}(x) \neq \infty]$, pour tous nombres premiers p et q différents.

Ces énoncés sont une généralisation d'une propriété de modèles de $\mathcal{T}_{ord}$, conséquence en partie de la proposition 2.2.3 (nous en donnerons plus de détails dans la section 5.9).

Nous montrons dans la proposition 5.9.3 que $\mathcal{T}_{ord} \vdash \mathcal{T}$. On peut trouver dans [30] des exemples naturels de modèles de $\mathcal{T}_S^{(p,q)}$, et donc de $\mathcal{T}_{ord}$. Cela nous donne alors à posteriori des modèles de $\mathcal{T}$.

5.3 Quelques propriétés

Une propriété qui sera fondamentale par la suite est la suivante.

Proposition 5.3.1. *Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $f_n \mid_{\Gamma \setminus f_n^{-1}(\{\infty\})}$ est injective.*

Démonstration. Si $a, a' \in \Gamma \setminus f_n^{-1}(\{\infty\})$ et $a \neq a'$, avec disons $a < a'$, alors d'après l'axiome (b1), $f_n(a) < f_n(a')$. $\square$

Étant donné $\gamma \in \Gamma$, nous dirons que ${f_n}^{-1}(\gamma)$ est *bien défini* si $\gamma \neq \infty$ et $|{f_n}^{-1}(\{\gamma\})| = 1$. Notons que grâce à la proposition 5.3.1, cela est équivalent à $\gamma \neq \infty$ et $f_n^{-1}(\{\gamma\}) \neq \emptyset$. Dans ce cas, ${f_n}^{-1}(\gamma)$ sera, évidemment, le seul élément qui appartient à ${f_n}^{-1}(\{\gamma\})$.

Éventuellement nous dirons, de façon plus générale, que ${f_n}^{\varepsilon}(\gamma)$ est bien défini, avec $\varepsilon \in \{-1, 1\}$, si $\varepsilon = 1$, ou si $\varepsilon = -1$ et ${f_n}^{-1}(\gamma)$ est bien défini dans le sens précédent.

Remarque 5.3.2. Il aurait été aussi raisonnable de dire que $f_n^{-1}(\infty)$ est bien défini si $|f_n^{-1}(\{\infty\})| = 1$ (et dans ce cas, forcément, $f_n^{-1}(\infty) = \infty$). Nous avons préféré de ne pas le faire puisque cela aurait compliqué inutilement certains raisonnements. En particulier nous considérons que $f_1^{-1}(\infty)$ n'est pas bien défini.

Lemme 5.3.3. *Soient $\gamma \in \Gamma$ et $n \in \mathbb{N}^*$ tels que ${f_n}^{-1}(\gamma)$ soit bien défini. Alors ${f_n}^{-1}(\gamma) \leq \gamma$.*

Démonstration. Immédiat d'après l'axiome (a3). □

D'autres propriétés importantes (même si leur preuves sont triviales) sont compilées dans les lemmes suivants :

Lemme 5.3.4. *Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ et $x, y \in \Gamma$, on a les propriétés suivantes :*

1. *Si $f_n(x) < f_n(y)$, alors $x < y$.*
2. *Si $f_n(x) \leq f_n(y)$ et $f_n(x) \neq \infty$, alors $x \leq y$.*
3. *Si $x < y$, alors $f_n(x) < f_n(y)$ ou $f_n(x) = f_n(y) = \infty$.*
4. *Si $x \leq y$, alors $f_n(x) \leq f_n(y)$.*

Démonstration.

1. Puisque ∞ est maximal, si $f_n(x) < f_n(y)$ alors $f_n(x) \neq \infty$. Et d'après l'axiome (b1) on obtient $x < y$.
2. Immédiat d'après *1* et la proposition 5.3.1.
3. Si $f(y) < f(x)$, alors d'après (i) $y < x$, ce qui contredit l'hypothèse. Si $f_n(x) = f_n(y) \neq \infty$, par la proposition 5.3.1, $x = y$; ce qui contredit aussi notre hypothèse.
4. Immédiat d'après *3*.

□

Lemme 5.3.5. *Pour tout $x, y \in \Gamma$, si $x \in f_n^{-1}(\{\infty\})$ et $x \leq y$, alors $y \in f_n^{-1}(\{\infty\})$.*

Démonstration. Supposons $f_n(y) \neq \infty$. Par maximalité de ∞ on a $f_n(y) < f_n(x)$ et, d'après le lemme 5.3.4, $y < x$. □

Lemme 5.3.6. *On a $f_m(\gamma) \leq f_m(f_n(\gamma))$, pour tous $\gamma \in \Gamma$ et $n, m \in \mathbb{N}^*$.*

Démonstration. D'après l'axiome (a3) on a $\gamma \leq f_n(\gamma)$, et donc $f_m(\gamma) \leq f_m(f_n(\gamma))$ par le lemme 5.3.4. □

Nous utiliserons par la suite ces propriétés, parfois sans le mentionner de façon explicite.

5.4 Confluence

Définition 5.4.1. Étant donnés $x, y \in \Gamma$, nous dirons que x *n-divise* y quand $y = f_n(x)$. Nous dirons que x *divise* y, si x n-divise y pour un certain $n \in \mathbb{N}^*$. Nous représentons ces deux situations par les deux diagrammes suivants :

$$x \xrightarrow{\ f_n\ } y \qquad\qquad x \longrightarrow y$$

Pour pouvoir rester dans la logique de premier ordre, nous avons définit nos axiomes de confluence en utilisant des schémas qui dépendent de p et q. Néanmoins, les propriétés de confluence qui nous intéresseront ne sont pas exprimables au premier ordre (il nous intéresse la divisibilité dans le sens précédent). Dans cette section nous voyons comment nos axiomes impliquent ces propriétés.

Nous travaillerons d'abord avec la confluence à gauche.

Lemme 5.4.2. *Si l'on remplace p et q par deux entiers naturels m et n tels que $pgcd(m, n) = 1$, l'axiome (c1) reste toujours vrai.*

Démonstration. Par récurrence. Afin d'éviter un alourdissement inutile de notation, on se contente de montrer le lemme pour le cas $m = p_1 \cdot p_2$ et $n = q_1 \cdot q_2$; étant analogue le cas général.

Soient $a, b, c \in \Gamma \setminus \{\infty\}$ tels que $f_m(a) = c$ et $f_n(b) = c$, et on veut trouver $d \in \Gamma$ tel que $f_m(d) = b$ et $f_n(d) = a$.

D'après l'axiome (a2) $f_m = f_{p_1} \circ f_{p_2}$ et $f_n = f_{q_1} \circ f_{q_2}$. Nous avons donc le diagramme suivant :

$$\begin{tikzcd}
a \arrow[r, "f_{p_1}"] & f_{p_1}(a) \arrow[dr, "f_{p_2}"] & \\
 & & c \\
b \arrow[r, "f_{q_1}"] & f_{q_1}(b) \arrow[ur, "f_{q_2}"] &
\end{tikzcd}$$

Par hypothèse $pgcd(p_i, q_j) = 1$, avec $i, j \in \{1, 2\}$. On peut alors appliquer l'axiome (c1), et on trouve d'abord un d_0 tel que :

$$\begin{tikzcd}
 & f_{p_1}(a) \arrow[dr, "f_{p_2}"] & \\
d_0 \arrow[ur, "f_{q_2}"] \arrow[dr, "f_{p_2}"'] & & c \\
 & f_{q_1}(b) \arrow[ur, "f_{q_2}"'] &
\end{tikzcd}$$

En appliquant encore deux fois l'axiome (c1) on obtient d_1 et d_2 tels que

$$\begin{tikzcd}
 & a \arrow[dr, "f_{p_1}"] & \\
d_1 \arrow[ur, "f_{q_2}"] \arrow[dr, "f_{p_1}"'] & & f_{p_1}(a) \\
 & d_0 \arrow[ur, "f_{q_2}"'] &
\end{tikzcd}
\qquad
\begin{tikzcd}
 & d_0 \arrow[dr, "f_{p_2}"] & \\
d_2 \arrow[ur, "f_{q_1}"] \arrow[dr, "f_{p_2}"'] & & f_{q_1}(b) \\
 & b \arrow[ur, "f_{q_1}"'] &
\end{tikzcd}$$

On trouve finalement un d_3 tel que :

$$
\begin{tikzcd}
 & & a \arrow[dr, "f_{p_1}"] & & \\
 & d_1 \arrow[ur, "f_{q_2}"] \arrow[dr, "f_{p_1}"] & & f_{p_1}(a) \arrow[dr, "f_{p_2}"] & \\
d_3 \arrow[ur, "f_{q_1}"] \arrow[dr, "f_{p_1}"] & & d_0 \arrow[ur, "f_{q_2}"] \arrow[dr, "f_{p_2}"] & & c \\
 & d_2 \arrow[ur, "f_{q_1}"] \arrow[dr, "f_{p_2}"] & & f_{q_1}(b) \arrow[ur, "f_{q_2}"] & \\
 & & b \arrow[ur, "f_{q_1}"] & &
\end{tikzcd}
$$

Le résultat découle immédiatement d'après l'axiome (a2).

□

Lemme 5.4.3. *Si $c \neq \infty$ et $f_{mk}(a) = f_{nk}(b) = c$ pour certains $m, n, k \in \mathbb{N}^*$, avec $pgcd(m, n) = 1$, alors il existe d tel que $f_n(d) = a$ et $f_m(d) = b$.*

Démonstration. D'après l'axiome (a2) et nos hypothèses, $f_k(f_m(a)) = f_k(f_n(b)) = c$. Puisque $c \neq \infty$, par la proposition 5.3.1 on a $f_m(a) = f_n(b)$. On utilise donc le lemme 5.4.2 pour trouver un d qui nous donne la configuration voulue, qui peut-être résumée dans le diagramme suivant :

$$
\begin{tikzcd}
 & a \arrow[d, "f_m"] \arrow[dr, "f_{mk}"] & \\
d \arrow[ur, "f_n"] \arrow[r, "f_{nm}"] \arrow[dr, "f_n"'] & c' \arrow[r, "f_k"] & c \\
 & b \arrow[u, "f_n"'] \arrow[ur, "f_{nk}"'] &
\end{tikzcd}
$$

□

Nous allons ensuite montrer les analogues des lemmes précédents pour la confluence à droite.

Lemme 5.4.4. *Si l'on remplace les nombres premiers p et q par des entiers naturels m et n tels que $pgcd(m, n) = 1$, l'axiome (c2) reste toujours vrai.*

Démonstration. Pour la même raison que dans 5.4.2, on se contente de montrer le lemme pour le cas $m = p_1 \cdot p_2$ et $n = q_1 \cdot q_2$. Soit un $x \in \Gamma$ avec $f_m(x) \neq \infty$ et $f_n(x) \neq \infty$, et nous voulons montrer $f_{mn}(x) \neq \infty$.

D'après l'axiome (a2) nous avons le diagramme suivant :

$$
\begin{tikzcd}
 & & f_m(x) \arrow[dr, "f_{q_1}"] & & \\
 & f_{p_1}(x) \arrow[ur, "f_{p_2}"] \arrow[dr, "f_{q_1}"] & & f_{mq_1}(x) \arrow[dr, "f_{q_2}"] & \\
x \arrow[ur, "f_{p_1}"] \arrow[dr, "f_{q_1}"] & & f_{p_1q_1}(x) \arrow[ur, "f_{p_2}"] \arrow[dr, "f_{q_2}"] & & f_{mn}(x) \\
 & f_{q_1}(x) \arrow[ur, "f_{p_1}"] \arrow[dr, "f_{q_2}"] & & f_{np_1}(x) \arrow[ur, "f_{p_2}"] & \\
 & & f_n(x) \arrow[ur, "f_{p_1}"] & &
\end{tikzcd}
$$

Par hypothèse $pgcd(p_i, q_j) = 1$, avec $i, j \in \{1, 2\}$. Puisque a et b sont différents de ∞, d'après le lemme 5.3.3 $f_{p_1}(x)$ et $f_{q_1}(x)$ sont aussi différents de ∞. On peut alors appliquer l'axiome (c2) pour obtenir $f_{p_1q_1}(x) \neq \infty$. Ensuite, puisque $f_m(x)$, $f_n(x)$ et $f_{p_1q_1}(x)$ sont tous différents de ∞, on peut appliquer encore deux fois l'axiome (c2) pour montrer $f_{mq_1}(x) \neq \infty$ et $f_{np_1}(x) \neq \infty$. On conclut finalement $f_{mn}(x) \neq \infty$.

$\square$

Lemme 5.4.5. *Si $f_{mk}(x) \neq \infty$ et $f_{nk}(x) \neq \infty$, avec pgcd$(m,n) = 1$, alors $f_{mnk}(x) \neq \infty$.*

Démonstration. D'après l'axiome (a2) nous avons le diagramme suivant :

$$\begin{tikzcd}
 & f_{mk}(x) \arrow[dr, "f_n"] & \\
x \arrow[ur, "f_{mk}"] \arrow[r, "f_k"] \arrow[dr, "f_{nk}"'] & f_k(x) \arrow[u, "f_m"'] \arrow[d, "f_n"] \arrow[r, "f_{mn}"] & f_{mnk}(x) \\
 & f_{nk}(x) \arrow[ur, "f_m"'] &
\end{tikzcd}$$

Puisque $f_{mk}(x) \neq \infty$ et $f_{nk}(x) \neq \infty$, on peut appliquer le lemme 5.4.4 sur $f_k(x)$ pour montrer que $f_{mnk}(x) \neq \infty$. $\square$

Le résultat suivant est important dans la section 5.6.

Proposition 5.4.6. *Nous avons la propriété de confluence à gauche et à droite pour la relation $\to$, c'est-à-dire :*

1. *Si $x \to z$ et $y \to z$, avec $z \neq \infty$, alors il existe un u tel que $u \to x$ et $u \to y$.*
2. *Si $u \to x$ et $u \to y$, avec x et y différents de ∞, alors il existe un $z \neq \infty$ tel que $x \to z$ et $y \to z$.*

Démonstration. La première partie est une conséquence immédiate du lemme 5.4.3, et la deuxième du lemme 5.4.5. $\square$

5.5 Développement de $\bar{a}$

Dans cette section nous définissons le *développement* d'un uplet, notion qui est essentielle pour la preuve du théorème principal. Avant de pouvoir donner cet définition, nous précisons les analogies entre f_m et « multiplication par m » , et f_m^{-1} et « division par m » .

Définition 5.5.1. Soit $q \in \mathbb{Q}_{>0}$ un nombre rationnel positif. Nous appelons *représentation de q* une suite $(m_1^{\varepsilon_1}, \ldots, m_l^{\varepsilon_l})$, avec $m_i \in \mathbb{N}^*$ et $\varepsilon_i \in \{1, -1\}$, telle que

$$\frac{\prod_{i \in I} m_i}{\prod_{i \in I'} m_i} = q,$$

où $I = \{i : \varepsilon_i = 1\}$ et $I' = \{i : \varepsilon_i = -1\}$.

On pose $m_I = \prod_{i \in I} m_i$ et $m_{I'} = \prod_{i \in I'} m_i$. Si $I = \emptyset$ (resp. $I' = \emptyset$) on pose $m_I = 1$ (resp. $m_{I'} = 1$).

Définition 5.5.2. Si $q \in \mathbb{Q}_{>0}$, avec $q = \frac{r}{s}$ et $pgcd(r,s) = 1$, on appelle $C_q = (r^1, s^{-1})$ la *représentation canonique* de q.

Définition 5.5.3. Étant donné $a \in \Gamma$, $q \in \mathbb{Q}_{>0}$ et $M_q = (m_1^{\varepsilon_1}, \ldots, m_l^{\varepsilon_l})$ une représentation de q, on peut considérer de façon naturelle $M_q(a) = f_{m_l}^{\varepsilon_l}(\ldots(f_{m_1}^{\varepsilon_1}(a))\ldots)$. Il se peut que cette expression ne soit pas bien définie, notamment si pour un $i \leq l$, $\varepsilon_i = -1$ et $f_{m_i}^{-1}(\ldots(f_{m_1}^{\varepsilon_1}(a))\ldots)$ n'est pas bien défini. On dira alors que $M_q(a)$ est *bien défini* si $f_{m_i}^{\varepsilon_i}(\ldots(f_{m_1}^{\varepsilon_1}(a))\ldots)$ est bien défini pour tout $i \leq l$.

Remarque 5.5.4. D'après l'axiome (a3) et la remarque 5.3.2, pour tout $a \in \Gamma$ et $q \in \mathbb{Q}_{>0}$, si $C_q(a)$ est bien défini alors $C_q(a) \neq \infty$.

Remarque 5.5.5. Si $q, q' \in \mathbb{Q}_{>0}$, et $M_q = (m_1^{\varepsilon_1}, \ldots, m_l^{\varepsilon_l}), N_{q'} = (n_1^{\delta_1}, \ldots, n_{l'}^{\delta_{l'}})$ sont des représentations de q et q' respectivement, alors $M_g{}^\frown N_{q'} = (m_1^{\varepsilon_1}, \ldots, m_l^{\varepsilon_l}, n_1^{\delta_1}, \ldots, n_{l'}^{\delta_{l'}})$ est une représentation de $q \cdot q'$. De plus, si $a \in \Gamma$ et $N_{q'}(M_q(a))$ est bien défini, $M_q{}^\frown N_{q'}(a) = N_{q'}(M_q(a))$.

Lemme 5.5.6. *Soient $a \in \Gamma$ et $N = n_1 \cdot \ldots \cdot n_l$, avec $n_1, \ldots, n_l \in \mathbb{N}^*$. Alors $f_N^{-1}(a)$ est bien défini si et seulement si $f_{n_l}^{-1}(\ldots(f_{n_1}^{-1}(a))\ldots)$ est bien défini. De plus, dans ce cas, $f_N^{-1}(a) = f_{n_l}^{-1}(\ldots(f_{n_1}^{-1}(a))\ldots)$.*

Démonstration. Par récurrence dans l, le nombre de facteurs de N. Si $l = 1$ il n'y a rien à faire. Supposons donc vrai l'énoncé pour $l - 1$.

Supposons que $f_N^{-1}(a)$ est bien défini.

Notons d'abord que cela implique $a \neq \infty$. Nous avons aussi, d'après l'axiome (a2), le diagramme suivant :

$$\begin{tikzcd}
f_N^{-1}(a) \arrow[rr, "f_N"] \arrow[dr, "f_{n_l}"'] & & a \\
& f_{n_l}(f_N^{-1}(a)) \arrow[ur, "f_{n_1\cdot\ldots\cdot n_{l-1}}"'] &
\end{tikzcd}$$

On a donc $f_{n_l}(f_N^{-1}(a)) \in f_{n_1\cdot\ldots\cdot n_{l-1}}^{-1}(\{a\})$ et $a \neq \infty$. En appliquant alors la proposition 5.3.1 on obtient que $f_{n_1\cdot\ldots\cdot n_{l-1}}^{-1}(a)$ est bien défini et $f_{n_1\cdot\ldots\cdot n_{l-1}}^{-1}(a) = f_{n_l}(f_N^{-1}(a))$.

D'autre part, puisque $f_{n_1\cdot\ldots\cdot n_{l-1}}^{-1}(a)$ est bien défini, par hypothèse de récurrence on a que $f_{n_{l-1}}^{-1}(\ldots(f_{n_1}^{-1}(a))\ldots)$ est bien défini et $f_{n_1\cdot\ldots\cdot n_{l-1}}^{-1}(a) = f_{n_l}^{-1}(\ldots(f_{n_1}^{-1}(a))\ldots)$.

Finalement, puisque $f_N^{-1}(a) \in f_{n_l}^{-1}(\{f_{n_1\cdot\ldots\cdot n_{l-1}}^{-1}(a)\})$ et $f_{n_1\cdot\ldots\cdot n_{l-1}}^{-1}(a) \leq a < \infty$, on peut encore appliquer la proposition 5.3.1, obtenant ainsi que $f_{n_l}^{-1}(f_{n_1\cdot\ldots\cdot n_{l-1}}^{-1}(a))$ est bien défini, et $f_{n_l}^{-1}(f_{n_1\cdot\ldots\cdot n_{l-1}}^{-1}(a)) = f_N^{-1}(a)$.

Réciproquement, si $f_{n_l}^{-1}(\ldots(f_{n_1}^{-1}(a))\ldots)$ est bien défini, $a \neq \infty$.

D'autre part, puisque $f_N = f_{n_l} \circ f_{n_{l-1}} \circ \cdots \circ f_{n_1}$ par l'axiome (a2), $f_{n_l}^{-1}(\ldots(f_{n_1}^{-1}(a))\ldots) \in f_N^{-1}(\{a\})$. On applique alors la proposition 5.3.1, obtenant ainsi que $f_N^{-1}(a)$ est bien défini et $f_N^{-1}(a) = f_{n_l}^{-1}(\ldots(f_{n_1}^{-1}(a))\ldots)$.

$\square$

Définition 5.5.7. Soit $q \in \mathbb{Q}_{>0}$ et M_q un représentation de q. L'*alternance* de M_q, noté $alt(M_q)$, est le nombre d'indices $i \in \{1, \ldots, l\}$ tels que $\varepsilon_i \neq \varepsilon_{i+1}$.

Lemme 5.5.8. *Soient $a \in \Gamma$ et $q \in \mathbb{Q}_{>0}$, et M_q une représentation de q tel que $M_q(a)$ soit bien défini. L'une des deux options suivantes est vraie :*

(a) $M_q(a) = \infty$

(b) $C_q(a)$ est bien défini et $C_q(a) = M_q(a) \neq \infty$

Démonstration. Disons $q = \frac{r}{s}$, avec $pgcd(r, s) = 1$.

Nous allons montrer, par récurrence sur $alt(M_q)$, que si $M_q(a) \neq \infty$ alors $C_q(a)$ est bien défini et égal à $M_q(a)$.

Supposons d'abord $alt(M_q) = 0$.

Si $M_q = (m_1^1, \ldots, m_l^1)$, alors $m_I = \prod_{1 \leq i \leq l} m_i$ et puisque M_q est une représentation de q, $m_I = \frac{r}{s}$. Mais $pgcd(r, s) = 1$, donc $s = 1$ et $r = m_I$.

Par définition $M_q(a) = f_{m_l}(\ldots(f_{m_1}(a))\ldots) = f_{m_l} \circ \cdots \circ f_{m_1}(a)$ et par l'axiome (a2) $f_{m_l} \circ \cdots \circ f_{m_1}(a) = f_{m_I}(a) = f_r(a)$.
D'autre part, rappelons que $C_q(a) = f_s^{-1}(f_r(a))$ si cette expression est bien définie. Or $f_s^{-1} = Id$ et $f_r(a) \neq \infty$, donc $C_q(a)$ est bien défini et il est égal à $f_r(a)$. Alors $M_q(a) = C_q(a)$.

Si $M_q = (m_1^{-1}, \ldots, m_l^{-1})$, alors $m_{I'} = \prod_{1 \leq i \leq l} m_i$, et raisonnant de la même façon qu'avant $r = 1$ et $s = m_{I'}$.

Dans ce cas $C_q(a) = f_s^{-1}(a)$, si cette expression est bien définie. Or par hypothèse $M_q(a)$ est bien défini, c'est-à-dire $f_{m_l}^{-1}(\ldots(f_{m_1}^{-1}(a))\ldots)$ est bien défini. On peut appliquer alors le lemme 5.5.6, qui nous assure que $f_{m_1 \cdot \ldots \cdot m_1}(a)$ est bien définie et égal à $f_{m_l}^{-1}(\ldots(f_{m_1}^{-1}(a))\ldots)$. Puisque $s = m_{I'}$, on conclut que $C_q(a)$ est bien défini est $C_q(a) = M_q(a)$.

Supposons maintenant l'énoncé vrai pour $alt(M_q) \leq n - 1$.

Soit $k = \min\{i < n : \varepsilon_i \neq \varepsilon_{i+1} = \varepsilon_{i+2} = \cdots = \varepsilon_l\}$.
Si $M_q = (m_1^{\varepsilon_1}, \ldots, m_k^{\varepsilon_k}, m_{k+1}^{\varepsilon_{k+1}}, \ldots, m_l^{\varepsilon_l})$, on peut voir $(m_1^{\varepsilon_1}, \ldots, m_k^{\varepsilon_k})$ comme une représentation d'un certain $q_1 \in \mathbb{Q}_{>0}$ et $(m_{k+1}^{\varepsilon_{k+1}}, \ldots, m_l^{\varepsilon_l})$ comme une représentation d'un autre $q_2 \in \mathbb{Q}_{>0}$. Soit $M_{q_1}^1 = (m_1^{\varepsilon_1}, \ldots, m_k^{\varepsilon_k})$ et $M_{q_2}^2 = (m_{k+1}^{\varepsilon_{k+1}}, \ldots, m_l^{\varepsilon_l})$. Soit aussi $q_i = \frac{r_i}{s_i}$, avec $pgcd(r_i, s_i) = 1$, pour $i = 1, 2$.

Par définition $q = q_1 \cdot q_2$ et $M_q(a) = M_{q_2}(M_{q_1}(a))$. Puisque $M_{q_1}(a)$ es bien défini, on peut appliquer l'hypothèse de récurrence pour obtenir que $M_{q_1}(a) = C_{q_1}(a)$. De même pour $M_{q_2}(C_{q_1}(a))$. On obtient ainsi $M_q(a) = C_{q_2}(C_{q_1}(a))$.

En plus, puisque $alt(M_{q_2}) = 0$, C_{q_2} est égal soit à $(1, s_2^{-1})$ soit à $(r_2^1, 1^{-1})$. On traite les deux cas séparément.

Supposons d'abord que $C_{q_2} = (1, s_2^{-1})$. Nous pouvons exprimer la situation par le diagramme suivant :

$$\begin{tikzcd}[column sep=small]
C_{q_2}(C_{q_1}(a)) & & C_{q_1}(a) \arrow[ll, "f_{s_2}^{-1}"'] & & \\
& & & & f_{r_1}(a) \arrow[ull, "f_{s_1}^{-1}"'] \\
& & a \arrow[urr, "f_{r_1}"'] & &
\end{tikzcd}$$

On a $f_{r_1}(a) \neq \infty$, puisque $M_q(a)$ $(= C_{q_2}(C_{q_1}(a)))$ est bien défini et $M_q(a) \neq \infty$ par hypothèse.

Soit $pgcd(r_1, s_2) = \mu$, avec $r_1 = r'_1 \cdot \mu$ et $s_2 = s'_2 \cdot \mu$. En utilisant l'axiome (a2) et la proposition 5.3.1, on obtient au diagramme suivant :

$$\begin{tikzcd}
C_{q_2}(C_{q_1}(a)) \arrow[d, "f_{s_1 \cdot s'_2}"] \arrow[dr, "f_{s_1 \cdot s'_2 \cdot \mu}"] & \\
x \arrow[r, "f_\mu"] & f_{r_1}(a) \\
a \arrow[u, "f_{r'_1}"'] \arrow[ur, "f_{r'_1 \cdot \mu}"'] &
\end{tikzcd}$$

On a alors que $M_q(a) \in f^{-1}_{s_1 \cdot s'_2}(\{x\})$, et puisque $x \leq f_{r_1}(a) < \infty$ on peut appliquer la proposition 5.3.1 pour en déduire que $f^{-1}_{s_1 \cdot s'_2}(x)$ est bien défini et $f^{-1}_{s_1 \cdot s'_2}(x) = M_q(a)$.

D'autre part $q = q_1 \cdot q_2 = \frac{r_1}{s_1} \cdot \frac{1}{s_2} = \frac{r'_1 \cdot \mu}{s_1 \cdot s'_2 \cdot \mu} = \frac{r'_1}{s_1 \cdot s'_2}$, avec $pgcd(r'_1, s_1 \cdot s'_2) = 1$. Or l'expression $q = \frac{r}{s}$ avec $pgcd(r, s) = 1$ est unique. Nous avons donc $r = r'_1$ et $s = s_1 \cdot s'_2$.

Finalement, par définition, $C_q(a) = f_s^{-1}(f_r(a))$, si cette expression est bien définie. Or par hypothèse $M_q(a)$ est bien défini et nous venons de montrer que $M_q(a) = f^{-1}_{s_1 \cdot s'_2}(x) = f_s^{-1}(x) = f_s^{-1}(f_{r'_1}(a)) = f_s^{-1}(f_r(a))$.

Supposons maintenant que $C_{q_2} = (r_2^1, 1^{-1})$, ce qui nous donne cette configuration :

$$\begin{tikzcd}[column sep=small]
& & C_{q_2}(C_{q_1}(a)) \\
C_{q_1}(a) \arrow[urr, "f_{r_2}"] & & \\
& & f_{r_1}(a) \arrow[ull, "f_{s_1}^{-1}"'] \\
a \arrow[urr, "f_{r_1}"] & &
\end{tikzcd}$$

avec $C_{q_2}(C_{q_1}(a))$ $(= M_q(a))$ et $f_{r_1}(a)$ différents de ∞.

Soit $pgcd(s_1, r_2) = \mu$, avec $s_1 = s'_1 \cdot \mu$ et $r_2 = r'_2 \cdot \mu$. Grâce à l'axiome (a2) et le lemme 5.4.5, $x \neq \infty$ et nous avons le diagramme suivant :

$$\begin{tikzcd}
& C_{q_2}(C_{q_1}(a)) \arrow[dr, "f_{s'_1}"] & \\
C_{q_1}(a) \arrow[ur, "f_{r'_2 \cdot \mu}"] \arrow[r, "f_\mu"] \arrow[dr, "f_{s'_1 \cdot \mu}"'] & f_\mu(C_{q_1}(a)) \arrow[u, "f_{r'_2}"'] \arrow[d, "f_{s'_1}"] \arrow[r, "f_{r'_2 \cdot s'_1}"] & x \\
& f_{r_1}(a) \arrow[ur, "f_{r'_2}"'] &
\end{tikzcd}$$

Nous avons alors $C_{q_2}(C_{q_1}(a)) \in f_{s'_1}^{-1}(\{x\})$, et donc $f_{s'_1}^{-1}(x)$ est bien défini et $f_{s'_1}^{-1}(x) = C_{q_2}(C_{q_1}(a)) = M_q(a)$.

D'autre part $q = q_1 \cdot q_2 = \frac{r_1}{s_1} \cdot r_2 = \frac{r_1 \cdot r'_2 \cdot \mu}{s'_1 \cdot \mu} = \frac{r_1 \cdot r'_2}{s'_1}$, avec $pgcd(r_1 \cdot r'_2, s'_1) = 1$. De façon analogue au cas précédent, nous avons $r = r_1 \cdot r'_2$ et $s = s'_1$.

Finalement $M_q(a) = f_{s'_1}^{-1}(x) = f_s^{-1}(x) = f_s^{-1}(f_{r_1 \cdot r'_2}(a)) = f_s^{-1}(f_r(a))$. Or cette expression est exactement la définition de $C_q(a)$. Nous avons donc montré que $C_q(a)$ est bien défini et $C_q(a) = M_q(a) \neq \infty$.

$\square$

Lemme 5.5.9. *Soient $a \in \Gamma$ et $q \in \mathbb{Q}_{>0}$, avec $q = \frac{r}{s}$ et $pgcd(r,s) = 1$. Considérons les énoncés suivants :*

(i) Il existe M_q représentation de q tel que $M_q(a)$ soit bien défini et $M_q(a) = \infty$;

(ii) $f_r(a) = \infty$;

(iii) Pour tout M_q représentation de q, si $M_q(a)$ est bien défini alors $M_q(a) = \infty$.

Alors (i)⇒(ii)⇒(iii).

Démonstration. (i)⇒(ii) Soit M_q une représentation de q, avec $M_q(a)$ bien défini et $M_q(a) = \infty$. Disons $M_q = (m_1^{\varepsilon_1}, \dots, m_l^{\varepsilon_l})$.

Si $f_{m_1}^{\varepsilon_1}(a) = \infty$, puisque $M_q(a)$ est bien défini, $\varepsilon_1 = \dots = \varepsilon_l = 1$. Dans ce cas, par définition de représentation, $m_1 \cdot \dots \cdot m_l = q = \frac{r}{s}$ et donc $r = m_1 \cdot \dots \cdot m_l$ et $s = 1$.

Alors $f_r(a) = f_{m_1 \cdot \dots \cdot m_l}(a) = f_{m_2 \cdot \dots \cdot m_l}(f_{m_1}(a)) \geq f_{m_1}(a) = \infty$. D'où $f_r(a) = \infty$.

Supposons alors $f_{m_1}^{\varepsilon_1}(a) \neq \infty$, et soit $k = \min\{i \leq n : f_{m_i}^{\varepsilon_i}(f_{m_{i-1}}^{\varepsilon_{i-1}}(\dots(f_{m_1}^{\varepsilon_1}(a))\dots)) = \infty\}$.

Notons d'abord que $k \geq 2$ par hypothèse, et que $\varepsilon_k = 1$, puisque si $\varepsilon_k = -1$ alors $f_{m_k}^{\varepsilon_k}(f_{m_{k-1}}^{\varepsilon_{k-1}}(\dots(f_{m_1}^{\varepsilon_1}(a))\dots)) \leq f_{m_{k-1}}^{\varepsilon_{k-1}}(\dots(f_{m_1}^{\varepsilon_1}(a))\dots)$, et donc $f_{m_{k-1}}^{\varepsilon_{k-1}}(\dots(f_{m_1}^{\varepsilon_1}(a))\dots) = \infty$; ce qui contredirait la minimalité de k.

D'autre part, puisque $M_q(a)$ est bien défini et $f_{m_k}^{\varepsilon_k}(f_{m_{k-1}}^{\varepsilon_{k-1}}(\dots(f_{m_1}^{\varepsilon_1}(a))\dots)) = \infty$, on a que $\varepsilon_{k+1} = \varepsilon_{k+2} = \dots = \varepsilon_l = 1$.

Alors $M_q = (m_1^{\varepsilon_1}, \dots, m_{k-1}^{\varepsilon_{k-1}}, m_k^1, \dots, m_{k+1}^1, \dots, m_l^1)$.

Soient $I_k = \{i \leq k-1 : \varepsilon_i = 1\}$, $I'_k = \{i \leq k-1 : \varepsilon_i = -1\}$, $K = \{i : k \leq i \leq l\}$, $m_{I_k} = \prod_{i \in I_k} m_i$, $m_{I'_k} = \prod_{i \in I'_k} m_i$ et $m_K = \prod_{i \in K} m_i$. Puisque $\varepsilon_i = 1$ pour tout $i \geq k$, par définition de représentation $s = m_{I'_k}$ et $r = m_{I_k} \cdot m_K$.

Considérons $q_0 = \frac{m_{I_k}}{s}$. Alors $(m_1^{\varepsilon_1}, \dots, m_{k-1}^{\varepsilon_{k-1}})$ est une représentation de q_0. Posons $N_{q_0} = (m_1^{\varepsilon_1}, \dots, m_{k-1}^{\varepsilon_{k-1}})$.

Puisque $N_{q_0}(a)$ est bien défini et $N_{q_0}(a) \neq \infty$, on peut appliquer le lemme 5.5.8 pour en déduire que $C_{q_0}(a)$ est bien défini et $N_{q_0}(a) = C_{q_0}(a)$.

D'autre part

$$\begin{aligned} M_q(a) &= f_{m_l}^{\varepsilon_l}(\dots(f_{m_{k+1}}^{\varepsilon^{k+1}}(f_{m_k}^{\varepsilon^k}(N_{q_0}(a))))\dots) = f_{m_l}(\dots(f_{m_{k+1}}(f_{m_k}(N_{q_0}(a))))\dots) \\ &= f_{m_l} \circ \dots \circ f_{m_{k+1}} \circ f_{m_k}(N_{q_0}(a)) = f_{m_K}(N_{q_0}(a)) = f_{m_K}(C_{q_0}(a)). \end{aligned}$$

Donc $f_{m_K}(C_{q_0}(a)) = \infty$.

Mais par définition $C_{q_0}(a) = f_s^{-1}(f_{m_{I_k}}(a)) \leq f_{m_{I_k}}(a)$. On applique alors le lemme 5.3.5 pour obtenir $f_{m_K}(f_{m_{I_k}}(a)) = \infty$. Mais $f_{m_K}(f_{m_{I_k}}(a)) = f_{m_K} \circ f_{m_{I_k}}(a) = f_{m_K \cdot m_{I_k}}(a) = f_r(a)$.

(ii)⇒(iii) Supposons qu'il existe M_q, représentation de q, tel que $M_q(a)$ soit bien défini et $M_q(a) \neq \infty$.

Par le lemme 5.5.8 $C_q(a) = f_s^{-1}(f_r(a))$ est bien défini. On en déduit alors $f_r(a) \neq \infty$. □

Proposition 5.5.10. *Soient $q \in \mathbb{Q}_{>0}$ $a \in \Gamma$, et M_q,N_q deux représentations de q. Si $M_q(a)$ et $N_q(a)$ sont bien définis alors $M_q(a) = N_q(a)$.*

Démonstration. Si $M_q(a) = \infty$, d'après le lemme 5.5.9 $N_q(a) = \infty$.

Si $M_q(a) \neq \infty$, par le lemme 5.5.9 encore, $N_q(a) \neq \infty$. Puisque M_q et N_q sont toutes les deux de représentations de q, nous pouvons appliquer le lemme 5.5.8 pour conclure $M_q(a) = C_q(a) = N_q(a)$. □

D'après la proposition 5.5.10, la notation suivante est bien justifiée :

Définition 5.5.11. Si $a \in \Gamma$ et $q \in \mathbb{Q}_{>0}$, nous écrirons $f_q(a)$ pour désigner $M_q(a)$, où M_q est une représentation de q tel que $M_q(a)$ est bien défini. Nous dirons alors que $f_q(a)$ est *bien défini* quand il existe un tel M_q.

Remarque 5.5.12. Soient $a \in \Gamma$ et $q \in \mathbb{Q}_{>0}$, avec $q = \frac{r}{s}$ et $pgcd(r, s) = 1$.

D'après les lemmes 5.5.8 et 5.5.9, si $f_q(a)$ est bien défini, alors une des deux options suivantes est vraie :

1. $f_q(a) = C_q(a) \neq \infty$
2. $f_q(a) = f_r(a) = \infty$

Remarque 5.5.13. Si $f_q(a)$ est bien défini et $f_q(a) \neq \infty$, alors par le lemme 5.4.2 on a que $f_s^{-1}(a)$ est bien défini, et $f^r(f_s^{-1}(a)) = f_q(a) = C_q(a) = f_s^{-1}(f_r(a))$.

Remarque 5.5.14. Soit $q \in \mathbb{Q}_{>0}$. D'après la remarque 5.3.2, si $f_q(\infty)$ est bien défini, alors $q \in \mathbb{N}^*$ (et donc $f_q(\infty) = \infty$).

Nous arrivons ainsi à la définition qui nous intéresse.

Définition 5.5.15. On appelle *développement* de a, noté $\langle a \rangle$, l'ensemble $\{f_q(a) : q \in \mathbb{Q}_{>0}$ et $f_q(a)$ est bien défini$\}$. Si $\bar{a} \subset \Gamma$ est un uplet, on définit $\langle \bar{a} \rangle = \bigcup_{a_i \in \bar{a}} \langle a_i \rangle$.

Remarque 5.5.16. D'après la remarque 5.5.14 on a $\langle \infty \rangle = \{\infty\}$.

Définition 5.5.17. Nous écrirons $\mathcal{O}_{\bar{a}}$, ou $\mathcal{O}_{\bar{a}}(\bar{x})$, et parlerons de l'*ordre* de $\langle \bar{a} \rangle$, pour dénoter le diagramme libre de $\bar{a}$ dans le langage $\{\leq, (f_q)_{q\in\mathbb{Q}_{>0}}, (dom_q)_{q\in\mathbb{Q}_{>0}}, \infty\}$, où les dom_q sont des prédicats qui précisent les domaines des f_q.

Nous avons alors que $\mathcal{O}_{\bar{a}}$ est l'objet qui nous donne l'information suivante :

1. Pour chaque $a_i \in \bar{a}$ et $q \in \mathbb{Q}_{>0}$, si $f_q(a_i)$ est bien défini ou non ;
2. Pour chaque $f_q(a_i), f_{q'}(a_j) \in \langle \bar{a} \rangle$, laquelle des trois options suivantes est vraie :
   – $f_q(a_i) < f_{q'}(a_j)$,
   – $f_q(a_i) > f_{q'}(a_j)$,
   – $f_q(a_i) = f_{q'}(a_j)$.

Remarque 5.5.18. Notons que $\mathcal{O}_a$ est préservé par extension élémentaire.

Nous donnons quelques propriétés utiles de $\langle \bar{a} \rangle$.

Proposition 5.5.19. *Soient $q, q' \in \mathbb{Q}_{>0}$ et $a \in \Gamma$. Si $f_{q'} \circ f_q(a)$ est bien défini, alors $f_{q'\cdot q}(a)$ est bien défini et égal à $f_{q'} \circ f_q(a)$.*

Démonstration. Pour des représentations M_q et $N_{q'}$ de q et q' respectivement on a $f_{q'} \circ f_q(a) = f_{q'}(f_q(a)) = N_{q'}(M_q(a)) = N_{q'}{}^\frown M_q(a)$. Mais d'après la remarque 5.5.5, $N_{q'}{}^\frown M_q$ est une représentation de $q \cdot q'$. □

Remarque 5.5.20. Il se peut que $f_{q'\cdot q}(a)$ soit bien défini mais pas $f_{q'} \circ f_q(a)$; par exemple, si $q' = s$, $q = \frac{1}{s}$ et $f_s^{-1}(a)$ n'est pas bien défini.

Proposition 5.5.21. *Soit $q \in \mathbb{Q}_{>0}$, avec $q = \frac{r}{s}$ et $pgcd(r, s) = 1$. Alors $f_q \mid_{dom(f_q)\setminus f_q^{-1}(\{\infty\})}$ est injective.*

Démonstration. Soient $x, y \in \Gamma$ tels que $f_q(x)$ et $f_q(y)$ soient bien définis et $f_q(x) = f_q(y) \neq \infty$. Par la remarque 5.5.12 on a $f_r(x) \neq \infty$, $f_r(y) \neq \infty$ et $C_q(x) = C_q(y)$. Alors $f_r(x) = f_r(y)$ et par la proposition 5.3.1 on conclut $x = y$. □

De façon analogue qu'avec les f_n, la proposition 5.5.21 nous permet de définir les inverses : si $a \in \Gamma$ et $q \in \mathbb{Q}_{>0}$, nous dirons que $f_q^{-1}(a)$ est *bien défini* si $a \neq \infty$ et s'il existe $b \in \Gamma$ tel que $f_q(b)$ soit bien défini et $f_q(b) = a$. Dans ce cas $f_q^{-1}(a) := b$.

Lemme 5.5.22. *Soit $a \in \Gamma$ et $q \in \mathbb{Q}_{>0}$. Alors $f_{\frac{1}{q}}(a)$ est bien défini et différent de ∞ si et seulement si et $f_q^{-1}(a)$ est bien défini et différent de ∞. Dans ce cas $f_q^{-1}(a) = f_{\frac{1}{q}}(a)$.*

Note: Par définition « $f_q^{-1}(a)$ bien défini et différent de ∞ » est équivalent à « $f_q^{-1}(a)$ est bien défini » .

Démonstration. Supposons $f_{\frac{1}{q}}(a)$ bien défini et différent de ∞. Par la remarque 5.5.12, $f_{\frac{1}{q}}(a) = C_{\frac{1}{q}}(a) = f_r^{-1} f_s(a)$.

D'une part $f_s(a) \neq \infty$ puisque $C_{\frac{1}{q}}(a)$ est bien défini. D'autre part $f_r(f_{\frac{1}{q}}(a)) = f_s(a)$, donc $a \in f_s^{-1}(\{f_r(f_{\frac{1}{q}}(a))\})$. Mais $f_r(f_{\frac{1}{q}}(a)) = f_s(a) \neq \infty$, donc par la proposition 5.3.1

$f_s^{-1}(f_r(f_{\frac{1}{q}}(a)))$ est bien défini et égal à a, c'est-à-dire $f_q(f_{\frac{1}{q}}(a)) = a$. Or par hypothèse $f_{\frac{1}{q}}(a) \neq \infty$; on peut donc appliquer la proposition 5.5.21 pour conclure que $f_q^{-1}(a)$ est bien défini et $f_q^{-1}(a) = f_{\frac{1}{q}}(a)$.

Pour la réciproque, supposons que $x = f_q^{-1}(a)$ est bien défini. Par définition $a \neq \infty$ et $f_q(x) = a$. D'après la remarque 5.5.12, $a = f_q(x) = C_q(x) = f_s^{-1}(f_r(x))$, et par le lemme 5.5.9, on a $f_r(x) \neq \infty$. D'autre part $f_s(a) = f_r(x) \neq \infty$, donc encore par la proposition 5.3.1 on a que $f_r^{-1}(f_s(a))$ est bien défini et égal à x. Mais par définition (s^1, r^{-1}) est une représentation de q, donc $f_r^{-1}(f_s(a)) = f_{\frac{1}{q}}$. □

Lemme 5.5.23. *Soient $a, b, c \in \Gamma$ tels que $b \in \langle a \rangle$ et $c \in \langle b \rangle$. Alors $c \in \langle a \rangle$.*

Démonstration. Disons $b = f_q(a)$ et $c = f_{q'}(b)$. D'après la proposition 5.5.19, $f_{q \cdot q'}(a)$ est bien défini, donc $f_{q \cdot q'}(a) \in \langle a \rangle$, et $f_{q \cdot q'}(a) = c$. □

Lemme 5.5.24. *Soit $a \in \Gamma \setminus \{\infty\}$. Si $b \in \langle a \rangle$ et $b \neq \infty$, alors $\langle a \rangle = \langle b \rangle$.*

Démonstration. Si $c \in \langle b \rangle$, par le lemme 5.5.23, $c \in \langle a \rangle$.

Réciproquement, si $b = f_q(a) \in \langle \bar{a} \rangle$, par la proposition 5.5.21 nous avons que $f_q^{-1}(b)$ est bien défini et égal à a. D'après le lemme 5.5.22 $f_{\frac{1}{q}}(b)$ est bien défini, donc $f_{\frac{1}{q}}(b) \in \langle b \rangle$, et $f_{\frac{1}{q}}(b) = f_q^{-1}(b) = a$. Le reste est une conséquence du lemme 5.5.23. □

Proposition 5.5.25. *Pour tout uplet $\bar{a} = (a_1, \ldots, a_k) \in \Gamma$ et $n \in \mathbb{N}^*$ on a*

$$f_n(\Gamma) \cap \langle \bar{a} \rangle = f_n(\langle \bar{a} \rangle).$$

Démonstration. Puisque $\langle \bar{a} \rangle = \bigcup_{i=1}^{k} \langle a_i \rangle$, il suffit de montrer l'énoncé pour $k = 1$. On considère alors $a \in \Gamma$.

L'inclusion $f_n(\langle a \rangle) \subseteq f_n(\Gamma) \cap \langle a \rangle$ est triviale.

Réciproquement, soit $x \in f_n(\Gamma) \cap \langle a \rangle$. Si $x = \infty$, comme $f_n(x) \geq x$ on a $f_n(x) = x \in f_n(\Gamma) \cap \langle a \rangle$.

Supposons maintenant $x \neq \infty$. On a $x = f_n(y)$ pour un certain $y \in \Gamma$, et il suffit alors de montrer que $y \in \langle a \rangle$.

Puisque $x \neq \infty$, par la proposition 5.3.1 toujours $f_n^{-1}(x)$ est bien défini, donc il appartient à $\langle x \rangle$, et il est égal à y. D'après le lemme 5.5.23 on a que $y \in \langle a \rangle$.

□

5.6 Coupures et voisins

Dans cette section nous considérons $\bar{a} = (a_1, \ldots, a_n)$ un uplet de Γ, $\langle \bar{a} \rangle$ son développement, et $\mathscr{C}(\langle \bar{a} \rangle)$ sera l'ensemble des coupures de $\langle \bar{a} \rangle$, aussi noté $\mathscr{C}$ si $\langle \bar{a} \rangle$ est sous-entendu. Nous dénoterons souvent par $c = (A, B)$ un élément quelconque de $\mathscr{C}(\langle \bar{a} \rangle)$.

Si $\infty \in \langle \bar{a} \rangle$, alors ∞^* désigne la coupure $(\langle \bar{a} \rangle, \emptyset)$; elle est rationnelle, puisque $\langle \bar{a} \rangle$ a un élément maximal : ∞.

5.6.1 Coupures et fonctions

Définition 5.6.1. Soit $c = (A, B) \in \mathscr{C}(\langle \bar{a} \rangle)$. Nous dirons que c est *réalisable* si le type partiel $\{a < x < b : a \in A, b \in B\}$ (on écrira $A < x < B$) est consistent avec $\mathcal{T}$. On dénotera l'ensemble de coupures réalisables par $\mathscr{C}^R(\langle \bar{a} \rangle)$, ou si le contexte est clair, par $\mathscr{C}^R$.

Si $c = (A, B) \in \mathscr{C}^R$, et α est un certain élément d'une extension élémentaire de Γ, on utilise $\alpha \vDash c$ pour désigner le fait que $\alpha \vDash A < x < B$.

Remarque 5.6.2. Si $c, c' \in \mathscr{C}^R(\langle \bar{a} \rangle)$, et α est un élément dans une extension élémentaire de Γ tel que $\alpha \vDash c$ et $\alpha \vDash c'$, alors $c = c'$.

Définition 5.6.3. Soit $\mathscr{D}(\langle \bar{a} \rangle) := \mathscr{C}^R(\langle \bar{a} \rangle) \cup \{\infty^*\}$ si $\infty \in \langle \bar{a} \rangle$, et $\mathscr{D}(\langle \bar{a} \rangle) := \mathscr{C}^R(\langle \bar{a} \rangle)$ si $\infty \notin \langle \bar{a} \rangle$. S'il n'y a pas d'ambiguïté on utilise $\mathscr{D}$ au lieu de $\mathscr{D}(\langle \bar{a} \rangle)$.

Définition 5.6.4. Soit $c = (A, B)$ une coupure de $\mathscr{D}$ et $f \in \{f_n\}_{n \in \mathbb{N}^*}$. Si $A \neq \emptyset$ et $B \neq \emptyset$, nous définisons $A_f = \{x \in \langle \bar{a} \rangle : x \leq f(a)$ pour un certain $a \in A\}$ et $B_f = \{x \in \langle \bar{a} \rangle : f(b) \leq x$ pour un certain $b \in B\}$. Si $A = \emptyset$ nous définisons $A_f = \langle \bar{a} \rangle \setminus B_f$; de même, $B_f = \langle \bar{a} \rangle \setminus A_f$ si $B = \emptyset$.

Définition 5.6.5. Soit $c = (A, B) \in \mathscr{D}$ et $f \in \{f_n\}_{n \in \mathbb{N}^*}$. On définit

$$f(c) = \begin{cases} (\langle \bar{a} \rangle, \emptyset) & \text{si} \quad (A < x < B) \vdash f(x) = \infty. \\ (A_f, B_f) & \text{si} \quad (A < x < B) \nvdash f(x) = \infty. \end{cases}$$

Note: Nous aurions pu définir $f(c)$ pour tout $c \in \mathscr{C}(\langle \bar{a} \rangle)$; mais ça aurait juste créé des complications inutiles.

Remarque 5.6.6. Pour tout $c \in \mathscr{D}$, puisque f_1 est l'identité dans Γ, $f_1(c) = c$.

Remarque 5.6.7. Si $B = \emptyset$, c'est-à-dire $c = (\langle \bar{a} \rangle, \emptyset)$, alors $f(c) = c$.

Remarque 5.6.8. Supposons $A = \emptyset$.

1. Si $(A < x < B) \vdash f(x) = \infty$, puisque $c \in \mathscr{D}$ et $c \neq \infty^*$ $(B \neq \emptyset)$, alors c est réalisable. Soit α est un élément réalisant c et $b \in B$. Alors $f(\alpha) = \infty$ et par le lemme 5.3.5, $f(b) = \infty$. Puisque $f(b) \in \langle \bar{a} \rangle$, par définition nous aurons $f(c) = \infty^*$.
2. Si $(A < x < B) \nvdash f(x) = \infty$, alors $B_f = \{x \in \langle \bar{a} \rangle : f(b) \leq x$ pour un certain $b \in \langle \bar{a} \rangle\}$. D'après l'axiome (b2) et la proposition 5.5.25 on a $B_f = f(\langle \bar{a} \rangle)$. Nous aurons donc $f(c) = (\langle \bar{a} \rangle \setminus f(\langle \bar{a} \rangle), f(\langle \bar{a} \rangle))$.

Remarque 5.6.9. Supposons $A \neq \emptyset$ et $B \neq \emptyset$.

1. Si $(A < x < B) \vdash f(x) = \infty$, alors $f(c) = (\langle \bar{a} \rangle, \emptyset)$. Puisque $B \neq \emptyset$ on a $c \neq \infty^*$, donc $c \in \mathscr{C}^R$. Soit alors un $\delta \vDash c$ et un $b \in B$. Puisque $\delta < b$ et $f(\delta) = \infty$, d'après le lemme 5.3.5, $f(b) = \infty$. Donc $\infty \in \langle \bar{a} \rangle$. Nous avons alors $f(c) = \infty^*$.

2. Si $(A < x < B) \nvdash f(x) = \infty$, nous avons $f(c) = (A_f, B_f)$, avec $A_f \neq \emptyset$ et $B_f \neq \emptyset$ ($f(A) \subseteq A_f$ et $f(B) \subseteq B_f$).

Lemme 5.6.10. *Soit $c = (A, B) \in \mathscr{C}^R$ tel que $B \neq \emptyset$ et $f(c) \in \mathscr{C}^R$. Alors $f(c) = (A_f, B_f)$*

Démonstration. Si ce n'était pas le cas, alors $A < x < B \vdash f(x) = \infty$ et $f(c) = (\langle \bar{a} \rangle, \emptyset)$.

Puisque c est réalisable, il existe α dans une extension élémentaire de Γ tel que $\alpha \models c$, et donc $f(\alpha) = \infty$. Soit $b \in B$; alors $\alpha < b$ et donc, d'après le lemme 5.3.5, $f(b) = \infty$. Cela implique que $\infty = f(b) \in \langle \bar{a} \rangle$ et donc $f(c) = (\langle \bar{a} \rangle, \emptyset) = \infty^*$, ce qui contredit $f(c) \in \mathscr{C}^R$. □

Lemme 5.6.11. *Soit $c = (A, B) \in \mathscr{D}$. Alors*

$$f(c) = \infty^* \Leftrightarrow \begin{cases} (A < x < B) \vdash f(x) = \infty \ \textit{ et } \infty \in \langle \bar{a} \rangle \\ \textit{ou} \\ c = \infty^* \ \textit{ et } \infty \in \langle \bar{a} \rangle \end{cases}$$

Démonstration. Remarquons d'abord que la condition « $c = \infty^*$ et $\infty \in \langle \bar{a} \rangle$ » est équivalente à « $c = \infty^*$ » . Nous considérons alors cette dernière dans la preuve.

($\Leftarrow$). Si $c = \infty^*$, alors $B = \emptyset$ et par la remarque 5.6.7, $f(c) = \infty^*$. Si $(A < x < B) \vdash f(x) = \infty$ et $\infty \in \langle \bar{a} \rangle$, par définition $f(c) = \infty^*$.

($\Rightarrow$). Supposons la négation du côté droite. Si $\infty \notin \langle \bar{a} \rangle$, d'après les définitions $f(c) \neq \infty^*$. Supposons donc $\infty \in \langle \bar{a} \rangle$, $(A < x < B) \nvdash f(x) = \infty$ et $c \neq \infty^*$.

Par définition $f(c) = (A_f, B_f)$. Si $B \neq \emptyset$ alors $B_f \neq \emptyset$, et donc $f(c) \neq \infty^*$. Si $B = \emptyset$, d'après la remarque 5.6.7, $f(c) = c$. Mais $c \neq \infty^*$ par hypothèse. □

Proposition 5.6.12. *Si $c \in \mathscr{D}$ et $f \in \{f_n\}_{n \in \mathbb{N}^*}$, alors $f(c) \in \mathscr{D}$.*

Démonstration. Disons $c = (A, B)$.

Si $(A < x < B) \vdash f(x) = \infty$, par définition $f(c) = (\langle \bar{a} \rangle, \emptyset) \in \mathscr{D}$. Supposons alors $(A < x < B) \nvdash f(x) = \infty$ et voyons que $(A_f, B_f) \in \mathscr{D}$.

Si $B = \emptyset$, alors $f(c) = c$ encore par la remarque 5.6.7, et donc $f(c) \in \mathscr{D}$. On supposera alors $B \neq \emptyset$ aussi.

Nous montrons d'abord que $x < y$ pour tout $x \in A_f$ et $y \in B_f$. On suppose pour arriver à une contradiction qu'il existe $x \in A_f$ et $y \in B_f$ tels que $y \leq x$.

Si $y < x$, alors il existent $a \in A$ et $b \in B$ tels que $f(b) \leq y < x \leq f(a)$. Dans ce cas, on applique le lemme 5.3.4 et on obtient $b < a$, ce qui est absurde.

Si $y = x \in A_f \cap B_f$, alors il existent $a \in A$ et $b \in B$ tels que $f(b) \leq x \leq f(a)$. Dans ce cas, soit $f(b) < f(a)$, soit $f(b) = x = f(a)$. Si $f(b) < f(a)$, on arrive à la contradiction précédente.

Si $f(b) = f(a) \neq \infty$, on peut appliquer la proposition 5.3.1 pour en déduire $a = b$, ce qui est absurde, puisque $A \cap B = \emptyset$.

Supposons maintenant $f(b) = f(a) = \infty$. Si $\alpha \models c$ alors $a < \alpha$, et par le lemme 5.3.5 $f(\alpha) = \infty$. C'est-à-dire $A < x < B \vdash f(x) = \infty$, ce qui contredit notre hypothèse.

Voyons maintenant que $A_f \cup B_f = \langle \bar{a} \rangle$.

Si $A = \emptyset$, c'est trivial d'après la définition de A_f. Considérons donc le cas où A et B sont différents de $\emptyset$.

S'il existait $z \in \langle \bar{a} \rangle \setminus (A_f \cup B_f)$, alors soit $z < x$ pour un certain $x \in A_f$, soit $y < z$ pour un certain $y \in B_f$, soit $x < z < y$ pour tout $x \in A_f$ et $y \in B_f$. Les deux premières options sont impossibles d'après les définitions de A_f et B_f. Supposons alors la troisième.

Dans ce cas, par définition de A_f et B_f, on a que $f(a) < z < f(b)$ pour tout $a \in A$ et $b \in B$. Puisque $A \neq \emptyset$, il existe $a \in A$ tel que $f(a) < z$. Par l'axiome (b2) on a que $z \in f(\Gamma)$. D'après la proposition 5.5.25 on a que $z \in f(\langle \bar{a} \rangle)$, disons $z = f(z_0)$ pour un certain $z_0 \in \langle \bar{a} \rangle$.

Nous avons donc $f(a) < f(z_0) < f(b)$ pour tout $a \in A$ et $b \in B$. En appliquant le lemme 5.3.4 on obtient $a < z_0 < b$ pour tout $a \in A$ et $b \in B$; mais cela est absurde, puisque $z_0 \in \langle \bar{a} \rangle$ et (A, B) est une coupure de $\langle \bar{a} \rangle$.

Jusqu'à maintenant nous avons montré que (A_f, B_f) est une coupure de $\langle \bar{a} \rangle$. Voyons qu'en plus elle appartient à $\mathscr{D}$.

Puisque c est réalisable et $A < x < B \nvdash f(x) = \infty$, il existe un α dans une extension élémentaire de Γ, tel que $A < \alpha < B$ et $f(\alpha) \neq \infty$.

Supposons pour arriver à une contradiction qu'il existe $x \in A_f$ tel que $f(\alpha) \leq x$. Alors par l'axiome (b2) $x \in f(\Gamma) \cap \langle \bar{a} \rangle$, et par la proposition 5.5.25, $x \in f(\langle \bar{a} \rangle)$. Soit donc $x_0 \in \langle \bar{a} \rangle$ tel que $f(x_0) = x$. Puisque $x_0 \leq f(x_0) = x$ et $x \in A$, on a que $x_0 \in A$.

Nous avons alors $f(\alpha) \leq f(x_0)$, pour un $x_0 \in A$. Si $f(\alpha) < f(x_0)$, par le lemme 5.3.4 $\alpha < x_0$, ce qui contredit $A < \alpha$. Si $f(\alpha) = f(x_0)$, comme $f(\alpha) \neq \infty$, on peut appliquer la proposition 5.3.1 pour en déduire $\alpha = x_0$, ce qui contredit aussi $A < \alpha$.

On a donc montré que $A_f < f(\alpha)$.

Supposons maintenant, pour arriver à une autre contradiction, qu'il existe $x \in B_f$ tel que $x \leq f(\alpha)$. D'après la définition de B_f, il existe $x_0 \in B$ tel que $f(x_0) \leq x$. Puisque $f(x_0) \leq f(\alpha)$ et $f(\alpha) \neq \infty$, on peut appliquer le lemme 5.3.4 pour en déduire $x_0 \leq \alpha$, ce qui contredit $\alpha < B$.

Nous avons donc trouvé un élément $\beta = f(\alpha)$ dans une extension élémentaire de Γ qui réalise c. Cela montre que $c \in \mathscr{C}^R \subseteq \mathscr{D}$. □

Définition 5.6.13. Si $c, c' \in \mathscr{D}$, nous utiliserons la notation $c \to c'$ pour signifier que $f(c) = c'$ pour une certaine fonction $f \in \{f_n\}_{n \in \mathbb{N}^*}$.

Lemme 5.6.14. *Soient $c = (A, B) \in \mathscr{D}$ et $c' = (A', B') \in \mathscr{D}$, avec $c \to c'$. Alors $A \subseteq A'$ et $B \supseteq B'$.*

Démonstration. Puisque (A, B) et (A', B') sont des coupures, il suffit de montrer que $A \subseteq A'$.

Disons $c' = f(c)$. Si $c' = (A_f, B_f)$ et $a \in A$, par l'axiome (a3) $a \leq f(a)$ et donc par définition $a \in A_f$.

Si $c' = (\langle \bar{a} \rangle, \emptyset)$ c'est trivial. □

Lemme 5.6.15. *Soient $c = (A, B)$ et $c' = (A', B')$ deux coupures réalisables telles que $f(c) = c'$ pour $f \in \{f_n\}_{n\in\mathbb{N}^*}$. Nous avons les deux propriétés suivantes :*

1. *Supposons $A \neq \emptyset$. Alors A a un élément maximal ssi A' a un élément maximal. En plus, si $a \in A$ et $a' \in A'$ sont des tels éléments, alors $f(a) = a'$.*
2. *Supposons $B' \neq \emptyset$. Alors B a un élément minimal ssi B' a un élément minimal. En plus, si $b \in B$ et $b' \in B'$ sont des tels éléments, alors $f(b) = b'$.*

Démonstration.

1. Si $B = \emptyset$, alors par la remarque 5.6.7 $f(c) = c$. Dans ce cas $A = A'$ et le résultat est donc trivial.
   On supposera alors $B \neq \emptyset$.

   Si $A < x < B \vdash f(x) = \infty$, alors $c' = (\langle \bar{a} \rangle, \emptyset)$.
   Puisque c est réalisable et $B \neq \emptyset$, il existe $b \in B$ et α un élément dans une extension élémentaire de Γ, avec $\alpha \vDash c$ et $\alpha < b$. Puisque $f(\alpha) = \infty$, par le lemme 5.3.5 $f(b) = \infty$. On a donc $\infty \in \langle \bar{a} \rangle$, et alors $c' = (\langle \bar{a} \rangle, \emptyset) = \infty^*$. Mais cela contredit le fait que c' est une coupure réalisable.

   Considérons maintenant le cas $A < x < B \nvdash f(x) = \infty$, c'est-à-dire $c' = (A_f, B_f)$.
   Supposons a un élément maximal de A. Voyons que $f(a)$ est maximal dans A_f. D'une part $f(a) \in A_f$ par définition de A_f ; d'autre part, s'il n'était pas maximal, pour un certain $x \in A_f$ on aurait $f(a) < x$, et puisque $x \in A_f$ on aurait $f(a) < f(y)$, pour un certain $y \in A$. Mais d'après le lemme 5.3.4, cela impliquerait $a < y$, ce qui contredit la maximalité de a.

   Pour la réciproque, considérons a' un élément maximal de A'. Par définition de A_f, pour un certain $a_0 \in A$, on a $a' \leq f(a_0)$. D'autre part, si a est un élément de A, $f(a) \in A_f$, et donc $f(a) \leq a' \leq f(a_0)$. D'après le lemme 5.3.4, on a $a \leq a_0$ pour tout $a \in A$. Alors a_0 est un élément maximal de A, et puisque $f(a_0) \leq a' \leq f(a_0)$ on a aussi que $a' = f(a_0)$.
2. Puisque $B' \neq \emptyset$ la seule option possible est $c' = f(c) = (A_f, B_f)$. Dans ce cas, le raisonnement est tout à fait analogue à celui du cas précédent.

□

Dans la preuve de la proposition 5.6.12 nous avons utilisé le rapport entre une coupure c réalisable et un élément α qui la réalise. Nous allons donner ensuite quelques lemmes assez utiles, qui rendent cette relation plus explicite.

Pour les deux lemmes suivants, soit α un élément dans une certaine extension élémentaire de Γ, $c = (A, B)$ une des coupures dans $\mathscr{D}$, et f une fonction de $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}^*}$.

Lemme 5.6.16. *Les deux propriétés suivantes sont vraies :*

1. *Si $f(\alpha) \vDash f(c)$, alors $\alpha \vDash c$.*
2. *Si $\alpha \vDash c$ et $f(\alpha) \neq \infty$, alors $f(\alpha) \vDash f(c)$ et $f(c) \neq \infty^*$.*

Démonstration.

1. Supposons $f(\alpha) \vDash f(c)$.

   Si $A < x < B \nvdash f(x) = \infty$, $f(c) = (A_f, B_f)$. Alors $A_f < f(\alpha) < B_f$, et donc $f(A) < f(\alpha) < f(B)$. On en déduit d'après le lemme 5.3.4 que $\alpha \vDash c$.

   Si $A < x < B \vdash f(x) = \infty$, $f(c) = (\langle\bar{a}\rangle, \emptyset)$. Puisque $f(\alpha) \vDash f(c)$, on a que $\infty \notin \langle\bar{a}\rangle$, et donc $\mathscr{D} = \mathscr{C}(\langle\bar{a}\rangle)$. Alors c est une coupure réalisable.

   Soit donc δ une réalisation de c. Par hypothèse $f(\delta) = \infty$, et d'après le lemme 5.3.5 $f(b) = \infty$ pour tout $b \in B$. Si $B \neq \emptyset$ on a alors $\infty \in \langle\bar{a}\rangle$, ce qui est une contradiction. Donc $B = \emptyset$.

   Nous avons alors $c = (\langle\bar{a}\rangle, \emptyset)$, et par la remarque 5.6.7 $f(c) = c$. Puisque $f(\alpha) \vDash f(c) = c$, on a $\langle\bar{a}\rangle < f(\alpha)$.

   Alors $\alpha \vDash c$: sinon il existerait $x \in \langle\bar{a}\rangle$ tel que $\alpha \leq x$, et d'après le lemme 5.3.4 on aurait $f(\alpha) \leq f(x) \in \langle\bar{a}\rangle$.

2. Supposons $\alpha \vDash c$ et $f(\alpha) \neq \infty$.

   On peut en déduire en premier que $c \neq \infty^*$ et $f(c) = (A_f, B_f)$ (puisque $A < x < B \nvdash f(x) = \infty$). Comme $A < \alpha < B$ et $f(\alpha) \neq \infty$, on a, d'après le lemme 5.3.4, que $f(A) < f(\alpha) < f(B)$, et donc $A_f < f(\alpha) < B_f$, c'est-à-dire $f(\alpha) \vDash f(c)$.

   D'autre part, si $B = \emptyset$, alors par la remarque 5.6.7 $f(c) = c \neq \infty^*$. Si $B \neq \emptyset$ alors $B_f \neq \emptyset$, et donc $f(c) \neq \infty^*$.

□

Lemme 5.6.17. *Si $f(\alpha) \vDash c$ et $f(\alpha) \neq \infty$, alors il existe une unique coupure $d \in \mathscr{C}^R$ telle que $f(d) = c$ et $\alpha \vDash d$.*

Démonstration. Supposons pour arriver à une contradiction que $\alpha \in \langle\bar{a}\rangle$. Dans ce cas $f(\alpha) \in \langle\bar{a}\rangle$, contredisant ainsi le fait que $f(\alpha)$ réalise une coupure de $\langle\bar{a}\rangle$.

On a donc $\alpha \notin \langle\bar{a}\rangle$, et comme conséquence α réalise une certaine coupure de $\langle\bar{a}\rangle$. Soit d cette coupure.

Nous avons alors $\alpha \vDash d$ et $f(\alpha) \neq \infty$; on peut donc appliquer le lemme 5.6.16, et alors $f(\alpha) \vDash f(d)$. D'après la remarque 5.6.2, $c = f(d)$.

Finalement, si d' est une autre coupure de $\langle\bar{a}\rangle$ qui vérifie les mêmes conditions que d', alors $\alpha \vDash d'$ impliquera $d' = d$. □

5.6.2 Propriété de confluence dans $\mathscr{D}$

Lemme 5.6.18. *Nous avons la propriété de confluence à gauche dans $\mathscr{D}$:*

Soient $c, c_1, c_2 \in \mathscr{D}$ tels que $c_1 \to c$ et $c_2 \to c$ et $c \neq \infty^*$. Alors il existe $d \in \mathscr{D}$ tel que $d \to c_1$ et $d \to c_2$.

Démonstration. Disons $c = (A, B)$, $c_1 = (A_1, B_1)$ et $c_2 = (A_2, B_2)$, et $f(c_1) = f'(c_2) = c \neq \infty^*$ pour certaines fonctions $f, f' \in \{f_n\}_{n\in\mathbb{N}^*}$. Nous cherchons $g, g' \in \{f_n\}_{n\in\mathbb{N}^*}$ et $d \in \mathscr{D}$ tels que $g'(d) = c_1$ et $g(d) = c_2$.

Notons d'abord que puisque $c \neq \infty^*$, par la remarque 5.6.7 on a $c_1 \neq \infty^*$ et $c_2 \neq \infty^*$, et alors c, c_1 et c_2 sont réalisables.

On peut appliquer le lemme 5.6.11, pour trouver d'une part qu'une des deux options suivantes est vraie :

1a. $A_1 < x < B_1 \nvdash f(x) = \infty$

1b. $A_1 < x < B_1 \vdash f(x) = \infty$ et $\infty \notin \langle \bar{a} \rangle$

et d'autre part qu'une de ces deux autres options est aussi vraie :

2a. $A_2 < x < B_2 \nvdash f'(x) = \infty$

2b. $A_2 < x < B_2 \vdash f'(x) = \infty$ et $\infty \notin \langle \bar{a} \rangle$

Si (*1b*) est vraie alors $B_1 = \emptyset$: $c_1 \in \mathscr{C}^R$, donc il existe une réalisation de c_1, qui sera majorée par tous les éléments de B_1, et que d'après (*1b*) sera envoyée à ∞ par f ; en appliquant le lemme 5.3.5, s'il existe $b \in B_1$, alors $f(b) = \infty$, et donc $\infty \in \langle \bar{a} \rangle$, ce qui contredirait (*1b*).
De même, si (*2b*) est vraie, alors $B_2 = \emptyset$.

Dans le cas alors où (1b) et (2b) sont vraies, d'après la remarque 5.6.7 $f(c_1) = c_1$ et $f'(c_2) = c_2$. Il suffit donc de prendre $d = c_1 = c_2 = c$ et $g = g' = Id$.

Considérons maintenant le cas où (1a) et (2b) sont vraies.
Soit $\alpha \vDash c_1$ tel que $f(\alpha) \neq \infty$. D'après le lemme 5.6.16 $f(\alpha) \vDash f(c_1) = c = f'(c_2)$. Mais on a vu que (2b) implique $B_2 = \emptyset$ et donc $f'(c_2) = c_2 = (\langle \bar{a} \rangle, \emptyset)$. On a alors $a < f(\alpha)$ pour tout $a \in A_2 = \langle \bar{a} \rangle$.
Soit maintenant $a \in \langle \bar{a} \rangle$; par définition $f'(a) \in \langle \bar{a} \rangle$ et alors $f'(a) < f(\alpha)$. Par l'axiome (b2) il existe α_0 tel que $f'(\alpha_0) = f(\alpha)$.
Nous avons donc $f'(\alpha_0) = f(\alpha) \vDash f(c_1) = c = f'(c_2)$, et on peut appliquer le lemme 5.6.16 pour en déduire que $\alpha_0 \vDash c_2$. Or on a vu que $c_2 = f'(c_2) = c$.
Puisque $f(\alpha) \neq \infty$, on peut appliquer la propriété de confluence à gauche (la proposition 5.4.6) pour trouver un $\delta \in \Gamma$ et $g, g' \in \{f_n\}_{n \in \mathbb{N}^*}$, qui nous donnent le diagramme suivant :

$$
\begin{tikzcd}
\delta \arrow[rr, "g"] \arrow[d, "g'"] & & \alpha_0 \arrow[d, "f'"] \\
\alpha \arrow[rr, "f"] & & f(\alpha)
\end{tikzcd}
$$

où α réalise c_1, et α_0 et $f(\alpha)$ réalisent $c = c_2 = f'(c_2) = f(c_1) = (\langle \bar{a} \rangle, \emptyset)$.
Puisque $g(\delta) = \alpha_0 \neq \infty$ et $\alpha_0 \vDash c_2$, d'après le lemme 5.6.17 il existe $d \in \mathscr{C}^R$ tel que $\delta \vDash d$ et $g(d) = c_2$.
D'autre part, puisque $g'(\delta) = \alpha$ et $\alpha \vDash c_1$, en appliquant encore le lemme 5.6.17 on trouve $d' \in \mathscr{C}^R$ tel que $\delta \vDash d'$ et $g'(d') = c_1$.
Mais $\delta \vDash d$ et $\delta \vDash d'$ implique, par la remarque 5.6.2, que $d = d'$.
Cette coupure d témoigne donc la propriété de confluence à gauche.

Si on inverse le rôles de c_1 et c_2, c'est-à-dire si on considère le cas où (1b) et (2a) sont vraies, la situation est évidemment symétrique.

Considérons donc le dernier cas : (1a) et (2a) sont vraies.
D'après (1a) et du fait que $c_1 \in \mathscr{C}^R$, il existe $\alpha_1 \vDash c_1$ tel que $f(\alpha_1) \neq \infty$. Par le lemme 5.6.16, $f(\alpha_1) \vDash f(c_1) = c$.
De façon analogue on trouve $\alpha_2 \vDash c_2$ tel que $f'(\alpha_2) \vDash f'(c_2)$ et $f'(\alpha_2) \neq \infty$.
Soit $\beta = \max\{f(\alpha_1), f'(\alpha_2)\}$. Puisque $f(\alpha_1) \leq \beta$ et $f'(\alpha_2) \leq \beta$, par l'axiome (b2) il existe β_1 et β_2, avec $f(\beta_1) = \beta$ et $f'(\beta_2) = \beta$.
Notons que puisque $f(\alpha_1) \neq \infty$ et $f'(\alpha_2) \neq \infty$, alors $\beta \neq \infty$, et par l'axiome (a3) $\beta_1 \neq \infty$ et $\beta_2 \neq \infty$.

On peut donc appliquer la proposition 5.4.6 pour trouver un élément δ et des fonction $g, g' \in \{f_n\}_{n \in \mathbb{N}^*}$ qui nous donnent le diagramme suivant :

$$\begin{tikzcd} & \beta_1 \arrow[dr, "f"] & \\ \delta \arrow[ur, "g"] \arrow[dr, "g'"'] & & \beta \\ & \beta_2 \arrow[ur, "f'"'] & \end{tikzcd}$$

D'une part, puisque $f(\beta_1) = \beta \vDash c = f(c_1)$ et $f'(\beta_2) = \beta \vDash c = f'(c_2)$, on peut appliquer le lemme 5.6.16 pour en déduire $\beta_1 \vDash c_1$ et $\beta_2 \vDash c_2$.
D'autre part, puisque $g'(\delta) = \beta_1 \vDash c_1$ et $\beta_1 \neq \infty$, on peut conclure, par le lemme 5.6.17, qu'il existe $d_1 \in \mathscr{C}^R$ tel que $\delta \vDash d_1$ et $g'(d_1) = c_1$. On peut de même trouver $d_2 \in \mathscr{C}^R$ tel que $\delta \vDash d_2$ et $g(d_2) = c_2$.
Or $\delta \vDash d_1$ et $\delta \vDash d_2$ implique, par la remarque 5.6.2, que $d_1 = d_2$.
On montre donc l'énoncé du lemme en prenant $d = d_1 = d_2$ $\square$

Lemme 5.6.19. *Nous avons la propriété de confluence à droite dans $\mathscr{D}$:*

Soient $c, c_1, c_2 \in \mathscr{D}$ tels que $c \to c_1$ et $c \to c_2$, et $c_1 \neq \infty^*$, $c_1 \neq \infty^*$. Alors il existe $d \in \mathscr{D}$ tel que $c_1 \to d$, $c_2 \to d$ et $d \neq \infty^*$.

Démonstration. Disons $c = (A, B)$, $c_1 = (A_1, B_1)$ et $c_2 = (A_2, B_2)$, et $f(c) = c_1$, $f'(c) = c_2$ pour certaines fonctions $f, f' \in \{f_n\}_{n \in \mathbb{N}^*}$. Nous cherchons une coupure $d \neq \infty^*$ et $g, g' \in \{f_n\}_{n \in \mathbb{N}^*}$ tels que $g'(c_1) = g(c_2) = d$.

Notons d'abord que puisque $c_1 \neq \infty^*$ et $c_2 \neq \infty^*$, par la remarque 5.6.7 $c \neq \infty^*$, et alors c, c_1 et c_2 sont réalisables.

On applique le lemme 5.6.11, et on voit d'une part qu'une des deux options suivantes est vraie :

(1a) $A < x < B \nvdash f(x) = \infty$

(1b) $A < x < B \vdash f(x) = \infty$ et $\infty \notin \langle \bar{a} \rangle$

et une des ces deux autres options est aussi vraie :

(2a) $A < x < B \nvdash f'(x) = \infty$

(2b) $A < x < B \vdash f'(x) = \infty$ et $\infty \notin \langle \bar{a} \rangle$

Supposons (1b) vraie. En raisonnant comme dans le lemme 5.6.18, on conclut que $B = \emptyset$.

Dans ce cas, d'après la remarque 5.6.7 $f(c) = c$ et $f'(c) = c$. Nous avons donc $c = c_1 = c_2 \neq \infty^*$. Il nous suffira alors de prendre $d = c$ et $g = g' = Id$.

Si (2b) est vraie la preuve est pareille.

On considère donc le cas où (1a) et (2a) sont vraies.

D'une part, puisque c est réalisable, par (1a), il existe $\alpha \vDash c$ tel que $f(\alpha) \neq \infty$, et par le lemme 5.6.16, $f(\alpha) \vDash f(c) = c_1$.

D'autre part, de façon analogue, il existe $\alpha' \vDash c$ tel que $f'(\alpha') \neq \infty$ et $f'(\alpha') \vDash f'(c) = c_2$.

Soit $\alpha_0 = \min\{\alpha, \alpha'\}$. Alors $\alpha_0 \vDash c$ et en plus, puisqu'on a

- $\alpha_0 \leq \alpha$ et $f(\alpha) \neq \infty$
- $\alpha_0 \leq \alpha'$ et $f'(\alpha') \neq \infty$

on obtient, d'après le lemme 5.3.5, $f(\alpha_0) \neq \infty$ et $f'(\alpha_0) \neq \infty$.
On peut donc appliquer encore le lemme 5.6.16 pour en déduire $f(\alpha_0) \vDash f(c) = c_1$ et $f'(\alpha_0) \vDash f'(c) = c_2$.
On peut maintenant appliquer la propriété de confluence à droite (la proposition 5.4.6), pour trouver $g, g' \in \{f_n\}_{n \in \mathbb{N}^*}$ et $\beta \neq \infty$ qui nous donnent la configuration suivante :

$$\begin{tikzcd}
 & f(\alpha_0) \arrow[dr, "g'"] & \\
\alpha_0 \arrow[ur, "f"] \arrow[dr, "f'"'] & & \beta \\
 & f'(\alpha_0) \arrow[ur, "g"'] &
\end{tikzcd}$$

Nous avons donc d'une part $f(\alpha_0) \vDash c_1$ et $g'(f(\alpha_0)) = \beta \neq \infty$, d'où, par le lemme 5.6.16, on obtient que $\beta \vDash g'(c_1)$. D'autre part $f'(\alpha_0) \vDash c_2$ et $g(f'(\alpha_0)) = \beta \neq \infty$, d'où on obtient $\beta \vDash g(c_2)$.
Par la remarque 5.6.2 on conclut que $g'(c_1) = g(c_2)$, et puisque β réalise cette coupure, $g'(c_1) = g(c_2) \neq \infty$.
Il nous suffira donc de prendre $d = g'(c_1) = g(c_2)$. □

Définition 5.6.20. Soient $c, c' \in \mathscr{C}^R$ deux coupures réalisables. On définit les relations suivantes :

1. $c \sim_g c'$ si il existe $c_0 \in \mathscr{C}^R$ tel que $c_0 \to c$ et $c_0 \to c'$
2. $c \sim_d c'$ si il existe $c_0 \in \mathscr{C}^R$ tel que $c \to c_0$ et $c' \to c_0$

Proposition 5.6.21. *Les relations $\sim_g$ et $\sim_d$ sont des relations d'équivalence dans $\mathscr{C}^R$.*

Démonstration. La réflexivité et la symétrie sont triviales. La transitivité de $\sim_g$ est un conséquence du lemme 5.6.18, et la transitivité de $\sim_d$ est un conséquence du lemme 5.6.19. □

Proposition 5.6.22. *Soient $c, c' \in \mathscr{C}^R$. Alors :*

$$c \sim_g c' \Leftrightarrow c \sim_d c'.$$

Démonstration. ($\Rightarrow$). Supposons qu'il existe $c_0 \in \mathscr{C}^R$ tel que $c_0 \to c$ et $c_0 \to c'$. Puisque $c \neq \infty^*$ et $c' \neq \infty^*$, par le lemme 5.6.19 il existe $d \in \mathscr{C}^R$ tel que $c \to d$ et $c' \to d$.

($\Leftarrow$). Supposons qu'il existe $c_0 \in \mathscr{C}^R$ tel que $c \to c_0$ et $c' \to c_0$. Puisque $c_0 \neq \infty^*$, par le lemme 5.6.18 il existe $d \in \mathscr{C}^R$ tel que $d \to c$ et $d \to c'$.

□

Par la proposition 5.6.22, la définition suivante est bien justifiée :

Définition 5.6.23. Si $c, c' \in \mathscr{C}^R$, nous écrirons $c \sim c'$ à la place de $c \sim_g c'$ ou $c \sim_d c'$.

Proposition 5.6.24. *Soient c et c' deux coupures réalisables. Alors, pour tout $\alpha \neq \infty$ et $\alpha' \neq \infty$ tels que $\alpha \vDash c$ et $\alpha' \vDash c'$, on a $\langle \alpha \rangle = \langle \alpha' \rangle \Rightarrow c \sim c'$*

Démonstration. Puisque $\langle \alpha \rangle = \langle \alpha' \rangle$, on a $\alpha' = f_q(\alpha)$ pour un certain $q \in \mathbb{Q}_{>0}$. Disons $q = \frac{r}{s}$, avec $pgcd(r, s) = 1$.

Puisque $\alpha' \neq \infty$, par la remarque 5.5.12 on a $\alpha' = f_s^{-1}(f_r(\alpha))$. Écrivons $\beta = f_r(\alpha)$. D'après le lemme 5.5.9, $\beta \neq \infty$.

Nous avons donc le diagramme suivant :

$$\begin{tikzcd}
\alpha' \arrow[dr, "f_s"] & \\
& \beta \\
\alpha \arrow[ur, "f_r"] &
\end{tikzcd}$$

Puisque $\alpha \vDash c$ et $\beta \neq \infty$, par le lemme 5.6.16 $\beta \vDash f_r(c)$.

De même, puisque $\alpha' \vDash c'$, on a que $\beta \vDash f_s(c')$.

On obtient alors, par la remarque 5.6.2, que $f_r(c) = f_s(c')$ (écrivons $d = f_r(c) = f_s(c')$).

Nous avons donc $c \to d$ et $c' \to d$, avec d une coupure réalisable. □

5.6.3 Voisins

Rappelons qu'étant donné un ensemble ordonné X et un sous-ensemble $Y \subseteq X$, on dit que Y est *cofinal* (resp.*coinitial*) dans X, si pour tout $x \in X$ il existe $y \in Y$ avec $x \leq y$ (resp. $y \leq x$).

Définition 5.6.25. Soit $c = (A, B) \in \mathscr{C}(\langle \bar{a} \rangle)$. Si $A \neq \emptyset$, on définit l'ensemble des *voisins à gauche* de c, $V_g(c)$:

$$V_g(c) = \{a_i \in \bar{a} : \langle a_i \rangle \cap A \text{ est cofinal dans } A\}.$$

Si $A = \emptyset$, on pose $V_g(c) = \emptyset$.

De façon analogue, si $B \neq \emptyset$ et $B \neq \{\infty\}$ on définit l'ensemble des *voisins à droite* de c, noté $V_d(c)$:

$$V_d(c) = \{a_i \in \bar{a} : \langle a_i \rangle \cap B \text{ est coinitial dans } B\}.$$

Si $B = \emptyset$ ou $B = \{\infty\}$, on pose alors $V_d(c) = \emptyset$.

Nous utilisons $V(c)$ pour désigner l'ensemble des couples (v_0, v_1) tels que $v_0 \in V_g(c)$ et $v_1 \in V_d(c)$.

Lemme 5.6.26. *Soit $c = (A, B) \in \mathscr{C}(\langle \bar{a} \rangle)$.*

1. *Si $A \neq \emptyset$ alors $V_g(c) \neq \emptyset$.*
2. *Si $B \neq \emptyset$ et $B \neq \{\infty\}$ alors $V_d(c) \neq \emptyset$.*

Démonstration. Si A a un élément maximal $f_q(a_i)$, alors $V_g(c) = \{a_i\}$; et si B a un élément minimal $f_q(a_j)$ différent de ∞, alors $V_d(c) = \{a_j\}$.

Considérons maintenant le cas où A n'a pas d'élément maximal et supposons pour arriver à une contradiction que $V_g(c) = \emptyset$.
Pour chaque $i \leq n$, puisque $\langle a_i \rangle \cap A$ n'est pas cofinal dans A, il existe $\alpha_i \in A$ qui majore strictement $\langle a_i \rangle \cap A$. Soit $\alpha = \max\{\alpha_1, \ldots, \alpha_n\}$. Nous avons donc un élément α de A qui majore strictement $\langle a_i \rangle \cap A$ pour chaque $i \leq n$ et donc qui majore strictement $\bigcup_{i=1}^{n} \langle a_i \rangle \cap A$. Mais cela est une contradiction puisque $\bigcup_{i=1}^{n} \langle a_i \rangle \cap A = A$.

De façon tout à fait analogue, on montre que $V_d(c) \neq \emptyset$ dans le cas où B n'a pas d'élément minimal.

□

Remarque 5.6.27. D'après le lemme 5.6.26 et les définitions de $V_g(c)$ et $V_d(c)$, la condition « $V_g(c) \neq \emptyset$ » est équivalente à « $A \neq \emptyset$ » , et la condition « $V_d(c) \neq \emptyset$ » est équivalente à « $B \neq \emptyset$ et $B \neq \{\infty\}$ » .

Lemme 5.6.28. *Soient $c, c' \in \mathscr{C}^R$ tels que $c \to c'$. Alors*

1. *Si $V_g(c) \neq \emptyset$ et $V_g(c') \neq \emptyset$, alors $V_g(c) = V_g(c')$*
2. *Si $V_d(c) \neq \emptyset$ et $V_d(c') \neq \emptyset$, alors $V_d(c) = V_d(c')$*

Démonstration. Disons $c = (A, B)$, $c' = (A', B')$ et $c' = f(c)$.

1. Par la remarque 5.6.27, $A \neq \emptyset$ et $A' \neq \emptyset$.
   Si $B = \emptyset$, alors par la remarque 5.6.7, $f(c) = c$, et le résultat est donc trivial. On supposera alors $B \neq \emptyset$.
   D'après le lemme 5.6.10, on a $c' = f(c) = (A_f, B_f)$; et en plus il existe α dans une extension élémentaire de Γ tel que $\alpha \vDash c$ et $f(\alpha) \neq \infty$.

Puisque $A < \alpha < B$ et $f(\alpha) \neq \infty$, on a, d'après le lemme 5.3.4, que $f(A) < f(\alpha) < f(B)$ et donc $A_f < f(\alpha) < B_f$, c'est-à-dire $f(\alpha) \vDash f(c)$.

Soit maintenant $a_i \in V_g(c)$, et supposons pour arriver à une contradiction que $a_i \notin V_g(c')$. Alors il existe $x \in A'$ tel que $\langle a_i \rangle \cap A' < x$.
Soit $a \in \langle a_i \rangle \cap A$. Par définition $f(a) \in \langle a_i \rangle$ et $f(a) \in A_f = A'$, donc $f(a) < x$. D'après l'axiome (b2) $x \in f(\Gamma)$; et puisque $x \in \langle \bar{a} \rangle$, par la proposition 5.5.25 $x \in f(\langle \bar{a} \rangle)$. Soit donc $x_0 \in \langle \bar{a} \rangle$ tel que $f(x_0) = x$.
On a alors deux cas possibles :

– Si $x_0 \in A$, puisque $f(a) < f(x_0)$ pour tout $a \in \langle a_i \rangle \cap A$, alors par le lemme 5.3.4 $a < x_0$ pour tout $a \in \langle a_i \rangle \cap A$, ce qui contredit les hypothèses $x_0 \in A$ et $a_i \in V_g(c)$.
– Si $x_0 \in B$, alors par définition $x = f(x_0) \in B_f = B'$, ce qui contredit l'hypothèse $x \in A'$.

Réciproquement, voyons que si $a_i \in V_g(c')$, alors $a_i \in V_g(c)$.
Soit $x \in A$. Par définition $f(x) \in A_f = A'$, donc $f(x) \leq y$ pour un certain $y \in \langle a_i \rangle \cap A'$. D'après l'axiome (b2) et la proposition 5.5.25 $y \in f(\langle a_i \rangle)$. Soit donc $y_0 \in \langle a_i \rangle$ tel que $f(y_0) = y$. Alors, d'après le lemme 5.3.4 et du fait que $f(x) \leq f(y_0)$, on en déduit $x \leq y_0$.
D'autre part, puisque $y \in A_f = A'$ et $f(\alpha) \vDash f(c) = c'$, on a $y = f(y_0) < f(\alpha)$, et encore par le lemme 5.3.4 $y_0 \leq \alpha$, donc $y_0 \in A$ et, rappelons nous, $y_0 \in \langle a_i \rangle$.
Cela montre que $\langle a_i \rangle \cap A$ est cofinal dans A, et donc $a_i \in V_g(c)$.

2. Par la remarque 5.6.27 $B \neq \emptyset$, $B \neq \{\infty\}$ et $B' \neq \emptyset$, $B' \neq \{\infty\}$; en particulier, on a forcément $c' = f(c) = (A_f, B_f)$.
Dans ce cas, la preuve de $V_d(c) \subseteq V_d(c')$ sera tout à fait analogue à la preuve de $V_g(c) \subseteq V_g(c')$. Pour la preuve de $V_d(c') \subseteq V_d(c)$ il faudra rajouter un petit détail par rapport à celle de $V_g(c') \subseteq V_g(c)$:

Soit $a_i \in V_d(c')$. Si $x \in B$, alors $f(x) \in B_f = B'$. Puisque $B' \neq \{\infty\}$ et $a_i \in V_d(c')$, il existe $y \in \langle a_i \rangle \cap B'$, avec $y \neq \infty$ et $y \leq f(x)$. D'autre part, puisque $y \in B' = B_f$, il existe $b \in B$ tel que
$$f(b) \leq y \leq f(x).$$
Par l'axiome (b2) et la proposition 5.5.25 on a $y \in f(\langle a_i \rangle)$. Soit alors $y_0 \in \langle a_i \rangle$ tel que $f(y_0) = y \neq \infty$. Nous avons donc le :
$$f(b) \leq f(y_0) \leq f(x) \text{ et } f(y_0) \neq \infty.$$
Si $f(x) = \infty$ alors $f(b) \leq f(y_0) < f(x)$, et par le lemme 5.3.4 $b \leq y_0 < x$. Si $f(x) \neq \infty$, encore par le lemme 5.3.4 on conclut $b \leq y_0 \leq x$.

Cela montre donc qu'étant donné un $x \in B$, on peut toujours trouver un y_0 qui appartient à $\langle a_i \rangle$ et à B (puisque $b \leq y_0$), tel $y_0 \leq x$. C'est-à-dire $\langle a_i \rangle \cap B$ est cofinal dans B.

□

Proposition 5.6.29. *Soient $c, c' \in \mathscr{C}^R$ tels que $c \sim c'$. Alors :*

1. *Si* $V_g(c) \neq \emptyset$ *et* $V_g(c') \neq \emptyset$ *alors* $V_g(c) = V_g(c')$.
2. *Si* $V_d(c) \neq \emptyset$ *et* $V_d(c') \neq \emptyset$ *alors* $V_d(c) = V_d(c')$.

Démonstration. Disons $c = (A, B)$ et $c' = (A', B')$.

1. Par la remarque 5.6.27, $A \neq \emptyset$ et $A' \neq \emptyset$.
   Puisque $c \sim c'$, alors $c \sim_d c'$, et donc il existe $c_0 \in \mathscr{C}^R$ tel que $c \to c_0$ et $c' \to c_0$. Disons $c_0 = (A_0, B_0)$.
   D'une part, puisque $A \neq \emptyset$, par le lemme 5.6.14 $A_0 \neq \emptyset$ et alors $V_g(c_0) \neq \emptyset$ d'après le lemme 5.6.26. On peut donc appliquer le lemme 5.6.28 pour en déduire que $V_g(c) = V_g(c_0)$.
   D'autre part, A' est aussi différent de $\emptyset$; on applique encore le lemme 5.6.28 et on en conclut que $V_g(c') = V_g(c_0) = V_g(c)$.
2. Par la remarque 5.6.27, $B \neq \emptyset$ et $B' \neq \emptyset$.
   Puisque $c \sim c'$, alors $c \sim_g c'$, et donc il existe $c_0 = (A_0, B_0) \in \mathscr{C}^R$ tel que $c_0 \to c$ et $c_0 \to c'$.
   Par le lemme 5.6.14 $B_0 \neq \emptyset$ et $B_0 \neq \{\infty\}$, et par le lemme 5.6.26 on a $V_d(c_0) \neq \emptyset$. On peut alors appliquer le lemme 5.6.28 pour en déduire que $V_d(c) = V_d(c_0)$.
   De même, encore par le lemme 5.6.28, on obtient $V_d(c') = V_d(c_0)$.

□

Définition 5.6.30. On appelle *choix de voisins associé à* $\langle \bar{a} \rangle$ une fonction

$$\begin{array}{rccc} v^{\langle \bar{a} \rangle} : & \mathscr{C}(\langle \bar{a} \rangle) & \longrightarrow & \bar{a} \cup \{\emptyset\} \times \bar{a} \cup \{\emptyset\} \\ & c & \longmapsto & (v_g^{\langle \bar{a} \rangle}(c), v_d^{\langle \bar{a} \rangle}(c)) \end{array},$$

tel que pour $i \in \{g, d\}$ nous avons :

1. $v_i^{\langle \bar{a} \rangle}(c) \in V_i(c)$ si $V_i(c) \neq \emptyset$;
2. $v_i^{\langle \bar{a} \rangle}(c) = \emptyset$ si $V_i(c) = \emptyset$.

Nous écrivons $v_g(c)$ et $v_d(c)$ au lieu de $v_g^{\langle \bar{a} \rangle}(c)$ et $v_d^{\langle \bar{a} \rangle}(c)$, si c'est clair de quelle fonction $v^{\langle \bar{a} \rangle}$ nous parlons.

Définition 5.6.31. On appelle *bon choix de voisins associé à* $\langle \bar{a} \rangle$ un choix de voisins $v^{\langle \bar{a} \rangle}$ associé à $\langle \bar{a} \rangle$ tel que :

1. Si $V_g(c) \neq \emptyset$, alors $v_g(c) = a_{i_0}$, où $i_0 = \min\{i \leq n : a_i \in V_g(c)\}$;
2. Si $V_d(c) \neq \emptyset$, alors $v_d(c) = a_{j_0}$, où $j_0 = \min\{j \leq n : a_j \in V_d(c)\}$.

Remarque 5.6.32. D'après le lemme 5.6.26 on peut toujours faire un bon choix de voisins, et d'après la définition, une fois les indices de notre n-uplet $\bar{a}$ fixés, il est unique. On dira alors « le bon choix » ou « un bon choix » de façon indistincte.

Remarque 5.6.33. Si nous avons fait un bon choix de voisins, alors, d'après la proposition 5.6.29, on a que pour tout $c, c' \in \mathscr{C}^R(\langle \bar{a} \rangle)$ tel que $c \sim c'$:

1. $v_g(c) = v_g(c')$ si $V_g(c) \neq \emptyset$ et $V_g(c') \neq \emptyset$
2. $v_d(c) = v_d(c')$ si $V_d(c) \neq \emptyset$ et $V_d(c') \neq \emptyset$

Remarque 5.6.34. D'après la remarque 5.6.33, si $\mathcal{C}$ est une $\sim$-classe de coupures réalisables, alors elle sera muni d'un couple associé : le couple $(v_g(\mathcal{C}), v_d(\mathcal{C}))$ tel que

1. $v_g(c) = v_g(\mathcal{C})$ pour tout $c \in \mathcal{C}$ tel que $V_g(c) \neq \emptyset$
2. $v_d(c) = v_d(\mathcal{C})$ pour tout $c \in \mathcal{C}$ tel que $V_d(c) \neq \emptyset$

Il se peut éventuellement que $v_g(\mathcal{C})$ ou $v_d(\mathcal{C})$ ne soient pas définis (on peut plutôt dire $v_g(\mathcal{C}) = \emptyset$ ou $v_d(\mathcal{C}) = \emptyset$) ; mais cela arrivera seulement dans le cas où $\mathcal{C} = \{(\emptyset, \langle \bar{a} \rangle)\}$ ou $\mathcal{C} \subseteq \{(\langle \bar{a} \rangle, \emptyset), (\langle \bar{a} \rangle \setminus \{\infty\}, \{\infty\})\}$ respectivement.

Considérons toujours $\bar{a} = (a_1, \ldots, a_n)$ un n-uplet dans un modèle de $\mathcal{T}$, et soit aussi a_{n+1} un autre élément dans le même modèle. On notera $\bar{a}' = (a_1, \ldots, a_n, a_{n+1})$. Nous allons faire ensuite quelques réflexions concernant le rapport entre $\langle \bar{a} \rangle$ et $\langle \bar{a}' \rangle$.

Définition 5.6.35. Soient $c = (A, B)$ une coupure de $\langle \bar{a} \rangle$ et $e = (F, G)$ une coupure de $\langle \bar{a}' \rangle$ telles que $A \subseteq F$ et $B \subseteq G$. Nous dirons dans ce cas que c se *plonge* dans e, ou que c est une *sous-coupure* de e, ou encore que e est une *extension* de c, et écrirons $c \hookrightarrow e$.

Remarque 5.6.36. Puisque $\langle \bar{a} \rangle \subseteq \langle \bar{a}' \rangle$, chaque coupure de $\langle \bar{a} \rangle$ se plonge dans au moins une coupure de $\langle \bar{a}' \rangle$.

Définition 5.6.37. Soient $c = (A, B)$ une coupure de $\langle \bar{a} \rangle$ et $e = (F, G)$ une coupure de $\langle \bar{a}' \rangle$ telles que $c \hookrightarrow e$. On définit $c \equiv_g e$, $c \equiv_d e$, $c \equiv e$:

– $c \equiv_g e$, si A est cofinal dans F ;
– $c \equiv_d e$, si B est coinitial dans G ;
– $c \equiv e$ si $c \equiv_g e$ et $c \equiv_d e$.

On dira c et e sont équivalentes à gauche, équivalentes à droite et équivalentes respectivement.

Remarque 5.6.38. 1. D'après les définitions, si $c \equiv_g e$ alors $V_g(c) \subseteq V_g(e)$, et si $c \equiv_d e$ alors $V_d(c) \subseteq V_d(e)$.

2. Puisque $\langle \bar{a}' \rangle = \langle \bar{a} \rangle \cup \langle a_{n+1} \rangle$, si $V_g(c) \subsetneq V_g(e)$ alors $V_g(e) = V_g(c) \cup \{a_{n+1}\}$: si $a_i \in V_g(e)$ avec $i \leq n$ alors $\langle a_i \rangle \cap F$ est cofinal dans F par définition, et puisque $A \subseteq F$, on a que $\langle a_i \rangle \cap A$ est cofinal dans A, c'est-à-dire $a_i \in V_g(c)$.
3. De même, si $V_d(c) \subsetneq V_d(e)$ alors $V_d(e) = V_d(c) \cup \{a_{n+1}\}$.

On peut voir que le bon choix de voisins associé à $\langle \bar{a} \rangle$ et le bon choix de voisins associé à $\langle \bar{a}' \rangle$ sont compatibles dans le sens suivant.

Lemme 5.6.39. *Si $v^{\langle \bar{a} \rangle}$ est le bon choix associé à $\langle \bar{a} \rangle$ et $v^{\langle \bar{a}' \rangle}$ est le bon choix associé à $\langle \bar{a}' \rangle$, alors :*

1. *Pour tout $c \in \mathscr{C}(\langle \bar{a} \rangle)$ et $e \in \mathscr{C}(\langle \bar{a}' \rangle)$ tels que $c \equiv_g e$ nous avons $v_g^{\langle \bar{a} \rangle}(c) = v_g^{\langle \bar{a}' \rangle}(e)$.*
2. *Pour tout $c \in \mathscr{C}(\langle \bar{a} \rangle)$ et $e \in \mathscr{C}(\langle \bar{a}' \rangle)$ tels que $c \equiv_d e$ nous avons $v_d^{\langle \bar{a} \rangle}(c) = v_d^{\langle \bar{a}' \rangle}(e)$.*

Démonstration. Disons $c = (A, B)$ et $e = (F, G)$.

1. Si $A = \emptyset$, puisqu'il est cofinal dans F on aura $F = \emptyset$. Dans ce cas $v_g^{\langle \bar{a} \rangle}(c) = v_g^{\langle \bar{a}' \rangle}(e) = \emptyset$. Supposons alors $A \neq \emptyset$ et disons $v_g^{\langle \bar{a} \rangle}(c) = a_{i_0}$ avec $i_0 \leq n$. Par la remarque 5.6.38 on a $V_g(c) \subseteq V_g(e)$.
   Si $V_g(c) = V_g(e)$ le résultat est évident d'après la définition de bon choix.
   Si $V_g(c) \subsetneq V_g(e)$, par la remarque 5.6.38 on a $V_g(e) = V_g(c) \cup \{a_{n+1}\}$. Alors $\min\{i \leq n : a_i \in V_g(c)\} = \min\{i \leq n+1 : a_i \in V_g(e)\}$, et donc $v_g^{\langle \bar{a} \rangle}(c) = v_g^{\langle \bar{a}' \rangle}(e)$.
2. Le raisonnement sera tout à fait analogue à celui de *1.*

□

5.7 Caractérisation des types

Lemme 5.7.1. *Si α est un élément d'un certain modèle de $\mathcal{T}$, et $f_q(\alpha)$ est bien défini, alors « $f_q(\alpha)$ est bien définit » est une conséquence du premier ordre.*

Démonstration. Si $f_q(\alpha)$ est bien défini, alors pour une certaine représentation M_q de q, $M_q(\alpha)$ sera bien défini.

Si $M_q = (m_1^{\varepsilon_1}, \ldots, m_l^{\varepsilon_l})$ et $J = \{i \leq l : \varepsilon_i = -1\}$, cela sera équivalent à la formule

$$\phi(\alpha) \equiv \bigwedge_{j=J} \phi_j(\alpha),$$

où $\phi_j(\alpha)$ est la formule suivante :

$$\exists! x[f_{m_j}(x) = f_{m_{j-1}}^{\varepsilon_{m_{j-1}}}(\ldots(f_{m_1}^{\varepsilon_1}(\alpha))\ldots) \wedge f_{m_{j-1}}^{\varepsilon_{m_{j-1}}}(\ldots(f_{m_1}^{\varepsilon_1}(\alpha))\ldots) \neq \infty].$$

Nous avons donc $\phi(x) \in tp(\alpha)$. □

Si $P((b_j)_{j \in J})$ est une propriété du premier ordre de $(b_j)_{j \in J}$, et $b_j \in dcl((a_i)_{i \in I})$ pour chaque $j \in J$, alors $tp((a_i)_{i \in I}) \Rightarrow P((b_j)_{j \in J})$.

En particulier, si $(\alpha_i)_{i \in I}$ et $(\beta_i)_{i \in I}$ sont deux uplets tels que $tp((\alpha_i)_{i \in I}) = tp((\beta_i)_{i \in I})$, $(\alpha'_j)_{j \in J}$ et $(\beta'_j)_{j \in J}$ sont deux uplets tels que α'_j et β'_j sont isolés par $\phi_j(\bar{\alpha}^j, y)$ et $\phi_j(\bar{\beta}^j, y)$ respectivement, et $tp((\alpha_i)_{i \in I}) \Rightarrow P((\alpha'_j)_{j \in J})$, alors $(\beta'_j)_{j \in J}$ satisfait $P((x_j)_{j \in J})$.

Remarque 5.7.2. D'après le lemme 5.7.1 et les commentaires précédents, si α, β sont deux éléments tels que $tp(\alpha) = tp(\beta)$ et $f_q(\alpha)$ est bien défini, alors $f_q(\beta)$ est bien défini et $tp(f_q(\alpha)) = tp(f_q(\beta))$.

La proposition suivante sert à assurer dans la preuve du théorème de caractérisation de types que les conditions initiales pour le va-et-vient sont satisfaites : les deux n-uplets avec lesquelles on commencera le va-et-vient auront le même diagramme libre, c'est-à-dire on commence bien avec un 0-isomorphisme.

Lemme 5.7.3. *Soit $\bar{a}$ un n-uplet, $\phi(\bar{x})$ une formule sans quanteurs satisfaite par $\bar{a}$, $\mathcal{O}_{\bar{a}}(\bar{x})$ l'ordre de $\langle\bar{a}\rangle$, et $p_i(x) = tp(a_i)$ pour $i \leq n$. Alors $\mathcal{O}_{\bar{a}}(\bar{x}) \cup \bigcup_{i=1}^{n} p_i(x_i) \vdash \phi(\bar{x})$.*

Démonstration. Soit $\phi(\bar{x}) \equiv \bigvee_{k=1}^{l} \phi_k(\bar{x})$, où chaque $\phi_k(\bar{x})$ est une conjonction de $\mathcal{L}$-formules atomiques ou négation d'atomiques, c'est-à-dire elle est équivalente à une conjonction des formules du type :

· $f_m(x_i) < f_n(x_j)$

· $f_m(x_i) = f_n(x_j)$

· $P_i(f_m(x_j))$

· $\neg P_i(f_m(x_j))$

Puisque $\bar{a} \vDash \phi(\bar{x})$, on a que $\bar{a} \vDash \phi_{k_0}(\bar{x})$ pour un certain $k_0 \in \{1, \ldots, l\}$. Or les formules atomiques, ou négation d'atomiques, satisfaites par $\bar{a}$ sont évidemment contenues dans $\mathcal{O}_{\bar{a}} \cup \bigcup_{i=1}^{n} tp(a_i)$. Nous avons alors $\mathcal{O}_{\bar{a}}(\bar{x}) \cup \bigcup_{i=1}^{n} p_i(x_i) \vdash \phi_{k_0}(\bar{x})$ et donc $\mathcal{O}_{\bar{a}}(\bar{x}) \cup \bigcup_{i=1}^{n} p_i(x_i) \vdash \phi(\bar{x})$.

□

Théorème 5.7.4 (Caractérisation des types). *Soient Γ un modèle de $\mathcal{T}$ et $\bar{a} \in \Gamma$. Considérons :*

– $c_0 = (\emptyset, \langle\bar{a}\rangle)$

– $c_1 = (\langle\bar{a}\rangle \setminus \{\infty\}, \{\infty\})$ *si* $\infty \in \langle\bar{a}\rangle$, *ou* $c_1 = (\langle\bar{a}\rangle, \emptyset)$ *si* $\infty \notin \langle\bar{a}\rangle$.

– $v^{\langle\bar{a}\rangle} = (v_g^{\langle\bar{a}\rangle}, v_d^{\langle\bar{a}\rangle})$ *le bon choix de voisins associé à* $\langle\bar{a}\rangle$.

Alors $tp(\bar{a})$ est équivalent à

$$\mathcal{O}_{\bar{a}} \cup \bigcup_{c \in \mathscr{C}(\langle\bar{a}\rangle)} tp(v_g^{\langle\bar{a}\rangle}(c), v_d^{\langle\bar{a}\rangle}(c)) \cup tp(v_d^{\langle\bar{a}\rangle}(c_0), v_g^{\langle\bar{a}\rangle}(c_1))$$

Démonstration. Nous allons montrer le théorème par la méthode du va-et-vient. Considérons donc $\mathcal{M}$ et $\mathcal{N}$ deux modèles de $\mathcal{T}$ saturés ; et deux uplets, $\bar{a} = (a_1, \ldots, a_n) \in M$ et $\bar{b} = (b_1, \ldots, b_n) \in N$, satisfaisant les mêmes conditions données par l'énoncé du théorème, c'est-à-dire :

$C1(\bar{a}, \bar{b})$ Pour chaque $q \in \mathbb{Q}_{>0}$ et $i \in \{1, \ldots, n\}$, $f_q(a_i)$ est bien défini ssi $f_q(b_i)$ est bien défini

$C2(\bar{a}, \bar{b})$ Pour chaque $f_q(a_i), f_{q'}(a_j)$ et $f_q(b_i), f_{q'}(b_j)$ bien définis

(a) $f_q(a_i) < f_{q'}(a_j)$ ssi $f_q(b_i) < f_{q'}(b_j)$,

(b) $f_q(a_i) > f_{q'}(a_j)$ ssi $f_q(b_i) > f_{q'}(b_j)$,

(c) $f_q(a_i) = f_{q'}(a_j)$ ssi $f_q(b_i) = f_{q'}(b_j)$.

Remarque. Si l'on regarde $\langle\bar{a}\rangle$ et $\langle\bar{b}\rangle$ en tant que chaînes, $C2(\bar{a},\bar{b})$ implique que l'application $\sigma : \bar{a} \to \bar{b}$ donnée par $\sigma(a_i) = b_i$ induit un isomorphisme de chaînes entre $\langle\bar{a}\rangle$ et $\langle\bar{b}\rangle$. Alors, à chaque coupure de $\mathscr{C}(\langle\bar{a}\rangle)$ en correspond une autre de $\mathscr{C}(\langle\bar{b}\rangle)$.

Posons :

1. $c_0 = (\emptyset, \langle\bar{a}\rangle) \in \mathscr{C}(\langle\bar{a}\rangle)$ et $d_0 = (\emptyset, \langle\bar{b}\rangle) \in \mathscr{C}(\langle\bar{b}\rangle)$,
2. – $c_1 = (\langle\bar{a}\rangle \setminus \{\infty\}, \{\infty\}) \in \mathscr{C}(\langle\bar{a}\rangle)$ et $d_1 = (\langle\bar{b}\rangle \setminus \{\infty\}, \{\infty\}) \in \mathscr{C}(\langle\bar{b}\rangle)$, si $\infty \in \langle\bar{a}\rangle$ (équiv. $\infty \in \langle\bar{b}\rangle$),
   – $c_1 = (\langle\bar{a}\rangle, \emptyset) \in \mathscr{C}(\langle\bar{a}\rangle)$ et $d_1 = (\langle\bar{b}\rangle, \emptyset) \in \mathscr{C}(\langle\bar{b}\rangle)$, si $\infty \notin \langle\bar{a}\rangle$ (équiv. $\infty \notin \langle\bar{b}\rangle$).

$C3(\bar{a},\bar{b})$ (a) Pour chaque $c \in \mathscr{C}(\langle\bar{a}\rangle)$ et sa coupure correspondante $d \in \mathscr{C}(\langle\bar{b}\rangle)$:

$$tp(v_g^{\langle\bar{a}\rangle}(c)v_d^{\langle\bar{a}\rangle}(c)) = tp(v_g^{\langle\bar{b}\rangle}(d)v_d^{\langle\bar{b}\rangle}(d))\,;$$

(b) Si c_0, c_1, d_0 et d_1 désignent les coupures que nous venons de mentionner :

$$tp(v_d^{\langle\bar{a}\rangle}(c_0)v_g^{\langle\bar{a}\rangle}(c_1)) = tp(v_d^{\langle\bar{b}\rangle}(d_0)v_g^{\langle\bar{b}\rangle}(d_1)).$$

Voyons ensuite quelques faits que ces conditions impliquent, avant de commencer proprement le va-et-vient.

(i) D'après $C2(\bar{a},\bar{b})$, on a que $a_i \in V_g(c)$ ssi $b_i \in V_g(d)$, et $a_i \in V_d(c)$ ssi $b_i \in V_d(d)$. En plus, d'après la définition de bon choix de voisins, pour chaque $c \in \mathscr{C}(\langle\bar{a}\rangle)$ et sa coupure correspondante $d \in \mathscr{C}(\langle\bar{b}\rangle)$, et pour chaque $i \in \{1,\dots,n\}$ nous avons :

1. $a_i = v_g^{\langle\bar{a}\rangle}(c)$ ssi $b_i = v_g^{\langle\bar{b}\rangle}(d)$;
2. $a_i = v_d^{\langle\bar{a}\rangle}(c)$ ssi $b_i = v_d^{\langle\bar{b}\rangle}(d)$.

(ii) Soit $f_q(a_i) \in \langle\bar{a}\rangle$, et soit $A = \{x \in \langle\bar{a}\rangle : x \leq f_q(a_i)\}$. Considérons la coupure $c = (A, \langle\bar{a}\rangle \setminus A)$.
D'une part, si $a_j = v_g(c)$ alors $\langle a_j\rangle \cap A$ est cofinal dans A et donc $f_q(a_i) \in \langle a_j\rangle \cap A$; nous avons donc $f_{q'}(a_j) = f_q(a_i)$ pour un certain $f_{q'}(a_j) \in \langle a_j\rangle$. D'après $C2(\bar{a},\bar{b})$, $f_{q'}(b_j) = f_q(b_i)$.
D'autre part, puisque $a_j = v_g(c)$, par (i) $b_j = v_g(d)$. Mais par $C3(\bar{a},\bar{b})$ nous avons $tp(a_j) = tp(b_j)$; et alors, par la remarque 5.7.2, $tp(f_{q'}(a_j)) = tp(f_{q'}(b_j))$.
Finalement, comme $f_{q'}(a_j) = f_q(a_i)$ et $f_{q'}(b_j) = f_q(b_i)$, on obtient que $tp(f_q(a_i)) = tp(f_q(b_i))$.

(iii) Puisque l'on a $tp(a_i) = tp(b_i)$ pour chaque $i \leq n$ et aussi $C2(\bar{a},\bar{b})$, d'après le lemme 5.7.3 l'application $\sigma : \bar{a} \to \bar{b}$ donnée par $\sigma(a_i) = b_i$ est bien un 0-isomorphisme, c'est-à-dire $\bar{a}$ et $\bar{b}$ satisfont les mêmes formules sans quanteurs.

Note: La condition (iii) que nous venons de donner est nécessaire pour pouvoir appliquer la méthode du va-et-vient.

Soit maintenant $\alpha \in M$, que l'on considère comme étant a_{n+1} (rappelons nous que les indices jouent un rôle important dans le bon choix de voisins). On voudra alors trouver

$\beta \in N$ (vu comme b_{n+1}) tel que les conditions correspondantes $C1(\bar{a}\alpha, \bar{b}\beta)$, $C2(\bar{a}\alpha, \bar{b}\beta)$ et $C3(\bar{a}\alpha, \bar{b}\beta)$ soient satisfaites.

On notera $v^{\langle \bar{a}\alpha \rangle}$ et $v^{\langle \bar{b}\beta \rangle}$ les bons choix de voisins, associés respectivement à $\langle \bar{a}\alpha \rangle$ et $\langle \bar{b}\beta \rangle$.

Cas $\alpha \in \langle \bar{a} \rangle$ Disons $\alpha = f_{q_0}(a_{i_0})$.

Puisque $f_{q_0}(a_{i_0}) \in \langle \bar{a} \rangle$, il est bien défini, et alors par $C1(\bar{a}, \bar{b})$ on a que $f_{q_0}(b_{i_0})$ lui aussi est bien défini. Voyons que dans ce cas, en prenant $\beta = f_{q_0}(b_{i_0})$ on vérifie toutes les conditions.

- Disons que $f_q(f_{q_0}(a_{i_0}))$ est bien défini. Alors par le lemme 5.7.1 on a que $tp(f_{q_0}(a_{i_0})) \Rightarrow (f_q(f_{q_0}(a_{i_0}))$ bien défini). D'autre part, puisque $tp(f_{q_0}(a_{i_0})) = tp(f_{q_0}(b_{i_0}))$ par (ii), on aura aussi que $f_q(f_{q_0}(b_{i_0}))$ est bien défini. En suivant le même raisonnement on montre la réciproque : si $f_q(f_{q_0}(b_{i_0}))$ est bien défini, alors $f_q(f_{q_0}(a_{i_0}))$ est bien défini. Cela montre donc $f_q(\alpha)$ bien défini ssi $f_q(\beta)$ bien défini. Puisque par hypothèse on a aussi $f_q(a_i)$ bien définit ssi $f_q(b_i)$ bien bien définit, on a montré $C1(\bar{a}\alpha, \bar{b}\beta)$.
- D'après la proposition 5.5.19, pour chaque $q \in \mathbb{Q}_{>0}$, si $f_q(f_{q_0}(a_{i_0}))$ est bien défini alors $f_{q\cdot q_0}(a_{i_0})$ est bien défini et $f_{q\cdot q_0}(a_{i_0}) = f_q(f_{q_0}(a_{i_0}))$. De même pour $f_q(f_{q_0}(b_{i_0}))$ et $f_{q\cdot q_0}(b_{i_0})$. On pourra donc remplacer $f_q(f_{q_0}(a_{i_0}))$ et $f_q(f_{q_0}(b_{i_0}))$ par $f_{q\cdot q_0}(b_{i_0})$ et $f_{q\cdot q_0}(b_{i_0})$ respectivement, et on déduira alors immédiatement $C2(\bar{a}\alpha, \bar{b}\beta)$ de $C2(\bar{a}, \bar{b})$.
- Puisque $\langle \bar{a}\alpha \rangle = \langle \bar{a} \rangle$, pour tout coupure $e \in \mathscr{C}(\langle \bar{a}\alpha \rangle)$ on a que $e \in \mathscr{C}(\langle \bar{a} \rangle)$. De même, pour tout coupure $g \in \mathscr{C}(\langle \bar{b}\beta \rangle)$ on a $g \in \mathscr{C}(\langle \bar{b} \rangle)$.
  D'autre part, puisque les indices de α et β sont maximaux, nous avons que $v^{\langle \bar{a}\alpha \rangle}(e) = v^{\langle \bar{a} \rangle}(e)$ pour tout $e \in \mathscr{C}(\langle \bar{a}\alpha \rangle)$, et $v^{\langle \bar{b}\beta \rangle}(f) = v^{\langle \bar{b} \rangle}(f)$ pour tout $f \in \mathscr{C}(\langle \bar{b}\beta \rangle)$. D'après cela et $C3(\bar{a}, \bar{b})$ on conclut $C3(\bar{a}\alpha, \bar{b}\beta)$.

Cas $\alpha \notin \langle \bar{a} \rangle$ Si $\alpha = \infty$, on prend $\beta = \infty$. Puisque $\langle \infty \rangle = \{\infty\}$, on déduit immédiatement les conditions $C1(\bar{a}\alpha, \bar{b}\beta)$ et $C2(\bar{a}\alpha, \bar{b}\beta)$ de $C1(\bar{a}, \bar{b})$ et $C2(\bar{a}, \bar{b})$.

Nous avons d'autre part $\langle \bar{a}\alpha \rangle = \langle \bar{a} \rangle \cup \{\infty\}$. Alors la seule coupure de $\langle \bar{a}' \rangle$ qui n'est pas équivalente à une coupure de $\langle \bar{a} \rangle$ est $e_1 = (\langle \bar{a} \rangle, \{\infty\}) \in \mathscr{C}(\langle \bar{a}\alpha \rangle)$. Mais elle est équivalente à gauche avec c_1, donc $v_g^{\langle \bar{a}' \rangle}(e_1) = v_g^{\langle \bar{a} \rangle}(c_1)$. En raisonnant de la même façon sur $\langle \bar{b}\beta \rangle$ pour la coupure $f_1 = (\langle \bar{b}\beta \rangle, \{\infty\}) \in \mathscr{C}(\langle \bar{b}\beta \rangle)$ on obtient $v_g^{\langle \bar{b}\beta \rangle}(e_1) = v_g^{\langle \bar{b} \rangle}(d_1)$. On conclut donc $C3(\bar{a}\alpha, \bar{b}\beta)$ d'après cela et $C3(\bar{a}, \bar{b})$.

On supposera donc $\alpha \neq \infty$.

Dans ce cas α réalise une coupure de $\langle \bar{a} \rangle$. Disons $\alpha \vDash c$, avec $c = (A, B)$. On considère aussi $d = (E, F) \in \mathscr{C}(\langle \bar{b} \rangle)$ la coupure correspondante sur $\langle \bar{b} \rangle$.

Nous faisons d'abord quelques remarques.

(I) Si $\alpha' \in \langle \alpha \rangle$ et $\alpha' \neq \infty$, alors par le lemme 5.5.24 on a $\langle \alpha' \rangle = \langle \alpha \rangle$; en particulier $\alpha \in \langle \alpha' \rangle$. Si $\alpha' \in \langle \bar{a} \rangle$, alors $\alpha' \in \langle a_{i_0} \rangle$ pour un certain $i_0 \leq n$. Par le lemme 5.5.23 on aurait $\alpha \in \langle a_{i_0} \rangle \subseteq \langle \bar{a} \rangle$, ce qui contredirait nos hypothèses. On en déduit alors $\alpha' \notin \langle \bar{a} \rangle$.

(II) D'après (I), on a que tout $\alpha' \in \langle\alpha\rangle$ qui soit différent de ∞ réalise une certaine coupure c' de $\langle\bar{a}\rangle$. Par la proposition 5.6.24 on a $c \sim c'$, et par la remarque 5.6.33 on a que $v_g^{\langle\bar{a}\rangle}(c) = v_g^{\langle\bar{a}\rangle}(c')$ si $V_g(c) \neq \emptyset$ et $V_g(c') \neq \emptyset$, et aussi $v_d^{\langle\bar{a}\rangle}(c) = v_d^{\langle\bar{a}\rangle}(c')$ si $V_d(c) \neq \emptyset$ et $V_d(c') \neq \emptyset$.

Nous distinguons deux sous-cas :

(A) Il existe $\alpha' \in \langle\alpha\rangle$ différent de ∞ et réalisant une coupure $c' = (A', B')$ telle que $V_g(c') \neq \emptyset$ et $V_d(c') \neq \emptyset$

(B) Pour tout $\alpha' \in \langle\alpha\rangle$ différent de ∞, si $\alpha' \vDash c' = (A', B')$, alors soit $V_g(c') = \emptyset$ soit $V_d(c') = \emptyset$.

(A) Voyons que dans ce cas on peut supposer $V_g(c) \neq \emptyset$ et $V_d(c) \neq \emptyset$ (c'est-à-dire $A \neq \emptyset$ et $B \neq \emptyset$, $B \neq \{\infty\}$ par la remarque 5.6.27).

Supposons qu'on a trouvé β' tel que $C1(\bar{a}\alpha', \bar{b}\beta')$, $C2(\bar{a}\alpha', \bar{b}\beta')$ et $C3(\bar{a}\alpha', \bar{b}\beta')$.

Par le lemme 5.5.22, $\alpha = f_{\frac{1}{q}}(\alpha')$. Soit donc $\beta = f_{\frac{1}{q}}(\beta')$ (qui est bien défini d'après $C1(\bar{a}\alpha', \bar{b}\beta')$).

On raisonne alors de la même façon que dans le cas $\alpha \in \langle\bar{a}\rangle$ pour montrer $C1(\bar{a}\alpha, \bar{b}\beta)$ et $C2(\bar{a}\alpha, \bar{b}\beta)$. Pour montrer $C3(\bar{a}\alpha, \bar{b}\beta)$, il suffit de remarquer que puisque $\langle\bar{a}\alpha\rangle = \langle\bar{a}\alpha'\rangle$ et $\langle\bar{b}\beta\rangle = \langle\bar{b}\beta'\rangle$, alors $v^{\langle\bar{a}\alpha\rangle}(c) = v^{\langle\bar{a}\alpha'\rangle}(c)$ pour tout $c \in \mathscr{C}(\langle\bar{a}\alpha\rangle) = \mathscr{C}(\langle\bar{a}\alpha'\rangle)$, et aussi $v^{\langle\bar{b}\beta\rangle} = v^{\langle\bar{b}\beta'\rangle}(d)$ pour tout $d \in \mathscr{C}(\langle\bar{b}\beta\rangle) = \mathscr{C}(\langle\bar{b}\beta'\rangle)$.

On peut donc supposer $V_g(c) \neq \emptyset$ et $V_d(c) \neq \emptyset$, c'est-à-dire $A \neq \emptyset$ et $B \neq \emptyset$, $B \neq \{\infty\}$; et alors $E \neq \emptyset$ et $F \neq \emptyset$, $F \neq \{\infty\}$ par $C2(\bar{a}, \bar{b})$, c'est-à-dire $V_g(d) \neq \emptyset$ et $V_d(d) \neq \emptyset$.

Soit $(v_g^{\langle\bar{a}\rangle}(c), v_d^{\langle\bar{a}\rangle}(c)) = (a_{i_0}, a_{i_1})$ pour certains $i_0, i_1 \in \{1, \ldots, n\}$. D'après $C2(\bar{a}, \bar{b})$ et la définition de bon choix de voisins nous avons $(v_g^{\langle\bar{b}\rangle}(d), v_d^{\langle\bar{b}\rangle}(d)) = (b_{i_0}, b_{i_1})$, et par $C3(\bar{a}, \bar{b})$ on a $tp(a_{i_0}a_{i_1}) = tp(b_{i_0}b_{i_1})$.

Soient maintenant $p(x, x_{i_0}, x_{i_1}) = tp(\alpha, a_{i_0}, a_{i_1})$, et le type partiel $\Sigma(x_{i_0}, x_{i_1})$ suivant :

$$\Sigma(x_{i_0}, x_{i_1}) = \{\exists x \phi(x, x_{i_0}, x_{i_1}) : \phi(x, x_{i_0}, x_{i_1}) \in tp(\alpha, a_{i_0}, a_{i_1})\}.$$

Évidemment $\Sigma(x_{i_0}, x_{i_1}) \subset tp(a_{i_0}a_{i_1})$. Mais d'après $C3(\bar{a}, \bar{b})$ on a $tp(a_{i_0}a_{i_1}) = tp(b_{i_0}b_{i_1})$, et donc $\mathcal{N} \vDash \Sigma(b_{i_0}, b_{i_1})$. Par compacité, et saturation de $\mathcal{N}$, on trouve donc un $\beta \in N$ tel que $\mathcal{N} \vDash p(\beta, b_{i_0}, b_{i_1})$.

Alors $tp(\beta b_{i_0}b_{i_1}) = tp(\alpha a_{i_0}a_{i_1})$, et en particulier $tp(\beta) = tp(\alpha)$, ce qui nous donne tout de suite les conclusions suivantes :

- D'après la remarque 5.7.2, $f_q(\alpha)$ est bien défini ssi $f_q(\beta)$ est défini. Ce fait, plus $C1(\bar{a}, \bar{b})$, montre $C1(\bar{a}\alpha, \bar{b}\beta)$.
  Nous avons en plus, d'après la remarque 5.7.2 aussi, que $tp(f_q(\alpha)) = tp(f_q(\beta))$.
- $\mathcal{O}_\alpha = \mathcal{O}_\beta$, c'est-à-dire :
  1. $f_q(\alpha) < f_{q'}(\alpha)$ ssi $f_q(\beta) < f_{q'}(\beta)$
  2. $f_q(\alpha) > f_{q'}(\alpha)$ ssi $f_q(\beta) > f_{q'}(\beta)$

3. $f_q(\alpha) = f_{q'}(\alpha)$ ssi $f_q(\beta) = f_{q'}(\beta)$

– Supposons $f_q(\alpha) = f_{q'}(a_i)$ pour un certain $i \leq n$. Alors par (I) on aura $f_q(\alpha) = f_{q'}(a_i) = \infty$. Puisque $tp(\alpha) = tp(\beta)$, alors $f_q(\beta) = \infty$, et puisque $tp(f_{q'}(a_i)) = tp(f_{q'}(b_i))$ par (ii), on aura $f_{q'}(b_i) = \infty$.
La réciproque étant symétrique, nous avons montré que $f_q(\alpha) = f_{q'}(a_i)$ ssi $f_q(\beta) = f_{q'}(b_i)$.

Soit maintenant $f_q(\alpha)$ bien défini et différent de ∞. On a alors que $f_q(\alpha)$ réalise une certaine coupure $c' = (A', B') \in \mathscr{C}(\langle \bar{a} \rangle)$. Si $d' = (E', F') \in \mathscr{C}(\langle \bar{b} \rangle)$ est la coupure correspondante sur $\langle \bar{b} \rangle$, d'après (II) et $C2(\bar{a}, \bar{b})$ nous avons :

1. – $v_g^{\langle \bar{a} \rangle}(c') = v_g^{\langle \bar{a} \rangle}(c) = a_{i_0}$ si $V_g(c') \neq \emptyset$,
   – $v_d^{\langle \bar{a} \rangle}(c') = v_d^{\langle \bar{a} \rangle}(c) = a_{i_1}$ si $V_d(c') \neq \emptyset$,
   – $v_g^{\langle \bar{b} \rangle}(d') = v_g^{\langle \bar{b} \rangle}(d) = b_{i_0}$ si $V_g(d') \neq \emptyset$,
   – $v_d^{\langle \bar{b} \rangle}(d') = v_d^{\langle \bar{b} \rangle}(d) = b_{i_1}$ si $V_d(d') \neq \emptyset$;
2. – $v_g^{\langle \bar{a} \rangle}(c') = a_{i_0}$ ssi $v_g^{\langle \bar{b} \rangle}(d') = b_{i_0}$,
   – $v_d^{\langle \bar{a} \rangle}(c') = a_{i_1}$ ssi $v_d^{\langle \bar{b} \rangle}(d') = b_{i_1}$,
   – $v_g^{\langle \bar{a} \rangle}(c') = \emptyset$ ssi $v_g^{\langle \bar{b} \rangle}(d') = \emptyset$,
   – $v_d^{\langle \bar{a} \rangle}(c') = \emptyset$ ssi $v_d^{\langle \bar{b} \rangle}(d') = \emptyset$.

D'autre part, nous avons $\mathcal{M} \models (\langle a_{i_0} \rangle \cap A') < f_q(\alpha) < (\langle a_{i_1} \rangle \cap B')$, ou autrement dit $\mathcal{M} \models \{f_{q_r}(a_{i_0})\}_{r \in R} < f_q(\alpha) < \{f_{q_s}(a_{i_1})\}_{s \in S}$ pour certains R, S. On a alors

$$(\{f_{q_r}(x_{i_0})\}_{r \in R} < f_q(x) < \{f_{q_s}(x_{i_1})\}_{s \in S}) \subseteq tp(\alpha a_{i_0} a_{i_1}).$$

On en déduit ainsi $\mathcal{N} \models \{f_{q_r}(b_{i_0})\}_{r \in R} < f_q(\beta) < \{f_{q_s}(b_{i_1})\}_{s \in S}$, c'est-à-dire $f_q(\beta) \models d'$.
Cela, plus les observations précédentes, plus $C2(\bar{a}, \bar{b})$, montre $C2(\bar{a}\alpha, \bar{b}\beta)$.

Voyons finalement que $C3(\bar{a}\alpha, \bar{b}\beta)$ est aussi vérifié.
Soit $\tilde{c} = (\tilde{A}, \tilde{B}) \in \mathscr{C}(\langle \bar{a}\alpha \rangle)$, et $\tilde{d} = (\tilde{E}, \tilde{F}) \in \mathscr{C}(\langle \bar{b}\beta \rangle)$ sa coupure correspondante sur $\langle \bar{b}\beta \rangle$. D'après $C2(\bar{a}\alpha, \bar{b}\beta)$ et la définition de bon choix de voisins, il y a trois cas possibles :

1. $v_g^{\langle \bar{a}\alpha \rangle}(\tilde{c}), v_d^{\langle \bar{a}\alpha \rangle}(\tilde{c}) \in \bar{a} \cup \{\emptyset\}$, et en plus $v_g^{\langle \bar{b}\beta \rangle}(\tilde{d}), v_d^{\langle \bar{b}\beta \rangle}(\tilde{d}) \in \bar{b} \cup \{\emptyset\}$
2. $v_g^{\langle \bar{a}\alpha \rangle}(\tilde{c}), v_d^{\langle \bar{a}\alpha \rangle}(\tilde{c}) \in \{\alpha, \emptyset\}$, et en plus $v_g^{\langle \bar{b}\beta \rangle}(\tilde{d}), v_d^{\langle \bar{b}\beta \rangle}(\tilde{d}) \in \{\beta, \emptyset\}$
3. – soit $v_g^{\langle \bar{a}\alpha \rangle}(\tilde{c}) = \alpha$, $v_g^{\langle \bar{b}\beta \rangle}(\tilde{d}) = \beta$ et $v_d^{\langle \bar{a}\alpha \rangle}(\tilde{c}) \in \bar{a}$, $v_d^{\langle \bar{b}\beta \rangle}(\tilde{d}) \in \bar{b}$,
   – soit $v_g^{\langle \bar{a}\alpha \rangle}(\tilde{c}) \in \bar{a}$, $v_g^{\langle \bar{b}\beta \rangle}(\tilde{d}) \in \bar{b}$ et $v_d^{\langle \bar{a}\alpha \rangle}(\tilde{c}) = \alpha$, $v_d^{\langle \bar{b}\beta \rangle}(\tilde{d}) = \beta$.

Dans le cas 1. il existent $\tilde{c}_0 \in \mathscr{C}(\langle \bar{a} \rangle)$ et sa correspondante $\tilde{d}_0 \in \mathscr{C}(\langle \bar{b} \rangle)$, tels que $\tilde{c}_0 \equiv \tilde{c}$ et $\tilde{d}_0 \equiv \tilde{d}$. D'après la compatibilité entre bons choix donnée par le lemme 5.6.39, nous avons $(v_g^{\langle \bar{a}\alpha \rangle}(\tilde{c}), v_d^{\langle \bar{a}\alpha \rangle}(\tilde{c})) = (v_g^{\langle \bar{a} \rangle}(\tilde{c}_0), v_d^{\langle \bar{a} \rangle}(\tilde{c}_0))$ et $(v_g^{\langle \bar{b}\beta \rangle}(\tilde{d}), v_d^{\langle \bar{b}\beta \rangle}(\tilde{d})) = (v_g^{\langle \bar{b} \rangle}(\tilde{d}_0), v_d^{\langle \bar{b} \rangle}(\tilde{d}_0))$. On en conclut d'après $C3(\bar{a}, \bar{b})$ que $tp(v_g^{\langle \bar{a}\alpha \rangle}(\tilde{c}), v_d^{\langle \bar{a}\alpha \rangle}(\tilde{c})) = tp(v_g^{\langle \bar{b}\beta \rangle}(\tilde{d}), v_d^{\langle \bar{b}\beta \rangle}(\tilde{d}))$.

Dans le cas 2., $tp(v_g^{\langle \bar{a}\alpha \rangle}(\tilde{c}), v_d^{\langle \bar{a}\alpha \rangle}(\tilde{c})) = tp(v_g^{\langle \bar{b}\beta \rangle}(\tilde{d}), v_d^{\langle \bar{b}\beta \rangle}(\tilde{d}))$ est une conclusion immédiate du fait que $tp(\alpha) = tp(\beta)$.

Nous traitons finalement le cas 3.

Supposons $v_g^{\langle \bar{a}\alpha\rangle}(\tilde{c}) = \alpha$, $v_g^{\langle \bar{b}\beta\rangle}(\tilde{d}) = \beta$, $v_d^{\langle \bar{a}\alpha\rangle}(\tilde{c}) = a_{j_1}$ et $v_d^{\langle \bar{b}\beta\rangle}(\tilde{d}) = b_{j_1}$. Puisque par définition de voisin on a que $\langle a_{j_1}\rangle \cap \tilde{B}$ est coinitial dans $\tilde{B}$, et $\langle b_{j_1}\rangle \cap \tilde{F}$ est coinitial dans $\tilde{F}$, il existe deux coupures $c_* = (A_*, B_*) \in \mathscr{C}(\langle \bar{a}\rangle)$ et $d_* = (E_*, F_*) \in \mathscr{C}(\langle \bar{b}\rangle)$, tels que $c_* \hookrightarrow \tilde{c}$, $d_* \hookrightarrow \tilde{d}$ et $c_* \equiv_d \tilde{c}$, $d_* \equiv_d \tilde{d}$. En plus d_* est la coupure sur $\langle \bar{b}\rangle$ correspondante à c_*.

Par le lemme 5.6.39 on aura $a_{j_1} = v_d^{\langle \bar{a}\alpha\rangle}(\tilde{c}) = v_d^{\langle \bar{a}\rangle}(c_*)$ et $b_{j_1} = v_d^{\langle \bar{b}\beta\rangle}(\tilde{d}) = v_d^{\langle \bar{b}\rangle}(d_*)$.

Par définition de bon choix de voisins, et puisque α a un indice maximal (rappelons que $\alpha = a_{n+1}$), on a que $\mathcal{M} \vDash A_* < f_q(\alpha) < B_*$ pour un certain $f_q(\alpha) \in \langle \alpha\rangle$: si pour tout $f_q(\alpha) \in \langle \alpha\rangle$, soit il existe $a \in A_*$ tel que $f_q(\alpha) \leq a$ soit il existe $b \in B_*$ tel que $b \leq f_q(\alpha)$, alors, comme $\langle \bar{a}\alpha\rangle = \langle \bar{a}'\rangle \cup \langle \alpha\rangle$, on aurait $c_* \equiv_g \tilde{c}$ (en plus de $c_* \equiv_d \tilde{c}$) ; dans ce cas, d'après le lemme 5.6.39 $v_g^{\langle \bar{a}\rangle}(c_*) = v_g^{\langle \bar{a}\alpha\rangle}(\tilde{c}) = \alpha$. Mais cela est impossible, puisque $v_g^{\langle \bar{a}\rangle}(c_*) = a_i$ pour un certain $i \in \{1, \ldots, n\}$, et $\alpha \neq a_i$ pour tout $i \leq n$.

En plus $f_q(\alpha) \neq \infty$ (si le seul $\alpha' \in \langle \alpha\rangle$ tel que $A_* < \alpha' < B_*$ est $\alpha' = \infty$, alors $B_* = \tilde{B} = \emptyset$ et on serait dans le cas 2.).

Alors, comme nous l'avons déjà remarqué dans (II), la coupure que $f_q(\alpha)$ réalise, c'est-à-dire c_*, vérifie $v_d^{\langle \bar{a}\rangle}(c_*) = v_d^{\langle \bar{a}\rangle}(c) = a_{i_1}$ (et aussi $v_g^{\langle \bar{a}\rangle}(c_*) = v_g^{\langle \bar{a}\rangle}(c) = a_{i_0}$ si $V_g(c_*) \neq \emptyset$). D'après $C2(\bar{a}\alpha, \bar{b}\beta)$, la même chose arrive sur $\langle \bar{b}\beta\rangle$: la coupure que $f_q(\beta)$ réalise, c'est-à-dire d_*, vérifie $v_d^{\langle \bar{b}\rangle}(d_*) = v_d^{\langle \bar{b}\rangle}(d) = b_{i_1}$ (et aussi $v_g^{\langle \bar{b}\rangle}(d_*) = v_g^{\langle \bar{b}\rangle}(d) = b_{i_0}$ si $V_g(d_*) \neq \emptyset$).

Alors $a_{j_1} = a_{i_1}$ et $b_{j_1} = b_{i_1}$.

Nous avons donc finalement

$$tp(v_g^{\langle \bar{a}\alpha\rangle}(\tilde{c}), v_d^{\langle \bar{a}\alpha\rangle}(\tilde{c})) = tp(\alpha a_{i_1})$$
$$tp(v_g^{\langle \bar{b}\beta\rangle}(\tilde{d}), v_d^{\langle \bar{b}\beta\rangle}(\tilde{d})) = tp(\beta b_{i_1})$$

Puisque par construction $tp(\alpha a_{i_0} a_{i_1}) = tp(\beta b_{i_0} b_{i_1})$, on en conclut :

$$tp(v_g^{\langle \bar{a}\alpha\rangle}(\tilde{c}), v_d^{\langle \bar{a}\alpha\rangle}(\tilde{c})) = tp(v_g^{\langle \bar{b}\beta\rangle}(\tilde{d}), v_d^{\langle \bar{b}\beta\rangle}(\tilde{d})).$$

Le cas $v_g^{\langle \bar{a}\alpha\rangle}(\tilde{c}) = a_{j_0}$, $v_g^{\langle \bar{b}\beta\rangle}(\tilde{d}) = b_{j_0}$, $v_d^{\langle \bar{a}\alpha\rangle}(\tilde{c}) = \alpha$ et $v_d^{\langle \bar{b}\beta\rangle}(\tilde{d}) = \beta$ est analogue au précédent.

Pour montrer la condition (b) de $C3(\bar{a}\alpha, \bar{b}\beta)$, les mêmes raisonnements qu'on vient de faire sont valables.

(B) Considérons les coupures définies précédemment c_0 et c_1, d_0 et d_1.

Soit $(v_d^{\langle \bar{a}\rangle}(c_0), v_g^{\langle \bar{a}\rangle}(c_1)) = (a_{i_0}, a_{i_1})$ pour certains $i_0, i_1 \in \{1, \ldots, n\}$. D'après $C2(\bar{a}, \bar{b})$ et la définition de bon choix de voisins on aura $(v_d^{\langle \bar{a}\rangle}(d_0), v_g^{\langle \bar{a}\rangle}(d_1)) = (b_{i_0}, b_{i_1})$, et par $C3(\bar{a}, \bar{b})$ on aura $tp(a_{i_0} a_{i_1}) = tp(b_{i_0} b_{i_1})$.

On raisonnera de façon similaire au cas (A), mais il sera bien plus facile d'en tirer les conclusions.

Considérons alors $p(x, x_{i_0}, x_{i_1}) = tp(\alpha, a_{i_0}, a_{i_1})$, et le type partiel

$$\Sigma(x_{i_0}, x_{i_1}) \equiv \{\exists x \phi(x, x_{i_0}, x_{i_1}) : \phi(x, x_{i_0}, x_{i_1}) \in tp(\alpha, a_{i_0}, a_{i_1})\}.$$

Nous avons donc $\Sigma(a_{i_0}, a_{i_1}) \subset tp(a_{i_0} a_{i_1})$, et alors $\mathcal{N} \models \Sigma(b_{i_0}, b_{i_1})$. Par saturation de $\mathcal{N}$ et compacité, on trouvera $\beta \in N$ tel que $tp(\alpha a_{i_0} a_{i_1}) = tp(\beta b_{i_0} b_{i_1})$.

Puisque $tp(\alpha) = tp(\beta)$, on aura que pour tout $q \in \mathbb{Q}_{>0}$ $f_q(\alpha)$ est bien défini ssi $f_q(\beta)$ est bien défini. Cela montre $C1(\bar{a}\alpha, \bar{b}\beta)$.

On a aussi, d'après $tp(\alpha) = tp(\beta)$, que $\mathcal{O}_\alpha = \mathcal{O}_\beta$, c'est-à-dire :
- $f_q(\alpha) < f_{q'}(\alpha)$ ssi $f_q(\beta) < f_{q'}(\beta)$
- $f_q(\alpha) > f_{q'}(\alpha)$ ssi $f_q(\beta) > f_{q'}(\beta)$
- $f_q(\alpha) = f_{q'}(\alpha)$ ssi $f_q(\beta) = f_{q'}(\beta)$

D'après cela, plus $tp(\alpha a_{i_0} a_{i_1}) = tp(\beta b_{i_0} b_{i_1})$, plus le fait que pour tout $\alpha' \in \langle\alpha\rangle$ soit $\alpha' < \langle\bar{a}\rangle$, soit $\langle\bar{a}\rangle < \alpha'$, soit $\langle\bar{a}\rangle \setminus \{\infty\} < \alpha' \leq \infty$ (si $\infty \in \langle\bar{a}\rangle$), on conclut $C2(\bar{a}\alpha, \bar{b}\beta)$.

Finalement, pour tout coupure $\tilde{c} \in \mathscr{C}(\langle\bar{a}\alpha\rangle)$, nous avons une des quatre options suivantes :

1. Il existe $c_* \in \mathscr{C}(\langle\bar{a}\rangle)$ tel que $c_* \equiv \tilde{c}$;
2. $v_g^{\langle\bar{a}\alpha\rangle}(\tilde{c}) = \alpha$ et $v_d^{\langle\bar{a}\alpha\rangle}(\tilde{c}) = \alpha$;
3. $(v_g^{\langle\bar{a}\alpha\rangle}(\tilde{c}), v_d^{\langle\bar{a}\alpha\rangle}(\tilde{c})) = (a_{i_1}, \alpha)$ ou $(v_g^{\langle\bar{a}\alpha\rangle}(\tilde{c}), v_d^{\langle\bar{a}\alpha\rangle}(\tilde{c})) = (\alpha, a_{i_0})$;
4. $(v_g^{\langle\bar{a}\alpha\rangle}(\tilde{c}), v_d^{\langle\bar{a}\alpha\rangle}(\tilde{c})) = (\emptyset, \alpha)$ ou $(v_g^{\langle\bar{a}\alpha\rangle}(\tilde{c}), v_d^{\langle\bar{a}\alpha\rangle}(\tilde{c})) = (\alpha, \emptyset)$.

Pour chacune de ces trois options nous aurons, bien sûr, les conditions correspondantes sur $\langle\bar{b}\beta\rangle$, exprimés en termes de $\tilde{d}$ (la coupure correspondante à $\tilde{c}$).

Dans le cas 1. on déduit $tp(v_g^{\langle\bar{a}\alpha\rangle}(\tilde{c}), v_d^{\langle\bar{a}\alpha\rangle}(\tilde{c})) = tp(v_g^{\langle\bar{b}\beta\rangle}(\tilde{d}), v_d^{\langle\bar{b}\beta\rangle}(\tilde{d}))$ de $C3(\bar{a}, \bar{b})$ et de la compatibilité de bons choix de voisins donnée par le lemme 5.6.39.

Dans les cas 2., 3. et 4. on déduit la même chose d'après $tp(\alpha a_{i_0} a_{i_1}) = tp(\beta b_{i_0} b_{i_1})$, en utilisant aussi le lemme 5.6.39 pour 3.

Cela montre la première partie de $C3(\bar{a}\alpha, \bar{b}\beta)$.
La deuxième partie sera, elle aussi, une conséquence immédiate de $tp(\alpha a_{i_0} a_{i_1}) = tp(\beta b_{i_0} b_{i_1})$.
□

5.8 $\mathcal{T}$ est NIP

Proposition 5.8.1. *Soit $\phi(\bar{x})$ une formule dans le type d'un certain n-uple $\bar{a}$. Considérons les coupures suivantes :*
- *$c_0 = (\emptyset, \langle\bar{a}\rangle)$;*
- *$c_1 = (\langle\bar{a}\rangle \setminus \{\infty\}, \{\infty\})$ si $\infty \in \langle\bar{a}\rangle$, ou $c_1 = (\langle\bar{a}\rangle, \emptyset)$ si $\infty \notin \langle\bar{a}\rangle$.*

Alors $\mathcal{O}_{\bar{a}}(\bar{x})$ implique que $\phi(\bar{x})$ est équivalente à une combinaison booléenne de formules du type $\psi(x_i, x_j)$ (où i et j dépendent de ψ), telles que :
- *soit $(a_i, a_j) = (v_g^{\langle\bar{a}\rangle}(c), v_d^{\langle\bar{a}\rangle}(c))$ pour une certaine $c \in \mathscr{C}(\langle\bar{a}\rangle)$ (qui dépend de ψ),*
- *soit $(a_i, a_j) = (v_g^{\langle\bar{a}\rangle}(c_0), v_d^{\langle\bar{a}\rangle}(c_1))$,*

où $v^{\langle\bar{a}\rangle}$ est le bon choix de voisins associé à $\langle\bar{a}\rangle$.

Démonstration. Soit $\bar{b}$ un uple satisfaisant $\mathcal{O}_{\bar{a}}(\bar{x})$, c'est-à-dire $\mathcal{O}_{\bar{b}} = \mathcal{O}_{\bar{a}}$. Soient d_0 et d_1 les coupures sur $\langle \bar{b} \rangle$ correspondantes à c_0 et c_1 respectivement. D'après le théorème 5.7.4 on a $tp(\bar{b}) = tp(\bar{a})$ si d'une part

$$tp(v_d^{\langle \bar{a} \rangle}(c_0) v_g^{\langle \bar{a} \rangle}(c_1)) = tp(v_d^{\langle \bar{b} \rangle}(d_0) v_g^{\langle \bar{b} \rangle}(d_1)),$$

et d'autre part

$$tp(v_g^{\langle \bar{a} \rangle}(c), v_d^{\langle \bar{a} \rangle}(c)) = tp(v_g^{\langle \bar{b} \rangle}(d), v_d^{\langle \bar{b} \rangle}(d))$$

pour tous $c \in \mathscr{C}(\langle \bar{a} \rangle)$ et $d \in \mathscr{C}(\langle \bar{b} \rangle)$ des coupures correspondantes sur $\langle \bar{a} \rangle$ et $\langle \bar{b} \rangle$ respectivement.

Suivant alors la définition donnée dans la section 2.3, cela veut dire que l'ensemble des formules $\psi(x_i, x_j)$ mentionnées dans l'énoncé est un ensemble d'élimination relatif à $\mathcal{O}_{\bar{a}}(\bar{x})$. Nous pouvons alors appliquer la proposition 2.3.3 pour conclure. $\square$

Nous montrons la NIP en utilisant la notion d'avoir peu de types par coupure (définition 4.2.1, page 49).

Proposition 5.8.2. *La théorie $\mathcal{T}$ a peu de types par coupure.*

Démonstration. Soit $\mathcal{M}$ un modèle de $\mathcal{T}$ et $c = (A, B)$ une coupure de $\mathcal{M}$ réalisable. Nous voulons compter le nombre de types qui contiennent $A < x < B$.

Notons que cela implique en particulier $B \neq \emptyset$.

Nous allons trouver certains éléments $\{\alpha_I\}_{I \subseteq \mathbb{N}}, \{\beta_J\}_{J \subseteq \mathbb{N}}$ dans une extension de $\mathcal{M}$, grâce auxquels, à l'aide du théorème 5.7.4, nous pourrons compter facilement le nombre de types par coupure.

Soit $\mathcal{N}$ une extension élémentaire de $\mathcal{M}$ réalisant tous les types sur M, $C_{\mathcal{N}} = \{x \in N : \mathcal{N} \vDash A < x < B\}$, et u un élément quelconque dans $C_{\mathcal{N}}$.

Soit $u' \in \langle u \rangle$ avec $u' \neq \infty$, et disons $u' = f_q(u) = f_s^{-1}(f_r(u))$, avec $q = \frac{r}{s}$ et $pgcd(r, s) = 1$. Dans ce cas $u' \notin M$: sinon, $f_s(u') \in M$ et puisque $f_r^{-1}(f_s(u'))$ est bien défini ($f_s(u') = f_r(u) \neq \infty$ par le lemme 5.5.9), alors $f_r^{-1}(f_s(u')) \in M$, c'est-à-dire $u \in M$.

Alors u' réalisera une coupure $c' = (A', B')$ de M.

Faisons ensuite quelques remarques, conséquence du fait que $\mathcal{N}$ est une extension élémentaire de $\mathcal{M}$, et que $\mathcal{N} \vDash A' < u' < B'$:

(i) $\mathcal{N} \vDash \exists y\ a < y < u'$ pour tout $a \in A'$, et $\mathcal{N} \vDash \exists y\ u' < y < b$ pour tout $b \in B'$;

(ii) Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, si $f_n(N)$ a un élément minimal u_0, alors $u_0 \in M$, et si $N \setminus f_n(N)$ a un élément maximal u_0, alors $u_0 \in M$;

(iii) Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, si $\{u \in N : f_n(x) = \infty\}$ a un élément minimal u_0, alors $u_0 \in M$, et si $N \setminus \{u \in N : f_n(u) = \infty\}$ a un élément maximal u_0, alors $u_0 \in M$;

(iv) Si N a un élément minimal u_0, alors $u_0 \in M$.

Considérons maintenant, pour chaque $n \in \mathbb{N}$, les ensembles suivants :

$$D_n = f_n(N) \cap C_{\mathcal{N}},$$
$$\neg D_n = (N \setminus f_n(N)) \cap C_{\mathcal{N}}.$$

Évidemment $D_n \cap \neg D_n = \emptyset$, $D_n \cup \neg D_n = C_{\mathcal{N}}$, et par l'axiome (b2), $x < y$ pour tout $x \in \neg D_n$ et $y \in D_n$.

Étant donné $I \subseteq \mathbb{N}$, nous définissons aussi :

$$D^I = \bigcap_{n \in I} D_n.$$

On va trouver ensuite, pour chaque $I \subset \mathbb{N}$ tel que $D^I \neq \emptyset$, un certain α_I dans une extension élémentaire de $\mathcal{N}$, qui sera « convenable » dans un sens qu'on précisera plus tard.

Soit alors $I \subset \mathbb{N}$ tel que $D^I \neq \emptyset$, un ensemble fini $\bar{u} = (u_1, \ldots, u_k) \in D^I$ avec $u_1 < \cdots < u_k$, et $n \in I$.

Nous distinguons deux cas :

1. $f_n(M) \cap A \neq \emptyset$
2. $f_n(M) \cap A = \emptyset$

Si nous sommes dans le cas 1., par (i) et compacité il existe un $\alpha_{\bar{u},n}$ dans une certaine extension de $\tilde{\mathcal{N}} \succeq \mathcal{N}$ tel que $A < \alpha_{u,n} < u_1$, et d'après l'axiome (b2), $\alpha_{\bar{u},n} \in f_n(\tilde{N})$.

Si nous sommes dans le cas 2., d'après (ii) il existe aussi un $\alpha_{\bar{u},n}$ dans une extension $\tilde{\mathcal{N}} \succeq \mathcal{N}$ (on peut même affirmer qu'il se trouve dans N) tel que $A < \alpha_{\bar{u},n} < u_1$ et $\alpha_{\bar{u},n} \in f_n(\tilde{N})$.

Supposons maintenant qu'on a trouvé $\alpha_{\bar{u},n_1}, \ldots, \alpha_{\bar{u},n_s}$ avec ces propriétés. Si $\alpha_{u,n_1,\ldots,n_s} = \max\{\alpha_{u,n_1}, \ldots, \alpha_{u,n_s}\}$, alors nous avons $A < \alpha_{\bar{u},n_1,\ldots,n_s} < u_1$, et par l'axiome (b2) $\alpha_{\bar{u},n_1,\ldots,n_s} \in f_{n_j}(\tilde{N})$ pour $j = 1, \ldots, s$.

Nous avons donc que pour tout ensemble fini d'éléments $\{u_1, \ldots, u_k\} \subseteq D^I$ et tout ensemble fini d'indices $\{n_1, \ldots, n_S\} \subseteq I$, il existe un $\alpha_{\bar{u},n_1,\ldots,n_s}$ dans une extension $\tilde{\mathcal{N}}$ tel que $A < \alpha_{\bar{u},n_1,\ldots,n_s} < \{u_1, \ldots, u_k\}$ et $\alpha_{\bar{u},n_1,\ldots,n_s} \in f_{n_j}(\tilde{N})$ pour $j = 1, \ldots, s$.

Par compacité, il existe un α_I dans une extension de $\mathcal{N}$ tel que :

$$A < \alpha_I < u \text{ et } \alpha_I \in f_n(\tilde{N}), \text{ pour tout } u \in D^I \text{ et } n \in I.$$

Voyons dans quel sens ce α_I est « convenable » .

Soit $u \in D^I$, et $f_q(u) \in \langle u \rangle$, avec $f_q(u) \neq \infty$ et $q = \frac{r}{s}$, où $pgcd(r, s) = 1$. Notons d'abord que $f_r(u) \neq \infty$ par le lemme 5.5.9.

Par la remarque 5.5.13 on a que $f_s^{-1}(u)$ et bien défini, c'est-à-dire $s \in I$, et donc par construction $\alpha_I \in f_s(\tilde{N})$. Dans ce cas alors $f_r(f_s^{-1}(\alpha_I)) = f_s^{-1}(f_r(\alpha_I)) = f_q(\alpha_I)$.

Nous avons $f_q(\alpha_I) < f_q(u)$: si $f_q(u) \leq f_q(\alpha_I)$, puisque $f_q(u) \neq \infty$ on peut appliquer le lemme 5.3.4 pour déduire $u \leq \alpha_I$, ce qui contredit la construction de α_I.

Supposons maintenant, pour arriver à une contradiction, qu'il existe $m \in M$ tel que $f_q(\alpha_I) \leq m \leq f_q(u)$.

Dans ce cas, par le lemme 5.3.4 on a $f_r(\alpha_I) \leq f_s(m) \leq f_r(u) \neq \infty$, et par par l'axiome (b2) il existe $m_0 \in M$ tel que $f_r(m_0) = f_s(m)$. Encore par le lemme 5.3.4 on a $\alpha_I \leq m_0 \leq u$, ce qui est en contradiction avec la construction de α_I.

Nous avons donc montré que pour tout $u \in D^I$, pour tout $f_q(u) \in \langle u \rangle$ différent de ∞, et pour tout $m \in M$ tel que $m < f_q(u)$, on a :

$$m < f_q(\alpha_I) < f_q(u). \tag{5.1}$$

Considérons maintenant, pour chaque $n \in \mathbb{N}$ les ensembles suivants :

$$\begin{aligned} T_n &= f_n^{-1}(\{\infty\}) \cap C_{\mathcal{N}}, \\ \neg T_n &= (N \setminus f_n^{-1}(\{\infty\})) \cap C_{\mathcal{N}}. \end{aligned}$$

Nous avons $T_n \cap \neg T_n = \emptyset$, $T_n \cup \neg T_n = C_{\mathcal{N}}$, et par le lemme 5.3.5, $x < y$ pour tout $x \in \neg T_n$ et $y \in T_n$.

Étant donné $J \subseteq \mathbb{N}$, nous définissons aussi :

$$\neg T^J = \bigcap_{n \in J} \neg T_n.$$

Pour chaque $J \subset \mathbb{N}$ tel que $\neg T^J \neq \emptyset$, nous allons trouver un certain β_J de façon similaire à α_I, et dont l'utilité sera évidente plus tard.

Fixons alors un $J \subset \mathbb{N}$ tel que $\neg T^J \neq \emptyset$, et soient $\bar{u} = (u_1, \ldots, u_k) \in \neg T^J$ avec $u_1 < \cdots < u_k$, et $n \in J$.

Nous considérons deux cas :

1. Il existe $b \in B$ tel que $f_n(b) \neq \infty$
2. $f_n(B) = \{\infty\}$ ou $B = \emptyset$

Si nous sommes dans le cas 1., par (i) et compacité, il existe un $\beta_{\bar{u},n}$ dans une certaine extension de $\mathcal{N}$ tel que $u < \beta_{u,n} < B$, et d'après le lemme 5.3.5, $f_n(\beta_{\bar{u},n}) \neq \infty$.

Si nous sommes dans le cas 2., d'après (iii) il existe aussi un $\beta_{\bar{u},n}$ dans une extension de $\mathcal{N}$ (même dans N) tel que $u_k < \beta_{\bar{u},n} < B$ et $f_n(\beta_{\bar{u},n}) \neq \infty$.

Supposons maintenant qu'on a trouvé $\beta_{\bar{u},n_1}, \ldots, \beta_{\bar{u},n_s}$ avec ces propriétés. Si $\beta_{u,n_1,\ldots,n_s} = \min\{\beta_{u,n_1}, \ldots, \beta_{u,n_s}\}$, alors par le lemme 5.3.5, $\beta_{\bar{u},n_1,\ldots,n_s}$ vérifie $u_k < \beta_{\bar{u},n_1,\ldots,n_s} < B$ et $f_{n_j}(\beta_{\bar{u},n_1,\ldots,n_s}) \neq \infty$ pour $j = 1, \ldots, s$.

Nous avons donc que pour tout ensemble fini d'éléments $\{u_1, \ldots, u_k\} \subseteq \neg T^J$ et tout ensemble fini d'indices $\{n_1, \ldots, n_S\} \subseteq J$, il existe un $\beta_{\bar{u},n_1,\ldots,n_s}$ tel que $\{u_1, \ldots, u_k\} < \beta_{\bar{u},n_1,\ldots,n_s} < B$ et $f_{n_j}(\beta_{\bar{u},n_1,\ldots,n_s}) \neq \infty$ pour $j = 1, \ldots, s$.

Par compacité, il existe un β_J dans une extension de $\mathcal{N}$ tel que $u < \beta_J < B$ et $f_n(\beta_J) \neq \infty$, pour tout $u \in \neg T^J$ et $n \in J$.

Voyons dans quel sens ce β_J est « convenable » .

Soit $u \in \neg T^J$, et $f_q(u) \in \langle u \rangle$, avec $f_q(u) \neq \infty$ et $q = \frac{r}{s}$, où $pgcd(r, s) = 1$. Par le lemme 5.5.9 $f_r(u) \neq \infty$, c'est-à-dire $r \in J$, et donc par construction $f_r(\beta_J) \neq \infty$.

Nous utilisons donc l'axiome (b1) et l'axiome (b2) pour voir que $f_q(\beta_J)$ est bien défini (et différent de ∞ bien sûr) et $f_q(u) < f_q(\beta_J)$.

Supposons maintenant, pour arriver à une contradiction, qu'il existe $m \in M$ tel que $f_q(u) \leq m \leq f_q(\beta_J)$.

Dans ce cas, par le lemme 5.3.4 on a $f_r(u) \leq f_s(m) \leq f_r(\beta_J) \neq \infty$, et par l'axiome (b2) il existe $m_0 \in M$ tel que $f_r(m_0) = f_s(m)$, donc $u \leq m_0 \leq \beta_J$, ce qui est en contradiction avec la construction de β_J.

Nous avons donc montré que pour tout $u \in \neg T^J$, pour tout $f_q(u) \in \langle u \rangle$ différent de ∞, et pour tout $m \in M$ tel que $f_q(u) < m$, on a :

$$f_q(u) < f_q(\beta_J) < m. \tag{5.2}$$

Nous avons ainsi trouvé $\{\alpha_I\}_{I \in \mathbb{I}}$ et $\{\beta_J\}_{J \in \mathbb{J}}$, pour certains $\mathbb{I}$ et $\mathbb{J}$ sous-ensembles de $\mathscr{P}(\mathbb{N})$. On peut considérer qu'ils se trouvent dans le même modèle $\tilde{\mathcal{N}}$.

Voyons ensuite comment ils peuvent nous aider à compter le nombre de types.

Soient $u_1, u_2 \in C_{\mathcal{N}}$ (c'est-à-dire u_1 et u_2 réalisent la coupure $c = (A, B)$ de M et $u_1, u_2 \in N$) tels que $tp(u_1/\{\alpha_I\}_{I \in \mathbb{I}}\{\beta_J\}_{J \in \mathbb{J}}) = tp(u_2/\{\alpha_I\}_{I \in \mathbb{I}}\{\beta_J\}_{J \in \mathbb{J}})$. On montre que $tp(u_1/M) = tp(u_2/M)$.

Soit $I_1 \in \mathbb{I}$ le sous-ensemble de $\mathbb{N}$ tel que $u_1 \in f_n(N)$ pour tout $n \in I_1$, et $u_1 \notin f_n(N)$ pour tout $n \in \mathbb{N} \setminus I_1$.

Soit aussi $J_1 \in \mathbb{J}$ le sous-ensemble de $\mathbb{N}$ tel que $f_n(u_1) \neq \infty$ pour tout $n \in J_1$, et $f_n(u_1) = \infty$ pour tout $n \in \mathbb{N} \setminus J_1$.

Remarque. Si nous définissons de façon analogue I_2 et J_2 en termes de u_2, on peut d'eduire $I_1 = I_2$ et $J_1 = J_2$ d'après $tp(u_1) = tp(u_2)$. Cependant nous n'utilisons pas ce fait.

Rappelons que puisque u_1 réalise une coupure c de M, si $u_1' \in \langle u_1 \rangle$, alors soit $u_1' = \infty$ soit $u_1' \notin M$. La même chose est vraie pour u_2.

D'après (5.1) et (5.2), pour tout $f_q(u_1) \in \langle u_1 \rangle$ et $m \in M$ nous avons :

(a) soit $m < f_q(\alpha_{I_1}) < f_q(u_1)$,

(b) soit $f_q(u_1) < f_q(\beta_{J_1}) < m$,

(c) soit $f_q(u_1) = f_q(\beta_{J_1}) = \infty$.

Voyons que pour tout uplet $\bar{m} \in M$ on a $\mathcal{O}_{\bar{m}\alpha_{I_1}\beta_{J_1}u_1} = \mathcal{O}_{\bar{m}\alpha_{I_1}\beta_{J_1}u_2}$:
Puisque par hypothèse nous avons $tp(u_1/\{\alpha_I\}_{I \in \mathbb{I}}\{\beta_J\}_{J \in \mathbb{J}}) = tp(u_2/\{\alpha_I\}_{I \in \mathbb{I}}\{\beta_J\}_{J \in \mathbb{J}})$, en particulier $tp(u_1/\alpha_{I_1}\beta_{J_1}) = tp(u_2/\alpha_{I_1}\beta_{J_1})$. D'ici on déduit d'abord $\mathcal{O}_{\alpha_{I_1}\beta_{J_1}u_1} = \mathcal{O}_{\alpha_{I_1}\beta_{J_1}u_2}$. D'autre part, si $f_q(u_1) \in \langle \bar{m} \rangle \subset M$ alors $f_q(u_1) = \infty$, ce qui est équivalent à $f_q(u_2) = \infty$. Finalement, si $f_q(u_1) \neq \infty$ et $m' < f_q(u_1)$ pour un certain $m' \in \langle \bar{m} \rangle$, alors $m' < f_q(\alpha_{I_1}) < f_q(u_1)$. Puisque $tp(u_1/\alpha_{I_1}\beta_{J_1}) = tp(u_2/\alpha_{I_1}\beta_{J_1})$ on a $f_q(\alpha_{I_1}) < f_q(u_2)$, et donc $m' < f_q(u_2)$. On traite de façon analogue le cas $f_q(u_1) < m'$.

On conclut d'après tout cela que

$$\mathcal{O}_{\bar{m}\alpha_{I_1}\beta_{J_1}u_1} = \mathcal{O}_{\bar{m}\alpha_{I_1}\beta_{J_1}u_2}. \tag{5.3}$$

Soit maintenant $\phi(x, \bar{m}) \in tp(u_1/M)$, avec $\bar{m} = (m_1, \ldots, m_l)$, et posons

$$(a_1, a_2, a_3, \ldots, a_{l+2}, a_{l+3}) = (\alpha_{I_1}, \beta_{J_1}, m_1, \ldots, m_l, u_1).$$

Cette indexation va nous servir à pouvoir appliquer la définition de bon choix de voisins de façon convenable.

On pose $\bar{a} = (a_1, a_2, a_3, \ldots, a_{l+2}, a_{l+3})$ et $v^{\langle \bar{a} \rangle}$ le bon choix de voisins associé à $\langle \bar{a} \rangle$. D'après la proposition 5.8.1, si $\psi(\bar{x}) \in tp(\bar{a})$ alors $\mathcal{O}_{\bar{a}}(\bar{x})$ implique que $\psi(\bar{x})$ est équivalente à une combinaison booléenne de formules du type $\theta(x_i, x_j)$ telles que :

– soit $(a_i, a_j) = (v_g^{\langle \bar{a} \rangle}(z), v_d^{\langle \bar{a} \rangle}(z))$ pour une certaine coupure $z = (X, Y) \in \mathscr{C}(\langle \bar{a} \rangle)$,

– soit $(a_i, a_j) = (v_g^{\langle \bar{a} \rangle}(z_0), v_d^{\langle \bar{a} \rangle}(z_1))$, où $z_0 = (\emptyset, \langle \bar{a} \rangle)$ et $z_1 = (\langle \bar{a} \rangle \backslash \{\infty\}, \{\infty\})$ si $\infty \in \langle \bar{a} \rangle$ ou $z_1 = (\langle \bar{a} \rangle, \emptyset)$ si $\infty \notin \langle \bar{a} \rangle$.

Supposons pour arriver à une contradiction que nous avons $(u_1, m_{k_0}) = (v_g^{\langle \bar{a} \rangle}(z), v_d^{\langle \bar{a} \rangle}(z))$ pour une certaine coupure $z = (X, Y) \in \mathscr{C}(\langle \bar{a} \rangle)$ et un certain $k_0 \in \{1, \ldots, l\}$. Alors par définition $\langle u_1 \rangle \cap X$ est cofinal dans X et $\langle m_{k_0} \rangle \cap Y$ est coinitial dans Y.

Soit maintenant $u_1' \in \langle u_1 \rangle \cap X$. Si $u_1' = \infty$ alors $\infty \in \langle \bar{a} \rangle$ et $z = (X, Y) = (\langle \bar{a} \rangle, \emptyset)$. Mais dans ce cas, d'après la définition de voisin nous avons $(v_g^{\langle \bar{a} \rangle}(z), v_d^{\langle \bar{a} \rangle}(z)) = (\emptyset, \emptyset)$, ce qui contredit $(v_g^{\langle \bar{a} \rangle}(z), v_d^{\langle \bar{a} \rangle}(z)) = (u_1, m_{k_0})$.

Supposons alors $u_1' = f_q(u_1) \in \langle u_1 \rangle \cap X$, avec $f_q(u_1) \neq \infty$ et $f_q(u_1) \vDash (A', B')$ pour une certaine coupure (A', B') de M. D'après (b) on a

$$f_q(u_1) < f_q(\beta_{J_1}) < B'. \tag{5.4}$$

Comme $f_q(u_1) \in X$ alors $f_q(u_1) < Y$, et en particulier $f_q(u_1) < Y \cap \langle m_{k_0} \rangle$. Puisque $Y \cap \langle m_{k+0} \rangle \subseteq M$ et (A', B') est la coupure de M réalisée par $f_q(u_1)$, on déduit $Y \cap \langle m_{k_0} \rangle \subseteq B'$. Ainsi, d'après (5.4) on conclut

$$f_q(\beta_{J_1}) < Y \cap \langle m_{k_0} \rangle.$$

Comme $Y \cap \langle m_{k_0} \rangle$ est coinitial dans Y on en déduit $f_q(\beta_{J_1}) < Y$, et comme $f_q(\beta_{J_1}) \in \langle \bar{a} \rangle = X \cup Y$ on a $f_q(\beta_{J_1}) \in X$, donc

$$f_q(\beta_{J_1}) \in \langle \beta_{J_1} \rangle \cap X. \tag{5.5}$$

Nous avons trouvé ainsi pour chaque $u_1' \in \langle u_1 \rangle \cap X$ un $\beta_{J_1}' \langle \beta_{J_1} \rangle \cap X$ tel que $u_1' \leq \beta_{J_1}'$. Puisque par hypothèse $\langle u_1 \rangle \cap X$ est cofinal dans X, on conclut alors que $\langle \beta_{J_1} \rangle \cap X$ est aussi cofinal dans X.

Mais nous avons établi que $\beta_{J_1} = a_2$ et $u_1 = a_{l+3}$. Par définition donc de bon choix de voisins nous avons $v_g^{\langle \bar{a} \rangle}(z) \neq a_{l+3} = u_1$.

Nous arrivons à une contradiction de façon analogue dans le cas où $(m_{k_0}, u_1) = (v_g^{\langle \bar{a} \rangle}(z), v_d^{\langle \bar{a} \rangle}(z))$ pour une certaine coupure $z = (X, Y) \in \mathscr{C}(\langle \bar{a} \rangle)$ et un certain $k_0 \in \{1, \ldots, l\}$.

De même, si $(u, m_{k_0}) = (v_g^{\langle \bar{a} \rangle}(z_0), v_d^{\langle \bar{a} \rangle}(z_1))$ ou $(m_{k_0}, u) = (v_g^{\langle \bar{a} \rangle}(z_0), v_d^{\langle \bar{a} \rangle}(z_1))$ pour un certain $k_0 \in \{1, \ldots, l\}$, nous arrivons à une contradiction grâce à la maximalité de l'indice de u et la construction de α_{I_1} et β_{J_1}.

Considérons maintenant $\phi(x, \bar{m}) \in tp(u_1/M)$, avec $\bar{m} = (m_1, \ldots, m_l)$. On peut écrire de façon triviale $\phi(x, \bar{m}) \equiv \phi(x, \bar{m}; \alpha_{I_1}, \beta_{J_1})$, et donc $\tilde{\mathcal{N}} \vDash \phi(u, \bar{m}; \alpha_{I_1}, \beta_{J_1})$. Autrement dit

$$\phi(x_{l+3}, x_3, \ldots, x_l; x_1, x_2) \in tp(a_1, \ldots, a_{l+3}),$$

où

$$(a_1, a_2, a_3, \dots, a_{l+2}, a_{l+3}) = (\alpha_{I_1}, \beta_{J_1}, m_1, \dots, m_l, u_1).$$

Soit $\phi^*(x_1, \dots, x_{l+3}) \equiv \phi(x_{l+3}, x_3, \dots, x_l; x_1, x_2)$. D'après ce que nous venons de montrer, pour un certain K fini nous avons

$$\mathcal{O}_{\bar{a}}(\bar{x}) \vdash \phi^*(\bar{x}) \leftrightarrow \bigvee_{k \in K} \theta^k(\bar{x}), \tag{5.6}$$

où chaque formule $\theta^k(\bar{x})$ est de la forme :

$$\psi^k(x_1, \dots, x_{l+2}) \wedge \phi_1^k(x_1, x_{l+3}) \wedge \phi_2^k(x_2, x_{l+3}),$$

pour certaines formules $\psi^k, \phi_1^k, \phi_2^k$.

D'autre part nous avons $(\alpha_{I_1}, \beta_{J_1}, m_1, \dots, m_l, u_1) \vDash \mathcal{O}_{\bar{a}}(\bar{x})$ par définition, donc d'après (5.3) on a aussi $(\alpha_{I_1}, \beta_{J_1}, m_1, \dots, m_l, u_2) \vDash \mathcal{O}_{\bar{a}}(\bar{x})$. Alors, par (5.6) nous avons :

$$(\alpha_{I_1}, \beta_{J_1}, m_1, \dots, m_l, u_2) \vDash \phi^*(\bar{x}) \Longleftrightarrow (\alpha_{I_1}, \beta_{J_1}, m_1, \dots, m_l, u_2) \vDash \bigvee_{k \in K} \theta^k(\bar{x}).$$

Mais par hypothèse $tp(u_1/\{\alpha_I\}_{I\in\mathbb{I}}\{\beta_J\}_{J\in\mathbb{J}}) = tp(u_2/\{\alpha_I\}_{I\in\mathbb{I}}\{\beta_J\}_{J\in\mathbb{J}})$, donc si pour $k_0 \in K$ on a $\tilde{\mathcal{N}} \vDash \phi_1^{k_0}(\alpha_{I_1}, u_1) \wedge \phi_2^{k_0}(\beta_{J_1}, u_1)$ alors

$$\tilde{\mathcal{N}} \vDash \phi_1^{k_0}(\alpha_{I_1}, u_2) \wedge \phi_2^{k_0}(\beta_{J_1}, u_2),$$

et donc

$$\phi^*(\bar{x}) \in tp(\alpha_{I_1}, \beta_{J_1}, m_1, \dots, m_l, u_2).$$

Cela implique alors

$$\phi(x, \bar{m}) \in tp(u_2/M).$$

Nous pouvons raisonner exactement de la même façon pour montrer que si $\phi(x, \bar{m}) \in tp(u_2/M)$ alors $\phi(x, \bar{m}) \in tp(u_1/M)$.

Nous avons donc montré :

$$tp(u_1/\{\alpha_I\}_{I\in\mathbb{I}}\{\beta_J\}_{J\in\mathbb{J}}) = tp(u_2/\{\alpha_I\}_{I\in\mathbb{I}}\{\beta_J\}_{J\in\mathbb{J}}) \Longrightarrow tp(u_1/M) = tp(u_1/M). \tag{5.7}$$

Puisque $\mathcal{N}$ réalise tous les types sur M, en particulier $\mathcal{N}$ réalise tous les types qui contiennent $A < x < B$. D'autre part, (5.7) nous dit que le type sur M d'un élément de N réalisant $A < x < B$ dépend seulement de son type sur $\{(\alpha_I)_{I\in\mathbb{I}}(\beta_J)_{J\in\mathbb{J}}\}$. Puisque $\mathcal{M}$ est arbitraire et la cardinalité de $\{(\alpha_I)_{I\in\mathbb{I}}(\beta_J)_{J\in\mathbb{J}}\}$ est bornée ($\mathbb{I}$ et $\mathbb{J}$ sont des sous-ensembles de $\mathscr{P}(\mathbb{N})$), on en déduit que $\mathcal{T}$ a peu de types par coupure. □

Théorème 5.8.3. *La théorie $\mathcal{T}$ est NIP.*

Démonstration. Par les propositions 4.2.2 et 5.8.2. □

5.9 Application aux groupes valués

Dans cette section nous allons appliquer le théorème 5.8.3 à la théorie des groupes valués étudiée dans [30], que nous notons $\mathcal{T}_S^{(p,q)}$.

Considérons la théorie $\mathcal{T}_{gv}$ de groupes abéliens valués : c'est une théorie à deux sortes, G et Γ, dans le langage $\mathcal{L}_{gv} = \{+, \leq, v, 0, \infty\}$, avec les propriétés données dans la section 2.2.

Considérons aussi le schéma d'axiomes $\mathscr{A}$, qui affirme pour chaque nombre premier p :

(I) $\forall x \forall y \ (v(px) < v(py) \to v(x) < v(y))$;

(II) $\forall x \forall y \ [v(x) < v(y) \to (v(px) < v(py) \vee px = 0)]$

(III) $\forall x \forall y \ (v(x) < v(py) \vee \exists z \ pz = x)$.

Lemme 5.9.1. *Le schéma $\mathscr{A}$ est vrai si on remplace p par $n \in \mathbb{N}^*$.*

Démonstration. Nous le montrons pour $n = p \cdot q$, avec p et q des nombres premiers ; pour un n général il suffira de faire une récurrence. Soient donc $x, y \in G$.

(i) Par (I), si $v(pqx) < v(pqy)$ alors $v(qx) < v(qy)$ et puis $v(x) < v(y)$.

(ii) Par (II), si $v(x) < v(y)$ alors $v(qx) < v(qy)$ ou $qx = 0$ (et donc $pqx = 0$). Si $v(qx) < v(qy)$ alors $v(pqx) < v(pqy)$ ou $pqx = 0$.

(iii) Si $v(pqy) \leq v(x)$, alors $x \in pG$ par (III) ; disons $x = px'$. Il y a donc deux cas à considérer :
- si $v(qy) \leq v(x')$, alors $x' \in qG$ par (III), et donc $x \in pqG$;
- si $v(x') < v(qy)$, par (II) et $v(pqy) \leq v(px')$ nous avons $px' = 0$, donc $x \in pqG$.

□

Rappelons que v est surjective. Ainsi, pour chaque $n \in \mathbb{N}^*$, on peut définir une fonction $f_n : \Gamma \to \Gamma$ par $f_n(v(x)) = v(nx)$. Elle est bien définie d'après le lemme 5.9.1.

Soit aussi, pour chaque $n \in \mathbb{N}^*$, le prédicat unaire R_n dans Γ défini par : $R_n(\gamma)$ ssi $\mid \bar{B}_\gamma / B_\gamma^\circ \mid > n$.

Nous considérons ensuite le langage $\mathcal{L}_S = \mathcal{L}_{gv} \cup \{(f_n)_{n \in \mathbb{N}^*}\} \cup \{(R_n)_{n \in \mathbb{N}^*}\}$.

Fixons deux nombres premiers p, q. La $\mathcal{L}_S$-théorie $\mathcal{T}_S^{(p,q)}$ est la réunion de $\mathscr{A}$ avec les définitions des f_n et R_n, affirmant en plus que G est non p-divisible et qu'il a de la q-torsion. Nous considérons aussi $p = 0$ si G est divisible et $q = 0$ s'il n'a pas de torsion.

Notons $\mathcal{L}_v$ le sous-langage $\{\leq, (R_n)_{n \in \mathbb{N}^*}, (f_n)_{n \in \mathbb{N}^*}, \infty\}$ de $\mathcal{L}_S$.

Définition 5.9.2. $\mathcal{T}_{ord}$ désigne l'ensemble des $\mathcal{L}_v$-énoncés satisfaits par la sorte Γ dans tout modèle de $\mathcal{T}_S^{(p,q)}$.

Proposition 5.9.3. *La théorie $\mathcal{T}_{ord}$ implique $\mathcal{T}$.*

Remarque 5.9.4. D'après le lemme 5.9.1, pour tous $x, y \in G$ et $n \in \mathbb{N}^*$, si $nx \neq 0$ alors : $v(x) < v(y)$ ssi $v(nx) < v(ny)$. En particulier, si $nx \neq 0$ (équiv. $ny \neq 0$), alors : $v(x) = v(y)$ ssi $v(nx) = v(ny)$.

Lemme 5.9.5. *Pour tous $x, y \in G$ et p, q des nombres premiers différents, si $v(px) = v(qy) \neq \infty$, alors il existent $z, z' \in G$ tels que $v(qz) = v(x)$, $v(pz') = v(y)$ et $v(z) = v(z')$.*

Démonstration. Si $v(px) = v(qy)$, d'après (III), d'une part $px \in qG$ et d'autre part $qy \in pG$. En utilisant l'identité de Bézout, nous déduisons que $x \in qG$ et $y \in pG$; disons $x = qz$ et $y = pz'$.

Puisque $v(pqz) = v(pqz') \neq \infty$, nous avons $pqz \neq 0$ et $pqz' \neq 0$. D'après la remarque 5.9.4, $v(z) = v(z')$.

□

Lemme 5.9.6. *Pour tous $x, y \in G$ et p, q des nombres premiers différents, si $v(x) = v(y)$, $v(px) \neq \infty$ et $v(qy) \neq \infty$, alors $v(pqx) = v(pqy) \neq \infty$.*

Démonstration. Par la remarque 5.9.4 nous avons $v(pqx) = v(pqy)$. Il suffit donc de voir que $v(pqx) \neq \infty$.

D'après la proposition 2.2.3, soit $v(px) = v(x)$ soit $v(qx) = v(x)$. Supposons par exemple $v(px) = v(x)$. Si $v(pqx) = \infty$ alors $v(px) < v(pqx)$. Par (I) nous avons $v(x) < v(px)$, arrivant ainsi à une contradiction.
Le cas $v(qx) = v(x)$ est évidemment symétrique. □

Démonstration de la proposition5.9.3. La satisfaction de l'axiome (a1) et l'axiome (a2) est une conséquence immédiate des définitions des fonctions f_n, et la satisfaction de l'axiome (a3) est conséquence de la proposition 2.2.2. Le reste des axiomes est déduit de la remarque 5.9.4 et des lemmes 5.9.1,5.9.5 et 5.9.6 (en les exprimant en termes des fonctions f_n). □

Théorème 5.9.7. *La théorie $\mathcal{T}_{ord}$ est NIP.*

Démonstration. D'après la proposition 5.9.3, le théorème 5.8.3, et la remarque 2.1.2. □

Le résultat suivant est prouvé dans [30, Theorem 3.3] :

Fait 5.9.8. *Toute $\mathcal{L}_S$-formule $\phi(\bar{x}, \bar{\varepsilon})$, avec $\bar{x}$ des variables dans la sorte du groupe et $\bar{\varepsilon}$ des variables dans la sorte de l'ordre, est équivalente modulo $\mathcal{T}_S^{(p,q)}$ à une formule $\phi^v(v(t_1(\bar{x})), \ldots, v(t_N(\bar{x})), \bar{\varepsilon})$, où les $t_i(\bar{x})$ sont des termes dans $\bar{x}$, et ϕ^v est une $\mathcal{L}_v$-formule.*

Théorème 5.9.9 (Transfert de la NIP). *La théorie $\mathcal{T}_S^{(p,q)}$ est NIP.*

Note: Dans [30], Simonetta s'intéresse à l'étude de la C-minimalité, notion assez appropriée pour étudier les valuations introduites par Macpherson et Steinhorn dans [14]. Pour cela il se place dans le cadre des C-structures ; il considère ainsi, en plus de $\mathcal{L}_S$, la relation ternaire C. Bien que notre contexte est différent, étant donné que cette relation est définissable à partir de v, le théorème 5.9.9 reste aussi vrai dans le cadre de Simonetta.

Démonstration du théorème de transfert. Supposons qu'elle a la propriété d'indépendance. Puisque v est surjective, nous pouvons supposer que la formule qui en témoigne a toutes ses variables dans la sorte du groupe. Soit donc cette formule $\phi(\bar{x}, \bar{y})$. D'après le fait 5.9.8, $\phi(\bar{x}, \bar{y})$ est équivalente à une certaine formule du type

$$\phi^v(v(t_1(\bar{x}, \bar{y})), \ldots, v(t_N(\bar{x}, \bar{y}))),$$

où $\phi^v(\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_N)$ est une $\mathcal{L}_v$-formule.
Chaque terme $t_i(\bar{x}, \bar{y})$ peut être exprimé comme l'addition de deux termes, l'un dans $\bar{x}$ et l'autre dans $\bar{y}$, c'est-à-dire $t_i(\bar{x}, \bar{y}) = t_{i,x}(\bar{x}) + t_{i,y}(\bar{y})$. Si nous avons trouvé des suites témoignant de la propriété d'indépendance pour la formule

$$\phi^v(v(t_{1,x}(\bar{x}) + t_{1,y}(\bar{y})), \ldots, v(t_{N,x}(\bar{x}) + t_{N,y}(\bar{y}))),$$

alors nous pouvons trouver trivialement deux suites témoignant de la propriété d'indépendance pour la formule

$$\phi^v(v(x^1 + y^1), \ldots, v(x^N + y^N)),$$

où certains x^i et y^j peuvent être égaux à 0.

Nous supposons donc, pour arriver à une contradiction, qu'il y a une formule de la forme

$$\phi(v(x^1 + y^1), \ldots, v(x^n + y^n), v(x^{n+1}), \ldots, v(x^{n+m}), v(y^{n+1}), \ldots, v(y^{n+m'}))$$

avec la propriété d'indépendance, témoignée pour les suites $(\bar{a}_i)_{i\in\omega} = (a_i^1, \ldots, a_i^{n+m})_{i\in\omega}$ et $(\bar{b}_I)_{I\subseteq\omega} = (b_I^1, \ldots, b_I^{n+m'})$. Par le théorème de Ramsey et la compacité, on peut supposer que $(\bar{a}_i)_{i\in\omega}$ est indiscernable.

Soit S l'ensemble des s dans $\{1, \ldots, n\}$ pour lesquels il existe un certain c_s tel que $|\{v(a_i^s + c_s) : i \in \omega\}| = \omega$. Disons $S = \{s_1, \ldots, s_l\}$, et fixons $c_{s_1}, \ldots, c_{s_l}$ des éléments témoignant de cette propriété. On considère aussi $R := \{1, \ldots, n, \} \setminus S$.

Soit maintenant $(\bar{\alpha}_i)_{i\in\omega}$ la suite définie a partir de $(\bar{a}_i)_{i\in\omega}$ de la la façon suivante :
- si $k \in \{1, \ldots, n+m, \} \setminus S$, alors $\alpha_i^k := a_i^k$
- si $k \in S$, alors $\alpha_i^k := a_i^k + c_{s_k}$

On définit également $(\bar{\beta}_I)_{I\subseteq\omega}$ a partir de $(\bar{b}_I)_{I\subset\omega}$:
- si $k \in \{1, \ldots, n+m', \} \setminus S$, alors $\beta_I^k := b_I^k$
- si $k \in S$, alors $\beta_I^k := b_I^k - c_{s_k}$

D'après les définitions, nous avons que $(\bar{\alpha}_i)_{i\in\omega}$ et $(\bar{\beta}_I)_{I\subseteq\omega}$ témoignent aussi la propriété d'indépendance pour ϕ. En plus, pour tout $s \in S$ nous avons $|\{v(\alpha_i^s) : i \in \omega\}| = \omega$, et pour tout $r \in R$ et tout élément c nous avons $|\{v(a_i^r + c) : i \in \omega\}| < \omega$. Il se peut cependant que $(\bar{\alpha}_i)_{i\in\omega}$ ne soit plus indiscernable.

Par compacité, pour chaque $r \in R$, il existe un $n_r \in \mathbb{N}$ tel que $|\{v(a_i^r + c) : i \in \omega\}| \leq n_r$ pour tout élément c. On peut donc appliquer le théorème de Ramsey et la compacité, pour considérer qu'on a deux suites $(\bar{a}_i)_{i\in\omega}$ et $(\bar{b}_I)_{I\subseteq\omega}$ tels que :

(i) elles témoignent de la propriété d'indépendance pour ϕ
(ii) $(\bar{a}_i)_{i\in\omega}$ est indiscernable
(iii) étant donné $s \in S$, $v(a_i^s) \neq v(a_j^s)$ pour tous $i, j \in \omega$ différents
(iv) étant donné $r \in R$, $|\{v(a_i^r + c) : i \in \omega\}| \leq n_r$ pour tout élément c

Remarquons d'abord que d'après (ii) et (iii), pour $s \in S$ fixé, on a :
– soit $v(a_0^s) < \cdots < v(a_n^s) < \ldots$,
– soit $\cdots < v(a_n^s) < \cdots < v(a_0^s)$.

D'autre part, $r \in R$ et $I_0 \subseteq \omega$ fixés, on a que $|\{v(a_i^r + b_{I_0}^r) : i \in \omega\}| \leq n_r$.

Soit l'ensemble de nombres pairs $P \subset \mathbb{N}$, et considérons l'uplet $\bar{b}_P$. Pour chaque $s \in S$, il existe un indice N_s tel que :
– soit $v(b_P^s) < v(a_{N_s}^s) < v(a_{N_s+1}^s) < \cdots < v(a_{N_s+k}^s) < \ldots$,
– soit $\cdots < v(a_{N_s+k}^s) < \cdots < v(a_{N_s+1}^s) < v(a_{N_s}^s) < v(b_P^s)$.

D'autre part, pour chaque $r \in R$, puisque $|\{v(a_i^r + b_P^r) : i \in \omega\}| \leq n_r$, il y a un certain indice N_r tel que $v(a_i^r + b_P^r) = v(a_j^r + b_P^r)$ pour tous $i, j \geq N_r$.

Soit maintenant $N = \max\{N_s, N_r : s \in S \text{ et } r \in R\}$, et considérons la suite $(\bar{a}_i)_{i\geq N}$. Nous avons alors :

1. $(\bar{a}_i)_{i\geq N}$ est indiscernable
2. le nombre d'alternance de $\phi(\bar{x}, \bar{b}_P)$ sur $(\bar{a}_i)_{i\geq N}$ est ω
3. pour tout $s \in S$, une des deux options suivantes est vraie :
   a) $v(b_P^s) > v(a_i^s)$ pour tout $i \geq N$, et donc $v(a_i^s + b_P^s) = v(a_i^s)$ pour tout $i \geq N$.
   b) $v(b_P^s) < v(a_i^s)$ pour tout $i \geq N$, et donc $v(a_i^s + b_P^s) = v(b_P^s)$ pour tout $i \geq N$
4. pour tout $r \in R$, $v(a_i^r + b_P^r) = v(a_j^r + b_P^r)$ pour tout $i, j \geq N$; disons $v(a_i^r + b_P^r) = \gamma_r$ pour un certain $\gamma_r \in \Gamma$

Nous notons S_1 le sous-ensemble de S tels que (a) est vraie, et S_2 le sous-ensemble de S tels que (b) est vraie. Nous avons $S_1 \cup S_2 = S$. Rappelons que $\{1, \ldots, n\} = S \cup R$.

Après avoir éventuellement renommé les variables, nous pouvons considérer $S_1 = \{1, \ldots, n_1\}$, $S_2 = \{n_1 + 1, \ldots, n_1 + n_2\}$ et $R = \{n_1 + n_2 + 1, \ldots, n\}$.

Considérons maintenant d'une part la $\mathcal{L}$-formule

$$\phi(u_1, \ldots, u_{n_1}, v_{n_1+1}, \ldots, v_{n_1+n_2}, \gamma_{n_1+n_2+1}, \ldots, \gamma_n, u_{n+1}, \ldots, u_{n+m}, v_{n+1}, \ldots, v_{n+m'}),$$

et d'autre part la suite $(\bar{\alpha}_i)_{i\in\omega} = (\alpha_i^1, \ldots, \alpha_i^{n+m})_{i\in\omega}$ d'éléments de Γ, définie par $\alpha_i^k = v(a_{i+N}^k)$, et le $(n + m')$-uplet de Γ $\bar{\beta} = (v(b_P^1), \ldots, v(b_P^{n+m'}))$. Nous écrirons aussi $\bar{\gamma} = (\gamma_{n_1+n_2+1}, \ldots, \gamma_n)$.

D'après 1. on a que $(\bar{\alpha}_i)_{i\in\omega}$ est indiscernable. D'après 2., 3., 4. on a que le nombre d'alternance de $\phi(\bar{u}, \bar{\beta}, \bar{\gamma})$ sur $(\bar{\alpha}_i)_{i\in\omega}$ est ω.

Par le fait 2.1.7, cela montre que la $\mathcal{L}$-formule $\phi(\bar{u}, \bar{v}, \bar{\gamma})$ a la propriété d'indépendance ; ce qui contredit le théorème 5.9.7. □

Note: Il est possible qu'on puisse trouver une preuve un peu moins lourde du théorème de transfert en adaptant les arguments retrouvés dans [3, Proposition 7.1].

Bibliographie

[1] Hans Adler. Introduction to theories without the independence property. Soumis, `http://www.amsta.leeds.ac.uk/~adler/`, 2007.

[2] J. T. Baldwin et Jan Saxl. Logical stability in group theory. *J. Austral. Math. Soc. Ser. A*, 21(3) :267–276, 1976.

[3] Luc Bélair et Françoise Point. Quantifier elimination in valued Ore modules. Soumis, `http://www.logique.jussieu.fr/~point/`.

[4] Françoise Delon. Types sur $\mathbf{C}((X))$. In *Study Group on Stable Theories (Bruno Poizat), Second year : 1978/79 (French)*, pages Exp. No. 5, 29. Secrétariat Math., Paris, 1981.

[5] Y. Gurevich et P. H. Schmitt. The theory of ordered abelian groups does not have the independence property. *Trans. Amer. Math. Soc.*, 284(1) :171–182, 1984.

[6] D. Haskell, E. Hrushovski, et D. Macpherson. Definable sets in algebraically closed valued fields : elimination of imaginaries. *Journal fur die reine und angewandte Mathematik (Crelles Journal)*, 2006(597) :175–236, 2006.

[7] Deirdre Haskell, Ehud Hrushovski, et Dugald Macpherson. *Stable domination and independence in algebraically closed valued fields*, volume 30 of *Lecture Notes in Logic*. Association for Symbolic Logic, Chicago, IL, 2008.

[8] Wilfrid Hodges. *Model theory*, volume 42 of *Encyclopedia of Mathematics and its Applications*. Cambridge University Press, Cambridge, 1993.

[9] Ehud Hrushovski. Valued fields, metastable groups. En préparation.

[10] Ehud Hrushovski. The Mordell-Lang conjecture for function fields. *J. Amer. Math. Soc.*, 9(3) :667–690, 1996.

[11] Ehud Hrushovski, Ya'acov Peterzil, et Anand Pillay. Groups, measures, and the NIP. *J. Amer. Math. Soc.*, 21(2) :563–596, 2008.

[12] Ehud Hrushovski et Anand Pillay. On NIP and invariant measures. Prépublication, `http://arxiv.org/abs/0710.2330`.

[13] Franz-Viktor Kuhlmann. Valuation theory. Livre en préparation, `http://math.usask.ca/~fvk/Fvkbook.htm`.

[14] Dugald Macpherson et Charles Steinhorn. On variants of o-minimality. *Ann. Pure Appl. Logic*, 79(2) :165–209, 1996.

[15] Michel Parigot. Théories d'arbres. *J. Symbolic Logic*, 47(4) :841–853, 1982.

[16] Bruno Poizat. Théories instables. *J. Symbolic Logic*, 46(3) :513–522, 1981.

[17] Bruno Poizat. Postscriptum à « Théories instables ». *J. Symbolic Logic*, 48(1) :60–62, 1983.

[18] Bruno Poizat. *Cours de théorie des modèles*. Nur Al-Mantiq Wal-Ma'rifah, Lyon, 1985.

[19] Fred Richman. A guide to valuated groups. In *Abelian group theory (Proc. Second New Mexico State Univ. Conf., Las Cruces, N.M., 1976)*, pages 73–86. Lecture Notes in Math., Vol. 616. Springer, Berlin, 1977.

[20] Fred Richman et Elbert A. Walker. Valuated groups. *J. Algebra*, 56 :145–167, 1979.

[21] Thomas Rohwer. *Valued difference fields as modules over twisted polynomial rings*. PhD thesis, Urbana, `http://math.usask.ca/fvk/theses.htm`.

[22] Matatyahu Rubin. Theories of linear order. *Israel J. Math.*, 17 :392–443, 1974.

[23] Peter H. Schmitt. Model theory of ordered abelian groups. Habilitationsschrift, 1982.

[24] Peter H. Schmitt. Undecidable theories of valuated abelian groups. *Mém. Soc. Math. France (N.S.)*, (16) :67–76, 1984. Logic (Paris, 1983).

[25] Peter H. Schmitt. Decidable theories of valuated abelian groups. In *Logic colloquium '84 (Manchester, 1984)*, volume 120 of *Stud. Logic Found. Math.*, pages 245–276. North-Holland, Amsterdam, 1986.

[26] S. Shelah. *Classification theory and the number of nonisomorphic models*, volume 92 of *Studies in Logic and the Foundations of Mathematics*. North-Holland Publishing Co., Amsterdam, second edition, 1990.

[27] Saharon Shelah. Dependent first order theories, continued [Sh783]. arXiv :math/0406440v1.

[28] Saharon Shelah. Stability, the fcp, and superstability ; model theoretic properties of formulas in first order theory [Sh10]. *Annals of Mathematical Logic*, 3 :271–362, 1971.

[29] Saharon Shelah. Classification theory for elementary classes with the dependence property—a modest beginning [Sh715]. *Sci. Math. Jpn.*, 59(2) :265–316, 2004. Special issue on set theory and algebraic model theory.

[30] Patrick Simonetta. Abelian C-minimal groups. *Ann. Pure Appl. Logic*, 110(1-3) :1–22, 2001.

[31] Lou van den Dries. *Tame topology and o-minimal structures*, volume 248 of *London Mathematical Society Lecture Note Series*. Cambridge University Press, Cambridge, 1998.

[32] Viktor Verbovskiy. On dependence of o-stable theories. *Vestnik Inzhenernoy Akademii Respubliki Kazakhstan*, 2008. (En russe).

[33] Viktor Verbovskiy. Ordered o-stable groups. Soumis, 2009.

[34] Frank O. Wagner. *Simple theories*, volume 503 of *Mathematics and its Applications*. Kluwer Academic Publishers, Dordrecht, 2000.