Analyse du trafic routier par la théorie du chaos

Robert VOJAK
Mehdi DANECH-PAJOUH
INRETS-DART
2 avenue du Général Malleret-Joinville
94114 Arcueil cedex

En théorie du trafic, il est commun de décrire les données expérimentales à l'aide des trois paramètres usuels que sont le débit, la concentration et la vitesse. Depuis plusieurs années, les efforts se sont concentrés, entre autres, sur la modélisation macroscopique (déterministe et probabiliste) des courbes de débit ou de concentration. Dans le cas de certains modèles déterministes, il existe une analogie évidente avec les modèles rencontrés en mécanique des fluides, où le débit devient le flux, et la concentration la densité. Certains modèles [Payne, 1971], [Lighthill et Whitham, 1955] semblent assez bien décrire l'évolution temporelle du débit. Il apparaît cependant que, dans les cas de congestion, ces modèles s'avèrent peu efficaces [Ansorge, 1990], même lorsque les contraintes sont simplifiées (route à une seule voie, pas de feux rouges, ni de parking, etc.), et une analyse directe sur les données expérimentales semble plus appropriée.

Les données de cette expérimentation sont des courbes de débits obtenues par des mesures effectuées toutes les minutes du 11 au 17 mai 1994 sur un certain nombre de stations de comptage (boucle magnétique) du boulevard périphérique de Paris. La figure 1 représente la courbe des mesures du 11 mai 1994, avec en abscisse le temps (en heures), et en ordonnées le débit (ces données sont normalisées de manière à donner une estimation horaire du débit). À première vue, ces données présentent une structure très *irrégulière*, et les modèles linéaires usuels (type ARMA) ne sont pas très adaptés pour mettre en évidence les variations de grande amplitude [Tong, 1993].

Dans des travaux récents du domaine de la modélisation non-linéaire on a vu apparaître de nouveaux modèles, tels les modèles auto-régressifs non-linéaires, les modèles auto-régressifs exponentiels (EAR) et les modèles ARMA à coefficients périodiques, pour n'en citer que quelques uns. D'autres travaux, dans des domaines différents, ont donné naissance à deux sciences principalement, à tort souvent confondues : la théorie du chaos et la géométrie fractale, et plus précisément l'analyse multifractale (pour l'application de cette dernière aux données du trafc, on se rapportea à [*Vojak et al., 1994*].

Ces dernières années, la théorie du chaos a permis de mettre en évidence des comportements déterministes pour des phénomènes physiques, auparavant considérés comme des phénomènes aléatoires, un exemple maintenant célèbre étant celui du météorologue Lorenz

Nous nous somes donc prposés de considérer les courbes de débits sous un aspect nouveau, à travers la théorie du chaos. La première étape a consisté à extraire à partir de données expérimentales certains paramètres quantitatifs qui permetent de mieux comprendre l'apprente structure erratique des données et d'apporter également des informations sur la précditibilité de ces dernières. Tels est l'objet de cet article.

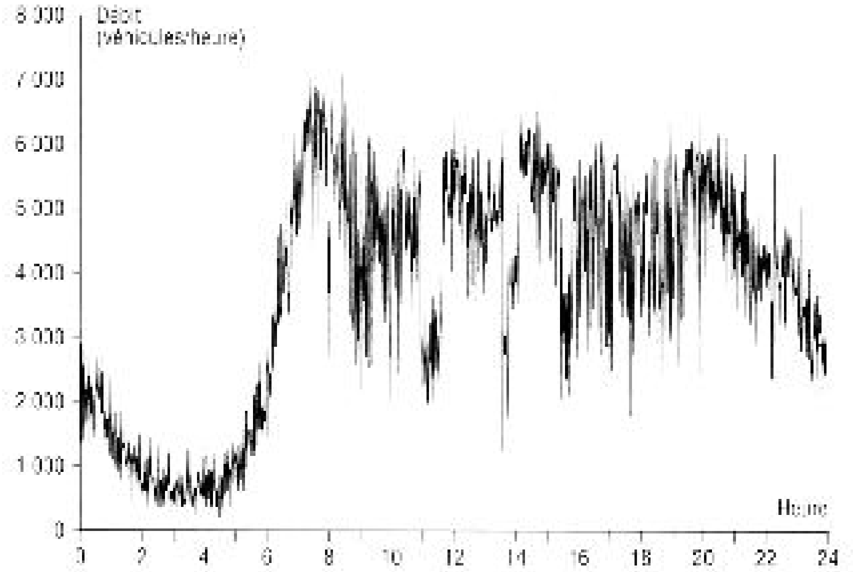

Figure 1 : Débits d’une station de comtages du boulevard périphérique de Paris durant la jounée du 11 mais 1994

Quelques notions de base de la théorie du chaos

Définitions

Avant d'entrer dans le détail de l'analyse du trafic routier proprement dite, il est utile d'énoncer et d'expliciter la terminologie dont il sera fait usage par la suite.

Considérons un système dynamique, c'est à dire pouvant évoluer dans le temps (par exemple, le trafic d'une section de route). Ce système dépend de différents paramètres (pas toujours tous parfaitement connus ou accessibles) : débits, vitesses, concentrations, conditions météorologiques, etc. Le nombre de paramètres est appelé le nombre de *degrés de liberté* du système. On peut généralement modéliser mathématiquement le système dynamique (lorsqu'on connaît tous les paramètres et leurs relations) par un ensemble d'équations différentielles ordinaires ou aux dérivées partielles reliant toutes les variables. L'évolution temporelle d'un système dynamique peut être représentée dans l'espace de ces paramètres ou *espace des phases* par une courbe continue, appelée *portrait de phases*.

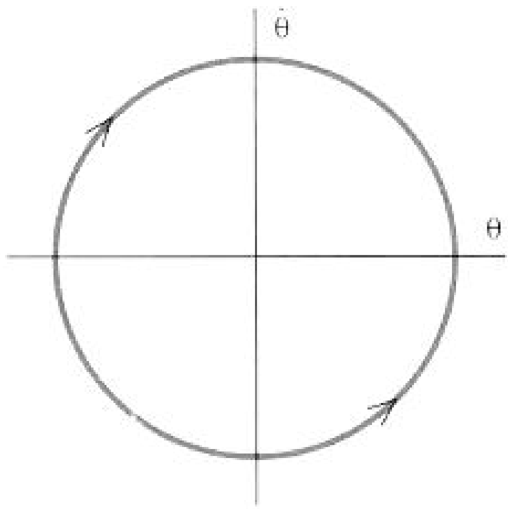

Figure 2 : Attracteur d'un régime périodique à une fréquence (pendule soumis à aucune force) θ est l'angle formé par le pendule et la verticale, $\dot{\theta}$ la variation instantanée de θ.

À partir d'une condition initiale donnée, si l'on laisse le système évoluer, la trajectoire dans l'espace des phases peut converger vers une position stable -point fixe, ou bien le système peut évoluer vers un régime périodique à une fréquence — représenté par un cycle limite dans l'espace des phases (la figure 2 présente le cas d'un pendule qui n'est soumis à aucune force.— , à plusieurs fréquences — représenté par un tore (voir figure 3). La trajectoire limite obtenue en partant d'une condition initiale donnée s'appelle *attracteur*. L'ensemble des conditions initiales aboutissant à un attracteur donné s'appelle *bassin d'attraction*. Une caractéristique d'un régime chaotique est la sensibilité aux conditions initiales : si l'on choisit des conditions initiales infiniment voisines, mais non confondues, les trajectoires qui en sont issues, bien que restant sur le même attracteur, divergent exponentiellement (voir figure 4). Le système a alors un comportement chaotique et l'attracteur obtenu posède une structure dite fractale : on parle alors d'*attracteur étrange* (voir figure 5).

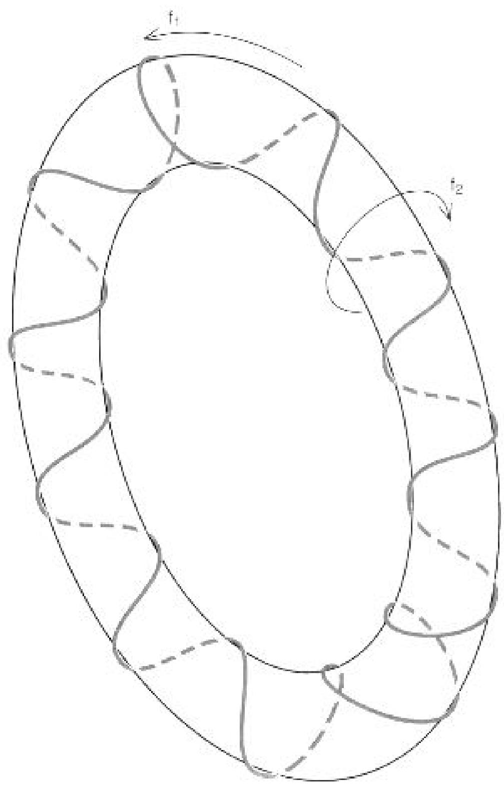

Figure 3 : Attracteur d'un régime périodique à deux fréquences (pendule soumis à une force extérieure)

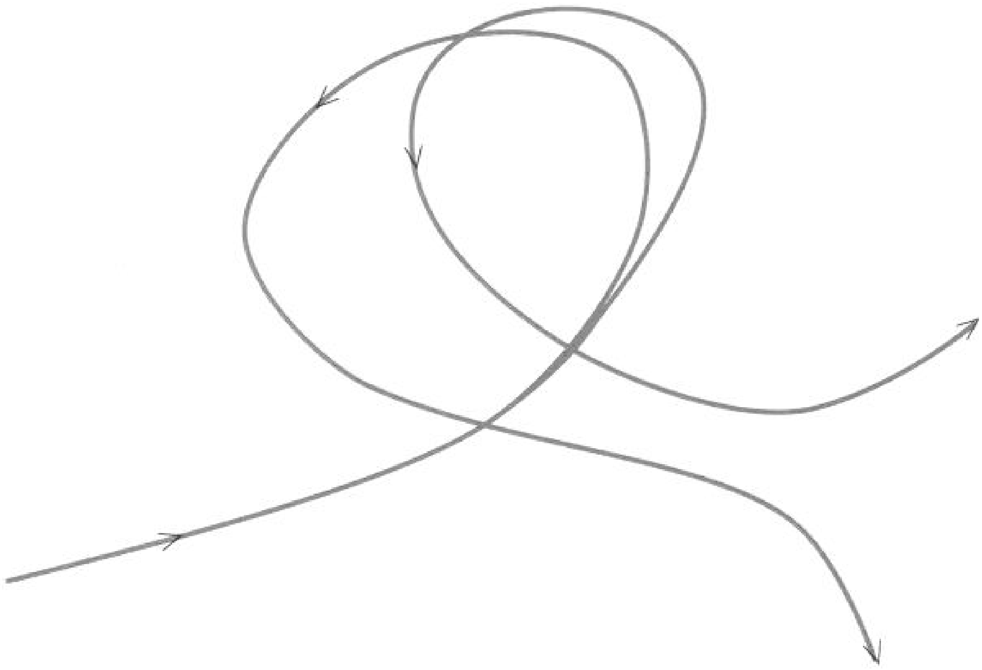

Figure 4 : sensibilité aux conditions initiales

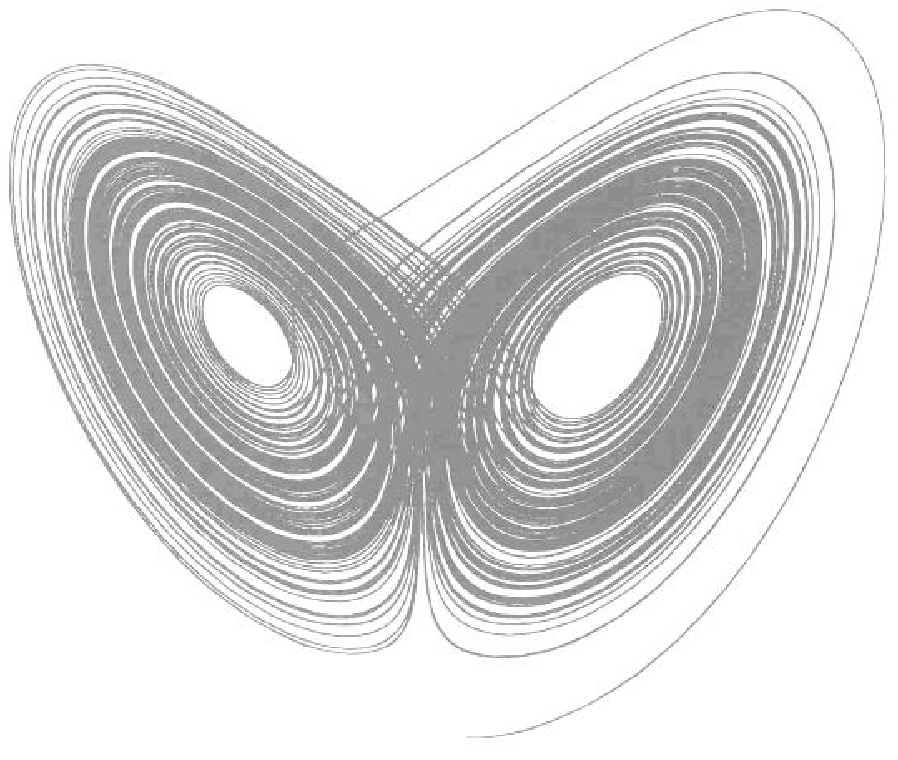

Figure 5 : Attracteur de Lorenz correspndant à un système dynamique à trois variables

Mesures quantitatives du chaos

Considérons un système dynamique réel. On ne connaît pas toutes les variables permettant de caractériser le système. On mesure une variable en fonction du temps. Les séries temporelles obtenues semblent imprédictibles. La question est la suivante : le système dynamique peut-il être considéré comme un système chaotique déterministe mettant en jeu un petit nombre de variables ? Ou bien, au contraire, le nombre de variables intervenants est-il si grand que le comportement ne puisse être modélisé que par des méthodes statistiques ?

Considérons l'exemple d'un signal chaotique dont on mesure les valeurs tous les instants t_0, t_1 à intevalle de temps constant T (par exemple $t_k = kT$). Notons $d(t_k)$ la valeur du signal à l'instant t_k.

A présent, considéons le point $d(t_k)$ et son successeur $d(t_k + T)$. A tout instant t_k, l'écart entre $d(t_k)$ et $d(t_k + T)$ est faible.

Cependant, si l'on considère cette fois *m* valeurs sucesives $d(t_{k)}, d(t_k + T), ...d(t_k + (m-1).T)$. On remarque une évolution de l'écart entre les valeurs sucessives, et ceci à cause de la propriété de sensibilité aux conditions initiales. Si l'on frme les vecteurs de dimension *m* :

$$V\left(t_k\right) = \left(d\left(t_k\right), d\left(t_k + \tau\right), \ldots, d\left(t_k + \left(m-1\right) \cdot \tau\right)\right)$$

et qu'on les représente dans un espace de dimension *m*, on se rend compte que ceux-ci remplisent un ensemble qui reste paratiquement le même dune dimension à une autre (atracteur).

Dans cet exemple, le décalage est T. Une méthodeplus générale consiste à considérer des décalages qui sont des multiples de T.

Cette technique de décalage est appelée *méthode de retard*, et m est appelé *dimension de plongement.* Elle permet de reconstuire à partir des données expérimentales un attracteur, dont on sait [Takens, 1981] qu'il contient toutes les caractéristiques du système dynamique sous-jaccent considéré.

Si l'on calcule la *dimension de corrélation* de l'attracteur (voir encadré) en le reconstruisant dans l'espace de dimension de plongement *m*, alors V_m va augmenter avec *m* jusqu' à ce que m dépasse 2n, où n est la dimension réelle de l'attracteur [Takens, 1981], qui correpond au nobre de degré de liberté du système. Dans la recherche d'un chaos déterministe, cette dimension doit être faible (par exemple inférieur à 10 en pratique). Dans le cas contaire on risque fort d'être en présence d'un phénomène aléatoire.

Un autre paramètre pour caractériser le chaos est la dimension d'information (voir encadré) qui donne une information globale sur le degré de chaos du système. Sa signification est essentiellement liée au taux moyen de divergence des trajectoires.

Détermination de la dimension de corrélation

Par définition d'un système chaotique, et de la sensibilité aux conditions initiales du système, *les positions de deux points d'une même trajectoire éloignés dans le temps sont sans corrélations entre elles [...]. En revanche, tous les points étant situés sur l'attracteur, il existe entre eux une certaine corrélation spatiale que l'on peut chercher à caractériser à l'aide d'une fonction appropriée* [Bergé et al., 1992]. Ici aussi nous utilisons la méthode des retards. A chaque point V de l'attracteur, on associe une sphère de centre *V* et de rayon noté *r*, et l'on compte la prportion de points de l'atracteur qui sont contenus dans cete sphère.

Cette prportion dépend donc de r, mais aussi bien sûr de l'espace dans lequel l'atracteur est plongé. On note cette quantité $c(r,m)$. Lorque r est raisonablement petit, $c(r,m)$ sit une loi de puissance, c'est à dire que $c(r,m) \approx r^{v_m}$ ce qui s'écrit également :

$$v_m = \lim_{r \to O+} \frac{\log(C(r,m))}{\log r}$$

La quantité V_m est appelée *dimension de corrélation* ou *dimension de Grassberger-Procaccia* [1983] (ou encore dimension fractale chez certains auteurs).

En pratique, les valeurs de *r* sont limitées en regard de la dimension de l'attracteur. On ne peut donc qu'estimer V_m. Pour cela, on trace le graphe des points $(\log r, \log(c(r,m))$ pour quelques valeurs de *r*. Dans la région où *r* est relativement petit (pas trop cependant pour ne pas compter toujours les mêmes points), les points constituent une droite, et la dimension de corrélation V_m estimée correspond à la pente de cette droite (que l'on calcule par une simple régression linéaire).

Détermination de la dimension d'information

La quantité probabiliste appelée dimension d'information renseigne sur la façon dont les points sont distribués sue l'attracteur. Nous le noterons D_I.

Soit ε un réel positif, et $N(\varepsilon)$ le nombre minimal de cubes d'arête ε nécessaires pour recouvrir l'attracteur. On numérote ces cubes de 1 à $N(\varepsilon)$. Si l'on note p_i la probabilité de visiter le cube *i*, l'information obtenue à chaque mesure est en moyenne :

$$I(\varepsilon) = -\sum_{i=1}^{N(\varepsilon)} p_i \cdot \log p_i$$

et la dimension d'information D_I est définie par :

$$D_I = \lim_{\varepsilon \to 0} \frac{I(\varepsilon)}{|\log \varepsilon|}$$

Par ailleurs, en théorie de l'infrmation, cete quantité, appelée entropie, est une mesure du désordre dans un ensemble.

Applications

Rappelons que nous disposons de donées débit, mesurées toutes les minutes sur le périphérique de Paris. A titre d'application, nous considérons ces débit comme un signal dont nous reconstituns l'attracteur, ce qui nous permet de détermniner les paramètres intrdis précédement.

Calcul de la dimension de corrélation

Pour chaque dimension de plongement m, on calcule la dimension de corrélation V_m de l'espace reconstruit. Rappelons que la convergence de V_m rentre en ligne de compte pour la caractérisation d'un chaos déterministe.

À partir des données, nous avons reconstruit l'attracteur pour des dimension de plngement variant de deux à trente. Pour chaque dimension de prolongement m , nous avons tracé l'évolution du graphe $(\log r, \log(c(r,m))$ (voir figure 6, et l'évolution de les trajectoires pour des dimensions de plongement variant de deux à trente. Pour chaque dimension de plongement m, nous avons tracé l'évolution du graphe (log r,log C(r,m)) (voir figure 6) et l'évolution de V_m en fonction de m (voir figure 7). Il semblerait, daprès cette figure, que l'on atteigne une valeur limite de V_m assez faible (environs 3,5).

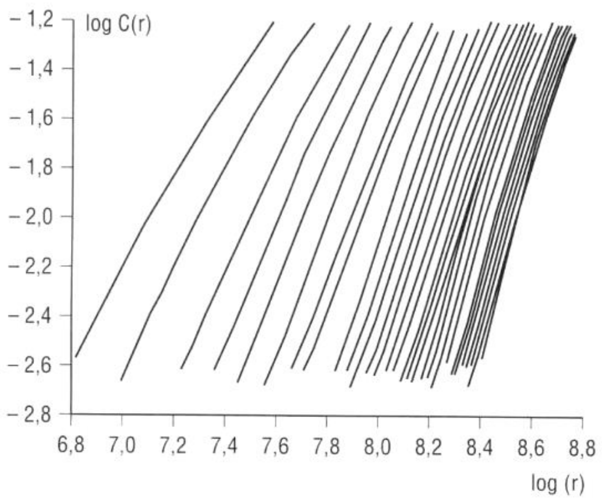

Figure 6 : Évolution du graphe (log r,log C(r,m)) en fonction de m

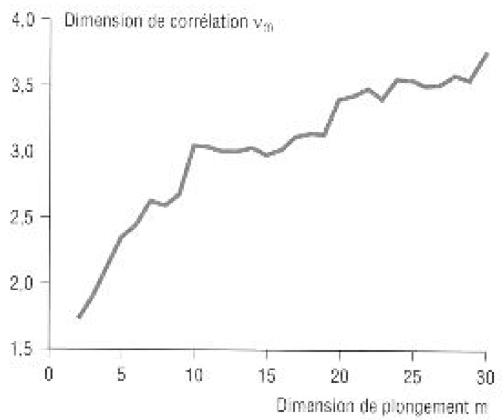

Figure 7 : Évolution de la dimension de corrélation en fonction des différentes dimensions de plongement

II.2 Calcul de la dimension d'information

Comme pour la dimension de corrélation, le paramètre calculé dépend de la dimension de plongement *m*. Pour chaque valeur de *m*, on approche la valeur de la dimension d'information D_I en recherchant dans le graphe composé des points $\left(|\log\varepsilon|, I(\varepsilon)\right)$ la partie de la courbe qui *ressemble* à une droite. La valeur de D_I est choisie comme étant la pente de cette droite calculée par une simple régression linéaire. La figure 8 montre l'évolution des *droites* en fonction de la dimension de plongement *m*, tandis que la figure 9 présente l'évolution de la dimension d'information en fonction de *m*.

Dans ce cas, il sembeblerait qu'il y ait également convergence, mais vers une valeur limite relativement élevée (environ 28).

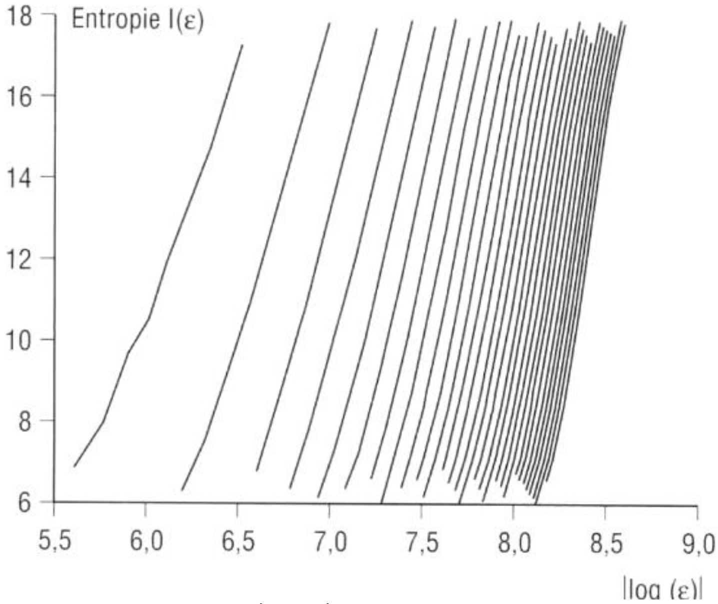

Figure 8 : Évolution du graphe $\left(|\log\varepsilon|, I(\varepsilon)\right)$ en fonction des différentes dimensions de plongement

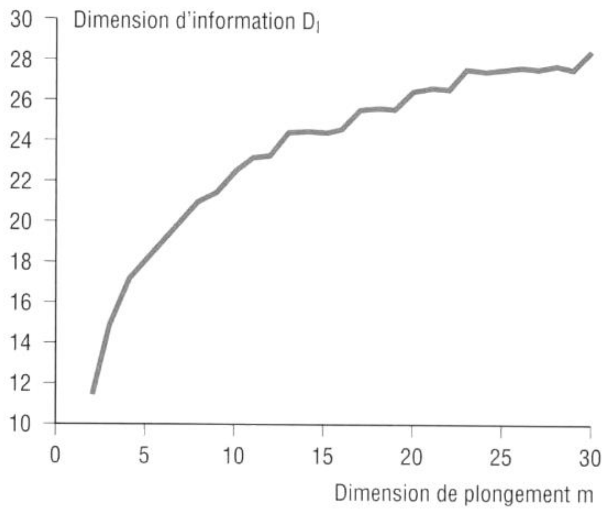

Figure 9 : Évolution de la dimension d'information en fonction des différentes dimensions de plongement

Conclusion

Dans cet article nous avons cherché à présenter le point de vue de la dynamique des systèmes pour le problème des séries de mesures. L'intérêt d'une approche *dynamique des systèmes* est surtout de fournir une nouvelle vision de certains phénomènes naturels, de donner de nouveaux outils d'interprétation et d'extraction des informations.

Si les résultats sont généralement sans ambiguïté dans le cas des systèmes numériques, il n'en vas pas de même dans le cas des systèmes expérimentaux. L'utilisation de l'approche dynamique des systèmes et l'intérprétation des résultats doit s'effectuer avec toute la prudence requise.

Dans le cas des séries issues des mesures de trafic routier, les résultats obtenuus indiquent une dimension de corrélation faible, mais une dimension d'information relativement élevéee, ce qui nous peremet pas d'affirmer que nous somes en présence d'un chaos déterministe. Il vas être nécceaire d'approfondir l'analyse de ces données par des techniques plus fines issue de cette théorie si l'on désire obtenir des éléments de réponse plus significatifs. C'est l'objer de recherche que nous menons à l'heure actuelle en collaboration avec l'INSA de Rouen.

Remerciements

Nous tenons à remercier deux éminents spécialistes de la théorie du chaos, Madame Monique Dubois et Monsieur Pierre Berge, tous deux chercheurs au CEA, ainsi que Mademoiselle Nathalie Letaief et Monsieur Claude Rozé, chercheurs à l'INSA de Rouen, pour les précieux conseils qu'ils ont bien voulu nous prodiguer pour la préparation de cet article.

Bibliographie

Bergé P., Pomeau Y., Vidal Ch. – L'Ordre dans le Chaos, Hermann éd., 1992.

Grassberger P, Procaccia I. – Measuring the Strangeness of Strange Attractors, Physica 9D, p. 189, 1983.

Harold J. Payne H. J. – Models of Freeway Traffic and Control, Simulation Coucil Proc., Mathematics of Public Systems, 1(1), p. 51-61, 1971.

Lighthill M.J., Whitham G. B. – On Kinematic Waves II, A Theory of Traffic Flow on Long Crowded Roads, Proc. Roy. Soc., A 229, p. 317-345, 1955.

Rainer Ansorge R. – What does the Entropy Condition mean in Traffic Flow Theory ? Transportation Research, Part B, 24B(2), p. 133-143, April 1990.

Takens F. – Detecting Strange Attractors in Turbulence, Lecture Notes in Mathematics, 898:366, Springer, 1981.

Tong Howell. – Non-linear Time Series, A Dynamical System Approach, Oxford University Press Inc., New-York, 1993.

Vojak R., Lévy Véhel J., Danech-Pajouh M. – . Multifractal Description of Road Traffic Structure, 7th Symposium on Transportation Research, 1994, to appear.

Résumé Quoique dans le langage courant, le terme de chaos décrive, en fait, une situation de désordre complet, la notion de *chaos déterministe*, considère l'ordre et le chaos comme deux manifestations distinctes d'un déterminisme sous-jacent. L'émergence de la théorie du chaos est le résultat de la découverte de comportements erratiques dans des système qui ne sont soumis à aucune force irrégulière ou aléatoire, mais qui sont au contraire régis par des lois strictement déterministes. Un tel système étant sensible aux conditions initiales, il perd rapidement sa *mémoire* et la prédiction de son comportement devient impossible. Grâce à cette théorie on peut étudier la prédictivité des système dynamiques et déterminer la limite temporelle de cette prédiction. Nous faisons l'hypothèse que les variables de trafic sont régies par un système dynamique et tentons d'approcher ce système du point de vue de la théorie du chaos déterministe. Pour l'application nous avons utilisé des données mesurées avec une fréquence élevée de l'ordre d'une minute, sur des capteurs situés sur le boulevard périphérique de Paris.

Abstract While in normal usage the term chaos is used to describe a situation of complete discorder, in the concept of *deterministic chaos* order and chaos are viewed as being two distinct expressions of an underlying determinism. Chaos theory was developed as the result of the discovery of erratic behaviours in systems which are governed by strictly deterministic laws and which were influenced by no irregular or random force. Systems of this type are sensitive to the initial conditions. Their *memory* is therefore rapidly lost and it becomes impossible to predict their behaviour. This theory makes it possible to predict the behaviour of dynamic systems and determine the temporal limits of this prediction. The authors make the hypothesis that traffic parameters are governed by a dynamic system which they attempt to describe by using deterministic chaos theory. For this application the authors have used data collected on a frequent basis (of the order of once per minute) by sensors on the orbital motorway around Paris.