PREUVES DES CONJECTURES DE GOLDBACH ET DES NOMBRES PREMIERS JUMEAUX.

MUSTAPHA BEKKHOUCHA

Résumé. Dans l'un et l'autre cas, la preuve vient par la mise en contradiction d'une hypothèse faite sur les coefficients $\nu(N)$ (resp. $\nu^\star(N)$) qui apparaissent dans une certaine fonction rationnelle de la forme $\frac{\nu(2)}{x^{N-2}}+\cdots+\frac{\nu(N-2)}{x^2}+\nu(N)+O_N$ où O_N est une certaine fonction polynômiale, pour la conjecture de Goldbach; et de la forme $\frac{\nu^\star(4)}{x^{N-4}}+\cdots+\frac{\nu^\star(N-4)}{x^4}+\nu^\star(N)+O^\star_N$ où $O^\star_N$ est une certaine fonction polynômiale, pour la conjecture des nombres premiers jumeaux. Dans la première, $\nu(N)$ représente le nombre de fois où le nombre pair N est somme de deux nombres premiers, et on fait la supposition qu'il existe un N_0 tel que $\nu(N)\neq 0$ pour $N\leq N_0$ et $\nu(N_0+2)=0$. Dans la deuxième, $\nu^\star(N)$ est le nombre 2 ou 0 selon que le multiple de 4, N, est somme de deux nombres premiers jumeaux ou non, et on fait la supposition qu'il existe un N_0 tel que $\nu^\star(N_0)\neq 0$ et $\nu^\star(N)=0$ $\forall N\geq N_0+4$. Or les deux démonstrations sont fondées sur les mêmes arguments à quelques nuances près, et nécessitent les mêmes calculs d'algèbre linéaire.

Abstract. In both cases the proof is obtained by a contradiction with a hypothesis on the coefficients $\nu(N)$ (resp. $\nu^\star(N)$) appearing in some rational function of the form $\frac{\nu(2)}{x^{N-2}}+\cdots+\frac{\nu(N-2)}{x^2}+\nu(N)+O_N$ where O_N is some polynomial function, for the Goldbach conjecture; and of the form $\frac{\nu^\star(4)}{x^{N-4}}+\cdots+\frac{\nu^\star(N-4)}{x^4}+\nu^\star(N)+O^\star_N$ where $O^\star_N$ is some polynomial function, for the twins prime numbers conjecture. In the first case, $\nu(N)$ represents the number of times where the even number N is sum of two prime numbers, and one makes the assumption that there exist N_0 such that $\nu(N)\neq 0$ for $N\leq N_0$ and $\nu(N_0+2)=0$. In the second case, $\nu^\star(N)$ is equal to 2 or 0 according to whether N, multiple of 4, is sum of two twins prime numbers or not, and one makes the assumption that there is N_0 such that $\nu^\star(N_0)\neq 0$ and $\nu^\star(N)=0$ $\forall N\geq N_0+4$. Now, the two proofs are built with the same arguments with few differences, and we use the same linear algebra calculations.

Date: 20 octobre 2010.

1991 *Mathematics Subject Classification.* 11N05, 11P32.

Key words and phrases. Nombres premiers, Nombres premiers jumeaux, Conjecture de Goldbach.

I.- Preuve de la conjecture de Goldbach

1. Introduction

On adopte au départ une formule faisant intervenir le nombre de fois $\nu(N)$ où l'entier N s'exprime comme somme de deux nombres premiers différents de 2, en convenant que, lorsque ces derniers sont distincts, on compte pour double leur occurence. Il s'agit de la formule donnant le développement du polynôme

$$\Pi_N^2 = \left(x + x^3 + \cdots + x^{p_N}\right)^2$$

où les exposants $1, 3, \ldots, p_N$ sont les nombres premiers successifs, $\neq 2$ et $< N$. Le recours à une expression telle que le polynôme Π_N pour faire apparaître les $\nu(N)$, s'inspire d'une formule utilisée aussi bien par Vinogradov que par Hardy et Littlewood (voir [1] p.309).

On a donc

$$\Pi_N^2 = \nu(2)x^2 + \nu(4)x^4 + \cdots$$

et par conséquent

$$\frac{\Pi_N^2}{x^N} = \frac{\nu(2)}{x^{N-2}} + \cdots + \frac{\nu(N-2)}{x^2} + \nu(N) + O_N$$

où O_N est constitué des termes restants de la fraction rationnelle $\frac{\Pi_N^2}{x^N}$, du moins quand N est $\leq 2p_N$. C'est bien le cas dès que N est assez grand (on a effectivement alors $p_N \geq N/2$, car il y a presque autant de nombres premiers entre $N/2$ et N, qu'entre 1 est $N/2$ d'après les équivalences $\pi(N) \approx N/\ln N$, $\pi(N/2) \approx \frac{N/2}{\ln(N/2)}$ pour N grand (Théorème des nombres premiers, [1] p.49)).

O_N est alors une fonction polynômiale, dont les termes sont de degrés pairs ≥ 2. Dans le cas où N est $> 2p_N$, on convient d'adopter la même formule, mais il est clair que le reste O_N est une fonction rationnelle, de manière à compenser les termes inverses de monômes qu'on a rajoutés, ainsi que $\nu(N)$.

Cela posé, on est amené à raisonner par l'absurde, et supposer qu'il existe des nombres pairs pour lesquels $\nu(N)$ s'annulle : soit N_0+2 le premier d'entre eux.

2. Relation entre O_{N_0} et O_{N_0+2}

D'après les résultats obtenus sur machine, N_0 doit être très grand, et par suite, O_{N_0} et O_{N_0+2} sont des polynômes.
D'autre part, N_0+1 n'est pas premier, puisqu'on aurait N_0+2 somme de deux nombres premiers : N_0+1 et 1. Il s'ensuit que Π_N ne change pas quand on passe de N_0 à N_0+2. D'où la relation simple entre O_{N_0} et O_{N_0+2} :

$$x^2.O_{N_0+2} = O_{N_0} \tag{2.1}$$

comme conséquence des relations :

$$\begin{aligned} \frac{\Pi^2_{N_0}}{x^{N_0}} &= \frac{\nu(2)}{x^{N_0-2}} + \cdots + \frac{\nu(N_0-2)}{x^2} + \nu(N_0) + O_{N_0} \\ \frac{\Pi^2_{N_0+2}}{x^{N_0+2}} &= \frac{\nu(2)}{x^{N_0}} + \cdots + \frac{\nu(N_0)}{x^2} + \nu(N_0+2) + O_{N_0+2} \end{aligned}$$

avec $\nu(N_0+2) = 0$ et $\Pi_{N_0+2} = \Pi_{N_0}$.

3. Système de relations linéaires entre $\nu(2), \ldots, \nu(N_0)$

On constitue un système de $n_0 := N_0/2$ relations en écrivant la relation

$$\nu(N) + \nu(N-2)\frac{1}{x^2} + \cdots + \nu(2)\frac{1}{x^{N-2}} = \frac{\Pi^2_N}{x^N} - O_N$$

pour $N = 4, 6, \ldots, N_0, N_0+2$. On diversifie en outre la variable x en $x_4, x_6, \ldots, x_{N_0}, x_{N_0+2}$. On obtient ainsi le système de n_0 relations linéaires :

$$\begin{cases} \nu(4)+\nu(2).\frac{1}{x_4^2} = \frac{\Pi_4^2}{x_4^4} - O_4 \\ \nu(6)+\nu(4).\frac{1}{x_6^2}+\nu(2).\frac{1}{x_6^4} = \frac{\Pi_6^2}{x_6^6} - O_6 \\ \vdots \\ \nu(N_0)+\cdots+\nu(4).\frac{1}{x_{N_0}^{N_0-4}}+\nu(2).\frac{1}{x_{N_0}^{N_0-2}} = \frac{\Pi_{N_0}^2}{x_{N_0}^{N_0}} - O_{N_0} \\ \nu(N_0).\frac{1}{x_{N_0+2}^2}+\cdots+\nu(4).\frac{1}{x_{N_0+2}^{N_0-2}}+\nu(2).\frac{1}{x_{N_0+2}^{N_0}} = \frac{\Pi_{N_0+2}^2}{x_{N_0+2}^{N_0+2}} - O_{N_0+2} \end{cases}$$

Il résulte de la relation (2.1) que la dernière équation du système se déduit de l'avant dernière en remplaçant x_{N_0} par x_{N_0+2} et en divisant les deux membres par $x_{N_0+2}^2$. On tire du système, classiquement, la relation suivante :

$$\Omega_{N_0+2} - \nu(2)\Delta_{N_0+2} = 0 \tag{3.1}$$

où Δ_{N_0+2} désigne le déterminant du système, et Ω_{N_0+2} désigne le déterminant obtenu en remplaçant la dernière colonne de Δ_{N_0+2} par la colonne des seconds membres.

4. Conséquences

Δ_{N_0+2} et Ω_{N_0+2} peuvent être exprimés de la manière suivante : en les développant suivant les éléments de la première colonne, et en tenant compte de la remarque précédente on a

$$\Delta_{N_0+2}(x_{N_0+2}, x_{N_0,\dots}) = \frac{[\Delta_{N_0}(x_{N_0+2}, x_{N_0-2}, \dots) - \Delta_{N_0}(x_{N_0}, x_{N_0-2}, \dots)]}{x^2_{N_0+2}}$$

et

$$\Omega_{N_0+2}(x_{N_0+2}, x_{N_0,\dots}) = \frac{[\Omega_{N_0}(x_{N_0+2}, x_{N_0-2}, \dots) - \Omega_{N_0}(x_{N_0}, x_{N_0-2}, \dots)]}{x^2_{N_0+2}}$$

(Ici, on a noté Δ_{N_0} le déterminant obtenu en supprimant la première colonne et la dernière ligne de Δ_{N_0+2}, Ω_{N_0} le déterminant obtenu de la même manière à partir de Ω_{N_0+2})
En remplaçant dans (3.1), on obtient la relation :

$$\Omega_{N_0}(x_{N_0+2}, x_{N_0-2}, \dots) - \nu(2)\Delta_{N_0}(x_{N_0+2}, x_{N_0-2}, \dots)$$
$$= \Omega_{N_0}(x_{N_0}, x_{N_0-2}, \dots) - \nu(2)\Delta_{N_0}(x_{N_0}, x_{N_0-2}, \dots)$$

qu'on peut interpréter de la manière suivante : en tant que fonction de x_{N_0}, pour chaque $(x_4, x_6, \dots, x_{N_0-2})$ fixé, l'expression

$$\Omega_{N_0}(x_{N_0}, x_{N_0-2}, \dots) - \nu(2)\Delta_{N_0}(x_{N_0}, x_{N_0-2}, \dots)$$

est constante, soit $\chi(x_4, x_6, \dots, x_{N_0-2})1_{N_0}$. On l'écrit sous la forme du déterminant :

$$\begin{vmatrix} \dots & 0 & 1 & \frac{\Pi_4^2}{x_4^4} - O_4 - \frac{\nu(2)}{x_4^2} \\ \dots & 1 & \frac{1}{x_6^2} & \frac{\Pi_6^2}{x_6^6} - O_6 - \frac{\nu(2)}{x_6^4} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \frac{1}{x_{N_0}^2} & \dots & \frac{1}{x_{N_0}^{N_0-4}} & \frac{\Pi_{N_0}^2}{x_{N_0}^{N_0}} - O_{N_0} - \frac{\nu(2)}{x_{N_0}^{N_0-2}} \end{vmatrix}$$

qu'on développe ensuite suivant les éléments de sa dernière ligne, d'où la relation

$$\delta_1.\frac{1}{x^2_{N_0}} + \delta_2.\frac{1}{x^4_{N_0}} + \dots + \delta_{n_0-1}.(\frac{\Pi^2_{N_0}}{x^{N_0}_{N_0}} - O_{N_0} - \frac{\nu(2)}{x^{N_0-2}_{N_0}}) = \chi(x_4, x_6, \dots, x_{N_0-2})1_{N_0}$$

où les δ_j sont des fonctions rationnelles en $x_4, x_6, \ldots, x_{N_0-2}$, indépendantes de x_{N_0}. La relation ainsi obtenue est une relation linéaire entre les éléments

$$\frac{1}{x_{N_0}^2}, \frac{1}{x_{N_0}^4}, \ldots, \frac{1}{x_{N_0}^{N_0-4}}, \frac{1}{x_{N_0}^{N_0-2}}, 1_{N_0}, \frac{\Pi_{N_0}^2}{x_{N_0}^{N_0}}, O_{N_0}$$

qui sont déjà liés par l'avant dernière équation du système. Or, celle-ci peut être regardée comme relation définissant l'élément $\frac{\Pi_{N_0}^2}{x_{N_0}^{N_0}}$ en fonction des autres éléments qui sont, eux, linéairement indépendants. A ce titre elle est donc unique. Comme la relation obtenue plus haut fait de même, on doit les identifier, c'est-à-dire écrire que les coefficients sont proportionnels, soit

$$\frac{\delta_1}{\nu(N_0-2)} = \frac{\delta_2}{\nu(N_0-4)} = \cdots = \frac{\delta_{n_0-2}}{\nu(4)} =$$

$$\frac{\delta_{n_0-1}}{-1} = \frac{-\delta_{n_0-1}}{1} = \frac{-\delta_{n_0-1}}{1} = \frac{-\chi}{\nu(N_0)}$$

Comme $\delta_{n_0-1} = \varepsilon = \pm 1$ (valeur d'un déterminant d'une matrice de type triangulaire dont les éléments sur la deuxième diagonale sont égaux à 1) alors les égalités précédentes se réduisent à

$$\frac{\delta_1}{\nu(N_0-2)} = \frac{\delta_2}{\nu(N_0-4)} = \cdots = \frac{\delta_{n_0-2}}{\nu(4)} = -\varepsilon \quad \text{et} \quad \chi = -\varepsilon\nu(N_0)$$

Pour avoir la contradiction cherchée, il suffit que l'une de ces égalités soit fausse. Montrons, par exemple, que δ_2 n'est pas une constante. Dans le développement de δ_2, il y a, en particulier, des termes qui sont produits de $(n_0-2)-2 = n_0-4$ facteurs de la forme $1/x_N^2$, $6 \leq N \leq N_0-2$, comme, par exemple, le produit des éléments diagonaux. Plus exactement, ces termes apparaissent sous deux formes différentes selon que l'un des facteurs a été pris égal à $1/x_N^2$, ou $\nu(N)$, dans l'expression d'un élément de la dernière colonne. Pour éviter leur neutralisation réciproque, on a seulement à supposer que les $\nu(N)$ ne sont pas tous égaux, ce qui est évidemment, le cas.

$$\delta_2 = \begin{vmatrix} \dots & \dots & 0 & 1 & \frac{\Pi_4^2}{x_4^4} - O_4 - \frac{\nu(2)}{x_4^2} \\ \dots & 0 & 1 & \frac{1}{x_6^2} & \frac{\Pi_6^2}{x_6^6} - O_6 - \frac{\nu(2)}{x_6^4} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 1 & \dots & & \\ 0 & \frac{1}{x_{N_0-4}^2} & \dots & \dots & \frac{\Pi_{N_0-4}^2}{x_{N_0-4}^{N_0-4}} - O_{N_0-4} - \frac{\nu(2)}{x_{N_0-4}^{N_0-6}} \\ 1 & \dots & \dots & \dots & \frac{\Pi_{N_0-2}^2}{x_{N_0-2}^{N_0-2}} - O_{N_0-2} - \frac{\nu(2)}{x_{N_0-2}^{N_0-4}} \end{vmatrix}$$

On peut remarquer que les éléments de la dernière colonne ne sont autres que

$$\begin{pmatrix} \nu(4) \\ \frac{\nu(4)}{x_6^2} + \nu(6) \\ \vdots \\ \frac{\nu(4)}{x_{N_0-4}^{N_0-8}} + \dots + \frac{\nu(N_0-6)}{x_{N_0-4}^2} + \nu(N_0-4) \\ \frac{\nu(4)}{x_{N_0-2}^{N_0-6}} + \dots + \frac{\nu(N_0-4)}{x_{N_0-2}^2} + \nu(N_0-2) \end{pmatrix}$$

II.- Preuve de la conjecture des nombres premiers jumaux

Au lieu du polynôme Π_N^2 introduit à propos de la conjecture de Goldbach, on a affaire ici au polynôme $(\Pi_N^2)^\star$ constitué des seuls termes de Π_N^2 qui sont produits de termes de Π_N dont les degrés diffèrent de 2. $(\Pi_N^2)^\star/x^N$ a cependant la même forme que $(\Pi_N^2)/x^N$. On a en effet, N étant un multiple de 4 (il est facile de vérifier que les nombres pairs, non multiples de 4, ne peuvent être sommes de nombres premiers jumeaux)

$$\frac{(\Pi_N^2)^\star}{x^N} = \frac{\nu^\star(4)}{x^{N-4}} + \cdots + \frac{\nu^\star(N-4)}{x^4} + \nu^\star(N) + O_N^\star.$$

$O_N^\star$ -du moins pour N suffisamment grand de façon à avoir $N \leq 2p_N$- est un polynôme et ses termes sont tous de degré, multiple de 4, ≥ 4.

Dans le cas où N est $> 2p_N$, on convient de garder la même forme du développement de $\frac{(\Pi_N^2)^\star}{x^N}$, moyennant l'introduction d'un certain nombre d'inverses de monômes et de $\nu^\star(N)$, et leur compensation au sein de $O_N^\star$, qui devient, de ce fait, une fonction rationnelle.

Cela posé, on est amené à raisonner par l'absurde, en supposant que $\nu^\star(N_0) \neq 0$ et $\nu^\star(N) = 0 \quad \forall N \geq N_0+4$. N_0 est suffisamment grand, pour que l'on ait $O_N^\star$ fonction polynômiale d'une part, et pour que, d'autre part, $(\Pi_N^2)^\star$ reste inchangé quand N passe de N_0 à $N_0 + 4$: pour qu'il y ait changement en effet, il faut et il suffit que l'un au moins de $N_0 + 1$, $N_0 + 3$ soit premier. Or ce ne peut être les deux à la fois, car on aurait $\nu^\star(2N_0 + 4) \neq 0$; comme $N_0 + 3$ ne peut convenir, la condition se ramène à $N_0 + 1$ nombre pemier, ainsi que $N_0 - 1$, mais cela aussi entraîne une contradiction avec l'hypothèse : on aurait $\nu^\star(2N_0) \neq 0$. Ainsi, dans les conditions indiquées, on a sûrement $(\Pi_{N_0}^2)^\star = (\Pi_{N_0+4}^2)^\star$. On part donc des mêmes prémisses pour la fonction rationnelle $(\Pi_N^2)^\star/x^N$, que pour $(\Pi_N^2)/x^N$ dans la conjecture de Goldbach. Il en résulte qu'on peut répéter à son propos les mêmes arguments et donc les mêmes calculs, pour aboutir aux mêmes contradictions soulevées par les expressions des $\delta_h^\star \quad 2 \leq h \leq n_0 - 2$.

References

[1] Ellison, W.J.,*Les nombres premiers*, Hermann (1975).

Département de Mathématiques, Faculté des Sciences, Université Aboubekr BELKAID, BP 119 Tlemcen 13000 - ALGERIE.

E-mail address, Mustapha Bekkhoucha: bekkhouchamustapha@yahoo.fr