

Catégorification des coefficients de la matrice de la représentation de Burau

Abderrahmane BOUCHAIR
Département de Mathématiques
Université de Jijel
18000 Jijel, Algérie
courriel : abdebouchair@yahoo.com

Résumé

Nous catégorifions explicitement les coefficients de la matrice de la représentation de Burau en utilisant des méthodes géométriques élémentaires. Nous montrons que cette catégorification est fidèle dans le sens où elle détecte la tresse triviale.

Mots clés : Catégorification, groupe de tresses, homologie de Floer, représentation de Burau.

Abstract

We categorify the coefficients of the Burau representation matrix using elementary geometrical methods. We show the faithfulness of this categorification in the sense that it detects the trivial braid.

1 Introduction

Le groupe de tresse B_n introduit par Emile Artin en 1925 est engendré par $n - 1$ générateurs $\sigma_1, \dots, \sigma_{n-1}$. Les relations entre les générateurs sont :

1. $\sigma_i \sigma_j = \sigma_j \sigma_i$ si $|j - i| \geq 2$
2. $\sigma_i \sigma_{i+1} \sigma_i = \sigma_{i+1} \sigma_i \sigma_{i+1}$ pour $i = 1, \dots, n - 2$.

L'une des représentations classiques des groupes de tresses est la représentation de Burau, définie par Burau en 1936 [Bur36], qui envoie le groupe B_n dans le groupe des matrices inversibles de taille $n \times n$ à coefficients dans l'anneau des polynômes de Laurent $\mathbb{Z}[t, t^{-1}]$ (voir [Bir74] pour plus de détails). La représentation de Burau est réductible, elle se décompose en une représentation de dimension 1 et une représentation irréductible de

dimension $n - 1$ appelée la représentation de Burau réduite qu'on note par $\tilde{\rho} : B_n \rightarrow GL_{n-1}(\mathbb{Z}[t, t^{-1}])$, définie comme suit :

$$\sigma_i \mapsto I_{i-2} \oplus \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ t & -t & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \oplus I_{n-i-2}$$

Où $-t$ dans le milieu de la matrice de taille 3×3 est toujours en position (i, i) .

Catégorifier un invariant qui est un polynôme de Laurent à coefficients entiers consiste à construire une homologie dont la caractéristique d'Euler graduée est égale à ce polynôme. L'homologie de Khovanov [Kho00] est une catégorification du polynôme de Jones. Il est naturel de se demander s'il existe une catégorification des coefficients de la matrice $\tilde{\rho}(\sigma)$, pour une tresse donnée σ dans B_n .

En 2001, M. Khovanov et P. Seidel [KS02] donnent une catégorification de la représentation de Burau. C'est une action de B_n sur la catégorie dérivée des modules gradués définis sur une famille de quotients d'algèbres de carquois. Ils expliquent le lien avec le point de vue de la géométrie symplectique. Ils montrent que cette catégorification est fidèle.

Dans ce papier, suivant les idées de M. Khovanov et P. Seidel, nous catégorifions, d'une manière géométrique naive, chaque coefficient de la matrice de la représentation de Burau et nous montrons le résultat de fidélité dans ce cadre. Dans la section 2, nous donnons une description homologique de la représentation de Burau. Ensuite, nous définissons le nombre d'intersection géométrique de deux courbes sur une surface. Soit $\sigma \in B_n$, soit α_j, β_i deux courbes dans le disque épointé D_n comme dans la Figure 1 et h_σ un difféomorphisme représentant la tresse σ . Dans la section 3, nous définissons le complexe de Floer $(CF(\beta_i, h_\sigma(\alpha_j)), \partial)$ où $CF(\beta_i, h_\sigma(\alpha_j))$ est le groupe abélien libre engendré par les points d'intersection de β_i avec $h_\sigma(\alpha_j)$. Nous montrons que la caractéristique d'Euler graduée de son homologie est égale au coefficient b_{ij} de la matrice $\tilde{\rho}(\sigma)$ en position (i, j) . Dans la section 4, nous montrons que cette cohomologie ne dépend que de la classe d'isotopie de la tresse i.e si h_σ, h'_σ sont deux difféomorphismes (représentant deux tresses géométriques) isotopes que nous notons par $h_\sigma \simeq h'_\sigma$, alors les groupes de cohomologie associés $HF^*(\beta_i, h_\sigma(\alpha_j)), HF^*(\beta_i, h'_\sigma(\alpha_j))$ sont isomorphes. Dans la section 5, nous montrons que cette catégorification est fidèle dans le sens où elle détecte la tresse triviale.

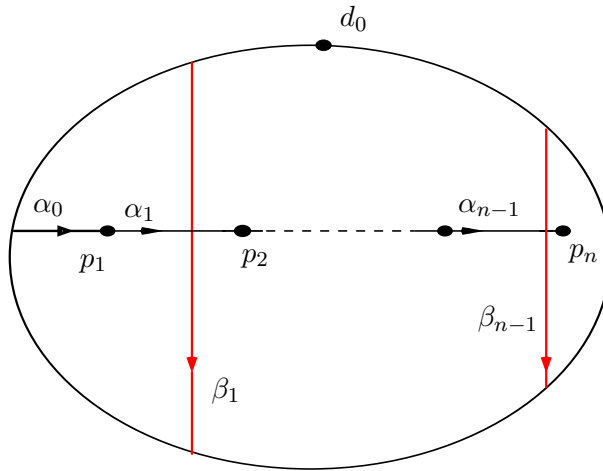


FIGURE 1 –

2 Préliminaires

2.1 Représentation homologique de B_n

Soient $D = D^2$ le disque unité du plan complexe \mathbb{C} , P_n un ensemble fini de n points p_1, \dots, p_n dans l'intérieur de D appelés perforations. Définissons $\text{Diff}^+(D, P_n)$ comme étant le groupe des difféomorphismes $h : D \rightarrow D$ qui préservent l'orientation, laissent le bord fixe point par point et tels que $h(P_n) = P_n$. Le groupe de difféotopies "mapping class group" que nous notons par $\text{MCG}(D, P_n)$ est $\pi_0(\text{Diff}^+(D, P_n))$, i.e le groupe quotient de $\text{Diff}^+(D, P_n)$ par le sous groupe des difféomorphismes de $\text{Diff}^+(D, P_n)$ isotopes à l'identité relativement à $\partial D \cup P_n$. Le groupe B_n est isomorphe au groupe $\text{MCG}(D, P_n)$.

En utilisant la définition de B_n comme groupe de difféotopies, la représentation de Burau peut s'obtenir en faisant agir B_n sur l'homologie du revêtement infini cyclique du disque épointé. Ce point de vue s'appelle la définition homologique de la représentation de Burau (voir [KT08] pour plus de détails).

Notons $D_n = D \setminus P_n$. Soit d_0 un point base sur le bord de D . Le groupe $\pi_1(D_n, d_0)$ est libre, engendré par n générateurs x_1, \dots, x_n , où x_i représente un lacet dans D_n basé en d_0 qui tourne dans le sens direct autour du point p_i . Considérons l'épimorphisme de groupe $\varphi : \pi_1(D_n, d_0) \rightarrow \mathbb{Z}$ défini par

$$\gamma = x_{i_1}^{n_1} x_{i_2}^{n_2} \dots x_{i_r}^{n_r} \mapsto \varphi(\gamma) = \sum_{i=1}^r n_i.$$

L'entier $\varphi(\gamma)$ représente le nombre algébrique total de tour de γ autour des perforations p_1, p_2, \dots, p_n . Soit \tilde{D}_n le revêtement régulier associé au noyau de φ . Le groupe de transformations de revêtement de \tilde{D}_n est isomorphe à $\mathbb{Z} = \langle t \rangle$. Le groupe d'homologie $H_1(\tilde{D}_n)$ a une structure de $\mathbb{Z}[t, t^{-1}]$ -module libre de rang $n - 1$, où t agit par transformation de revêtement.

Un difféomorphisme $h \in \text{Diff}^+(D, P_n)$ (h représente un élément de B_n) se relève d'une manière unique à un automorphisme $\tilde{h} : \tilde{D}_n \rightarrow \tilde{D}_n$ qui fixe la fibre au dessus de d_0 point par point. L'automorphisme \tilde{h} induit un automorphisme de $\mathbb{Z}[t, t^{-1}]$ -module $\tilde{h}_* : H_1(\tilde{D}_n) \rightarrow H_1(\tilde{D}_n)$. L'application $h \mapsto \tilde{h}_*$ définit un homomorphisme de groupes équivalent à la représentation de Burau réduite $\tilde{\rho}$.

Soit $\sigma \in B_n$. Supposons que $\tilde{\rho}(\sigma) = (b_{ij})_{1 \leq i, j \leq n-1}$ est la matrice de la représentation de Burau associée à σ . A l'aide de la notion d'intersection algébrique de deux courbes, nous retrouvons les coefficients b_{ij} comme suit : Soit $h_\sigma \in \text{Diff}^+(D, P_n)$ un difféomorphisme (représentant σ). Pour tout $i = 1, \dots, n - 1$, soit α_i le segment de p_i vers p_{i+1} , et soit β_i une corde verticale à extrémités dans le bord ∂D , orienté de haut en bas et qui passe entre les perforations p_i et p_{i+1} , voir la Figure 1. Choisissons $\tilde{d}_0 \in \partial \tilde{D}_n$ un point au dessus de d_0 et choisissons deux relevés $\widetilde{h_\sigma(\alpha_j)}, \tilde{\beta}_i \subset \tilde{D}_n$ de $h_\sigma(\alpha_j)$ et β_i respectivement. Alors

$$b_{ij} = \sum_{k \in \mathbb{Z}} (t^k \tilde{\beta}_i \cdot \widetilde{h_\sigma(\alpha_j)}) t^k, \quad (1)$$

Où $(t^k \tilde{\beta}_i \cdot \widetilde{h_\sigma(\alpha_j)}) \in \mathbb{Z}$ est le nombre algébrique d'intersection standard des arcs orientés $t^k \tilde{\beta}_i$ et $\widetilde{h_\sigma(\alpha_j)}$ dans \tilde{D}_n .

Dans tout ce qui suit, $\sigma \in B_n$ est une tresse à n brins et $h_\sigma \in \text{Diff}^+(D, P_n)$ représentant σ . Les courbes α_j, β_i sont comme dans la Figure 1 pour certain $i, j \in [[1, \dots, n - 1]]$.

2.2 Intersection géométrique des courbes

Soit Σ une surface orientable compacte connexe éventuellement à bord. Soit P_n un ensemble fini de points dans l'intérieur de Σ . Nous utilisons ici la même notation que Khovanov-Seidel [KS02], une courbe de (Σ, P_n) est un sous ensemble c dans Σ qui est soit une courbe simple fermée de $\Sigma \setminus (\partial \Sigma \cup P_n)$ et essentielle, soit l'image d'un plongement $\gamma : [0, 1] \rightarrow \Sigma$ transverse au bord telle que $\gamma^{-1}(\partial \Sigma \cup P_n) = \{0, 1\}$. Deux courbes c_1, c_2 de (Σ, P_n) sont isotopes, ce qui se note $c_1 \simeq c_2$, s'il existe une isotopie dans $\text{Diff}^+(\Sigma, P_n)$ qui envoie c_1 sur c_2 . Notons que les extrémités sur $\partial \Sigma$ restent fixe le long de l'isotopie.

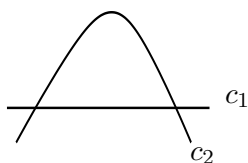


FIGURE 2 – Bigone élémentaire entre deux courbes

Soient c_1, c_2 deux courbes simples fermées et essentielles. Le nombre d'intersection géométrique de c_1 et c_2 , noté $i(c_1, c_2)$, est le nombre minimal de points d'intersection d'un représentant dans la classe d'isotopie de c_1 avec un représentant de la classe d'isotopie de c_2 . Rappelons qu'un bigone (élémentaire¹) est un disque plongé dans Σ dont le bord est formé d'un arc de c_1 et d'un arc de c_2 et son intérieur ne coupe pas $c_1 \cup c_2$. Nous avons la proposition suivante :

Proposition 1 *Soient c_1 et c_2 deux courbes simples fermées de Σ , essentielles et se coupant transversalement. Alors $i(c_1, c_2) = |c_1 \cap c_2|$ si et seulement si c_1 et c_2 ne bordent aucun bigone élémentaire.*

Pour la preuve voir ([FLP79], proposition 3.10) ou ([PR00], proposition 3.2). La preuve de la Proposition 1 peut s'adapter au cas des courbes non fermées c_1, c_2 de (Σ, P_n) avec $\partial c_1 \cap \partial c_2 = \Phi$.

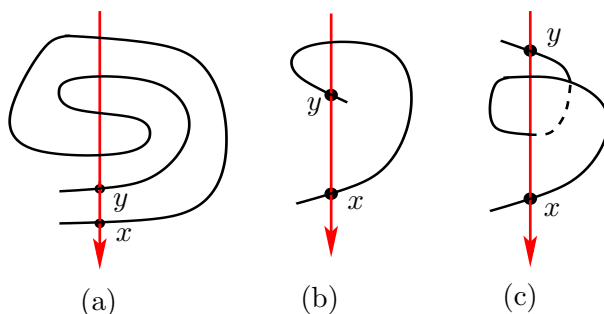


FIGURE 3 – (a) est un bigone de x à y , par contre (b) et (c) ne sont pas des bigones.

Dans [Abo08] M. Abouzaid définit l'homologie de Floer pour certaine classe de courbes immergées dans une surface et l'utilise pour définir la catégorie de Fukaya de cette surface. Nous donnons la définition suivante :

Définition 2 *Etant donnés deux points $x, y \in \beta_i \cap h_\sigma(\alpha_j)$. On appelle bigone de x vers y une immersion à reparamétrage orienté près $u : \mathbb{D} \rightarrow D_n$*

¹Ce mot est ajouté pour distinguer entre cette définition et la définition 2 qui est plus générale.

du demi disque $\mathbb{D} := \{z \in \mathbb{C} : \|z\| \leq 1, \operatorname{Re}(z) \geq 0\}$, qui envoie $-i$ sur x , i sur y et vérifie les conditions suivantes :

1. $u(\mathbb{D} \cap i\mathbb{R}) \subset \beta_i$,
2. $u(\mathbb{D} \cap S^1) \subset h_\sigma(\alpha_j)$.

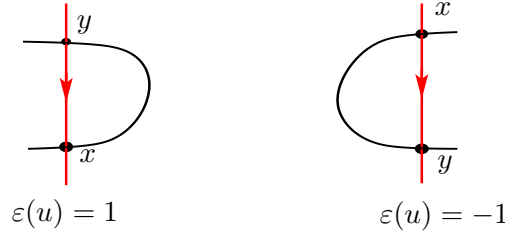


FIGURE 4 – Bigone u de x à y .

On note $\mathcal{M}(x, y)$ l'ensemble des bigones de x vers y . Dans notre cas on prend des immersions, voir la Figure 3. Si $u \in \mathcal{M}(x, y)$, on note α_{xy} et β_{xy} les sous arcs de $h_\sigma(\alpha_j)$ et β_i respectivement, qui bordent le bigone u . Dans tout le texte sauf mention du contraire, on suppose que β_i est une corde verticale. On associe à u un signe $\varepsilon(u)$ défini comme suit : $\varepsilon(u) = 1$ si l'orientation de β_i coïncide avec son orientation comme bord de u et $\varepsilon(u) = -1$ sinon, voir la Figure 4.

Soit x un point d'intersection, et soit V_x un voisinage de x dans D_n . Un model local de x est une application orientée de V_x dans un voisinage de l'origine dans \mathbb{R}^2 qui envoie $h_\sigma(\alpha_j)$ sur l'axe des abscisses et β_i sur l'axe des ordonnées. Cela nous permet de comparer les ordonnées des points d'intersection sur la courbe β_i . Rappelons que nous fixons l'orientation sur les courbes β_i .

Remarque 3 Si $u \in \mathcal{M}(x, y)$ est un bigone de signe positif, alors $\operatorname{Im}(x) < \operatorname{Im}(y)$ où $\operatorname{Im}(x)$ désigne la partie imaginaire de x vu comme un nombre complexe, voir la Figure 4. Si V_x, V_y sont deux voisinages de x et y respectivement, alors $V_x \cap u$ et $V_y \cap u$ sont des coins convexes qui se trouvent respectivement, dans le quatrième et le premier quadrant. Si le signe de u est négatif, alors $\operatorname{Im}(x) > \operatorname{Im}(y)$ et $V_x \cap u, V_y \cap u$ se trouvent respectivement, dans le deuxième et troisième quadrant.

Soit $u \in \mathcal{M}(x, y)$ vu comme une application. Nous appelons nombre de multiplicité par rapport à u d'un point $w \in D_n$ le nombre, noté $n_u(w)$, de points dans l'image réciproque de w par u .

$$n_u(w) = \#u^{-1}(w).$$

Le comportement du nombre de multiplicité près des arcs α_{xy} et β_{xy} est comme suit. Si nous traversons α_{xy} ou β_{xy} le nombre de multiplicité fait une variation de un. Près des points x et y , le nombre de multiplicité est égal à 1 à l'intérieur du bigone et 0 ailleurs, comme le prouve le lemme suivant.

Preuve.

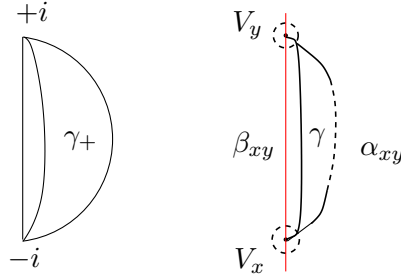


FIGURE 5 –

Lemme 4 *Soit u un bigone de x vers y . Alors $n_u(x) = n_u(y) = 1$.*

Soit γ un arc plongé dans D_n d'extrémités x et y telle que $\gamma \cup \beta_{xy}$ borde un petit disque, noté \mathcal{D}' , dans D_n , voir la Figure 5. Nous voyons \mathcal{D}' comme l'image de la surface bordé par $[-i, i] \cup \gamma_+$ dans le demi disque \mathbb{D} par un plongement u' , où γ_+ est un arc simple plongé dans \mathbb{D} envoyé sur γ par u' . Soit V_x et V_y deux voisinages de x et y respectivement, nous pouvons choisir ces voisinages suffisamment petits de telle sorte que les morceaux de courbes de γ et α_{xy} coïncident à l'intérieur de ces voisinages i.e

$$\gamma \cap V_x = \alpha_{xy} \cap V_x, \gamma \cap V_y = \alpha_{xy} \cap V_y. \tag{2}$$

Alors les arcs obtenus de γ et α_{xy} dans la surface D_n privée de $\gamma \cap V_x$ et $\gamma \cap V_y$ sont homotopes à extrémités fixes (ici l'homotopie vient du fait que $\mathbb{D} \cap S^1$ et γ_+ sont homotopes dans \mathbb{D}). Comme u' est un plongement, alors d'après (Théorème 3.1, [Ep66]), ces arcs sont isotopes à extrémités fixes. Donc nous pouvons réduire le nombre de multiplicité à l'extérieur des deux voisinages V_x et V_y sans le changer à l'intérieur. D'où

$$n_u(w) = n_{u'}(w) = 1, \forall w \in V_x \cap \mathcal{D}' \tag{3}$$

□

3 Complexe de cochaines

Etant donnée une tresse à n brins σ . Choisissons $h_\sigma \in \text{Diff}^+(D, P_n)$ un représentant de σ . Etant donnés α_j, β_i ($i, j \in [[1, \dots, n-1]]$) deux arcs

comme dans la Figure 1, nous associons à $(\beta_i, h_\sigma(\alpha_j))$ un complexe de cochaînes $(CF^{l,k}(\beta_i, h_\sigma(\alpha_j)), \partial^{l,k}), l, k \in \mathbb{Z}$. $CF^{l,k}(\beta_i, h_\sigma(\alpha_j))$ est le groupe abélien libre engendré par les points d'intersections de β_i avec $h_\sigma(\alpha_j)$, où k, l sont respectivement les degrés d'Alexander et de Maslov que nous allons les définir.

Nous munissons l'ensemble des générateurs d'un degré d'Alexander $A(x) = k$, où k est l'exposant paru dans la formule (1) section 2.

Rappelons qu'une *Fourchette* dans (D, P_n) est un arbre F plongé dans D formé de trois arêtes et quatre sommets d_0, p_i, p_j et z tels que $F \cap \partial D = \{d_0\}, F \cap P_n = \{p_i, p_j\}$, et les trois arêtes ont z comme sommet commun. L'arête $M(F)$ qui joint les deux sommets d_0 et z s'appelle le *manche* de F . L'union des deux autres arêtes est un arc plongé à extrémités $\{p_i, p_j\}$, appelé les *dents* de F . Cette notion de fourchette a été utilisé indépendamment par Dan Krammer en 2000, puis par Stephen Bigelow [Big01] pour montrer que le groupe de tresses B_n est linéaire.

Pour tout $j = 1, \dots, n-1$, notons par F_j la fourchette dans (D, P_n) qui a comme dents l'arc α_j et $\partial M(F_j) = \{d_0, z_j\}$ où z_j est un point de α_j . Nous identifions le point d_0 avec l'un des bords des courbes β_i .

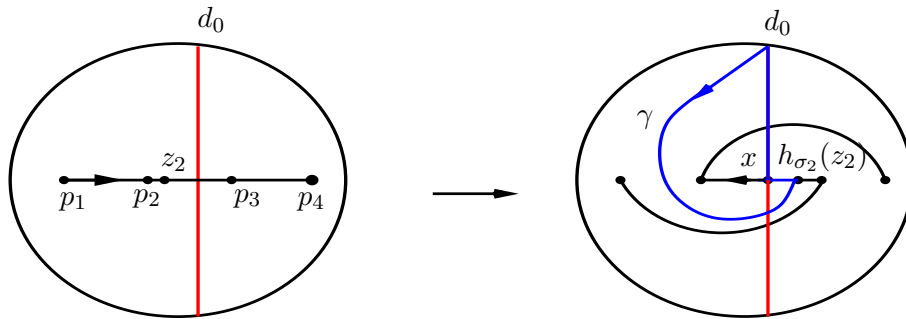


FIGURE 6 – Exemple de chemin γ

Etant donnée un générateur $x \in \beta_i \cap h_\sigma(\alpha_j)$. Définissons un chemin plongé dans D_n paramétré par $\gamma : [0, 1] \rightarrow D_n$ comme suit :

Notons par γ_1 l'arc qui va de d_0 à $h_\sigma(z_j)$ le long de $h_\sigma(M(F_j))$.

γ_2 l'arc qui va de $h_\sigma(z_j)$ vers x le long de $h_\sigma(\alpha_j)$.

γ_3 l'arc qui va de x à d_0 le long de β_i .

Posons $\gamma = \gamma_1 \gamma_2 \gamma_3$, voir la Figure 6. Le chemin γ est C^1 régulier par morceaux. Nous déformons légèrement les courbes β_i et $h_\sigma(\alpha_j)$ au voisinage des points $x, h_\sigma(z_j)$ de sorte que les angles au points d'intersection seront droits ($\pm \frac{\pi}{2}$). Nous munissons l'ensemble des générateurs d'un degré de Maslov μ

défini par

$$\mu(x) = \frac{1}{\pi} \int_0^1 d(\arg(\gamma'(t)))$$

Où $\arg(\gamma'(t))$ désigne l'argument du vecteur tangent $\gamma'(t)$. Autrement dit, $\mu(x)$ est le nombre de demi-tours faits par le vecteur tangent $\gamma'(t)$.

La différentielle $\partial : CF(\beta_i, h_\sigma(\alpha_j)) \rightarrow CF(\beta_i, h_\sigma(\alpha_j))$ est définie sur un générateur x par

$$\partial x = \sum_{\substack{y \in \beta_i \cap h_\sigma(\alpha_j) \\ u \in \mathcal{M}(x,y)}} \varepsilon(u) \cdot y. \quad (4)$$

où $\varepsilon(u)$ est le signe du bigone u défini dans la section 2.

Proposition 5 *La différentielle ∂ augmente le degré de Maslov par un et respecte le degré d'Alexander.*

Preuve. Soient x, y deux générateurs de $CF^{l,k}(\beta_i, h_\sigma(\alpha_j))$. Si u est un bigone élémentaire de x vers y , alors le vecteur tangent fait un demi-tour le long de α_{xy} . Donc nous avons $\mu(x, y) = \mu(y) - \mu(x) = 1$. Si u n'est pas élémentaire. Alors nous pouvons nous ramener au premier cas par une isotopie qui élimine des bigones élémentaires. Mais le nombre de demi-tours est invariant par isotopie, car un entier qui se déforme d'une manière continue est forcément constant. Donc $\mu(x, y) = 1$.

Montrons que ∂ respecte le degré d'Alexander k . Supposons que $A(x) = k$ et $A(y) = k'$, alors $k - k'$ est le nombre de tours que l'on fait autour des perforations en parcourant la courbe qui va de x à y le long de $h_\sigma(\alpha_j)$ et de y à x le long de β_i . Mais cette courbe borde un bigone. Donc $k - k' = 0$. D'où $k = k'$. \square

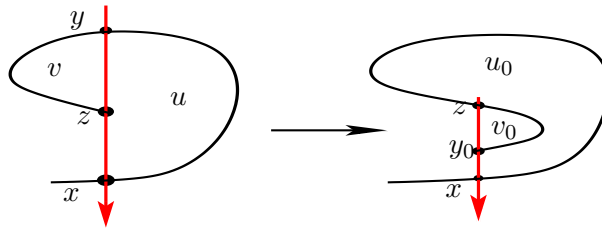


FIGURE 7 –

Proposition 6 *L'homomorphisme ∂ est une différentielle. i.e $\partial \circ \partial = 0$.*

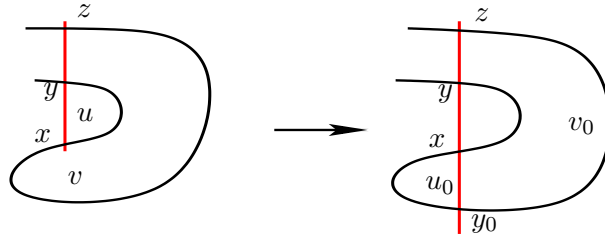


FIGURE 8 –

Preuve.

Soit $x \in \beta_i \cap h_\sigma(\alpha_j)$, vu comme un générateur de $CF(\beta_i, h_\sigma(\alpha_j))$. Donc

$$\partial \circ \partial(x) = \sum_{\substack{y \in \beta_i \cap h_\sigma(\alpha_j) \\ u \in \mathcal{M}(x,y)}} \sum_{\substack{z \in \beta_i \cap h_\sigma(\alpha_j) \\ v \in \mathcal{M}(y,z)}} \varepsilon(u) \cdot \varepsilon(v) \cdot z. \quad (5)$$

Nous montrons que le coefficient de chaque générateur z s'annule. Supposons qu'il existe deux bigones $u \in \mathcal{M}(x, y)$ et $v \in \mathcal{M}(y, z)$. D'après la Remarque 3, il y a plusieurs possibilités pour que les bigones u et v occupent les quadrants près de y . Nous traitons deux cas, le même argument sera utilisé pour les autres cas.

Dans le premier, supposons que u occupe le premier quadrant et v occupe le deuxième. Les courbes β_{xy} et β_{yz} se chevauchent près de y . Donc l'un des courbes doit contenir l'autre, pour des raisons de multiplicité locale. Supposons que $\beta_{yz} \subset \beta_{xy}$, l'autre cas se fait de la même manière. Comme l'intérieur de $u \cup v$ ne contient pas des perforations et la courbe $h_\sigma(\alpha_j)$ est simple, alors la courbe $h_\sigma(\alpha_j)$ doit couper transversalement β_{xy} , le bord du bigone u qui se trouve sur la courbe β_i , en un premier point y_0 lorsque l'on parcourt $h_\sigma(\alpha_j)$ en partant de x .

Maintenant, l'intersection de la courbe $h_\sigma(\alpha_j)$ avec β_{xy} en y_0 va créer deux autres bigones $u_0 \in \mathcal{M}(x, y_0)$ et $v_0 \in \mathcal{M}(y_0, z)$, voir le Figure 7. Les bigones u et u_0 sont de même signe or les bigones v et v_0 ont des signes opposés i.e les coefficients $\varepsilon(u) \cdot \varepsilon(v), \varepsilon(u_0) \cdot \varepsilon(v_0)$ de z ont des signes opposés.

Dans le deuxième cas, supposons que le bigone u occupe le premier quadrant et v occupe le quatrième. Les courbes β_{xy} et β_{yz} s'intersectent qu'aux point y , voir la figure 8. Dans ce cas la courbe α_{yz} doit contenir la courbe α_{xy} . alors la courbe $h_\sigma(\alpha_j)$ doit couper transversalement la courbe β_i en un premier point y_0 avec $Im(y_0) < Im(x)$ lorsque l'on parcourt $h_\sigma(\alpha_j)$ en partant de y en direction de z . Maintenant, l'intersection de la courbe $h_\sigma(\alpha_j)$ avec β_i en y_0 va créer deux autres bigones $u_0 \in \mathcal{M}(x, y_0)$ et $v_0 \in \mathcal{M}(y_0, z)$, voir la Figure 8. Les bigones u et u_0 ont des signes opposés or les bigones v

et v_0 sont de même signe i.e les coefficients $\varepsilon(u).\varepsilon(v), \varepsilon(u_0).\varepsilon(v_0)$ de z ont des signes opposés.

Ceci signifie que les coefficients dans la formule (5) s'annulent par paires. D'où $\partial \circ \partial(x) = 0$.

Montrons que le y_0 est unique dans le sens : si y_1 un autre point d'intersection tels qu'ils existent un bigone de x à y_1 et un bigone de y_1 à z alors $y_0 = y_1$. Nous traitons que le premier cas, le même raisonnement se fait pour le deuxième. Supposons qu'il existe un point y_1 telle que $\mathcal{M}(x, y_1) \neq \Phi$ alors l'arc $\alpha_{y_1 z}$ doit passer par le point y_0 lorsque nous parcourons $h_\sigma(\alpha_j)$ en partant de y_1 . Dans ce cas le point y_1 doit être sur l'arc $\beta_{y_0 z}$, mais il peut pas y avoir de bigone de x vers les points de $\beta_{y_0 z} - \{y_0\}$ pour la raison de multiplicité locale. Donc $y_1 = y_0$. □

Nous définissons $HF^l(\beta_i, h_\sigma(\alpha_j))$ comme étant le l -ième groupe de cohomologie du complexe de cochaînes $CF(\beta_i, h_\sigma(\alpha_j))$. C'est un \mathbb{Z} -module gradué de type fini. Nous définissons $HF^{l,k}(\beta_i, h_\sigma(\alpha_j))$ comme étant le l -ième groupe de cohomologie du sous complexe de degré k de $CF(\beta_i, h_\sigma(\alpha_j))$. Donc nous avons la décomposition

$$HF^l(\beta_i, h_\sigma(\alpha_j)) = \bigoplus_{k \in \mathbb{Z}} HF^{l,k}(\beta_i, h_\sigma(\alpha_j)). \quad (6)$$

Notons par $HF^{l,k}(\sigma, i, j)$ la classe d'isomorphisme de $HF^{l,k}(\beta_i, h_\sigma(\alpha_j))$.

Théorème 7 *Si σ est une tresse à n brins. Pour chaque couple d'indice (i, j) , $i, j \in [[1, \dots, n - 1]]$, la classe d'isomorphisme $HF^{l,k}(\sigma, i, j)$ ne dépend pas de la classe d'isotopie de la tresse.*

La démonstration de ce théorème est reportée à la section 4. Nous montrons maintenant que le coefficient de la matrice de Burau réduite est égal à la caractéristique d'Euler graduée de cette cohomologie. Pour cela nous avons besoin du lemme suivant :

Lemme 8 *Soit x un point dans $\beta_i \cap h_\sigma(\alpha_j)$. Alors $\mu(x)$ est pair si et seulement si $\text{sign}(x) = +1$, où $\text{sign}(x)$ est le signe d'intersection des courbes orientées β_i et $h_\sigma(\alpha_j)$ au point x .*

Preuve. Supposons que β_i et $h_\sigma(\alpha_j)$ se coupent aux points x et $h_\sigma(z_j)$ à angle droit $(\pm \frac{\pi}{2})$. Soit $\tilde{\gamma}$ une courbe simple donnée comme dans la Figure 9. Nous lisons la courbe γ aux points x et $h_\sigma(z_j)$. Nous obtenons $\tilde{\gamma}\gamma$ une courbe simple fermée. Nous distinguons deux cas.

Cas1 : Si le signe d'intersection de β_i avec $h_\sigma(\alpha_j)$ au point x est positif, alors

$$\int d(\arg((\tilde{\gamma}\gamma)'(t))) = \int d(\arg(\gamma'(t))) + \int d(\arg(\tilde{\gamma}'(t))) + \pi,$$

$$2n\pi = \int d(\arg(\gamma'(t))) + 2\pi,$$

où n est le degré de l'application $\tilde{\gamma}\gamma : S^1 \rightarrow S^1$. Alors $\mu(x) = 2n - 2$.

Cas2 : Si le signe d'intersection de β_i avec $h_\sigma(\alpha_j)$ au point x est négatif, alors

$$\int d(\arg((\tilde{\gamma}\gamma)'(t))) = \int d(\arg(\gamma'(t))) + \int d(\arg(\tilde{\gamma}'(t))).$$

Donc $\mu(x) = 2n - 1$. □

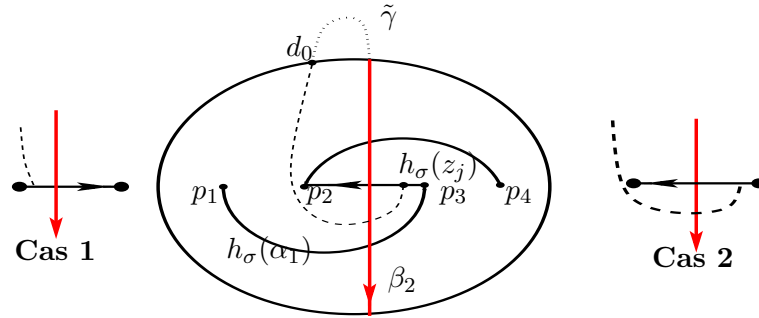


FIGURE 9 –

Proposition 9 Soit σ une tresse à n brins. Pour chaque couple d'indice (i, j) , $i, j \in \llbracket 1, \dots, n-1 \rrbracket$, il existe un complexe de cochaînes bigradué $(CF^{l,k}(\beta_i, h_\sigma(\alpha_j)), \partial^{l,k})_{l,k \in \mathbb{Z}}$ tel que

$$b_{ij} = \sum_{l \in \mathbb{Z}} (-1)^l \cdot t^k \cdot \dim_{\mathbb{Q}} \left(HF^{l,k}(\beta_i, h_\sigma(\alpha_j)) \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Q} \right). \quad (7)$$

Où b_{ij} est le coefficient de la matrice de Burau $\tilde{\rho}(\sigma)$ en position (i, j) .

Preuve. C'est une conséquence directe du Lemme 8 et la formule (1) donnée dans la section 2. □

4 Invariance

Dans cette section nous montrons que la cohomologie construite à la section 3 ne dépend pas de la classe d'isotopie de la tresse. Nous utilisons

pour cela l'élimination gaussienne [BN07], voir aussi [Bel10] pour une version plus élémentaire adaptée à notre situation. Rappelons que le groupe de tresses B_n est le groupe des difféomorphismes $\text{Diff}^+(D, P_n)$ quotienté par la relation d'isotopie. Chaque difféomorphisme (représente une tresse géométrique) agit sur le disque D_n . Si deux difféomorphismes isotopes agiraient sur le disque épointé, cette isotopie fait apparaître ou disparaître des bigones (élémentaires).

Soit σ une tresse à n brins. Dans cette section, h_σ et h'_σ sont deux difféomorphismes isotopes par une isotopie qui fait apparaître un bigone élémentaire d'un point x vers un point y . Supposons que le difféomorphisme h'_σ est celui qui fait apparaître un bigone élémentaire de plus. Notons par \mathcal{C} et \mathcal{C}' les deux complexes de cochaînes associés à h_σ et h'_σ respectivement. Auparavant nous allons donner le lemme suivant :

Lemme 10 (Élimination Gaussienne [BN07]) *Soit $\mathcal{C} = (C^*, \partial)$ un complexe de cochaînes sur \mathbb{Z} librement engendré. Soit $x \in C^l$ (resp. $y \in C^{l+1}$) telle que $C^l = \mathbb{Z}.x \oplus A$ (resp. $C^{l+1} = \mathbb{Z}.y \oplus B$). Si $\varphi : \mathbb{Z}.x \rightarrow \mathbb{Z}.y$ est un isomorphisme de \mathbb{Z} -modules, alors le segment de complexe de \mathcal{C}*

$$\dots [C^{l-1}] \xrightarrow{\begin{pmatrix} \kappa \\ \zeta \end{pmatrix}} \begin{bmatrix} x \\ A \end{bmatrix} \xrightarrow{\begin{pmatrix} \varphi & \delta \\ \lambda & \xi \end{pmatrix}} \begin{bmatrix} y \\ B \end{bmatrix} \xrightarrow{\begin{pmatrix} \theta & \nu \end{pmatrix}} [C^{l+2}] \dots \quad (8)$$

est isomorphe au segment de complexe de cochaînes suivant

$$\dots [C^{l-1}] \xrightarrow{\begin{pmatrix} 0 \\ \zeta \end{pmatrix}} \begin{bmatrix} x \\ A \end{bmatrix} \xrightarrow{\begin{pmatrix} \varphi & 0 \\ 0 & \xi - \lambda\varphi^{-1}\delta \end{pmatrix}} \begin{bmatrix} y \\ B \end{bmatrix} \xrightarrow{\begin{pmatrix} 0 & \nu \end{pmatrix}} [C^{l+2}] \dots \quad (9)$$

ces deux complexes sont homotopiquement équivalents au segment de complexe

$$\dots [C^{l-1}] \xrightarrow{(\zeta)} [A] \xrightarrow{(\xi - \lambda\varphi^{-1}\delta)} [B] \xrightarrow{(\nu)} [C^{l+2}] \dots \quad (10)$$

Ici on utilise la notation matricielle pour la différentielle ∂ .

Preuve du théorème 7. . Soient h_σ et h'_σ deux difféomorphismes (représentant deux tresses géométriques) isotopes. Nous passons de h_σ à h'_σ par une isotopie qui fait apparaître un nombre n de bigones élémentaires. Par raisonnement par induction sur le nombre de bigones.

Si $n = 1$, on passe de h_σ à h'_σ par une isotopie qui ne fait apparaître qu'un bigone élémentaire d'un point x vers un point y . Considérons le complexe de cochaînes $\mathcal{C} = (CF^{*,*}(\beta_i, h_\sigma(\alpha_j)), \partial)$ associé au difféomorphisme h_σ

$$\dots [C^{l-1}] \xrightarrow{(\partial)} [C^l] \xrightarrow{(\partial)} [C^{l+1}] \xrightarrow{(\partial)} [C^{l+2}] \dots \quad (11)$$

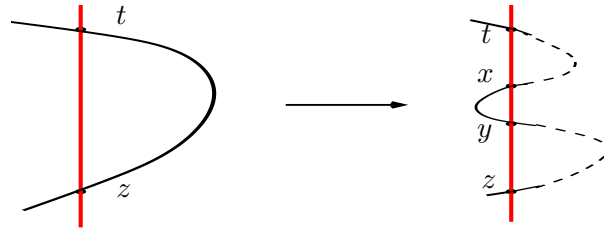


FIGURE 10 –

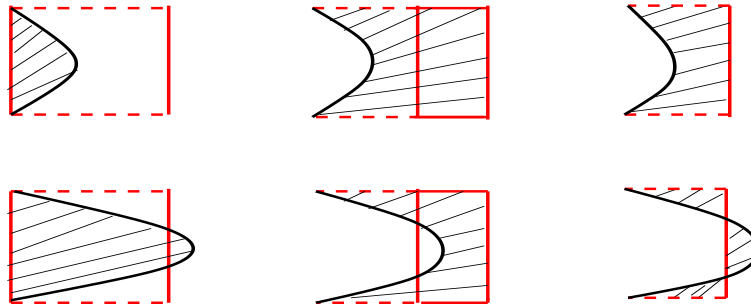


FIGURE 11 – Bijection entre les bigones qui bordent l’arc $h_\sigma(\alpha_j)$ à l’endroit où on élimine le bigone élémentaire, les hachures correspondent à une multiplicité supérieur de un.

Le complexe de cochaînes $\mathcal{C}' = (CF(\beta_i, h'_\sigma(\alpha_j)), \partial')$ associé au difféomorphisme h'_σ est de la forme

$$\dots [C^{l-1}] \xrightarrow{\begin{pmatrix} \kappa \\ \zeta \end{pmatrix}} \begin{bmatrix} x \\ C^l \end{bmatrix} \xrightarrow{\begin{pmatrix} \varphi & \delta \\ \lambda & \xi \end{pmatrix}} \begin{bmatrix} y \\ C^{l+1} \end{bmatrix} \xrightarrow{\begin{pmatrix} \theta & \nu \end{pmatrix}} [C^{l+2}] \dots \quad (12)$$

où les lettres grecques sont des matrices d’homomorphismes de \mathbb{Z} -modules. L’ensemble des générateurs de \mathcal{C}' est obtenu de celle de \mathcal{C} en rajoutant les points x et y . L’isomorphisme φ est défini par $\varphi(x) = \varepsilon(u)y = \pm y$ où $u \in \mathcal{M}(x, y)$, et $\varphi(z) = 0$ pour $z \neq x$. Remarquons que $\varphi^{-1} \circ \partial'(x) = x$. Soit \mathcal{C}'' le complexe de cochaînes obtenu après avoir appliqué l’élimination gaussienne sur le complexe de cochaînes \mathcal{C}' associé au difféomorphisme h'_σ . La différentielle $\partial'' = \partial' - \partial' \circ \varphi^{-1} \circ \partial'$. Montrons que $\partial = \partial''$. Soient z un générateur et $t \in \partial z$, donc il existe un bigone $u \in \mathcal{M}(z, t)$. Si le bigone u a disparu lors du passage de h_σ à h'_σ par isotopie, alors la disparition de u fait apparaître un bigone u_1 de z vers y et un bigone u_2 de x vers t , voir la Figure 10. Si le bigone u n’a pas disparu, alors il y aura pas de bigones de z vers y ou de x vers t , donc $\varphi^{-1} \circ \partial' = 0$ ou $\partial' \circ \varphi^{-1} = 0$. Donc les bigones comptés dans les différentielles ∂ et ∂'' sont en bijection et ils viennent avec le même signe, voir la figure 11. D’après le lemme d’élimination gaussienne les deux complexes de cochaînes \mathcal{C} et \mathcal{C}' sont homotopiquement équivalents.

Si $n > 1$, nous réappliquons l'élimination gaussienne. Nous obtenons que \mathcal{C} et \mathcal{C}' sont homotopiquement équivalent. Donc les groupes de cohomologie $HF^{*,*}(\beta_i, h_\sigma(\alpha_j))$ et $HF^{*,*}(\beta_i, h'_\sigma(\alpha_j))$ sont isomorphes. \square

5 Fidélité

Dans ce paragraphe, nous montrons que la cohomologie construite à la section 3 détecte la tresse triviale. Nous fixons une collection de courbes $\alpha_0, \dots, \alpha_{n-1}$ comme dans la Figure 1.

Lemme 11 [KS02] *Si h un élément de $\text{Diff}^+(D, P_n)$ satisfait $h(\alpha_i) \simeq \alpha_i$ pour tout i , alors $h \simeq \text{id}$.*

Une courbe c dans (D, P_n) est dite **admissible** [KS02] si elle est l'image de α_i par un élément h de $\text{Diff}^+(D, P_n)$ pour un certain $i \in \{0, \dots, n-1\}$.

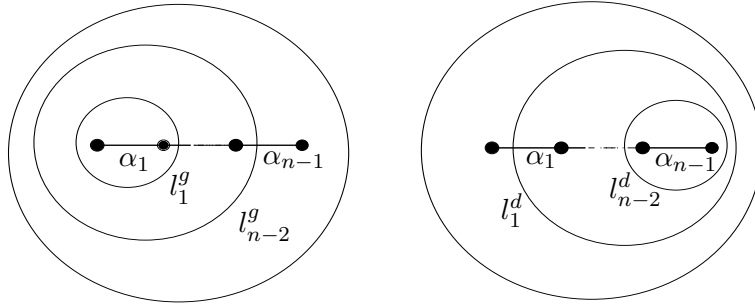


FIGURE 12 –

Lemme 12 *Soit c une courbe admissible dans (D, P_n) . Supposons qu'il existe $k \in \{1, \dots, n-1\}$ tel que $i(\alpha_j, c) = i(\alpha_j, \alpha_k)$ pour tout $j = 1, \dots, n-1$. Alors on a*

$$c \simeq \begin{cases} \alpha_1 \text{ ou } \tau_{d,1}^{\pm 1}(\alpha_1) & \text{si } k = 1, \\ \alpha_k \text{ ou } \tau_{d,k}^{\pm 1}(\alpha_k), \tau_{g,k}^{\pm 1}(\alpha_k), \tau_{d,k} \tau_{g,k}^{-1}(\alpha_k) \text{ ou } \tau_{d,k}^{-1} \tau_{g,k}(\alpha_k) & \text{si } 2 \leq k < n-2, \\ \alpha_{n-1} \text{ ou } \tau_{g,n-1}^{\pm 1}(\alpha_{n-1}) & \text{si } k = n-1. \end{cases}$$

Où $\tau_{d,1}, \dots, \tau_{d,n-2}$ sont les twists de Dehn positif le long des courbes fermées l_1^d, \dots, l_{n-2}^d et $\tau_{g,1}, \dots, \tau_{g,n-2}$ sont les twists le long des courbes l_1^g, \dots, l_{n-2}^g , voir la Figure 12.

Preuve. Montrons le résultat pour le cas $k = 1$, les autres cas se démontrent d'une manière similaire. D'après l'hypothèse, nous avons $i(\alpha_2, c) = i(\alpha_2, \alpha_1) = 1$. Donc les courbes c et α_1 ont un seul point commun qui est soit $\alpha_1 \cap \alpha_2$ ou soit $\alpha_2 \cap \alpha_3$, mais le deuxième cas est impossible puisque $i(\alpha_3, c) = i(\alpha_3, \alpha_1) = 0$. D'autre part, nous avons $i(\alpha_1, c) = i(\alpha_1, \alpha_1) = 2$.

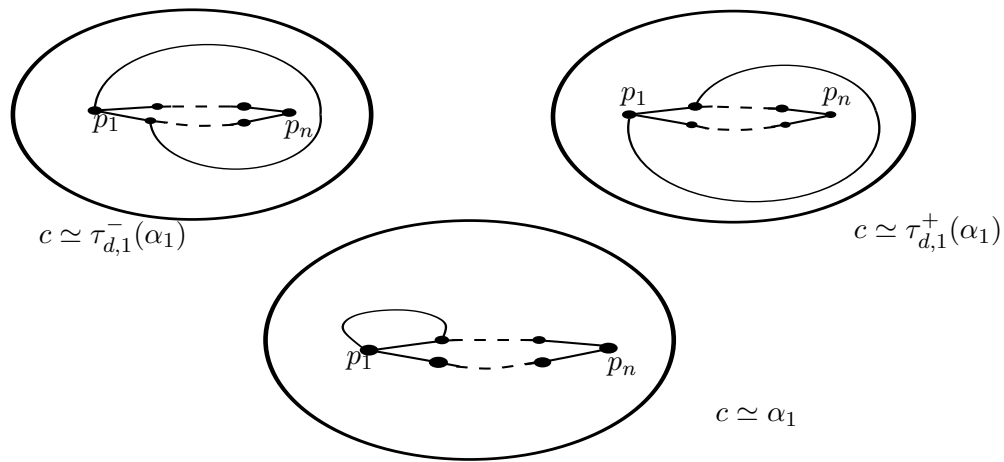


FIGURE 13 –

Ceci signifie que les courbes c et α_1 ont les mêmes extrémités. Nous pouvons supposer que l'intersection de c avec tous les courbes α_j est minimal. La courbe c ne rencontre $\alpha_1 \cup \dots \cup \alpha_{n-1}$ qu'aux points p_1, p_2 , encore par hypothèse d'intersection géométrique. Maintenant nous coupons la surface D^2 le long de $\alpha_1 \cup \dots \cup \alpha_{n-1}$. Nous considérons la courbe c sur cette nouvelle surface, nous obtenons 3 cas possibles, voir la Figure 13. D'où le résultat. \square

Théorème 13 *Soit σ une tresse dans B_n . Supposons que pour tout couple d'indice (i, j) , $i, j \in [[1, \dots, n - 1]]$, il existe un isomorphisme bigradué de $HF^{*,*}(\beta_i, h_\sigma(\alpha_j))$ vers $HF^{*,*}(\beta_i, \alpha_j)$. Alors σ est isotope à la tresse triviale.*

Preuve. Supposons que $HF^{*,*}(\beta_i, h_\sigma(\alpha_j)), HF^{*,*}(\beta_i, \alpha_j)$ sont isomorphes. Alors pour tout $i = 1, \dots, n - 1$, $HF^{*,*}(\beta_i, h_\sigma(\alpha_i))$ est isomorphe au groupe abélien libre engendré par l'élément x_{ii} , où x_{ii} est le point d'intersection de β_i avec α_i , et $HF^{*,*}(\beta_i, h_\sigma(\alpha_j))$ est isomorphe au groupe trivial si $i \neq j$. Alors

$$i(\beta_i, h_\sigma(\alpha_j)) = \begin{cases} 1 & \text{si } i = j, \\ 0 & \text{si } i \neq j. \end{cases} \quad (13)$$

Donc $\alpha_j, h_\sigma(\alpha_j)$ ont les mêmes extrémités pour tout $j = 1, \dots, n - 1$. Ceci implique que

$$i(\alpha_k, h_\sigma(\alpha_j)) = i(\alpha_k, \alpha_j), \text{ pour tout } k = 1, \dots, n - 1.$$

Appliquons le Lemme 12 pour $c = h_\sigma(\alpha_j)$, Nous aurons

$$h_\sigma(\alpha_j) \simeq \alpha_j \text{ ou } \tau_{d,j}^{\pm 1}(\alpha_j) \text{ ou } \tau_{g,j}^{\pm 1}(\alpha_j).$$

Puisque $i(\beta_i, h_\sigma(\alpha_j)) = 0$ pour tout $i \neq j$, alors $h_\sigma(\alpha_j) \simeq \alpha_j, \forall j = 1, \dots, n - 1$. D'après le Lemme 11 on a $h_\sigma \simeq (\tau_0)^m$, où $m \in \mathbb{Z}$ et τ_0 est le twist de

Dehn positif le long du bord ∂D_n . Comme l'isomorphisme entre les groupes de cohomologie $HF^{*,*}(\beta_i, h_\sigma(\alpha_j))$ et $HF^{*,*}(\beta_i, \alpha_j)$ est bigradué pour tout $i, j \in \llbracket 1, \dots, n-1 \rrbracket$, alors $m = 0$. D'où σ est la tresse triviale. \square

Conclusion et perspective Dans le travail de M. Khovanov et P. Seidel [KS02] la représentation par foncteur contient la notion de multiplicativité qui n'apparaît pas dans ce travail. M. Abouzaid [Abo08] a donné une version complète de la catégorie de Fukaya des surfaces fermées. Pouvons nous adapter le travail de Abouzaid pour décrire la structure multiplicative dans ce cadre ?

Remerciements Ce travail a été réalisé lorsque j'ai visité le LMAM, Université de Bretagne Sud (France). Je tiens à remercier vivement mon directeur de thèse Christian Blanchet pour son soutien, pour ses encouragements et tous les conseils qu'il m'a prodigués. Je remercie aussi Bertrant Patureau-Mirand avec qui j'ai longuement discuté.

Références

- [Abo08] M. Abouzaid, *On the Fukaya categories of higher genus surfaces*, Advances in Math 217 (2008), 1192–1235.
- [BN07] D. Bar-Natan, *Fast Khovanov homology computations*, J. Knot Theory Ramifications, 16 (2007), N0 3, 243–255.
- [Bel10] A. Beliakova, *A simplification of combinatorial link Floer homology*, arXiv :0705.0669v5
- [Big99] S. Bigelow, *The Burau representation is not faithful for $n = 5$* , Geom. Topol. 3 (1999) 397–404 .
- [Big01] S. Bigelow, *braid groups are linear*, J. Amer. Math. Sco. 14 No. 2,(2001), 471–486.
- [Bir74] J.S. Birman, *Braids, links, and mapping class groups*, Ann. Math. Stud. vol **82**, Princeton University Press, N.J, 1974.
- [Bur36] W. Burau, *Über zopfgruppen und gleichsinnig verdrillte Verkettungen*, Abh. Math. Sem. Ham. II, (1936) pages 171–178.
- [Ep66] D. Epstein, *Curves on 2-manifolds and isotopies*, Acta Math. **115** (1966), 83–107.
- [GRS03] R. Gaultschi, J.W. Robbin, D.A. Salamon, *Heegaard splittings and Morse-Smale flows*, Int. J. Math. Math. Sci. **56** (2003), 3539–3572.

- [FLP79] A. Fathi, F. Laudenbach, et V. Poénaru, *Travaux de Thurston sur les surfaces*, Astérisque, vol. 66–67, Soc. Math. France, 1979.
- [KT08] C. Kassel, V. Turaev, *Braid Groups*, Graduate Texts in Mathematics, 247, Springer-verlag, (2008).
- [Kho00] M. Khovanov, *A categorification of the Jones polynomial*, Duke Math. J. **101**, (2000), no.3, 359–426.
- [KS02] M. Khovanov, et P. Seidel, *Quivers, Floer cohomology, and braid group actions*, J. Amer. Math. Soc., **15**, (2002), no.1, 203–271.
- [PR00] L. Paris, et D. Rolfsen, *Geometric subgroups of mapping class groups*, J. reine angew. Math. **521** (2000), 47–83.
- [Tur02] V. Turaev, *Faithful linear representations of the braid groups*, Séminaire Bourbaki, (1999–2000), Astérisque, Vol. **276**, Soc. Math. France, Paris (2002), 389–409.