Théorème de Keller-Liverani et forte ergodicité.

D.FERRE *

novembre 2010

Cette note est extraite de mon rapport de thèse, thèse dirigée par Loïc HERVE et James LEDOUX [1]. Elle regroupe, détaille et parfois simplifie des énoncés et arguments présentés dans des articles différents, voire des arguments non publiés (conservation du rang, travail avec une semi norme).

Table des matières

Soit $(\mathcal{B}, \|\cdot\|_{\mathcal{B}})$ un espace de Banach. On note $\mathcal{L}(\mathcal{B})$ l'espace des applications linéaires continues de $\mathcal{B}$ dans $\mathcal{B}$. On note par le même symbole $\|\cdot\|_{\mathcal{B}}$ la norme sur $\mathcal{B}$ et la norme associée sur $\mathcal{L}(\mathcal{B})$. On désigne par Id l'élement identité de $\mathcal{L}(\mathcal{B})$. On note $\mathcal{B}' := \mathcal{L}(\mathcal{B}, \mathbb{C})$ le dual topologique de $\mathcal{B}$.

*INSA IRMAR, UMR-CNRS 6625. Institut National des Sciences Appliquées de Rennes, 20, Avenue des Buttes de Cöesmes CS 14315, 35043 Rennes Cedex, France. Deborah.Ferre@insa-rennes.fr

1. INSA IRMAR, UMR-CNRS 6625. Institut National des Sciences Appliquées de Rennes, 20, Avenue des Buttes de Cöesmes CS 14315, 35043 Rennes Cedex, France. Loic.Herve@insa-rennes.fr et James.Ledoux@insa-rennes.fr

Soit Q un élément de $\mathcal{L}(\mathcal{B})$. On note $\sigma(Q_{|\mathcal{B}})$ son spectre, $\rho(Q_{|\mathcal{B}})$ son ensemble résolvant, $r(Q_{|\mathcal{B}})$ son rayon spectral et $r_{ess}(Q_{|\mathcal{B}})$ son rayon spectral essentiel. De plus, le rayon spectral vérifie

$$r(Q_{|\mathcal{B}}) = \lim_n \|Q^n\|_{\mathcal{B}}^{\frac{1}{n}} = \inf_n \|Q^n\|_{\mathcal{B}}^{\frac{1}{n}} = \max\{|\lambda|;\ \lambda \in \sigma(Q_{|\mathcal{B}})\} \tag{1}$$

et le rayon spectral essentiel (formule de Nussbaum)

$$r_{ess}(Q_{|\mathcal{B}}) = \lim_n \left(\inf\{\|Q^n - V\|_{\mathcal{B}}^{\frac{1}{n}}; V \text{ opérateur compact sur } \mathcal{B}\} \right). \tag{2}$$

Soit $(\widetilde{\mathcal{B}}, \|\cdot\|_{\widetilde{\mathcal{B}}})$ un autre espace normé tel que $\mathcal{B}$ s'injecte continûment dans $\widetilde{\mathcal{B}}$: $\mathcal{B} \hookrightarrow \widetilde{\mathcal{B}}$. On note pour tout $Q \in \mathcal{L}(\mathcal{B})$

$$\|Q\|_{\mathcal{B},\widetilde{\mathcal{B}}} = \sup\{\|Qf\|_{\widetilde{\mathcal{B}}}\,;\ f \in \mathcal{B},\ \|f\|_{\mathcal{B}} \leq 1\}.$$

On considère une famille $(Q(t); t \in I_0)$ d'opérateurs linéaires sur $\mathcal{B}$ et $\widetilde{\mathcal{B}}$ avec I_0 un voisinage réel de 0. On note $Q := Q(0)$ l'opérateur non perturbé.

On s'intéresse dans ce qui suit à l'existence de l'inverse dans $\mathcal{L}(\mathcal{B})$ de l'application $z - Q(t) := z\,Id - Q(t)$ pour z dans $\mathbb{C}$, que l'on note (sous réserve d'existence) :

$$R(z) := (z - Q)^{-1} \text{ la résolvante de l'opérateur non perturbé}$$
$$\text{et } R_t(z) := (z - Q(t))^{-1} \text{ la résolvante de l'opérateur perturbé.}$$

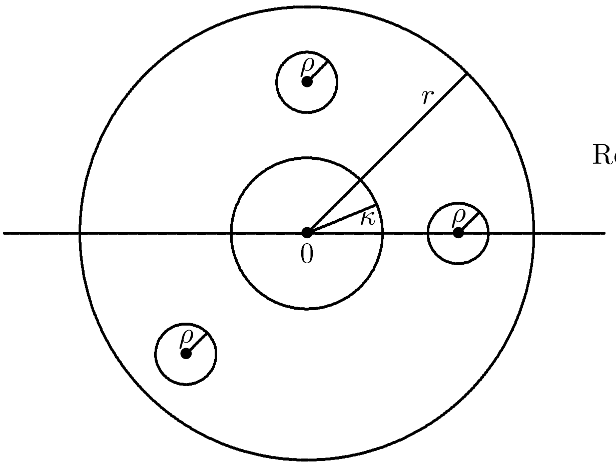
Par ailleurs, on désigne le disque fermé de $\mathbb{C}$ centré en c et de rayon r par $\overline{D}(c,r) := \{z \in \mathbb{C}\ ;\ |z - c| \leq r\}$ et le disque ouvert par $D(c,r) := \{z \in \mathbb{C}\ ;\ |z - c| < r\}$.

Enfin, pour tout x réel positif, $\lceil x \rceil$ désigne l'entier immédiatement supérieur à x.

1 Théorème de Keller-Liverani

Cette étude se fera plus particulièrement sur les compacts $\mathcal{D}_{\kappa,\rho,r,\mathcal{B}}$ pour κ, ρ, r, réels strictement positifs, avec $\mathcal{D}_{\kappa,\rho,r,\mathcal{B}}$ défini par :

$$\mathcal{D}_{\kappa,\rho,r,\mathcal{B}} := \big\{z \in \mathbb{C};\ \ |z| \geq \kappa,\ \ d\big(z, \sigma(Q_{|\mathcal{B}})\big) \geq \rho,\ \ |z| \leq r\big\}. \tag{3}$$



Représentation de $\mathcal{D}_{\kappa,\rho,r,\mathcal{B}}$.

1.1 Hypothèse $\mathcal{C}_0(0)$ et théorème de perturbations d'opérateurs de Keller-Liverani.

On rappelle que l'on considère $(\mathcal{B}, \|\cdot\|_{\mathcal{B}})$ un espace de Banach et $(\widetilde{\mathcal{B}}, \|\cdot\|_{\widetilde{\mathcal{B}}})$ un autre espace normé tels que $\mathcal{B}$ s'injecte continûment dans $\widetilde{\mathcal{B}}$: $\mathcal{B} \hookrightarrow \widetilde{\mathcal{B}}$, ainsi qu'une famille $(Q(t); t \in I_0)$ d'opérateurs linéaires sur $\mathcal{B}$ et $\widetilde{\mathcal{B}}$ avec I_0 un voisinage réel de 0.

Hypothèse $\mathcal{C}_0(0)$
$(Q(t); t \in I_0)$ *est une famille d'opérateurs linéaires continus sur* $\mathcal{B}$ *(c'est-à-dire* $\forall t \in I_0, Q(t) \in \mathcal{L}(\mathcal{B})$*) et telle que* $Q \in \mathcal{L}(\widetilde{\mathcal{B}})$*, qui vérifie :*
(H1) Il existe des constantes $c_1 > 0$*,* $\kappa_1 > 0$ *et* $M > 0$ *telles que, pour tous* $t \in I_0$*,* $f \in \mathcal{B}$ *et* $n \in \mathbb{N}$ *on ait*

$$\|Q(t)^n f\|_{\mathcal{B}} \leq c_1 \kappa_1^n \|f\|_{\mathcal{B}} + c_1 M^n \|f\|_{\widetilde{\mathcal{B}}}.$$

(H2) $\Delta(t) := \|Q(t) - Q\|_{\mathcal{B}, \widetilde{\mathcal{B}}} \to_{t \to 0, t \in I_0} 0.$

L'inégalité écrite dans la condition (H1) est appelée inégalité de Doeblin-Fortet, en lien avec le théorème de Ionescu-Tulcea et Marinescu (cf. [Hen93]). On notera que (H1) implique que $(Q(t); t \in I_0)$ est une famille d'opérateurs linéaires continus sur $\mathcal{B}$. On notera aussi que la condition (H2) est plus faible que la condition de continuité en $t = 0$ des opérateurs $\{Q(t); t \in I_0\}$ sur $\mathcal{B}$ nécessaire au théorème classique des perturbations [DS58].

Théorème 1. *Sous l'hypothèse* $\mathcal{C}_0(0)$*, pour tous* κ*,* ρ *et* r *tels que* $\kappa > \kappa_1$*,* $\rho > 0$ *et* $r > 0$*, il existe un voisinage* $\widetilde{I_0} \subseteq I_0$ *de 0 tel que les opérateurs* $R_t(z) := (z - Q(t))^{-1}$ *soient bien définis dans* $\mathcal{L}(\mathcal{B})$ *pour tous* $z \in \mathcal{D}_{\kappa,\rho,r,\mathcal{B}}$ *et* $t \in \widetilde{I_0}$*, et l'on a de plus :*

$$\sup\{\|(z - Q(t))^{-1}\|_{\mathcal{B}};\ z \in \mathcal{D}_{\kappa,\rho,r,\mathcal{B}},\ t \in \widetilde{I_0}\} < +\infty \tag{4}$$

$$\sup\{\|(z - Q(t))^{-1} - (z - Q)^{-1}\|_{\mathcal{B},\widetilde{\mathcal{B}}};\ z \in \mathcal{D}_{\kappa,\rho,r,\mathcal{B}}\} \to_{t \to 0, t \in \widetilde{I_0}} 0. \tag{5}$$

Comme $\mathcal{B} \hookrightarrow \widetilde{\mathcal{B}}$ par hypothèse, on définit pour ce qui suit la constante $\alpha > 0$ par

$$\forall f \in \mathcal{B}, \quad \|f\|_{\widetilde{\mathcal{B}}} \leq \alpha \, \|f\|_{\mathcal{B}}, \tag{6}$$

et comme $Q \in \mathcal{L}(\widetilde{\mathcal{B}})$, on définit également la constante $\widetilde{c} > 0$ telle que

$$\widetilde{c} := \sup\{\|Qf\|_{\widetilde{\mathcal{B}}}\,;\ f \in \widetilde{\mathcal{B}},\ \|f\|_{\widetilde{\mathcal{B}}} \leq 1\}. \tag{7}$$

Remarque 1. *Le théorème 1 est en fait vérifié sur* $\big\{z \in \mathbb{C};\ \ |z| \geq \kappa,\ \ d\big(z, \sigma(Q_{|\mathcal{B}})\big) \geq \rho\big\}$ *et non pas seulement sur* $\mathcal{D}_{\kappa,\rho,r,\mathcal{B}}$*.*

En effet, sur $\{z \in \mathbb{C}; |z| > r(Q(t)_{|\mathcal{B}})\}$, $z - Q(t)$ est inversible d'inverse $R_t(z) = \sum_{n \geq 0} z^{-n-1} Q(t)^n$ (série de Von Neumann). Or par l'inégalité de Doeblin-Fortet (H1), il existe $d := c_1(1 + \alpha) > 0$, avec $\alpha > 0$ défini par (6), telle que pour tous $n \in \mathbb{N}$ et $t \in I_0$, on ait $\|Q(t)^n\|_{\mathcal{B}} \leq d \max(\kappa_1, M)^n$. En particulier $r(Q(t)_{|\mathcal{B}}) = \lim_n \|Q(t)^n\|_{\mathcal{B}}^{\frac{1}{n}} \leq \max(\kappa_1, M)$. Soit $\varepsilon > 0$. On a ainsi pour tout $z \in \mathbb{C}$, $|z| \geq \max(\kappa_1, M) + \varepsilon$:

$$\|(z - Q(t))^{-1}\|_{\mathcal{B}} \leq \sum_{n \geq 0} |z|^{-n-1} \|Q(t)^n\|_{\mathcal{B}} \leq \frac{d}{|z|} \sum_{n \geq 0} \left(\frac{\max(\kappa_1, M)}{|z|}\right)^n$$

ce qui permet d'obtenir (cf. (4)) : $\sup\{\|(z-Q(t))^{-1}\|_{\mathcal{B}};\ |z| \geq \max(\kappa_1, M)+\varepsilon,\ t \in I_0\} < +\infty$. De plus,

$$(z-Q(t))^{-1}-(z-Q)^{-1} = \sum_{n\geq 0} z^{-n-1}[Q(t)^n - Q^n] = \sum_{n\geq 0} z^{-n-1} \sum_{i=0}^{n-1} Q^i[Q(t)-Q]Q(t)^{n-1-i},$$

ce qui implique en considérant les normes

$$\begin{aligned}\|(z-Q(t))^{-1}-(z-Q)^{-1}\|_{\mathcal{B},\widetilde{\mathcal{B}}} &\leq \sum_{n\geq 0} |z|^{-n-1}\Delta(t) d \sum_{i=0}^{n-1} \widetilde{c}^i \max(\kappa_1, M)^{n-1-i} \\ &= \Delta(t)\ \frac{d}{|z|^2} \sum_{n\geq 0} n \left(\frac{\max(\kappa_1, M, \widetilde{c})}{|z|}\right)^{n-1}\end{aligned}$$

ce qui permet d'obtenir (cf. (5)) :

$$\sup\{\|(z-Q(t))^{-1}-(z-Q)^{-1}\|_{\mathcal{B},\widetilde{\mathcal{B}}};\ |z| \geq \max(\kappa_1, M, \widetilde{c})+\varepsilon\} \to_{t\to 0, t\in I_0} 0.$$

Remarque 2. *On peut ne considérer qu'une semi norme sur $\widetilde{\mathcal{B}}$, et supposer qu'il existe une constante $\widetilde{c} \geq 0$ telle que (7) soit vérifiée.*

Preuve du théorème 1. La preuve suivante est une synthèse de [KL99, Liv04] (voir aussi [Bal00], th. 3.8). Soient κ, ρ et r fixés vérifiant les conditions du théorème. Par définition du spectre et de $\mathcal{D}_{\kappa,\rho,r,\mathcal{B}}$, l'opérateur $R(z) = (z-Q)^{-1}$ est bien défini dans $\mathcal{L}(\mathcal{B})$ pour tout $z \in \mathcal{D}_{\kappa,\rho,r,\mathcal{B}}$. De plus $\mathcal{D}_{\kappa,\rho,r,\mathcal{B}}$ est compact dans $\mathbb{C}$, et par continuité de $L \mapsto L^{-1}$ sur les inversibles de $\mathcal{L}(\mathcal{B})$, l'application $z \mapsto R(z)$ est continue sur $\mathcal{D}_{\kappa,\rho,r,\mathcal{B}}$. Ceci permet de définir

$$H = H_{\kappa,\rho,r} := \sup\left\{\|R(z)\|_{\mathcal{B}}; z \in \mathcal{D}_{\kappa,\rho,r,\mathcal{B}}\right\} < +\infty. \tag{8}$$

On utilisera les inégalités suivantes pour tout $t \in I_0$ qui découlent de (H1) :

$$\|Q(t)\|_{\mathcal{B}} \leq c \quad \text{ et } \quad \|Q(t)-Q\|_{\mathcal{B}} \leq 2c, \quad \text{avec } \ c := c_1\kappa_1 + c_1 M\alpha, \tag{9}$$

avec α défini en (6). On rappelle que l'on a défini par ailleurs $\widetilde{c}$ en (7).

Enfin, on utilisera dans cette preuve les inégalités suivantes pour $z \neq 0$:

$$\begin{aligned} Id &= z^{-n}Q(t)^n + \frac{1}{z}\sum_{i=0}^{n-1} z^{-i}\ Q(t)^i\ (z-Q(t)) \\ &= z^{-n}Q(t)^n + \frac{1}{z}\ (z-Q(t)) \sum_{i=0}^{n-1} z^{-i}\ Q(t)^i. \end{aligned} \tag{10}$$

1) Existence de l'inverse de $z-Q(t)$ pour $|t|$ petit.
On démontre dans cette partie la continuité du spectre perturbé.

Proposition 1. *Il existe un voisinage $\widetilde{I}_0 \subseteq I_0$ de 0 tel que $z-Q(t)$ soit inversible pour tous $z \in \mathcal{D}_{\kappa,\rho,r,\mathcal{B}}$ et $t \in \widetilde{I}_0$.*

Preuve de la proposition 1. On explicite ci-dessous l'inverse à droite de $z - Q(t)$ (et donc la surjectivité de l'opérateur $z - Q(t)$) pour tous $z \in \mathcal{D}_{\kappa,\rho,r,\mathcal{B}}$ et t suffisamment petit de I_0, puis son injectivité.

1)a) Inverse à droite (surjectivité). On rappelle que $R(z) = (z - Q)^{-1}$.
Soit $n \in I\!N$, $t \in I_0$ et $z \in \mathcal{D}_{\kappa,\rho,r,\mathcal{B}}$. On a par l'égalité (10)

$$\begin{aligned}\big(z - Q(t)\big)\Big[\frac{1}{z}\sum_{i=0}^{n-1} z^{-i}Q(t)^i + z^{-n}Q(t)^n R(z)\Big] &= Id - z^{-n}Q(t)^n\Big[Id - \big(z - Q(t)\big)R(z)\Big] \\ &= Id - z^{-n}Q(t)^n\big[Q(t) - Q\big]R(z).\end{aligned}$$

Il suffit de montrer que $\delta_d(t) := \|z^{-n}Q(t)^n\big[Q(t) - Q\big]R(z)\|_{\mathcal{B}} < 1$ pour un n suffisamment grand, $n \geq N_d$ avec N_d à déterminer et $t \in I_0$ suffisamment petit pour montrer l'existence de l'inverse à droite suivant :

$$I_t(z) := \Big[\big(\frac{1}{z}\sum_{i=0}^{N_d-1} z^{-i}Q(t)^i\big) + z^{-N_d}Q(t)^{N_d}R(z)\Big]\Big[Id - z^{-N_d}Q(t)^{N_d}\big(Q(t) - Q\big)R(z)\Big]^{-1}. \quad (11)$$

Soit $h \in \mathcal{B}$. En utilisant (H1), puis (8) (9) et (H2), on obtient :

$$\begin{aligned}\delta_d(t) &\leq |z|^{-n}\Big[c_1{\kappa_1}^n\|\big(Q(t) - Q\big)R(z)h\|_{\mathcal{B}} + c_1M^n\|\big(Q(t) - Q\big)R(z)h\|_{\widetilde{\mathcal{B}}}\Big] \\ &\leq \kappa^{-n}\Big[c_1\kappa_1^n 2cH\|h\|_{\mathcal{B}} + c_1M^n\Delta(t)H\|h\|_{\mathcal{B}}\Big] \\ &\leq A(\frac{\kappa_1}{\kappa})^n\|h\|_{\mathcal{B}} + B_n\Delta(t)\|h\|_{\mathcal{B}} \quad \text{avec} \quad A = 2c_1cH \ \text{ et } \ B_n = Hc_1(\frac{M}{\kappa})^n.\end{aligned}$$

Fixons maintenant $N_d \geq 0$ tel que $A(\frac{\kappa_1}{\kappa})^{N_d} < \frac{1}{2}$, soit par exemple $N_d = \lceil \frac{\ln(2A)}{\ln\frac{\kappa}{\kappa_1}} \rceil$, puis un voisinage $\widetilde{I_{0,d}} \subseteq I_0$ tel que $B_{N_d}\Delta(t) < \frac{1}{2}$ pour tout $t \in \widetilde{I_{0,d}}$. On a alors la condition recherchée.

1)b) Injectivité. Définissons les constantes suivantes, pour $n \in I\!N$:

$$a := \alpha Hc_1 \qquad \text{et} \qquad b_n := \alpha Hc_1(\frac{M}{\kappa})^n + \frac{1}{\kappa}\sum_{i=0}^{n-1}(\frac{\widetilde{c}}{\kappa})^i, \quad (12)$$

$$a_1 := 2c_1(\frac{M}{\kappa})^{N_0} \qquad \text{et} \qquad a_2 := \frac{2}{\kappa}\sum_{i=0}^{N_0-1}(\frac{c}{\kappa})^i \quad (13)$$

avec $N_0 \in I\!N$ tel que $c_1(\frac{\kappa_1}{\kappa})^{N_0} \leq \frac{1}{2}$, soit par exemple $N_0 = \lceil \frac{\ln(2c_1)}{\ln\frac{\kappa}{\kappa_1}} \rceil$.

Lemme 1. *On a pour tous $z \in \mathcal{D}_{\kappa,\rho,r,\mathcal{B}}$, $f \in \mathcal{B}$, et $n \in I\!N$,*

$$\|R(z)f\|_{\widetilde{\mathcal{B}}} \leq a(\frac{\kappa_1}{\kappa})^n\|f\|_{\mathcal{B}} + b_n\|f\|_{\widetilde{\mathcal{B}}}.$$

Lemme 2. *On a pour tous $t \in I_0$, $z \in \mathcal{D}_{\kappa,\rho,r,\mathcal{B}}$ et $g \in \mathcal{B}$:*

$$\|g\|_{\mathcal{B}} \leq a_1\|g\|_{\widetilde{\mathcal{B}}} + a_2\|(z - Q(t))g\|_{\mathcal{B}}.$$

Ces deux lemmes permettent de démontrer le lemme suivant. Pour ce dernier, nous considérons un entier $N_g \in I\!N$ tel que $a_1 a2c(\frac{\kappa_1}{\kappa})^{N_g} \leq \frac{1}{4}$, soit par exemple $N_g = \lceil \frac{\ln(8a_1ac)}{\ln\frac{\kappa}{\kappa_1}} \rceil$, puis un intervalle $\widetilde{I_{0,g}} \subset I_0$ tel que pour tout $t \in \widetilde{I_{0,g}}$ on ait $a_1 b_{N_g}\Delta(t) \leq \frac{1}{4}$, où $\Delta(\cdot)$ est la fonction de (H2).

Lemme 3. *On a pour tous $t \in \widetilde{I_{0,g}}$, $z \in \mathcal{D}_{\kappa,\rho,r,\mathcal{B}}$ et $h \in \mathcal{B}$:*

$$\|h\|_{\mathcal{B}} \leq 2\left[a_1 b_{N_g}\alpha + a_1 a(\frac{\kappa_1}{\kappa})^{N_g} + a_2\right]\|(z-Q(t))h\|_{\mathcal{B}}.$$

Preuve du lemme 3. En appliquant successivement le lemme 2 avec $g = h$, le lemme 1 avec $f = (z-Q)h$, et enfin les inégalités suivantes (cf. (9), (H2) et (6))

$$\begin{aligned}
\|(z-Q)h\|_{\mathcal{B}} &\leq \|(Q(t)-Q)h\|_{\mathcal{B}} + \big\|\big(z-Q(t)\big)h\big\|_{\mathcal{B}} \leq 2c\|h\|_{\mathcal{B}} + \|(z-Q(t))h\|_{\mathcal{B}} \\
\|(z-Q)h\|_{\widetilde{\mathcal{B}}} &\leq \|(Q(t)-Q)h\|_{\widetilde{\mathcal{B}}} + \big\|\big(z-Q(t)\big)h\big\|_{\widetilde{\mathcal{B}}} \leq \Delta(t)\|h\|_{\mathcal{B}} + \alpha\,\|(z-Q(t))h\|_{\mathcal{B}}
\end{aligned}$$

on obtient

$$\begin{aligned}
\|h\|_{\mathcal{B}} &\leq a_1\|h\|_{\widetilde{\mathcal{B}}} + a_2\|(z-Q(t))h\|_{\mathcal{B}} \\
&\leq a_1\left[a(\frac{\kappa_1}{\kappa})^n\|(z-Q)h\|_{\mathcal{B}} + b_n\|(z-Q)h\|_{\widetilde{\mathcal{B}}}\right] + a_2\|(z-Q(t))h\|_{\mathcal{B}} \\
&\leq a_1\left[a(\frac{\kappa_1}{\kappa})^n\,2c + b_n\Delta(t)\right]\|h\|_{\mathcal{B}} + \left[a_1 b_n\alpha + a_1 a(\frac{\kappa_1}{\kappa})^n + a_2\right]\|(z-Q(t))h\|_{\mathcal{B}}.
\end{aligned}$$

Avec $n = N_g$ et en vertu des conditions imposées ci-dessus sur N_g et $\widetilde{I_{0,g}}$, ceci démontre le lemme 3. □

Montrons maintenant les deux lemmes 1 et 2.

Preuve du lemme 1. Soient $n \in I\!N$, $z \in \mathcal{D}_{\kappa,\rho,r,\mathcal{B}}$. Par l'égalité (10) appliquée à $R(z)f \in \mathcal{B}$ pour $t = 0$:

$$\|R(z)f\|_{\widetilde{\mathcal{B}}} \leq \|R(z)(z^{-1}Q)^n f\|_{\widetilde{\mathcal{B}}} + \|\frac{1}{z}\sum_{i=0}^{n-1}(z^{-1}Q)^i f\|_{\widetilde{\mathcal{B}}}.$$

Or, pour tout $g \in \mathcal{B}$, on a $\|R(z)g\|_{\widetilde{\mathcal{B}}} \leq \alpha\|R(z)g\|_{\mathcal{B}} \leq \alpha H\|g\|_{\mathcal{B}}$ par définition de H et α (cf. (8) et (6)), ce qui implique en appliquant cette dernière inégalité avec $g = (z^{-1}Q)^n f$, puis (H1) :

$$\begin{aligned}
\|R(z)f\|_{\widetilde{\mathcal{B}}} &\leq \alpha H\|(z^{-1}Q)^n f\|_{\mathcal{B}} + \|\frac{1}{z}\sum_{i=0}^{n-1}(z^{-1}Q)^i f\|_{\widetilde{\mathcal{B}}} \\
&\leq \alpha H\left[c_1(\frac{\kappa_1}{\kappa})^n\|f\|_{\mathcal{B}} + c_1(\frac{M}{\kappa})^n\|f\|_{\widetilde{\mathcal{B}}}\right] + \|\frac{1}{z}\sum_{i=0}^{n-1}(z^{-1}Q)^i f\|_{\widetilde{\mathcal{B}}},
\end{aligned}$$

ce qui termine la démonstration du lemme 1. □

Preuve du lemme 2. Soient $n \in I\!N$, $z \in \mathcal{D}_{\kappa,\rho,r,\mathcal{B}}$, et $t \in I_0$. De l'égalité (10), on déduit que l'on a pour tout $g \in \mathcal{B}$:

$$\begin{aligned} \|g\|_{\mathcal{B}} &\leq \|\big(z^{-1}Q(t)\big)^n g\|_{\mathcal{B}} + \|\frac{1}{z}\sum_{i=0}^{n-1}(z^{-1}Q(t))^i\ (z-Q(t))\ g\|_{\mathcal{B}} \\ &\leq \left[c_1(\frac{\kappa_1}{\kappa})^n\|g\|_{\mathcal{B}} + c_1(\frac{M}{\kappa})^n\|g\|_{\widetilde{\mathcal{B}}}\right] + \|\frac{1}{z}\sum_{i=0}^{n-1}(z^{-1}Q(t))^i\ (z-Q(t))\ g\|_{\mathcal{B}}, \end{aligned}$$

la seconde inégalité découlant de (H1). Alors, en vertu de la condition imposée à N_0,

$$\frac{1}{2}\|g\|_{\mathcal{B}} \leq c_1(\frac{M}{\kappa})^{N_0}\|g\|_{\widetilde{\mathcal{B}}} + \|\frac{1}{z}\sum_{i=0}^{N_0-1}(z^{-1}Q(t))^i\ (z-Q(t))\ g\|_{\mathcal{B}},$$

ce qui démontre le lemme 2. □

1)c) Inverse. Des points a) et b) ci-dessus, il vient que, pour $t \in \widetilde{I_0} := \widetilde{I_{0,d}} \cap \widetilde{I_{0,g}}$ et $z \in \mathcal{D}_{\kappa,\rho,r,\mathcal{B}}$, l'opérateur $z - Q(t)$ est bijectif donc inversible par le théorème de l'application ouverte, ce qui termine la preuve de la proposition 1. □

2) Preuve de (4).

On rappelle que l'on a posé $R_t(z) = \big(z - Q(t)\big)^{-1}$. On vient de montrer que $R_t(z)$ est défini pour tous $t \in \widetilde{I_0}$ et $z \in \mathcal{D}_{\kappa,\rho,r,\mathcal{B}}$, il reste à majorer la norme $\|R_t(z)f\|_{\mathcal{B}}$. En appliquant le lemme 3 à $h = \big(z - Q(t)\big)^{-1}g$ (pour tout $g \in \mathcal{B}$), on obtient (4). □

3) Preuve de (5).

Lemme 4. *Pour tous $n \in I\!N$, $t \in \widetilde{I_0}$, $z \in \mathcal{D}_{\kappa,\rho,r,\mathcal{B}}$ et $g \in \mathcal{B}$, on a*

$$\|R(z)\big(Q(t) - Q\big)g\|_{\widetilde{\mathcal{B}}} \leq \left[2ac(\frac{\kappa_1}{\kappa})^n + b_n\Delta(t)\right]\|g\|_{\mathcal{B}}.$$

Preuve du lemme 4. Soient $n \in I\!N$, $g \in \mathcal{B}$. Par le lemme 1 appliqué à $\big(Q(t) - Q\big)g$, puis (9) et (H2) :

$$\begin{aligned} \|R(z)\big(Q(t) - Q\big)g\|_{\widetilde{\mathcal{B}}} &\leq a(\frac{\kappa_1}{\kappa})^n\|\big(Q(t) - Q\big)g\|_{\mathcal{B}} + b_n\|\big(Q(t) - Q\big)g\|_{\widetilde{\mathcal{B}}} \\ &\leq 2ac(\frac{\kappa_1}{\kappa})^n\|g\|_{\mathcal{B}} + b_n\Delta(t)\|g\|_{\mathcal{B}}. \end{aligned}$$

qui est exactement l'inégalité voulue du lemme 4. □

Nous pouvons maintenant démontrer (5). Soit $f \in \mathcal{B}$. Il est facile de voir que

$$R_t(z) - R(z) = R(z)\big(Q(t) - Q\big)R_t(z). \tag{14}$$

Par les lemmes 4 et 2 appliqués à $g = R_t(z)f$, on a

$$\|(R_t(z) - R(z))f\|_{\widetilde{\mathcal{B}}} \leq \left[2ac(\frac{\kappa_1}{\kappa})^n + b_n\Delta(t)\right]\left[a_1\|R_t(z)f\|_{\widetilde{\mathcal{B}}} + a_2\|f\|_{\mathcal{B}}\right].$$

Par ailleurs on a en utilisant les constantes H et α définies dans (8) et (6) :

$$\begin{aligned}\|R_t(z)f\|_{\widetilde{\mathcal{B}}} &\leq \|R(z)f\|_{\widetilde{\mathcal{B}}} + \|(R_t(z) - R(z))f\|_{\widetilde{\mathcal{B}}}\\ &\leq \alpha H\|f\|_{\mathcal{B}} + \|(R_t(z) - R(z))f\|_{\widetilde{\mathcal{B}}},\end{aligned}$$

ce qui implique :

$$\|(R_t(z)-R(z))f\|_{\widetilde{\mathcal{B}}} \leq \left[2ac(\frac{\kappa_1}{\kappa})^n+b_n\Delta(t)\right]\left[(a_1\alpha H+a_2)\|f\|_{\mathcal{B}}+a_1\|(R_t(z)-R(z))f\|_{\widetilde{\mathcal{B}}}\right]. \quad (15)$$

Soit $0 < \epsilon \leq \frac{1}{2}$. On fixe $N \in \mathbb{N}$ tel que $2ac(\frac{\kappa_1}{\kappa})^N \leq \frac{\epsilon}{2a_1}$, soit par exemple $N = \lceil \frac{\ln \frac{4a_1ac}{\epsilon}}{\ln \frac{\kappa}{\kappa_1}} \rceil$, puis I une restriction de $\widetilde{I_0}$ telle que pour tout $t \in I$ on ait $b_N\Delta(t) \leq \frac{\epsilon}{2a_1}$. Alors pour tout $t \in I$:

$$\frac{1}{2}\|(R_t(z) - R(z))f\|_{\widetilde{\mathcal{B}}} \leq \left[2ac(\frac{\kappa_1}{\kappa})^{N_2} + b_{N_2}\Delta(t)\right](a_1\alpha H + a_2)\|f\|_{\mathcal{B}} \leq \frac{\epsilon}{a_1}(a_1\alpha H + a_2)\|f\|_{\mathcal{B}}.$$

Cette dernière inégalité prouve la propriété (5). □

1.2 Vitesse de convergence dans le théorème de Keller-Liverani.

La vitesse de convergence dans (5) peut être explicitée en fonction de $\Delta(t)$, la fonction définie dans (H2).

Corollaire 1. *Sous l'hypothèse $\mathcal{C}_0(0)$ page 3 et et que Q est quasi-compact de rayon spectral essentiel tel que $r_{ess}(Q_{|\mathcal{B}}) \leq \kappa_0$, pour tous κ, ρ et r tels que $\widetilde{\kappa} < \kappa < r(Q)$ avec $\widetilde{\kappa}$ défini par*

$$\widetilde{\kappa} := \max(\kappa_0, \kappa_1),$$

$\rho > 0$ et $r > 0$, on définit la constante suivante (fonction de κ, ρ et r) :

$$D := 2C(a_1\alpha H + a_2), \quad (16)$$

avec $C := 2\alpha Hc_1c+\alpha Hc_1\frac{M}{\kappa} + \frac{d}{\kappa}$, $d := \sum_{i\geq 0}\left(\frac{\kappa}{\widetilde{c}}\right)^i < +\infty$ bien définie, et avec a_1 et a_2 définis en (13), α en (6), et H en (8).

Alors la constante

$$\eta := \frac{\ln \frac{\kappa}{\kappa_1}}{\ln \frac{\max(\widetilde{c},M)}{\kappa_1}} \quad (17)$$

est bien définie, vérifie $0 < \eta < 1$ et il existe une restriction $\widetilde{I_2} \subseteq \widetilde{I_0}$, avec $\widetilde{I_0}$ défini dans le théorème 1 tel que l'on ait que pour tout $t \in \widetilde{I_2}$:

$$\sup\left\{\|(z - Q(t))^{-1} - (z - Q)^{-1}\|_{\mathcal{B},\widetilde{\mathcal{B}}};\ z \in \mathcal{D}_{\kappa,\rho,r,\mathcal{B}}\right\} \leq D\Delta(t)^\eta. \quad (18)$$

Preuve du corollaire 1 . Pour démontrer ce corollaire, il suffit de majorer les termes fonction de n de l'inégalité (15).

Lemme 5. *La constante η vérifie $0 < \eta < 1$, et pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a*

$$b_n \leq (\alpha H c_1 \frac{M}{\kappa} + \frac{d}{\kappa}) \left(\frac{\max(\widetilde{c}, M)}{\kappa} \right)^{n-1}.$$

Preuve du lemme 5 . La constante $\widetilde{c}$ définie en (7) vérifie

$$\widetilde{c} > \kappa. \tag{19}$$

En effet, soit $\lambda \in \sigma(Q)$, $|\lambda| > \kappa$ (donc $|\lambda| > \kappa_0 \geq r_{ess}(Q_{|\mathcal{B}})$), alors il existe $\phi \neq 0 \in \mathcal{B}$ telle que $Q\phi = \lambda\phi$. Or $\|\phi\|_{\widetilde{\mathcal{B}}} \neq 0$ (sinon par (H1), on aurait $\|\phi\|_{\mathcal{B}} = \|\lambda^{-n} Q^n \phi\|_{\mathcal{B}} \leq c_1 \big(\frac{\kappa_1}{\lambda}\big)^n \|\phi\|_{\mathcal{B}} \to_n 0$, ce qui impliquerait que $\phi = 0$), et donc on a (19). Ceci implique que $0 < \eta < 1$ et $d := \sum_{i \geq 0} \left(\frac{\kappa}{\widetilde{c}}\right)^i < +\infty$, $\sum_{i=0}^{n-1} \left(\frac{\widetilde{c}}{\kappa}\right)^i \leq d \left(\frac{\widetilde{c}}{\kappa}\right)^{n-1}$. Ceci permet de majorer b_n, avec b_n définie en (12).
□

On considère une restriction $\widetilde{I}_1$ de $\widetilde{I}_0$ telle que l'on ait pour tout $t \in \widetilde{I}_1$: $0 < \Delta(t) < 1$. On pose l'application $n(\cdot)$ de $\widetilde{I}_1$ dans $\mathbb{N}$, définie comme suit :

$$n(t) := \left\lceil \frac{\ln \Delta(t)}{\ln \frac{\kappa_1}{\max(\widetilde{c}, M)}} \right\rceil. \tag{20}$$

Lemme 6. *On a pour tout $t \in \widetilde{I}_1$:*

$$\begin{aligned} (\frac{\kappa_1}{\kappa})^{n(t)} &\leq \Delta(t)^\eta && (21) \\ \textit{et} \quad \left(\frac{\max(\widetilde{c}, M)}{\kappa}\right)^{n(t)-1} &\leq \frac{1}{\Delta(t)^{1-\eta}}. && (22) \end{aligned}$$

Preuve du lemme 6 . Tout d'abord,

$$n(t) \geq \frac{\ln \Delta(t)}{\ln \frac{\kappa_1}{\max(\widetilde{c}, M)}} \quad \overset{\kappa_1 \leq \kappa}{\Rightarrow} \quad (\frac{\kappa_1}{\kappa})^{n(t)} \leq \exp\left(\frac{\ln \Delta(t)}{\ln \frac{\kappa_1}{\max(\widetilde{c}, M)}} \ln \frac{\kappa_1}{\kappa} \right)$$

ce qui montre (21) par définition (17) de η. Par ailleurs,

$$n(t) - 1 \leq \frac{\ln \Delta(t)}{\ln \frac{\kappa_1}{\max(\widetilde{c}, M)}} \quad \overset{\kappa < \widetilde{c} \text{ par (19)}}{\Rightarrow} \quad \left(\frac{\max(\widetilde{c}, M)}{\kappa}\right)^{n(t)-1} \leq \exp\left(\frac{\ln \Delta(t)}{\ln \frac{\kappa_1}{\max(\widetilde{c}, M)}} \ln \frac{\max(\widetilde{c}, M)}{\kappa} \right)$$

et donc $\left(\frac{\max(\widetilde{c}, M)}{\kappa}\right)^{n(t)-1} \leq \exp\left(-\ln \Delta(t) \frac{\ln \frac{\max(\widetilde{c},M)}{\kappa}}{\ln \frac{\max(\widetilde{c},M)}{\kappa_1}} \right) = \exp\big(-\ln \Delta(t)(1-\eta)\big)$, ce qui montre (22). □

Alors, avec la constante C définie par $C := 2\alpha H c_1 c + \alpha H c_1 \frac{M}{\kappa} + \frac{d}{\kappa}$, l'inégalité (15) devient avec $n = n(t)$, grâce à la majoration de $b_{n(t)}$ et au lemme 6 :

$$\begin{aligned}\|(R_t(z) - R(z))f\|_{\widetilde{\mathcal{B}}} &\leq \left[2\alpha H c_1 c \Delta(t)^\eta + \big(\alpha H c_1 \frac{M}{\kappa} + \frac{d}{\kappa}\big)\frac{1}{\Delta(t)^{1-\eta}}\Delta(t)\right] \\ &\quad \times \left[(a_1 \alpha H + a_2)\|f\|_{\mathcal{B}} + a_1 \|(R_t(z) - R(z))f\|_{\widetilde{\mathcal{B}}}\right] \\ &= C\Delta(t)^\eta \left[(a_1 \alpha H + a_2)\|f\|_{\mathcal{B}} + a_1 \|(R_t(z) - R(z))f\|_{\widetilde{\mathcal{B}}}\right].\end{aligned}$$

Soit $\widetilde{I_2}$ une restriction de $\widetilde{I_1}$ telle que pour tout $t \in \widetilde{I_2}$, $Ca_1\Delta(t)^\eta \leq \frac{1}{2}$, alors pour tout $t \in \widetilde{I_2}$:

$$\|(R_t(z) - R(z))f\|_{\widetilde{\mathcal{B}}} \leq 2C\Delta(t)^\eta (a_1 \alpha H + a_2)\|f\|_{\mathcal{B}},$$

ce qui donne (18) par définition de D. $\square$

1.3 Remarque.

Le théorème de Keller-Liverani peut s'appliquer non plus seulement en 0, mais plus généralement en un point quelconque t_0 de I_0. On définit tout d'abord

$$\mathcal{D}_{\kappa,\rho,r,\mathcal{B}}(t_0) := \big\{z \in \mathbb{C};\ \ |z| \geq \kappa,\ \ d\big(z, \sigma(Q(t_0)_{|\mathcal{B}})\big) \geq \rho,\ \ |z| \leq r\big\}. \tag{23}$$

Hypothèse $\mathcal{C}_{t_0}(0)$
$(Q(t); t \in I_0)$ est une famille d'opérateurs linéaires continus sur $\mathcal{B}$, et telle que $Q(t_0) \in \mathcal{L}(\widetilde{\mathcal{B}})$, qui vérifie :
(H1) Il existe des constantes $c_1 > 0$, $\kappa_1 > 0$ et $M > 0$ telles que, pour tout $t \in I_0$, pour tout $f \in \mathcal{B}$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$ on ait

$$\|Q(t)^n f\|_{\mathcal{B}} \leq c_1 \kappa_1^n \|f\|_{\mathcal{B}} + c_1 M^n \|f\|_{\widetilde{\mathcal{B}}}.$$

(H2) $\|Q(t) - Q(t_0)\|_{\mathcal{B},\widetilde{\mathcal{B}}} \to_{t \to t_0, t \in I_0} 0.$

Corollaire 2. *Sous l'hypothèse $\mathcal{C}_{t_0}(0)$, pour tous κ, ρ et r tels que $\kappa > \kappa_1$, $\rho > 0$ et $r > 0$, il existe un voisinage $\widetilde{I_0} \subseteq I_0$ de t_0 tel que les opérateurs $R_t(z) := (z - Q(t))^{-1}$ soient bien définis dans $\mathcal{L}(\mathcal{B})$ pour tous $z \in \mathcal{D}_{\kappa,\rho,r,\mathcal{B}}(t_0)$ et $t \in \widetilde{I_0}$, et l'on a de plus :*

$$\sup\{\|(z - Q(t))^{-1}\|_{\mathcal{B}};\ z \in \mathcal{D}_{\kappa,\rho,r,\mathcal{B}}(t_0),\ t \in \widetilde{I_0}\} < +\infty$$

$$\sup\{\|(z - Q(t))^{-1} - (z - Q(t_0))^{-1}\|_{\mathcal{B},\widetilde{\mathcal{B}}};\ z \in \mathcal{D}_{\kappa,\rho,r,\mathcal{B}}(t_0)\} \to_{t \to t_0, t \in \widetilde{I_0}} 0.$$

Remarque 3. *L'existence des opérateurs $R_t(z)$ pour tout z dans $\mathcal{D}_{\kappa,\rho,r,\mathcal{B}}(t_0)$ donnée par le corollaire ci-dessus implique directement l'inclusion dans $[\overline{D}(0,\kappa_1) \cup \sigma(Q(t_0)_{|\mathcal{B}})]$ des points d'accumulation (quand $t \to t_0$, $t \in I_0$) des valeurs spectrales $\sigma(Q(t)_{|\mathcal{B}})$.*

Il existe une application de ce corollaire utile pour vérifier la condition de non-arithméticité. On commence par énoncer des hypothèses nécessaires à la proposition ci-dessous. On définit ci-dessous l'hypothèse $\widetilde{\mathcal{C}}(0)$.

Hypothèse $\widetilde{\mathcal{C}}(0)$**.**
$(Q(t);\ t \in \mathbb{R})$ est une famille d'opérateurs linéaires continus sur $\mathcal{B}$ et $\widetilde{\mathcal{B}}$. De plus, il existe des fonctions $0 < \kappa_0 < 1$, $0 < \kappa_1 < 1$, $c_1 > 0$ et $M > 0$ définies sur $\mathbb{R}^*$ telles que $\forall t_0 \in \mathbb{R}^*$, il existe un voisinage $I_0(t_0)$ de t_0 tel que l'on ait :

(H0) $\forall t \in I_0(t_0)$, $Q(t)$ est quasi-compact tel que $r_{ess}(Q(t)_{|\mathcal{B}}) \leq \kappa_0(t_0)$.
(H1) $\forall t \in I_0(t_0)$, $f \in \mathcal{B}$ et $n \in \mathbb{N}$, on a

$$\|Q(t)^n f\|_{\mathcal{B}} \leq c_1(t_0)\kappa_1(t_0)^n \|f\|_{\mathcal{B}} + c_1(t_0)M(t_0)^n \|f\|_{\widetilde{\mathcal{B}}}.$$

(H2) $\|Q(t) - Q(t_0)\|_{\mathcal{B},\widetilde{\mathcal{B}}} \to_{t\to t_0,\ t\in I_0(t_0)} 0$.

Proposition 2. *Sous l'hypothèse $\widetilde{\mathcal{C}}(0)$, et si $\forall t \neq 0$, $r\left(Q(t)_{|\mathcal{B}}\right) < 1$, alors on a pour tout compact $K_0 \subset \mathbb{R}^*$*

$$r_{K_0} := \sup\left\{ r\left(Q(t)_{|\mathcal{B}}\right);\ t \in K_0 \right\} < 1. \tag{24}$$

De plus, il existe $\rho_0 \in [0,1[$ tel que

$$\forall \rho \in]\rho_0, 1[, \quad \sup\left\{ \|\left(z - Q(t)\right)^{-1}\|_{\mathcal{B}};\ t \in K_0,\ |z| = \rho \right\} < +\infty. \tag{25}$$

Preuve de la proposition 2. La preuve a été écrite dans [HP09] (lemme 12.3.). La proposition se démontre à l'aide du théorème de Keller-Liverani. On considère un compact K_0 dans $\mathbb{R}^*$. Montrons tout d'abord par l'absurde que (24) est vérifié : on suppose que $r_{K_0} \geq 1$. Par hypothèse, $r_{K_0} = 1$. Il existe une suite $(\tau_k)_k$ de K_0 telle que l'on ait $\lim_k r(Q(\tau_k)_{|\mathcal{B}}) = 1$. Par compacité, on peut supposer que $(\tau_k)_k$ est convergente. Soit $\tau = \lim_k \tau_k$. Comme $\tau \in K_0$, $\tau \neq 0$. On peut aussi supposer que pour tout $k \geq 1$, $\tau_k \in I_0(\tau)$ et $r(Q(\tau_k)_{|\mathcal{B}}) > \kappa_0(\tau)$. Pour tout $k \geq 1$, il existe λ_k une valeur spectrale de $Q(\tau_k)$ telle que $|\lambda_k| = r(Q(\tau_k)_{|\mathcal{B}})$, $\lambda_k \in \overline{D}(0,1)$. Par compacité, on peut supposer que $(\lambda_k)_k$ est convergente. Soit $\lambda = \lim_k \lambda_k$, $|\lambda| = 1$. De la remarque 3 précédente, on a que $\lambda \in [\overline{D}(0, \kappa_1(\tau)) \cup \sigma(Q(\tau)_{|\mathcal{B}})]$, avec $\kappa_1(\tau) < 1$, et donc $\lambda \in \sigma(Q(\tau)_{|\mathcal{B}})$. Or par hypothèse, $r(Q(\tau)_{|\mathcal{B}}) < 1$, ce qui termine de montrer la contradiction et donc (24).
Soit $\rho_0 := r_{K_0} < 1$ par ce qui précède, et soit $\rho \in]\rho_0, 1[$. Comme $\forall t \in K_0$, $r(Q(t)_{|\mathcal{B}}) \leq r_{K_0} < \rho$, et comme K_0 est compact, par le théorème de Keller-Liverani (corollaire 2 précédent) et la propriété de Borel-Lebesgue, on a $\sup\{\|(z - Q(t))^{-1}\|_{\mathcal{B}};\ t \in K_0,\ |z| = \rho\} < +\infty$, ce qui termine de montrer (25). □

2 Forte ergodicité.

On s'intéresse par la suite au cas particulier de la forte ergodicité définie ci-dessous :
(ERG sur $\mathcal{B}$) Il existe Π un projecteur non nul de rang fini et des constantes $c_0 > 0$ et $0 < \kappa_0 < 1$ tels que pour tout $n \in \mathbb{N}$ on ait $\|Q^n - \Pi\|_{\mathcal{B}} \leq c_0\kappa_0^n$.

Remarque 4. *L'hypothèse (ERG sur $\mathcal{B}$) est équivalente à l'existence d'un projecteur de rang fini Π tel que $\|Q^n - \Pi\|_{\mathcal{B}} \to_{n\to\infty} 0$.*

En effet, l'implication directe est évidente. Supposons que $\|Q^n - \Pi\|_{\mathcal{B}} \to_{n\to\infty} 0$, et soit $f \in \mathcal{B}$. Alors $Q \circ (Q^n f) \to Q \circ (\Pi f)$ quand $n \to +\infty$ par continuité de Q, et donc $Q \circ (\Pi f) = \Pi f$ par unicité de la limite. De même, $Q^n \circ (Qf) \to \Pi \circ (Qf)$, et donc $\Pi \circ (Qf) = \Pi f$. Donc

$$Q \circ \Pi = \Pi \quad \text{et} \quad \Pi \circ Q = \Pi. \tag{26}$$

On suppose que $\|Q^n - \Pi\|_{\mathcal{B}} \to_{n\to\infty} 0$. Soit $n_0 \in I\!\!N$ tel que $\rho := \|Q^{n_0} - \Pi\|_{\mathcal{B}} < 1$. Pour tout $n \in I\!\!N$, on écrit $n = n_0 p + b \in I\!\!N$ avec $0 \leq b < n_0$ et $p \in I\!\!N$. Alors, par (26), $\|Q^n - \Pi\|_{\mathcal{B}} = \|Q^b (Q^{n_0})^p - \Pi\|_{\mathcal{B}} = \|Q^b \left((Q^{n_0})^p - \Pi\right)\|_{\mathcal{B}} = \|Q^b \left(Q^{n_0} - \Pi\right)^p\|_{\mathcal{B}} \leq \rho^p \leq \frac{1}{\rho}\left(\rho^{\frac{1}{n_0}}\right)^n$. On pose donc $c_0 := \frac{1}{\rho}$ et $\kappa_0 := \rho^{\frac{1}{n_0}}$, ce qui donne bien $\|Q^n - \Pi\|_{\mathcal{B}} \leq c_0 \kappa_0^n$.

Cette hypothèse (ERG sur $\mathcal{B}$) implique la quasi-compacité de Q, de rayon spectral essentiel $r_{ess}(Q_{|\mathcal{B}}) \leq \kappa_0$, de rayon spectral $r(Q_{|\mathcal{B}}) = 1$ et $\min\left\{\lambda \in \sigma(Q_{|\mathcal{B}}); |\lambda| > \kappa_0\right\} = 1$, comme le montre la proposition suivante (on rappelle que $\dim(\Pi(\mathcal{B})) < \infty$ par hypothèse).

Proposition 3. *Sous l'hypothèse (ERG sur $\mathcal{B}$), $\sigma(Q_{|\mathcal{B}}) \subset [\overline{D}(0, \kappa_0) \cup \{1\}]$.*

Preuve de la proposition 3. Comme Π est un projecteur, on a : $\mathcal{B} = \Pi(\mathcal{B}) \oplus Ker(\Pi)$. Or, par (26), $\Pi(\mathcal{B})$ est stable par Q et $Ker(\Pi)$ aussi. On en déduit facilement que

$$\sigma(Q_{|\mathcal{B}}) \subset \left[\sigma\left(Q_{|\Pi(\mathcal{B})}\right) \cup \sigma\left(Q_{|Ker(\Pi)}\right)\right].$$

Or on a $\sigma(Q_{|Ker(\Pi)}) \subset \overline{D}(0, \kappa_0)$. En effet : $r(Q_{|Ker(\Pi)}) = \lim_n \|\left(Q_{|Ker(\Pi)}\right)^n\|_{\mathcal{B}}^{\frac{1}{n}} \leq \kappa_0$ d'après l'hypothèse 3. De plus, l'égalité $Q \circ (\Pi f) = \Pi f$ donne $Q_{|\Pi(\mathcal{B})} = Id_{|\Pi(\mathcal{B})}$ avec $\dim(\Pi(\mathcal{B})) < +\infty$, d'où $\sigma(Q_{|\Pi(\mathcal{B})}) = \{1\}$. □

On applique alors le théorème de Keller-Liverani pour faire la remarque suivante. Sous $\mathcal{C}_0(0)$ et sous (ERG sur $\mathcal{B}$), pour tout $\kappa > \widetilde{\kappa}$, avec $\widetilde{\kappa} := \max\{\kappa_0, \kappa_1\}$, et pour tout $\rho > 0$, il existe un voisinage $\widetilde{I_0} \subseteq I_0$ de 0 tel que le spectre $\sigma(Q(t)_{|\mathcal{B}})$ de $Q(t)$ pour $t \in \widetilde{I_0}$ soit contenu dans $[D(0, \kappa) \cup D(1, \rho)]$. On ne considère donc désormais plus $\mathcal{D}_{\kappa,\rho,r,\mathcal{B}}$ mais $\mathcal{D}_{\kappa,\rho,r}$ défini comme le complémentaire de $[D(0, \kappa) \cup D(1, \rho)]$ dans $\overline{D}(0, r)$. Plus précisément, pour tous κ, ρ et r tels que $\kappa > \widetilde{\kappa}$, $\rho > 0$ et $r > 0$, on pose

$$\mathcal{D}_{\kappa,\rho,r} := \{z \in \mathbb{C} \; ; \; |z| \geq \kappa, \; |z-1| \geq \rho, \; |z| \leq r\}. \tag{27}$$

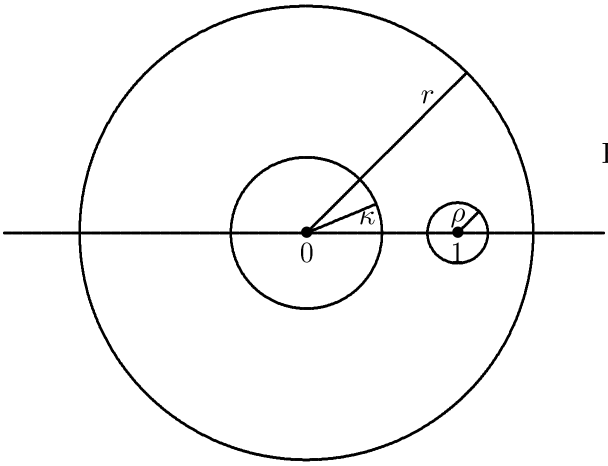
Par ailleurs pour tous κ, ρ et r tels que $\kappa > \widetilde{\kappa}$, $\rho > 0$ et $r > 0$, on définit $\Gamma_1 = \Gamma_1(\rho)$ le cercle orienté centré en $z = 1$ de rayon ρ, $\Gamma_0 = \Gamma_0(\kappa)$ le cercle orienté centré en $z = 0$ de rayon κ, et $\Gamma = \Gamma(r)$ le cercle orienté centré en $z = 0$ de rayon r.

On impose

- $\kappa < 1$ (et donc $\kappa_0 < 1$ et $\kappa_1 < 1$) et $\rho < 1 - \kappa$ de telle sorte que les deux cercles Γ_0 et Γ_1 aient une intersection vide

– et $r \geq 1+\rho$ de telle sorte que $(\Gamma_0 \cup \Gamma_1) \subset \overline{D}(0,r)$.

On représente ci-dessous $\mathcal{D}_{\kappa,\rho,r}$ sous ces conditions, ainsi que Γ_0, Γ_1 et Γ.



Représentation de $\mathcal{D}_{\kappa,\rho,r}$.

Hypothèse $\widetilde{\mathcal{C}_0}(0)$

$(Q(t); t \in I_0)$ est une famille d'opérateurs linéaires continus sur $\mathcal{B}$ (c'est-à-dire $\forall t \in I_0, Q(t) \in \mathcal{L}(\mathcal{B})$) et telle que $Q(0) \in \mathcal{L}(\widetilde{\mathcal{B}})$, qui vérifie :

(ERG sur $\mathcal{B}$) Il existe Π un projecteur non nul de rang fini et des constantes $c_0 > 0$ et $0 < \kappa_0 < 1$ tels que pour tout $n \in \mathbb{N}$ on ait $\|Q^n - \Pi\|_{\mathcal{B}} \leq c_0 \kappa_0^n$.

(H1) Il existe des constantes $c_1 > 0$, $0 < \kappa_1 < 1$ et $M > 0$ telles que, pour tous $t \in I_0$, $f \in \mathcal{B}$ et $n \in \mathbb{N}$ on ait

$$\|Q(t)^n f\|_{\mathcal{B}} \leq c_1 \kappa_1^n \|f\|_{\mathcal{B}} + c_1 M^n \|f\|_{\widetilde{\mathcal{B}}}.$$

(H2) $\Delta(t) := \|Q(t) - Q\|_{\mathcal{B},\widetilde{\mathcal{B}}} \to_{t \to 0, t \in I_0} 0.$

Corollaire 3. *Sous l'hypothèse $\widetilde{\mathcal{C}_0}(0)$ précédente, pour tous κ, ρ et r tels que*

$$\widetilde{\kappa} < \kappa < 1, \qquad 0 < \rho < 1 - \kappa, \qquad \textit{et} \quad r \geq 1 + \rho, \tag{28}$$

avec $\widetilde{\kappa}$ défini par

$$\widetilde{\kappa} := \max\{\kappa_0, \kappa_1\}, \tag{29}$$

il existe un voisinage $\widetilde{I_0} \subseteq I_0$ de 0 tel que les opérateurs $R_t(z) := (z - Q(t))^{-1}$ soient bien définis dans $\mathcal{L}(\mathcal{B})$ pour tous $z \in \mathcal{D}_{\kappa,\rho,r}$ et $t \in \widetilde{I_0}$ et en particulier $R_t(z) := (z - Q(t))^{-1}$ sont bien définis sur Γ_0, Γ_1 et Γ, et l'on a de plus :

$$\sup\{\|(z - Q(t))^{-1}\|_{\mathcal{B}};\ z \in \mathcal{D}_{\kappa,\rho,r},\ t \in \widetilde{I_0}\} < +\infty \tag{30}$$

$$\sup\{\|(z - Q(t))^{-1} - (z - Q)^{-1}\|_{\mathcal{B},\widetilde{\mathcal{B}}};\ z \in \mathcal{D}_{\kappa,\rho,r}\} \to_{t \to 0, t \in \widetilde{I_0}} 0. \tag{31}$$

Dans ce qui suit, on suppose désormais que l'hypothèse $\widetilde{\mathcal{C}_0}(0)$ est vérifiée. On se fixe κ, ρ et r tels que (28) soit vérifiée, et on note $\widetilde{I_0}$ l'intervalle réel donné par le corollaire 3. Alors la résolvante $R_t(z)$ est bien définie pour tous $t \in \widetilde{I_0}$ et $z \in \Gamma_0 \cup \Gamma_1 \cup \Gamma$.

2.1 Définition de projecteurs et quelques lemmes.

Soient les opérateurs définis sur $\mathcal{B}$ pour tout $t \in \widetilde{I_0}$ et pour $i = 0, 1$ par :

$$\Pi_i(t) = \frac{1}{2i\pi} \int_{\Gamma_i} R_t(z)\, dz. \tag{32}$$

Ces opérateurs sont des projecteurs qui vérifient pour tout $t \in \widetilde{I_0}$ sur $\mathcal{B}$:

$$\Pi_0(t) + \Pi_1(t) = Id \quad \text{et} \quad \Pi_0(t)\Pi_1(t) = \Pi_1(t)\Pi_0(t) = 0. \tag{33}$$

L'égalité (33) se montre facilement. Tout d'abord par analyticité de $z \mapsto R_t(z) \in \mathcal{L}(\mathcal{B})$ avec z tel que $|z| \notin \sigma(Q(t)_{|\mathcal{B}})$, on a $\Pi_0(t) + \Pi_1(t) = \frac{1}{2i\pi} \int_\Gamma R_t(z)\, dz$. De plus, on a $\Pi_0(t) + \Pi_1(t) = \frac{1}{2i\pi} \int_\Gamma \left(\sum_{k\geq 0} z^{-k-1} Q(t)^k \right) dz$. Et par convergence uniforme de la série intégrée, $\Pi_0(t) + \Pi_1(t) = \frac{1}{2i\pi} \sum_{k\geq 0} Q(t)^k \left(\int_\Gamma z^{-k-1}\, dz \right)$, ce qui démontre la première égalité de (33) par la formule intégrale de Cauchy. De plus, pour $i, j \in \{0, 1\}$, on a grâce à l'égalité résolvante $R_t(z)R_t(z') = \dfrac{R_t(z) - R_t(z')}{z' - z}$:

$$\begin{aligned}
\Pi_i(t)\Pi_j(t) &= \left(\frac{1}{2i\pi} \int_{\Gamma_i} R_t(z)\, dz \right) \left(\frac{1}{2i\pi} \int_{\Gamma_j} R_t(z')\, dz' \right) \\
&= \left(\frac{1}{2i\pi}\right)^2 \int_{\Gamma_i} \int_{\Gamma_j} R_t(z)R_t(z')\, dzdz' \\
&= \left(\frac{1}{2i\pi}\right)^2 \int_{\Gamma_i} \int_{\Gamma_j} \frac{R_t(z)}{z' - z}\, dzdz' + \left(\frac{1}{2i\pi}\right)^2 \int_{\Gamma_i} \int_{\Gamma_j} \frac{R_t(z')}{z - z'}\, dzdz' \\
&= \left(\frac{1}{2i\pi}\right)^2 \int_{\Gamma_i} R_t(z) \left(\int_{\Gamma_j} \frac{1}{z' - z} dz' \right) dz + \left(\frac{1}{2i\pi}\right)^2 \int_{\Gamma_j} R_t(z') \left(\int_{\Gamma_i} \frac{1}{z - z'} dz \right) dz'
\end{aligned}$$

et l'on obtient les égalités souhaitées avec la formule intégrale de Cauchy.

Le projecteur que l'on vient de définir vérifie $\Pi_1(0) = \Pi$, avec Π le projecteur défini dans (ERG), comme le montre le lemme suivant.

Lemme 7. *On a* $\Pi_1(0) = \Pi$.

Preuve du lemme 7. $\Pi_1(0)$ est un projecteur tel que $\Pi_1(0) \circ \Pi = \Pi \circ \Pi_1(0) = \Pi \frac{1}{2i\pi} \int_{\Gamma_1} R(z)\, dz$ par définition de $\Pi_1(0)$. Or $R(z) = (z-1)^{-1}$ sur $\Pi(\mathcal{B})$ par (26), donc $\Pi \circ \Pi_1(0) = \Pi \frac{1}{2i\pi} \int_{\Gamma_1} (z-1)^{-1}\, dz = \Pi$, ce qui implique que $\Pi(\mathcal{B}) = \Pi_1(0)(\mathcal{B})$. De plus, $Ker(\Pi) \subset Ker(\Pi_1(0))$. En effet, $Ker(\Pi)$ est stable par Q et $\sigma(Q_{|Ker(\Pi)}) \leq \kappa_0$ par (ERG), ce qui implique par définition de Γ_1 que pour tout $f \in Ker(\Pi)$:

$$\begin{aligned}
\Pi_1(0)f &= \frac{1}{2i\pi} \int_{\Gamma_1} \left(\sum_{n\geq 0} z^{-n-1} Q^n f \right) dz \\
&= \frac{1}{2i\pi} \sum_{n\geq 0} Q^n f \left(\int_{\Gamma_1} z^{-n-1}\, dz \right) \; = \; 0 \text{ par la formule intégrale de Cauchy.}
\end{aligned}$$

Donc $Ker(\Pi) \subset Ker(\Pi_1(0))$, $Ker(\Pi) = Ker(\Pi_1(0))$, ce qui termine de montrer le lemme. □

On énonce maintenant le lemme classique suivant qui donne une expression intégrale de $Q(t)^n$.

Lemme 8. *Pour tout $t \in \widetilde{I_0}$, et $n \geq 1$, on a :*

$$\begin{aligned} Q(t)^n \Pi_0(t) &= \frac{1}{2i\pi} \int_{\Gamma_0} z^n R_t(z) dz &(34)\\ \text{et} \quad Q(t)^n \Pi_1(t) &= \frac{1}{2i\pi} \int_{\Gamma_1} z^n R_t(z) dz. &(35)\end{aligned}$$

Preuve du lemme 8. On ne montre que (34), (35) se prouvant avec les mêmes arguments. Par analyticité de $z \mapsto R_t(z)$ pour $z \in \Gamma$, on a $\frac{1}{2i\pi}\int_\Gamma z^n\, R_t(z)\, dz = \frac{1}{2i\pi}\int_\Gamma z^n \left(\sum_{i\geq 0} z^{-i-1} Q(t)^i\right) dz = \sum_{i\geq 0} Q(t)^i \left(\frac{1}{2i\pi}\int_\Gamma z^{n-i-1} dz\right) = Q(t)^n$. On peut alors exprimer $Q(t)^n \Pi_0(t)$ sous forme intégrale, à l'aide de l'égalité résolvante :

$$\begin{aligned} Q(t)^n \Pi_0(t) &= \left(\frac{1}{2i\pi}\int_\Gamma z^n\, R_t(z)\, dz\right)\left(\frac{1}{2i\pi}\int_{\Gamma_0} R_t(z')\, dz'\right)\\ &= (\frac{1}{2i\pi})^2 \int_\Gamma \int_{\Gamma_0} z^n\, R_t(z) R_t(z')\, dz dz'\\ &= (\frac{1}{2i\pi})^2 \int_\Gamma \int_{\Gamma_0} z^n\, \frac{R_t(z)}{z'-z}\, dz dz' + (\frac{1}{2i\pi})^2 \int_\Gamma \int_{\Gamma_0} z^n\, \frac{R_t(z')}{z-z'}\, dz dz'\\ &= (\frac{1}{2i\pi})^2 \int_\Gamma z^n R_t(z) (\int_{\Gamma_0} \frac{1}{z'-z}\, dz') dz + (\frac{1}{2i\pi})^2 \int_{\Gamma_0} R_t(z') (\int_\Gamma \frac{z^n}{z-z'}\, dz) dz'\\ &= 0 + \frac{1}{2i\pi}\int_{\Gamma_0} z'^n R_t(z') dz' \end{aligned}$$

par la formule intégrale de Cauchy, ce qui termine la démonstration de (34). □

2.2 Rang des projecteurs.

On s'intéresse maintenant à l'étude du rang des projecteurs perturbés $\Pi_1(t)$. Dans le paragraphe 2.3, on étudiera plus particulièrement le cas où Π est de rang égal à 1.

Proposition 4. *Il existe un voisinage réel de 0 noté $I_{00} \subset \widetilde{I_0}$ [2] tel que, pour tout $t \in I_{00}$, $\Pi_1(t)$ soit de même rang que celui du projecteur Π.*

Preuve de la proposition 4. Soit $t \in \widetilde{I_0}$ fixé, et notons $n := rg(\Pi)$ et $m := rg(\Pi_1(t))$. Montrons tout d'abord que $rg(\Pi_1(t)) \leq n$. Si l'on considère une famille $(f_i)_{i=1..n+1}$ de $n+1$ éléments de $\Pi_1(t)(\mathcal{B})$, alors il existe des constantes $(a_i)_{i=1..n+1}$ telles que $\sum_{i=1}^{n+1} a_i \Pi(f_i) = 0$. On note $h := \sum_{i=1}^{n+1} a_i f_i$, ce qui implique que $\Pi_1(t)h = h$ (car $f_i \in \Pi_1(t)(\mathcal{B})$ pour tout $i = 1..n+1$ et $\Pi_1(t)$ projecteur) et $\Pi h = 0$. On a donc

$$\|h\|_{\widetilde{\mathcal{B}}} = \|\Pi_1(t)h - \Pi h\|_{\widetilde{\mathcal{B}}} \leq \|\Pi_1(t) - \Pi_1(0)\|_{\mathcal{B},\widetilde{\mathcal{B}}} \|h\|_{\mathcal{B}}. \tag{36}$$

2. On rappelle que $\widetilde{I_0}$ est défini dans le corollaire 3.

Par ailleurs, on utilise le lemme suivant d'équivalence des normes sur l'espace $\Pi_1(t)(\mathcal{B})$. Les opérateurs $Q(t)$ et $\Pi_1(t)$ commutent, donc l'espace

$$\mathcal{B}_t := \Pi_1(t)(\mathcal{B}) \subset \mathcal{B} \tag{37}$$

est stable par $Q(t)$: on peut considérer l'opérateur $Q(t)_{|\mathcal{B}_t} := Q(t)\Pi_1(t)$.

Lemme 9.
i) Pour tout $t \in \widetilde{I_0}$, le spectre $\sigma(Q(t)_{|\mathcal{B}_t})$ est contenu dans le disque $D(1,\rho)$.
j) La norme $\|\cdot\|_{\mathcal{B}}$ est dominée sur $\mathcal{B}_t$ par $\|\cdot\|_{\widetilde{\mathcal{B}}}$ uniformément en $t \in \widetilde{I_0}$, c'est-à-dire

$$\exists D \in I\!R \quad \textit{tel que} \quad \forall t \in \widetilde{I_0}, \quad \forall f \in \mathcal{B}_t, \quad \|f\|_{\mathcal{B}} \leq D\|f\|_{\widetilde{\mathcal{B}}}. \tag{38}$$

Comme $h \in \Pi_1(t)(\mathcal{B})$, il existe $D > 0$ indépendante de t tel que

$$\|h\|_{\mathcal{B}} \leq D\|h\|_{\widetilde{\mathcal{B}}}. \tag{39}$$

Ainsi, par (36) et (39), on a

$$\|h\|_{\widetilde{\mathcal{B}}} \leq \|\Pi_1(t) - \Pi_1(0)\|_{\mathcal{B},\widetilde{\mathcal{B}}}\|h\|_{\mathcal{B}} \leq D\ \|\Pi_1(t) - \Pi_1(0)\|_{\mathcal{B},\widetilde{\mathcal{B}}}\ \|h\|_{\widetilde{\mathcal{B}}}.$$

D'après (31), il existe un voisinage réel de 0 noté $I_{00} \subset \widetilde{I_0}$ tel que pour tout $t \in I_{00}$ on ait $D\ \|\Pi_1(t) - \Pi_1(0)\|_{\mathcal{B},\widetilde{\mathcal{B}}} \leq \frac{1}{2}$ et donc $\|h\|_{\widetilde{\mathcal{B}}} = 0$, $\|h\|_{\mathcal{B}} = 0$ par (39) et $h = 0$, ce qui implique que le rang du projecteur vérifie $rg(\Pi_1(t)) < n+1$. Pour montrer que $rg(\Pi) \leq m$, on procède de la même façon en considérant cette fois une famille $(f_i)_{i=1..m+1}$ de $m+1$ éléments de $\Pi(\mathcal{B})$.
□

Preuve du lemme 9.
Montrons tout d'abord $(i) \Rightarrow (j)$. Le spectre $\sigma(Q(t)_{|\mathcal{B}_t})$ est contenu dans $D(1,\rho) \subset \{z \in \mathbb{C}\,; |z| > 1-\rho\}$ par (i). Il implique en particulier que pour tout $t \in \widetilde{I_0}$, $Q(t)_{|\mathcal{B}_t}$ est inversible (car $0 \notin D(1,\rho)$), et donc on peut montrer par l'égalité (10) que pour tous $n \in I\!N$, $t \in \widetilde{I_0}$:

$$Q(t)^{-n}_{|\mathcal{B}_t} = \frac{1}{2i\pi}\int_{\Gamma_1} z^{-n}\ R_t(z)\ dz$$

(on rappelle que Γ_1 est le cercle orienté centré en $z = 1$ de rayon ρ). Donc par (30), il existe une constante A telle que pour tous $n \in I\!N$, $t \in \widetilde{I_0}$, $\|Q(t)^{-n}_{|\mathcal{B}_t}\|_{\mathcal{B}} \leq \frac{A}{(1-\rho)^n}$. Ainsi pour tous $f \in \mathcal{B}_t$ et $n \in I\!N$, on a par l'inégalité de Doeblin-Fortet (H1) et par la stabilité de l'espace $\mathcal{B}_t$ par $Q(t)$:

$$\|f\|_{\mathcal{B}} = \|Q(t)^{-n}Q(t)^n f\|_{\mathcal{B}} \leq \frac{A}{(1-\rho)^n}[c_1\kappa_1^n\|f\|_{\mathcal{B}} + c_1M^n\|f\|_{\widetilde{\mathcal{B}}}].$$

Rappelons que ρ a été défini tel que $0 < \rho < 1-\kappa$, et donc $\kappa_1 < \kappa < 1-\rho$. On définit l'entier N tel que $Ac_1(\frac{\kappa_1}{1-\rho})^N \leq \frac{1}{2}$, soit par exemple $N = \left\lceil \frac{\ln(2Ac_1)}{\ln\frac{1-\rho}{\kappa_1}} \right\rceil$, et la constante suivante D par :

$$D := 2Ac_1(\frac{M}{1-\rho})^N, \tag{40}$$

ce qui termine la démonstration de (j).

Montrons maintenant (i). Soit $A(\lambda) := \frac{1}{2i\pi}\int_{\Gamma_1} R_t(z)(\lambda - z)^{-1}\,dz$, avec $\lambda \in \mathbb{C}$, $\lambda \notin \Gamma_1$. Comme $\big(\lambda - Q(t)\big)\Pi_1(t) = \frac{1}{2i\pi}\int_{\Gamma_1} R_t(z')(\lambda - z')\,dz'$ en utilisant la définition de $\Pi_1(t)$ et (35), on a :

$$\begin{aligned} A(\lambda)\big(\lambda - Q(t)\big)\Pi_1(t) &= (\frac{1}{2i\pi})^2 \int_{\Gamma_1} R_t(z)(\lambda - z)^{-1}\,dz \int_{\Gamma_1} R_t(z')(\lambda - z')\,dz' \\ &= (\frac{1}{2i\pi})^2 \int_{\Gamma_2} R_t(z)(\lambda - z)^{-1}\,dz \int_{\Gamma_1} R_t(z')(\lambda - z')\,dz' \end{aligned}$$

avec Γ_2 le cercle orienté centré en $z = 1$ de rayon $\rho+\epsilon$ pour tout $\epsilon > 0$ tel que $D(0,\kappa)\cap\Gamma_2 = \phi$ (ce qui est possible car on a supposé $\kappa < 1-\rho$). On considère alors λ tel que $|\lambda - 1| \geq \rho + 2\epsilon$. On a par l'égalité résolvante :

$$\begin{aligned} A(\lambda)\Big(\lambda - Q(t)\Big)\Pi_1(t) &= (\frac{1}{2i\pi})^2 \int_{\Gamma_1}\int_{\Gamma_2} R_t(z)R_t(z')\frac{\lambda - z'}{\lambda - z}\,dz'dz \\ &= (\frac{1}{2i\pi})^2 \int_{\Gamma_1}\int_{\Gamma_2} \frac{R_t(z') - R_t(z)}{z - z'} f(z')g(z)\,dz'dz \end{aligned}$$

avec $f(z') = \lambda - z'$ analytique sur $\overline{D}(1,\rho)$ et $g(z) = (\lambda - z)^{-1}$ analytique sur $\overline{D}(1,\rho+\epsilon)$ par hypothèse sur λ. D'où en développant :

$$\begin{aligned} A(\lambda)\big(\lambda - Q(t)\big)\Pi_1(t) &= (\frac{1}{2i\pi})^2 \int_{\Gamma_1} R_t(z')f(z')\Big(\int_{\Gamma_2} \frac{g(z)}{z - z'}\,dz\Big)dz' \\ &\quad +(\frac{1}{2i\pi})^2 \int_{\Gamma_2} R_t(z)g(z)\Big(\int_{\Gamma_1} \frac{f(z')}{z' - z}\,dz'\Big)dz \\ &= \frac{1}{2i\pi}\int_{\Gamma_1} R_t(z')f(z')g(z')dz' + 0 \\ &= \Pi_1(t) \quad = \quad \big(\lambda - Q(t)\big)\Pi_1(t)\circ A(\lambda) \qquad \text{par commutation} \end{aligned}$$

ce qui implique que $\lambda - Q(t)$ est inversible sur $\Pi_1(\mathcal{B})$ pour λ tel que $|\lambda - 1| \geq \rho + 2\epsilon$, $\forall\epsilon > 0$ suffisamment petit. Donc $\sigma(Q(t)_{|\mathcal{B}_t}) \subset [\sigma(Q(t)_{|\mathcal{B}}) \cap \overline{D}(1,\rho)] = D(1,\rho)$. □

2.3 Cas particulier : $rg(\Pi) = 1$.

On considère maintenant l'hypothèse (ERG sur $\mathcal{B}$) dans le cas où le projecteur Π vérifie $\Pi\mathbf{1} = \mathbf{1}$ et $rg(\Pi) = 1$, avec $\mathbf{1} \in \mathcal{B}$. Par la proposition 4, il existe I_{00} tel que pour tout $t \in I_{00}$, $rg(\Pi_1(t)) = 1$,

$$\forall t \in I_{00}, \qquad \Pi_1(t)(\mathcal{B}) = \mathbb{C}\cdot(\Pi_1(t)\mathbf{1}).$$

Or $Q(t)$ et $\Pi_1(t)$ commutent, donc il existe une application $\lambda(\cdot)$ de I_{00} dans $\mathbb{C}$ telle que $Q(t)\Pi_1(t)\mathbf{1} = \lambda(t)\Pi_1(t)\mathbf{1}$, et par linéarité de $Q(t)$:

$$\forall t \in I_{00} \qquad Q(t)\Pi_1(t) = \lambda(t)\Pi_1(t) \tag{41}$$

ce qui implique pour tout $n \in I\!N$, $Q(t)^n\Pi_1(t) = \lambda(t)^n\Pi_1(t)$. On pourra montrer par le théorème de Keller-Liverani que $Q(\cdot)^n$ se comporte quand $n \to \infty$ comme $\lambda(\cdot)^n\Pi_1(\cdot)$.

Remarque 5. *L'application complexe $\lambda(\cdot)$ est continue en 0.*

On remarque tout d'abord que $\Pi_1(\cdot)$ vérifie la même propriété de régularité que la résolvante : de par sa définition intégrale (32) et le théorème de Keller-Liverani (cf. (31)), le projecteur $\Pi_1(\cdot)$ est continu en 0 en tant qu'opérateur sur $\mathcal{L}(\mathcal{B},\widetilde{\mathcal{B}})$. Soit $\nu \in \widetilde{\mathcal{B}}'$ tel que $\nu(\mathbf{1}) \neq 0$. On a $\nu(\Pi_1(t)\mathbf{1}) \to \nu(\Pi\mathbf{1}) = \nu(\mathbf{1}) \neq 0$ quand $t \in I_{00} \to 0$. Donc quitte à restreindre I_{00}, on peut supposer $\nu(\Pi_1(t)\mathbf{1}) \neq 0$ sur I_{00}. On a alors par linéarité de ν :

$$\lambda(t) = \frac{\nu\big[Q(t)\Pi_1(t)\mathbf{1}\big]}{\nu\big[\Pi_1(t)\mathbf{1}\big]}.$$

Or $Q(t)\Pi_1(t) = \frac{1}{2i\pi}\int_{\Gamma_1} z(z-Q(t))^{-1}\ dz$ par (35), ce qui implique par le théorème de Keller-Liverani (cf. (31)) que $Q(\cdot)\Pi_1(\cdot)$ est continu en 0 en tant qu'opérateur de $\mathcal{L}(\mathcal{B},\widetilde{\mathcal{B}})$. Comme $\mathbf{1} \in \mathcal{B}$, les applications $Q(\cdot)\Pi_1(\cdot)\mathbf{1}$ et $\Pi_1(\cdot)\mathbf{1}$ sont continues en 0 en tant qu'éléments de $\widetilde{\mathcal{B}}$. Finalement, comme $\nu \in \widetilde{\mathcal{B}}'$, la remarque est montrée.

Remarque 6. *On a pour tout $t \in I_{00}$[3] : $\Pi_1(t)(\mathcal{B}) = Ker[\lambda(t) - Q(t)]$ et $Ker(\Pi_1(t)) = [\lambda(t)-Q(t)](\mathcal{B})$, ce qui permet de montrer que $Ker[\lambda(t)-Q(t)]^2 = Ker[\lambda(t)-Q(t)]$ (simplicité algébrique de la valeur propre $\lambda(t)$).*

a)En effet, soit $t \in I_{00}$. Par (41), on a $\Pi_1(t)(\mathcal{B}) \subset Ker[\lambda(t) - Q(t)]$. De plus, pour tout $f \in Ker[\lambda(t) - Q(t)]$, on a $\lambda(t)^n\big(\Pi_1(t)f - f\big) = Q(t)^n\Pi_1(t)f - Q(t)^nf = -Q(t)^n\Pi_0(t)f$. Or, quitte à restreindre I_{00}, on peut supposer $|\lambda(t)| > \kappa$ par continuité de λ en 0 ($\lambda(0) = 1 > \kappa$). En considérant les normes, on obtient alors : $\|\Pi_1(t)f - f\|_{\mathcal{B}} \leq |\lambda(t)|^{-n}\|Q(t)^n\Pi_0(t)\|_{\mathcal{B}}\|f\|_{\mathcal{B}}$, et donc par (34) et (30), $\|\Pi_1(t)f - f\|_{\mathcal{B}} \to 0$ quand $n \to \infty$. Ceci implique $\Pi_1(t)f = f$, et termine la preuve du premier résultat de la remarque.

b)Quitte à restreindre I_{00}, on peut supposer $|\lambda(t)| > \kappa$ par continuité de λ en 0. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, par (10), on a $Id = \big[\lambda(t)^{-n}Q(t)^n\big] + \big[\big(\lambda(t) - Q(t)\big)\sum_{i=0}^{n-1}\lambda(t)^{-1-i}Q(t)^i\big]$. Or, $\lambda(t)^{-n}Q(t)^n$ converge vers $\Pi_1(t)$. En effet, $\|\lambda(t)^{-n}Q(t)^n - \Pi_1(t)\|_{\mathcal{B}} = \|\lambda(t)^{-n}Q(t)^n\Pi_0(t)\|_{\mathcal{B}} = |\lambda(t)|^{-n}O(\kappa^n)$. Par ailleurs $\big(\lambda(t) - Q(t)\big)\sum_{i=0}^{n-1}\lambda(t)^{-1-i}Q(t)^i$ converge dans $[\lambda(t) - Q(t)](\mathcal{B})$. En effet, soit $f \in \Pi_1(t)(\mathcal{B}) = Ker[\lambda(t)-Q(t)]$, alors $\big(\lambda(t)-Q(t)\big)\sum_{i=0}^{n-1}\lambda(t)^{-1-i}Q(t)^if = 0$. Et soit $f \in Ker(\Pi_1(t))$, alors $\|Q(t)^nf\|_{\mathcal{B}} = \|Q(t)^n\Pi_0(t)f\|_{\mathcal{B}} = O(\kappa^n)$, donc $\sum_{i=0}^{n}\lambda(t)^{-1-i}Q(t)^if$ converge sur le Banach $\mathcal{B}$, et par continuité de $Q(t)$ on a le résultat. Ainsi, $\mathcal{B} = \Pi_1(t)(\mathcal{B}) + [\lambda(t) - Q(t)](\mathcal{B})$. Or $\mathcal{B} = \Pi_1(t)(\mathcal{B}) \oplus Ker(\Pi_1(t))$, et $[\lambda(t) - Q(t)](\mathcal{B}) \subset Ker(\Pi_1(t))$ par (41), ce qui donne le deuxième résultat de la remarque.

c)Enfin, soit $f \in Ker[\lambda(t) - Q(t)]^2$. Alors par (a), on a $\mathcal{B} = Ker[\lambda(t) - Q(t)] \oplus Ker(\Pi_1(t))$. Donc il existe $g \in Ker[\lambda(t) - Q(t)]$ et $h \in Ker(\Pi_1(t))$ tels que $f = g + h$, et donc par linéarité de $Q(t)$, on a : $[\lambda(t) - Q(t)]f = 0 + [\lambda(t) - Q(t)]h$. Or par hypothèse sur f, $[\lambda(t) - Q(t)]f \in Ker[\lambda(t)-Q(t)]$, et par stabilité de $Ker(\Pi_1(t))$ par l'opérateur $Q(t)$, $[\lambda(t)-Q(t)]h \in Ker(\Pi_1(t))$. Donc, comme la somme des sous-espaces est directe, ceci termine de montrer la remarque 6.

Remarque 7. *Pour tout $t \in I_{00}$, on a $\sigma(Q(t)_{|\mathcal{B}}) \subset [D(0,\kappa) \cup \{\lambda(t)\}]$.*

En effet, en utilisant les mêmes arguments que dans la démonstration de la proposition 3,

3. quitte à restreindre I_{00}

comme $\Pi_1(t)$ est un projecteur, on a : $\mathcal{B} := \Pi_1(t)(\mathcal{B}) \oplus Ker(\Pi_1(t))$ et

$$\sigma(Q(t)_{|\mathcal{B}}) \subset \Big[\sigma\big(Q(t)_{|\Pi_1(t)(\mathcal{B})}\big) \cup \sigma\big(Q(t)_{|Ker(\Pi_1(t))}\big)\Big].$$

Or on a $\sigma(Q(t)_{|Ker(\Pi_1(t))}) \subset \overline{D}(0,\kappa)$. En effet, on a $\big(Q(t)_{|Ker(\Pi_1(t))}\big)^n = Q(t)^n\Pi_0(t) = \frac{1}{2i\pi}\int_{\Gamma_0} z^n\, R_t(z)\, dz$ par l'égalité (34). Ceci implique que le rayon spectral vérifie $r(Q(t)_{|Ker(\Pi_1(t))}) = \lim_n \|\big(Q(t)_{|Ker(\Pi_1(t))}\big)^n\|_{\mathcal{B}}^{\frac{1}{n}} \leq \kappa$. De plus, l'égalité $Q(t)\,\Pi_1(t) = \lambda(t)\Pi_1(t)$ donne $Q(t)_{|\Pi_1(t)(\mathcal{B})} = \lambda(t)Id_{|\Pi_1(t)(\mathcal{B})}$ avec $\dim(\Pi_1(t)(\mathcal{B})) < +\infty$, d'où $\sigma(Q(t)_{|\Pi_1(t)(\mathcal{B})}) = \{\lambda(t)\}$. □

Références

[Bal00] V. Baladi. *Positive Transfer Operators and Decay of Correlations.*, volume 16 of *Advanced Series in Nonlinear Dynamics.* World Scientific, 2000.

[DS58] N. Dunford and J.T. Schwartz. *Linear Operators, Part. I : General Theory.* Wiley, New York, 1958.

[Hen93] H. Hennion. Sur un théorème spectral et son application aux noyaux lipchitziens. *Proc. Amer. Math. Soc.*, 118 :627634, 1993.

[HP09] L. Hervé and F. Pène. Nagaev method via Keller-Liverani theorem. *Bull. Soc. Math. France*, 2009. Accepted for publication, Hal-00203408.

[KL99] G. Keller and C. Liverani. Stability of the spectrum for transfer operators. *Annali della Scuola Normale Superiore di Pisa - Classe di Scienze Sér. 4*, XXVIII :141–152, 1999.

[Liv04] C. Liverani. Invariant measure and their properties. a functional analytic point of view. In Pisa Pubblicazioni della Classe di Scienze, Scuola Normale Superiore, editor, *Dynamical Systems. Part II : Topological Geometrical and Ergodic Properties of Dynamics*, Centro di Ricerca Matematica Ennio De Giorgi, 2004.