



Université BORDEAUX 1
I.F.E

IUFM d'Aquitaine

LADIST

Laboratoire de Didactique des Sciences et des Techniques
EA.502

**SITUATIONS DIDACTIQUES
POUR L'APPRENTISSAGE DES
NOMBRES NATURELS**

Rose FOUCAUD
I.D.E.N.

Guy BROUSSEAU
IUFM d'Aquitaine
LADIST

I.R.E.M. 1992

SOMMAIRE

INTRODUCTION

p. 1

A SITUATIONS DE DISTRIBUTION : présentation - intérêt

p. 3

B SITUATIONS DIDACTIQUES

p. 6

I. Fabrication d'un bracelet en perles

p. 6

1.1. Conditions de la situation

p. 6

1.2. 1ère phase : introduction au jeu

p. 7

1.3. 2ème phase : le jeu proprement dit

p. 9

1.4. 3ème phase : Construction du bracelet

p. 13

1.5. 4ème phase : échange de perles

p. 14

1.6. Evaluation didactique du jeu

de distribution du matériel

p. 16

II. Préparation du goûter.

Situation de comptage par paquets

p. 19

2.1. Conditions de la situation

p. 19

2.2. 1ère phase : introduction au jeu

p. 19

2.3. 2ème phase : jeu proprement dit :

distribution des éléments

p. 25

2.4. Difficultés du jeu

p. 29

2.5. Contenu cognitif

p. 31

III. Le jeu de la banque et des billes	p. 33
3.1. Condition du jeu	p. 33
3.2. Introduction : distribution des billes	p. 33
3.3. Jeu proprement dit	p. 34
1er jeu	p. 34
2ème jeu	p. 37
3ème jeu	p. 39
4ème jeu	p. 41
5ème jeu	p. 41
3.4. Les chèques	p. 42
3.5. Distribution des élèves selon les différents jeux à différentes dates	p. 43
3.6. Contenu cognitif de ce jeu de la banque	p. 44
1er jeu	p. 44
2ème jeu	p. 44
3ème et 4ème jeu	p. 45
3.7. Le jeu de la banque	p. 47



INTRODUCTION

Cet ouvrage est le fruit d'une collaboration prolongée entre deux personnes que leur passion pour l'enseignement aux jeunes enfants a confrontées, puis rapprochées. Eveiller les enfants aux mathématiques à la résolution de problèmes, à la recherche de l'efficacité et de la vérité, au plaisir de comprendre et de réunir est une tâche exaltante.

Tout professeur aime sentir que cet éveil ne dépend que de lui ; or cet éveil ne peut, en fait, se traduire qu'en tant qu'ensemble de pratiques et de connaissances acquises par l'élève comme moyens personnels de maîtriser des situations dont les intentions didactiques sont, sinon absentes, du moins disséminées ou mises à l'écart.

Le professeur doit, en même temps, cultiver son désir que l'enfant apprenne et en retenir les manifestations au moment même où l'enfant doit prendre possession du savoir et de son usage.

L'observation de classes et la pratique de la formation continue des professeurs d'écoles -principalement d'écoles maternelles- nous avaient convaincus de quelques faits.

Les situations traditionnelles effectivement utilisées par les maîtres :

- ne laissaient pas beaucoup d'initiative aux élèves et ne permettaient guère d'élargir le sens des acquisitions.

- produisaient des interprétations erronées et fabriquaient certains obstacles

Nos tentatives pour améliorer la situation par un "recyclage" mathématique et psychologique se soldaient par la production, par les maîtres, de situations d'enseignement

- soit basées sur l'apprentissage par des conditionnements (effectifs ou dissimulés) de connaissances étroitement calquées sur le texte et l'organisation du texte du savoir "plus ou moins savant".

- soit "ouvertes", mais n'aboutissant pas à l'apprentissage visé.

Le défi consistait donc :

- pour le didacticien mathématicien, à produire des situations "fondamentales" permettant de montrer et de justifier les conditions et les variables à gérer afin d'obtenir des apprentissages et des connaissances "corrects".

- pour la pédagogue et la formatrice, à produire des activités convenables pour les élèves, transmissibles aux enseignants, utilisables, séparables et contrôlables par eux au moment de leur mise en oeuvre dans les classes

- et pour les deux auteurs à rédiger les textes, à réaliser les moyens de communiquer les résultats de travail et à étudier la résistance à l'obsolescence des pratiques proposées aux enseignants.

→

Le recyclage d'un petit groupe de maîtres dans la circonscription de Rose FOUCAUD, se déroula sur plusieurs années. Les séances de préparation, de mise au point et de débats furent nombreuses.

Le travail théorique et expérimental figure dans quelques unes des thèses soutenues à l'IREM de Bordeaux et au LADIST. Les textes spécifiques successifs des parties mathématiques et didactiques de l'ouvrage n'ont pas pu être terminés à ce jour. Par contre, les situations didactiques et les activités élaborées dans ce cadre ont été conçues par les auteurs, observées en commun, rédigées par Rose FOUCAUD, corrigées et complétées en commun. Les leçons correspondantes ont été réalisées par des institutrices des écoles maternelles de la circonscription et pour les leçons de la partie BIII. par Mme BRUNET, institutrice à l'école primaire de Bouliac.

Ce texte est disponible depuis plusieurs années. C'est la partie la plus utile du travail. Il nous a paru qu'il fallait la publier sans attendre davantage la rédaction des justifications et des explications mathématiques et didactiques qui seront publiées ultérieurement.

La publication séparée des activités proposées ne doit pas faire illusion : les situations et les jeux exposés ci-après sont des objets assez sophistiqués. Pour utiliser leurs propriétés il faut respecter leurs conditions d'emploi : une lecture superficielle ne donnerait pas la clé de leur conduite en classe. Il nous a semblé néanmoins que, tel qu'il était, le texte était susceptible d'être livré au public.

A SITUATIONS DE DISTRIBUTION : PRESENTATION - INTERET.

La distribution représente la situation fondamentale d'utilisation des nombres.

1) En effet, l'enfant qui s'y engage se trouve dans l'obligation par la force des choses d'utiliser les nombres et de prendre conscience du rôle de ces nombres, de ce à quoi ils servent et même de mettre en oeuvre des opérations : additions, multiplications, soustractions, divisions.

La règle lui est tout à fait compréhensible : apporter le nombre nécessaire et suffisant d'objets en une seule fois.

Ainsi l'enfant peut se lancer dans l'action quelles que soient ses connaissances sur le nombre.

Cette situation est tout à la fois individuelle et sociale, elle permet à l'enfant de :

- contrôler son action et de recevoir le contrôle des autres ;
- débattre avec eux de la qualité de son résultat ;
- recommencer de lui-même autant de fois qu'il le faut et à chaque fois ;
- décider seul ce qu'il choisit d'entreprendre.

Cette situation permet enfin au maître d'organiser de très nombreux problèmes de difficultés progressives exigeant toujours l'utilisation des nombres et offrant aux enfants autant d'occasions d'en approfondir sa connaissance et d'en préciser sa prise de conscience.

2) Une situation de "distribution" peut donner lieu à de très nombreuses séquences d'activité mathématique en section de Grands et au Cours Préparatoire.

Des activités de distribution peuvent en effet être proposées à des enfants d'âge et de capacités très différents : elle peut porter sur de petits nombres inférieurs ou à peine supérieurs à 10, jusqu'à 13 ou 14 en section de Grands ou au tout début de l'année du CP, aussi bien que sur des nombres plus grands jusqu'au delà de 100 au Cours Préparatoire.

i) Les tâches confiées aux enfants au cours d'une même séquence s'individualisent sans peine. Le maître donne à chacun celle qui lui convient le mieux selon le niveau de capacités auquel il est parvenu et celui auquel il voudrait le confronter :

- capacité à énumérer une suite plus ou moins longue de nombres d'objets.
- capacité à connaître le nombre des éléments d'une collection par le comptage.

Comptage qui suppose l'énumération d'ensembles ; la connaissance de suites stables de noms de nombres s'ajustant progressivement sur la suite canonique ; la reconnaissance de la cardinalité.

- capacité à structurer une collection en différents groupements
- capacité à reconnaître une collection à travers ces différents groupements
- capacité à composer et décomposer les nombres par addition et multiplication
- capacité à construire deux collections équipotentes.

ii) Les difficultés sont aisément graduées :

- Distribuer à quelques camarades un objet à chacun.
- Distribuer à quelques camarades plusieurs objets à chacun.
- Distribuer à un grand nombre de camarades plusieurs objets à chacun.
- Distribuer à un grand nombre de camarades un objet à chacun.
- Distribuer un objet par groupe de 2, 3, 4 camarades.

La distribution est très facile si le nombre de destinataires est inférieur à 10 et le nombre d'objets par destinataire réduit à l'unité.

Elle l'est un peu moins tout en restant facile si le nombre d'objets par destinataire est de deux, trois, quatre ou cinq au maximum.

Ces deux distributions conviennent tout à fait à des enfants de section de Grands.

Un grand nombre de destinataires à servir, par exemple entre 15 et 25 et devant recevoir chacun un seul objet présente une assez grande difficulté.

En effet, un seul objet par destinataire incite l'enfant à s'engager dans l'énumération des nombres et il ne compte pas forcément jusqu'à 25 sans se tromper.

Par contre, un nombre d'objets par destinataire allant de 2 à 5 l'incite à faire des groupements de 2, 3, 4 ou 5 objets et à les attribuer ensuite concrètement, par une correspondance terme à terme éloignée, à chaque camarade qu'il s'efforce de repérer dans la classe.

Ces deux distributions peuvent être proposées à certains enfants de section de Grands selon leur niveau révélé par les deux premières distributions. Elles mettent parfois certains enfants du C.P. en peine au début de l'année.

La distribution d'un objet pour un groupe de plusieurs camarades est très difficile parce que l'opération mentale qu'elle implique n'est plus une addition ou une multiplication mais une division.

Ainsi, la distribution est en effet l'occasion pour l'enfant, non seulement d'utiliser le nombre, mais aussi de mettre en jeu les premières opérations.

Le maniement de nombres plus ou moins grands n'est pas systématiquement plus difficile que celui de petits nombres. Des exercices quotidiens rendent rapidement certains enfants capables de compter des nombres de plus en plus grands. Pour eux, il faut songer à faire varier non seulement l'énumération, la structuration d'une collection mais aussi les opérations mises en jeu (addition et soustraction).

iii) Outre le nombre d'objets et le nombre de destinataires, la présentation des objets à distribuer peut varier aussi.

Par exemple, les éléments peuvent être groupés par 2, 3, 4....10.

* Le groupement n'a pas à être détruit pour la distribution ; le lot de chacun correspond au nombre des éléments groupés : 2 gaufrettes à chacun et les gaufrettes sont présentées en paquets de 2.

La difficulté pour l'enfant est de reconnaître la part individuelle toute construite dans le paquet donné. Par exemple, reconnaître dans le paquet de 2 ou 3 gaufrettes la part individuelle de 2 ou 3 gaufrettes qu'il aurait construite lui-même.

Certains enfants prennent le paquet constitué de 2 ou 3 gaufrettes comme s'il s'agissait d'une gaufrette. 2 gaufrettes rassemblées en un paquet ne valent pas forcément pour eux 2 gaufrettes prises isolément. Mais surtout, il est difficile pour l'enfant de passer de l'unité au groupement et de considérer le groupement à la fois comme unité et comme groupement selon les cas. Cette difficulté se retrouve avec les groupements d'éléments en nombre supérieur au nombre des éléments de chaque part.

- Le groupement ne correspond pas au lot individuel mais aux lots réunis de 2, 3 ou 4 destinataires ; chaque enfant reçoit 2 gaufrettes et les paquets sont de 4, 6 ou 8.

- Le groupement ne correspond ni au lot de chacun ni à une réunion exacte de lots. Il est constitué de 4 éléments, la part individuelle est de 3 ou bien il est constitué de 10 éléments et la part individuelle est de 6. Les paquets doivent toujours être emportés intacts.

3) La distribution peut tenir la séquence entière de l'activité mathématique :

- quand il s'agit par exemple de la distribution du matériel nécessaire à la sortie au zoo ou des éléments du goûter du pique-nique pour la promenade.

- Elle peut n'être qu'une première phase suivie de l'organisation des objets distribués :

- quand perles et fils sont distribués, la composition des motifs du collier ou du bracelet et leur enfilage représentent de nouvelles phases d'activité mathématique.

- quand les perles sont présentées en boîtes assorties, les enfants doivent se les échanger entre eux après la distribution pour éviter des bracelets disparates. C'est encore une nouvelle phase d'activité mathématique importante.

Ces échanges requièrent en effet des enfants l'utilisation, non seulement des nombres, mais aussi des opérations sur les nombres, additions et soustractions en particulier.

Au début de l'année, les situations organisées ne demandent aux enfants que des distributions.

Progressivement, la distribution devient une première phase suivie d'autres. Elle peut même ne jouer qu'un rôle d'introduction.

Les prétextes à distribution ne manquent pas dans une classe. Il suffit que les enfants puissent y trouver un sens à leurs actions et qu'ils fournissent un nombre suffisant de tâches suffisamment variées pour que chacun en ait sa part.

B SITUATIONS DIDACTIQUES

Toutes les situations décrites ci-après ont été construites et réalisées dans sa classe par Mme Brunet, institutrice de CP.

I. Fabrication d'un bracelet en perles. Situation d'utilisation et d'apprentissage des nombres réalisée dans la classe par Mme Brunet.

Il ne s'agit pas ici d'un compte rendu d'observations de la situation observée à plusieurs reprises au cours de diverses leçons mais de la fiche que ces observations permettent d'établir en vue de l'organisation par d'autres maîtres de leçons présentant les mêmes qualités.

1.1. Conditions de la situation

- Age des enfants : 5-6 ans -Section de Grands- CP.
- Nombre d'enfants : 23. Tous les matériels utilisés ont été comptés pour ces 23 enfants.

Les enfants sont répartis en groupes pour la distribution du matériel :
1 groupe de 5 ; 3 groupes de 4 ; 2 groupes de 3.

Chaque groupe de tables est légèrement écarté des autres pour que les enfants puissent distinguer aisément les groupes.

• Matériel :

- Trois boîtes de 500 perles au moins chacune, de formes différentes : **ronde**, allongée, à facettes.
- Des pots de yaourt entre 80 et 100, nombre très supérieur au nombre suffisant 69 pour que chaque enfant en ait trois correspondant aux trois formes de perles.
- Une bobine de 50 m de fil de pêche et un modèle : c'est un fil de 30 cm.

Le bracelet terminé mesurera 20 cm seulement. Ainsi, les enfants peuvent se tromper, faire des noeuds, l'institutrice pourra de toute façon fixer finalement le fermoir.

- Deux lots de papiers d'emballage : un lot de papiers "fantaisie", rectangulaires, de 40 cm sur 30.
- Un lot de petits carrés de papier ordinaire de 20 cm de côté.
- 35 bolducs de 80 cm en nombre très supérieur au nombre suffisant 23 pour que chaque enfant en ait un.
- Des barils de lessive, des boîtes, des couvercles, en grand nombre pour le transport du matériel.

Le tout est disposé au fond de la classe sur un banc, les pots de yaourt en vrac au pied pour que l'institutrice, à proximité, puisse observer la prise du matériel par les enfants.

1.2. 1ère phase : Introduction au jeu.

i) Situation des participants.

Enfants et institutrice sont assis en cercle, c'est la formation la plus propice à la communication.

ii) Mise en scène.

L'institutrice place devant elle trois grandes boîtes qui éveillent la curiosité et l'intérêt des enfants.

iii) Déroulement et consigne.

L'institutrice expose l'argument : *"la fête des Mères approche, il est temps de songer à préparer un cadeau pour vos mamans. J'ai pensé à un bracelet en perles"*.

Elle a en même temps placé les trois boîtes les unes à côté des autres au milieu du cercle et les ouvre.

Une conversation s'engage devant ces perles si attirantes, les enfants entre eux, et les enfants avec l'institutrice. Les enfants s'approchent des boîtes, prennent des perles dans leurs mains, se les montrent, s'exclament sur leurs couleurs, leurs reflets, leur forme : ils admirent beaucoup les perles à facettes. Quelques enfants restent devant les boîtes, d'autres retournent à leur place les mains pleines.

Ce temps ne doit pas leur être trop compté. Ils apprennent, chemin faisant, à distinguer parfaitement les trois sortes, les trois variétés, les trois catégories de perles, l'institutrice emploie les trois termes pour demander à chacun s'il a en mains des perles de chaque sorte.

- s'il lui en manque une ;
- si elles sont de la même couleur.

Prenant part à leurs exclamations, elle les interroge individuellement *"Loïc, tu en as des trois catégories ?" "Montre-les moi ?...mais tu n'en pas pas de rondes...ah si en voilà une". "Et toi, Jérôme ?...C'est vrai, tu en as des trois variétés et en plus, elles sont toutes de la même couleur..." "Tandis que toi Romain, montre-moi...Tu as les trois sortes de perles, oh mais tu as...deux, trois, quatre couleurs différentes"*. Elle favorise la découverte et laisse leur plaisir s'épuiser.

L'institutrice communique les informations utiles : *"Pour ce bracelet, il vous faudra :*

- 3 perles allongées
- 6 perles à facettes
- 8 perles rondes"

(Remarque : le cas échéant ,4 seulement en section de Grands).

Elle répète plusieurs fois ces nombres avec des intonations différentes en crescendo ou en decrescendo, avec des hésitations interrogatives différemment placées dans l'énoncé offrant autant d'occasions aux enfants qui le savent de le dire à sa place.

Elle interroge ceux qui ne répondent pas d'eux-mêmes.

Elle fait aussi comparer les nombres de perles :

- de quelle catégorie aurez-vous le plus ?
le moins ?

Elle énumère ensuite tout ce qui sera encore nécessaire pour chaque enfant :

- 3 pots de yaourt pour y déposer les perles séparément.
- 1 fil qui fasse le tour du poignet des mamans.
- 2 papiers d'emballage 1 blanc, carré, 1 fantaisie rectangulaire.
- 1 bolduc

Elle répète encore plusieurs fois les éléments et leur nombre, procédant comme pour les perles.

Elle précise aussi : "vous trouverez tout ces matériels sur le banc ou à côté du banc pour les pots de yaourt, au fond de la classe". Elle utilise cette nouvelle occasion de vérifier encore que toutes les informations sont bien connues :

"Les trois boîtes de perles - rondes
allongées
à facettes.
Une bobine de fil et un modèle de bonne longueur.
Les deux lots de papier.
Les bolducs coupés".

Elle conclut : "c'est vous qui allez vous les distribuer entre vous. Chacun va être chargé d'une tâche précise".

iv) Réflexions sur les buts et la manière de cette communication des informations (et de toutes celles qui suivront).

Les enfants doivent "mémoriser" parfaitement ces informations pour pouvoir s'organiser, compter et se contrôler personnellement ou les uns les autres.

L'institutrice doit limiter au strict nécessaire les informations données à chacun individuellement. Certains enfants prennent dans des ateliers l'habitude de n'enregistrer que les consignes qui leur sont données personnellement. Le caractère essentiellement collectif du jeu rend ici cette méthode très peu satisfaisante. Et il faut veiller à ce que chacun sache très bien, non seulement ce qu'il a à faire lui-même, mais aussi ce que les autres ont à faire. Il faut qu'il ait parfaitement entendu, compris et retenu toutes les informations données.

v) Répartition des enfants

"Vous allez former des groupes :

- Bernard - Carine - Romain - Cédric - Isabelle	seront ensemble.
- Martine - Loïc - Elise - Béatrice	ensemble
- Gauthier - Jérôme - Monique - Alain	ensemble
- Caroline - Pierre - Samuel - Catherine	ensemble
- Gérald - Christian - Danièle	ensemble
- Françoise - Roland - Sylvie	ensemble".

Note : les listes sont établies en fonction des place des enfants dans la classe.

Les groupes comprennent des nombres d'élèves différents, mais l'institutrice prend soin de ne jamais utiliser ces nombres dans ses déclarations aux enfants.

Elle répète plusieurs fois les noms groupés.

Chaque enfant doit savoir parfaitement la liste de ses camarades de groupe. Elle demande à chacun de les dire à son tour. Ils reprennent leur place aux tables et aident à en écarter un peu les groupes les uns des autres.

vi) Répartition des tâches :

L'institutrice désigne un enfant de chaque groupe, Bernard, Martine, Gauthier, Caroline, Gérald, Françoise : *"Tu vas distribuer les perles rondes aux camarades de ton groupe. Toi aussi, toi aussi...etc..."*

Elle interroge chacun sur ce qu'il va faire : *"combien en donneras-tu, de ces perles rondes, à chacun de tes camarades...et qui sont tes camarades, à qui tu vas les donner ?"*

Elle fait de même :

- pour les perles allongées (Carine, Loïc, Jérôme, Pierre, Christian, et Roland)
- puis pour les perles à facettes (Romain, Elise, Monique, Samuel, Danièle, Sylvie)

Elle interroge aussi les enfants sur ce qu'ils attendent des autres : *"Combien doit-il (le camarade du groupe qui en est chargé) t'apporter de perles rondes ?"*

Les pots de yaourt seront distribués par :

- Cédric (un autre enfant du groupe des 5, information tue aux enfants) pour son groupe et deux autres : celui de Gérald - Christian - Danièle ; et de Françoise - Roland - Sylvie.
- Isabelle (dernier enfant du groupe de 5, information tue aux enfants) pour les trois groupes restant.

Eux aussi, doivent savoir combien chaque élève doit recevoir de pots.

Les fils seront distribués pour toute la classe par Béatrice, 1 à chacun.

Les bolducs par Alain, 1 à chacun.

Les papiers blancs et les papiers fantaisie par Catherine, 1 de chaque sorte à chacun. L'institutrice répète plusieurs fois la répartition nominative et chaque enfant à tour de rôle doit préciser sa tâche.

1.3. 2ème phase : jeu proprement dit : distribution du matériel

i) La règle

"Il faut apporter le lot d'objets en 1 seule fois. En cas d'erreur, il faut tout reprendre et recommencer".

ii) Le déroulement

Chaque enfant instruit de sa tâche se dirige vers le matériel.

Une telle tâche exige des enfants :

- . l'identification des collections ;
- . l'énumération des éléments de ces collections ;
- . le dénombrement par bijection ou par comptage ;
- . la mise en correspondance de collections équipotentes ;
- . la connaissance du nombre en tant que numéral, qu'ordinal et que cardinal

Le comptage lui-même suppose l'énumération d'ensembles, la connaissance de suites stables de noms de nombres s'ajustant progressivement sur la suite canonique, la reconnaissance de la cardinalité.

Il ne s'agit pas ici d'analyser les difficultés des enfants avec ces différents aspects du nombre. C'est l'objet de la psychologie cognitive ou de la didactique psychologique mais de montrer comment les difficultés rencontrées par les enfants dans leurs tentatives d'exécuter la tâche demandée et les réactions que la situation provoque naturellement chez eux à ce moment-là les conduit à l'apprentissage.

iii) Difficultés pour constituer la collection

• Concevoir le but de l'action

Les enfants partent souvent vers le matériel sans anticiper ce qu'ils vont faire. Ils éprouvent leurs premières difficultés au plus tôt au moment de rassembler la collection demandée et pour certains seulement à la distribution.

Au CP, l'institutrice peut demander parfois aux enfants avant leur départ de dire combien ils vont chercher d'objets. Mais la nécessité de l'anticipation naît de la pratique du jeu et non l'inverse.

L'enfant chargé des fils a commencé à couper le modèle en petits morceaux au lieu de couper des fils semblables en déroulant la bobine. Après qu'il ait constaté que les tout petits bouts obtenus ne pouvaient plus servir, il a fallu lui montrer sur deux ou trois fils ce qu'on attendait de lui. Il a quand même dû compter ensuite lui-même les morceaux nécessaires. La détermination de la chose à compter est toujours en partie au moins à la charge de l'enfant.

• Compter par groupes

Exemple : Jérôme doit apporter 3 perles allongées pour chacun des quatre membres de son groupe. Il a compté et retenu le nombre d'enfants à servir : 4. On pourrait s'attendre à ce qu'il constitue 4 petits lots de 3 perles allongées en comptant par lots : 1, 2, 3, 4. Or, on observe qu'il a besoin d'énumérer les membres du groupe et que cette énumération, il doit en outre l'appuyer par une correspondance avec les enfants eux-mêmes : on le voit chercher du regard vers leur place. Mais les enfants sont dispersés et bougent dans la salle. Il doit utiliser les places aux tables. On observe des erreurs dans cette composition de correspondance : les deux groupes de trois occupaient trois des tables d'un groupe de 4 tables, un enfant a d'abord apporté 4 lots et s'est soudain rendu compte qu'il servait une place inoccupée.

→

Ces difficultés, qu'il peut vaincre par des essais successifs, des corrections, des réflexions sur ses erreurs le conduisent à étendre le comptage élément par élément à un comptage des groupes (4 "groupes de 3"). Pour lui, et pour beaucoup d'autres, le nombre n'est pas entièrement détaché de la chose comptée. La situation est l'occasion d'une maturation fondée sur le sens de l'activité et non sur l'automatisme. Il faut de nombreux essais avant la réussite et quelques réussites pour l'apprentissage.

• Compter par catégorie, distribuer par enfant

La fillette chargée de donner deux papiers à chaque enfant a d'abord constitué un lot de 23 papiers blancs puis un lot de 23 papiers "fantaisie" et les a distribués séparément. Elle a transformé sans problème 23 groupes de 2, en 2 groupes de 23 évitant de conjuguer les difficultés et simplifiant ainsi son travail. Mais pour qu'elle puisse satisfaire la règle, il aurait fallu qu'elle distribue les deux papiers à la fois. Mais sa manière de procéder exigeait une certaine confiance en la conservation des nombres dans la transformation inverse (2 collections de 23 papiers donneront 23 groupes de 2 papiers). Cette transformation augmenterait la complexité de la conception et du travail mais elle reste inaccessible à l'enfant. Si l'institutrice avait exigé une distribution unique, elle l'aurait sans doute exécutée mais sans anticiper vraiment son résultat.

L'enfant peut utiliser intuitivement une propriété lorsqu'elle simplifie sa tâche mais la conception de cette propriété exige aussi la maîtrise des cas où elle pourrait la rendre plus difficile.

iv) Difficultés pour le transport des objets

Chaque matériel pose des problèmes de transport intéressants du point de vue sensori moteur (par exemple curieusement les papiers ne sont pas faciles à ranger ni à distribuer) mais beaucoup impliquent la compréhension et la maîtrise du nombre.

Chaque chute d'un lot de feuilles de papier amène le recomptage du lot sans que personne le demande.

Le transport de certains éléments réclame des récipients et les enfants doivent évaluer leur capacité à emporter la collection à faire :

Exemple : Pour emporter les pots de yaourt en une seule fois, Cédric "doit" prendre un baril de lessive ; pour les perles, Jérôme peut prendre un couvercle ou une boîte.

Exemple : Un enfant aux pots de yaourt, Cédric, a résisté assez longtemps à la suggestion de prendre le baril car il fallait détruire les 11 lots de 3 pots.

Autre exemple : Gauthier chargé des perles rondes (8) pour un groupe de 4, a vu les lots se mélanger dans le creux de sa main. Il prend un couvercle et met les groupes de perles, un dans chaque coin. Dès les premiers pas, les quatre lots se remélangent et Gauthier s'arrête plusieurs fois pour les maintenir séparés.

La plupart des enfants n'acceptent pas que les groupes qu'ils ont constitués pour déterminer le matériel se détruisent au cours du transport. Ils veulent garder constamment sous les yeux la composition de la collection, peut-être pour économiser le recomptage à la distribution, mais sans doute, pour beaucoup, par une sorte d'insuffisance de confiance en la conservation.



v) Difficultés de la distribution sous le contrôle des destinataires.

- objets apportés en nombre insuffisant ou excessif.

Exemple : Béatrice, chargée des fils, n'en a pris que 21 au lieu de 23. Elle fait le tour de ses camarades et s'aperçoit qu'elle n'en a pas pour les 2 derniers. Elle semble étonnée, reprend tous les fils et recommence la distribution en sens inverse, en donnant d'abord aux 2 enfants qui n'en ont pas eu. En fin de parcours, il lui en manque encore 2. Elle reprend de nouveau tous les fils et cette fois sert d'abord les 4 enfants qui n'en ont pas eu soit à la 1ère distribution, soit à la 2ème puis distribue le reste des fils au hasard. Pour finir, il lui en manque toujours 2. C'est seulement alors qu'elle songe à recompter les fils. Elle savait par coeur le nombre d'enfants.

Cette capacité à concevoir le nombre comme invariant, comme indépendant des applications concrètes que l'on fait d'un ensemble dans un autre est tout à fait fondamentale.

Quand le nombre des objets apportés est juste, la distribution met de nouveau à l'épreuve la conception de la structure de l'ensemble à constituer. La solution consiste, soit à attribuer au destinataire au moment de la livraison chacun des groupes d'objets constitués lors de leur création si le transport les a conservés, soit à les reconstituer systématiquement. C'est la réalisation correspondant à l'anticipation précédente. Elle paraît donc a priori plus simple. Force est pourtant de constater de multiples difficultés parfois aggravées par l'aide que chacun reçoit des autres, malgré lui, le plus souvent. Aide pourtant très utile et très profitable à l'ensemble des actions.

En effet, si chaque "auteur" a la possibilité de juger lui-même le résultat de son action, les autres le lui soulignent fréquemment. Beaucoup, venant apporter leur livraison sur les tables en profitent pour vérifier l'avancement de leur propre matériel distribué par d'autres et se plaignent des insuffisances et des lenteurs qu'ils croient constater. Ils vérifient encore et de toute façon dès qu'ils reviennent à leur place, une fois leur propre tâche accomplie alors que certains de leurs camarades en sont encore à une étape plus ou moins avancée que la leur.

En fait, ces plaignants rendent un peu plus difficile l'exécution du projet en provoquant des distributions incomplètes, erratiques, des comptages interrompus.

- Distributions incomplètes.

Exemple : un enfant voulant satisfaire tous les destinataires à la fois donne une perle ou deux à chacun puis une autre...etc bientôt il doit recompter chaque part pour ajouter le complément.

- Distributions erratiques

Exemple : l'enfant aux pots de yaourt les donne non par 3 comme il les avait d'abord groupés mais par 1 ou par deux, et non systématiquement, mais en désordre d'une table à l'autre. Il revient à ceux de ses camarades qui réclament. Rapidement, il perd le contrôle de l'énumération de son ensemble. Il ne sait plus qui il a servi ou non. On le voit recommencer le comptage de tout ce qu'il a déjà distribué et de ce qui lui reste et finalement, ne sachant plus à qui en donner, ni combien, se trouver dans l'obligation de tout reprendre pour tout recommencer.

• Comptages interrompus

Les interactions entre enfants entraînent des interruptions fréquentes du comptage. Beaucoup d'enfants sont alors obligés de tout recompter à partir de 1, moins parce qu'ils ont perdu l'énumération que parce qu'ils ne peuvent pas réciter la suite des nombres à partir d'un nombre donné.

L'institutrice peut alors, sous couvert d'aider un enfant lui poser le problème : "Tu en étais à 4, continue ! Récite après 4." Et il se tait, incapable de prendre la suite. Cette capacité à compter à partir d'un nombre donné est une des composantes de la capacité à compter. Il faut autant que possible la conférer aux enfants.

1.4. 3ème phase : construction du bracelet

Les enfants ont tous repris leur place à leur table. Ils ont devant eux les 3 catégories de perles réparties dans les 3 pots de yaourts et tout le reste des éléments nécessaires.

i) Consigne.

Quand je regarde le bracelet construit, je vois :

- que chaque perle allongée est entre 2 perles à facettes.
- que chaque perle à facettes a d'un côté 1 perle allongée et de l'autre 2 perles rondes.
- qu'il commence et finit par 2 perles rondes.

L'institutrice la répète plusieurs fois comme elle l'a fait pour le nombre de perles.

ii) Apprentissage de la consigne par les enfants.

L'institutrice interroge chaque enfant sur la place des perles :

- où mettras-tu la perle allongée ?
- Pourras-tu voir 2 perles à facettes l'une à côté de l'autre ?
2 perles rondes ?
toutes les perles rondes ensemble ?
- Qu'y-a-t'il à côté d'une perle ronde ?
de chaque côté d'une perle à facettes ?
- Y-a-t-il des perles de même forme l'une à côté de l'autre ?
- Lesquelles ?

Cette interrogation dure jusqu'à ce que les enfants sachent les conditions déterminant la place des perles les unes par rapport aux autres au point de pouvoir se répéter seuls la consigne.

iii) Tentatives d'enfilage.

Avec des élèves plus âgés, il serait possible d'exiger d'eux qu'ils anticipent complètement les solutions qu'ils envisagent en les dessinant par exemple, et qu'ils analysent alors si les conditions exigées sont remplies.

Ici, cette anticipation n'est pas envisageable. Les enfants commencent le bracelet et essayent de satisfaire totalement toutes les conditions jusqu'à ce qu'ils arrivent à une contradiction par rapport aux règles.

Ils essayent alors de modifier le bracelet en conservant des blocs qu'ils jugent satisfaisants. Le fait de devoir désenfiler le bracelet pour ceux qui l'ont immédiatement enfilé pourrait détruire les solutions obtenues, et compliquer la recherche de la vraie solution. Mais l'enfant élimine naturellement les hypothèses les moins régulières et la solution apparaît plus facilement qu'on ne pourrait le croire parce qu'elle est en fait composée de blocs identiques. D'ailleurs la consigne telle qu'elle est formulée suggère des blocs que les enfants réalisent (sans raison vraiment logique) et qui leur permettent d'obtenir le résultat.

Pour une section de Grands, les perles sont offertes aux enfants d'une seule couleur ou de quelques couleurs en harmonie et l'activité s'arrête là.

Pour un CP, les perles sont présentées en boîtes assorties et laissées être distribuées au hasard.

Quand les bracelets sont enfilés, l'institutrice montre le sien aux couleurs harmonieuses. Les enfants le trouvent beau, plus beau que le leur quelquefois très bariolé.

L'institutrice leur propose alors d'échanger les perles entre eux après avoir choisi chacun sa couleur préférée.

1.5. 4ème phase : Echange des perles

i) Consigne

Il faut :

- choisir sa couleur ;
- vérifier son bracelet pour savoir quelle(s) sorte(s) de perles manque dans la couleur choisie ;
- en faire part aux autres, en disant : *"je voudrais (3) perles (bleues) (à facettes) en disant : "j'en ai....."*

ii) Déroutement

- Choisir sa couleur ne pose pas de problèmes ;
- vérifier son lot exige que l'enfant :

- repère dans le bracelet la présence ou l'absence de sa couleur.
 - toutes les perles sont bleues (couleur choisie) c'est improbable.
 - Aucune n'est bleue. C'est improbable.
 - quelques-une sont bleues.

- compte par catégorie le nombre des perles d'autres couleurs.

Ce nombre représente celui des perles bleues à demander.

- compte en plus ces perles par couleur pour pouvoir les offrir éventuellement.

• Difficultés

- Pour compter les perles à demander.

Quelques enfants commencent par compter les perles de la couleur choisie, mauvaise stratégie qui leur donne peu de chance d'arriver rapidement au résultat. Il leur faut alors en effet se reporter au nombre total de chaque catégorie donné pour la distribution. Mais le bracelet enfilé le leur fait perdre, ils doivent les recompter, sur le bracelet, ce qui ne leur est pas très facile.

Il doivent enfin effectuer une soustraction sur laquelle ils butent.

- Pour annoncer leurs besoins.

Aucun enfant ne peut annoncer comme la consigne l'a demandé : "je voudrais (ou il me manque) 3 perles bleues à facettes".

Il déclare d'abord : "je veux des bleues", ou plus simplement : "des bleues". L'institutrice en demande le nombre et la catégorie. L'enfant ne donne souvent que la catégorie, et ensuite le nombre. Et, il peine encore pour reprendre le tout en une seule fois : "3 perles bleues à facettes", ou "perles à facettes bleues".

- Pour se procurer les perles manquantes.

Fréquemment plusieurs donneurs offrent ensemble des perles de la couleur et la catégorie demandées, aucun en nombre suffisant mais la somme de deux ou de trois est excessive.

Le demandeur doit dire à quels donneurs il décide de prendre des perles et combien.

Le plus souvent, il ajoute le nombre de perles que lui donne le premier ou les deux premiers donneurs au nombre qui lui est nécessaire en énumérant les nombres intermédiaires et a ensuite des difficultés à trouver le nombre de perles qu'il prend au troisième donneur.

- Pour offrir leurs perles disponibles.

Il faut :

- les compter par couleur et par catégorie pour en disposer séparément à volonté.
- Entendre ce qui est demandé pour savoir si les perles qu'on a de disponibles conviennent ou non.

Un enfant comprend tout à coup qu'on demande qui a des rouges, et il lève la main. Mais quand son camarade approche pour les prendre, il déclare d'un air ennuyé qu'il veut les garder pour lui, c'est la couleur qu'il a choisie.

Il avait oublié qu'on ne lui demandait pas s'il avait des perles rouges, mais s'il en avait de disponibles à donner aux autres.

1.6. Evaluation didactique sommaire du jeu de distribution du matériel (2ème phase).

- Fréquence des activités : nombreux comptages des petits nombres connus.

Le nombre des comptages "contrôlés" nécessaires pour réussir la tâche est beaucoup plus élevé que celui qu'il est possible d'obtenir par une succession même très dense de petits exercices classiques isolés.

- Contrôle des activités : Le plus souvent les exercices classiques restent sous le seul contrôle de l'institutrice et l'enfant attend son verdict.

Dans une telle situation au contraire l'enfant contrôle chacun de ses résultats et se trouve même contrôler ceux de ses camarades et en discuter avec eux.

- Contenu cognitif :

Cette situation fait fonctionner la plupart des schèmes pertinents au dénombrement : l'énumération de la collection,

- l'équipotence des collections,
- le comptage (stabilisé et canonicité des suites de noms de nombres utilisés, cardinalités du dernier nom cité),
- la structuration des collections (partitions et produits),
- l'arithméticité des nombres (compositions et décompositions des nombres par addition et multiplication),

Elle prépare la numération -mise en correspondance de la structuration des collections et des dénominations des nombres- pour en assurer l'identification et la manipulation dans les calculs.

- Sens des connaissances sur le nombre :

Ces schèmes ne fonctionnent pas seulement en tant que savoirs ou savoir-faire acquis et appliqués dans la classe. Ils interviennent sous forme :

- de représentations et d'anticipation non nécessairement formulables ;
- de formulations effectives pour exprimer, pour communiquer ou pour prouver la valeur de la livraison ;
- de preuves dans les débats qui opposent livreurs et destinataires ;
- de savoirs et de savoir-faire institutionnalisés parce qu'exigés explicitement par l'institutrice ou par les interlocuteurs.

Ces différents modes de fonctionnement contribuent à donner un sens précis aux algorithmes de comptage.

Le sens provient aussi des conditions réalisées dans la situation :

- du nombre et de la variété des motivations à compter ;
- du fait que la décision de compter ou de recompter soit presque toujours une décision de l'enfant lui-même sous la pression d'une obligation pertinente pour lui ;
- du fait qu'il ait en même temps la nécessité et la possibilité de contrôler son travail aussi souvent qu'il le faut, et par des méthodes différentes ;
- du caractère varié et pertinent des perturbations à travers lesquelles il doit reconstituer des schèmes d'action.

- du caractère à la fois social et personnel des stimulations auxquelles les activités vont apporter une réponse. La demande d'un camarade s'impose de façon différente de celle du maître et produit des "sens" différents.

• Acquisitions :

Les difficultés auxquelles les enfants doivent pallier lorsqu'ils utilisent des schèmes incorrects ou insuffisants exercent une pression qui conduit à des adaptations plus rapides. Ces adaptations étant forcément personnelles, les algorithmes utilisés sont mieux doués de sens et plus rapides.

Le fait de savoir que d'autres ont pu relever le défi proposé, stimule les enfants et les aide à trouver leur solution.

Même lorsque l'acquisition se fonde sur des imitations de la méthode trouvée par un camarade, elle doit être adaptée au problème particulier et personnel de l'enfant et adaptée par lui.

Les débats occasionnés par les livraisons conduisent à des prises de conscience, des difficultés, des erreurs, des solutions qui accroissent et approfondissent les connaissances et les expériences des enfants.

• Projet personnel d'apprentissage :

Les objectifs du maître sont d'apprendre aux enfants à compter. Celui qui leur est proposé par la leçon décrite est de faire un bracelet pour sa maman. Les comptages répétés et la mise au point des stratégies sont des moyens au service d'un projet. De telles situations semblables à la situation fondamentale se reproduisent tout le long de l'année. Elles permettent au maître de maintenir la pression pour que l'apprentissage se produise et soit reconnu par l'élève lui-même au moment opportun.

Il n'y a pas divorce entre le projet de l'élève et celui du maître : les élèves savent qu'ils sont à l'école pour apprendre beaucoup de choses et ils savent que certaines règles "tu remportes tout si tu n'as pas réussi" sont manifestement faites pour les obliger à apprendre quelque chose.

Y-a-t-il ambiguïté sur ce quelque chose ? Pas du tout. Interrogés sur ce qu'ils font, ils ne s'y trompent pas et disent qu'ils comptent, quand ils le font.

Le maître pourrait dire ici : "*tu sauras compter jusqu'à 25 quand tu sauras préparer et distribuer du matériel pour n'importe quelle partie ou même pour tous tes camarades*". Et donc il pourrait formuler ou faire formuler avec chaque enfant un projet personnel d'apprentissage. Servir les différents groupes, plus ou moins importants d'élèves. Mais le maître et l'élève peuvent-ils déduire quelque décision de ces projets personnels d'apprentissage autres que celle de jouer et de jouer encore à ce jeu ? Ce que l'enfant à faire et à comprendre se déduit du projet d'action et non du projet d'apprentissage.

Il est absolument nécessaire que les enfants sachent ce qui leur est demandé de faire, ce qu'ils font, le résultat qu'ils en attendent et celui qu'ils obtiennent. Mais, tout autre chose est la connaissance qu'ils peuvent avoir des objectifs du maître. La plupart du temps et c'est le cas ici, ils ne pourraient les appréhender que pour une si faible part qu'ils ne les reconnaîtraient pas dans l'action quotidienne.

Qui n'a surpris au soir de la première journée et de combien d'autres, la déception de ces enfants à qui parents et maître avaient annoncé qu'ils allaient apprendre à lire et à compter et qui ne pouvaient pas comprendre que c'était justement ce qu'ils étaient en train de faire à l'école.

Ils en prennent autrement conscience et bien mieux quand ils sont en situation compréhensible pour eux de compter et de recompter et de discuter du nombre d'objets donnés ou reçus.

Les situations didactiques plus précises que nous donnons permettent de définir les connaissances à acquérir en termes de réussite, c'est-à-dire avant qu'elles ne soient acquises. Elles permettent donc de concevoir avec l'élève un projet d'apprentissage et d'appuyer l'action de cette motivation.

Mais il serait absurde d'en inférer qu'un tel projet va permettre à l'élève de mieux comprendre et s'approprier la connaissance.

• Disparités entre les enfants :

Cette situation permet aux enfants de rencontrer des difficultés à leur niveau de connaissance et de progresser côte à côte bien qu'à des vitesses différentes. Les élèves d'une classe hétérogène peuvent donc travailler en même temps et apprendre, et progresser en empruntant aux autres des techniques ou des connaissances au moment où ils en conçoivent l'utilité. A condition que chacun accomplisse personnellement sa tâche, le "copiage" est aussi fécond que l'invention.

Le maître évidemment doit veiller à cette "responsabilité" de chacun et maintenir un niveau d'exigence, adapté à chaque élève mais toujours très élevé pour chacun d'entre eux.

II. Préparation du goûter. Situation de comptage par paquets réalisée dans sa classe par Mme Brunet.

La distribution des éléments du goûter constitue entièrement à elle seule la séquence d'activité mathématique.

Cette activité peut donc avoir lieu en section de grands ou au CP au début de l'année, les éléments présentés en vrac. Durant le 2ème trimestre, ils seraient présentés par groupements correspondant exactement à la part de chaque destinataire : paquets de 2 gaufrettes si la part est de 2 ; barres de 3 carrés de chocolat si la part est de 3 carrés ; paquets de 6 noisettes si la part est de 6...

L'activité décrite ci-dessous n'a eu lieu qu'au cours du 3ème trimestre dans un cours préparatoire. Les éléments, pour la plupart, sont présentés groupés par 3, 4, 6, 10 et ces groupements ne correspondent pas à la part individuelle.

Quelques-uns sont laissés en vrac pour les enfants plus faibles.

2.1. Conditions de la situation

i) Age des enfants : 6 ans.

ii) Nombre d'enfants : toute la classe : 27 enfants.

iii) Matériel :

- Du chocolat en sachets de : 3 carrés (sous double emballage)
- Des gaufrettes en paquets de : 4 (sous double emballage)
- Des biscuits en paquets de : 6
- Des noisettes en paquets de : 10
- Des cacahuètes : en vrac
- Des bonbons : en vrac (enveloppés)
- Des serviettes en paquets de : 6
- Des filets : en vrac

2.2. 1ère phase : Introduction au jeu

i) Situation des participants

Enfants et institutrices sont assis en cercle.

ii) Argument et consigne

L'institutrice expose l'argument : pour le goûter dans le parc de cet après-midi, vous emporterez chacun dans un filet rouge :

- 6 noisettes
- 4 cacahuètes
- 3 gaufrettes
- 3 biscuits
- 2 bonbons
- 2 carrés de chocolat
- 1 serviette

L'institutrice insiste, il va falloir bien retenir ce que j'ai prévu pour chacun de vous pour qu'il ne manque rien dans votre filet quand nous partirons.

iii) Une conversation s'engage entre les enfants et entre les enfants et l'institutrice :

- L'un d'eux déclare, dubitatif : "il faut compter d'abord, hein".

L'institutrice approuve : "tu as raison, il faut compter...Mais que faut-il compter ?"

- . Un deuxième enfant répond : "les filets rouges..."
- . Un troisième le reprend : "non !... c'est les enfants ...?"
- . L'institutrice demande : "pourquoi faut-il compter les enfants ?"
- . Un autre enfant : "pour savoir le nombre de filets".
- . L'institutrice acquiesce en ajoutant : "pourquoi quand on connaît le nombre d'enfants, connaît-on en même temps le nombre de filets ?"

Les enfants semblent très sûrs que le nombre des enfants est aussi le nombre des filets sans pourtant réussir à le formuler.

L'institutrice propose alors : "s'il fallait 2 filets par enfant, combien en faudrait-il en tout ?"

Plusieurs enfants ensemble : "2 fois plus que d'enfants". Elle fait préciser le nombre total.

"Et s'il fallait 3 filets à chacun...?" Le système est déclenché. Un enfant répond immédiatement : "3 fois plus" et sur demande donne le total, après une légère hésitation. *Et quand il n'en faut qu'un par enfant ?*

Alors "le nombre d'enfants c'est le nombre de filets".

Cette conversation n'aurait pas eu lieu de cette manière au début de l'année. Au premier exercice de distribution, les enfants partent souvent chercher les éléments à distribuer sans que les effleure l'idée d'avoir à compter les destinataires. Leurs échecs répétés plus ou moins nombreux, les conduisant à découvrir la nécessité de compter. Ils se mettent parfois à compter les destinataires par imitation ou sous la pression des autres, sans toujours compter ensuite les éléments à distribuer avant de les apporter. Il peut arriver aussi qu'ils comptent les destinataires et les éléments à distribuer et s'emparent encore de ces derniers au hasard.

Puis vient le moment où ils comptent systématiquement les destinataires avant de partir chercher les éléments à distribuer qu'ils comptent aussitôt en tenant compte du nombre de destinataires et du nombre des parts individuelles. Ils utilisent très bien les nombres obtenus sans pour autant maîtriser encore parfaitement ce qu'ils font ni être capables d'en parler spontanément. Pour cet enfant, c'est donc un progrès sur le début mais c'est aussi la persistance d'une incertitude, sa déclaration est tout à la fois affirmation et interrogation. Il dit qu'il faut compter parce qu'il le "sait", parce qu'il en a éprouvé l'efficacité jamais démentie, mais aussi parce qu'il a tout de même besoin de la vérifier encore, de l'entendre confirmer.

Les enfants ont besoin de même de faire fonctionner et pour ainsi dire mettre à l'épreuve la relation qui unit le nombre de destinataires au nombre d'éléments à leur distribuer, de la retrouver à chaque fois : lorsque la part individuelle compte 2 éléments, il faut 2 fois plus d'éléments que d'enfants ; si elle compte 4 ou 5 ou 6 éléments, il en faut 4 ou 5 ou 6 fois plus que d'enfants.

Après la distribution des éléments du goûter, les enfants interrogés sur ce qu'il faut compter d'abord pour rassembler le nombre nécessaire et suffisant de pinces à linge destinées à étendre des serviettes à raison de 3 pinces par serviette répondent immédiatement : "les pinces". Un seul proteste : "non, c'est les serviettes".

Et pour disposer sur la table le nombre d'assiettes à raison de 2 par convive la plupart répondent encore : "les assiettes". Le même enfant proteste de nouveau : "non c'est les convives".

Au troisième exemple, pour apporter les boutons destinés à fermer les chemises de la tenue de jeu, les enfants hésitent, réfléchissent, quelques-uns répondent avec application : "les chemises".

Savoir utiliser les nombres, réclame un apprentissage souvent très lent et très progressif. Et sans apprentissage, ce savoir reste longtemps étranger à l'enfant.

* Amanda 6 ans 1/2 sort du cours élémentaire 1ère année, elle énumère assez bien les nombres jusqu'à 400 et plus (elle bute à 49, 69, 73, 95...).

Elle effectue des soustractions avec retenue (573 - 287 ; 6 214 - 627), des multiplications (5 433 x 3), des divisions par 2, 3, 7.

Pendant les vacances, elle joue à faire la lessive avec sa maman. On lui propose d'aller chercher les pinces à linge pour étendre les torchons, 1 pince par torchon.

C'est un jeu dont on lui donne la règle : rapporter les pinces en une seule fois. Tout comme les enfants de section de grands, au premier exercice, elle part chercher les pinces sans compter les torchons. En rapporte trop, reprend tout et repart...ainsi de suite jusqu'à ce que fortuitement le nombre se trouve exact. Elle déclare ne pas avoir prévu l'exactitude du nombre des pinces qu'elle apporte avant leur répartition sur les torchons, mais s'en réjouit. On lui propose alors d'apporter 2 pinces par torchon...puis 5. Comme elle en prend toujours à peu près la même poignée, pour 5 pinces par torchon, elle s'en trouve démunie dès le 2ème torchon. Elle remarque alors étonnée qu'il lui en manque beaucoup sans faire le rapprochement avec le nombre beaucoup plus grand de pinces par torchon. Elle en prend beaucoup plus et demande un panier pour les transporter.

Cette fois elle s'arrête à l'avant dernier torchon en disant : "j'en ai trop". Elle semble un peu déçue, mais se montre pleine d'espoir quand il n'y a seulement qu'une ou deux pinces de plus ou de moins...Elle croit approcher ainsi progressivement du compte juste et continue ardemment.

Après avoir passé à 6 pinces par torchon, puis à 12, on arrive à 1 pince mais pour 15 torchons et on revient à 1 pince par torchon pour 6 torchons sans qu'Amanda change de comportement. L'adulte présent décide alors de jouer avec Amanda ; ils vont ensemble chercher chacun son lot de pinces. L'adulte arrête la fillette en chemin et lui demande : "es-tu sûre d'avoir le nombre exact de pinces ?" Elle répond qu'elle va essayer. L'adulte déclare être sûr d'avoir le nombre juste, avant d'essayer. Elle s'étonne et veut vérifier, le nombre est en effet exact. Elle reste un moment perplexe, se met à compter les torchons et rapporte 6 pinces en disant qu'elle rapporte 6 pinces parce qu'il y a 6 torchons. Le lendemain, elle dit encore qu'il lui faut 6 pinces parce qu'il y a 6 torchons, mais en reprend au hasard une poignée.

Interrogée si elle savait que le panier contenait le nombre de pinces nécessaires, elle se remet à les compter.

Pour 9 torchons comptés, elle hésite puis compte aussi 9 pinces.

Elle réussit ensuite pour 14 - 9 - 10 - 8 - 11 torchons à rapporter le nombre exact de pinces en affirmant avant de les répartir être sûre de son exactitude.

Mais pour rapporter 2 pinces par torchons, elle fait 6 lots ou 9 lots de 2.

Il faut noter aussi qu'au moment de rapporter 2 pinces par torchon pour 6 torchons, elle compte 13 pinces. L'erreur signalée, elle vérifie, trouve 13, sait qu'il lui en faut 12 mais ne sait comment faire. Interrogée, elle éprouve une très grande difficulté à dire qu'il faut en enlever 1. Elle sait compter jusqu'à 400 ou 500 mais ne sait pas à quoi sert le nombre. Elle connaît la technique pour effectuer une soustraction, mais ne sait pas reconnaître les situations où il faut utiliser cette opération.

Au cours moyen encore certains enfants ne reconnaissent pas dans une situation donnée les opérations qu'elle appelle.

iv) Passation de la consigne par l'institutrice aux enfants.

L'institutrice répète plusieurs fois la liste des éléments à emporter :

- 6 noisettes
- 4 cacahuètes
- 3 gaufrettes
- 3 biscuits
- 2 bonbons
- 2 carrés de chocolat
- 1 serviette

Elle fait distinguer aux enfants entre les éléments à emporter ceux qui sont à manger et pose quelques questions sur les friandises seules :

- les deux sortes de gâteaux : gaufrettes et biscuits
- les deux sortes de fruits : noisettes et cacahuètes
- ceux dont la coque est à casser : noisettes
- la friandise en plus grand nombre : noisettes

v) Difficultés de la consigne

• Complexité de sa présentation :

Habituellement, l'institutrice présente d'abord les éléments puis en une seconde étape elle précise leur nombre.

Pour la première fois, elle présente les objets précédés de leur nombre et ce sont ces nombres qui justifient l'ordre dans lequel les objets sont énumérés.

• Nature des objets

Dans les situations précédentes, comme par exemple celle de la fabrication d'un mobile constitué de personnages, le roi, la reine et le nain ; les éléments, longues bandes de carton vert pour arrondir le gros ventre du roi et petites bandes rose vif pour ses bras et ses jambes, se distinguent par leur

couleur, leurs dimensions, leur destination particulière qui en outre les hiérarchisent. de même dans la fabrication du bracelet, les différentes sortes de perles allongées, rondes, à facettes...

Au contraire, tous les éléments du goûter sauf les serviettes ont une même destination, être mangé, destination dans laquelle ils se confondent. Leur couleur ni leur dimension ne sont caractères pertinents dans le jeu pas plus le fait qu'ils soient fruits ou gâteaux.

vi) Mémorisation de la consigne et difficultés des enfants

L'institutrice répète encore la liste des friandises sans jamais modifier leur ordre d'énonciation. Elle demande aux enfants qui seraient capable de les énumérer. Ils sont très nombreux à se déclarer volontaires, et sont interrogés à tour de rôle.

L'institutrice reprend très souvent elle-même la liste entre chaque enfant, elle la reprend toujours s'il y a oublié.

• Énumération des friandises par les enfants :

	rangs des friandises au cours de leur énumération par les enfants x oublié 0 répétition
6 noisettes	4:2:2:5:5:6:3:5:4:2:4:3:5:x:3:5:4:5:2:3:2:4:x:x:6:2:
4 cacahuètes	1:1:3:4:6:5:4:6:3:4:5:4:6:x:1:4:5:1:1:1:2:3:3:1:3:5:1:
3 gaufrettes	5:3:5:6:3:1:2:2:6:5:2:2:1:3:4:3:2:2:5:6:5:6:5:4:3:1:1:x:
3 biscuits	2:4:4:1:2:2:1:1:1:6:3:1:2:1:5:2:1:3:6:5:4:1:4:1:4:4:2:4:
2 bonbons	3:5:1:3:1:4:5:3:5:3:1:6:3:2:2:6:3:6:3:1:1:2:2:x:3:3:
2 carrés de chocolat	6:6:6:2:4:3:6:4:2:11:6:5:4:2:6:1:6:4:4:4:x:x:5:2:4:x:

• Oublis d'éléments

Les oublis sont très peu nombreux, ils portent sur 1 ou 2 éléments au plus et pour 4 enfants.

- Les noisettes et le chocolat ont été oubliés 3 fois
- Les cacahuètes, les bonbons et les gaufrettes, 1 fois
- Les biscuits ne l'ont jamais été.

Quand les autres ou l'institutrice soulignent l'oubli, l'enfant ne reprend pas tous les éléments mais essaie de compléter. 2 enfants seulement redonnent un élément déjà cité.

• Nombre des éléments

Le nombre des éléments est mentionné 6 fois pour les éléments groupés par 2 : (2) bonbons et (2) carrés de chocolat ; une seule fois pour les noisettes. Tous les autres sont toujours omis. Pourtant les enfants "savent" que c'est un exercice de calcul, qu'il s'agit de nombre d'éléments à répartir et donc à compter.

L'institutrice leur demande si en plus du nom des friandises, elle ne leur donne pas une autre information. Ne recevant pas de réponse, elle les incite à bien écouter et leur répète encore trois fois la liste des friandises précédées de leur nombre avant qu'ils ne repèrent ces nombres.

L'institutrice reprend alors en compte la serviette, un moment abandonnée, parce qu'en dehors des éléments à manger. Elle redonne la liste complète des éléments et arrête l'attention des enfants sur le nombre le plus grand, sur le plus petit, sur leur place dans la liste. Sur les nombres intermédiaires : ceux qui se répètent, celui qui manque. Puis elle leur demande de reprendre cette liste dans le sens donné et dans le sens inverse ; de remarquer le rang des friandises selon que la liste est énoncée dans un sens ou dans l'autre.

• Ordre d'énumération

L'ordre dans lequel l'institutrice a toujours fourni la liste des éléments et qu'elle ne modifie pas n'est respecté par aucun enfant : les noisettes ne sont jamais citées les premières. Elles prennent tour à tour tous les autres rangs. Les autres friandises prennent tous les rangs y compris le leur par hasard.

Ce n'est pas étonnant puisque les enfants n'avaient pas repéré les nombres, clef de cet ordre.

Malgré les nouvelles difficultés reconnues dans la consigne telle qu'elle est présentée, le fait que les enfants engagés dans un exercice de calcul n'entendent pas les nombres dans 6 noisettes, 4 cacahuètes, 3 gaufrettes... souligne leurs difficultés à entendre avec précision ce qui leur est dit et comment un alignement des informations suffit à les leur masquer.

vii) Répartition des enfants

L'institutrice forme les groupes séparés par un léger éloignement des tables.

Christophe	Sébastien F	François	Sébastien P	Sonia	Raphaël	Gersende
Audrey B	Aurélie	David J	Julien Q	Renaud	Vincent	Jérôme
Aurélie	Alexandre	Stéphane	Stéphane	Claire	Pierre	
Thibault	Julien G	Delphine	Audrey G	Céline	Grégory	

viii) Répartition des tâches

Sont distribués :

Les 6 noisettes par	Christophe	Audrey	Aurélie	Thibault
Les 4 cacahuètes par	Sébastien	Aurélie	Alexandre	Julien
Les 3 gaufrettes par	François	David	Stéphane	Delphine
Les 3 biscuits par	Sébastien	Julien	Stéphane	Audrey
Les 2 bonbons par	Sonia	Renaud	Claire	Céline
Les 2 carrés de chocolat par	Raphaël	Vincent	Pierre	Grégory
Le filet par	Gersende pour toute la classe			
La serviette par	Jérôme pour toute la classe			

Au début de l'année, au cours préparatoire, aussi bien qu'en section de grands, l'institutrice doit répéter plusieurs fois les tâches réparties et veiller à ce que chacun connaisse sans hésitation, au moins la sienne.

A cette époque de l'année, une répétition générale n'est plus nécessaire, il suffit de veiller à ce que les plus faibles aient bien entendu.

2.3. 2ème phase : Jeu proprement dit : distribution des éléments.

i) La règle

Il faut emporter en une seule fois le nombre exact de paquets nécessaires pour avoir le nombre d'éléments désirés.

ii) Déroulement et difficultés des enfants.

Les enfants se dirigent vers l'endroit où se trouve l'élément qu'il a à charge de distribuer.

Les filets
Les bonbons
Les cacahuètes } disposés en vrac ne posent pas de problèmes particuliers.

Leur distribution est exactement celle à laquelle les enfants sont habitués.

- Les biscuits

Les biscuits, par paquets de 6 alors qu'il en faut 3 par enfant présente de grosses difficultés. Les quatre enfants autour de ces paquets sont très perplexes. Interrogés sur ce qui les embarrasse, ils disent être obligés d'ouvrir les paquets. Mais la règle est justement de compter les paquets. Ils savent que les paquets sont de 6 biscuits, 3 et 3, donc 2 parts. Mais aussitôt ils prennent autant de paquets que d'enfants.

Puis ils jugent en avoir trop, lâchent tous les paquets pour tout recommencer. Et tout recommence : 6 biscuits, la part de 2 enfants...ils reprennent en hésitant autant de paquets que d'enfants...

C'est comme si, brusquement, incapables de prendre en compte ce que pourtant ils viennent de dire et de vérifier, à savoir qu'un paquet représente deux parts, ils ne pouvaient s'empêcher de considérer cependant qu'un paquet vaut une part.

Ils ont l'habitude de compter les éléments à distribuer par unité ou par lot représentant la part de chacun, beaucoup d'enfants ont commencé ainsi, en constituant une à une les parts de chacun et en les attribuant mentalement à chacun de leurs camarades. Mais ils constituaient eux-mêmes ces parts, les unités en restaient bien distinctes. Ils ne les redistribuaient d'ailleurs pas forcément groupées. Maintenant, le groupement est constitué et forme un tout. Et il faut tantôt le considérer comme une unité (il faut emporter un nombre de paquets), tantôt le considérer dans les unités que sont ses éléments.

L'institutrice interroge l'enfant pour changer l'orientation du problème et faire apparaître le paquet non comme unité mais dans ses éléments.

- *Combien y-a-t-il de biscuits dans le paquet ?*
- *La fillette répond "6"*
- *Combien te faut-il de biscuits en tout ?*
- *18*
- *Alors ?...*

Audrey a déjà compté combien il lui faut de biscuits en tout. Mais devant les paquets de 6, elle est désemparée.

Entre le nombre d'enfants, le nombre de biscuits par enfant, le nombre de biscuits dans chaque paquet, elle ne sait pas établir de relations et tout s'embrouille...

L'institutrice reprend le problème sous son premier aspect :

- *"Dans ce paquet, combien y-a-t-il de parts ?"*
- *"2"*.
- *"Et dans ce deuxième paquet ?"*

Audrey hésite : "2"...elle réfléchit...s'empare lentement d'un troisième paquet et part, davantage pour essayer que par certitude.

- Les noisettes

Les noisettes par paquets de 10 réservent de plus grosses difficultés encore : Christophe prend un paquet, compte les noisettes, trouve 10 et le rejette en disant : *"Pas celui-là"*.

Il en prend un autre et recommence....Il agit de même avec tous.

Puis il s'écrie en regardant l'institutrice : *"Y en a pas un de bon !"*

Elle prend un air étonné, lui tend un paquet. Il le prend, compte les noisettes et déclare : *"J'en veux pas, il y en a 10"*.

- *T'en faut-il moins de 10 ?* Lui demande-t-elle.
- *Non, répond l'enfant, il m'en faut 42.*
- *Alors pourquoi ne veux-tu pas ce paquet ?*
- *Parce qu'il n'y en a pas 6.*
- *Mais puisqu'il t'en faut 42 ?...*
- *J'en veux pas,* affirme t-il.

Finissant tout de même par concéder que lorsqu'on en a besoin de 42, on peut aisément en prendre 10, il accepte le paquet.

- *En as-tu assez avec ce paquet ?*
- *Non*
- L'institutrice lui en tend un deuxième.

Il compte les noisettes, hoche la tête et marmonne résigné : *"Je peux bien le prendre aussi celui-là..."* L'institutrice lui tend un autre et encore un autre...

Au cinquième paquet, tout à coup il pense en avoir trop et rend paquet par paquet sauf le premier.

Puis en redemande mais ne sait que faire entre le quatrième et le cinquième.

Ce sont les 2 noisettes des 42 qui l'ennuient. Il voudrait trouver 2 noisettes isolées.

- *Avec un paquet de 10, peux-tu en avoir 2,* lui demande l'institutrice.
- *Oui*
- *Alors prends-tu le cinquième paquet ?*
- *Non, parce qu'il y en a 10.*
- *Mais avec 4 paquets, en as-tu 42 ?*
- *Non mais avec 5 paquets, j'en ai trop.*

L'institutrice lui rappelle la règle : *"il faut prendre le nombre exact de paquets pour avoir assez de noisettes"*.

Il finit par prendre le 5ème paquet et part distribuer les noisettes.

Il ouvre le 1er paquet en donne 6 à son premier camarade et donne les 4 autres au deuxième plus 2 qu'il prend dans le 2ème paquet. Il compte encore 6 noisettes pour le troisième camarade et donne les 2 dernières au quatrième plus 4 prises dans le 3ème paquet. Il sourit en donnant les 6 autres noisettes à son cinquième camarade, enfin un compte juste. Il ouvre un peu anxieux le 4ème paquet, donne 6 noisettes à son sixième camarade et les 4 autres à son septième camarade plus 2 prises dans le 5ème paquet et rapporte 8 noisettes.

L'institutrice lui demande alors : *"Rapportes-tu un paquet entier ?"*

Christophe : *"non"*.

L'institutrice : *"Si tu n'avais pas eu ce 5ème paquet, si tu n'en avais eu que 4, aurais-tu eu assez de noisettes ou t'en aurait-il manqué ?"*

Christophe : *"il en aurait manqué 2"*.

L'institutrice : *"alors combien te fallait-il de paquets pour 42 noisettes même si ce n'était qu'à 2 noisettes près ?"*

Christophe : *"5"...* Un doute demeure en lui.

Aurélié d'un groupe de 6 sait qu'il lui faut 36 noisettes.

Elle prend sans difficulté 3 paquets de 10 et s'arrête en disant il m'en faut encore 6.

- *"Eh bien, c'est facile"* dit l'institutrice.
- *"Non"* répond l'enfant, *"je ne peux pas, il n'y a que des paquets de 10"*.
- *"Avec 3 paquets, en as-tu assez ?"*
- *"Oui, si j'en prends encore 6"*.
- *"Avec le 4ème paquet tu auras bien les 6 ?"*
- *"Non, il y en a 10"*.
- *"Je vais te donner des noisettes pour que tu en offres ce soir 6 à chacun des 5 petits camarades qui vont aller te voir et qu'il t'en reste autant. Si tu emportes 3 paquets en auras-tu suffisamment ?"*
- *"Oui, avec 6 autres"*.
- *"Mais chez toi, il n'y a pas de noisettes ?"*
- *"Non..."*
- *"Alors pour en avoir assez, combien dois-tu prendre de paquets ?"*
- *"La fillette finit pas admettre peu convaincue qu'il lui en faut 4. "Mais j'en aurai trop" répète-t-elle.*

L'institutrice rappelle la règle : *"Prendre un nombre de paquets pour avoir assez d'éléments à distribuer"*.

Aurélié prend 4 paquets.

- Les gaufrettes

Les gaufrettes (3 par paquet de 4) posent autant de problèmes.

Pour un groupe de 7, il faut 21 gaufrettes et 6 paquets de 3 : 24.

Pour un groupe de 6, il faut 18 gaufrettes et 5 paquets de 3 : 20.

Et les enfants éprouvent les mêmes difficultés.

Delphine d'un groupe de 6 sait qu'il lui faut 18 gaufrettes, elle sait que 4 paquets sont insuffisants mais elle aussi envisage trouver 4 gaufrettes isolées.

Avec 5 paquets, elle en a trop et n'envisage absolument pas d'enlever 2 gaufrettes. Elle s'en va avec 3 paquets...et revient...avec les 3 paquets. "Il manque 4 gaufrettes".

- "Alors, combien te fallait-il de paquets ?"

Delphine en prend 1 quatrième, un peu à contre coeur...et revient avec 2 gaufrettes... "Ca y est !..." dit-elle.

- Les serviettes

Les serviettes ne sont pas 6.

Pour les 26 enfants présents, il faut 5 paquets.

L'enfant chargé de distribuer les serviettes a eu des difficultés pour considérer les unités devant les paquets.

Il savait qu'il lui fallait 26 serviettes mais devant les paquets était tenté de prendre 26 paquets.

Jugeant que ce devait tout de même être excessif, il restait perplexe.

Quelques enfants chargés de la distribution des bonbons et des cacahuètes et plus rapides que d'autres sont arrivés à son aide. La difficulté leur est apparue rapidement d'où a surgi un sérieux débat : les uns voulant ouvrir tous les paquets, d'autres seulement 1 seul sans pouvoir donner ni les uns ni les autres la raison de leur conviction.

Le fait qu'il ne fallait qu'une serviette par destinataire a tout de même permis aux enfants de tomber d'accord sur la solution plus aisément et plus rapidement comprise : ouvrir les paquets un à un et compter jusqu'à 26. Mais l'institutrice a rappelé la règle.

- Les carrés de chocolat

Quant aux carrés de chocolat, les enfants chargés de leur distribution ont déclaré triomphalement dès qu'ils eurent terminé que pour eux c'était très facile : "ils n'avaient eu qu'à enlever 1 carré de chaque sachet" (ce que la règle n'autorisait pas).

Ils auront droit peut-être à une surveillance plus vigilante la prochaine fois mais surtout ils n'auront à leur disposition qu'un nombre de groupements qui ne leur permettra pas de réussir en dehors de la règle.

2.4. Difficultés du jeu

La présentation des éléments à distribuer groupés en paquets crée des difficultés.

i) Règle changée.

Il ne s'agit plus d'apporter le nombre exact d'objets mais le nombre exact de paquets nécessaires pour avoir assez d'objets, quitte à avoir quelques objets de trop.

Les enfants ne peuvent se départir de la première règle. Ils ont surtout du mal à respecter celle qui leur demande de passer sans cesse de l'unité au groupement et inversement du groupement à l'unité. Ce passage obligatoire rend le comptage beaucoup plus difficile.

ii) Comptage plus difficile.

• Par augmentation des nombres dont il faut tenir compte :

- quand les éléments sont en vrac, il faut tenir compte de 2 nombres :
 - le nombre des destinataires.
 - le nombre des éléments constituant les parts individuelles.
- Quand les éléments sont groupés, il faut tenir compte de 3 nombres :
 - le nombre des destinataires
 - le nombre des éléments constituant les parts individuelles
 - le nombre des éléments constituant les groupements de présentation.

• Par réduction du choix des modes possibles de comptage (certains même devenant impossibles comme la correspondance terme à terme).

- Quand les éléments sont en vrac, les enfants, après avoir compté les destinataires de leur groupe, comptent le même nombre d'objets ou le nombre d'objets dus à chacun multiplié par ce nombre. A moins qu'ils ne constituent autant de groupements de ces objets, qu'ils ont compté de destinataires ou encore qu'ils n'attribuent au fur et à mesure chaque groupement à un destinataire nommé mentalement en une correspondance terme à terme. Le comptage des éléments de toute façon s'appuie directement sur le nombre des enfants et sur le nombre d'objets de la part individuelle.

- Quand les éléments sont groupés en paquets, le comptage des paquets ne peut plus s'appuyer directement sur le nombre des enfants et sur le nombre d'objets trouvé à partir du nombre d'enfants mais exige une conversion constante, en quelque sorte, du nombre des éléments en nombre de paquets et du nombre de paquets en nombre d'éléments ou selon le cas du nombre de parts en nombre de paquets et du nombre de paquets en nombre de parts. Audrey fait partie d'un groupe de 6, chacun reçoit 3 biscuits :

Elle peut envisager :

- le total des biscuits nécessaires : 18

En prenant 1 paquet, il lui faut considérer le nombre d'objets qui le constituent : 6. Puis, en prenant un deuxième paquet, considérer toujours le nombre d'objets qu'il renferme ; 6 et les ajouter aux 6 premiers et agir de même avec le troisième paquet grâce auquel elle obtient 18 biscuits en 3 paquets.

Selon le nombre total de biscuits nécessaires, l'enfant chargé de la distribution doit poursuivre paquet après paquet jusqu'à concurrence de ce nombre total.

Certains enfants effectuent d'abord une addition en disant 6 et 16 : 12, mais ensuite énumèrent les nombres en comptant les objets du nouveau groupement. C'est un comptage long et souvent sujet à erreurs multiples qui incitera les enfants à se placer d'un autre point de vue et à utiliser la division.

Audrey n'en est pas là. Les opérations qui lui sont familières sont l'addition et la multiplication.

Elle peut envisager aussi :

- le nombre d'enfants à servir : 6.

En prenant un paquet, il lui faut alors considérer le nombre de parts contenues : 2. Puis en prenant un deuxième paquet, considérer toujours le nombre de parts et ajouter les 2 nouvelles parts aux 2 premières et agir de même avec le troisième paquet, grâce auquel elle obtient 6 parts en 3 paquets. Là encore elle peut pour le moment en rester ainsi à l'addition et la multiplication.

Mais elle ne peut pas s'appuyer en même temps sur les deux possibilités de calcul : le nombre de parts et le nombre de biscuits. Il lui faut en choisir une et s'y tenir en laissant l'autre totalement de côté.

Or, Audrey, comme ses camarades, mêlent les deux :

Ils calculent d'abord le nombre total de biscuits nécessaires à partir du nombre d'enfants de leur groupe, puis devant les paquets ne considèrent plus que des parts, tenant même par moment le paquet pour une seule part.

Ils ont en tête le nombre de biscuits et se trouvent devant des parts dont ils ne savent que faire.

Audrey sait qu'il lui faut 18 biscuits et elle se retrouve devant les paquets et si elle pense aux parts individuelles, elle pense à trois et voit devant elle des paquets de 6 biscuits, Si elle pouvait les ouvrir ces paquets et en faire des unités à compter jusqu'à 18 ou à des groupes de 3 à compter jusqu'à 6 ; elle aurait sans doute achevé... Mais les paquets restent fermés et ce sont eux qu'il faut compter.

Christophe sait qu'il lui faut 42 noisettes mais il trouve devant lui des paquets de 10 qui le conduisent à envisager des parts. Il est capable d'envisager les parts individuelles : 6 noisettes à chacun, mais les paquets sont de 10. Alors il n'en veut pas. Il veut bien des parts toutes faites mais de 6 pas de 10.

Il est vrai que l'idée d'entreprendre le comptage du nombre de parts de chacune 6 noisettes à partir de paquets de 10 lorsqu'on ne manie pas aisément la soustraction rebute. Christophe sent bien la difficulté de ces 10 noisettes au lieu des 6 qu'il lui faut, que faire de ce "trop".

Audrey peut compter des parts parce que le nombre d'objets groupés représente un nombre exact de parts.

Christophe lui, n'a pas le choix : avec des paquets de 10, il lui faut compter par unité. Seulement il a beau avoir calculé le nombre de noisettes nécessaires, quand il se retrouve devant les paquets, ce sont des parts qui se présentent à son esprit, les noisettes unités, lui échappent.

L'intervention de l'institutrice, l'aide à s'en tenir aux noisettes, les 42 qui lui sont nécessaires et les 10 que lui offre chaque paquet.

Il arrive ainsi à accepter les paquets mais avec 4, il lui manque 2 noisettes et il ne veut absolument pas du 5ème qui le force à en recevoir 10 alors qu'il n'en veut que 2. Il faut lui rappeler la règle pour qu'il admette avoir besoin du 5ème paquet.

- Par impossibilité de recours à une vérification concrète.

Quand les éléments sont en vrac, l'enfant peut les manipuler, construire un groupement et le détruire, essayer.

Le groupement en paquet lui interdit cette vérification concrète. Sans doute pourrait-il essayer de distribuer les noisettes avec un nombre quelconque de paquets, s'apercevoir qu'il s'est trompé, reconstituer les paquets de 10 et les refermer à l'aide d'un papier scotch, mais pour le moment au moins, l'idée n'en vient pas aux enfants et devant les paquets, ils se trouvent en réalité dans l'obligation de calculer mentalement en dehors de toute manipulation.

- Par obligation de compter par unités et par groupements.

C'est-à-dire de considérer le groupement tout à la fois dans les unités qui le constituent et comme unité lui-même.

2.5. Contenu cognitif

- Cette situation fait fonctionner les compositions et décompositions des nombres :

- 10 noisettes d'un paquet sont :	6 et 4
	: 2 et 6 et 2
	: 2 et 8
- 50 noisettes de 5 paquets sont :	42 et 8

- Elle fait fonctionner les opérations d'addition et de soustraction.

- 42 noisettes sont :	6 x 7
elles sont aussi :	40 et 2
mais aussi :	50 moins 8
- 18 gaufrettes sont :	16 et 2
mais aussi :	20 moins 2
- 21 gaufrettes sont :	20 et 1
mais aussi :	24 moins 3
- 3 carrés de chocolat sont :	4 moins 1

- Cette situation fait fonctionner les unités et les groupements

- 1 paquet de biscuits c'est :	1 paquet
c'est aussi :	6 biscuits
c'est encore :	3 et 3

- Elle fait distinguer les groupements des unités.
- Elle fait fonctionner les groupements en tant qu'unité et en tant que groupement constitué d'unités utilisées comme telles.
- Elle prépare la dizaine.

De nombreux enfants ont des difficultés dans leurs calculs à distinguer la dizaine de 10 unités.

Ainsi un enfant à qui on demandait combien il y avait de dizaine de perles dans 6 boîtes en contenant chacune 1 dizaine répondait invariablement : "60".

• Cette situation exige enfin des enfants une utilisation de la soustraction. Avec un nombre plus important de destinataires, elle les orienterait vers la division.

III. Le jeu de la banque des billes.

Ce jeu n'est pas à considérer comme une séquence d'activité mathématique. Il n'en tient pas lieu. C'est un jeu, pratiqué en dehors de la leçon quotidienne d'activité mathématique.

La distribution des billes précédant leur échange et considérée elle, comme séquence d'activité mathématique, est seulement évoquée ici sous le titre : "Introduction" parce qu'elle sert d'introduction au jeu et parce que les activités de distribution ont déjà été décrites dans deux exemples précédents.

Le jeu est constitué de cinq étapes appelées chacune "jeu" pour les enfants : 1er jeu, 2ème jeu,...

3.1. Condition du jeu

i) Age des enfants : 6 ans

ii) Nombre des enfants : toute la classe - 27 enfants

iii) Matériel :

- quelques centaines de cinq sortes de billes : terres, agates, porces, loupes, berlons. (Ce sont les termes utilisés par les enfants).
- des cartons numérotés de 1 à 40 pour appeler les enfants. L'ordre d'appel est sujet à des changements :

- ordre naturel
- ordre naturel inverse
- ordre décimal inverse : 10, 20, 30, 1, 11, 21, 31, 2, 12, 22,...

3.2 Introduction : distribution des billes

i) Situation des participants.

Enfants et institutrice sont assis en cercle pour la communication des informations.

ii) Déroulement

- Communication des informations

L'institutrice montre aux enfants les cinq sortes de billes qui ne manquent pas d'éveiller leur intérêt et leur désir, les berlons surtout !

Elles les informe qu'ils vont se les distribuer pour un jeu, le "jeu de la banque" qui suivra.

Chacun recevra :

10 terres, 8 agates, 6 porces, 4 loupes

Ainsi est composé leur "portefeuille" de départ. (Une boîte à chacun contient son lot de billes).

Ils s'inquiètent aussitôt : *et les berlons ?*

L'institutrice précise alors : *je garde pour le moment les berlons mais vous pourrez les obtenir. Il vous suffira pour cela de les échanger contre les billes en votre possession. Ce sera le "jeu de la banque".*

- Elle répartit les enfants en groupes de distribution.
- Elle répartit les tâches.
- Elle veille à ce que toutes les informations soient bien comprises et retenues.

• Distribution des billes.

3.3. Jeu proprement dit

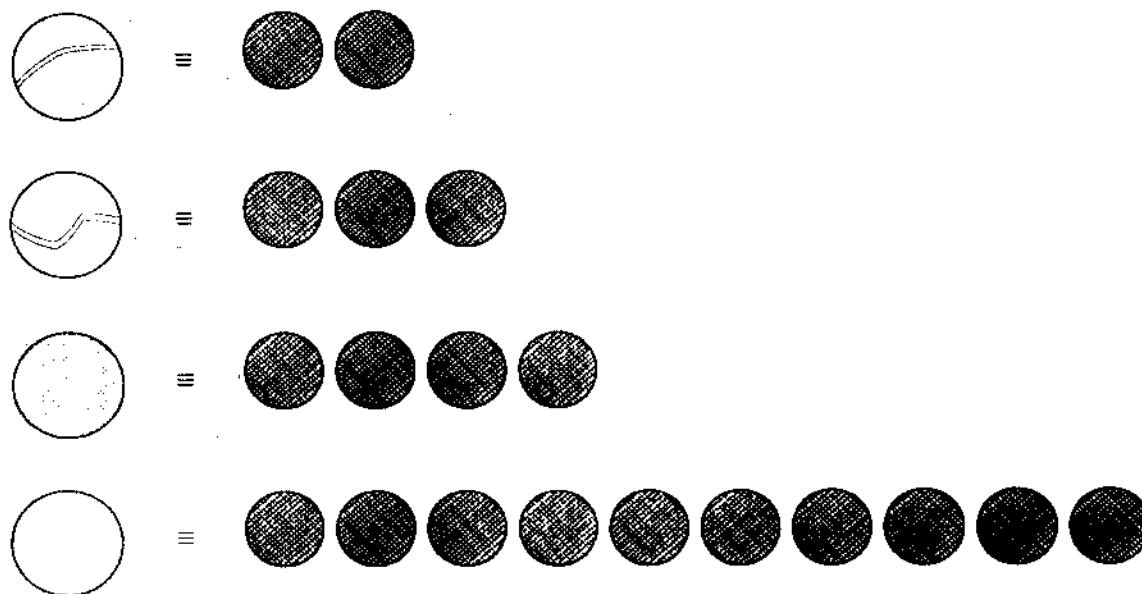
1er jeu

i) Conditions des échanges des billes.

L'institutrice prévient les enfants : "Je vais vous donner les conditions dans lesquelles vous pourrez échanger vos billes contre des berlons. Les voici sous la forme de ce "tableau des changes".

• Tableau des changes

L'institutrice le donne en le dessinant :



Ou peut échanger

1 agate contre 2 terres
1 porce contre 3 terres
1 loupe contre 4 terres
1 berlon contre 10 terres

Le signe "≡" (équivalent) peut être omis ou remplacé par ":", "→".... Il ne fait en tout cas l'objet d'aucun "enseignement". Il est lu naturellement et non formellement : "échanger...contre" "vaut".

L'institutrice répète les valeurs des billes plusieurs fois en montrant au fur et à mesure le dessin des éléments nommés.

Elle les répète plusieurs fois en les suivant seulement des yeux, puis sans les regarder. Elle interroge chaque enfant sur ces valeurs dans l'ordre du tableau et au hasard. Le tableau en reste affiché jusqu'à la fin des cinq jeux.

ii) Consigne.

Il faut échanger vos billes le plus vite possible contre le plus possible de berlons. L'institutrice s'assure que tous ont bien compris.

iii) Règle

N'importe quelle sorte de billes est échangée contre les berlons. Tous les échanges sont acceptés.

iv) Déroulement

Chaque enfant reçoit un carton numéroté.

L'institutrice "ouvre la banque" : une table face à la classe devant laquelle elle s'assoit et sur laquelle sont disposées les boîtes de billes par catégorie et une boîte de cartons numérotés.

Les enfants, chacun à sa place, préparent leurs échanges.

L'institutrice appelle un numéro dans l'ordre naturel pour le moment. Par quelques numéros omis dans la distribution, il arrive que personne ne réponde à un appel. L'institutrice trouve là l'occasion de répéter un numéro, pour s'assurer que ce n'est pas le fait d'un joueur distrait. Elle réveille ainsi l'attention des enfants possesseurs des numéros suivants immédiatement et qu'une énumération uniforme aurait peut-être rendue fugitive.

L'enfant désigné par le numéro appelé vient, donne son carton, formule l'échange qu'il propose en montrant ses billes.

a) S'il n'a pas eu le temps d'en préparer un, il repart continuer après avoir pris dans la boîte un nouveau numéro. Il reviendra à son appel.

b) L'échange qu'il propose n'est pas valable, l'institutrice le refuse en justifiant amplement son refus : l'enfant repart pour recommencer après avoir pris un nouveau numéro. Il reviendra à son appel.

c) L'échange proposé est valable, l'institutrice le réalise. L'enfant muni d'un berlon (au début les échanges ne portent jamais que pour un seul) reprend un nouveau numéro et repart composer de nouveaux échanges jusqu'à ce que son numéro soit appelé et lui permette un nouvel échange.

L'institutrice prévient de la fermeture imminente de la banque en donnant le numéro qui sera le dernier appelé à quelques numéros plus loin de celui qu'elle est en train d'appeler.

Tous les jours, la banque s'ouvre pour les échanges, elle est fermée après un temps variable : autour de trente minutes durant les tout premiers jours de jeu, vingt minutes environ les jours suivants, une dizaine de minutes seulement ensuite. De toute façon, il faut que les plus lents ou les plus faibles puissent proposer au moins 3 échanges.

v) Comportement des enfants et difficultés rencontrées au cours de ce premier jeu d'échanges.

• Les 10 terres sont immédiatement échangées contre 1 berlon et le jeu s'arrête. Les enfants déclarent ne plus pouvoir jouer. L'institutrice leur demande alors : *"n'avez-vous plus de billes à échanger ?"*

Les enfants prennent conscience du tableau des changes à ce moment-là seulement. Le jeu reprend. Mais la majorité d'entre eux ne peuvent proposer des échanges d'agates ou de loupes ou de porces contre des berlons. Ils les convertissent d'abord en terres, puis les terres en berlons : un enfant propose 2 loupes et 1 agate et demande 10 terres, et au tour suivant demande 1 berlon contre les 10 terres.

• La consigne : "échanger le plus vite possible les billes en berlons" a été comprise et retenue. Ils n'en tiennent cependant aucun compte : après le premier échange des 10 terres contre un berlon, la plupart échange 1 agate contre 2 terres (le groupement par 2 leur est facile) jusqu'à épuisement des 8 agates ; 1 agate seulement à chaque fois. Quelques enfants arrivent à apporter en une seule fois 5 agates pour 10 terres. Si la consigne d'obtenir des berlons le plus vite possible leur échappe totalement, ils paraissent très sensibles à celle d'obtenir le plus possible de berlons.

Bientôt on les voit compter et recompter non seulement les berlons de leur boîte mais ceux des boîtes des camarades, pour faire des comparaisons, d'autant que l'institutrice souligne publiquement les premiers succès *"tu as réussi à obtenir un 2ème berlon !"*.

• Après l'échange des 8 agates, ils se retrouvent avec 2 berlons et 6 terres. Certains enfants prennent conscience que la loupe vaut 4 terres, ils échangent alors 1 loupe et disposent de 10 terres qui leur rapportent encore 1 berlon. Beaucoup passent des agates aux porces, les échangent contre des terres et échangent les terres obtenus contre des berlons.

Quelques enfants ne dépassent pas la première agate qu'ils échangent contre deux terres, qu'ils reviennent aussitôt échanger contre 1 agate. Jour après jour, ils s'enferment dans ce double échange.

Ils ressentent pourtant plus ou moins comme une difficulté et cherchent à écouter les échanges proposés par les autres. Ils arrivent parfois à en saisir un et le proposent à leur tour mais si l'échange imité n'entre pas rapidement dans un projet personnel cohérent il est bientôt oublié. Par exemple pour les loupes,

ils proposent par imitation l'échange d'une loupe ou de deux successivement et ne vont pas jusqu'à l'échange des quatre. Les échanges par imitation ne se font jamais que pour des échanges simples. Les enfants ne peuvent accéder par seule imitation aux échanges complexes proposés par certains de leurs camarades.

Il arrive que ne sachant plus quel échange demander, ils déclarent ne pas être prêts et cèdent leur tour. Il ne faut surtout pas laisser un enfant s'installer dans cette position de repli et de renoncement. L'important n'est pas qu'il trouve immédiatement les échanges à faire, mais qu'il en fasse le plus possible.

L'institutrice lui précise donc qu'elle accepte tous les échanges et qu'il lui est certainement possible d'en trouver un. Elle lui demande de rappeler celui ou ceux qu'il a déjà effectués et l'incite à en trouver un nouveau à partir de billes qu'il n'a pas encore utilisées : *"tu est venu échanger une agate, tu pourrais bien échanger maintenant 1 porce ou 1 loupe, essaye..."*.

Remarque : très vite des enfants commencent à s'intéresser aux échanges et aux problèmes liés à ces échanges. L'intérêt pour la possession des berlons, utilisé d'abord pour les motiver, s'efface devant l'intérêt pour le jeu lui-même : les enfants s'inquiètent souvent dans la journée de savoir quand la banque va s'ouvrir et quand l'institutrice annonce la fermeture et précise à quel numéro d'appel elle sera fermée, les enfants possesseurs des numéros suivants les plus proches accourent en demandant instamment que ce numéro soit avancé jusqu'au leur, sans doute pour tenter d'obtenir un berlon de plus mais aussi et souvent surtout pour essayer un échange de plus et cette attitude se répand très vite chez les enfants. Le premier jeu se termine pour un enfant lorsqu'il a obtenu 6 berlons, dès la fin de la semaine pour quelques-uns ; deux mois plus tard pour d'autres.

2ème jeu

A chaque enfant qui vient d'obtenir 6 berlons, l'institutrice indique qu'il va jouer au 2ème jeu.

i) Consigne

Elle précise la consigne en informations individuelles et non collectives.

L'enfant rend ses berlons et elle lui redonne son avoir initial :

10 terres, 8 agates, 6 porces, 4 loupes

La reprise par l'institutrice des six berlons et le retour à l'avoir initial entérine l'intérêt déjà apparu chez les enfants pour le jeu lui-même et non plus principalement pour posséder des berlons.

Elle lui explique qu'il va lui falloir regagner ses berlons mais que la banque impose pour ce 2ème jeu une nouvelle règle.

ii) Règle

a) Il faut toujours obtenir le plus possible de berlons.

b) Mais on ne peut jamais obtenir de berlon si ce que l'on propose en échange comporte des terres, même une seule.

c) On peut toujours échanger entre elles toutes les autres sortes de billes selon le tableau des changes : 1 agate contre 2 terres ou 1 loupe contre 2 agates...

iii) Stratégies de l'élève et du maître.

Pour obtenir un berlon, un enfant doit donc donner par exemple : 5 agates ou 2 loupes et 1 agate ou 2 porces et 1 loupe ou 2 porces et 2 agates.

Il ne peut pas donner : 2 loupes et 2 terres ou 3 porces et 1 terre.

Pour utiliser ses terres, il doit d'abord les convertir en agates, porces ou loupes, puis combiner ces billes pour avoir des berlons.

C'est à l'enfant qu'il appartient d'imaginer ces projets et ces stratégies au cours d'essais successifs. Le maître ne les dévoile pas.

Un exemple : 1 enfant qui a déjà échangé 5 agates, veut utiliser les 3 qui restent pour avoir un berlon. Il doit évaluer leur valeur en terres : 6, trouver le complément : 4 terres, et chercher l'équivalent de ces 4 terres dans une autre sorte de bille : 1 loupe, c'est le seul parti possible.

Ce cheminement lui permet de proposer : 3 agates et 1 loupe. Il peut arriver, qu'à la suite de négociations erratiques, il lui reste par exemple 3 porces et 1 terre. Il lui faut alors échanger matériellement 1 porce et 1 terre contre 2 agates, par exemple.

La stratégie optimale c'est-à-dire la plus économique en théorème consiste à convertir le maximum de billes en agates en commençant par les porces -1 porce et 1 terre-. Ensuite échanger 5 agates contre 1 berlon,

L'intérêt de ce jeu provient justement de ce que l'enfant ne sait pas bien anticiper des stratégies systématiques, ce qui l'oblige d'abord à pratiquer des échanges variés puis progressivement à utiliser cette expérience pour envisager de nombreux échanges possibles et choisir les plus avantageux.

Espérer, suggérer, dérouler et a fortiori enseigner la stratégie optimale n'a par conséquent aucun intérêt.

iv) Déroulement effectif et difficultés des enfants.

Certains enfants ayant compris l'intérêt d'évaluer toutes les valeurs en terres, commencent par échanger contre des terres toutes leurs agates, porces et loupes. Puis ils veulent échanger 10 terres contre 1 berlon. Ce qui est refusé.

On pourrait s'attendre à les voir alors échanger les terres contre les agates puis les agates contre les berlons, cette stratégie n'est jamais apparue. Laissés à eux-mêmes, ils reconstituent le lot initial d'agates, de porces et de loupes. Ce qui montre bien qu'une stratégie d'ensemble, même très simple, pour l'adulte, n'est pas naturellement envisagée par l'enfant. Il pourrait facilement l'exécuter si la suggestion lui en était faite mais on l'aurait alors privé de la partie la plus intéressante, la plus formatrice et la plus motivante du jeu, ne lui laissant qu'une tâche subalterne d'exécution.

L'institutrice se contente donc de refuser les échanges non permis et de rappeler la règle. (Fondée sur les ordres stricts qu'a reçus la banque et auxquels elle doit se soumettre absolument ! L'institutrice joue ces scènes avec réalisme et humour). Elle ne manifeste pas, au sujet de l'intérêt des échanges demandés par l'enfant, d'opinions qui pourraient l'amener à utiliser ce qu'elle dit pour en

dégager une stratégie, au lieu de la chercher avec ses seuls moyens. Par contre, elle encourage sans relâche l'effort à échanger sans jamais mépriser les échanges répétitifs.

Par exemple ceux de certains enfants qui échantent 1 agate contre 2 terres, puis 2 terres contre 1 agate, etc...

Cette attitude peut traduire leurs hésitations, leur désir de participer au jeu au moindre frais, de se rassurer par la répétition d'une situation connue. L'institutrice exerce une pression aussi forte que possible limitée par la crainte que l'enfant ne fasse plus aucun échange mais sans proposer de solutions.

- tu n'as pas encore de berlon ?
- tu n'as toujours pas de berlon !

Les porces restent inutilisées très longtemps, le groupement par 3 gêne les enfants, il est beaucoup plus difficile techniquement.

Les quelques imitations, limitées par de nombreux oublis, sont encore pour beaucoup d'enfants le premier moyen de comprendre le jeu et la solution.

Ce 2ème jeu donne lieu à de très nombreux échanges dans tous les sens possibles. Il dure très longtemps de 3 à 10 semaines selon les enfants mais il prépare remarquablement aux 3ème, 4ème et 5ème jeux. Il est plus difficile que le 1er en raison des calculs intermédiaires qu'il exige.

3ème jeu

A chaque enfant qui vient d'obtenir de nouveau 6 berlons, l'institutrice indique qu'il va maintenant jouer au 3ème jeu.

i) Consigne

L'institutrice donne la consigne du 3ème jeu comme elle l'a fait pour celle du 2ème jeu, individuellement à chaque enfant dès qu'il termine le 2ème jeu en retrouvant la possession des 6 berlons.

Elle explique au joueur qui lui montre ses 6 berlons que cette fois il lui faut n'avoir plus que des loupes.

ii) Stratégie optimale et stratégie des enfants.

Pour n'avoir plus que des loupes, il faut échanger les 6 berlons contre 15 loupes. Aucun enfant n'a proposé un tel échange.

La plupart ont progressé mais leurs échanges restent encore entachés de leurs premières difficultés très tenaces :

- à échanger plusieurs billes à la fois.
- à passer directement des billes à échanger contre les billes à obtenir
 - sans passer par d'autres intermédiaires
 - sans passer par les terres, billes de référence pour les changes.
- à concevoir des échanges arrivant à un nombre de billes supérieur à 10.

Les premiers enfants à accéder au 3ème jeu ont pour la plupart commencé par échanger :

1 berlon contre 2 loupes et 1 agate
puis 2 agates contre 1 loupe

L'un d'eux :

2 berlons contre 20 terres.

Aucun n'a proposé d'échange irrecevable.

Parmi ceux qui y sont arrivés quelques jours plus tard, ils ont été nombreux à proposer des échanges plus variés et plus osés :

2 berlons contre 20 terres
puis 20 terres contre 6 loupes, échange refusé
4 berlons contre 80 terres, échange refusé
1 berlon contre 2 loupes et 1 agate
puis 1 berlon et 1 agate contre 12 terres.

A partir du moment où les enfants sont entrés dans le 3ème jeu, ils deviennent parfois tout à coup soucieux de le terminer rapidement pour passer au jeu suivant. Ils déclarent même souvent vouloir se "dépêcher pour finir le premier". C'est-à-dire qu'ils investissent à ce moment là cette partie de la règle donnée dès le premier jeu mais qu'ils étaient incapables alors de prendre en compte et que l'institutrice a abandonnée comme hors de leur portée, au moins provisoirement.

Il est vrai qu'au premier jeu les enfants ne peuvent pas tenir compte de cette consigne : gagner les berlons le plus vite possible quand ils ne savent déjà pas comment gagner ces berlons.

Le plus possible de berlons est tout à fait compréhensible pour eux : ils ont les billes sous les yeux et dans leurs mains sauf les berlons auxquels ils aspirent, cette partie de la règle traduit exactement leur souhait le plus vif.

Ils savent qu'ils peuvent les obtenir en changeant les autres billes mais n'imaginent pas vraiment ce qu'ils ont à faire. Quelques-uns d'entre eux entrevoient peut-être à peine le berlon que les 10 terres vont tout de suite leur procurer.

Or, pour chercher à obtenir les berlons le plus vite possible, il leur faudrait imaginer plusieurs échanges, les comparer, repérer le plus économique qui est aussi le plus rapide. Ils n'en sont, au premier jeu, une fois les 10 terres échangées, qu'à essayer un échange après l'autre sans être toujours sûrs qu'il sera valable. Les oublient-ils au fur et à mesure ou se les rappellent-ils ? Quand ils reproposent un échange refusé une première fois est-ce avec l'espoir qu'à la deuxième ou troisième fois il deviendra valable ? Il faut même l'exigence de la règle du 2ème jeu avec l'impossibilité d'obtenir des berlons avec des terres pour que les enfants commencent à comprendre la signification réelle des échanges et le maniement de leur calcul.

Il n'est donc pas étonnant que cette partie de la règle "le plus vite possible" soit d'abord tombée. Le fait que les enfants la reprennent d'eux-mêmes témoigne chez eux d'un très grand progrès ; en particulier :

- une certaine maîtrise déjà des échanges
- une compréhension du système de ces jeux successifs et dont maintenant ils ont

- la curiosité des nouvelles règles. Curiosité qui les pousse à vouloir passer rapidement d'un jeu à l'autre
- la compréhension aussi qu'il leur faudrait éviter les erreurs qui prolongent le jeu : proposer des échanges refusés
- le pressentiment qu'il existe des échanges plus rapides que d'autres. Ils s'essayent à proposer des échanges multiples mais se trompent parfois parce que cette idée nouvelle pour eux leur arrive souvent avant une parfaite maîtrise des échanges que justement développe déjà le 3ème et que parachève le 4ème.

4ème jeu

Dès qu'un enfant apporte ses 15 loupes, l'institutrice lui précise qu'il passe au 4ème jeu.

i) Consigne

Il ne faut plus avoir que des agates.

ii) Déroulement

Aucun enfant ne propose d'échanger

15 loupes contre 30 agates

Une difficulté subsiste : les échanges aboutissant à un nombre de billes égal à 10 sont de plus en plus fréquents mais ne sont pas encore constamment utilisés et les échanges aboutissant à un nombre pas exact de dizaines le sont encore moins.

Mais il n'y a plus d'échanges isolés.
ni d'échanges intermédiaires

Echanges proposés :

	10 loupes contre 20 agates
puis	5 loupes contre 10 agates
	12 loupes contre 24 agates
puis	3 loupes contre 6 agates

et autre aussi :

	14 loupes contre 28 agates
puis	1 loupe contre 2 agates

Deux enfants possesseurs des trente agates à la fermeture de la banque savent qu'ils passeront au 5ème jeu à la prochaine ouverture. Ils savent qu'il leur faudra échanger leurs agates contre des porces et que ce sera le dernier jeu.

5ème jeu

Les deux enfants n'attendaient plus que le signal d'ouverture de la banque. L'un d'eux se précipite le 1er et propose l'échange :

6 agates contre 4 porces

le second "pour être le premier" dit-il, offre en une seule fois :

30 agates contre 20 porces

Il venait de terminer le 5ème jeu, le premier.

Son camarade a ensuite proposé :

- 6 agates contre 12 terres
- 12 terres contre 4 porces
- 12 agates contre 24 terres
- 24 terres contre 8 porces
- 6 agates contre 4 porces

3.4 Les chèques

Au fur et à mesure que les enfants terminent le 5^{ème} jeu, ils reçoivent un "carnet de chèques" pour maintenant, non plus dire mais écrire en chiffres et en lettres les échanges qu'ils proposent.

Ils reprennent à l'écrit le 1er jeu.

Ils reçoivent leur "portefeuille" initial :

10 terres, 8 agates, 6 porces, 4 loupes

dont il leur faut échanger de nouveau les terres, agates, porces, loupes contre des berlons.

i) Déroulement

Les 3 ou 4 premiers chèques reprennent les tout premiers échanges isolés : 1 agate contre 2 terres...

Les enfants sont en effet entièrement pris par l'écriture et se préoccupent peu des échanges proposés. Ensuite leur intérêt se porte de nouveau sur les échanges et sur le gain des berlons.

ii) Progrès dans les nouveaux échanges

- capacité à anticiper sur les échanges.
- capacité à échanger plus fréquemment plusieurs billes à la fois : agates changées par 5 ; loupes groupées par 2 et avec 1 agate ; loupes groupées par 5 contre 2 berlons.

Les progrès se remarquent surtout chez les premiers enfants arrivés à cette étape, ceux qui arrivent seuls grâce à leurs propres forces. Chez ceux qui passent d'un jeu à l'autre avec le groupe et un peu portés par le groupe, les progrès sont moins sûrs.

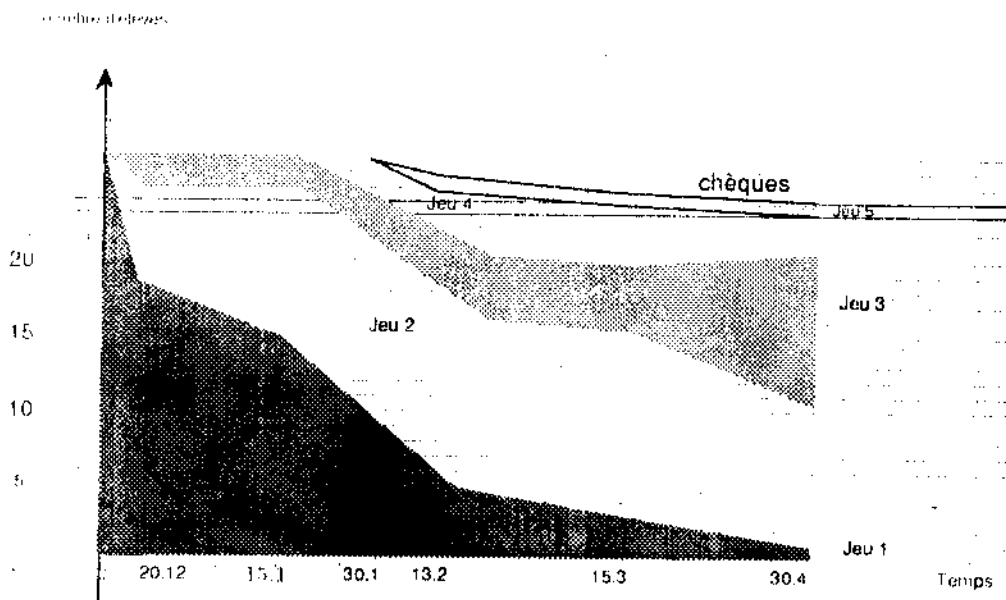
iii) Difficultés persistantes

- échanges où les nombres sont impairs. Les porces gênent toujours beaucoup les enfants.
- échanges de plusieurs billes à la fois.

C'est comme si une sorte de mécanisation s'était emparée des échanges, comme si les enfants en étaient réduits à échanger en terres une à une les agates, porces, loupes par une difficulté à penser 2 devant 1 agate, 3 devant 1 porce, 4 devant 1 loupe.

- une difficulté aussi à faire fonctionner les nombres en chaîne d'additions.

3.5. Distribution des élèves selon les différents jeux à différentes dates



Le graphe montre combien d'élèves s'adonnent à un moment donné dans la classe aux différents jeux.

Par exemple, le 30 janvier, verticalement et de bas en haut, on trouve 11 élèves qui jouent au 1er jeu, 11 au 2ème jeu, 4 au 3ème jeu, 1 au 4ème jeu. Aucun ne joue au 5ème jeu ni ne fait de chèques.

Le graphe permet de voir qu'un élève qui fait des chèques depuis le 15 mars (trajectoire pointillée) a joué vraisemblablement moins de 6 jours au 1er jeu entre le 14 et le 20 décembre, environ 1 mois au 2ème jeu, du 20 décembre au 20 janvier; 2 semaines au 3ème jeu, du 20 janvier au 8 février; moins d'un mois au 4ème jeu, du 8 février au 1er mars, et 2 semaines au 5ème jeu, du 1er mars au 15 mars. Au 30 avril, il fait des chèques depuis 6 semaines.

Les trajectoires horizontales sont les plus probables. La trajectoire, en traits interrompus, d'un enfant qui resterait au 4ème jeu jusqu'au 13 février puis franchirait tous les jeux en 2 semaines est possible mais reste, elle, assez improbable.

Le graphe montre aussi que :

- tous les enfants sauf 1 ont fini par maîtriser le 1er jeu. Le dernier est sur le point de passer lui aussi au 2ème jeu puisqu'il a 5 berlons et qu'il ne lui reste plus que 2 agates et 2 porces. Mais l'obtention du 6ème berlon lui coûtera encore 5 échanges :

- 1 agate contre 2 terres
- 1 agate contre 2 terres
- 1 porce contre 3 terres
- 10 terres contre 1 berlon

Et ces 5 échanges prendront deux séances puisque le temps d'ouverture de la banque ne permet que 3 échanges par séance.

- sauf pour les tout meilleurs, les 4 ou 5 qui font déjà des chèques et pour les 10 plus faibles, les enfants mettent à peu près le même temps pour maîtriser le 2ème jeu et ce temps est de l'ordre de 2 mois.
- Plus les enfants sont en retard par rapport aux meilleurs, plus ils mettent de temps pour franchir les étapes et notamment pour passer du 2ème au 3ème jeu.
- Le 3ème jeu semble s'étendre sur un temps très long par une forte proportion des élèves (22 sur 27) sans doute parce qu'il est l'occasion de progrès importants dont les enfants ne franchissent que très lentement les étapes.
- Le 5ème jeu, après le 4ème, ne présente pas de difficultés.

3.6. Contenu cognitif de ce jeu de la banque

1er jeu

Durant le premier jeu, la plupart des enfants ont pu obtenir 6 berlons en mettant seulement en fonctionnement leur mode habituel de comptage sans le faire progresser, sans le modifier en quoi que ce soit. Ils ne comptent pas au delà de 10.

Après le premier échange des 10 terres contre un berlon, ils ne proposent pas l'échange des autres billes en berlons mais les convertissent d'abord en terres, catégorie par catégorie et bille après bille, 1 agate contre 2 terres qu'ils posent sur leur table, puis 1 autre agate contre 2 autres terres qu'ils placent à côté des 2 premières en en comptant le total, et ainsi de suite jusqu'à compter 10 terres. Ils viennent alors changer ces 10 terres contre un berlon.

Certains enfants exceptionnellement proposent 2 billes à la fois, 2 loupes ou 2 porces. Quelques-uns seulement 5 agates en une seule fois contre 10 terres.

2me jeu

La règle du 2ème jeu interdit l'utilisation des terres pour obtenir des berlons. Mais les terres restent valeur de référence.

L'échange des 10 terres du "portefeuille" retrouvé est encore matériellement effectué en un premier temps : les 10 terres sont échangées contre 5 agates. Au deuxième temps déjà, pour l'échange des 5 agates en 1 berlon, l'enfant doit garder à l'esprit que les 5 agates valent 10 terres qui valent justement 1 berlon, ou au moins avoir confiance dans la conservation des valeurs à travers cet échange.

De fait, pour l'échange des autres billes, l'agate devient pour eux presque valeur-relai entre les terres auxquelles ils ont toujours recours, et les berlons.

Ils échangent ainsi :

		1 loupe contre 4 terres
	et	4 terres contre 2 agates
Puis encore une fois		1 loupe contre 4 terres
	et	4 terres contre 2 agates
Puis		5 agates contre 1 berlon

Certains enfants arrivent à proposer directement :

2 loupes (8 terres) et 1 agate (2 terres) contre 1 berlon.

La porce qui vaut 3 terres ne pose pas de problème aux enfants qui échangent d'abord

	2 porces contre 6 terres
puis	6 terres contre 3 agates
Et encore	2 porces contre 6 terres
puis	6 terres contre 3 agates
et enfin	5 agates contre 1 berlon

La porce pose de gros problèmes aux enfants qui essaient d'échanger :

3 porces contre 1 berlon

L'institutrice refuse l'échange en disant que 3 porces sont insuffisantes pour 1 berlon. Alors certains reviennent avec 4 porces, échange qu'elle refuse encore, cette fois parce qu'il y en a trop.

Ils sont ainsi conduits à ne pas négliger le calcul intermédiaire et en fait, s'y trompent parfois mais ne le négligent plus.

Ce deuxième jeu est très long mais fait progresser le calcul mental.

3ème et 4ème jeu

Au cours des 3ème et 4ème jeux, les enfants développent les capacités acquises au cours du 2ème jeu.

Ils comprennent le système des règles et des échanges et tout en commettant encore beaucoup d'erreurs, progressent considérablement dans leurs échanges quant :

- au nombre de billes échangées à la fois.
- à la réduction des intermédiaires entre les billes à échanger et celles à obtenir.
- aux nombres utilisés pour les calculs et qui arrivent enfin à dépasser 10.

3.7. Le jeu de la banque

Les premiers enfants à avoir surmonté les difficultés des 5 jeux et des chèques ont le désir de faire d'autres échanges.

Ils reçoivent alors le portefeuille initial auquel s'ajoutent 6 araignées.

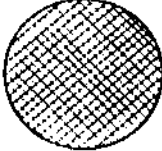
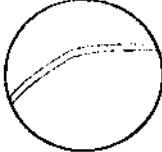
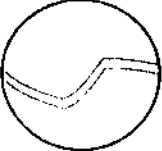
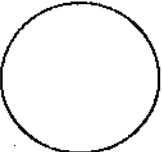
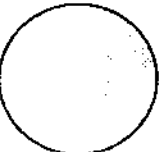
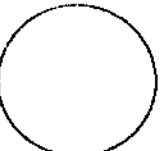
10 terres, 8 agates, 6 porces, 4 loupes, 6 araignées.

Ils échangent maintenant ces billes contre des pièces de monnaie ou des billets (90 F au total).

i) Première phase

Comme au tout début du jeu, ils proposent leurs échanges verbalement.

• Deuxième tableau des changes.

	= 1 F.	1 terre	vaut	1 F
	= 2 F.	1 agate	vaut	2 F.
	= 3 F.	1 porce	vaut	3 F.
	= 4 F.	1 loupe	vaut	4 F.
	= 5 F.	1 araignée	vaut	5 F.
	= 10 F.	1 berlon	vaut	10 F.

• Consigne

Les propositions d'échanges doivent énoncer en quelles pièces les billes sont à échanger : "j'échange 4 terres contre 2 pièces de 2 F ou contre 4 pièces de 1 F".

• Déroulement

Les enfants qui sont arrivés à ce jeu n'y éprouvent aucune difficulté.

ii) Deuxième phase

Ils proposent les échanges en remplissant un "chèque".

iii) Compte en banque

L'avoir du "portefeuille" est dématérialisé. Il n'existe que sur une fiche. Les enfants peuvent acheter ce qui est à "vendre" dans la classe mais il leur appartient de savoir à tout moment où en est leur avoir pour ne pas établir de chèques à découvert.

Ainsi apparaît la soustraction.