

**DOCTORAT DE L'ECOLE NATIONALE  
DES PONTS ET CHAUSSEES**

**Spécialité : Structures et Matériaux**

Thèse présentée par

**Denis DUHAMEL**

**L'ACOUSTIQUE DES PROBLEMES COUPLES  
FLUIDE-STRUCTURE  
APPLICATION AU CONTROLE ACTIF DU SON**

Soutenu le 7 Janvier 1994

<b>JURY</b>	<b>HAMDI M.A.</b>	Président
	<b>DESTUYNDER R.</b>	Rapporteur
	<b>OHAYON R.</b>	Rapporteur
	<b>BALABANE M.</b>	Examineur
	<b>EHLACHER A.</b>	Directeur de thèse

*Ce travail a été réalisé au Centre d'Enseignement et de Recherche en Analyse des Matériaux de l'Ecole Nationale des Ponts et Chaussées. Que tous ses membres trouvent ici l'expression de ma gratitude.*

*J'exprime tout particulièrement ma reconnaissance à A. Ehrlacher pour avoir bien voulu m'accueillir dans son laboratoire et pour avoir dirigé ma thèse.*

*Qu'il me soit permis aussi de remercier très chaleureusement M. Hamdi, P. Destuynder, R. Ohayon, M. Balabane et A. Ehrlacher qui m'ont fait l'honneur de participer au Jury.*

# Table des matières

<b>I</b>	<b>Etude de structures multicouches</b>	<b>9</b>
<b>1</b>	<b>Ondes élastiques dans un multicouche</b>	<b>11</b>
1.1	Introduction . . . . .	11
1.2	Comportement des couches viscoélastiques . . . . .	13
1.3	Solution dans les couches viscoélastiques . . . . .	15
1.4	Conditions d'interface . . . . .	17
1.5	Solution dans le fluide . . . . .	19
1.6	Interface fluide-multicouche . . . . .	21
1.7	Détermination de la solution globale . . . . .	22
1.7.1	Cas d'un milieu amont élastique . . . . .	22
1.7.2	Cas d'un milieu amont fluide . . . . .	23
1.8	Coefficient d'atténuation . . . . .	24
<b>2</b>	<b>Atténuation à travers un stratifié</b>	<b>27</b>
2.1	Couches isotropes . . . . .	27
2.2	Couches orthotropes . . . . .	30
2.3	Optimisation . . . . .	32
2.3.1	Méthode et critère . . . . .	32
2.3.2	Exemples . . . . .	35
2.4	Conclusion . . . . .	35
<b>II</b>	<b>Problèmes couplés fluide-structure en acoustique</b>	<b>37</b>
<b>1</b>	<b>Formulation du problème couplé</b>	<b>39</b>
1.1	Introduction . . . . .	39
1.2	Rappels sur l'acoustique. . . . .	40
1.2.1	Les équations dynamiques. . . . .	40
1.2.2	Cas des mouvements stationnaires . . . . .	43
1.3	Résultats théoriques en acoustique . . . . .	44
1.3.1	Les résultats d'existence et d'unicité . . . . .	44
1.3.2	Le comportement des solutions . . . . .	46
1.4	Le problème couplé . . . . .	47
1.4.1	Modélisation de la structure . . . . .	47
1.4.2	Résultats d'existence pour le problème couplé . . . . .	48

1.4.3	Les fréquences de diffusion . . . . .	52
1.5	Conclusion . . . . .	53
<b>2</b>	<b>La résolution numérique</b>	<b>55</b>
2.1	Historique des méthodes utilisées . . . . .	55
2.1.1	Les méthodes analytiques . . . . .	55
2.1.2	La T matrice . . . . .	56
2.1.3	Méthodes variationnelles et éléments finis . . . . .	57
2.1.4	Les méthodes approchées . . . . .	57
2.1.5	Autres méthodes . . . . .	58
2.2	La formulation intégrale . . . . .	58
2.2.1	Intérêt et difficultés . . . . .	58
2.2.2	Les différentes approches . . . . .	59
2.2.3	La méthode de Burton et Miller . . . . .	61
2.2.4	Les différentes régularisations . . . . .	64
2.3	Une formulation intégrale sans forte singularité . . . . .	66
2.3.1	Equation intégrale . . . . .	66
2.3.2	Equation dérivée . . . . .	69
2.3.3	Nouvelle formulation . . . . .	71
2.4	Discrétisation . . . . .	78
2.5	Intégrations numériques. . . . .	79
2.6	Couplage fluide-structure . . . . .	81
2.7	Passage dans le domaine temporel . . . . .	83
<b>3</b>	<b>Validation et exemples</b>	<b>87</b>
3.1	Comportement numérique et convergence . . . . .	87
3.1.1	Acoustique pure . . . . .	87
3.1.2	Comportement aux voisinages de coins . . . . .	91
3.1.3	Problèmes couplés . . . . .	93
3.2	Suppression des fréquences singulières . . . . .	93
3.3	Calcul de réponses temporelles . . . . .	97
<b>4</b>	<b>Pression autour d'un mur de section constante</b>	<b>109</b>
4.1	Introduction . . . . .	109
4.1.1	Principe . . . . .	110
4.2	Atténuation . . . . .	111
4.3	Applications . . . . .	112
4.3.1	Comparaison avec une solution semi-analytique . . . . .	112
4.3.2	Atténuation suivant le type de source . . . . .	113
4.4	Déplacement le long d'un mur . . . . .	116
4.4.1	Calcul . . . . .	116
4.4.2	Quelques cas particuliers . . . . .	117
4.4.3	Exemples . . . . .	118
4.5	Conclusion . . . . .	118

### III Quelques aspects du contrôle actif du son en domaine ouvert 121

<b>1</b>	<b>Contrôle actif en domaine ouvert. Régime harmonique.</b>	<b>123</b>
1.1	Principe du contrôle actif . . . . .	123
1.1.1	introduction . . . . .	123
1.2	Contrôle actif en domaine ouvert . . . . .	126
1.3	Contrôle avec une seule source secondaire . . . . .	127
1.3.1	Minimisation de $J$ . . . . .	127
1.3.2	Limitation du surbruit . . . . .	128
1.3.3	Exemples . . . . .	129
1.4	Contrôle avec plusieurs sources secondaires . . . . .	133
1.4.1	Exemples . . . . .	135
1.5	Contrôle du champ diffusé . . . . .	137
1.5.1	Exemples . . . . .	137
<b>2</b>	<b>Contrôle actif en domaine ouvert. Régime instationnaire.</b>	<b>141</b>
2.1	Dispositif de contrôle . . . . .	141
2.2	Contrôle non-causal . . . . .	144
2.2.1	Principe . . . . .	144
2.2.2	Remarques et exemples . . . . .	147
2.3	Contrôle causal . . . . .	151
2.3.1	Exemples . . . . .	153
2.4	Conclusion . . . . .	155
<b>A</b>	<b>viscoélasticité</b>	<b>159</b>
A.1	Modèle de Kelvin-Voigt . . . . .	159
A.2	Modèle de Maxwell . . . . .	160
A.3	Modèle de Zener . . . . .	160
<b>B</b>	<b>Atténuation dans une sphère</b>	<b>163</b>



# Introduction

Les nuisances engendrées par le bruit ont pu être longtemps considérées comme une contrepartie négative d'une évolution technologique et urbaine avec l'accroissement régulier du machinisme, des trafics routiers, ferroviaires et aériens. Devant l'extension du problème les efforts ont d'avantage visé à éviter une aggravation du phénomène qu'à sa véritable maîtrise. Néanmoins dans de nombreux domaines tels que la discrétion acoustique des sous-marins ou le confort des passagers des moyens de transport les problèmes de bruit sont devenus des questions majeures devant être prises en compte dès la définition du projet. Les problèmes de bruit subis par les riverains des voies ferrées ou routières sont devenues une des causes principales des obstacles rencontrés lors de la construction de nouvelles infrastructures devant les exigences de qualité de vie et d'environnement de plus en plus affirmées. Le bruit est la nuisance principale ressentie par les riverains des voies routières, affectant leur vie quotidienne, perturbant leur concentration et leurs périodes de repos et pouvant introduire des changements physiologiques. Bendtsen 1992 [16] et Lamure 1992 [149] présentent un portrait général des problèmes de bruit liés au trafic automobile en milieu urbain.

Des recherches approfondies sont menées pour réduire les bruits à la source avec des résultats significatifs mais néanmoins insuffisants par rapport aux besoins. Dans des systèmes mécaniques de tailles limitées il est souvent possible de contrôler efficacement un bruit d'origine vibratoire en diminuant cette vibration ou en limitant le bruit qu'elle engendre. Souvent existe aussi un bruit aérodynamique généré par un fluide en mouvement turbulent comme ceux produits par les systèmes de ventilation ou les moyens de transport à vitesse élevée. Dans ces situations la réduction à la source semble plus difficile et les moyens de contrôle secondaires restent le dernier rempart pour limiter les nuisances. On peut les classer en deux catégories: les moyens passifs et actifs. Les moyens passifs agissent directement par leurs propriétés mécaniques, acoustiques ou géométriques comme les isolants, les silencieux ou les écrans. Au contraire les moyens actifs génèrent une contre-perturbation en créant un second bruit à l'aide de sources secondaires pilotées par une électronique de contrôle. A partir d'informations recueillies par des capteurs (microphones par exemple) placés dans le milieu à contrôler, le dispositif, fondé sur un processeur de traitement du signal, calcule le niveau sonore à envoyer dans les sources secondaires pour parvenir à un objectif final qui est la minimisation du niveau sonore mesuré par une partie des microphones. Ces deux systèmes sont complémentaires car les moyens passifs sont efficaces à haute et moyenne fréquence tandis que les moyens actifs donnent des résultats à basse fréquence.

Le présent travail a pour but de fournir des outils de modélisation pour apporter une aide à la réalisation de moyens de contrôle passifs et actifs destinés à répondre à certains problèmes de bruit. La première partie étudie les propriétés acoustiques de stratifiés constitués de matériaux viscoélastiques mis en contact avec un fluide pour mettre en évidence leurs propriétés d'atténuation et d'isolation. Ceux-ci peuvent être utilisés en revêtement d'une structure existante créatrice de bruit pour limiter l'énergie acoustique transmise dans une zone à protéger. Les applications possibles concernent par exemple l'acoustique sous-marine.

La seconde partie est destinée à créer un outil de calcul général qui soit capable de déterminer avec précision le rayonnement et la diffraction d'ondes acoustiques par un obstacle

élastique, rigide ou avec une condition d'impédance en surface. La modélisation est fondée sur une méthode d'équation intégrale couplée à un code d'éléments-finis industriel (SAMCEF). Dans le cas particulier d'un mur antibruit infiniment long, de section constante, un outil de calcul spécifique est développé pour accéder, avec un coût en calcul réaliste, au champ de pression tridimensionnel au voisinage de l'écran. Cela permet par exemple de calculer l'effet d'atténuation en présence d'une excitation produite par une ligne de sources incohérentes.

La dernière partie se consacre à des simulations d'efficacité de dispositifs de contrôle actif. En superposant les champs de pression créés par des sources primaires et secondaires nous pouvons calculer la réduction de bruit dans un domaine de l'espace pour des excitations harmoniques ou transitoires. L'étude des paramètres du problème tels que la disposition des sources ou la longueur des filtres montre qu'une modélisation peut apporter un gain important par rapport à une approche purement orientée vers le traitement du signal.

# Première partie

## Etude de structures multicouches



# Chapitre 1

## Ondes élastiques dans un multicouche

### 1.1 Introduction

Le but de cette première partie est de décrire une méthode d'analyse de la propagation d'ondes élastiques dans un milieu composite constitué d'une superposition de couches planes aux propriétés différentes. Le stratifié est en contact avec deux milieux semi-infinis dont l'un est un fluide visqueux comme l'indique la figure 1.1. Dans ce milieu, que l'on baptisera milieu aval, se propagent les ondes que l'on souhaite contrôler et qui sont créées par le rayonnement de la structure. L'autre milieu semi-infini, le milieu amont, est solide ou fluide et contient les sources d'excitation.

Cette étude peut trouver des applications dans des problèmes d'acoustique sous-marine ou plus généralement dans toute situation où l'on essaie de réduire des vibrations ou le bruit rayonné par une structure. Dans ce but on peut interposer un matériau dont les caractéristiques sont calculées pour optimiser l'atténuation des ondes transmises dans le fluide. Un multicouche appliqué en revêtement de la structure peut constituer un bon exemple de tels matériaux. Une autre application envisagée est l'optimisation de la conception de murs antibruit pour lesquels nous pourrions calculer la capacité d'isolation par rapport au bruit transmis.

Plus précisément on se propose de déterminer la réponse d'un stratifié, l'énergie réfléchie et l'énergie transmise lorsqu'il est soumis à une excitation sous forme d'onde plane. L'onde incidente génère une ou plusieurs ondes réfléchies ainsi que des ondes transmises qui pénètrent dans le multicouche et, après de multiples réflexions et transmissions, induisent finalement des ondes rayonnées dans le fluide aval. Les différents constituants du multicouche seront des matériaux viscoélastiques que l'on choisira orthotropes, c'est à dire symétriques par rapport à trois plans orthogonaux, ce qui est le cas des matériaux composites usuels. La viscosité et l'anisotropie pourront ainsi influencer la propagation. Dans une seconde étape nous pourrions faire varier les caractéristiques mécaniques des différents milieux pour améliorer l'atténuation.

Deux types principaux d'approches permettent de résoudre ce problème. Il peut être posé globalement sur l'ensemble du stratifié et la résolution conduit à chercher la solution sur toutes les couches simultanément. Le problème devient cependant très lourd dès que le nombre de couches augmente. La deuxième approche, qui a été largement préférée dans le

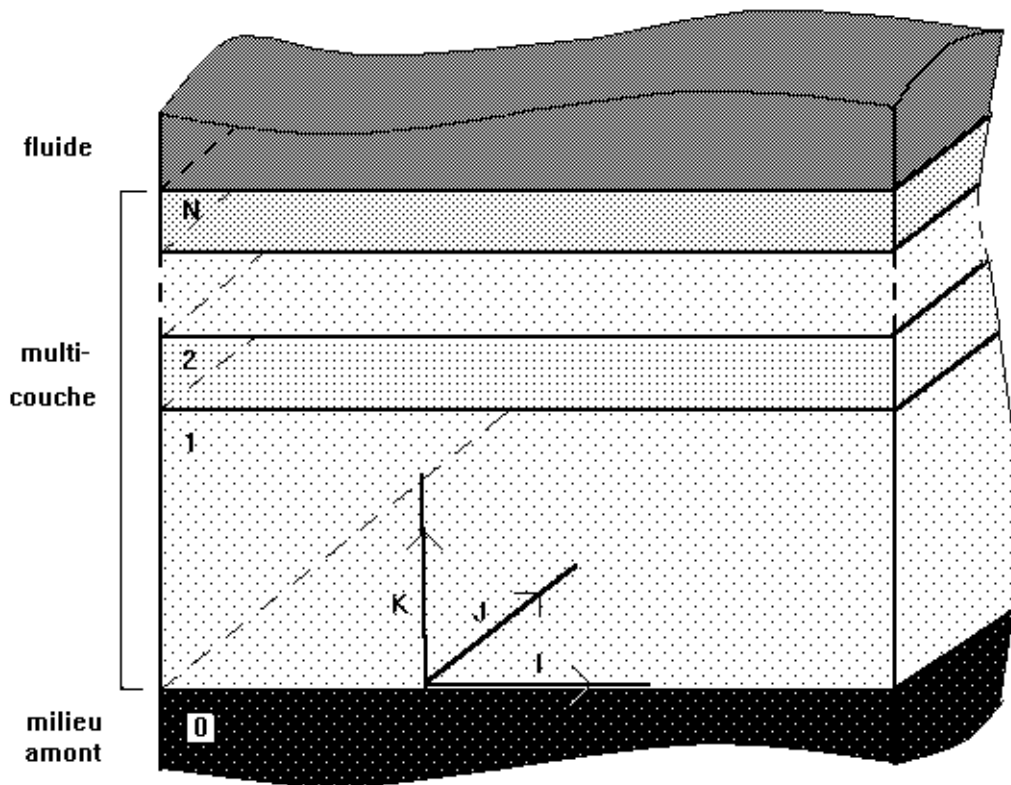


FIG. 1.1 – *Multicouche en contact avec un fluide.*

passé, consiste à utiliser le formalisme des matrices de transfert pour calculer la solution à une interface à partir de la solution à l'interface précédente et à relier de proche en proche les solutions dans les deux milieux semi-infinis. Cette méthode peut cependant conduire dans certains cas à une croissance ou une décroissance exponentielle des coefficients des matrices. On essaiera d'en limiter les effets par des normalisations. Thomson 1950 [244], qui semble être le précurseur de cette démarche, a posé les bases du formalisme des matrices de transfert pour étudier la propagation d'ondes à travers un multicouche de matériaux élastiques isotropes et en a déduit les coefficients de réflexion et de transmission. Son approche est toutefois limitée au cas où le module de cisaillement est identique pour toutes les couches. Shaw 1969 [230] a levé la limitation précédente et a généralisé aux milieux visco-élastiques. Parallèlement on s'est beaucoup intéressé au cas d'un dioptre. Mott 1971 [178], Henneke 1976 [115] et Arikan 1989 [8] ont développé l'étude de l'interface fluide-solide en montrant que les phénomènes d'angles critiques au-delà desquels il y a réflexion totale devaient être complétés par la notion d'angle de Rayleigh pour lequel le coefficient de réflexion est proche de zéro et qui physiquement correspond à la création d'une onde de surface. Henneke 1972 [114] et Rokhlin 1986 [214] ont développé le cas d'une interface entre deux solides anisotropes. Ils ont clarifié le concept d'angles critiques en montrant qu'ils devaient être définis à partir des vecteurs flux d'énergie et non à partir de la direction des vecteurs d'onde. Folds 1977 [84] a calculé et vérifié expérimentalement les coefficients de réflexion pour quelques stratifiés isotropes à 1, 2 ou 3 couches.

Le développement ultérieur a consisté d'une part à modifier le comportement des inter-

faces (Nayfeh 1988 [185]) en remplaçant le collage parfait entre certaines couches par des conditions de glissement où seules les composantes normales des vitesses et des efforts sont continues. La composante tangente des efforts est alors nulle. Rokhlin 1991 [213] a généralisé ce comportement en introduisant une fine couche viscoélastique à une interface ce qui se traduit par un couplage complexe entre les composantes des efforts et des vitesses. Cervenka 1991 [35] s'est intéressé à des multicouches composés de solides isotropes et de fluides.

On s'est d'autre part récemment intéressé aux stratifiés constitués de matériaux anisotropes. Nayfeh 1988 [183] a étudié numériquement et expérimentalement la réflexion des ondes sur une plaque composite uniaxiale immergée dans l'eau en faisant varier l'angle d'incidence et l'orientation des fibres dans le plan de la plaque. Nayfeh 1991 [182], Chimenti 1990 [43], Nayfeh 1991 [184] ont reformulé la propagation des ondes dans des stratifiés anisotropes en se limitant toutefois aux cas où le plan des couches est un plan de symétrie pour chaque matériau.

On se propose d'étudier une situation un peu plus générale où les différentes orientations des matériaux pourront être quelconque par rapport à la géométrie du stratifié et en introduisant de plus de la viscoélasticité. Ces deux effets seront testés pour en estimer l'intérêt sur l'efficacité du multicouche à atténuer les ondes.

Notre démarche utilisera le formalisme des matrices de transfert et consistera à chercher d'abord les solutions élémentaires dans chaque couche qui sera considérée comme un milieu tridimensionnel. Ensuite l'écriture de la continuité des déplacements et des contraintes à chaque interface (supposée parfaite) permettra d'obtenir des relations entre la solution dans le fluide et celle existant dans la première couche (0). La solution globale s'en déduira. Il sera alors possible de définir un facteur d'amortissement mesurant le rapport de l'énergie transmise à l'énergie incidente. On pourra tracer les courbes d'atténuation en fonction de la fréquence pour différents multicouches et pour différents types d'ondes incidentes.

Dans une dernière étape le coefficient d'atténuation servira de critère dans une recherche de minimisation de l'amplitude de l'onde rayonnée dans une bande de fréquence donnée. L'optimisation sera réalisée numériquement par rapport à quelques paramètres physiques définissant la structure, principalement les épaisseurs des couches. Le nombre de travaux liés à ce type d'optimisation est assez restreint. On peut citer cependant Nicolas-Vullierme 1990 [191] et Makris 1986 [161] qui ont montré la nécessité de faire une optimisation sous contraintes pour les données physiques si l'on veut obtenir des solutions réalistes.

## 1.2 Comportement des couches viscoélastiques

Avant de traiter les problèmes de propagation d'ondes, commençons par préciser brièvement le comportement dynamique des matériaux utilisés. Une couche est constituée d'un matériau viscoélastique orthotrope dont les directions de symétrie sont a priori quelconques par rapport au plan des couches. Notons  $(\mathbf{I}, \mathbf{J}, \mathbf{K})$  le repère global de la structure et  $(\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k})$  le repère naturel de la couche, que l'on suppose indépendant de la fréquence, et dans lequel la

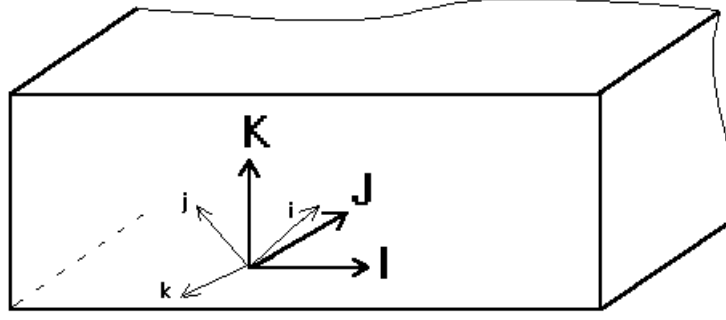


FIG. 1.2 – Repères dans une couche.

loi de comportement s'écrit

$$\begin{pmatrix} \sigma_{11} \\ \sigma_{22} \\ \sigma_{33} \\ \sigma_{23} \\ \sigma_{13} \\ \sigma_{12} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} C_{11} & C_{12} & C_{13} & 0 & 0 & 0 \\ C_{21} & C_{22} & C_{23} & 0 & 0 & 0 \\ C_{31} & C_{32} & C_{33} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & C_{44} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & C_{55} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & C_{66} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \epsilon_{11} \\ \epsilon_{22} \\ \epsilon_{33} \\ 2\epsilon_{23} \\ 2\epsilon_{13} \\ 2\epsilon_{12} \end{pmatrix} \quad (1.1)$$

$\sigma_{ij}$  sont les composantes du tenseur des contraintes et  $\epsilon_{ij}$  celles du tenseur des déformations. Les  $C_{ij}$  sont des grandeurs complexes dépendant de la pulsation  $\omega$  dans le cas général. Quelques exemples de comportements viscoélastiques sont donnés en annexe.

Il est préférable de poser le problème global dans le repère  $(\mathbf{I}, \mathbf{J}, \mathbf{K})$  où les composantes tangentés des vecteurs d'ondes sont constantes. Il faut effectuer un changement de base sur le tenseur des coefficients d'élasticité. On repère  $(\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k})$  par rapport à  $(\mathbf{I}, \mathbf{J}, \mathbf{K})$  par sa matrice de passage qui s'écrit

$$\mathbf{P} = \begin{pmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ p_{11} & p_{12} & p_{13} \\ p_{21} & p_{22} & p_{23} \\ p_{31} & p_{32} & p_{33} \end{pmatrix} \begin{matrix} \mathbf{I} \\ \mathbf{J} \\ \mathbf{K} \end{matrix} \quad (1.2)$$

Les colonnes de la matrice sont constituées des vecteurs  $(\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k})$ . La matrice de passage de  $(\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k})$  à  $(\mathbf{I}, \mathbf{J}, \mathbf{K})$  est simplement  $\mathbf{P}^{-1} = \mathbf{P}^T$ .

La formule de changement de base d'un tenseur permet de trouver les coefficients d'élasticité dans la base  $(\mathbf{I}, \mathbf{J}, \mathbf{K})$ . Nous avons

$$C'_{ijkl} = p_{i\alpha} p_{j\beta} p_{k\gamma} p_{l\delta} C_{\alpha\beta\gamma\delta} \quad (1.3)$$

où  $C'_{ijkl}$  sont les coordonnées dans la base  $(\mathbf{I}, \mathbf{J}, \mathbf{K})$  et  $C_{\alpha\beta\gamma\delta}$  celles dans la base  $(\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k})$ . Nous parlerons indifféremment de composante 1 ou x, 2 ou y, 3 ou z.

### 1.3 Solution dans les couches viscoélastiques

L'onde excitatrice a un vecteur déplacement du type

$$\mathbf{u}(\mathbf{x}) = \mathbf{U}^0 e^{i(\mathbf{k}^0 \cdot \mathbf{x} - \omega t)} \quad (1.4)$$

et arrive sur le multicouche en provenance d'un milieu amont (0) qui est soit viscoélastique soit constitué du même fluide que le milieu aval. La direction du vecteur d'onde  $\mathbf{k}$  et l'amplitude  $\mathbf{U}^0$ , qui définissent complètement l'onde incidente, sont des données du problème. Dans le cas viscoélastique isotrope, cette onde incidente peut être longitudinale, c'est à dire  $\mathbf{U}^0$  et  $\mathbf{k}$  de mêmes directions, ou transverse ( $\mathbf{U}^0$  et  $\mathbf{k}$  perpendiculaires) suivant la polarisation de  $\mathbf{U}^0$ .

Les relations de continuité du vecteur déplacement et du vecteur contrainte à chaque interface imposent que la solution dans la structure soit composée d'une superposition d'ondes planes telles que les composantes parallèles aux couches des vecteurs d'ondes soient constantes et égales à celles de l'onde incidente ce que l'on peut écrire sous la forme

$$\mathbf{k}^p \wedge \mathbf{K} = \mathbf{k}^{p-1} \wedge \mathbf{K} = \dots = \mathbf{k}^0 \wedge \mathbf{K} \quad (1.5)$$

$\mathbf{K}$  est le vecteur unitaire du repère global qui est perpendiculaire au plan des couches. On peut remarquer que tous les vecteurs d'onde sont situés dans un même plan défini par  $(k_x^0, k_y^0, 0)$  et  $(0, 0, 1)$  qui est a priori sans rapport avec les directions de symétrie des couches. Tous les vecteurs d'onde sont normaux aux couches si le vecteur d'onde incident l'est aussi. De même la fréquence des différentes ondes est aussi égale à celle de l'onde incidente. La première étape consiste à déterminer, dans chaque couche, toutes les ondes vérifiant ces conditions.

Dans chaque couche les solutions en ondes planes sont du type

$$\mathbf{u}(\mathbf{x}) = \mathbf{U} e^{i(\mathbf{k} \cdot \mathbf{x} - \omega t)} \quad (1.6)$$

$\omega$ ,  $k_x$  et  $k_y$  étant déterminés par l'onde incidente, il reste à trouver  $k_z$  et  $\mathbf{U}$ .

La fonction précédente vérifie l'équation des ondes

$$\sigma_{ij,j} = \rho \frac{\partial^2 u_i}{\partial t^2} \quad (1.7)$$

avec

$$\sigma_{ij} = C_{ijkl} \epsilon_{kl} = i C_{ijkl} k_k U_l e^{i(\mathbf{k} \cdot \mathbf{x} - \omega t)} \quad (1.8)$$

ce qui conduit au système

$$(\Gamma_{il} - \rho \omega^2 \delta_{il}) U_l = 0 \quad (1.9)$$

avec

$$\Gamma_{il} = C_{ijkl} k_k k_j \quad (1.10)$$

$$\delta_{il} = \begin{cases} 1 & \text{si } i = l \\ 0 & \text{sinon} \end{cases} \quad (1.11)$$

$\Gamma_{il}$  est le tenseur de Christoffel.

Ce n'est pas un problème de calcul de valeurs propres ordinaire puisque l'inconnue est ici  $k_3$ . Il peut cependant se mettre sous la forme

$$(k_3^2 \mathbf{K} + k_3 \mathbf{C} + \mathbf{M})\mathbf{U} = \mathbf{O} \quad (1.12)$$

où  $\mathbf{K}$ ,  $\mathbf{C}$  et  $\mathbf{M}$  sont des matrices  $3 \times 3$  symétriques. Plus précisément

$$K_{ij} = C_{i33j} \quad (1.13)$$

$$C_{ij} = \sum_{k=1}^2 C_{i3kj} k_k + \sum_{k=1}^2 C_{ik3j} k_k \quad (1.14)$$

$$M_{ij} = \sum_{k,l=1}^2 C_{iklj} k_k k_l - \rho \omega^2 \delta_{ij} \quad (1.15)$$

Dans le cas où le plan  $(\mathbf{i}, \mathbf{j})$  est un plan de symétrie du matériau il est possible de se ramener à une équation du troisième degré en  $k_3^2$  (voir Chimenti 1990 [43], Nayfeh 1991 [182], Nayfeh 1991 [184] et Nayfeh 1988 [183]). Comme il a été indiqué dans l'introduction on se propose ici de traiter le problème le plus général sans symétrie particulière. Plutôt que d'annuler le déterminant et de chercher numériquement les racines du polynôme d'ordre 6 nous nous ramenons à une situation assez classique en remarquant que le problème précédent est équivalent à la recherche des valeurs propres et des vecteurs propres de la matrice  $6 \times 6$  suivante

$$\mathbf{P} = \begin{pmatrix} \mathbf{O} & \mathbf{I} \\ -\mathbf{K}^{-1}\mathbf{M} & -\mathbf{K}^{-1}\mathbf{C} \end{pmatrix} \quad (1.16)$$

(Voir Chatelin 1986 [36] pour l'inspiration de cette méthode). En effet

$$\mathbf{P} \begin{pmatrix} \mathbf{x} \\ \mathbf{y} \end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix} \mathbf{x} \\ \mathbf{y} \end{pmatrix} \quad (1.17)$$

s'écrit

$$\begin{cases} \mathbf{y} = \lambda \mathbf{x} \\ -\mathbf{K}^{-1}\mathbf{M}\mathbf{x} - \mathbf{K}^{-1}\mathbf{C}\mathbf{y} = \lambda \mathbf{y} \end{cases} \quad (1.18)$$

$$\begin{cases} \mathbf{y} = \lambda \mathbf{x} \\ \lambda^2 \mathbf{K}\mathbf{x} + \lambda \mathbf{C}\mathbf{x} + \mathbf{M}\mathbf{x} = \mathbf{O} \end{cases} \quad (1.19)$$

Le vecteur propre associé à la valeur propre  $\lambda$  est donc  $(\mathbf{x}, \lambda \mathbf{x})$  et

$$\begin{cases} k_3 = \lambda \\ \mathbf{U} = \mathbf{x} \end{cases} \quad (1.20)$$

est alors une solution de 1.12 et réciproquement.

La résolution numérique, par un algorithme de Jacobi adapté au cas de matrices complexes, fournit les 6 couples  $(k_3^j, \mathbf{U}_j)_{1 \leq j \leq 6}$  solutions pour chaque couche de matériau. Dans la couche  $p$  la solution s'écrit donc sous la forme

$$\mathbf{u}_p(\mathbf{x}) = \sum_{j=1}^6 A_j^p e^{i\mathbf{k}_j^p \cdot \mathbf{x}} \mathbf{U}_j^p \quad (1.21)$$

Des coordonnées locales sont définies dans chaque couche pour que la cote  $z = 0$  corresponde à l'interface p-1/p et la cote  $z = L_p$  à l'interface p/p+1 ( $L_p$  est l'épaisseur de la couche p). Dans l'expression précédente les inconnues sont les amplitudes  $A_j^p$  des 6 ondes de la couche. Pour poursuivre le calcul il faut relier les amplitudes d'une couche aux amplitudes des couches voisines.

## 1.4 Conditions d'interface

On suppose que les liaisons entre les couches sont parfaites ce qui se traduit par la continuité des déplacements et des contraintes à chaque interface. Avec les notations précédentes la continuité du déplacement entre les couches p et p+1 s'écrit

$$\sum_{j=1}^6 A_j^p e^{ik_j^p \cdot L_p} \mathbf{U}_j^p = \sum_{j=1}^6 A_j^{p+1} \mathbf{U}_j^{p+1} \quad (1.22)$$

et fournit 3 équations par projection sur les axes de coordonnées. Le vecteur contrainte d'interface a pour coordonnées  $t_i = \sigma_{i3}$  et peut s'exprimer en fonction des coefficients  $A_j^p$  et  $A_j^{p+1}$ . La loi de comportement donne une première relation

$$\begin{pmatrix} \sigma_{11} \\ \sigma_{22} \\ \sigma_{33} \\ \sigma_{23} \\ \sigma_{13} \\ \sigma_{12} \end{pmatrix} = (C_{ij}) \begin{pmatrix} \epsilon_{11} \\ \epsilon_{22} \\ \epsilon_{33} \\ 2\epsilon_{23} \\ 2\epsilon_{13} \\ 2\epsilon_{12} \end{pmatrix} \quad (1.23)$$

et la formule 1.21 donnant le vecteur déplacement conduit aux expressions suivantes pour les coordonnées du tenseur des déformations  $\epsilon$  dans une couche.

$$\begin{aligned} \epsilon_{11}(\mathbf{x}) &= i \sum_{j=1}^6 k_x^j e^{i\mathbf{k}^j \cdot \mathbf{x}} U_x^j A_j \\ \epsilon_{22}(\mathbf{x}) &= i \sum_{j=1}^6 k_y^j e^{i\mathbf{k}^j \cdot \mathbf{x}} U_y^j A_j \\ \epsilon_{33}(\mathbf{x}) &= i \sum_{j=1}^6 k_z^j e^{i\mathbf{k}^j \cdot \mathbf{x}} U_z^j A_j \\ 2\epsilon_{23}(\mathbf{x}) &= i \sum_{j=1}^6 e^{i\mathbf{k}^j \cdot \mathbf{x}} (k_z^j U_y^j + k_y^j U_z^j) A_j \\ 2\epsilon_{13}(\mathbf{x}) &= i \sum_{j=1}^6 e^{i\mathbf{k}^j \cdot \mathbf{x}} (k_x^j U_z^j + k_z^j U_x^j) A_j \\ 2\epsilon_{12}(\mathbf{x}) &= i \sum_{j=1}^6 e^{i\mathbf{k}^j \cdot \mathbf{x}} (k_x^j U_y^j + k_y^j U_x^j) A_j \end{aligned} \quad (1.24)$$

d'où les coefficients de la matrice  $\mathbf{B}_p$  telle que

$$\begin{pmatrix} \epsilon_{11} \\ \epsilon_{22} \\ \epsilon_{33} \\ 2\epsilon_{23} \\ 2\epsilon_{13} \\ 2\epsilon_{12} \end{pmatrix} = \mathbf{B}_p(x, y, z) \begin{pmatrix} A_1 \\ A_2 \\ A_3 \\ A_4 \\ A_5 \\ A_6 \end{pmatrix} \quad (1.25)$$

et on obtient la relation désirée

$$\begin{pmatrix} \sigma_{11} \\ \sigma_{22} \\ \sigma_{33} \\ \sigma_{23} \\ \sigma_{13} \\ \sigma_{12} \end{pmatrix} = \mathbf{CB}_p(x, y, z) \begin{pmatrix} A_1 \\ A_2 \\ A_3 \\ A_4 \\ A_5 \\ A_6 \end{pmatrix} \quad (1.26)$$

ce qui donne les expressions de  $\sigma_{13}$ ,  $\sigma_{23}$ ,  $\sigma_{33}$  en fonction des inconnues  $A_1, A_2, A_3, A_4, A_5, A_6$  et de la position dans la couche. L'écriture de la continuité du vecteur contrainte donne 3 équations supplémentaires reliant  $(A_j^{p+1})_{j=1,6}$  à  $(A_j^p)_{j=1,6}$ . Pour améliorer le conditionnement des matrices chaque équation a été normalisée pour que son plus grand coefficient soit de module égal à un. Les 6 équations obtenues se mettent sous la forme suivante

$$\mathbf{M}_p \begin{pmatrix} A_1^p \\ A_2^p \\ A_3^p \\ A_4^p \\ A_5^p \\ A_6^p \end{pmatrix} = \mathbf{N}_{p+1} \begin{pmatrix} A_1^{p+1} \\ A_2^{p+1} \\ A_3^{p+1} \\ A_4^{p+1} \\ A_5^{p+1} \\ A_6^{p+1} \end{pmatrix} \quad (1.27)$$

où les matrices  $\mathbf{M}$  et  $\mathbf{N}$  sont définies par

$$\begin{aligned} M_{1j} &= e^{ik_{jz}^p \cdot L_p} \mathbf{U}_j^p \cdot \mathbf{I} \\ M_{2j} &= e^{ik_{jz}^p \cdot L_p} \mathbf{U}_j^p \cdot \mathbf{J} \\ M_{3j} &= e^{ik_{jz}^p \cdot L_p} \mathbf{U}_j^p \cdot \mathbf{K} \\ M_{4j} &= (\mathbf{CB}_{5j})_p(0, 0, L_p) \\ M_{5j} &= (\mathbf{CB}_{4j})_p(0, 0, L_p) \\ M_{6j} &= (\mathbf{CB}_{3j})_p(0, 0, L_p) \\ N_{1j} &= \mathbf{U}_j^{p+1} \cdot \mathbf{I} \\ N_{2j} &= \mathbf{U}_j^{p+1} \cdot \mathbf{J} \\ N_{3j} &= \mathbf{U}_j^{p+1} \cdot \mathbf{K} \\ N_{4j} &= (\mathbf{CB}_{5j})_{p+1}(0, 0, 0) \\ N_{5j} &= (\mathbf{CB}_{4j})_{p+1}(0, 0, 0) \\ N_{6j} &= (\mathbf{CB}_{3j})_{p+1}(0, 0, 0) \end{aligned} \quad (1.28)$$

La normalisation précédente améliore le conditionnement des matrices  $\mathbf{M}_p$  et  $\mathbf{N}_{p+1}$ . On obtient finalement la relation reliant les amplitudes de deux couches adjacentes.

$$\left(A_j^{p+1}\right) = \mathbf{T}_p \left(A_j^p\right) \quad (1.29)$$

avec

$$\mathbf{T}_p = \mathbf{N}_{p+1}^{-1} \mathbf{M}_p \quad (1.30)$$

Pour les N couches du composite il s'ensuit

$$\left(A_j^N\right) = \mathbf{T} \left(A_j^1\right) \quad (1.31)$$

avec

$$\mathbf{T} = \mathbf{T}_{N-1} \dots \mathbf{T}_1 \quad (1.32)$$

La solution dans la dernière couche est ainsi reliée à la solution dans la première couche. Il reste à étudier le comportement du fluide et à écrire les conditions d'interface fluide-structure pour achever le calcul.

## 1.5 Solution dans le fluide

Nous nous placerons dans le cadre de l'acoustique linéaire. Le milieu est régi par les équations suivantes, obtenues par linéarisation des équations de Navier-Stoke (pour plus de détails voir la partie II).

$$\begin{aligned} \frac{\partial \tilde{\rho}}{\partial t} + \rho_0 \operatorname{div} \mathbf{v} &= 0 \\ \rho_0 \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + \nabla p &= (\lambda + \mu) \nabla (\operatorname{div} \mathbf{v}) + \mu \Delta \mathbf{v} \\ p - p_0 &= (\tilde{\rho} - \rho_0) c^2 \end{aligned} \quad (1.33)$$

avec

- $p$  pression,  $p_0$  pression de référence
- $\tilde{\rho}$  masse volumique
- $\rho_0$  masse volumique du fluide au repos
- $\mathbf{v}$  champ de vitesse
- $\lambda, \mu$  coefficients de viscosité
- $c$  vitesse du son dans le fluide

De nouveau les solutions sont cherchées sous la forme d'ondes planes, soit

$$\begin{aligned} \mathbf{v} &= \mathbf{V} e^{i(\mathbf{k} \cdot \mathbf{x} - \omega t)} \\ p &= p_0 + P e^{i(\mathbf{k} \cdot \mathbf{x} - \omega t)} \\ \tilde{\rho} &= \rho_0 + \rho e^{i(\mathbf{k} \cdot \mathbf{x} - \omega t)} \end{aligned} \quad (1.34)$$

La conservation de la masse donne

$$-i\omega\rho + \rho_0 i\mathbf{k}\cdot\mathbf{V} = 0 \quad (1.35)$$

soit

$$\rho = \frac{\rho_0}{\omega}\mathbf{k}\cdot\mathbf{V} \quad (1.36)$$

La conservation de la quantité de mouvement (vectorielle) se transforme en

$$-i\omega\rho_0\mathbf{V} + i\frac{\rho_0 c^2}{\omega}(\mathbf{k}\cdot\mathbf{V})\mathbf{k} + (\lambda + \mu)(\mathbf{k}\cdot\mathbf{V})\mathbf{k} + \mu |\mathbf{k}|^2 \mathbf{V} = \mathbf{O} \quad (1.37)$$

On résout comme dans le cas de l'élasticité en cherchant des ondes longitudinales et transverses.

\* pour  $\mathbf{k}$  et  $\mathbf{V}$  parallèles il y a une solution si

$$-i\omega\rho_0 + (i\frac{\rho_0 c^2}{\omega} + \lambda + 2\mu) |\mathbf{k}|^2 = 0 \quad (1.38)$$

soit

$$|\mathbf{k}|^2 = \frac{\omega^2}{c^2} \frac{1}{1 - i\frac{\omega}{\rho_0 c^2}(\lambda + 2\mu)} \quad (1.39)$$

\* pour  $\mathbf{k}$  et  $\mathbf{V}$  orthogonaux

$$|\mathbf{k}|^2 = i\omega\frac{\rho_0}{\mu} \quad (1.40)$$

Comme  $|\mathbf{k}|^2 = k_x^2 + k_y^2 + k_z^2$  et que  $k_x$  et  $k_y$  sont connus  $k_z$  s'en déduit pour les 6 solutions.

Pour le milieu aval l'énergie est rayonnée et l'amplitude est bornée il faut donc éliminer les 3 ondes qui sont à croissance exponentielle et ne conserver que celles telles que  $Im(k_z) > 0$ . Si  $Im(k_z) = 0$  on conserve les solutions sortantes telles que  $Re(k_z) > 0$ .

La solution dans le fluide est donc

$$\mathbf{v} = \sum_{j=1}^3 e^{i\mathbf{k}_j \cdot \mathbf{x}} \mathbf{V}_j B_j \quad (1.41)$$

avec  $B_1$ ,  $B_2$  et  $B_3$  inconnues à déterminer.

Lorsque le milieu amont est fluide la solution s'y écrit

$$\mathbf{v} = \sum_{j=1}^6 e^{i\mathbf{k}_j \cdot \mathbf{x}} \mathbf{V}_j B_j^0 \quad (1.42)$$

avec  $B_1^0$ ,  $B_2^0$ ,  $B_3^0$  coefficients de l'onde incidente connus et  $B_4^0$ ,  $B_5^0$ ,  $B_6^0$  coefficients de l'onde réfléchie à déterminer.

## 1.6 Interface fluide-multicouche

Le fluide aval est visqueux. Les conditions aux limites sont les mêmes que pour une interface entre solides. Il faut de nouveau écrire la continuité de la vitesse et de la contrainte à l'interface sur la dernière couche du stratifié.

**pour la vitesse**

$$-i\omega \sum_{j=1}^6 A_j e^{ik_{jz}L} \mathbf{U}_j = \sum_{j=1}^3 B_j \mathbf{V}_j \quad (1.43)$$

On obtient 3 équations.

**pour la contrainte**

Le tenseur des contraintes dans le fluide est

$$\sigma_{jk} = (\lambda \operatorname{div}(\mathbf{v}) - p) \delta_{jk} + \mu \left( \frac{\partial v_j}{\partial x_k} + \frac{\partial v_k}{\partial x_j} \right) \quad (1.44)$$

avec

$$\frac{\partial v_j}{\partial x_k} = i \sum_{l=1}^3 k_k^l e^{i\mathbf{k}_l \cdot \mathbf{x}} V_j^l B_l \quad (1.45)$$

$$p = \frac{\rho_0 c^2}{\omega} \sum_{l=1}^3 e^{i\mathbf{k}_l \cdot \mathbf{x}} (\mathbf{V}_l \cdot \mathbf{k}_l) B_l \quad (1.46)$$

les expressions de  $\sigma_{13}$ ,  $\sigma_{23}$  et  $\sigma_{33}$  à l'interface s'en déduisent

$$\begin{aligned} \sigma_{13} &= i\mu \sum_{l=1}^3 (V_x^l k_z^l + V_z^l k_x^l) B_l \\ \sigma_{23} &= i\mu \sum_{l=1}^3 (V_y^l k_z^l + V_z^l k_y^l) B_l \\ \sigma_{33} &= 2i\mu \sum_{l=1}^3 V_z^l k_z^l B_l + \left( i\lambda - \frac{\rho_0 c^2}{\omega} \right) \sum_{l=1}^3 (\mathbf{k}^l \cdot \mathbf{V}^l) B_l \end{aligned} \quad (1.47)$$

La continuité de la contrainte donne les 3 autres équations et peut se mettre sous la forme

$$\mathbf{V} (A_j) = \mathbf{S} (B_j) \quad (1.48)$$

où  $\mathbf{V}$  est une matrice  $3 \times 6$  et  $\mathbf{S}$  une matrice  $3 \times 3$  dont les coefficients sont donnés par les relations précédentes. La condition d'interface fluide-multicouche est alors

$$\mathbf{M}(0, 0, L) (A_j) = \begin{pmatrix} \mathbf{S}' \\ \mathbf{S} \end{pmatrix} (B_j) \quad (1.49)$$

où  $\mathbf{M}$  est la matrice définie précédemment dans le cas d'une interface entre solides et

$$S'_{ij} = \frac{V_i^j}{-i\omega} \quad (1.50)$$

En écrivant les matrices précédentes on normalise de nouveau les différentes équations pour améliorer le conditionnement.

Le cas où le milieu aval est du type viscoélastique est légèrement différent. Il suffirait de ne conserver parmi les 6 solutions déterminées à la section 1.3 que les 3 qui correspondent à des ondes se dirigeant vers l'infini soit  $Im(k_z) > 0$  ou  $Re(k_z) > 0$  si  $Im(k_z) = 0$  pour un milieu isotrope (dans le cas d'un milieu anisotrope il faudrait conserver les ondes correspondant à un flux d'énergie dirigé vers les  $z$  positifs). Les conditions de continuité du déplacement et du vecteur contrainte s'écriraient comme précédemment.

## 1.7 Détermination de la solution globale

Nous avons maintenant tous les éléments nécessaires à la résolution du problème global. On distinguera deux cas suivant la nature du milieu contenant l'onde incidente.

### 1.7.1 Cas d'un milieu amont élastique

Rappelons les équations obtenues :

$$(A_j^N) = \mathbf{T} \cdot \mathbf{T}_0 (A_j^0) \quad (1.51)$$

qui traduit la relation existant entre la solution dans le milieu amont (0) et la solution dans la dernière couche du composite.

$$\mathbf{M}_N (A_j^N) = \begin{pmatrix} \mathbf{S}' \\ \mathbf{S} \end{pmatrix} (B_j) \quad (1.52)$$

traduit la condition d'interface fluide multicouche sur la dernière couche. Les  $A_j^0$  sont les coefficients des 6 ondes dans le milieu amont; 3 d'entre eux correspondent à l'onde incidente et sont donc des données du problème. Par renumérotation éventuelle on peut supposer qu'il s'agit de  $A_1^0$ ,  $A_2^0$  et  $A_3^0$ . D'où

$$\mathbf{M}_N \mathbf{T} \mathbf{T}_0 \begin{pmatrix} A_1^0 \\ A_2^0 \\ A_3^0 \\ A_4^0 \\ A_5^0 \\ A_6^0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{S}' \\ \mathbf{S} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} B_1 \\ B_2 \\ B_3 \end{pmatrix} \quad (1.53)$$

ce que l'on peut mettre sous la forme :

$$\mathbf{A} \begin{pmatrix} A_1^0 \\ A_2^0 \\ A_3^0 \end{pmatrix} + \mathbf{B} \begin{pmatrix} A_4^0 \\ A_5^0 \\ A_6^0 \end{pmatrix} = \mathbf{C} \begin{pmatrix} B_1 \\ B_2 \\ B_3 \end{pmatrix} \quad (1.54)$$

où  $\mathbf{A}$ ,  $\mathbf{B}$  et  $\mathbf{C}$  sont des matrices 6x3 définies à partir de la relation précédente. On normalise de nouveau les différentes équations et on regroupe les inconnues pour obtenir

$$\begin{pmatrix} C_{11} & C_{12} & C_{13} & -B_{11} & -B_{12} & -B_{13} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ C_{61} & C_{62} & C_{63} & -B_{61} & -B_{62} & -B_{63} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} B_1 \\ B_2 \\ B_3 \\ A_4^0 \\ A_5^0 \\ A_6^0 \end{pmatrix} = \mathbf{A} \begin{pmatrix} A_1^0 \\ A_2^0 \\ A_3^0 \end{pmatrix} \quad (1.55)$$

qui constitue l'équation finale. On déduit alors  $B_1, B_2, B_3, A_4^0, A_5^0, A_6^0$  en fonction de  $A_1^0, A_2^0, A_3^0$ . Les autres coefficients  $A_j^p$  se déterminent facilement, ce qui permet de trouver la solution en tout point de la structure.

À l'interface 0/1 la solution est

$$\mathbf{u} = \sum_{j=1}^6 A_j^1 \mathbf{U}_j^1 \quad (1.56)$$

et à une distance  $d$  dans le fluide

$$\mathbf{v} = \sum_{j=1}^3 e^{ik_z^j d} \mathbf{V}_j B_j \quad (1.57)$$

L'onde incidente est

$$\mathbf{u}_I(\mathbf{x}) = \sum_{j=1}^3 A_j^0 \mathbf{U}_j^0 e^{i\mathbf{k}_j^0 \cdot \mathbf{x}} \quad (1.58)$$

et l'onde réfléchie

$$\mathbf{u}_R(\mathbf{x}) = \sum_{j=4}^6 A_j^0 \mathbf{U}_j^0 e^{i\mathbf{k}_j^0 \cdot \mathbf{x}} \quad (1.59)$$

S'intéresser à la solution à une distance  $d$  permet d'éliminer les phénomènes de couche limite au voisinage de la frontière avec le composite et de concentrer l'étude sur la partie réellement rayonnée.

## 1.7.2 Cas d'un milieu amont fluide

Les équations de base sont maintenant

$$(A_j^N) = \mathbf{T} (A_j^1) \quad (1.60)$$

qui traduit la relation existant entre la première couche élastique et la solution dans la dernière couche du composite comme dans la section précédente.

$$\mathbf{M}_N (A_j^N) = \begin{pmatrix} \mathbf{S}' \\ \mathbf{S} \end{pmatrix} (B_j) \quad (1.61)$$

traduit la condition d'interface fluide-multicouche sur la dernière couche.

$$\mathbf{S}_0 \begin{pmatrix} B_1^0 \\ B_2^0 \\ B_3^0 \\ B_4^0 \\ B_5^0 \\ B_6^0 \end{pmatrix} = \mathbf{N}_1 (A_j^1) \quad (1.62)$$

traduit la condition d'interface fluide multicouche sur la première couche. La matrice  $\mathbf{S}^0$  est construite à partir des équations de continuité comme précédemment. Les  $B_j^0$ ,  $1 \leq j \leq 3$  sont les coefficients de l'onde incidente et  $B_j^0$ ,  $4 \leq j \leq 6$  les coefficients de l'onde réfléchie. Le calcul se poursuit comme pour un milieu amont élastique. La solution s'obtient par résolution d'un système 6x6.

## 1.8 Coefficient d'atténuation

Maintenant que la solution a été déterminée en tout point il faut définir un coefficient d'atténuation destiné à caractériser la proportion de l'onde incidente que l'on retrouve dans le fluide.

De manière générale le coefficient d'atténuation sera donné par

$$A = -10 \log_{10}(T) \quad (1.63)$$

avec T facteur de transmission qu'il faut maintenant définir.

Une première possibilité est

$$T = \frac{|\mathbf{v}_F(\mathbf{O})|^2}{\omega^2 |\mathbf{u}(\mathbf{O})|^2} \quad (1.64)$$

où  $\mathbf{v}_F(\mathbf{O})$  est la vitesse du fluide à l'interface entre le stratifié et le milieu aval tandis que  $\mathbf{u}(\mathbf{O})$  est le déplacement dans la première couche à l'interface avec le milieu amont. T rapport entre la sortie et l'entrée du système définit le gain apporté par la structure. Cette définition est intéressante dans le cas où les déplacements sont imposés sur l'interface 0/1. On pourrait aussi donner une autre définition fondée sur le rapport des efforts s'exerçants sur les couches extrêmes.

Dans le cas où l'onde incidente est véritablement la donnée du problème il peut être plus intéressant d'étudier la propagation de l'énergie dans la structure.

L'énergie traversant une surface unité pendant un intervalle de temps unité est mesuré pour les solides élastiques par le vecteur de Poynting défini par

$$P_j(t) = -Re(\sigma_{ij}) Re\left(\frac{\partial u_i}{\partial t}\right) \quad (1.65)$$

(voir Dieulesaint 1974 [59]). Pour une onde de pulsation  $\omega$  on s'intéresse à la moyenne de P sur une période soit

$$P_j = \frac{1}{T} \int_0^T P_j(t) dt = -\frac{1}{T} \int_0^T Re(\sigma_{ij}(t)) Re\left(\frac{\partial u_i}{\partial t}(t)\right) dt \quad (1.66)$$

d'où

$$P_j = -\frac{1}{4T} \int_0^T (C_{ijkl} u_{k,l} e^{-i\omega t} + C_{ijkl}^* u_{k,l}^* e^{i\omega t}) (-i\omega u_i e^{-i\omega t} + i\omega u_i^* e^{i\omega t}) dt \quad (1.67)$$

$$P_j = \frac{i\omega}{4} (-C_{ijkl} u_{k,l} u_i^* + C_{ijkl}^* u_{k,l}^* u_i) \quad (1.68)$$

Les deux autres termes contiennent un facteur  $e^{2i\omega t}$  ou  $e^{-2i\omega t}$  et sont donc de moyenne nulle sur une période.

Dans le cas d'une superposition d'ondes

$$\mathbf{u} = \sum_{\alpha=1}^3 \mathbf{U}^\alpha e^{i(\mathbf{k}_\alpha \cdot \mathbf{x} - \omega t)} \quad (1.69)$$

$$P_j = \frac{\omega}{4} (C_{ijkl} \sum_{\alpha,\beta=1}^3 U_k^\alpha k_l^\alpha U_i^{*\beta} e^{i(\mathbf{k}_\alpha - \mathbf{k}_\beta^*) \cdot \mathbf{x}} + c.c.) \quad (1.70)$$

c.c. désigne le complexe conjugué. Le calcul de  $P_3$  donne le flux de puissance véhiculé par l'onde incidente et traversant une unité de surface parallèle aux couches. Dans le cas où les composantes  $k_x$  et  $k_y$  du vecteur d'onde incident sont réels on peut remarquer que le vecteur de Poynting ne dépend alors que de  $z$ . Le problème est invariant dans une translation par un vecteur parallèle aux couches de matériaux.

On peut essayer de définir une grandeur analogue dans le fluide. La puissance des forces extérieures agissant sur un volume de fluide  $\mathcal{D}$  est

$$P_e = \int_{\partial\mathcal{D}} -Re(p) \mathbf{n} \cdot Re(\mathbf{v}) ds + \int_{\partial\mathcal{D}} Re(\theta^{ij}) Re(v_j) n_i ds \quad (1.71)$$

où  $\mathbf{n}$  est la normale à la surface  $\partial\mathcal{D}$ ,  $\mathbf{v}$  est la vitesse du fluide,  $\theta^{ij} = \lambda tr(\epsilon) \delta_{ij} + 2\mu \epsilon_{ij}$  est la partie du tenseur des efforts intérieurs provenant des termes de viscosité et  $\epsilon_{ij} = \frac{1}{2} (\frac{\partial v_i}{\partial x_j} + \frac{\partial v_j}{\partial x_i})$

Le flux d'énergie à travers une surface est défini par le vecteur

$$P_i^f = -Re(p) Re(v_i) + Re(\theta^{ij}) Re(v_j) \quad (1.72)$$

La pression étant donnée par

$$p = \frac{\rho_0 c^2}{\omega} \sum_{l=1}^3 e^{i(\mathbf{k}_l \cdot \mathbf{x} - \omega t)} (\mathbf{V}_l \cdot \mathbf{k}_l) B_l \quad (1.73)$$

on obtient

$$\frac{1}{T} \int_0^T -Re(p) \mathbf{n} \cdot Re(\mathbf{v}) dt = -\frac{\rho_0 c^2}{4\omega} \left( \sum_{l,j=1}^3 (\mathbf{V}_l \cdot \mathbf{k}_l) (\mathbf{n} \cdot \mathbf{V}_j)^* B_j^* B_l e^{i(\mathbf{k}_l - \mathbf{k}_j^*) \cdot \mathbf{x}} + c.c. \right) \quad (1.74)$$

de même  $\theta_{ij} = \Theta_{ij} e^{-i\omega t}$  et  $v_j = V_j e^{-i\omega t}$  conduisent à

$$\frac{1}{T} \int_0^T Re(\theta_{ij}) Re(v_j) dt = \frac{1}{4} (\Theta_{ij} V_j^* + \Theta_{ij}^* V_j) \quad (1.75)$$

On peut alors définir un nouveau facteur de transmission

$$T = \frac{|P_3^f|}{|P_3|} \quad (1.76)$$

Il représente le rapport entre les flux d'énergie entrant et sortant sur une section unité parallèle aux couches et sera adopté pour les exemples du chapitre suivant.

# Chapitre 2

## Atténuation à travers un stratifié

L'ensemble des calculs précédents a été programmé sur une station de travail unix. Nous présentons ici quelques résultats pour illustrer les types de comportements obtenus pour un stratifié.

### 2.1 Couches isotropes

Nous commencerons par le cas de plaques constituées de matériaux isotropes. Ces exemples permettent de montrer l'influence des différents paramètres du modèle dans des cas simples. Les propriétés des matériaux utilisés sont indiqués dans le tableau ci-dessous.

<i>matériau</i>	$E$ (Pa)	$\nu$	$\rho$ ( $kg/m^3$ )	$c_{longitudinale}$
acier	$2.05 \cdot 10^{11}$	0.3	7800.	5950.
béton	$2.3 \cdot 10^{10}$	0.17	2300.	3280.
PVC	$3 \cdot 10^7$	0.35	1400.	185.

Dans un premier exemple le stratifié est constitué d'une couche de PVC de 4.8 cm suivis d'une couche d'acier de 2 mm. Le milieu amont est de l'acier et le fluide est de l'eau de masse volumique  $1000kg/m^3$  et dans lequel la vitesse du son est  $c = 1480m/s$ . Les coefficients de viscosité sont  $\lambda = -.66667 \cdot 10^{-3}kg/ms$  et  $\mu$  vérifie  $3\lambda + 2\mu = 0$  ce qui conduit à une viscosité volumique nulle. Leurs valeurs exactes ont peu d'influence sur les calculs pour un fluide faiblement visqueux. L'onde incidente est longitudinale et les courbes d'atténuation en fonction de la fréquence sont tracées pour des incidences de  $0^\circ$ ,  $45^\circ$  et  $80^\circ$ .

Les différentes courbes montrent des zones de forte atténuation entrecoupées par des fenêtres où l'onde incidente est peu influencée par le multicouche et se comporte comme s'il n'était pas présent. L'ordre de grandeur de l'intervalle entre les minima est donné par la fréquence pour laquelle l'épaisseur du multicouche est égale à la demi-longueur d'onde, voir figure 2.1. L'atténuation est calculée à une distance de un mètre dans le fluide pour supprimer les effets de couche limite au voisinage de l'interface fluide-solide. C'est la différence d'impédance entre le fluide et le milieu amont qui fixe la valeur de l'atténuation aux minima. On peut aussi remarquer des pics très étroits sur les courbes pour lesquelles le vecteur d'onde n'est pas à incidence normale. Cet effet est du à un couplage entre les ondes de compression

et les ondes de cisaillement qui, pour certaines valeurs de la fréquence, peuvent interférer. On prendra cet exemple comme élément de comparaison pour les situations suivantes.

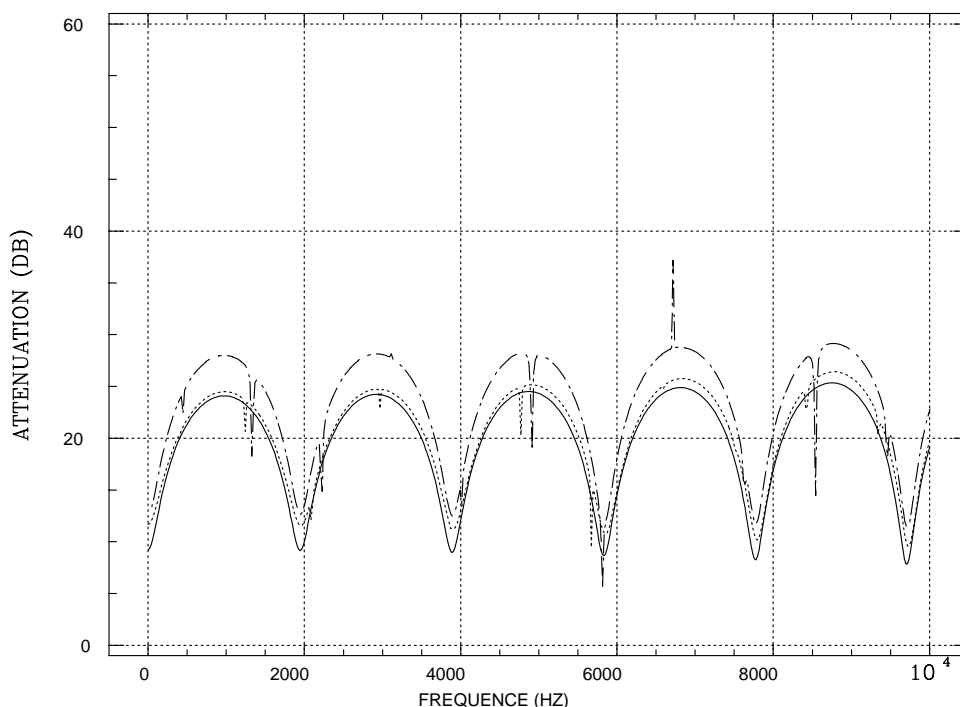


FIG. 2.1 – *Bicouche isotrope*. Angle d'incidence: — $0^{\circ}$ ,  $\dots$   $45^{\circ}$ , —  $80^{\circ}$ .

Nous remplaçons l'eau par de l'air de densité  $1.18\text{kg}/\text{m}^3$  dans lequel la vitesse du son est  $343\text{m}/\text{s}$ . La forme des courbes est semblable mais l'atténuation est ici en moyenne beaucoup plus importante, voir figure 2.2. C'est du à la plus forte différence d'impédance entre les milieux que dans le cas précédent. Les trois courbes correspondent aux mêmes orientations que précédemment.

La figure 2.3 montre l'atténuation en fonction de la fréquence à la traversée d'un mur en béton séparant deux milieux aériens pour 4 épaisseurs différentes. A haute fréquence l'épaisseur est suffisante pour aboutir à une forte atténuation. Dans le cas d'un mur très épais on observe un phénomène de résonance qu'une faible viscoélasticité peut éliminer. A basse fréquence les murs épais améliorent l'atténuation.

On teste maintenant l'influence de la nature de l'onde en prenant une onde incidente transverse. Pour une incidence de  $0^{\circ}$  il y a réflexion totale, l'onde transmise dans le fluide est atténuée d'un facteur supérieur à 60 dB et n'apparaît pas sur le graphique. Au delà d'un angle limite des ondes sont transmises au fluide avec une variation en fréquence semblable aux cas précédents et une intensité d'autant plus grande que l'onde est rasante, voir figure 2.4.

Nous introduisons ensuite de la viscoélasticité de type Maxwell dans le PVC avec  $E = 3 \cdot 10^7 \text{Pa}$  et  $\eta = 3 \cdot 10^2 \text{Pa.s}$ . A basse fréquence la viscoélasticité a peu d'influence. A haute fréquence la situation est très différente. L'atténuation est fortement augmentée et conduit à la disparition des phénomènes oscillatoires, voir figure 2.5.

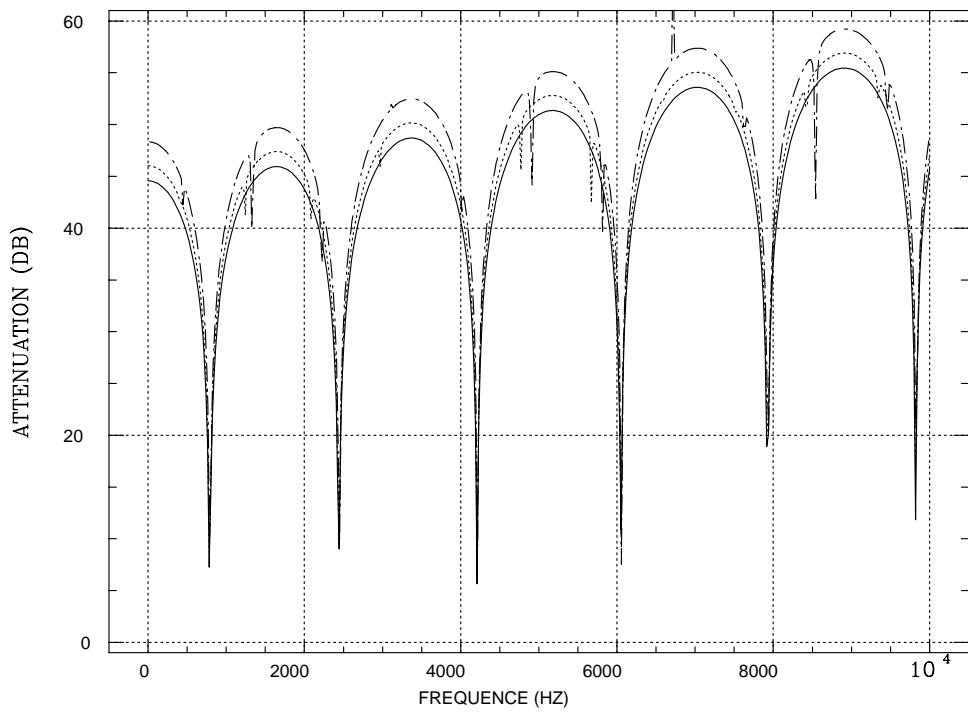


FIG. 2.2 – *Bicouche isotrope en contact avec de l'air. — $0^{\circ}$ , ... $45^{\circ}$ , - - - $80^{\circ}$ .*

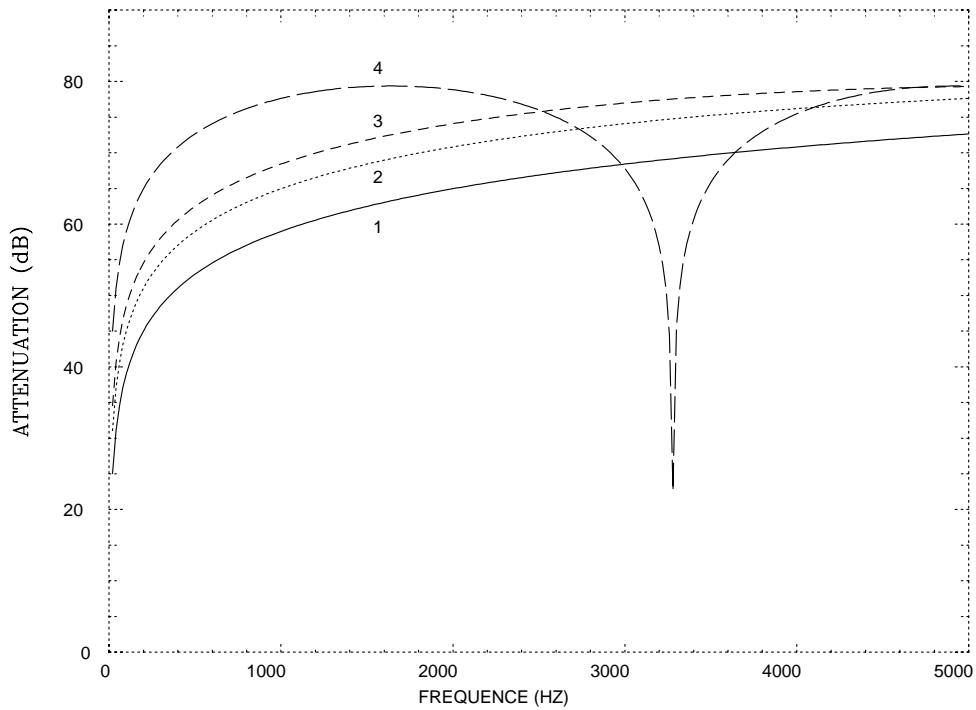


FIG. 2.3 – *Mur en béton d'épaisseur 5cm (1), 10cm (2), 15cm (3) et 50 cm(4).*

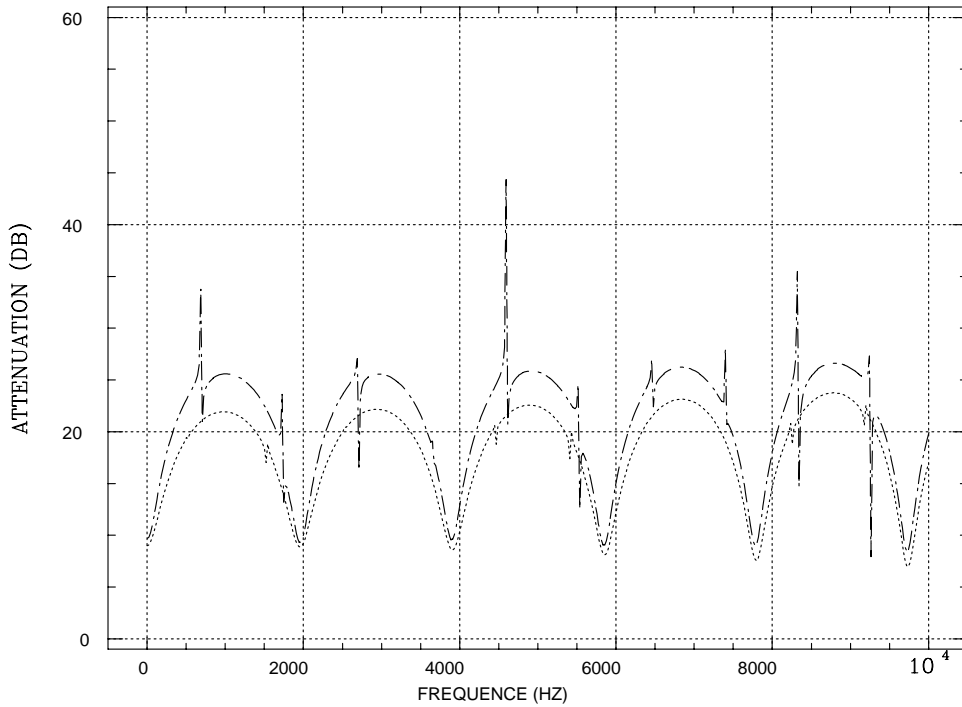


FIG. 2.4 – *Bicouche isotrope avec une onde transverse.* — $0^\circ$ ,  $\dots$   $45^\circ$ , — · —  $80^\circ$ .

Enfin on s'intéresse à l'influence du nombre de couches en reprenant le premier exemple avec la même épaisseur totale et les mêmes concentrations mais avec 6 couches au lieu de 2, ordonnées en PVC-acier-PVC-acier-PVC-acier. A basse fréquence les courbes sont inchangées tandis qu'à haute fréquence nous percevons l'influence de l'ordre d'empilement. L'effet se produit quand la longueur d'onde devient du même ordre de grandeur que l'épaisseur des couches, voir figure 2.6.

## 2.2 Couches orthotropes

Nous remplaçons le PVC par un matériau composite orthotrope dont les propriétés sont indiquées dans le tableau ci-dessous.

<i>matériau</i>	$\rho$	$C_{11}$	$C_{12}$	$C_{13}$	$C_{22}$	$C_{23}$	$C_{33}$	$C_{44}$	$C_{55}$	$C_{66}$
Carbone/Résine	1600.	184.6	5.88	5.88	13.94	7.06	13.94	3.44	7.17	7.17

Les masses volumiques sont mesurées en  $kg/m^3$  et les coefficients d'élasticité en Gpa.

Dans un premier exemple l'axe des fibres du composite coïncide avec l'axe  $\mathbf{I}$  du stratifié. La figure 2.7 représente la réponse à trois ondes d'incidence respectives  $0^\circ$ ,  $45^\circ$  et  $80^\circ$ . Le vecteur d'onde est situé dans le plan  $(\mathbf{I}, \mathbf{K})$ . Le décalage en fréquence des oscillations par rapport aux courbes de la section précédente provient de l'augmentation de la raideur des couches de composite par rapport à la raideur du PVC. L'atténuation est plus faible qu'auparavant car le matériau est plus rigide et la différence d'impédance avec l'acier est donc moins prononcée.

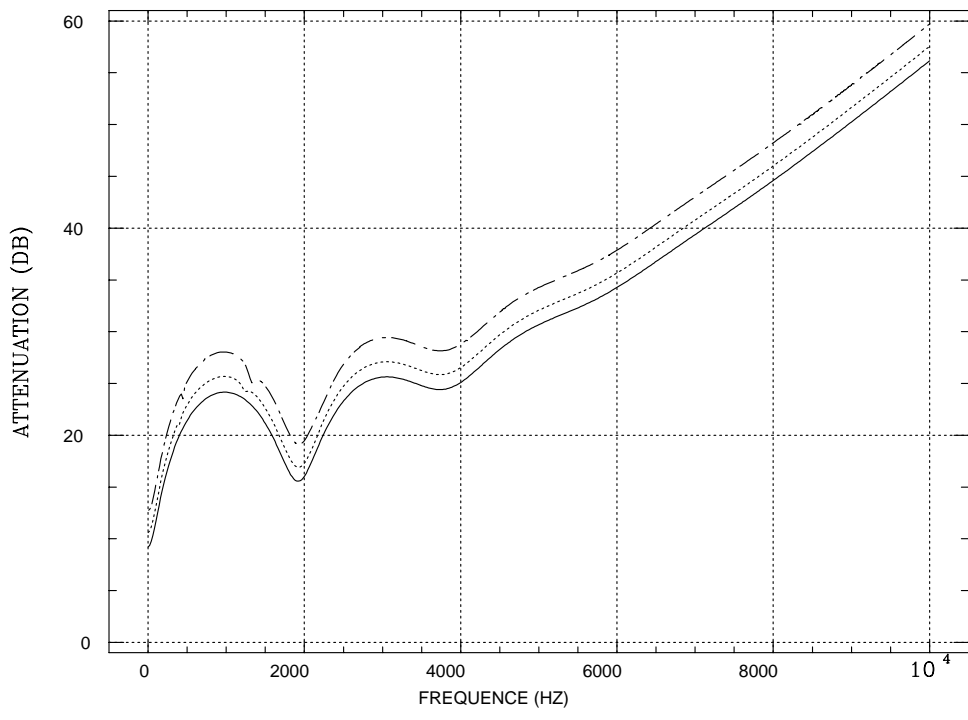


FIG. 2.5 – *Bicouche isotrope viscoélastique.* — $0^{\circ}$ ,  $\cdots 45^{\circ}$ , — —  $80^{\circ}$ .

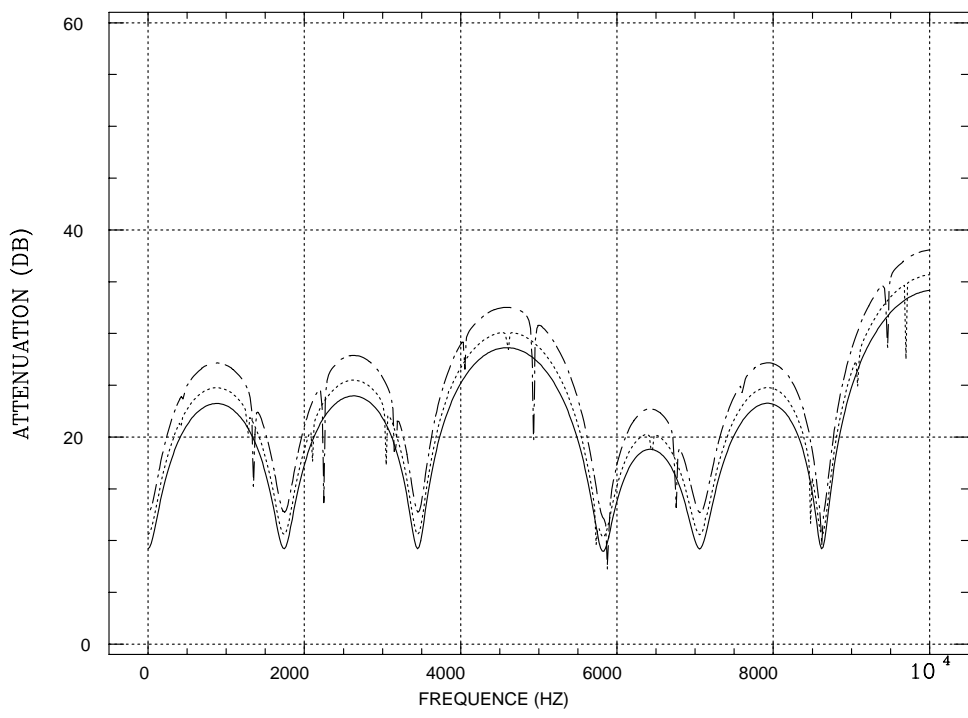


FIG. 2.6 – *6 couches de matériaux isotropes.* — $0^{\circ}$ ,  $\cdots 45^{\circ}$ , — —  $80^{\circ}$ .

On observe des pics moins nombreux mais un peu plus prononcés.

Nous comparons la situation précédente au cas où le milieu amont est aussi constitué d'eau. Pour des angles d'incidence élevés il y a création d'ondes évanescentes dans le composite et l'atténuation ne présente plus d'oscillation mais devient une fonction croissante de la fréquence. Seules les ondes qui ont un vecteur d'onde proche de la normale peuvent être transmises à haute fréquence, (voir figure 2.8).

Il est aussi intéressant d'étudier la propagation suivant un autre plan. Reprenant le premier exemple, nous commencerons par faire varier l'orientation dans le plan des couches. La figure 2.9 est obtenue avec des vecteurs d'ondes incidents orientés à  $45^\circ$  dans le plan  $(\mathbf{I}, \mathbf{J})$  (suivant  $\mathbf{I} + \mathbf{J}$ ). Le comportement en fonction de la fréquence est moins régulier mais les valeurs restent du même ordre de grandeur.

On peut aussi faire une rotation par rapport à  $\mathbf{J}$ . La courbe suivante montre l'atténuation d'une onde normale lorsque le matériau est orienté à  $0^\circ$ ,  $30^\circ$  et  $60^\circ$  dans le plan  $\mathbf{K}, \mathbf{I}$ . On peut constater un effet intéressant à basse fréquence. Le minimum d'atténuation entre 1000 et 2000 Hz augmente quand on tourne le matériau comme le montre la figure 2.10.

## 2.3 Optimisation

### 2.3.1 Méthode et critère

Il n'y a eu à ce point aucune tentative d'optimisation qui permettrait d'obtenir de meilleures courbes en faisant varier les différents paramètres du problème.

Le facteur d'atténuation défini dans les chapitres précédents peut être vu comme une fonction des données du problème

$$A = f(x_1, \dots, x_n, \omega) \quad (2.1)$$

On peut chercher à optimiser  $A$  pour  $\omega$  fixé, mais nous allons plutôt chercher à maximiser  $A$  dans une bande de fréquence  $(f_{inf}, f_{sup})$ . On définit pour cela

$$F(x_1, \dots, x_n) = -\left(\int_{\omega_{inf}}^{\omega_{sup}} (f(x_1, \dots, x_n, \omega))^2 d\omega\right)^{1/2} \quad (2.2)$$

On ne s'intéressera ici qu'à l'optimisation sans contrainte et on se limitera à minimiser  $F$  par rapport aux épaisseurs.

Le calcul est effectué par un algorithme de quasi-Newton qui très schématiquement consiste à définir une suite de vecteurs  $\mathbf{x}^k$  par

$$\mathbf{x}^{k+1} = \mathbf{x}^k - \alpha^k \mathbf{B}^k \nabla F(\mathbf{x}^k) \quad (2.3)$$

où  $\alpha^k$  est choisi pour que

$$F(\mathbf{x}^k - \alpha \mathbf{B}^k \nabla F(\mathbf{x}^k)) < F(\mathbf{x}^k) \quad (2.4)$$

Les matrices  $\mathbf{B}^k$  sont des approximations de l'inverse du Hessien. Toutes ces grandeurs sont évaluées numériquement à partir de  $F$  seule. La suite  $\mathbf{x}^k$  converge alors vers un minimum local de  $F$ , voir Trompette 1987 [252].

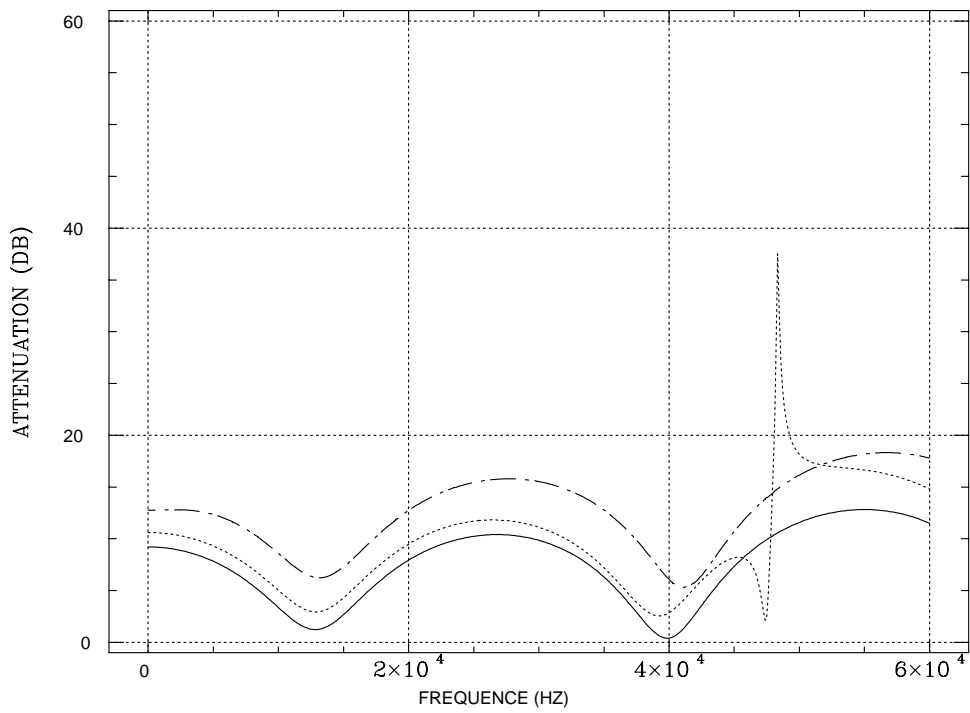


FIG. 2.7 – *Bicouche avec un matériau composite.* — $0^{\circ}$ ,  $\dots$   $45^{\circ}$ , —  $80^{\circ}$ .

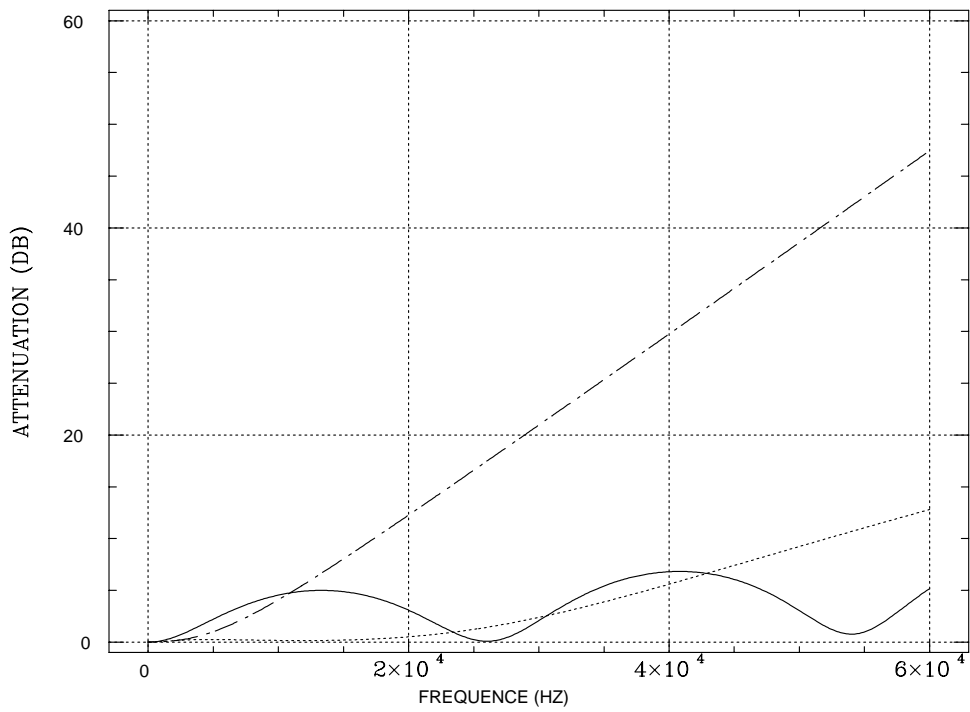


FIG. 2.8 – *Bicouche séparant deux fluides.* — $0^{\circ}$ ,  $\dots$   $45^{\circ}$ , —  $80^{\circ}$ .

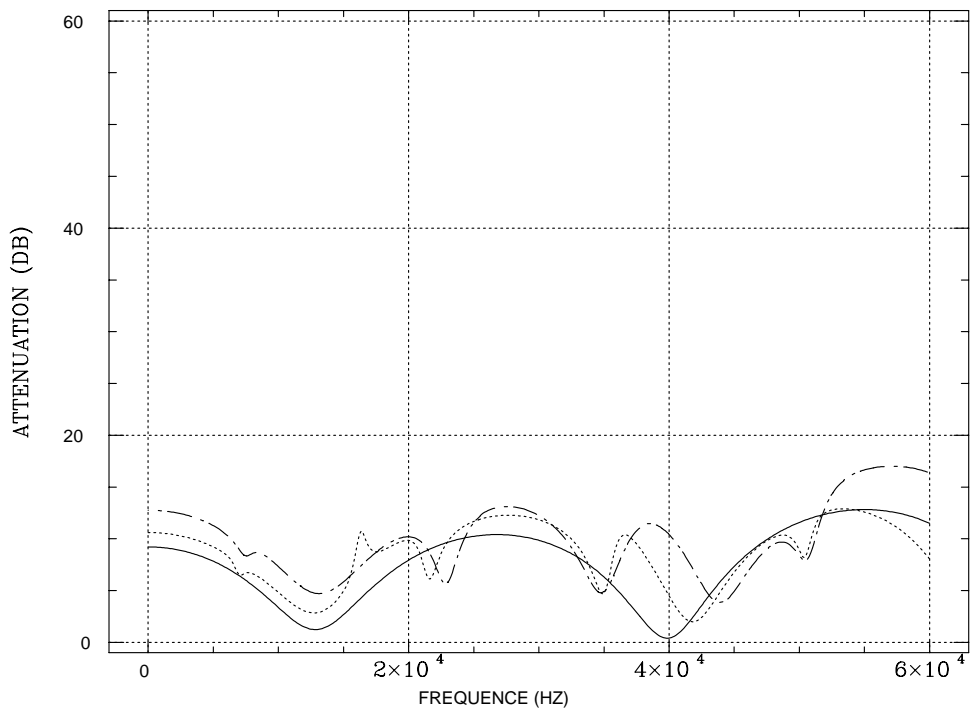


FIG. 2.9 – *Bicouche avec  $\phi = 45^{\circ}$ . —  $0^{\circ}$ ,  $\dots$   $45^{\circ}$ , —  $\dots$   $80^{\circ}$ .*

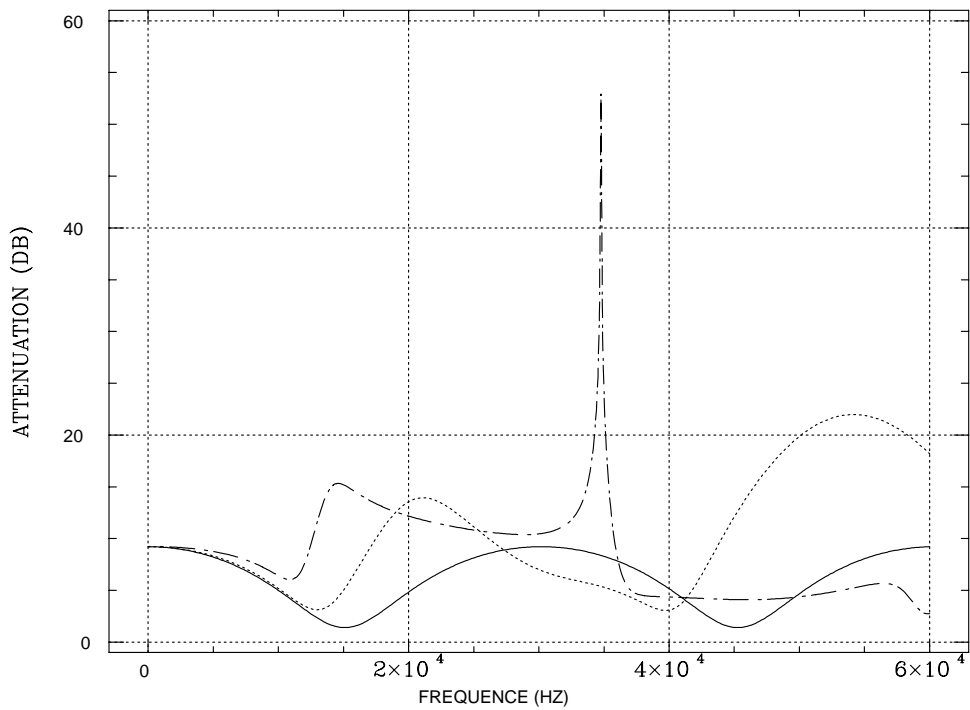


FIG. 2.10 – *Effet de l'orientation dans le plan d'incidence. —  $0^{\circ}$ ,  $\dots$   $30^{\circ}$ , —  $\dots$   $60^{\circ}$ .*

Sur la courbe 2.1 on isole l'intervalle de fréquence (10000 hz, 20000 hz). Le programme d'optimisation travaille sur la variable  $t$  définie par

$$\frac{e_1}{e_2} = \exp(t) \quad (2.5)$$

soit

$$\begin{aligned} e_1 &= \frac{\exp(t) * L}{1 + \exp(t)} \\ e_2 &= \frac{L}{1 + \exp(t)} \end{aligned} \quad (2.6)$$

où  $L$  est l'épaisseur totale du multicouche,  $e_1$  l'épaisseur du composite et  $e_2$  celle de l'acier. Il est ainsi possible d'utiliser un programme d'optimisation sans contrainte pour  $t$  tout en conservant la positivité du rapport des épaisseurs.

### 2.3.2 Exemples

Le premier exemple est l'optimisation d'un bicouche en incidence normale suivant la méthode précédente. On optimise sur le rapport des épaisseurs en gardant l'épaisseur totale constante. L'optimum est trouvée lorsque les deux couches ont même épaisseur.

Dans la même bande de fréquence nous construisons un exemple plus complexe en prenant un stratifié à 8 couches tout en conservant la même épaisseur totale. Hormis une bande de fréquence très étroite où les caractéristiques se dégradent on constate une très forte atténuation. Ce phénomène provient pour l'essentiel de la création de bandes interdites. L'interprétation des résultats est toutefois un peu plus complexe (voir figure 2.12). En effet la simple périodicité des couches laisse subsister une assez large bande de transmission en fréquence alors que l'optimisation sur toutes les couches conduit à une bien meilleure solution. Il faut cependant remarquer que les résultats deviennent relativement sensibles à de faibles erreurs sur les épaisseurs. L'utilisation d'un plus grand nombre de couches pourrait conduire à des stratifiés difficilement réalisables en pratique.

## 2.4 Conclusion

Nous avons obtenu un outil permettant de calculer la réponse d'un stratifié constitué d'un nombre arbitraire de couches orthotropes d'orientations quelconques.

Une optimisation partielle a été effectuée sur les épaisseurs relatives des couches pour améliorer l'atténuation dans une bande de fréquence donnée. Nous avons retrouvé ainsi les bonnes caractéristiques des multicouches périodiques comme le prévoit la théorie de Floquet.

On pourrait poursuivre l'optimisation en faisant varier les modules élastiques des couches. Il faudrait cependant ajouter des critères bornant l'amplitude des variations autorisées pour ne pas être conduit à des solutions irréalistes comme un multicouche constitué de vide.

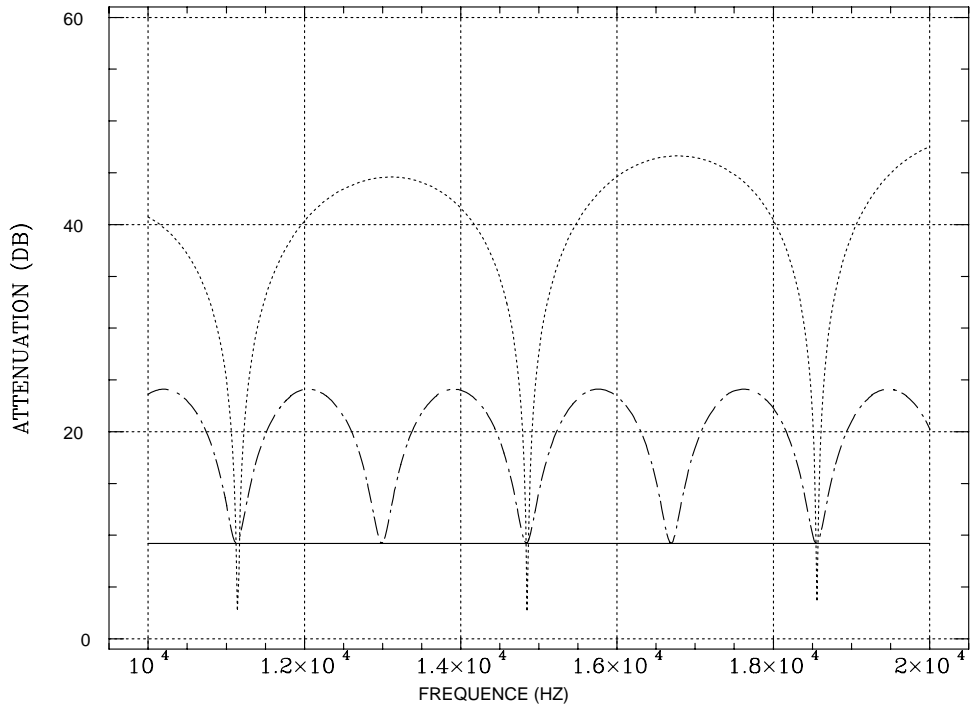


FIG. 2.11 – *Bicouche isotrope.* —  $e_1 = 0, e_2 = 0.05$ ,  $\cdots e_1 = e_2 = 0.025$ ,  $-\cdot-\cdot e_1 = 0.05, e_2 = 0$ .

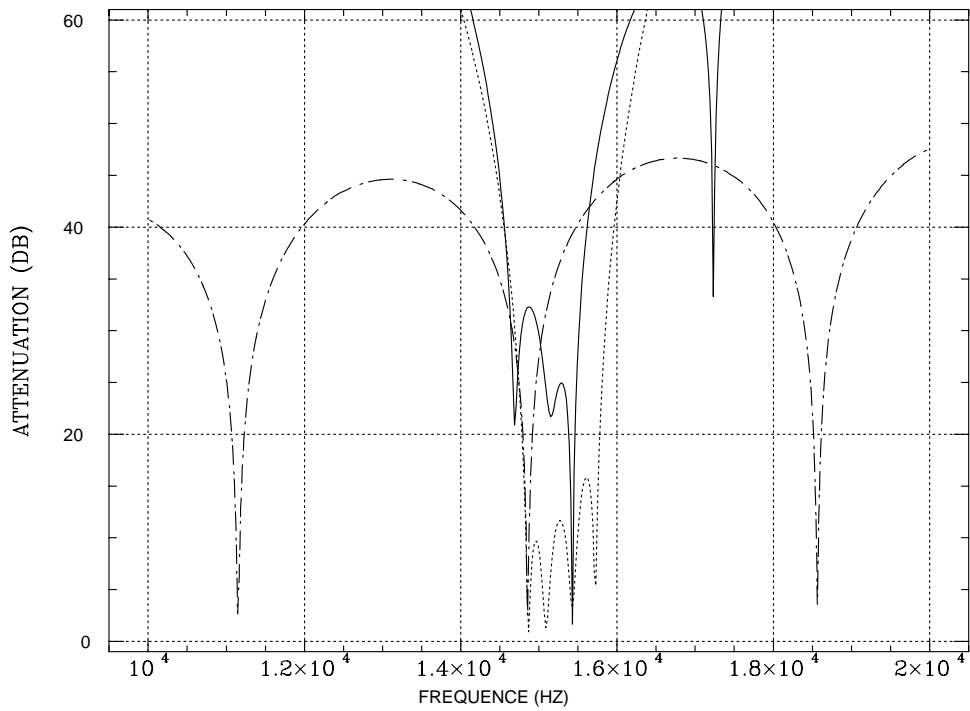


FIG. 2.12 – *Bicouche isotrope.* — *solution optimale à 8 couches*,  $\cdots$  *8 couches périodiques*,  $-\cdot-\cdot$  *2 couches optimisées.*

## Deuxième partie

# Problèmes couplés fluide-structure en acoustique



# Chapitre 1

## Formulation du problème couplé

### 1.1 Introduction

Dans la partie précédente nous nous sommes intéressés à des problèmes de multicouches plans. Nous allons maintenant considérer le cas de structures finies de formes plus complexes immergées dans un fluide. Le cas du multicouche peut apparaître comme une vision locale à haute fréquence du comportement de telles structures.

On se propose de nouveau de déterminer la réponse du système, c'est à dire les mouvements de la structure et du fluide face à une excitation donnée. Les vibrations de la structure et les champs acoustiques sont engendrés par deux causes principales. La structure peut d'abord rayonner de l'énergie à cause de sources d'excitation internes qui induisent des vibrations. Ces vibrations mettent en mouvement la surface de séparation entre le fluide et le solide pour donner naissance à des ondes de pression dans le fluide. La structure peut aussi être soumise à un champ acoustique incident du à des sources ou à des ondes planes se propageant dans le fluide. Sa présence se traduit par la création d'un champ diffusé qui s'ajoute au champ incident. Nous centrerons notre étude sur la détermination du champ de pression acoustique dans le fluide environnant.

Ces problèmes seront d'abord étudiés en régime harmonique puis dans le domaine temporel grâce à des transformations de Fourier. Nous pourrons ainsi calculer le champ de pression induit au voisinage de la structure et le champ rayonné lorsque l'excitation temporelle est un signal connu mais arbitraire.

Les deux fluides usuels sont l'eau et l'air. Les applications pratiques qui motivent notre étude proviennent en partie de l'acoustique sous-marine où nous nous intéressons au bruit provenant de structures immergées (voir figure 1.1) et aux ondes diffusées par le corps immergé en particulier aux signatures sonars de ces objets. Dans ces problèmes on se préoccupe surtout du champ lointain. Le but est souvent de minimiser le bruit rayonné par la structure, ce qui peut être réalisé en partie en la recouvrant d'un matériau semblable à ceux étudiés dans la première partie, ou de réduire l'écho réfléchi face à une excitation sonar.

Nous nous intéresserons aussi à des problèmes d'acoustique aérienne comme un mur antibruit (voir figure 1.2) où l'on cherche à construire un obstacle pour minimiser l'intensité du champ acoustique dans une région de l'espace. Le champ proche aura ici une grande importance.

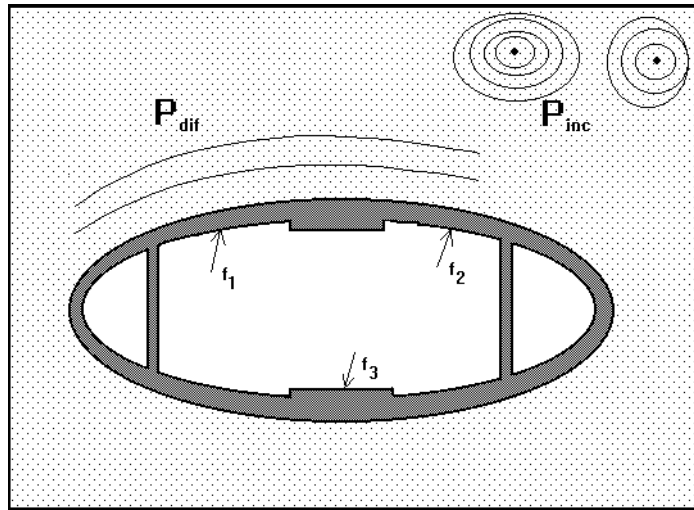


FIG. 1.1 – *Rayonnement d'une structure sous-marine.*

Nous nous proposons dans ce chapitre de rappeler la formulation mathématique de ces problèmes ainsi que quelques résultats théoriques quant à l'existence et l'unicité des solutions. Nous rappellerons aussi quelques propriétés des solutions qui pourront nous être utiles dans la suite de l'exposé.

## 1.2 Rappels sur l'acoustique.

### 1.2.1 Les équations dynamiques.

Le mouvement général d'un fluide est décrit par les équations de Navier-Stokes. Dans le cas de mouvements isentropiques et isothermes, ce que nous supposons dans toute la suite de l'exposé, les équations se réduisent aux deux lois de conservation et aux deux lois de comportement suivantes.

- La conservation de la masse.

$$\frac{\partial \tilde{\rho}}{\partial t} + \text{div}(\tilde{\rho} \tilde{\mathbf{v}}) = \tilde{q} \quad (1.1)$$

- La conservation de la quantité de mouvement.

$$\tilde{\rho} \left( \frac{\partial \tilde{\mathbf{v}}}{\partial t} + \tilde{\mathbf{v}} \cdot \nabla \tilde{\mathbf{v}} \right) + \nabla \tilde{p} = \tilde{\mathbf{f}} + \text{div} \tilde{\Sigma}^v \quad (1.2)$$

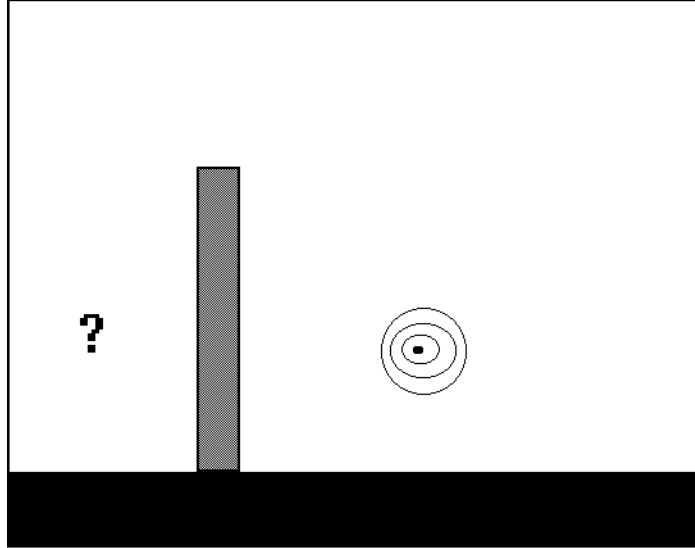


FIG. 1.2 – *mur antibruit.*

- L'équation d'état du fluide.

$$\tilde{p} = h(\tilde{\rho}) \quad (1.3)$$

- La loi de comportement donnant les effets de la viscosité.

$$\tilde{\Sigma}^v = (\lambda \operatorname{div} \tilde{\mathbf{v}}) \mathbf{I} + 2\mu \mathbf{E} \quad (1.4)$$

avec  $E_{ij} = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial \tilde{v}_i}{\partial x_j} + \frac{\partial \tilde{v}_j}{\partial x_i} \right)$ .

Les grandeurs  $\tilde{\rho}$ ,  $\tilde{p}$ ,  $\tilde{\mathbf{v}}$  sont respectivement la masse volumique, la pression et le champ de vitesse du fluide.  $\tilde{\Sigma}^v$  est le champ de contrainte provenant de la viscosité du fluide. Il est donné par l'expression ci-dessus dans le cas d'un fluide Newtonien ( $\lambda$  et  $\mu$  sont les coefficients de viscosité). Le champ de contrainte totale est  $\tilde{\Sigma}^f = -\tilde{p}\mathbf{I} + \tilde{\Sigma}^v$ .  $\tilde{q}$  décrit un apport de matière au fluide et  $\tilde{\mathbf{f}}$  est le vecteur des efforts extérieurs.

Nous nous plaçons dans l'hypothèse d'une perturbation de faible amplitude d'un mouvement de référence. Les différentes grandeurs se développent alors en

$$\left\{ \begin{array}{l} \tilde{\rho} = \rho_0 + \rho \\ \tilde{p} = p_0 + p \\ \tilde{\mathbf{v}} = \mathbf{v}_0 + \mathbf{v} \\ \tilde{\mathbf{f}} = \mathbf{f}_0 + \mathbf{f} \\ \tilde{\Sigma}^v = \Sigma_0^v + \Sigma^v \\ \tilde{q} = q_0 + q \end{array} \right. \quad (1.5)$$

La linéarisation des équations de conservation et de l'équation d'état conduit au système de

l'acoustique.

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial \rho}{\partial t} + \operatorname{div}(\rho_0 \mathbf{v}) + \operatorname{div}(\rho \mathbf{v}_0) = q \\ \rho \frac{\partial \mathbf{v}_0}{\partial t} + \rho \mathbf{v}_0 \cdot \nabla \mathbf{v}_0 + \rho_0 \left( \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + \mathbf{v}_0 \cdot \nabla \mathbf{v} + \mathbf{v} \cdot \nabla \mathbf{v}_0 \right) + \nabla p = \mathbf{f} + \operatorname{div} \Sigma^v \\ p = \rho c^2 \end{array} \right. \quad (1.6)$$

$c$  est la vitesse du son dans le milieu. Lorsque le mouvement de référence est le repos  $\mathbf{v}_0 = 0$  et le système se simplifie en

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{1}{c^2} \frac{\partial p}{\partial t} + \rho_0 \operatorname{div} \mathbf{v} = q \\ \rho_0 \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + \nabla p = \mathbf{f} + \operatorname{div} \Sigma^v \end{array} \right. \quad (1.7)$$

On peut toujours écrire le champ de vitesse  $\mathbf{v}$  sous la forme

$$\mathbf{v} = \Phi + \Psi \quad (1.8)$$

avec  $\operatorname{rot} \Phi = 0$  et  $\operatorname{div} \Psi = 0$ . Il suffit par exemple de prendre  $\Phi = \nabla \phi$  avec  $\phi$  solution du problème

$$\begin{aligned} \operatorname{div} \mathbf{v} &= \Delta \phi \\ \mathbf{v} \cdot \mathbf{n} &= \frac{\partial \phi}{\partial n} \text{ sur la frontière} \end{aligned} \quad (1.9)$$

On peut par conséquent choisir le vecteur  $\Psi$  pour que  $\Psi \cdot \mathbf{n} = 0$  sur la frontière.

Le système se met alors sous la forme

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{1}{c^2} \frac{\partial p}{\partial t} + \rho_0 \operatorname{div} \Phi = q \\ \rho_0 \frac{\partial \Phi}{\partial t} + \nabla p = \mathbf{f}^{div} + (\lambda + 2\mu) \nabla(\operatorname{div} \Phi) \\ \rho_0 \frac{\partial \Psi}{\partial t} = \mathbf{f}^{rot} + \mu \Delta \Psi \end{array} \right. \quad (1.10)$$

avec de nouveau  $\operatorname{rot} \mathbf{f}^{div} = 0$  et  $\operatorname{div} \mathbf{f}^{rot} = 0$ . On constate que la partie 'rotationnelle'  $\Psi$  se propage indépendamment des autres variables  $p$  et  $\Phi$ . En particulier elle est nulle si elle l'est à l'instant 0 et si  $\mathbf{f}^{rot} = \mathbf{0}$ . Sinon supposons les efforts  $\mathbf{f}^{rot}$  nuls sur le domaine et le mouvement harmonique, la dernière équation peut aussi s'écrire

$$-i\omega \rho_0 \Psi = \mu \Delta \Psi \quad (1.11)$$

soit encore

$$\Delta \Psi + \alpha^2 \Psi = 0 \quad (1.12)$$

avec  $\alpha = \frac{1+i}{\sqrt{2}} \sqrt{\frac{\omega \rho_0}{\mu}}$ . La relation intégrale pour l'équation de Helmholtz montre que

$$\Psi(\mathbf{y}) = \int_S [\Psi(\mathbf{x}) \frac{\partial G^\alpha}{\partial \mathbf{n}_x}(\mathbf{y} - \mathbf{x}) - \frac{\partial \Psi}{\partial \mathbf{n}_x}(\mathbf{x}) G^\alpha(\mathbf{y} - \mathbf{x})] d\mathbf{x} \quad (1.13)$$

S est la frontière de l'obstacle et  $\mathbf{n}_x$  sa normale extérieure. Avec  $G^\alpha(r) = \frac{e^{i\alpha r}}{4\pi r}$ ,  $\Psi$  est exponentiellement décroissant quand on s'éloigne de la frontière et est donc concentré dans une couche limite autour de l'obstacle.

Dans 1.10 on se concentrera sur les deux premières relations qui donnent

$$-\frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 p}{\partial t^2} + \Delta p = \operatorname{div} \mathbf{f} + \Sigma_{ij,ij} - \frac{\partial q}{\partial t} \quad (1.14)$$

Compte-tenu de la forme de  $\Sigma$  le terme de viscosité s'exprime par

$$\begin{aligned} \Sigma_{ij,ij} &= (\lambda + 2\mu) \Delta(\operatorname{div} \mathbf{v}) \\ &= (\lambda + 2\mu) \Delta\left(\frac{q}{\rho_0} - \frac{1}{\rho_0 c^2} \frac{\partial p}{\partial t}\right) \end{aligned} \quad (1.15)$$

Nous obtenons finalement l'équation des ondes pour un milieu fluide visqueux contenant des sources

$$-\frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 p}{\partial t^2} + \Delta p + \frac{\lambda + 2\mu}{\rho_0 c^2} \frac{\partial \Delta p}{\partial t} = \operatorname{div} \mathbf{f} + (\lambda + 2\mu) \Delta\left(\frac{q}{\rho_0}\right) - \frac{\partial q}{\partial t} \quad (1.16)$$

### 1.2.2 Cas des mouvements stationnaires

Dans le cas d'un mouvement harmonique avec la dépendance en temps  $e^{-i\omega t}$  pour toutes les grandeurs, l'équation des ondes se transforme en l'équation de Helmholtz.

$$\Delta p + \tilde{k}^2 p - i\omega \frac{\lambda + 2\mu}{\rho_0 c^2} \Delta p = \operatorname{div} \mathbf{f} + (\lambda + 2\mu) \Delta\left(\frac{q}{\rho_0}\right) + i\omega q \quad (1.17)$$

avec  $\tilde{k} = \frac{\omega}{c}$

Elle peut s'écrire sous une forme plus compacte.

$$\Delta p + k^2 p = s \quad (1.18)$$

s regroupe la contribution des sources. Le nombre d'onde  $k$  est maintenant complexe et est donné par

$$k^2 = \frac{\tilde{k}^2}{1 - i\omega \frac{\lambda + 2\mu}{\rho_0 c^2}} \quad (1.19)$$

Parmis les deux solutions nous choisirons celle qui vérifie  $\operatorname{Im}(k) > 0$  ou  $\operatorname{Re}(k) \geq 0$  si  $\operatorname{Im}(k) = 0$ , c'est à dire celle qui correspond à des ondes sortantes.

**Remarque :** La vitesse du fluide vérifie

$$\begin{aligned} \mathbf{v} &= -\frac{i}{\rho_0 \omega} \nabla p + \frac{i}{\rho_0 \omega} (\mathbf{f} + \operatorname{div} \Sigma^v) \\ &= -\frac{i}{\rho_0 \omega} \nabla p + \frac{i}{\rho_0 \omega} (\mathbf{f} + (\lambda + 2\mu) \nabla(\operatorname{div} \mathbf{v}) - \mu \operatorname{rot}(\operatorname{rot} \mathbf{v})) \end{aligned} \quad (1.20)$$

Il reste à définir des conditions aux limites pour aboutir à un problème bien posé.

## 1.3 Résultats théoriques en acoustique

Le domaine étudié est la partie extérieure  $\Omega_{ext}$  à une surface fermée ou à nombre fini de telles surfaces en dimensions 2 et 3. (voir figure 1.3).

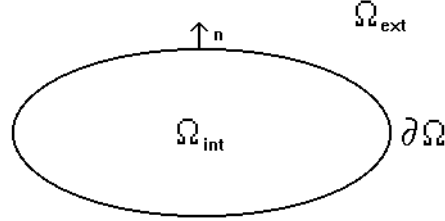


FIG. 1.3 – *Domaine étudié*

On s'intéresse à la diffusion d'un champ incident par la frontière du domaine  $\partial\Omega$  avec des conditions aux limites, par exemple  $\frac{\partial p}{\partial n} = 0$  qui modélise une frontière rigide,  $p = 0$  une surface libre ou une condition d'impédance du type  $\frac{\partial p}{\partial n} + \sigma p = 0$  qui permet de tenir compte de certaines propriétés de l'obstacle sans avoir à le modéliser. On peut aussi résoudre un problème avec  $p, \frac{\partial p}{\partial n}$  ou  $\frac{\partial p}{\partial n} + \sigma p$  donnés sur la frontière ce qui permet de calculer le champ acoustique rayonné par un corps dont, par exemple, la surface vibre à une vitesse fixée ( $\frac{\partial p}{\partial n} = i\rho_0\omega\mathbf{v}\cdot\mathbf{n}$  en régime harmonique pour un fluide parfait et sans source extérieure 1.20).

### 1.3.1 Les résultats d'existence et d'unicité

Nous rappellerons dans cette section quelques résultats relatifs aux solutions de problèmes d'acoustique dans des domaines ouverts. Pour des mouvements instationnaires nous avons, en supposant le fluide parfait, le résultat classique suivant concernant la résolution de l'équation des ondes.

**Théorème 1** *Il existe une unique fonction  $p(\mathbf{x}, t)$ , définie sur  $\overline{\Omega}_{ext} \times [0, \infty[$ , telle que*

1.  $p \in C(\mathcal{R}_+, H^1(\Omega_{ext})) \cap C^1(\mathcal{R}_+, L^2(\Omega_{ext})) \cap C^2(\mathcal{R}_+, H^{-1}(\Omega_{ext}))$

2.  $\Delta p - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 p}{\partial t^2} = s(\mathbf{x}, t)$  dans  $H^{-1}(\Omega_{ext})$  pour tout  $t > 0$   
avec le terme source  $s \in L^2(\Omega_{ext} \times ]0, \infty[)$

3. sur la frontière une des deux conditions aux limites suivantes est vérifiée

$$p(\mathbf{x}, t) = 0 \text{ ou } \frac{\partial p}{\partial n}(\mathbf{x}, t) = 0 \text{ pour } (\mathbf{x}, t) \in \partial\Omega_{ext} \times ]0, \infty[$$

4.  $p$  vérifie les deux conditions initiales suivantes

$$\begin{cases} p(\mathbf{x}, 0) = q_0(\mathbf{x}) \in H^1(\Omega_{ext}) \\ \frac{\partial p}{\partial t}(\mathbf{x}, 0) = v_0(\mathbf{x}) \in L^2(\Omega_{ext}) \end{cases}$$

**Démonstration :** C'est une application du théorème de Hille-Yosida-Phillips, voir par exemple Cazenave 1987 [34].

Nous pouvons aussi résoudre des problèmes avec des conditions aux limites non homogènes sur la frontière  $\partial\Omega_{ext}$  et assez régulières en temps ( $C^2$ ) et en espace. On cherche la solution sous la forme  $p = p_0 + p_1$  où  $p_1$  vérifie les conditions aux limites et  $p_0$  l'équation des ondes homogène sur  $\partial\Omega_{ext}$  avec un second membre modifié par la contribution de  $p_1$ . Si les conditions de régularité sur  $p$  ne sont pas vérifiées nous pouvons avoir des ondes de choc. Cet aspect ne sera pas traité dans la suite de l'exposé.

L'énergie de l'onde est donnée par

$$E = \frac{1}{2} \int_{\Omega_{ext}} (\rho_0 |\mathbf{v}|^2 + \frac{p^2}{\rho_0 c^2}) d\mathbf{x} \quad (1.21)$$

Avec des conditions aux limites homogènes sur  $\partial\Omega_{ext}$  et un second membre  $s = 0$  elle est constante au cours du temps.

Pour un fluide visqueux le résultat est très voisin

**Théorème 2** *Il existe une unique fonction  $p(\mathbf{x}, t)$ , définie sur  $\overline{\Omega_{ext}} \times [0, \infty[$ , telle que*

1.  $p \in C(\mathcal{R}_+, H^1(\Omega_{ext})) \cap C^1(\mathcal{R}_+, H^1(\Omega_{ext}))$
2.  $\Delta p - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 p}{\partial t^2} + \frac{\lambda + 2\mu}{\rho_0 c^2} \frac{\partial \Delta p}{\partial t} = s(\mathbf{x}, t)$  dans  $\Omega_{ext}$  pour tout  $t > 0$  avec  $s \in L^2(\Omega_{ext} \times ]0, \infty[)$

3. sur la frontière une des deux conditions aux limites suivantes est vérifiée

$$p(\mathbf{x}, t) = 0 \text{ ou } \frac{\partial p}{\partial n}(\mathbf{x}, t) = 0 \text{ pour } (\mathbf{x}, t) \in \partial\Omega_{ext} \times ]0, \infty[$$

4.  $p$  vérifie les deux conditions initiales suivantes

$$\begin{cases} p(\mathbf{x}, 0) = q_0(\mathbf{x}) \in H^1(\Omega_{ext}) \\ \frac{\partial p}{\partial t}(\mathbf{x}, 0) = v_0(\mathbf{x}) \in H^1(\Omega_{ext}) \end{cases}$$

**Démonstration :** voir Dautray 1984 [53]

Dans le cas de mouvements harmoniques le résultat correspondant est

**Théorème 3** *On suppose  $\partial\Omega_{ext}$  de classe  $C^2$ . Pour  $\text{Im}(k) \geq 0$  et  $k \neq 0$ , il existe une unique fonction  $p(\mathbf{x})$  définie sur  $\overline{\Omega_{ext}}$  telle que*

$$1. p \in C^2(\Omega_{ext}), p|_{\partial\Omega_{ext}} \in L^2(\partial\Omega_{ext}), \frac{\partial p}{\partial n}|_{\partial\Omega_{ext}} \in L^2(\partial\Omega_{ext})$$

$$2. \Delta p + k^2 p = 0 \text{ dans } \Omega_{ext}$$

3. à l'infini  $p$  vérifie la condition de radiation

$$\frac{\partial p}{\partial n} - ikp = o\left(\frac{1}{r^{\frac{(n-1)}{2}}}\right) \text{ (n est la dimension de l'espace)}$$

4. sur la frontière l'une des trois conditions suivantes est vérifiée

a)  $p|_{\partial\Omega_{ext}} = p_0$  avec  $p_0 \in L^2(\partial\Omega_{ext})$  (Dirichlet)

b)  $\frac{\partial p}{\partial n}|_{\partial\Omega_{ext}} + \sigma p = g_0$  avec  $g_0 \in L^2(\partial\Omega_{ext})$ ,  $\sigma \in L^\infty(\partial\Omega_{ext})$ ,  $Im(k^*\sigma) \geq 0$  (Robin)

c)  $\frac{\partial p}{\partial n}|_{\partial\Omega_{ext}} = g_0$  avec  $g_0 \in L^2(\partial\Omega_{ext})$ , (Neumann)

**Démonstration :** L'unicité est prouvée par exemple par Sommerfeld 1949 [236] et Wilcox 1956 [261]. L'existence se prouve en général à partir d'une équation intégrale voir Leis 1958 [151] et plus spécifiquement

- pour le problème de Dirichlet voir Kleinman 1965 [136], Greenspan 1966 [103] ou Lin 1985 [154]

- pour le problème de Robin voir Angell 1982 [5], Angell 1984 [6]

- pour le problème de Neumann voir Ergun 1966 [73] et Dautray 1984 [53] dans le cas où  $g_0$  est dans  $H^{-1/2}(\partial\Omega_{ext})$  et la solution dans  $H^1_{loc}(\Omega_{ext})$ .

- Kress 1977 [143] pour des problèmes mixtes où  $p$  est imposé sur une partie de la frontière et  $\frac{\partial p}{\partial n}$  sur le complémentaire.

**Remarques :**

1. Il est possible d'affaiblir la condition de radiation en (Wilcox 1956 [261])

$$\lim_{R \rightarrow \infty} \int_{r=R} \left| \frac{\partial p}{\partial r}(\mathbf{r}) - ikp(\mathbf{r}) \right|^2 d\mathbf{s} = 0 \quad (1.22)$$

2. Dans le cas  $Im(k) > 0$ ,  $p$  est dans  $H^1(\Omega_{ext})$  (Wilcox 1956 [261]).

3. Il est possible d'affaiblir les conditions de régularité sur la frontière du domaine.

4. Pour une frontière lipschitzienne, qui peut donc avoir des coins, et  $\frac{\partial u}{\partial n} \in L^p(\Omega_{ext})$  on montre que  $p \in C^{0,\alpha}(\Omega_{ext})$ , c'est à dire est Höldérienne avec  $\alpha = \frac{1}{n} - \frac{1}{p}$ ; en particulier  $p \in C^{0,\frac{1}{n}}(\Omega_{ext})$  pour un problème physique avec une vitesse bornée (voir Gilbarg 1983 [96] et Dautray 1984 [53]). Si la frontière est  $C^1$  alors la pression  $p$  est dans  $C^{0,\alpha} \forall \alpha, 0 < \alpha < 1$ .

### 1.3.2 Le comportement des solutions

Les solutions de l'équation de Helmholtz ont un comportement à l'infini en  $O(1/r)$  dans  $\mathcal{R}^3$  et en  $O(1/\sqrt{r})$  dans  $\mathcal{R}^2$  pour  $k$  réel. Plus précisément nous avons le résultat suivant (voir par exemple Wilcox 1956 [261] et Sommerfeld 1949 [236]).

**Théorème 4** Soit  $u(\mathbf{r})$  une solution sortante de l'équation de Helmholtz dans le domaine extérieur à la sphère  $|\mathbf{r} - \mathbf{r}_0| = c$  (contenant  $\partial\Omega$ ) et soit  $(r, \theta, \phi)$  un système de coordonnées sphériques centré en  $\mathbf{r}_0$ . Alors

$$u(\mathbf{r}) = \frac{e^{ikr}}{r} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f_n(\theta, \phi)}{r^n} \quad (1.23)$$

La série converge pour  $r > c$  et converge absolument et uniformément en  $r, \theta$  et  $\phi$  pour toute région  $r \geq c + \epsilon > c$ . La série peut être différenciée terme à terme par rapport à  $r, \theta$  et  $\phi$  un nombre arbitraire de fois et la série résultante converge absolument et uniformément.

Les coefficients  $f_n(\theta, \phi), n > 0$  peuvent être déterminés à partir de  $f_0(\theta, \phi)$  par la formule récurrente suivante

$$2iknf_n = n(n-1)f_{n-1} + Df_{n-1}, \quad n = 1, 2, \dots, \quad (1.24)$$

où

$$Df = \frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left( \sin \theta \frac{\partial f}{\partial \theta} \right) + \frac{1}{\sin^2 \theta} \frac{\partial^2 f}{\partial \phi^2} \quad (1.25)$$

est l'opérateur de Beltrami pour la sphère. En particulier,  $u(\mathbf{r})$  est déterminé dans la région  $r > c$  par sa figure de radiation  $f_0(\theta, \phi)$ .

## 1.4 Le problème couplé

Le milieu fluide est maintenant en contact avec une structure occupant un domaine  $\Omega_s$  suivant le schéma ci-dessous.

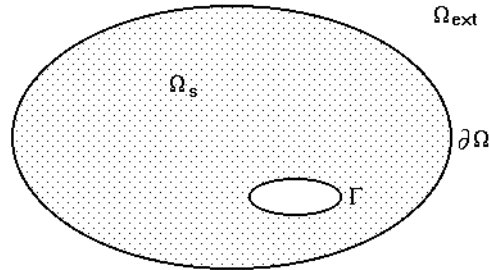


FIG. 1.4 – Problème couplé

On supposera la structure fixée sur une frontière intérieure  $\Gamma$ .

### 1.4.1 Modélisation de la structure

Les structures que nous étudierons seront constituées de corps élastiques ou viscoélastiques qui vérifient les équations dynamiques suivantes dans le domaine  $\Omega_s$  occupé par le solide.

$$\text{div} \Sigma + \mathbf{g} = \rho \frac{\partial^2 \mathbf{u}}{\partial t^2} \quad (1.26)$$

$\mathbf{g}$  est le vecteur des efforts volumiques s'exerçant sur la structure,  $\mathbf{u}$  est le champ de déplacement et  $\Sigma$  le champ de contrainte.

Pour des mouvements harmoniques nous avons

$$\operatorname{div}\Sigma + \mathbf{g} = -\rho\omega^2\mathbf{u} \quad (1.27)$$

Pour obtenir un problème bien posé il faut ajouter des conditions aux limites sur la frontière.

Le tenseur des contraintes est relié au tenseur des déformations par une loi de comportement viscoélastique qui s'écrit en stationnaire

$$\Sigma_{ij}(\omega) = C_{ijkl}(\omega)\epsilon_{kl}(\omega) \quad (1.28)$$

La dépendance de C en fonction de  $\omega$  traduit le type de viscoélasticité pris en compte. On se limitera ici à des lois de type Zener, c'est à dire

$$C_{ijkl}(\omega) = C_{ijkl}^i + \frac{(C_{ijkl}^d - C_{ijkl}^i)}{1 - i\omega\tau} \quad (1.29)$$

où  $C_{ijkl}^i$  est le module instantané et  $C_{ijkl}^d$  est le module différé.  $\tau$  est une constante mesurant le temps de relaxation du milieu.

Dans le domaine temporel la relation est

$$\Sigma_{ij}(t) = c_{ijkl}\epsilon_{kl}(t) + \int_{-\infty}^t d_{ijkl}(t-t')\epsilon_{kl}(t')dt' \quad (1.30)$$

$c_{ijkl}$  est le tenseur des coefficients d'élasticité instantanés et  $d_{ijkl}$  les fonctions de relaxation qui, pour des lois de type Zener, sont données par  $\frac{1}{\tau}(C_{ijkl}^d - C_{ijkl}^i)e^{-t/\tau}$ . La contrainte à l'instant t dépend de toute l'histoire antérieure des déformations.

## 1.4.2 Résultats d'existence pour le problème couplé

Nous réunissons les équations précédentes et les équations d'évolution du fluide. A l'interface entre les deux milieux il faut imposer la continuité du vecteur vitesse et du vecteur contrainte. Dans le cas d'un fluide non visqueux seule la composante normale de la vitesse est continue.

Commençons par le cas plus simple des mouvements instationnaires pour un solide élastique en contact avec un fluide parfait. Si on suppose le fluide irrotationnel la vitesse dérive d'un potentiel soit  $\mathbf{v} = \nabla\phi$ . Il y a existence et unicité des solutions. Plus précisément nous avons

**Théorème 5** *Il existe un unique couple  $(\mathbf{u}, \phi)$  tel que*

1.  $\mathbf{u} \in C(\mathcal{R}_+, (H^1(\Omega_s))^3) \cap C^1(\mathcal{R}_+, (L^2(\Omega_s))^3)$   
 $\phi \in C(\mathcal{R}_+, H^1(\Omega_{ext})) \cap C^1(\mathcal{R}_+, L^2(\Omega_{ext}))$

$$2. \operatorname{div} \boldsymbol{\Sigma} + \mathbf{g} = \rho_s \frac{\partial^2 \mathbf{u}}{\partial t^2} \text{ dans } \Omega_s, t > 0 \text{ et } \mathbf{g} \in (L^2(\mathcal{R}, L^2(\Omega_s)))^3$$

$$\Delta \phi - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \phi}{\partial t^2} = 0 \text{ dans } \Omega_{ext}, t > 0$$

3. il vérifie comme conditions aux limites sur la frontière

$$\begin{cases} \mathbf{u} = 0 & \text{sur } \Gamma \\ \boldsymbol{\Sigma} \cdot \mathbf{n} = -(p_{inc} - \rho_0 \frac{\partial \phi}{\partial t}) \mathbf{n} & \text{sur } \partial \Omega_{ext} \\ \frac{\partial \phi}{\partial n} + \mathbf{v}_{inc} \cdot \mathbf{n} = \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} \cdot \mathbf{n} & \text{sur } \partial \Omega_{ext} \end{cases}$$

$p_{inc}$  est une pression solution du problème non homogène dans le fluide. C'est le champ incident et  $\mathbf{v}_{inc}$  est la vitesse associée.

4. il vérifie les conditions initiales suivantes

$$\begin{cases} \mathbf{u}(\mathbf{x}, 0) = \mathbf{u}_0(\mathbf{x}) \in (H^1(\Omega_s))^3 \\ \phi(\mathbf{x}, 0) = \phi_0(\mathbf{x}) \in H^1(\Omega_{ext}) \\ \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t}(\mathbf{x}, 0) = \mathbf{v}_0(\mathbf{x}) \in (L^2(\Omega_s))^3 \\ \frac{\partial \phi}{\partial t}(\mathbf{x}, 0) = \psi_0(\mathbf{x}) \in L^2(\Omega_{ext}) \end{cases}$$

**Démonstration :** voir Bardos 1989 [10] et Sanchez 1989 [217].

**Remarques :**

1. Si la structure n'est pas fixée sur une surface intérieure il faut travailler dans l'espace  $(H^1(\Omega_s))^3$  quotienté par le sous-espace des mouvements de corps rigide.
2. L'énergie du système est donnée par la formule

$$E = \frac{1}{2} \int_{\Omega_s} [\rho_s (\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t})^2 + \Sigma_{ij} \epsilon_{ij}] d\mathbf{x} + \frac{1}{2} \int_{\Omega_{ext}} [\rho_f |\mathbf{v}|^2 + \frac{p^2}{\rho_f c^2}] d\mathbf{x} \quad (1.31)$$

3. Le cas où le fluide et le solide sont tous deux visqueux ne semble pas encore traité.

### Etude du cas stationnaire

Dans ce cas particulier le système composé d'un milieu solide élastique et d'un fluide parfait a été étudié par Bardos 1989 [10] et Sanchez 1989 [217]. Nous allons étendre ces résultats pour considérer aussi le cas où les milieux sont visqueux. Le problème consiste à chercher  $(\mathbf{u}, p, \mathbf{v})$  tels que

1.  $\mathbf{u} \in (H^1(\Omega_s))^3$ ,  $p_s \in H_{loc}^1(\Omega_{ext})$  et  $\mathbf{v} \in (H_{loc}^1(\Omega_{ext}))^3$
2.  $\operatorname{div} \boldsymbol{\Sigma} + \mathbf{g} = -\rho_s \omega^2 \mathbf{u}$  dans  $\Omega_s$  et  $\mathbf{g} \in (L^2(\Omega_s))^3$   
 $\Delta p_s + k^2 p_s = 0$  dans  $\Omega_{ext}$  pour un fluide parfait  

$$\begin{cases} -\frac{i\omega}{c^2} p + \rho_0 \operatorname{div} \mathbf{v} = q & \text{pour un fluide visqueux} \\ -i\rho_0 \omega \mathbf{v} + \nabla p = \mathbf{f} + \operatorname{div} \boldsymbol{\Sigma}^v \end{cases}$$

3. les conditions aux limites suivantes sont vérifiées

$$\begin{array}{ll}
\mathbf{u} = 0 & \text{sur } \Gamma \\
\Sigma \cdot \mathbf{n} = -(p_s + p_{inc})\mathbf{n} & \text{sur } \partial\Omega_{ext} \text{ fluide parfait} \\
\mathbf{v}_{inc} \cdot \mathbf{n} + \mathbf{v}_s \cdot \mathbf{n} = -i\omega \mathbf{u} \cdot \mathbf{n} & \text{sur } \partial\Omega_{ext} \\
\Sigma \cdot \mathbf{n} = -(p_s + p_{inc})\mathbf{n} + \Sigma^v \cdot \mathbf{n} + \Sigma_{inc}^v \cdot \mathbf{n} & \text{sur } \partial\Omega_{ext} \text{ fluide visqueux} \\
\mathbf{v}_{inc} + \mathbf{v}_s = -i\omega \mathbf{u} & \text{sur } \partial\Omega_{ext}
\end{array}$$

4. à l'infini  $p_s$  vérifie la condition de radiation

$$\frac{\partial p_s}{\partial n} - ikp_s = o\left(\frac{1}{r^{\frac{(n-1)}{2}}}\right) \text{ (n est la dimension de l'espace)}$$

La condition de radiation peut s'écrire sous cette forme car la partie rotationnelle de la solution est concentrée dans une couche limite autour du corps élastique. La pression totale  $p$  a été décomposée en la pression diffusée  $p_s$  et la pression incidente  $p_{inc}$  qui est supposée connue. La même décomposition est effectuée sur la vitesse. L'unicité se traite en cherchant les modes propres, c'est à dire les solutions avec  $p_{inc} = q = 0$  et  $\mathbf{v}_{inc} = \mathbf{g} = 0$ .

En multipliant l'équation d'équilibre dans le solide par  $\mathbf{u}^*$ , complexe conjugué du vecteur déplacement, et en intégrant sur  $\Omega_s$  nous avons

$$\int_{\Omega_s} \Sigma_{ij,j} u_i^* d\mathbf{x} = -\rho_s \omega^2 \int_{\Omega_s} u_i u_i^* d\mathbf{x} \quad (1.32)$$

soit

$$\int_{\partial\Omega_s} \Sigma_{ij} n_j u_i^* ds - \int_{\Omega_s} \Sigma_{ij} \epsilon_{ij}^* d\mathbf{x} = -\rho_s \omega^2 \int_{\Omega_s} u_i u_i^* d\mathbf{x} \quad (1.33)$$

En considérant la partie imaginaire on obtient

$$Im\left(\int_{\partial\Omega_s} \Sigma_{ij} n_j u_i^* ds\right) = 0 \text{ si le matériau est élastique} \quad (1.34)$$

$$Im\left(\int_{\partial\Omega_s} \Sigma_{ij} n_j u_i^* ds\right) < 0 \text{ si le matériau est viscoélastique et } \mathbf{u} \neq 0 \quad (1.35)$$

La dernière inégalité nécessite une justification. La dissipation dans le solide doit être positive sur un cycle donc

$$\frac{\omega}{2\pi} \int_0^{\frac{2\pi}{\omega}} Re(\Sigma_{ij} e^{-i\omega t}) Re(-i\omega \epsilon_{ij} e^{-i\omega t}) dt > 0 \quad (1.36)$$

soit

$$\frac{1}{2} Re(\Sigma_{ij} i\omega \epsilon_{ij}^*) > 0 \quad (1.37)$$

$$Im(\Sigma_{ij} \epsilon_{ij}^*) < 0 \quad (1.38)$$

d'où l'inégalité désirée qui permet de conclure.

Dans le fluide en régime harmonique nous avons les relations

$$\begin{cases} -\frac{i\omega}{c^2} p + \rho_0 \operatorname{div} \mathbf{v} = 0 \\ -i\rho_0 \omega \mathbf{v} + \nabla p = \operatorname{div} \Sigma^v \end{cases}$$

Intégrons la dernière équation multipliée par  $\mathbf{v}^*$  sur le domaine  $D_R$  compris entre la frontière  $\partial\Omega_{ext}$  et une sphère de rayon  $R$  contenant  $\Omega_s$ , on a alors

$$-i\omega\rho_0 \int_{D_R} v_i v_i^* + \int_{D_R} p_{,i} v_i^* d\mathbf{x} = \int_{D_R} \Sigma_{ij,j}^v v_i^* d\mathbf{x} \quad (1.39)$$

soit, avec des normales extérieures à  $\Omega_s$  et  $S_R$

$$\begin{aligned} -i\omega\rho_0 \int_{D_R} v_i v_i^* d\mathbf{x} + \int_{S_R} p v_i^* n_i ds - \int_{\partial\Omega_{ext}} p v_i^* n_i ds - \int_{D_R} p v_{i,i}^* d\mathbf{x} = \\ \int_{S_R} \Sigma_{ij}^v n_j v_i^* ds - \int_{\partial\Omega_{ext}} \Sigma_{ij}^v n_j v_i^* ds - \int_{D_R} \Sigma_{ij}^v v_{i,j}^* d\mathbf{x} \end{aligned} \quad (1.40)$$

ce que l'on peut écrire sous la forme

$$\begin{aligned} -i\omega\rho_0 \int_{D_R} v_i v_i^* d\mathbf{x} - \frac{\rho_0 c^2}{i\omega} \int_{D_R} v_{i,i} v_{j,j}^* d\mathbf{x} + \int_{D_R} \Sigma_{ij}^v v_{i,j}^* d\mathbf{x} = \\ \int_{S_R} \Sigma_{ij}^f n_j v_i^* ds - \int_{\partial\Omega_{ext}} \Sigma_{ij}^f n_j v_i^* ds \end{aligned} \quad (1.41)$$

avec  $\Sigma_{ij}^f = -p\delta_{ij} + \Sigma_{ij}^v$ . Prenant les parties réelles nous avons

$$Re\left(\int_{\partial\Omega_{ext}} \Sigma_{ij}^f n_j v_i^* ds\right) = Re\left(\int_{S_R} \Sigma_{ij}^f n_j v_i^* ds\right) - Re\left(\int_{D_R} \Sigma_{ij}^v v_{i,j}^* d\mathbf{x}\right) \quad (1.42)$$

Le vecteur flux d'énergie d'une onde harmonique est donné par

$$\begin{aligned} \mathbf{I}_i &= \frac{\omega}{2\pi} \int_0^{\frac{2\pi}{\omega}} -Re(\Sigma_{ij}^f e^{-i\omega t}) Re(v_j e^{-i\omega t}) dt \\ &= -\frac{1}{2} Re(\Sigma_{ij}^f v_j^*) \end{aligned} \quad (1.43)$$

La relation 1.42 exprime que l'énergie rayonnée par le solide est dissipée en partie dans  $D_R$  et le reste transmis à travers la surface  $S_R$ . Si l'on suppose qu'aucune énergie ne vient de l'infini, ce qui est l'interprétation physique des conditions de radiation, on a nécessairement

$$Re\left(\int_{S_R} \Sigma_{ij}^f n_j v_i^* ds\right) \leq 0 \quad (1.44)$$

On peut aussi vérifier cette inégalité à partir de la condition de radiation. Elle entraîne

$$Re\left(\int_{\partial\Omega_{ext}} \Sigma_{ij}^f n_j v_i^* ds\right) \leq 0 \quad (1.45)$$

soit avec  $\mathbf{v} = -i\omega\mathbf{u}$

$$Im\left(\int_{\partial\Omega_{ext}} \Sigma_{ij}^f n_j u_i^* ds\right) \geq 0 \quad (1.46)$$

Comparant avec la relation obtenue pour le solide on conclut

$$Im\left(\int_{\partial\Omega_{ext}} \Sigma_{ij} n_j u_i^* ds\right) = 0 \quad (1.47)$$

Ce résultat a une interprétation physique assez simple. Comme il n'y a pas de sources d'énergie dans le système aucun des deux milieux ne peut en transmettre à l'autre.

Si le solide est viscoélastique alors la relation 1.35 permet de conclure que  $\mathbf{u} = 0$ . Si le fluide est visqueux 1.42 entraîne  $\mathbf{v} = 0$  puis  $p = 0$ . S'il est parfait l'unicité de la solution du problème extérieur dans ce cas permet aussi de conclure que  $p = 0$ .

Dans la situation où le solide est purement élastique on doit distinguer deux cas. Si le fluide est visqueux alors  $\mathbf{v} = 0$  et  $p = 0$  par 1.42; il est au repos. Sur la frontière du solide on a continuité de la contrainte et de la vitesse qui sont toutes deux nulles donc  $\mathbf{u} = 0$  dans le solide. Il n'y a que la solution nulle qui vérifie le problème donc pas de mode propre dans ce cas. Dans toutes ces situations la solution est unique.

Si le fluide est parfait en utilisant le théorème 4 nous pouvons conclure à l'aide de 1.42 que la solution est encore nulle dans le fluide. La solution dans le solide est un mode de vibration d'un corps sous contrainte nulle et qui vérifie de plus  $\mathbf{u} \cdot \mathbf{n} = 0$  sur la frontière. On montre en fait que pour certaines valeurs exceptionnelles des coefficients d'élasticité de la structure le problème couplé peut avoir des fréquences propres. Bardos 1989 [10] donne l'exemple d'un cylindre élastique possédant des modes propres. L'ensemble des coefficients d'élasticité vérifiant cela est de mesure nulle. Dans la suite nous supposons que les coefficients sont choisis en dehors de ces valeurs exceptionnelles, le problème couplé stationnaire aura alors une solution unique. De toute façon il y a unicité de la solution dans le fluide.

### 1.4.3 Les fréquences de diffusion

Les fréquences de diffusion sont les pôles complexes de l'opérateur de diffusion donc les fréquences propres complexes des problèmes précédents. On montre que, pour des raisons de causalité, ces fréquences sont situées dans le demi-plan complexe  $Im(\omega) \leq 0$ . Pour un problème d'acoustique ces fréquences sont situées dans le demi-plan  $Im(\omega) < 0$  ce qui traduit le fait qu'il y a une solution unique pour  $\omega$  réelle tandis que pour des problèmes couplés il est possible, d'après la section précédente, de trouver exceptionnellement des fréquences sur l'axe réel. La répartition de ces fréquences dans le plan complexe dépend de la forme de l'objet. Pour des corps rigides, elles sont associées aux ondes de surface qui sont responsables de l'aspect chahuté des courbes de champs diffusés en fonction de la fréquence. Cela provient des interférences entre les ondes réfléchies directement et celles qui le sont après un contournement de l'obstacle (Gaunaud 1985 [91] et Merchant 1986 [171]). On pourra trouver des exemples de calcul de ces fréquences dans D'Archangelo 1985 [52] et Merchant 1986 [171] pour des ellipsoïdes rigides.

Pour des problèmes couplés elles sont réparties en deux groupes. Le premier groupe est concentré au voisinage de l'axe réel et est voisin des fréquences propres de la structure. Il dépend essentiellement de la composition et de la forme de l'obstacle. Le deuxième groupe avec des parties imaginaires plus importantes en valeurs absolues est lié à la forme de l'obstacle et dépend peu de la composition du corps diffusant. Des exemples sont donnés par Flax 1978 [81] et Flax 1980 [82] pour des cylindres et des sphères élastiques. Ohayon 1983 [193] étudie les propriétés des fréquences de diffusion pour un corps élastique plongé dans un fluide faiblement compressible. Gaunaud 1992 [93] donne des tables très complètes des fréquences de résonance de sphères élastiques.

Ce type d'études a conduit au développement de la méthode RST (Resonance Scattering Theory) exposée par Gaunaurd 1989 [90] et Gaunaurd 1991 [92]. L'essence de cette approche est de séparer le champ diffusé en deux contributions. L'une est associée à un corps rigide de même forme que l'objet élastique et varie faiblement avec la fréquence. L'autre partie provient des résonances du corps élastique et est constituée de pics marqués aux voisinages des modes propres de la structure. Cette méthode est surtout utile dans des problèmes d'identification de structures où l'on peut, en comparant le signal diffusé à une batterie de cas tests, espérer reconnaître les principaux traits de l'objet. C'est à dire sa forme grâce à l'étude de la partie régulière du signal et sa composition en isolant les modes. La méthode ne fournit pas de moyen de calcul supplémentaire. Son intérêt se situe surtout au niveau de l'interprétation des résultats.

## 1.5 Conclusion

Les fluides que nous nous proposons d'étudier seront peu visqueux. Par conséquent le champ de pression dans l'espace sera, sauf au voisinage immédiat de la structure, celui d'un fluide irrotationnel. Sur la surface de contact fluide-solide on peut écrire la continuité de la contrainte et de la vitesse sous la forme suivante

$$\begin{aligned}\Sigma^s \cdot \mathbf{n} &= \Sigma^f(p, \Phi) \cdot \mathbf{n} + \Sigma^f(\Psi) \cdot \mathbf{n} \\ \mathbf{v} &= \Phi + \Psi\end{aligned}\tag{1.48}$$

$\Psi$  est exponentiellement décroissant quand on s'éloigne de la surface avec un comportement en  $G^\alpha(r) = \frac{e^{i\alpha r}}{4\pi r}$  et  $\alpha = \frac{1+i}{\sqrt{2}} \sqrt{\frac{\omega\rho_0}{\mu}}$ . Donc  $\Sigma^f(\Psi)$  qui ne fait intervenir que des dérivées premières est en  $O(\sqrt{\mu})$  et peut être négligé par rapport à  $\Sigma^f(p, \Phi)$ . Comme  $\Psi$  peut être choisi tel que  $\Psi \cdot \mathbf{n} = 0$  sur la surface de séparation la solution en fluide irrotationnel donne une bonne valeur pour la vitesse normale.

La vitesse tangente à la surface est mal approximée par l'hypothèse de fluide irrotationnel ce qui peut avoir des conséquences sur la qualité de la description du mouvement du solide mais a peu d'influence sur le comportement du fluide qui est notre principal centre d'intérêt. Nous considérerons donc le fluide comme irrotationnel ce qui en simplifiera la description car son comportement sera complètement décrit par la donnée de son champ de pression.



# Chapitre 2

## La résolution numérique

Nous abordons maintenant la résolution numérique des problèmes traités dans le chapitre précédent. On se limitera au cas où le fluide est irrotationnel et on traitera d'abord le problème stationnaire. Nous commencerons par rappeler les principales méthodes utilisées pour résoudre ces questions en soulignant leurs domaines d'application, leurs performances et leurs faiblesses.

### 2.1 Historique des méthodes utilisées

#### 2.1.1 Les méthodes analytiques

Les méthodes analytiques ont pour objectif de construire des solutions exactes de l'équation de Helmholtz ou de problèmes couplés. Les solutions sont principalement obtenues par séparation des variables bien que dans certains cas particuliers on puisse aussi en obtenir par des techniques de type Wiener-Hopf (Skudrzyk 1971 [233] et Jones 1989 [131]). En dimension trois on montre que l'équation de Helmholtz est séparable dans les 11 systèmes de coordonnées listés par Morse et Feshbach 1953 [177] et dans ceux-la seulement (Eisenhart 1934 [66]). Ces systèmes de coordonnées sont définis à l'aide de coniques (éventuellement dégénérées). Hormis les cas de la sphère, du cylindre et du dioptré plan dont les solutions sont bien connues (Skudrzyk 1971 [233] et Jones 1989 [131]), cette démarche a permis d'obtenir des solutions pour des domaines ellipsoïdaux grâce à des développements en fonctions sphéroïdales voir Bouwkamp 1954 [24], Chertock 1961 [39] et Silbiger 1961 [232] pour une revue sur la question. L'ellipsoïde est ainsi, en acoustique, le corps tridimensionnel le plus général que l'on puisse traiter analytiquement.

Pour des problèmes couplés, avec un milieu intérieur fluide, le problème est plus difficile car la solution ne se sépare plus pour des formes ellipsoïdales générales voir Yeh 1963 [268], Yeh 1967 [269] et Burke 1968 [30]. Pour un milieu intérieur élastique on ne peut réellement résoudre que dans les cas d'un cylindre circulaire (voir Doolittle 1966 [62] et Flax 1980 [83]), d'une sphère (voir Faran 1951 [77], Goodman 1962 [100], Felippa 1980 [79] et Lin 1983 [156] qui a étudié le rayonnement dans un fluide visqueux), et d'un stratifié plan (voir la première partie). Quelques résultats semi-analytiques ont été obtenus pour un cylindre circulaire de longueur finie par Williams 1964 [262] et pour un cylindre avec des raidisseurs

par Klauson 1992 [135]. En régime transitoire la diffusion par un coque sphérique élastique a été obtenue par Huang 1969 [118] en utilisant une transformation de Laplace. Une coque sphérique élastique est le seul corps véritablement tridimensionnel dont la solution analytique soit connue et que l'on puisse utiliser comme cas test ou comme source de compréhension de la physique du phénomène.

## 2.1.2 La T matrice

Les méthodes analytiques étant si peu nombreuses, il est nécessaire de développer des approches numériques. Parmi celles-ci la méthode de la T-matrice fut une des plus populaires. Elle consiste en une application de la formulation intégrale du problème à deux surfaces (en général des sphères) dont l'une est intérieure à l'objet tandis que l'autre le contient. On utilise alors la décomposition de la fonction de Green sur une base de solutions élémentaires de l'équation de Helmholtz (en général des ondes sphériques) pour projeter les équations écrites sur les deux sphères précédentes dans cette base. On obtient ainsi deux systèmes d'équations linéaires reliant les coefficients de l'onde incidente à ceux de l'onde diffusée et aux valeurs des champs inconnus sur la surface de l'objet. En éliminant ceux-ci on obtient une matrice donnant l'onde diffusée en fonction de l'onde incidente, la T-matrice. Waterman 1969 [259] expose la méthode tandis que Ramm 1982 [207] et Kristensson 1983 [146] en montrent la convergence. Martin 1980 [164], Colton 1983 [45] et Brod 1984 [26] exposent la méthode voisine des null field equations où l'on projète l'équation intérieure sur la même base de fonctions sphériques. Quelques exemples d'applications peuvent être trouvés dans Varadan 1982 [255] pour la diffusion par un corps rigide et dans Peterson 1983 [202], Werby 1983 [260], Baskar 1984 [12], Lim 1990 [153] et Boström 1980 [21] pour la diffusion par un corps élastique. Cette méthode présente deux difficultés principales. Premièrement elle converge de moins en moins bien quand la forme de l'objet s'éloigne de celle d'une sphère (par exemple un corps allongé). Ce problème peut toutefois être résolu en utilisant une base de fonctions sphéroïdales au lieu des fonctions sphériques pour mieux se rapprocher de la forme réelle de l'objet (Hackman 1985 [108]). Ces fonctions sont cependant difficiles à évaluer ce qui complique beaucoup la résolution.

La deuxième difficulté se pose à haute fréquence. Il semble en fait que le nombre de fonctions de base que l'on puisse prendre en pratique soit limité à quelques dizaines voir à une centaine en effectuant une renormalisation (Werby 1983 [260] et Stupfel 1988 [240]). Au delà des problèmes numériques liés au mauvais conditionnement de la matrice du système interdisent le calcul (Tobocman 1985 [248] [247] et Varadan 1988 [256]). Cette méthode est mieux adaptée au calcul du champ lointain rayonné qu'au champ proche où la convergence n'est pas nécessairement assurée.

Le problème des fréquences singulières ne semble pas, par contre, se poser pour la T-matrice. Basé sur la formule intégrale de Kirchoff, le problème n'a pas de solution unique aux fréquences singulières. Toutefois le problème numérique se pose sur une bande de fréquence si étroite autour de chaque fréquence singulière que le problème disparaît en pratique (voir Shaw 1989 [231] pour une discussion à ce sujet).

### 2.1.3 Méthodes variationnelles et éléments finis

Une autre approche possible est la résolution par des méthodes variationnelles générales comme le font Levine 1948 [152], Gladwell 1966 [98], Stallybrass 1967 [238], Gladwell 1971 [99], et Wu 1990 [267] ou par éléments finis. C'est surtout cette dernière qui a été développée étant donné sa popularité et son utilisation dans d'autres domaines, notamment la mécanique des structures, ce qui simplifie a priori l'interface avec les codes existants pour la résolution des problèmes couplés. La difficulté est de modéliser un domaine infini avec un maillage fini. Si l'on se contente de tronquer le maillage à une distance raisonnable du corps étudié des phénomènes non-physiques de réflexion d'ondes sur cette frontière extérieure ainsi créée apparaissent. Pour lever cette difficulté plusieurs approches ont été proposées. On peut utiliser une dernière couche constituée d'éléments "infinis" dont la fonction est d'estimer la contribution du domaine non maillé sur la solution voir Bettles 1977 [19], Bettles 1984 [20] et Wood 1976 [264]. L'élément infini reproduit mal en général le comportement à l'infini de la solution exacte. Il faut mailler une partie importante du fluide pour aboutir à une solution correcte.

Hunt 1974 [120], Hunt 1975 [121] et plus tard Givoli 1989 [97] et Harari 1991 [111] avec la condition aux limites DtN (Dirichlet to Neumann) ont proposé d'écrire la relation d'impédance exacte sur une sphère extérieure délimitant la zone maillée. Elle est obtenue par une résolution analytique dans le domaine extérieure à la sphère. Cette relation prend une forme simple quand la solution est projetée sur une base constituée d'harmoniques sphériques. La contribution du domaine infini non maillé est ainsi prise en compte exactement ce qui permet de réduire le domaine fluide maillé au minimum. Pour des objets allongés on doit projeter sur une base de fonctions sphéroïdales si l'on veut épouser au mieux la forme du corps. La condition aux limites est cependant non locale en espace et en temps ce qui complique le problème et le rapproche dans l'esprit d'une méthode intégrale (voir Harari 1992 [112]). D'autres auteurs ont préféré écrire des conditions aux limites approchées mais locales en temps et en espace. Engquist 1977 [72] et Pinsky 1992 [206] ont développé une hiérarchie de conditions aux limites absorbantes de plus en plus précises mais faisant aussi intervenir des dérivations d'ordres de plus en plus élevés sur la frontière. On modélise bien le rayonnement pour une propagation normale à la frontière mais l'approximation est moins bonne quand l'onde est oblique car il existe une partie réfléchie dans cette situation.

Toutes ces méthodes nécessitent cependant un maillage tridimensionnel d'une partie plus ou moins importante du fluide avant d'introduire une condition aux limites approchée ou une condition aux limites complexe sur la limite extérieure du maillage. Elles ne donnent pas non plus accès au champ lointain qui doit être calculé à partir de la représentation intégrale.

### 2.1.4 Les méthodes approchées

Devant la difficulté d'obtenir des solutions exactes on peut être tenté de se satisfaire de solutions approchées. Parmi les méthodes approximatives la DAA (Doubly Asymptotic Approximations) semble une des plus intéressantes. Elle tend vers la solution exacte à basse fréquence où l'action du fluide sur la structure peut être modélisée par un terme de masse ajoutée (Deruntz 1978 [56]) et à haute fréquence où, dans de nombreux cas, on peut utiliser des approximations dont la plus simple est l'onde plane (Felippa 1980 [78]). La relation

d'impédance prend donc une forme simple dans ces deux cas extrêmes. Entre ces deux situations la relation est interpolée. On peut obtenir plusieurs modèles (DAA1, DAA2,...) de plus en plus précis, mais aussi de plus en plus complexes, suivant la qualité des approximations utilisées (Geers 1978 [94], Geers 1983 [95], Huang 1985 [119] et Nicolas-Vullierme 1991 [190]). Cette méthode ne nécessite pas le maillage du fluide et utilise des matrices qui ne dépendent pas de la fréquence. Les calculs sont donc plus simples que ceux des méthodes précédentes. Divers tests numériques effectués par les auteurs précédents ont confirmé l'intérêt de cette approche. Les résultats sont satisfaisants sauf au voisinage des résonances du système (Huang 1985 [119]). Il semble cependant que cette approche soit limitée à l'étude du rayonnement de structures plongées dans un fluide pour lesquelles elle peut fournir un bon outil de prédimensionnement. Elle ne semble pas permettre de résoudre des problèmes de diffusion associés à un champ incident régnant dans le fluide pour lesquels l'hypothèse de faible variation des champs de surface en fonction de la fréquence sur laquelle elle est fondée n'est pas a priori vérifiée.

### 2.1.5 Autres méthodes

Butler 1970 [32] a proposé de chercher la solution sous forme d'un développement en solutions de l'équation de Helmholtz qui est identifié grâce à des collocations sur la frontière. Miller 1991 [174] et Kondapalli 1992 [141] ont proposé d'utiliser comme fonctions élémentaires des points sources placés à l'intérieur de la surface de diffusion. Ces méthodes sont peu utilisées et les caractéristiques des problèmes discrets obtenus, en particulier celles des matrices des systèmes linéaires, ne semblent pas avoir été étudiées de manière approfondie.

## 2.2 La formulation intégrale

### 2.2.1 Intérêt et difficultés

Les problèmes associés aux méthodes citées précédemment ont incité très tôt à se tourner vers des formulations intégrales où le problème est posé sous la forme d'une équation intégrale qui relie la pression et la vitesse normale sur la surface. En chaque point de la frontière une des deux grandeurs est connue et la résolution de l'équation doit donner l'autre quantité. La formule de Kirchoff permet alors de calculer le champ de pression dans tout l'espace à partir de ces valeurs sur la frontière. Cette méthode offre en effet de nombreux avantages dont les principaux sont la réduction d'une dimension du problème à traiter qui, de plus, est maintenant posé sur un domaine fini que l'on peut mailler facilement. Elle permet en outre une prise en compte analytique des conditions de radiation. Les premiers développements datent du début des années 60 avec les travaux de Banaugh 1963 [9], Chen 1963 [38], Chertock 1964 [40], Brundrit 1965 [27] et Baron 1965 [11]. Ils traitent principalement de problèmes bidimensionnels ou axisymétriques. Brundrit, Chen et Baron utilisent des potentiels de simple couche alors que Banaugh et Chertock se basent sur la formule de Kirchoff. Les champs sont généralement approximés par des fonctions constantes par morceaux (éléments de degré 0).

Comme Rayleigh 1894 [239] l'avait prédit, les premiers résultats numériques de Noble 1967 [192], Copley 1968 [47], Chertock 1970 [41] et plus récemment ceux de Hall 1988 [109]

et Dokumaci 1990 [61] ont confirmé que la formulation intégrale ne conduisait pas à la solution du problème cherché pour un ensemble discret de fréquences, appelées fréquences singulières. Il n'y a pas de solution dans le cas d'un potentiel de simple ou de double couche alors que la solution n'est pas unique pour une équation basée sur la formule de Kirchoff. Ces fréquences sont en fait les fréquences propres du fluide lorsqu'il occupe le volume intérieur du corps avec des conditions aux limites inversées (Dirichlet intérieur pour un problème de Neumann extérieur et inversement, voir Kleinman 1974 [138] pour une discussion détaillée de ce point). Elles n'ont pas de signification physique mais traduisent le fait que la formule de Kirchoff n'est pas équivalente au problème posé mais n'est qu'une simple relation vérifiée par la solution du problème car on sait, d'après le chapitre précédent, que le problème extérieur admet une solution unique pour toute fréquence. Quelques auteurs ont utilisé cette formulation en la restreignant à basse fréquence. Seybert 1984 [225] a vérifié ainsi l'intérêt d'utiliser des éléments de degré deux.

Dans un problème concret ces fréquences ne sont pas connues sauf en résolvant le problème aux valeurs propres intérieur correspondant, ce qui complique singulièrement les calculs sans toutefois fournir un moyen d'obtenir la solution réelle à ces fréquences. De plus la densité de ces modes augmente avec la fréquence ce qui ne laisse pas d'espoir de s'affranchir du problème en ne calculant que pour des fréquences régulières et en interpolant dans les autres cas. Une implémentation de la méthode des équations intégrales doit donc s'affranchir de cette difficulté. On s'est plutôt orienté vers des méthodes fondées sur la formule de Kirchoff qui, en la complétant par d'autres relations pour garantir l'unicité, est a priori plus à même de résoudre le problème que celles fondées sur des potentiels de simple ou de double couche pour lesquelles il n'y a pas de solution. La plupart des recherches ultérieures sur la résolution de problèmes d'acoustique par équations intégrales ont eu pour but de résoudre cette difficulté.

## 2.2.2 Les différentes approches

Nous décrivons ci-dessous la plupart des méthodes proposées pour résoudre ce problème.

Il faut néanmoins noter qu'une combinaison de potentiels de simple et de double couche conduit à une solution unique à toute fréquence (Greenspan 1966 [103], Filippi 1977 [80], Sayhi 1981 [218] et Kress 1983 [144]). Cette formulation conduit à des intégrales singulières comme la méthode de Burton et Miller mais elle a de plus l'inconvénient de poser le problème en termes de grandeurs non physiques. La pression et le champ de vitesse doivent ensuite être retrouvés à l'aide d'une intégration sur la surface du corps. Jeng 1977 [127], Hwang 1991 [122] ont utilisé le même potentiel mais ont choisi les points sources sur une surface intérieure. Les intégrales ne sont plus singulières mais l'équation intégrale est maintenant de première espèce et par conséquent les caractéristiques numériques se dégradent quand le maillage est raffiné car tous les éléments des matrices tendent vers zéro alors que pour des équations de seconde espèce seuls les termes extra-diagonaux tendent vers zéro. Il en résulte en général un mauvais conditionnement des matrices pour des problèmes de tailles importantes.

Copley 1967 [46] a proposé d'appliquer l'équation intégrale en des points intérieurs. Il a montré que pour des problèmes axisymétriques il suffisait de prendre des points sur l'axe de symétrie pour aboutir à une solution unique. On obtient cependant des équations de première espèce avec les difficultés décrites précédemment.

Nous nous intéresserons surtout aux méthodes qui posent le problème en terme de pression et de vitesse normale ce qui facilitera grandement l'écriture des conditions aux limites lors du couplage avec la solution élastique du domaine intérieur.

Le point de départ est donc la formule de Kirchoff. A une fréquence singulière cette équation intégrale admet au moins une solution qui est la solution réelle de notre problème. L'alternative de Fredholm montre que l'ensemble des solutions est un espace affine de dimension finie obtenu en ajoutant une solution quelconque du problème homogène à la solution réelle. Il faut donc modifier la formule de Kirchoff ou lui ajouter des conditions supplémentaires pour aboutir à une solution unique.

Ursell 1973 [253] a proposé de modifier la fonction de Green en lui ajoutant une série constituée de fonctions sphériques et a construit ainsi une nouvelle équation intégrale qui admet une solution unique à toute fréquence. Le problème est que cette nouvelle fonction est donnée par un développement en série dont la convergence est lente à haute fréquence. Jones 1974 [130] et Ursell 1978 [254] ont proposé une variante de cette méthode en construisant une fonction plus simple obtenue avec un nombre fini d'ondes sphériques mais qui assure l'unicité dans un intervalle de fréquence seulement. Kleinman 1982 [139] et Kleinman 1983 [137] [140] a proposé d'optimiser le choix de la série pour obtenir un opérateur de norme minimale ou pour améliorer le conditionnement des matrices résultant de la discrétisation.

Schenck 1968 [219] a proposé d'écrire, en plus de l'équation d'origine, quelques relations supplémentaires obtenues par application de l'équation en des points intérieurs car on peut montrer que parmi toutes les solutions qui vérifient l'équation intégrale de surface, une seule vérifie aussi l'équation intérieure et c'est la solution cherchée. On obtient ainsi un système surdéterminé que l'on peut résoudre par moindres carrés ou par multiplicateurs de Lagrange. Pourvu qu'un des points intérieurs ne soit pas 'trop près' d'une surface nodale associée à l'un des modes définissant les fréquences singulières, cette méthode conduit à la bonne solution. Elle a été baptisée CHIEF (Combined Helmholtz Integral Equation Formulation). De nombreux exemples d'applications et de développements existent, voir par exemple Koopmann 1982 [142] et Seybert 1987 [222]. Engblom 1975 [71], Seybert 1985 [226] et Latcha 1986 [150] ont utilisé des éléments de degré deux et Engblom a couplé avec un corps élastique. Tobocman 1984 [245] [246] a étudié la diffusion des ondes par des corps rigides et fluides et a testé le comportement de l'équation intégrale pour des objets allongés à moyenne fréquence. Avec de simples éléments de degré 0 il a trouvé une convergence satisfaisante qui dépendait peu de la forme du corps. La difficulté principale de cette méthode réside dans le choix des points intérieurs surtout à haute fréquence où la densité des surfaces nodales augmente. Wu 1991 [265] a amélioré le procédé en imposant la nullité des dérivées premières de l'équation intérieure en plus de la relation elle-même et en obtenant la relation sur tout un domaine intérieur à la place de la simple collocation en des points particuliers. Segalman 1992 [220] a proposé des équations intérieures obtenues à l'aide de dérivées d'ordres supérieures. CHIEF est une des méthodes les plus populaires. Elle présente l'inconvénient de réclamer la définition de points en plus du maillage (jusqu'à plusieurs dizaines à haute fréquence) et elle complique la résolution en obtenant un système qui n'est plus carré.

Piaszczyk 1984 [203] a utilisé un système surdéterminé avec des collocations en des points du domaine extérieur. La valeur de la pression n'est pas connue a priori en ces points. Le système doit donc être résolu de manière itérative. Il semble toutefois d'après Fyfe 1991 [89]

que la convergence n'ait pas toujours lieu.

Burton et Miller 1971 [31] ont eux proposé d'ajouter à l'équation de Kirchoff une nouvelle équation qui est obtenue en dérivant la première par rapport à la normale extérieure et en la multipliant par un coefficient complexe. Ils ont montré qu'en choisissant convenablement la partie imaginaire de ce coefficient on aboutissait à une solution unique. On a ainsi une équation satisfaisante qui contrairement à la plupart des méthodes précédentes ne nécessite aucune information supplémentaire par rapport au maillage de la surface et est donc très séduisante pour une utilisation pratique. Cette formulation introduit cependant des intégrales singulières qu'il faut traiter spécifiquement. Des comparaisons ont été effectuées avec CHIEF par Reut 1985 [209], Tobocman 1986 [249], Tobocman 1987 [250], Seybert 1987 [221], Reut 1989 [210] et Amini 1990 [1]. Les conclusions sur la méthode la plus performante varient suivant les auteurs. Une variante de cette méthode a été proposée par Cunefare 1989 [50] qui a utilisé des points de collocation à l'intérieur du domaine ce qui conduit de nouveau à des équations de première espèce et aux difficultés évoquées précédemment.

Hamdi 1981 [110] et Ben Mariem 1987 [17] ont proposé de résoudre l'équation intégrale par des méthodes variationnelles ce qui permet grâce à des identités de réduire les intégrales hypersingulières à des formes évaluables numériquement. Cette approche nécessite cependant une double intégration sur la surface et n'est donc pas très performante numériquement. Considérons par exemple un maillage à  $N$  noeuds et  $M$  éléments et calculons le nombre d'intégrations nécessaire par rapport à une méthode de collocation. Soit  $ng$  le nombre de points de Gauss pour intégrer sur un élément,  $nf$  le nombre de fonctions de base par élément et  $\alpha = N/M$  le nombre moyen de noeuds par élément, le nombre d'évaluations de fonctions est  $N_1 = N.M.ng.nf = \alpha.ng.nf.M^2$  pour une méthode de collocation et  $N_2 = M^2.ng^2.nf^2/2$  pour une méthode variationnelle. Avec des éléments quadratiques à 8 noeuds par maille,  $\alpha = 3$ ,  $nf = 8$  donc  $N_1 = 24.ng.M^2$  tandis que  $N_2 = 32.ng^2.M^2$ . En prenant  $ng = 9$  on obtient  $N_2/N_1 = 12$  donc la méthode variationnelle demande environ 12 fois plus de calcul que la méthode de collocation. Néanmoins cette approche a conduit à des codes réels.

Nous allons développer l'approche de Burton et Miller en commençant par en rappeler la formulation.

### 2.2.3 La méthode de Burton et Miller

Soit un corps occupant un domaine borné  $\Omega_{int}$  de frontière  $\partial\Omega$  et éventuellement soumis à un champ de pression incidente  $p_{inc}$ . Le champ de pression solution de l'équation de Helmholtz dans le domaine extérieur  $\Omega_{ext}$  vérifie sur la frontière la formule de Kirchoff

$$\int_{\partial\Omega} p(\mathbf{x}) \frac{\partial G^k}{\partial \mathbf{n}_{\mathbf{x}}}(\mathbf{y} - \mathbf{x}) d\mathbf{x} - \int_{\partial\Omega} \frac{\partial p}{\partial \mathbf{n}_{\mathbf{x}}}(\mathbf{x}) G^k(\mathbf{y} - \mathbf{x}) d\mathbf{x} + p_{inc}(\mathbf{y}) = c(\mathbf{y})p(\mathbf{y}) \quad (2.1)$$

où  $p$  est le champ de pression total,  $p_{inc}$  le champ incident et

$$c(\mathbf{y}) = \begin{cases} 1 & \text{si } \mathbf{y} \in \Omega_{ext} \\ 0 & \text{si } \mathbf{y} \in \Omega_{int} \\ 1 - \frac{\theta(\mathbf{y})}{4\pi} & \text{si } \mathbf{y} \in \partial\Omega \quad \left(\frac{1}{2} \text{ si } \mathbf{y} \text{ régulier}\right) \end{cases}$$

$\mathbf{n}_x$  est la normale dirigée vers  $\Omega_{ext}$ ,  $\mathbf{x}$  le point source,  $\mathbf{y}$  le point d'observation et  $\theta(\mathbf{y})$  est l'angle solide intérieur. Pour un problème bidimensionnel il faut diviser par  $2\pi$  au lieu de  $4\pi$ . La fonction de Green vaut

$$G^k(\mathbf{r}) = \begin{cases} \frac{i}{4}H_0(kr) & \text{en } 2D \\ \frac{e^{ikr}}{4\pi r} & \text{en } 3D \end{cases} \quad (2.2)$$

Pour des problèmes posés sur un demi-espace il faut prendre comme fonction de Green  $\tilde{G}^k(\mathbf{r}) = G^k(\mathbf{r}) + G^k(\mathbf{r}')$  pour un demi-plan rigide et  $\tilde{G}^k(\mathbf{r}) = G^k(\mathbf{r}) - G^k(\mathbf{r}')$  pour un demi-plan souple avec  $\mathbf{r} = \mathbf{x} - \mathbf{y}$  et  $\mathbf{r} = \mathbf{x} - \mathbf{y}'$  où  $\mathbf{y}'$  est le symétrique de  $\mathbf{y}$  par rapport à la frontière du demi-espace, voir Seybert 1988 [223] et Seybert 1989 [224].

En un point où la surface est régulière l'équation dérivée est, sous réserve de questions d'existence des intégrales qui seront discutées plus tard,

$$\int_{\partial\Omega} p(\mathbf{x}) \frac{\partial^2 G^k}{\partial \mathbf{n}_x \partial \mathbf{n}_y}(\mathbf{y} - \mathbf{x}) d\mathbf{x} - \int_{\partial\Omega} \frac{\partial p}{\partial \mathbf{n}_x}(\mathbf{x}) \frac{\partial G^k}{\partial \mathbf{n}_y}(\mathbf{y} - \mathbf{x}) d\mathbf{x} + \frac{\partial p_{inc}}{\partial \mathbf{n}_y}(\mathbf{y}) = \frac{1}{2} \frac{\partial p}{\partial \mathbf{n}_y}(\mathbf{y}) \quad (2.3)$$

L'équation finale proposée par Burton et Miller est la somme de 2.1 et de 2.3 multipliée par un nombre complexe  $\alpha$  soit

$$\begin{aligned} & \int_{\partial\Omega} p(\mathbf{x}) \frac{\partial G^k}{\partial \mathbf{n}_x}(\mathbf{y} - \mathbf{x}) d\mathbf{x} - \int_{\partial\Omega} \frac{\partial p}{\partial \mathbf{n}_x}(\mathbf{x}) G^k(\mathbf{y} - \mathbf{x}) d\mathbf{x} + \alpha \int_{\partial\Omega} p(\mathbf{x}) \frac{\partial^2 G^k}{\partial \mathbf{n}_x \partial \mathbf{n}_y}(\mathbf{y} - \mathbf{x}) d\mathbf{x} \\ & - \alpha \int_{\partial\Omega} \frac{\partial p}{\partial \mathbf{n}_x}(\mathbf{x}) \frac{\partial G^k}{\partial \mathbf{n}_y}(\mathbf{y} - \mathbf{x}) d\mathbf{x} + p_{inc}(\mathbf{y}) + \alpha \frac{\partial p_{inc}}{\partial \mathbf{n}_y}(\mathbf{y}) = \frac{1}{2} p(\mathbf{y}) + \frac{\alpha}{2} \frac{\partial p}{\partial \mathbf{n}_y}(\mathbf{y}) \end{aligned} \quad (2.4)$$

Commençons par montrer que pour  $\alpha$  convenablement choisi cette formulation conduit à une solution unique pour tout  $k$ . Introduisons les différents opérateurs suivants

$$\begin{aligned} \mathbf{L}[\sigma](\mathbf{y}) &= \int_{\partial\Omega} \sigma(\mathbf{x}) G^k(\mathbf{y} - \mathbf{x}) d\mathbf{x} \\ \mathbf{M}[\sigma](\mathbf{y}) &= \int_{\partial\Omega} \sigma(\mathbf{x}) \frac{\partial G^k}{\partial \mathbf{n}_x}(\mathbf{y} - \mathbf{x}) d\mathbf{x} \\ \mathbf{N}[\sigma](\mathbf{y}) &= \frac{\partial}{\partial \mathbf{n}_y} \int_{\partial\Omega} \sigma(\mathbf{x}) \frac{\partial G^k}{\partial \mathbf{n}_x}(\mathbf{y} - \mathbf{x}) d\mathbf{x} = \int_{\partial\Omega} \sigma(\mathbf{x}) \frac{\partial^2 G^k}{\partial \mathbf{n}_x \partial \mathbf{n}_y}(\mathbf{y} - \mathbf{x}) d\mathbf{x} \end{aligned} \quad (2.5)$$

$\mathbf{L}$  est un potentiel de simple couche,  $\mathbf{M}$  un potentiel de double couche. Pour l'existence de  $\mathbf{L}$  et  $\mathbf{M}$  il suffit que  $\sigma$  soit continue par morceaux. Pour la dérivée normale de  $\mathbf{L}$  il suffit que  $\sigma$  soit continu au point considéré et pour la dérivée normale de  $\mathbf{M}$  (soit  $\mathbf{N}$ ) que  $\sigma \in C^{1,\alpha}$ , voir Lin 1984 [155]. Il a montré que pour des surfaces régulières et des données en vitesse normale dans  $C^{0,\alpha}$  la solution appartenait à  $C^{1,\alpha}$ . La dernière égalité doit être comprise au sens des parties finies pour des fonctions  $C^{1,\alpha}$  (Krishnasamy 1990 [145]).

A la traversée de la surface  $\partial\Omega$ , en un point où la surface est régulière, ces différents potentiels vérifient les conditions de sauts suivantes (Kellogg 1967 [134] et Günter 1967 [107])

$$\begin{aligned}
\mathbf{L}[\sigma]_{\partial\Omega} &= \mathbf{L}[\sigma]_{int} &= \mathbf{L}[\sigma]_{ext} \\
\left(\frac{\partial\mathbf{L}[\sigma]}{\partial\mathbf{n}_y}\right)_{\partial\Omega} &= \left(\frac{\partial\mathbf{L}[\sigma]}{\partial\mathbf{n}_y}\right)_{int} - \frac{1}{2}\sigma &= \left(\frac{\partial\mathbf{L}[\sigma]}{\partial\mathbf{n}_y}\right)_{ext} + \frac{1}{2}\sigma \\
(\mathbf{M}[\sigma])_{\partial\Omega} &= (\mathbf{M}[\sigma])_{int} + \frac{1}{2}\sigma &= (\mathbf{M}[\sigma])_{ext} - \frac{1}{2}\sigma \\
\left(\frac{\partial\mathbf{M}[\sigma]}{\partial\mathbf{n}_y}\right)_{\partial\Omega} &= \left(\frac{\partial\mathbf{M}[\sigma]}{\partial\mathbf{n}_y}\right)_{int} &= \left(\frac{\partial\mathbf{M}[\sigma]}{\partial\mathbf{n}_y}\right)_{ext}
\end{aligned} \tag{2.6}$$

L'équation intégrale peut alors s'écrire en termes de valeurs des potentiels précédents sur la surface ou de leurs valeurs limites lorsque l'on tend vers la surface en restant dans le milieu intérieur.

$$\begin{aligned}
\mathbf{M}[p] - \frac{1}{2}p - \mathbf{L}\left[\frac{\partial p}{\partial\mathbf{n}_x}\right] + \alpha\frac{\partial\mathbf{M}[p]}{\partial\mathbf{n}_y} - \alpha\frac{\partial\mathbf{L}}{\partial\mathbf{n}_y}\left[\frac{\partial p}{\partial\mathbf{n}_x}\right] - \frac{\alpha}{2}\frac{\partial p}{\partial\mathbf{n}_y} + p_{inc} + \alpha\frac{\partial p_{inc}}{\partial\mathbf{n}_y} &= \\
\mathbf{M}[p]_{int} - \mathbf{L}\left[\frac{\partial p}{\partial\mathbf{n}_x}\right]_{int} + \alpha\frac{\partial\mathbf{M}}{\partial\mathbf{n}_y}[p]_{int} - \alpha\frac{\partial\mathbf{L}}{\partial\mathbf{n}_y}\left[\frac{\partial p}{\partial\mathbf{n}_x}\right]_{int} + p_{inc} + \alpha\frac{\partial p_{inc}}{\partial\mathbf{n}_y} &= 0
\end{aligned} \tag{2.7}$$

Considérons un problème de Neumann extérieur. La solution est unique si l'équation homogène a pour seule solution la fonction nulle. La fonction  $u(\mathbf{x}) = \mathbf{M}[p](\mathbf{x})$  solution de l'équation homogène doit vérifier sur  $\partial\Omega$ , d'après la relation précédente

$$u_{int}(\mathbf{x}) + \alpha\frac{\partial u_{int}}{\partial\mathbf{n}_x}(\mathbf{x}) = 0 \tag{2.8}$$

L'application de la formule de Green à  $u$  et  $u^*$  sur  $\Omega_{int}$  donne

$$\begin{aligned}
\int_{\partial\Omega} \left(u_{int}\frac{\partial u_{int}^*}{\partial\mathbf{n}_x} - u_{int}^*\frac{\partial u_{int}}{\partial\mathbf{n}_x}\right)d\mathbf{x} + (k^{*2} - k^2) \int_{\Omega_{int}} |u_{int}|^2 d\mathbf{x} &= \\
-2i\text{Im}(\alpha) \int_{\partial\Omega} \left|\frac{\partial u_{int}}{\partial\mathbf{n}_x}\right|^2 d\mathbf{x} - 2i\text{Im}(k^2) \int_{\Omega_{int}} |u_{int}|^2 d\mathbf{x} &= 0
\end{aligned} \tag{2.9}$$

Si  $\text{Im}(\alpha)$  est de même signe que  $\text{Im}(k^2)$  les deux expressions sont nulles ainsi que  $u_{int}$  et  $\frac{\partial u}{\partial\mathbf{n}}_{int}$  sur  $\partial\Omega$ , donc  $\frac{\partial u}{\partial\mathbf{n}}_{ext} = 0$  par continuité de la dérivée d'un potentiel de double couche. L'unicité du problème de Neumann extérieur montre que  $u_{ext} = 0$ . Les conditions de saut sur la surface  $\partial\Omega$  conduisent à  $p = 0$ . La solution est donc unique. Pour le problème de Dirichlet on pose  $u = \mathbf{L}\left(\frac{\partial p}{\partial n}\right)$  et la formule 2.7 montre que  $u$  vérifie

$$u_{int}(\mathbf{x}) + \alpha\frac{\partial u_{int}}{\partial\mathbf{n}_x}(\mathbf{x}) = 0 \tag{2.10}$$

On conclut de manière analogue au cas du problème de Neumann que la solution est unique avec la même valeur de  $\alpha$ .

Les différents noyaux intégraux se traitent facilement sauf le terme  $\frac{\partial \mathbf{M}[p]}{\partial \mathbf{n}_y}$  qui fait intervenir une singularité en  $1/r^3$  en dimension 3 et en  $1/r^2$  en dimension 2 si la dérivée est passée sous le signe intégral. Cette intégrale, que l'on qualifie d'hypersingulière, nécessite une étude particulière et constitue la principale difficulté de cette méthode car il n'est pas possible de l'évaluer avec des formules d'intégration usuelles.

## 2.2.4 Les différentes régularisations

Il existe deux méthodes principales pour atténuer ces singularités. La première méthode part de la relation suivante qui provient de l'application de la formule de Green à  $G_k$  et au potentiel de double couche  $\mathbf{M}[p]$  (voir Burton et Miller 1971 [31] et Roach 1979 [212]).

$$\mathbf{LN}[\sigma] = (\mathbf{M}^2 - \frac{1}{4}\mathbf{I})[\sigma]$$

ou en terme des noyaux statiques

$$\mathbf{L}_0\mathbf{N}_0[\sigma] = (\mathbf{M}_0^2 - \frac{1}{4}\mathbf{I})[\sigma]$$

En multipliant l'équation dérivée par  $\mathbf{L}_0$  on obtient

$$\begin{aligned} & \mathbf{M}[p] - \frac{1}{2}p + \alpha\mathbf{L}_0(\mathbf{N} - \mathbf{N}_0)[p] + \alpha(\mathbf{M}_0^2 - \frac{1}{4}\mathbf{I})[p] = \\ & -p_{inc} + \mathbf{L}\left(\frac{\partial p}{\partial \mathbf{n}_x}\right) + \alpha\mathbf{L}_0\frac{\partial \mathbf{L}}{\partial \mathbf{n}_y}\left(\frac{\partial p}{\partial \mathbf{n}_x}\right) - \alpha\mathbf{L}_0\left(\frac{\partial p_{inc}}{\partial \mathbf{n}_y} - \frac{1}{2}\frac{\partial p}{\partial \mathbf{n}_y}\right) \end{aligned} \quad (2.11)$$

On aboutit ainsi à des noyaux dont les singularités sont au plus en  $1/r$  ce qui permet de réaliser les intégrations numériques. Cela est effectué cependant au prix de produits d'opérateurs ce qui revient à intégrer deux fois sur la surface et est donc très couteux en temps calcul (de l'ordre de 20 fois plus). Cette méthode a été utilisée par Amini 1986 [2] avec des éléments de degré deux pour des surfaces axisymétriques. Les résultats numériques ont montré l'intérêt d'utiliser des interpolations d'ordre élevé par rapport aux fonctions constantes par morceaux car elles permettent d'obtenir des solutions plus précises pour un même nombre de noeud ce qui se traduit par des gains en temps calcul. Amini 1990 [3] a perfectionné le calcul en utilisant une méthode multi-grille.

Une autre méthode de régularisation part d'une des deux relations suivantes

$$\begin{aligned} & \int_{\partial\Omega} p(\mathbf{x}) \frac{\partial^2 G^k}{\partial \mathbf{n}_x \partial \mathbf{n}_y}(\mathbf{y} - \mathbf{x}) d\mathbf{x} \\ & = \int_{\partial\Omega} (p(\mathbf{x}) - p(\mathbf{y})) \frac{\partial^2 G^k}{\partial \mathbf{n}_x \partial \mathbf{n}_y}(\mathbf{y} - \mathbf{x}) d\mathbf{x} - p(\mathbf{y}) \int_{\partial\Omega} (\mathbf{n}_x \cdot \mathbf{n}_y) (ik)^2 G^k(\mathbf{y} - \mathbf{x}) d\mathbf{x} \\ & = - \int_{\partial\Omega} p(\mathbf{x}) \mathbf{n}_x \cdot \mathbf{n}_y (ik)^2 G^k(\mathbf{y} - \mathbf{x}) d\mathbf{x} - \int_{\partial\Omega} (p(\mathbf{x}) - p(\mathbf{y})) \mathbf{n}_x \cdot \nabla_x \wedge (\mathbf{n}_y \wedge \nabla_y G^k(\mathbf{y} - \mathbf{x})) d\mathbf{x} \end{aligned} \quad (2.12)$$

Le terme contenant  $G^k$  est faiblement singulier tandis que l'autre contient encore une singularité en  $1/r^2$ . L'évaluation directe de ce terme est délicate. Beaucoup d'auteurs comme Meyer 1978 [173], Meyer 1979 [172] et Angélini 1983 [4] ont en fait utilisé des interpolations avec des fonctions constantes par élément. Ce second terme disparaît alors sur l'élément singulier mais la précision des résultats n'est pas très bonne avec ce type d'élément et par conséquent il en faut un nombre important.

Terai 1980 [242] [241] a évalué la singularité par des développements en série au voisinage du point singulier et a calculé la partie la plus singulière par une intégrale de contour. Wu 1991 [266] a lui aussi calculé la valeur principale de Cauchy en transformant la partie la plus singulière en une intégrale de contour sur la frontière de l'élément. Il a placé les points de collocation à l'intérieur de l'élément ce qui a l'avantage de respecter la condition de  $C^{1,\alpha}$  régularité et d'obtenir une normale bien définie. Comme ce procédé conduit à plus d'équations que d'inconnues, il a résolu le système final par moindres carrés. Krishnasamy 1990 [145] montre que l'on peut utiliser la formule de Stokes pour transformer l'intégrale singulière en une intégrale de contour si la fonction est régulière au point de collocation. Harris 1992 [113] a évalué numériquement la valeur principale de Cauchy des intégrales précédentes grâce à un schéma d'intégration spécial sur l'élément singulier qui transforme l'intégrale bidimensionnelle en deux intégrales unidimensionnelles dont l'une est régulière et l'autre est une partie finie que l'on calcule analytiquement. Il a constaté l'avantage d'utiliser des éléments quadratiques. Guiggiani 1987 [105], Guiggiani 1990 [106] et Martin 1989 [165] ont aussi proposé une évaluation directe de la valeur principale de Cauchy ou de la partie finie.

Chien 1990 [42] a régularisé en développant les fonctions de forme au voisinage du point singulier et en utilisant des identités obtenues grâce à des solutions de problèmes statiques intérieurs.

La question de régularité est essentielle dans cette deuxième méthode de régularisation et pour l'existence même des intégrales hypersingulières. Supposons la fonction régulière au point de collocation (ce qui n'est pas nécessairement vrai dans les angles, dans les coins et aux points de discontinuité de la vitesse normale) il faut que l'approximation le soit aussi pour l'existence des intégrales. Les éléments quadratiques usuels sont  $C^{0,\alpha}$  mais pas  $C^{1,\alpha}$  d'où une difficulté. En fait la condition minimale connue de régularité pour l'existence de la dérivée normale du potentiel de double couche au point P est la condition de Lyapounov qui s'écrit

$$\left| \int_0^{2\pi} (p(\rho, \theta) - p(P)) d\theta \right| < a\rho^{1+\nu}, \quad \nu > 0 \quad (2.13)$$

Elle n'est pas non plus vérifiée aux noeuds par des éléments usuels. Ingber 1990 [123] et Liu 1992 [157] ont proposé de réaliser l'interpolation avec des splines. Cette approche peut être appliquée pour des problèmes 2D ou axisymétriques mais peut difficilement être mise en pratique pour des problèmes 3D à cause de la difficulté de réaliser l'interpolation dans ce cas.

## 2.3 Une formulation intégrale sans forte singularité

Nous nous proposons d'utiliser l'équation intégrale précédente avec une nouvelle méthode de régularisation du potentiel  $\mathbf{N}$  pour aboutir à une formulation où les noyaux auront des singularités au plus en  $1/r$  et pourront donc être évalués par des formules de Gauss standards. Pour illustrer le type d'approche utilisée nous commencerons par rétablir la formule de Kirchoff en la modifiant pour obtenir des noyaux plus réguliers.

### 2.3.1 Equation intégrale

Le champ de pression diffusé  $p_{dif}$  vérifie l'équation de Helmholtz dans le domaine extérieur  $\Omega_{ext}$  soit

$$(\Delta p_{dif} + k^2 p_{dif})(\mathbf{x}) = 0 \quad (2.14)$$

Pour former l'équation intégrale la relation précédente est multipliée par la fonction de Green  $G^k(\mathbf{y} - \mathbf{x})$  et intégrée sur  $\Omega_{ext}$  moins la boule de centre  $\mathbf{y}$  et de rayon  $\epsilon$ .

$$\int_{\Omega_{ext} - B(\mathbf{y}, \epsilon)} (\Delta p_{dif} + k^2 p_{dif})(\mathbf{x}) G^k(\mathbf{y} - \mathbf{x}) d\mathbf{x} = 0 \quad (2.15)$$

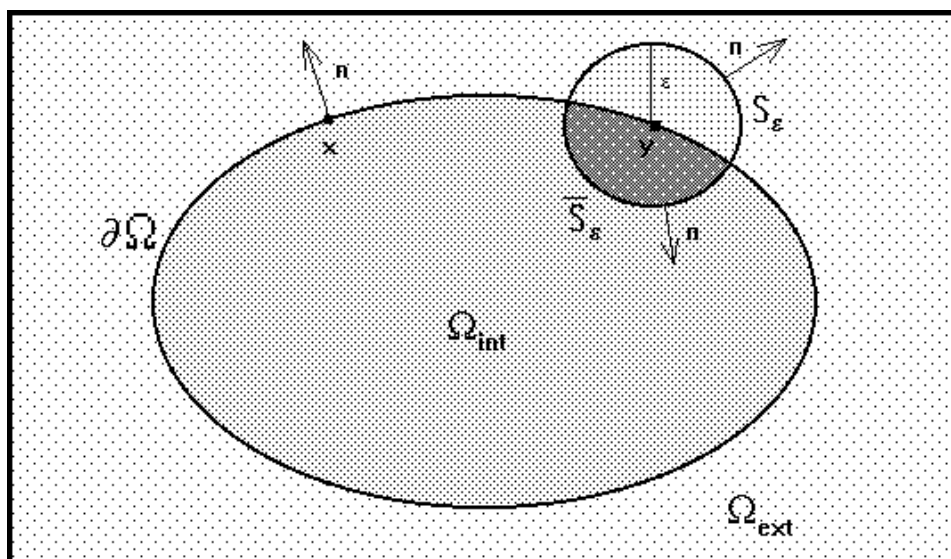


FIG. 2.1 – Définition des domaines et des normales.

Quand  $\mathbf{y}$  est un point de la frontière deux applications successives de la formule de Green conduisent à une expression qui ne fait plus intervenir que des champs sur les surfaces  $\partial\Omega - B_\epsilon$  et  $S_\epsilon$ .  $S_\epsilon$  et  $\bar{S}_\epsilon$  sont respectivement l'intersection de la sphère de centre  $\mathbf{y}$  et de rayon  $\epsilon$  avec les domaines extérieurs et intérieurs (voir figure 2.1).

$$\begin{aligned}
& \int_{\partial\Omega-B_\epsilon} \frac{\partial p_{dif}}{\partial \mathbf{n}_x}(\mathbf{x}) G^k(\mathbf{y}-\mathbf{x}) d\mathbf{x} + \int_{S_\epsilon} \frac{\partial p_{dif}}{\partial \mathbf{n}_x}(\mathbf{x}) G^k(\mathbf{y}-\mathbf{x}) d\mathbf{x} \\
& - \int_{\partial\Omega-B_\epsilon} p_{dif}(\mathbf{x}) \frac{\partial G^k}{\partial \mathbf{n}_x}(\mathbf{y}-\mathbf{x}) d\mathbf{x} - \int_{S_\epsilon} p_{dif}(\mathbf{x}) \frac{\partial G^k}{\partial \mathbf{n}_x}(\mathbf{y}-\mathbf{x}) d\mathbf{x} = 0 \quad (2.16)
\end{aligned}$$

Dans cette formule ainsi que dans les suivantes les normales  $\mathbf{n}_x$  sont dirigées vers  $\Omega_{ext}$ . Le champ incident  $p_{inc}$  vérifie sur le domaine intérieur

$$\begin{aligned}
& \int_{\partial\Omega-B_\epsilon} \frac{\partial p_{inc}}{\partial \mathbf{n}_x}(\mathbf{x}) G^k(\mathbf{y}-\mathbf{x}) d\mathbf{x} - \int_{\bar{S}_\epsilon} \frac{\partial p_{inc}}{\partial \mathbf{n}_x}(\mathbf{x}) G^k(\mathbf{y}-\mathbf{x}) d\mathbf{x} \\
& - \int_{\partial\Omega-B_\epsilon} p_{inc}(\mathbf{x}) \frac{\partial G^k}{\partial \mathbf{n}_x}(\mathbf{y}-\mathbf{x}) d\mathbf{x} + \int_{\bar{S}_\epsilon} p_{inc}(\mathbf{x}) \frac{\partial G^k}{\partial \mathbf{n}_x}(\mathbf{y}-\mathbf{x}) d\mathbf{x} = 0 \quad (2.17)
\end{aligned}$$

Le champ statique vérifie sur la frontière de la boule  $B_\epsilon$

$$\int_{\partial B_\epsilon} \frac{\partial G^0}{\partial \mathbf{n}_x}(\mathbf{y}-\mathbf{x}) d\mathbf{x} = -1 \quad (2.18)$$

En remarquant que les champs statiques et dynamiques ont les mêmes singularités et que le champ incident est régulier au voisinage de la frontière, la formule 2.17 peut se réécrire sous la forme

$$\begin{aligned}
& \int_{\partial\Omega-B_\epsilon} \frac{\partial p_{inc}}{\partial \mathbf{n}_x}(\mathbf{x}) G^k(\mathbf{y}-\mathbf{x}) d\mathbf{x} + \int_{S_\epsilon} \frac{\partial p_{inc}}{\partial \mathbf{n}_x}(\mathbf{x}) G^k(\mathbf{y}-\mathbf{x}) d\mathbf{x} \\
& - \int_{\partial\Omega-B_\epsilon} p_{inc}(\mathbf{x}) \frac{\partial G^k}{\partial \mathbf{n}_x}(\mathbf{y}-\mathbf{x}) d\mathbf{x} - \int_{S_\epsilon} p_{inc}(\mathbf{x}) \frac{\partial G^k}{\partial \mathbf{n}_x}(\mathbf{y}-\mathbf{x}) d\mathbf{x} = p_{inc}(\mathbf{y}) + O(\epsilon) \quad (2.19)
\end{aligned}$$

(en 2D l'erreur se comporte en  $O(\epsilon \text{Log} \epsilon)$ ).

En additionnant cette dernière équation à la relation 2.16 on obtient pour le champ de pression totale

$$\begin{aligned}
& \int_{\partial\Omega-B_\epsilon} \frac{\partial p_{tot}}{\partial \mathbf{n}_x}(\mathbf{x}) G^k(\mathbf{y}-\mathbf{x}) d\mathbf{x} + \int_{S_\epsilon} \frac{\partial p_{tot}}{\partial \mathbf{n}_x}(\mathbf{x}) G^k(\mathbf{y}-\mathbf{x}) d\mathbf{x} \\
& - \int_{\partial\Omega-B_\epsilon} p_{tot}(\mathbf{x}) \frac{\partial G^k}{\partial \mathbf{n}_x}(\mathbf{y}-\mathbf{x}) d\mathbf{x} - \int_{S_\epsilon} p_{tot}(\mathbf{x}) \frac{\partial G^k}{\partial \mathbf{n}_x}(\mathbf{y}-\mathbf{x}) d\mathbf{x} = p_{inc}(\mathbf{y}) + O(\epsilon) \quad (2.20)
\end{aligned}$$

On cherche à régulariser à l'aide d'une fonction harmonique dans le domaine intérieur. Soit  $p_0(\mathbf{x})$  une telle fonction, elle vérifie  $\Delta p_0 = 0$  dans  $\Omega_{int}$ . Nous pouvons comme précédemment établir une équation intégrale vérifiée par  $p_0$  sur  $\partial\Omega$ . Sur la frontière du domaine intérieur privé de la boule  $B_\epsilon$  centrée en  $\mathbf{y}$  nous avons

$$\begin{aligned}
& \int_{\partial\Omega-B_\epsilon} \frac{\partial p_0}{\partial \mathbf{n}_x}(\mathbf{x}) G^0(\mathbf{y}-\mathbf{x}) d\mathbf{x} - \int_{\bar{S}_\epsilon} \frac{\partial p_0}{\partial \mathbf{n}_x}(\mathbf{x}) G^0(\mathbf{y}-\mathbf{x}) d\mathbf{x} \\
& - \int_{\partial\Omega-B_\epsilon} p_0(\mathbf{x}) \frac{\partial G^0}{\partial \mathbf{n}_x}(\mathbf{y}-\mathbf{x}) d\mathbf{x} + \int_{\bar{S}_\epsilon} p_0(\mathbf{x}) \frac{\partial G^0}{\partial \mathbf{n}_x}(\mathbf{y}-\mathbf{x}) d\mathbf{x} = 0 \quad (2.21)
\end{aligned}$$

ce que l'on peut encore écrire

$$\begin{aligned} & \int_{\partial\Omega-B_\epsilon} \frac{\partial p_0}{\partial \mathbf{n}_x}(\mathbf{x}) G^0(\mathbf{y} - \mathbf{x}) d\mathbf{x} - \int_{\partial\Omega-B_\epsilon} p_0(\mathbf{x}) \frac{\partial G^0}{\partial \mathbf{n}_x}(\mathbf{y} - \mathbf{x}) d\mathbf{x} \\ & - p_0(\mathbf{y}) \int_{S_\epsilon} \frac{\partial G^0}{\partial \mathbf{n}_x}(\mathbf{y} - \mathbf{x}) d\mathbf{x} = p_0(\mathbf{y}) + h_1(\epsilon) \end{aligned} \quad (2.22)$$

avec  $\lim_{\epsilon \rightarrow 0} h_1(\epsilon) = 0$ .

On supposera que la fonction  $p_0(\mathbf{x})$  est choisie pour vérifier

$$\begin{aligned} p_{tot}(\mathbf{x}) - p_0(\mathbf{x}) &= O(r^\nu) \text{ quand } r \rightarrow 0 \text{ et } \mathbf{x} \in \partial\Omega \\ \frac{\partial p_{tot}}{\partial \mathbf{n}_x}(\mathbf{x}) - \frac{\partial p_0}{\partial \mathbf{n}_x}(\mathbf{x}) &= O(r^\nu) \end{aligned} \quad (2.23)$$

$r = |\mathbf{x} - \mathbf{y}|$  et  $\nu$  est strictement positif. La relation sur les dérivées normales n'est pas strictement nécessaire pour l'obtention des équations qui suivent.

En otant l'équation 2.22 de 2.20 nous obtenons

$$\begin{aligned} & \int_{\partial\Omega-B_\epsilon} \frac{\partial p_{tot}}{\partial \mathbf{n}_x}(\mathbf{x}) (G^k - G^0)(\mathbf{y} - \mathbf{x}) d\mathbf{x} + \int_{\partial\Omega-B_\epsilon} \left( \frac{\partial p_{tot}}{\partial \mathbf{n}_x} - \frac{\partial p_0}{\partial \mathbf{n}_x} \right)(\mathbf{x}) G^0(\mathbf{y} - \mathbf{x}) d\mathbf{x} \\ & - \int_{\partial\Omega-B_\epsilon} p_{tot}(\mathbf{x}) \left( \frac{\partial G^k}{\partial \mathbf{n}_x} - \frac{\partial G^0}{\partial \mathbf{n}_x} \right)(\mathbf{y} - \mathbf{x}) d\mathbf{x} - \int_{\partial\Omega-B_\epsilon} (p_{tot} - p_0)(\mathbf{x}) \frac{\partial G^0}{\partial \mathbf{n}_x}(\mathbf{y} - \mathbf{x}) d\mathbf{x} \\ & + p_{tot}(\mathbf{y}) = p_{inc}(\mathbf{y}) + h_2(\epsilon) \end{aligned} \quad (2.24)$$

En passant à la limite quand  $\epsilon$  tend vers zéro on obtient

$$\begin{aligned} & \int_{\partial\Omega} \frac{\partial p_{tot}}{\partial \mathbf{n}_x}(\mathbf{x}) (G^k - G^0)(\mathbf{y} - \mathbf{x}) d\mathbf{x} + \int_{\partial\Omega} \left( \frac{\partial p_{tot}}{\partial \mathbf{n}_x} - \frac{\partial p_0}{\partial \mathbf{n}_x} \right)(\mathbf{x}) G^0(\mathbf{y} - \mathbf{x}) d\mathbf{x} \\ & - \int_{\partial\Omega} p_{tot}(\mathbf{x}) \left( \frac{\partial G^k}{\partial \mathbf{n}_x} - \frac{\partial G^0}{\partial \mathbf{n}_x} \right)(\mathbf{y} - \mathbf{x}) d\mathbf{x} - \int_{\partial\Omega} (p_{tot} - p_0)(\mathbf{x}) \frac{\partial G^0}{\partial \mathbf{n}_x}(\mathbf{y} - \mathbf{x}) d\mathbf{x} \\ & + p_{tot}(\mathbf{y}) = p_{inc}(\mathbf{y}) \end{aligned} \quad (2.25)$$

Mise sous cette forme la formule de Kirchoff a l'avantage de faire intervenir des fonctions plus régulières que la formule initiale et d'éviter le calcul du terme d'angle  $c(\mathbf{y})$ . Il y a plusieurs choix possibles pour  $p_0$ . On peut premièrement choisir la fonction constante valant  $p_{tot}(\mathbf{y})$  et on obtient alors une régularisation analogue à celle des équations de l'élastodynamique présentée par Rizzo 1985 [211]. En un point où  $p_{tot}$  est  $C^{1,\alpha}$  on peut prendre  $p_0(\mathbf{x}) = p_{tot}(\mathbf{y}) + \nabla p_{tot}(\mathbf{y}) \cdot (\mathbf{x} - \mathbf{y})$  et on remarque alors que l'équation intégrale ne présente plus aucune singularité. Les différents termes sont évaluables directement par des formules de Gauss. Cette expression est surtout intéressante quand on remarque qu'elle est aussi valable pour  $\mathbf{y}$  dans le milieu extérieur  $\Omega_{ext}$  et que l'on peut prendre  $p_0(\mathbf{x}) = p_{tot}(\mathbf{y}') + \nabla p_{tot}(\mathbf{y}') \cdot (\mathbf{x} - \mathbf{y}')$  où  $\mathbf{y}'$  est la projection normale de  $\mathbf{y}$  sur  $\partial\Omega$ . Elle permet ainsi de calculer le champ de pression au voisinage de la frontière sans recourir à un schéma d'intégration spécial.

Pour le calcul du champ rayonné dans le fluide à distance suffisante de la frontière on utilisera la formule plus classique suivante

$$\int_{\partial\Omega} p_{tot}(\mathbf{x}) \frac{\partial G^k}{\partial \mathbf{n}_x}(\mathbf{y} - \mathbf{x}) d\mathbf{x} - \int_{\partial\Omega} \frac{\partial p_{tot}}{\partial \mathbf{n}_x}(\mathbf{x}) G^k(\mathbf{y} - \mathbf{x}) d\mathbf{x} + p_{inc}(\mathbf{y}) = c(\mathbf{y}) p_{tot}(\mathbf{y}) \quad (2.26)$$

où

$$c(\mathbf{y}) = \begin{cases} 1 & \text{si } \mathbf{y} \in \Omega_{ext} \\ 0 & \text{si } \mathbf{y} \in \Omega_{int} \\ 1 - \frac{\theta(\mathbf{y})}{4\pi} & \text{si } \mathbf{y} \in \partial\Omega \quad \left(\frac{1}{2} \text{ si } \mathbf{y} \text{ régulier}\right) \end{cases}$$

### 2.3.2 Equation dérivée

Reprenons l'équation 2.16 et dérivons la par rapport à  $\mathbf{n}_y$ . Nous obtenons dans le domaine  $\Omega_{ext}$  privé de la boule  $B_\epsilon$ :

$$\begin{aligned} & \int_{\partial\Omega - B_\epsilon} \frac{\partial p_{dif}}{\partial \mathbf{n}_x}(\mathbf{x}) \frac{\partial G^k}{\partial \mathbf{n}_y}(\mathbf{y} - \mathbf{x}) d\mathbf{x} + \int_{S_\epsilon} \frac{\partial p_{dif}}{\partial \mathbf{n}_x}(\mathbf{x}) \frac{\partial G^k}{\partial \mathbf{n}_y}(\mathbf{y} - \mathbf{x}) d\mathbf{x} \\ & - \int_{\partial\Omega - B_\epsilon} p_{dif}(\mathbf{x}) \frac{\partial^2 G^k}{\partial \mathbf{n}_x \partial \mathbf{n}_y}(\mathbf{y} - \mathbf{x}) d\mathbf{x} - \int_{S_\epsilon} p_{dif}(\mathbf{x}) \frac{\partial^2 G^k}{\partial \mathbf{n}_x \partial \mathbf{n}_y}(\mathbf{y} - \mathbf{x}) d\mathbf{x} = 0 \end{aligned} \quad (2.27)$$

Le champ incident vérifie sur la frontière du domaine intérieur privé de la boule  $B_\epsilon$

$$\begin{aligned} & \int_{\partial\Omega - B_\epsilon} \frac{\partial p_{inc}}{\partial \mathbf{n}_x}(\mathbf{x}) \frac{\partial G^k}{\partial \mathbf{n}_y}(\mathbf{y} - \mathbf{x}) d\mathbf{x} - \int_{S_\epsilon} \frac{\partial p_{inc}}{\partial \mathbf{n}_x}(\mathbf{x}) \frac{\partial G^k}{\partial \mathbf{n}_y}(\mathbf{y} - \mathbf{x}) d\mathbf{x} \\ & - \int_{\partial\Omega - B_\epsilon} p_{inc}(\mathbf{x}) \frac{\partial^2 G^k}{\partial \mathbf{n}_x \partial \mathbf{n}_y}(\mathbf{y} - \mathbf{x}) d\mathbf{x} + \int_{S_\epsilon} p_{inc}(\mathbf{x}) \frac{\partial^2 G^k}{\partial \mathbf{n}_x \partial \mathbf{n}_y}(\mathbf{y} - \mathbf{x}) d\mathbf{x} = 0 \end{aligned} \quad (2.28)$$

soit

$$\begin{aligned} & \int_{\partial\Omega - B_\epsilon} \frac{\partial p_{inc}}{\partial \mathbf{n}_x}(\mathbf{x}) \frac{\partial G^k}{\partial \mathbf{n}_y}(\mathbf{y} - \mathbf{x}) d\mathbf{x} - \int_{S_\epsilon} \frac{\partial p_{inc}}{\partial \mathbf{n}_x}(\mathbf{x}) \frac{\partial G^0}{\partial \mathbf{n}_y}(\mathbf{y} - \mathbf{x}) d\mathbf{x} \\ & - \int_{\partial\Omega - B_\epsilon} p_{inc}(\mathbf{x}) \frac{\partial^2 G^k}{\partial \mathbf{n}_x \partial \mathbf{n}_y}(\mathbf{y} - \mathbf{x}) d\mathbf{x} + \int_{S_\epsilon} p_{inc}(\mathbf{x}) \frac{\partial^2 G^0}{\partial \mathbf{n}_x \partial \mathbf{n}_y}(\mathbf{y} - \mathbf{x}) d\mathbf{x} = O(\epsilon) \end{aligned} \quad (2.29)$$

car quand  $r \rightarrow 0$  les noyaux vérifient

$$\begin{aligned} G^k(r) - G^0(r) &= O(1) \\ \frac{\partial G^k(r)}{\partial \mathbf{n}_x} - \frac{\partial G^0(r)}{\partial \mathbf{n}_x} &= O(1) \\ \frac{\partial^2 G^k(r)}{\partial \mathbf{n}_x \partial \mathbf{n}_y} - \frac{\partial^2 G^0(r)}{\partial \mathbf{n}_x \partial \mathbf{n}_y} &= \begin{cases} O(1/r) \text{ en } 3D \\ O(\text{Log}r) \text{ en } 2D \end{cases} \end{aligned} \quad (2.30)$$

Le noyau statique vérifie les relations suivantes

$$\begin{aligned}
\int_{\partial B_\epsilon} \frac{\partial^2 G^0}{\partial \mathbf{n}_x \partial \mathbf{n}_y} (\mathbf{y} - \mathbf{x}) d\mathbf{x} &= 0 \\
\int_{\partial B_\epsilon} (\mathbf{x} - \mathbf{y}) \frac{\partial^2 G^0}{\partial \mathbf{n}_x \partial \mathbf{n}_y} (\mathbf{y} - \mathbf{x}) d\mathbf{x} &= c \mathbf{n}_y \\
\int_{\partial B_\epsilon} \mathbf{n}_x \frac{\partial G^0}{\partial \mathbf{n}_y} (\mathbf{y} - \mathbf{x}) d\mathbf{x} &= c' \mathbf{n}_y
\end{aligned} \tag{2.31}$$

avec

$$c = \begin{cases} -\frac{2}{3} & \text{en } 3 - D \\ -\frac{1}{2} & \text{en } 2 - D \end{cases} \quad \text{et} \quad c' = \begin{cases} \frac{1}{3} & \text{en } 3 - D \\ \frac{1}{2} & \text{en } 2 - D \end{cases} \tag{2.32}$$

Grâce aux relations précédentes et à la régularité de  $p_{inc}$  au point  $\mathbf{y}$  les intégrales sur  $\overline{S_\epsilon}$  peuvent alors s'exprimer par

$$\begin{aligned}
\int_{\overline{S_\epsilon}} p_{inc}(\mathbf{x}) \frac{\partial^2 G^0}{\partial \mathbf{n}_x \partial \mathbf{n}_y} (\mathbf{y} - \mathbf{x}) d\mathbf{x} &= \int_{\partial B_\epsilon} p_{inc}(\mathbf{x}) \frac{\partial^2 G^0}{\partial \mathbf{n}_x \partial \mathbf{n}_y} (\mathbf{y} - \mathbf{x}) d\mathbf{x} - \int_{S_\epsilon} p_{inc}(\mathbf{x}) \frac{\partial^2 G^0}{\partial \mathbf{n}_x \partial \mathbf{n}_y} (\mathbf{y} - \mathbf{x}) d\mathbf{x} \\
&= - \int_{S_\epsilon} p_{inc}(\mathbf{x}) \frac{\partial^2 G^0}{\partial \mathbf{n}_x \partial \mathbf{n}_y} (\mathbf{y} - \mathbf{x}) d\mathbf{x} + \nabla p_{inc}(\mathbf{y}) \cdot c \mathbf{n}_y + O(\epsilon) \tag{2.33}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\int_{\overline{S_\epsilon}} \frac{\partial p_{inc}}{\partial \mathbf{n}_x}(\mathbf{x}) \frac{\partial G^0}{\partial \mathbf{n}_y} (\mathbf{y} - \mathbf{x}) d\mathbf{x} &= \int_{\overline{S_\epsilon}} \nabla p_{inc}(\mathbf{y}) \cdot \mathbf{n}_x \frac{\partial G^0}{\partial \mathbf{n}_y} (\mathbf{y} - \mathbf{x}) d\mathbf{x} + O(\epsilon) \\
&= - \int_{S_\epsilon} \nabla p_{inc}(\mathbf{y}) \cdot \mathbf{n}_x \frac{\partial G^0}{\partial \mathbf{n}_y} (\mathbf{y} - \mathbf{x}) d\mathbf{x} + \nabla p_{inc}(\mathbf{y}) \cdot c' \mathbf{n}_y \\
&\quad + O(\epsilon) \tag{2.34}
\end{aligned}$$

Le champ incident vérifie finalement

$$\begin{aligned}
&\int_{\partial \Omega - B_\epsilon} \frac{\partial p_{inc}}{\partial \mathbf{n}_x}(\mathbf{x}) \frac{\partial G^k}{\partial \mathbf{n}_y} (\mathbf{y} - \mathbf{x}) d\mathbf{x} + \int_{S_\epsilon} \frac{\partial p_{inc}}{\partial \mathbf{n}_x}(\mathbf{x}) \frac{\partial G^k}{\partial \mathbf{n}_y} (\mathbf{y} - \mathbf{x}) d\mathbf{x} \\
&- \int_{\partial \Omega - B_\epsilon} p_{inc}(\mathbf{x}) \frac{\partial^2 G^k}{\partial \mathbf{n}_x \partial \mathbf{n}_y} (\mathbf{y} - \mathbf{x}) d\mathbf{x} - \int_{S_\epsilon} p_{inc}(\mathbf{x}) \frac{\partial^2 G^k}{\partial \mathbf{n}_x \partial \mathbf{n}_y} (\mathbf{y} - \mathbf{x}) d\mathbf{x} - \frac{\partial p_{inc}}{\partial \mathbf{n}_y}(\mathbf{y}) \\
&= O(\epsilon) \tag{2.35}
\end{aligned}$$

Le champ total, que l'on notera désormais  $p$ , vérifie donc l'équation

$$\begin{aligned}
&\int_{\partial \Omega - B_\epsilon} \frac{\partial p}{\partial \mathbf{n}_x}(\mathbf{x}) \frac{\partial G^k}{\partial \mathbf{n}_y} (\mathbf{y} - \mathbf{x}) d\mathbf{x} + \int_{S_\epsilon} \frac{\partial p}{\partial \mathbf{n}_x}(\mathbf{x}) \frac{\partial G^k}{\partial \mathbf{n}_y} (\mathbf{y} - \mathbf{x}) d\mathbf{x} \\
&- \int_{\partial \Omega - B_\epsilon} p(\mathbf{x}) \frac{\partial^2 G^k}{\partial \mathbf{n}_x \partial \mathbf{n}_y} (\mathbf{y} - \mathbf{x}) d\mathbf{x} - \int_{S_\epsilon} p(\mathbf{x}) \frac{\partial^2 G^k}{\partial \mathbf{n}_x \partial \mathbf{n}_y} (\mathbf{y} - \mathbf{x}) d\mathbf{x} - \frac{\partial p}{\partial \mathbf{n}_y}(\mathbf{y}) = O(\epsilon) \tag{2.36}
\end{aligned}$$

On ne peut pas passer directement à la limite quand  $\epsilon \rightarrow 0$  sans régulariser.

### 2.3.3 Nouvelle formulation

Nous proposons ici une méthode de régularisation de l'équation dérivée dont le principe est d'utiliser une fonction solution du problème de Laplace intérieur et une fonction solution du problème de Laplace extérieur que l'on choisira de façon à supprimer les singularités présentes dans les formules précédentes.

Soit donc  $p_{int}(\mathbf{x})$  une fonction harmonique dans le domaine intérieur. Nous pouvons comme précédemment établir une équation intégrale vérifiée par  $p_{int}$  sur  $\partial\Omega$ . Sur la frontière du domaine intérieur privé de la boule  $B_\epsilon$  centrée en  $\mathbf{y}$  nous avons :

$$\begin{aligned} & \int_{\partial\Omega-B_\epsilon} \frac{\partial p_{int}}{\partial \mathbf{n}_x}(\mathbf{x}) G^0(\mathbf{y}-\mathbf{x}) d\mathbf{x} - \int_{\overline{S}_\epsilon} \frac{\partial p_{int}}{\partial \mathbf{n}_x}(\mathbf{x}) G^0(\mathbf{y}-\mathbf{x}) d\mathbf{x} \\ & - \int_{\partial\Omega-B_\epsilon} p_{int}(\mathbf{x}) \frac{\partial G^0}{\partial \mathbf{n}_x}(\mathbf{y}-\mathbf{x}) d\mathbf{x} + \int_{\overline{S}_\epsilon} p_{int}(\mathbf{x}) \frac{\partial G^0}{\partial \mathbf{n}_x}(\mathbf{y}-\mathbf{x}) d\mathbf{x} = 0 \end{aligned} \quad (2.37)$$

La normale  $\mathbf{n}_x$  est extérieure au domaine  $\Omega_{int}$  et à la boule  $B_\epsilon$ . L'équation précédente peut être dérivée par rapport à  $\mathbf{n}_y$  pour obtenir

$$\begin{aligned} & \int_{\partial\Omega-B_\epsilon} \frac{\partial p_{int}}{\partial \mathbf{n}_x}(\mathbf{x}) \frac{\partial G^0}{\partial \mathbf{n}_y}(\mathbf{y}-\mathbf{x}) d\mathbf{x} - \int_{\overline{S}_\epsilon} \frac{\partial p_{int}}{\partial \mathbf{n}_x}(\mathbf{x}) \frac{\partial G^0}{\partial \mathbf{n}_y}(\mathbf{y}-\mathbf{x}) d\mathbf{x} \\ & - \int_{\partial\Omega-B_\epsilon} p_{int}(\mathbf{x}) \frac{\partial^2 G^0}{\partial \mathbf{n}_x \partial \mathbf{n}_y}(\mathbf{y}-\mathbf{x}) d\mathbf{x} + \int_{\overline{S}_\epsilon} p_{int}(\mathbf{x}) \frac{\partial^2 G^0}{\partial \mathbf{n}_x \partial \mathbf{n}_y}(\mathbf{y}-\mathbf{x}) d\mathbf{x} = 0 \end{aligned} \quad (2.38)$$

$\mathbf{n}_y$  peut être ici un vecteur quelconque ne coïncidant pas nécessairement avec la normale en  $\mathbf{y}$ . Nous pouvons de même construire une équation sur  $\partial\Omega$  vérifiée par  $p_{ext}$  fonction harmonique dans  $\Omega_{ext}$  qui au voisinage de l'infini vérifie  $p(r) = o(1)$  et  $\nabla p(r) = o(1/r)$ . Sur la frontière du domaine extérieur privé de la boule  $B_\epsilon$  centrée en  $\mathbf{y}$  nous avons :

$$\begin{aligned} & \int_{\partial\Omega-B_\epsilon} \frac{\partial p_{ext}}{\partial \mathbf{n}_x}(\mathbf{x}) G^0(\mathbf{y}-\mathbf{x}) d\mathbf{x} + \int_{S_\epsilon} \frac{\partial p_{ext}}{\partial \mathbf{n}_x}(\mathbf{x}) G^0(\mathbf{y}-\mathbf{x}) d\mathbf{x} \\ & - \int_{\partial\Omega-B_\epsilon} p_{ext}(\mathbf{x}) \frac{\partial G^0}{\partial \mathbf{n}_x}(\mathbf{y}-\mathbf{x}) d\mathbf{x} - \int_{S_\epsilon} p_{ext}(\mathbf{x}) \frac{\partial G^0}{\partial \mathbf{n}_x}(\mathbf{y}-\mathbf{x}) d\mathbf{x} = 0 \end{aligned} \quad (2.39)$$

La normale  $\mathbf{n}_x$  est intérieure au domaine  $\Omega_{ext}$  et extérieure à la boule  $B_\epsilon$ . L'équation précédente peut être dérivée par rapport à  $\mathbf{n}_y$  pour obtenir

$$\begin{aligned} & \int_{\partial\Omega-B_\epsilon} \frac{\partial p_{ext}}{\partial \mathbf{n}_x}(\mathbf{x}) \frac{\partial G^0}{\partial \mathbf{n}_y}(\mathbf{y}-\mathbf{x}) d\mathbf{x} + \int_{S_\epsilon} \frac{\partial p_{ext}}{\partial \mathbf{n}_x}(\mathbf{x}) \frac{\partial G^0}{\partial \mathbf{n}_y}(\mathbf{y}-\mathbf{x}) d\mathbf{x} \\ & - \int_{\partial\Omega-B_\epsilon} p_{ext}(\mathbf{x}) \frac{\partial^2 G^0}{\partial \mathbf{n}_x \partial \mathbf{n}_y}(\mathbf{y}-\mathbf{x}) d\mathbf{x} - \int_{S_\epsilon} p_{ext}(\mathbf{x}) \frac{\partial^2 G^0}{\partial \mathbf{n}_x \partial \mathbf{n}_y}(\mathbf{y}-\mathbf{x}) d\mathbf{x} = 0 \end{aligned} \quad (2.40)$$

En ajoutant les équations 2.38 et 2.40 et posant  $p_0 = p_{int} + p_{ext}$  sur la frontière, nous obtenons

$$\begin{aligned}
& \int_{\partial\Omega-B_\epsilon} \frac{\partial p_0}{\partial \mathbf{n}_x}(\mathbf{x}) \frac{\partial G^0}{\partial \mathbf{n}_y}(\mathbf{y}-\mathbf{x}) d\mathbf{x} - \int_{\partial\Omega-B_\epsilon} p_0(\mathbf{x}) \frac{\partial^2 G^0}{\partial \mathbf{n}_x \partial \mathbf{n}_y}(\mathbf{y}-\mathbf{x}) d\mathbf{x} \\
& + \int_{S_\epsilon} \frac{\partial p_{ext}}{\partial \mathbf{n}_x}(\mathbf{x}) \frac{\partial G^0}{\partial \mathbf{n}_y}(\mathbf{y}-\mathbf{x}) d\mathbf{x} - \int_{S_\epsilon} p_{ext}(\mathbf{x}) \frac{\partial^2 G^0}{\partial \mathbf{n}_x \partial \mathbf{n}_y}(\mathbf{y}-\mathbf{x}) d\mathbf{x} \\
& - \int_{\bar{S}_\epsilon} \frac{\partial p_{int}}{\partial \mathbf{n}_x}(\mathbf{x}) \frac{\partial G^0}{\partial \mathbf{n}_y}(\mathbf{y}-\mathbf{x}) d\mathbf{x} + \int_{\bar{S}_\epsilon} p_{int}(\mathbf{x}) \frac{\partial^2 G^0}{\partial \mathbf{n}_x \partial \mathbf{n}_y}(\mathbf{y}-\mathbf{x}) d\mathbf{x} = 0 \quad (2.41)
\end{aligned}$$

Dans l'équation 2.36 il est préférable de travailler avec les noyaux statiques plus simples. C'est pourquoi on ajoute et on soustrait les noyaux statiques des noyaux dynamiques. En otant de plus l'équation précédente on aboutit à

$$\begin{aligned}
& \int_{\partial\Omega-B_\epsilon} \frac{\partial p}{\partial \mathbf{n}_x}(\mathbf{x}) \left( \frac{\partial G^k}{\partial \mathbf{n}_y} - \frac{\partial G^0}{\partial \mathbf{n}_y} \right) (\mathbf{y}-\mathbf{x}) d\mathbf{x} + \int_{\partial\Omega-B_\epsilon} \left( \frac{\partial p}{\partial \mathbf{n}_x}(\mathbf{x}) - \frac{\partial p_0}{\partial \mathbf{n}_x}(\mathbf{x}) \right) \frac{\partial G^0}{\partial \mathbf{n}_y}(\mathbf{y}-\mathbf{x}) d\mathbf{x} \\
& - \int_{\partial\Omega-B_\epsilon} p(\mathbf{x}) \left( \frac{\partial^2 G^k}{\partial \mathbf{n}_x \partial \mathbf{n}_y} - \frac{\partial^2 G^0}{\partial \mathbf{n}_x \partial \mathbf{n}_y} \right) (\mathbf{y}-\mathbf{x}) d\mathbf{x} - \int_{\partial\Omega-B_\epsilon} (p(\mathbf{x}) - p_0(\mathbf{x})) \frac{\partial^2 G^0}{\partial \mathbf{n}_x \partial \mathbf{n}_y}(\mathbf{y}-\mathbf{x}) d\mathbf{x} \\
& - \int_{S_\epsilon} \frac{\partial p_{ext}}{\partial \mathbf{n}_x}(\mathbf{x}) \frac{\partial G^0}{\partial \mathbf{n}_y}(\mathbf{y}-\mathbf{x}) d\mathbf{x} + \int_{S_\epsilon} p_{ext}(\mathbf{x}) \frac{\partial^2 G^0}{\partial \mathbf{n}_x \partial \mathbf{n}_y}(\mathbf{y}-\mathbf{x}) d\mathbf{x} \\
& + \int_{\bar{S}_\epsilon} \frac{\partial p_{int}}{\partial \mathbf{n}_x}(\mathbf{x}) \frac{\partial G^0}{\partial \mathbf{n}_y}(\mathbf{y}-\mathbf{x}) d\mathbf{x} - \int_{\bar{S}_\epsilon} p_{int}(\mathbf{x}) \frac{\partial^2 G^0}{\partial \mathbf{n}_x \partial \mathbf{n}_y}(\mathbf{y}-\mathbf{x}) d\mathbf{x} \\
& + \int_{S_\epsilon} \frac{\partial p}{\partial \mathbf{n}_x}(\mathbf{x}) \frac{\partial G^k}{\partial \mathbf{n}_y}(\mathbf{y}-\mathbf{x}) d\mathbf{x} - \int_{S_\epsilon} p(\mathbf{x}) \frac{\partial^2 G^k}{\partial \mathbf{n}_x \partial \mathbf{n}_y}(\mathbf{y}-\mathbf{x}) d\mathbf{x} = \frac{\partial p_{inc}}{\partial \mathbf{n}_y}(\mathbf{y}) + O(\epsilon) \quad (2.42)
\end{aligned}$$

On supposera que les fonctions  $p_{int}(\mathbf{x})$  et  $p_{ext}(\mathbf{x})$  sont choisies pour vérifier

$$\begin{aligned}
p(\mathbf{x}) - p_{int}(\mathbf{x}) - p_{ext}(\mathbf{x}) &= O(r^{1+\nu}) \text{ quand } r \rightarrow 0 \text{ et } \mathbf{x} \in \partial\Omega \\
\frac{\partial p}{\partial \mathbf{n}_x}(\mathbf{x}) - \frac{\partial p_{int}}{\partial \mathbf{n}_x}(\mathbf{x}) - \frac{\partial p_{ext}}{\partial \mathbf{n}_x}(\mathbf{x}) &= O(r^\nu) \quad (2.43)
\end{aligned}$$

où  $r = |\mathbf{x} - \mathbf{y}|$  et  $\nu$  est strictement positif. La démonstration de l'existence de telles fonctions est effectuée à la fin de cette section.

Les relations 2.30 montrent que les termes en  $G^k - G^0$  et les dérivées de ces expressions conduisent à des noyaux au plus faiblement singuliers qui sont donc évaluables par des formules de Gauss après un passage éventuel en coordonnées polaires (pour le cas 3D) ou un autre changement de variable. Le passage à la limite quand  $\epsilon$  tend vers 0 ne pose donc pas de problème dans ces intégrales. En fait, avec les hypothèses précédentes, toutes les intégrales sur  $\partial\Omega - B_\epsilon$  convergent quand  $\epsilon$  tend vers 0 vers la même intégrale sur  $\partial\Omega$  et sont évaluables numériquement. Il nous reste à déterminer les limites des intégrales sur  $S_\epsilon$  et  $\bar{S}_\epsilon$ . Posons

$$I_B = - \int_{S_\epsilon} \frac{\partial p_{ext}}{\partial \mathbf{n}_x}(\mathbf{x}) \frac{\partial G^0}{\partial \mathbf{n}_y}(\mathbf{y}-\mathbf{x}) d\mathbf{x} + \int_{S_\epsilon} p_{ext}(\mathbf{x}) \frac{\partial^2 G^0}{\partial \mathbf{n}_x \partial \mathbf{n}_y}(\mathbf{y}-\mathbf{x}) d\mathbf{x}$$

$$\begin{aligned}
& + \int_{\bar{S}_\epsilon} \frac{\partial p_{int}}{\partial \mathbf{n}_x}(\mathbf{x}) \frac{\partial G^0}{\partial \mathbf{n}_y}(\mathbf{y} - \mathbf{x}) d\mathbf{x} - \int_{\bar{S}_\epsilon} p_{int}(\mathbf{x}) \frac{\partial^2 G^0}{\partial \mathbf{n}_x \partial \mathbf{n}_y}(\mathbf{y} - \mathbf{x}) d\mathbf{x} \\
& + \int_{S_\epsilon} \frac{\partial p}{\partial \mathbf{n}_x}(\mathbf{x}) \frac{\partial G^k}{\partial \mathbf{n}_y}(\mathbf{y} - \mathbf{x}) d\mathbf{x} - \int_{S_\epsilon} p(\mathbf{x}) \frac{\partial^2 G^k}{\partial \mathbf{n}_x \partial \mathbf{n}_y}(\mathbf{y} - \mathbf{x}) d\mathbf{x}
\end{aligned} \tag{2.44}$$

Avec les comportements respectifs de  $p$  et  $p_0$  au voisinage de  $\mathbf{y}$ ,  $I_B$  vaut aussi

$$\begin{aligned}
I_B & = - \int_{S_\epsilon} \frac{\partial p_{ext}}{\partial \mathbf{n}_x}(\mathbf{x}) \frac{\partial G^0}{\partial \mathbf{n}_y}(\mathbf{y} - \mathbf{x}) d\mathbf{x} + \int_{S_\epsilon} p_{ext}(\mathbf{x}) \frac{\partial^2 G^0}{\partial \mathbf{n}_x \partial \mathbf{n}_y}(\mathbf{y} - \mathbf{x}) d\mathbf{x} \\
& + \int_{\bar{S}_\epsilon} \frac{\partial p_{int}}{\partial \mathbf{n}_x}(\mathbf{x}) \frac{\partial G^0}{\partial \mathbf{n}_y}(\mathbf{y} - \mathbf{x}) d\mathbf{x} - \int_{\bar{S}_\epsilon} p_{int}(\mathbf{x}) \frac{\partial^2 G^0}{\partial \mathbf{n}_x \partial \mathbf{n}_y}(\mathbf{y} - \mathbf{x}) d\mathbf{x} \\
& + \int_{S_\epsilon} \frac{\partial p}{\partial \mathbf{n}_x}(\mathbf{x}) \frac{\partial G^k}{\partial \mathbf{n}_y}(\mathbf{y} - \mathbf{x}) d\mathbf{x} - \int_{S_\epsilon} p(\mathbf{x}) \frac{\partial^2 G^k}{\partial \mathbf{n}_x \partial \mathbf{n}_y}(\mathbf{y} - \mathbf{x}) d\mathbf{x} \\
& + \int_{\partial\Omega \cap B_\epsilon} \left( \frac{\partial p}{\partial \mathbf{n}_x}(\mathbf{x}) - \frac{\partial p_0}{\partial \mathbf{n}_x}(\mathbf{x}) \right) \frac{\partial G^0}{\partial \mathbf{n}_y}(\mathbf{y} - \mathbf{x}) d\mathbf{x} \\
& - \int_{\partial\Omega \cap B_\epsilon} (p(\mathbf{x}) - p_0(\mathbf{x})) \frac{\partial^2 G^0}{\partial \mathbf{n}_x \partial \mathbf{n}_y}(\mathbf{y} - \mathbf{x}) d\mathbf{x} + O(\epsilon^\nu)
\end{aligned} \tag{2.45}$$

Les faibles singularités contenues dans les intégrales nous autorisent à sortir la dérivée normale en  $\mathbf{y}$

$$\begin{aligned}
I_B & = \frac{\partial}{\partial \mathbf{n}_y} \left\{ - \int_{S_\epsilon} \frac{\partial p_{ext}}{\partial \mathbf{n}_x}(\mathbf{x}) G^0(\mathbf{y} - \mathbf{x}) d\mathbf{x} + \int_{S_\epsilon} p_{ext}(\mathbf{x}) \frac{\partial G^0}{\partial \mathbf{n}_x}(\mathbf{y} - \mathbf{x}) d\mathbf{x} \right. \\
& + \int_{\bar{S}_\epsilon} \frac{\partial p_{int}}{\partial \mathbf{n}_x}(\mathbf{x}) G^0(\mathbf{y} - \mathbf{x}) d\mathbf{x} - \int_{\bar{S}_\epsilon} p_{int}(\mathbf{x}) \frac{\partial G^0}{\partial \mathbf{n}_x}(\mathbf{y} - \mathbf{x}) d\mathbf{x} \\
& + \int_{S_\epsilon} \frac{\partial p}{\partial \mathbf{n}_x}(\mathbf{x}) G^k(\mathbf{y} - \mathbf{x}) d\mathbf{x} - \int_{S_\epsilon} p(\mathbf{x}) \frac{\partial G^k}{\partial \mathbf{n}_x}(\mathbf{y} - \mathbf{x}) d\mathbf{x} \\
& + \int_{\partial\Omega \cap B_\epsilon} \left( \frac{\partial p}{\partial \mathbf{n}_x}(\mathbf{x}) - \frac{\partial p_0}{\partial \mathbf{n}_x}(\mathbf{x}) \right) G^0(\mathbf{y} - \mathbf{x}) d\mathbf{x} \\
& \left. - \int_{\partial\Omega \cap B_\epsilon} (p(\mathbf{x}) - p_0(\mathbf{x})) \frac{\partial G^0}{\partial \mathbf{n}_x}(\mathbf{y} - \mathbf{x}) d\mathbf{x} \right\} + O(\epsilon^\nu)
\end{aligned} \tag{2.46}$$

Pour évaluer la dérivée suivant  $\mathbf{n}_y$  nous regroupons les termes correspondants aux frontières de  $\Omega_{int} \cap B_\epsilon$  et de  $\Omega_{ext} \cap B_\epsilon$ . La formule de Kirchoff appliquée aux fonctions  $p$  et  $p_{ext}$  dans le domaine  $\Omega_{ext} \cap B_\epsilon$  avec une normale extérieure donne

$$\begin{aligned}
& \int_{S_\epsilon} \frac{\partial p}{\partial \mathbf{n}_x}(\mathbf{x}) G^0(\mathbf{y} - \mathbf{x}) d\mathbf{x} - \int_{S_\epsilon} p(\mathbf{x}) \frac{\partial G^0}{\partial \mathbf{n}_x}(\mathbf{y} - \mathbf{x}) d\mathbf{x} + \int_{\partial\Omega_{ext} \cap B_\epsilon} \frac{\partial p}{\partial \mathbf{n}_x}(\mathbf{x}) G^0(\mathbf{y} - \mathbf{x}) d\mathbf{x} \\
& - \int_{\partial\Omega_{ext} \cap B_\epsilon} p(\mathbf{x}) \frac{\partial G^0}{\partial \mathbf{n}_x}(\mathbf{y} - \mathbf{x}) d\mathbf{x} = c_{ext}(\mathbf{y}) p(\mathbf{y}) + O(\epsilon)
\end{aligned} \tag{2.47}$$

$$\begin{aligned}
& \int_{S_\epsilon} \frac{\partial p_{ext}}{\partial \mathbf{n}_x}(\mathbf{x}) G^0(\mathbf{y} - \mathbf{x}) d\mathbf{x} - \int_{S_\epsilon} p_{ext}(\mathbf{x}) \frac{\partial G^0}{\partial \mathbf{n}_x}(\mathbf{y} - \mathbf{x}) d\mathbf{x} + \int_{\partial\Omega_{ext} \cap B_\epsilon} \frac{\partial p_{ext}}{\partial \mathbf{n}_x}(\mathbf{x}) G^0(\mathbf{y} - \mathbf{x}) d\mathbf{x} \\
& - \int_{\partial\Omega_{ext} \cap B_\epsilon} p_{ext}(\mathbf{x}) \frac{\partial G^0}{\partial \mathbf{n}_x}(\mathbf{y} - \mathbf{x}) d\mathbf{x} = c_{ext}(\mathbf{y}) p_{ext}(\mathbf{y}) + O(\epsilon)
\end{aligned} \tag{2.48}$$

De même pour le domaine  $\Omega_{int} \cap B_\epsilon$  en prenant une normale extérieure.

$$\begin{aligned} \int_{\bar{S}_\epsilon} \frac{\partial p_{int}}{\partial \mathbf{n}_x}(\mathbf{x}) G^0(\mathbf{y} - \mathbf{x}) d\mathbf{x} - \int_{\bar{S}_\epsilon} p_{int}(\mathbf{x}) \frac{\partial G^0}{\partial \mathbf{n}_x}(\mathbf{y} - \mathbf{x}) d\mathbf{x} + \int_{\partial\Omega_{int} \cap B_\epsilon} \frac{\partial p_{int}}{\partial \mathbf{n}_x}(\mathbf{x}) G^0(\mathbf{y} - \mathbf{x}) d\mathbf{x} \\ - \int_{\partial\Omega_{int} \cap B_\epsilon} p_{int}(\mathbf{x}) \frac{\partial G^0}{\partial \mathbf{n}_x}(\mathbf{y} - \mathbf{x}) d\mathbf{x} = c_{int}(\mathbf{y}) p_{int}(\mathbf{y}) \end{aligned} \quad (2.49)$$

Les normales sur  $\partial\Omega_{int} \cap B_\epsilon$  et  $\partial\Omega_{ext} \cap B_\epsilon$  sont de sens opposés. Nous avons  $c_{ext} + c_{int} = 1$ . En intégrant ces résultats dans l'équation 2.46 nous obtenons

$$I_B = \frac{\partial}{\partial \mathbf{n}_y} (c_{ext}(\mathbf{y}) p(\mathbf{y}) - c_{ext}(\mathbf{y}) p_{ext}(\mathbf{y}) + c_{int}(\mathbf{y}) p_{int}(\mathbf{y})) + O(\epsilon^\nu) \quad (2.50)$$

D'où

$$I_B = \frac{\partial p_{int}}{\partial \mathbf{n}_y}(\mathbf{y}) + O(\epsilon^\nu) \quad (2.51)$$

Nous pouvons alors écrire la forme de l'équation dérivée

$$\begin{aligned} \int_{\partial\Omega} \frac{\partial p}{\partial \mathbf{n}_x}(\mathbf{x}) \left( \frac{\partial G^k}{\partial \mathbf{n}_y} - \frac{\partial G^0}{\partial \mathbf{n}_y} \right) (\mathbf{y} - \mathbf{x}) d\mathbf{x} + \int_{\partial\Omega} \left( \frac{\partial p}{\partial \mathbf{n}_x}(\mathbf{x}) - \frac{\partial p_0}{\partial \mathbf{n}_x}(\mathbf{x}) \right) \frac{\partial G^0}{\partial \mathbf{n}_y}(\mathbf{y} - \mathbf{x}) d\mathbf{x} \\ - \int_{\partial\Omega} p(\mathbf{x}) \left( \frac{\partial^2 G^k}{\partial \mathbf{n}_x \partial \mathbf{n}_y} - \frac{\partial^2 G^0}{\partial \mathbf{n}_x \partial \mathbf{n}_y} \right) (\mathbf{y} - \mathbf{x}) d\mathbf{x} - \int_{\partial\Omega} (p(\mathbf{x}) - p_0(\mathbf{x})) \frac{\partial^2 G^0}{\partial \mathbf{n}_x \partial \mathbf{n}_y}(\mathbf{y} - \mathbf{x}) d\mathbf{x} \\ + \frac{\partial p_{int}}{\partial \mathbf{n}_y}(\mathbf{y}) = \frac{\partial p_{inc}}{\partial \mathbf{n}_y}(\mathbf{y}) \end{aligned} \quad (2.52)$$

Nous pouvons remarquer que cette formule ne nécessite plus de condition de régularité a priori sur la solution du problème comme la régularité  $C^{1,\nu}$  pour l'existence d'une partie finie.

Cette méthode nécessite des fonctions  $p_{int}$  et  $p_{ext}$  satisfaisantes. En un point où la pression est régulière la forme la plus simple est

$$\begin{aligned} p_{int}(\mathbf{x}) &= p(\mathbf{y}) + \nabla p(\mathbf{y}) \cdot (\mathbf{x} - \mathbf{y}) \\ p_{ext}(\mathbf{x}) &= 0 \end{aligned} \quad (2.53)$$

Cette expression est équivalente à la régularisation proposée par Liu 1992 [157].

L'équation dérivée s'exprime maintenant par

$$\begin{aligned} \int_{\partial\Omega} \frac{\partial p}{\partial \mathbf{n}_x}(\mathbf{x}) \left( \frac{\partial G^k}{\partial \mathbf{n}_y} - \frac{\partial G^0}{\partial \mathbf{n}_y} \right) (\mathbf{y} - \mathbf{x}) d\mathbf{x} + \int_{\partial\Omega} \left( \frac{\partial p}{\partial \mathbf{n}_x}(\mathbf{x}) - \nabla p(\mathbf{y}) \cdot \mathbf{n}_x \right) \frac{\partial G^0}{\partial \mathbf{n}_y}(\mathbf{y} - \mathbf{x}) d\mathbf{x} \\ - \int_{\partial\Omega} p(\mathbf{x}) \left( \frac{\partial^2 G^k}{\partial \mathbf{n}_x \partial \mathbf{n}_y} - \frac{\partial^2 G^0}{\partial \mathbf{n}_x \partial \mathbf{n}_y} \right) (\mathbf{y} - \mathbf{x}) d\mathbf{x} \\ - \int_{\partial\Omega} (p(\mathbf{x}) - p(\mathbf{y}) - \nabla p(\mathbf{y}) \cdot (\mathbf{x} - \mathbf{y})) \frac{\partial^2 G^0}{\partial \mathbf{n}_x \partial \mathbf{n}_y}(\mathbf{y} - \mathbf{x}) d\mathbf{x} + \frac{\partial p}{\partial \mathbf{n}_y}(\mathbf{y}) = \frac{\partial p_{inc}}{\partial \mathbf{n}_y}(\mathbf{y}) \end{aligned} \quad (2.54)$$

Cette expression ne contient que des fonctions intégrables ordinaires. Il suffit de la multiplier par  $\alpha$  et de l'ajouter à l'équation de la section précédente pour obtenir l'équation intégrale finale que l'on peut discrétiser.

Pour la dimension 2 on peut traiter le cas plus général d'une surface présentant des singularités géométriques et démontrer l'existence de fonctions  $p_{int}$  et  $p_{ext}$  vérifiant les hypothèses 2.43. Il s'agit donc de montrer l'existence d'une fonction harmonique  $p_{int}$  sur le domaine intérieur  $\Omega_{int}$  et d'une fonction harmonique  $p_{ext}$  sur le domaine extérieur  $\Omega_{ext}$  telles que

$$p(\mathbf{x}) - p_{int}(\mathbf{x}) - p_{ext}(\mathbf{x}) = O(|\mathbf{x} - \mathbf{y}|^{1+\nu}) \quad (2.55)$$

$$\frac{\partial p}{\partial n}(\mathbf{x}) - \frac{\partial p_{int}}{\partial n}(\mathbf{x}) = O(|\mathbf{x} - \mathbf{y}|^\nu) \quad (2.56)$$

$$\frac{\partial p_{ext}}{\partial n}(\mathbf{x}) = O(|\mathbf{x} - \mathbf{y}|^\nu) \quad (2.57)$$

au voisinage de  $\mathbf{y} \in \partial\Omega$  pour  $\mathbf{x} \in \partial\Omega$  et  $\nu > 0$ .

### Démonstration

Dans le domaine extérieur  $\Omega_{ext}$ ,  $p$  vérifie

$$p(\mathbf{x}) = p_{inc}(\mathbf{x}) + \int_{\partial\Omega} p(\mathbf{z}) \frac{\partial G^k}{\partial \mathbf{n}_z}(\mathbf{x} - \mathbf{z}) d\mathbf{z} - \int_{\partial\Omega} \frac{\partial p}{\partial \mathbf{n}_z}(\mathbf{z}) G^k(\mathbf{x} - \mathbf{z}) d\mathbf{z} \quad (2.58)$$

ce que l'on peut aussi écrire

$$\begin{aligned} p(\mathbf{x}) &= \int_{\partial\Omega} p(\mathbf{z}) \frac{\partial G^0}{\partial \mathbf{n}_z}(\mathbf{x} - \mathbf{z}) d\mathbf{z} - \int_{\partial\Omega} \frac{\partial p}{\partial \mathbf{n}_z}(\mathbf{z}) G^0(\mathbf{x} - \mathbf{z}) d\mathbf{z} + p_{inc}(\mathbf{x}) \\ &\quad + \int_{\partial\Omega} p(\mathbf{z}) \frac{\partial(G^k - G^0)}{\partial \mathbf{n}_z}(\mathbf{x} - \mathbf{z}) d\mathbf{z} - \int_{\partial\Omega} \frac{\partial p}{\partial \mathbf{n}_z}(\mathbf{z}) (G^k - G^0)(\mathbf{x} - \mathbf{z}) d\mathbf{z} \end{aligned} \quad (2.59)$$

$p$  peut donc se mettre sous la forme

$$p(\mathbf{x}) = p_0(\mathbf{x}) + p_R(\mathbf{x}) \quad (2.60)$$

où

$$p_0(\mathbf{x}) = \int_{\partial\Omega} p(\mathbf{z}) \frac{\partial G^0}{\partial \mathbf{n}_z}(\mathbf{x} - \mathbf{z}) d\mathbf{z} - \int_{\partial\Omega} \frac{\partial p}{\partial \mathbf{n}_z}(\mathbf{z}) G^0(\mathbf{x} - \mathbf{z}) d\mathbf{z} \quad (2.61)$$

est une fonction harmonique dans le domaine extérieur et

$$p_R(\mathbf{x}) = p_{inc}(\mathbf{x}) + \int_{\partial\Omega} p(\mathbf{z}) \frac{\partial(G^k - G^0)}{\partial \mathbf{n}_z}(\mathbf{x} - \mathbf{z}) d\mathbf{z} - \int_{\partial\Omega} \frac{\partial p}{\partial \mathbf{n}_z}(\mathbf{z}) (G^k - G^0)(\mathbf{x} - \mathbf{z}) d\mathbf{z} \quad (2.62)$$

est une fonction régulière. En effet  $p_{inc}$  est régulier au voisinage de  $\partial\Omega$  si l'on suppose qu'il n'y a pas de source placée sur la frontière. Les fonctions  $G^k - G^0$  et  $\partial(G^k - G^0)/\partial n$ , sont bornées au voisinage de  $\mathbf{y}$  et conduisent à

$$\int_{\partial\Omega} p(\mathbf{z}) \frac{\partial(G^k - G^0)}{\partial \mathbf{n}_z}(\mathbf{x} - \mathbf{z}) d\mathbf{z} \in C^2(\overline{\Omega}_{ext}) \quad (2.63)$$

$$\int_{\partial\Omega} \frac{\partial p}{\partial \mathbf{n}_z}(\mathbf{z})(G^k - G^0)(\mathbf{x} - \mathbf{z})d\mathbf{z} \in C^2(\overline{\Omega}_{ext}) \quad (2.64)$$

pour  $p$  et  $\partial p/\partial n$  dans  $L^\infty(\partial\Omega)$ . Donc  $p_R \in C^2(\overline{\Omega}_{ext})$  et la régularité de  $p$  au voisinage du point  $\mathbf{y}$  est équivalente à celle de la fonction harmonique  $p_0$ .

Lorsque la frontière est régulière et  $\frac{\partial p}{\partial n}$  continue en  $\mathbf{y}$  la fonction  $p_0$  est dans  $H^2$  au voisinage de  $\mathbf{y}$ . Au voisinage d'un coin ou d'une discontinuité des données sur la frontière la régularité est plus faible. Nous avons les résultats suivants.

On suppose  $f \in L^p$ , il existe des nombres  $c_{j,m}$  tels que la solution de  $\Delta p = f$  vérifie

$$p - \sum_j \left\{ \sum_{0 < \lambda_{j,m} < 2-2/p} c_{j,m} S_{j,m} \right\} \in W^{2,p}(\Omega_{ext}) \quad (2.65)$$

où  $D_j, 1 \leq j \leq n$  est l'ensemble des points de discontinuité géométrique de la frontière (voir figure 2.2,  $W^{2,p}(\Omega_{ext}) = \{u \in L^p(\Omega_{ext}), \nabla u \in [L^p(\Omega_{ext})]^3\}$ ).

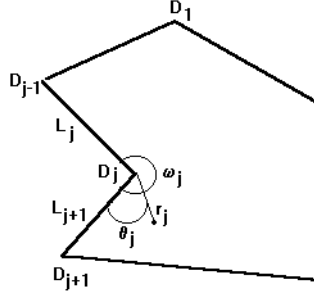


FIG. 2.2 – *Domaine avec des coins. Notations*

$\lambda_{j,m}$  et  $S_{j,m}$  sont donnés par

1) Avec des conditions de Dirichlet sur  $L_j$  et  $L_{j+1}$

$$\begin{aligned} \lambda_{j,m} &= \frac{m\pi}{\omega_j}, \quad m \geq 1 \\ S_{j,m} &= \eta_j(r_j) r_j^{\lambda_{j,m}} \sin(\lambda_{j,m} \theta_j) \end{aligned} \quad (2.66)$$

2) Avec des conditions de Neumann sur  $L_j$  et  $L_{j+1}$

$$\begin{aligned} \lambda_{j,m} &= \frac{(m-1)\pi}{\omega_j}, \quad m \geq 2 \\ S_{j,m} &= \eta_j(r_j) r_j^{\lambda_{j,m}} \cos(\lambda_{j,m} \theta_j) \end{aligned} \quad (2.67)$$

3) Avec des conditions mixtes de type Dirichlet sur  $L_j$  et Neumann sur  $L_{j+1}$  ou l'inverse

$$\begin{aligned} \lambda_{j,m} &= \left(m - \frac{1}{2}\right) \frac{\pi}{\omega_j}, \quad m \geq 1 \\ S_{j,m} &= \eta_j(r_j) r_j^{\lambda_{j,m}} \sin(\theta_j \lambda_{j,m}) \\ (\text{ou } S_{j,m} &= \eta_j(r_j) r_j^{\lambda_{j,m}} \sin((\omega_j - \theta_j) \lambda_{j,m})) \end{aligned} \quad (2.68)$$

$\eta_j$  est une fonction de troncature valant 1 près de  $D_j$ . Ces fonctions donnent la nature des singularités aux voisinages des coins.

#### Application à un problème de Neumann

On étudie la régularité de la solution du problème.

$$\begin{aligned}\Delta p &= 0 \text{ sur } \Omega \\ \frac{\partial p}{\partial n} &= g \text{ sur } \partial\Omega\end{aligned}\tag{2.69}$$

Il existe  $\tilde{p} \in W^{2,p}$  telle que  $\frac{\partial \tilde{p}}{\partial n} = g$  sur  $\partial\Omega$  et la fonction  $p - \tilde{p}$  est solution de

$$\begin{aligned}\Delta(p - \tilde{p}) &= -\Delta\tilde{p} \in L^p \\ \frac{\partial(p - \tilde{p})}{\partial n} &= 0 \text{ sur } \partial\Omega\end{aligned}\tag{2.70}$$

On peut donc appliquer les résultats précédents à la fonction  $p$ .

Dans ce cas seuls comptent les angles tels que  $\omega_j > \pi$  et les fonctions  $S_{j,1}$ . Celles-ci ne sont pas harmoniques. On peut utiliser par exemple la fonction

$$f(z) = \operatorname{Re}\left(\frac{z^\alpha(-z_0)^{\alpha+1}}{(z-z_0)^{1+\alpha}}\right)\tag{2.71}$$

où  $z_0$  est un point intérieur à la surface, l'origine est pris en  $\mathbf{y}$ . Elle est harmonique et au voisinage de l'origine se comporte en

$$f(r, \theta) = 2r^{\pi/\omega} \cos\left(\frac{\pi\theta}{\omega}\right) + O(r^{2\pi/\omega})\tag{2.72}$$

au voisinage de l'infini

$$f(r, \theta) = O(1/r)\tag{2.73}$$

Le gradient de  $f$  peut se calculer à partir de la dérivée complexe de  $f$  et vaut au voisinage de  $\mathbf{y}$ .

$$\nabla f(r, \theta) = \frac{2\pi}{\omega} r^{\pi/\omega-1} \begin{pmatrix} \cos\left(\frac{\pi\theta}{\omega}\right) \\ -\sin\left(\frac{\pi\theta}{\omega}\right) \end{pmatrix} + O(r^{2\pi/\omega-1})\tag{2.74}$$

et par conséquent

$$\begin{aligned}\frac{\partial f}{\partial n}(r, 0) &= O(r^{2\pi/\omega-1}) \text{ sur } L_j \\ \frac{\partial f}{\partial n}(r, \omega) &= O(r^{2\pi/\omega-1}) \text{ sur } L_{j+1}\end{aligned}\tag{2.75}$$

Finalement la fonction  $p$  se décompose au voisinage de  $\mathbf{y}$  en

$$p(\mathbf{x}) = cf(\mathbf{x}) + p_R(\mathbf{x})\tag{2.76}$$

avec  $p_R \in W^{2,p}(\Omega_{ext})$ .

On peut donc choisir pour fonctions  $p_{int}$  et  $p_{ext}$

$$p_{ext}(\mathbf{x}) = cf(\mathbf{x})\tag{2.77}$$

et

$$p_{int}(\mathbf{x}) = p(\mathbf{y}) + \nabla p_R(\mathbf{y}) \cdot (\mathbf{x} - \mathbf{y}) \quad (2.78)$$

Il faut vérifier les propriétés 2.55, 2.56 et 2.57. Les propriétés 2.56 et 2.57 se déduisent de 2.75. Pour 2.55 les injections de Sobolev donnent (voir Brezis 1987 [25]).

$$|\nabla p_R(\mathbf{x}) - \nabla p_R(\mathbf{y})| \leq \|p_R\|_{W^{2,p}} |\mathbf{x} - \mathbf{y}|^\nu \quad (2.79)$$

avec  $\nu = 1 - \frac{2}{p}$ ,  $0 < \nu < 1$ . On en déduit

$$|p_R(\mathbf{x}) - p_R(\mathbf{y}) - \nabla p_R(\mathbf{y}) \cdot (\mathbf{x} - \mathbf{y})| \leq \|p_R\|_{W^{2,p}} |\mathbf{x} - \mathbf{y}|^{1+\nu} \quad (2.80)$$

soit

$$p(\mathbf{x}) - p_{int}(\mathbf{x}) - p_{ext}(\mathbf{x}) = O(|\mathbf{x} - \mathbf{y}|^{1+\nu}) \quad (2.81)$$

## 2.4 Discrétisation

Avec la formulation précédente le degré d'interpolation des fonctions peut être quelconque. Nous choisirons une discrétisation de degré deux sur l'interface fluide-structure avec des éléments à trois noeuds pour des problèmes plans et des éléments à huit noeuds pour des surfaces en dimension trois. Les champs de pression et de dérivée normale de la pression sont donnés sur un élément par les formules classiques.

$$p(\mathbf{x}) = \sum_{i=1}^n p_i N_i(\mathbf{x})$$

$$\frac{\partial p}{\partial n}(\mathbf{x}) = \sum_{i=1}^n \frac{\partial p_i}{\partial n} N_i(\mathbf{x})$$

Les  $N_i(\mathbf{x})$  sont les fonctions de forme habituelles pour des éléments de degré deux.  $n = 3$  en dimension 2 et  $n = 8$  en dimension 3. Les  $p_i$  et  $\frac{\partial p_i}{\partial n}$  sont respectivement les valeurs des pressions et des dérivées normales de la pression aux noeuds du maillage. Ce sont les inconnues du problème.

Nous choisissons de résoudre l'équation intégrale par une méthode de collocation. Une autre possibilité serait de résoudre par une méthode variationnelle mais nous avons vu au début de ce chapitre que cela conduisait à des calculs plus lourds.

La présence de la dérivée tangente de la pression dans les équations pourrait conduire à un mauvais comportement si nous choisissons de faire la collocation aux noeuds. Les points de collocation seront donc choisis à l'intérieur des mailles comme dans les figures 2.3 et 2.4. Nous remarquons que l'on peut associer naturellement le noeud le plus proche à chaque point de collocation. La distance entre le point de collocation et le noeud le plus proche est un paramètre  $\nu$  que l'on règlera sur quelques cas tests.

Par ce procédé nous obtenons plus d'équations que d'inconnues. Nous pourrions alors résoudre ce système sur-déterminé par moindres carrés comme Wu 1991 [266]. Toutefois cette méthode présente l'inconvénient d'augmenter l'espace de stockage nécessaire et surtout

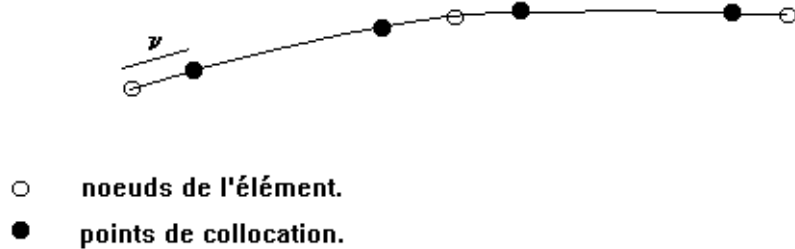


FIG. 2.3 – *Noeuds et points de collocation en 2D.*

nécessite une multiplication matricielle coûteuse en temps calcul. C'est pourquoi nous avons adopté une approche plus simple qui consiste à n'écrire qu'une seule équation pour chaque noeud. On commence à écrire les équations pour les noeuds de la première maille. Pour les mailles suivantes nous n'écrivons que les équations pour des points de collocation associés à des noeuds ne figurant pas dans les mailles précédentes.

Remarque: Francis 1991 [85] a utilisé un nombre de points de collocation plus faible pour l'équation dérivée que pour l'équation initiale sans diminuer sensiblement la qualité du résultat. Mais il n'a pas fourni de justification ni de critère permettant de sélectionner le nombre minimal de points à prendre.

## 2.5 Intégrations numériques.

Nous évaluerons les différentes intégrales par la méthode des points de Gauss en adaptant le nombre de points suivant les éléments. Nous classerons les éléments en trois catégories :

- les éléments éloignés du point de collocation.
- les éléments proches du point de collocation.
- l'élément auquel appartient le point de collocation (élément singulier).

Après différents tests nous avons adopté les schémas d'intégration décrits dans le tableau suivant qui donne le nombre de points de Gauss en fonction de la dimension et du type d'élément.

<i>type d'élément</i>	<i>2D</i>	<i>3D</i>
lointain	5	2x2
proche	7	3x3
singulier	2x7	4x3x3 + 4x3x3

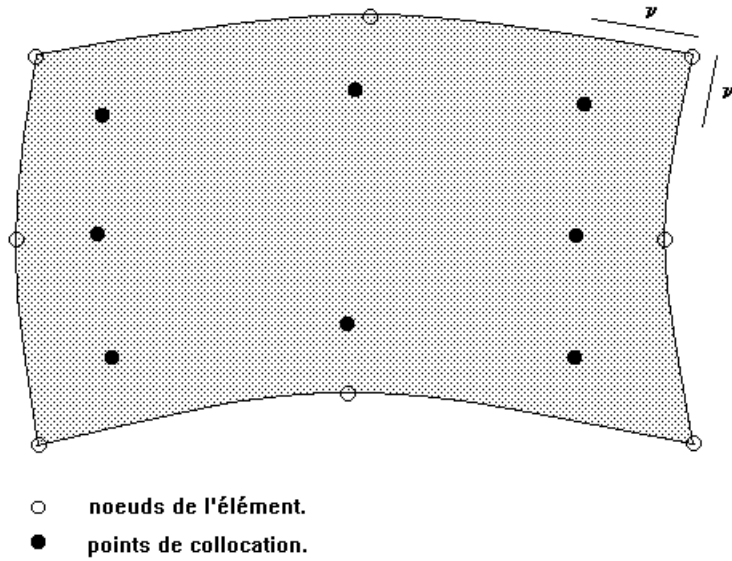


FIG. 2.4 – Noeuds et points de collocation en 3D.

En dehors de l'élément singulier le schéma d'intégration est classique. L'élément singulier est par contre traité de manière particulière. Dans ce cas l'élément est découpé en plusieurs sous-éléments. Sur chaque sous-élément un changement de variable est effectué pour supprimer les singularités des fonctions intégrées.

### Cas bidimensionnel

L'élément est divisé en deux parties comme l'indique la figure 2.5.

On fait les changements de coordonnées suivants sur les deux sous-éléments, en notant  $y_0$  la position du point de collocation dans l'élément de référence.

$$y_1(x) = y_0 - (1 + y_0) \frac{(1 - x)^3}{8}$$

$$y_1'(x) = \frac{3}{8}(1 + y_0)(1 - x)^2$$

$$y_2(x) = y_0 + (1 - y_0) \frac{(1 + x)^3}{8}$$

$$y_2'(x) = \frac{3}{8}(1 - y_0)(1 + x)^2$$

Les singularités des fonctions en dimension deux sont du type logarithmique. Avec ce changement de variable nous obtenons pour le premier sous-élément

$$\int_{-1}^{y_0} \text{Log}(|y - y_0|) f(y) dy = \int_{-1}^1 \text{Log}\left((1 + y_0) \frac{(1 - x)^3}{8}\right) \frac{3}{8}(1 + y_0)(1 - x)^2 f(y_1(x)) dx$$

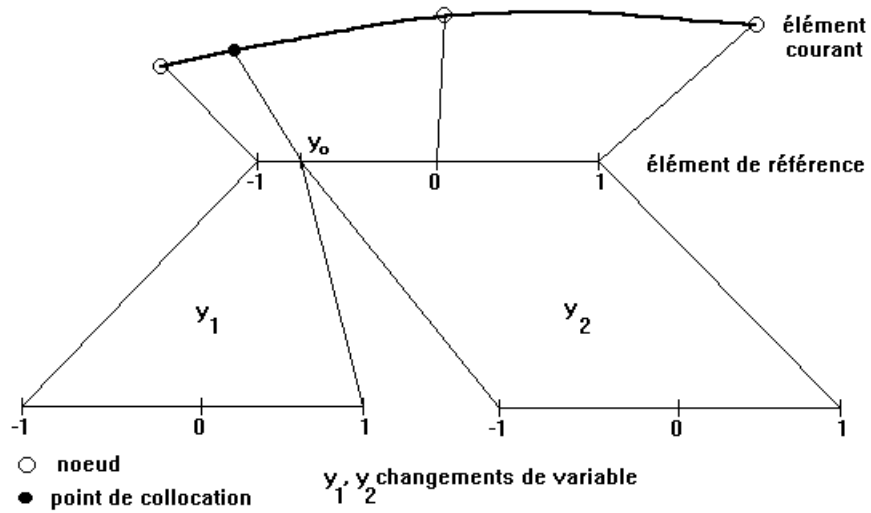


FIG. 2.5 – *Elément singulier 2D.*

Où  $f(y)$  est une fonction régulière en  $y$ . La nouvelle intégrale est régulière et se calcule facilement en prenant quelques points de Gauss. La situation est identique sur le deuxième sous-élément.

### Cas tridimensionnel

L'élément est divisé en quatre parties. Chaque sous-élément de l'élément de référence est à nouveau divisé en deux. Sur la partie ( $I_1$ ) contenant le point de collocation nous passons en coordonnées polaires. Le calcul est effectué en prenant 9 points de Gauss dans le système  $(r, \theta)$ . Sur la partie restante ( $I_2$ ) on fait un changement de coordonnées pour se ramener au carré  $[-1,1] \times [-1,1]$  usuel. L'intégration est effectuée avec 9 points de Gauss dans le nouveau système. Ces changements de variable permettent de supprimer la singularité en  $\frac{1}{r}$ .

La discrétisation conduit finalement à un système matriciel reliant les valeurs aux noeuds de la pression et de sa dérivée normale ce que l'on peut exprimer par

$$\mathbf{A}\mathbf{P}_{tot} + \mathbf{B}\partial\mathbf{P}_{tot} = \mathbf{P}_{inc} + \alpha\partial\mathbf{P}_{inc}$$

où  $\mathbf{P}_{tot}$  et  $\mathbf{P}_{inc}$  désigne les vecteurs des pressions totales et des pressions incidentes aux noeuds.  $\partial\mathbf{P}_{tot}$  et  $\partial\mathbf{P}_{inc}$  sont les vecteurs des dérivées normales.

## 2.6 Couplage fluide-structure

Pour des problèmes couplés il est préférable de modéliser le corps solide par éléments finis (Dhatt 1981 [58]) plutôt que d'utiliser une autre formulation intégrale. Cette démarche a cependant été utilisée par Seybert 1988 [227]. Les éléments finis permettent de traiter des problèmes plus généraux, en particulier des corps inhomogènes, et de profiter de la disponibilité de grands codes commerciaux. Dans des cas favorables comme des études de

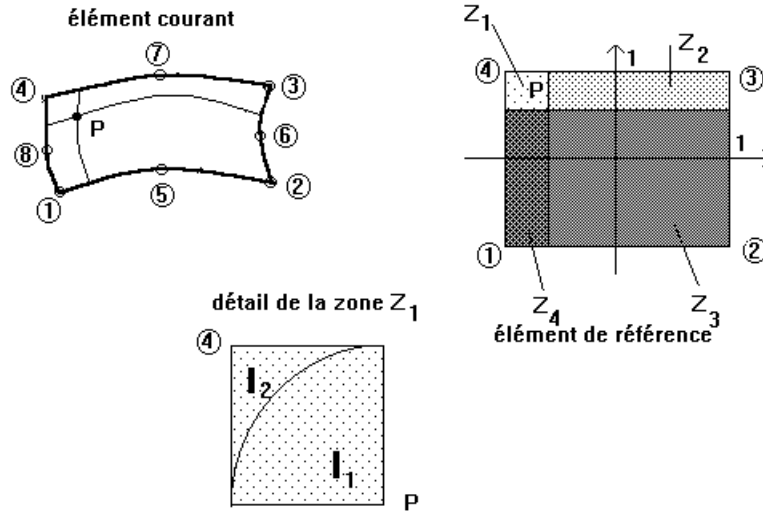


FIG. 2.6 – *Elément singulier 3D.*

rayonnement de plaques (Delhommeau 1981 [55]) ou de poutres à basses fréquences (Jiang 1986 [128]) le problème des fréquences singulières n'apparaît pas et il est possible d'utiliser l'équation intégrale de Kirchoff pour obtenir la relation d'impédance sur la surface de séparation fluide-structure. Dans les autres cas la principale difficulté des problèmes couplés reste la modélisation du fluide qui est effectuée par l'une des méthodes décrites au début de ce chapitre. Wilton 1978 [263] et Everstine 1990 [76] ont utilisé CHIEF avec des éléments de degré 0. Mathews 1986 [166] a utilisé la méthode de Burton et Miller en régularisant soit par multiplication par l'opérateur  $\mathbf{L}_0$  soit par la formule 2.12 sans indiquer toutefois le moyen de calculer la singularité. Jeans 1990 [126] et Ben Mariem 1987 [17] ont résolu l'équation intégrale par des méthodes variationnelles. On pourra se référer à Chen 1982 [37] pour une revue des méthodes utilisées jusqu'à cette date.

Nous utiliserons la méthode décrite dans les sections précédentes pour modéliser le fluide et le couplage s'effectuera de manière classique en imposant la continuité du vecteur contrainte et de la vitesse normale. Reprenons les équations obtenues dans les sections précédentes sous forme discrétisée et ajoutons les conditions de continuité sur la pression et la vitesse.

#### Mouvement de la structure.

$$(\mathbf{K} - \omega^2 \mathbf{M})\mathbf{U} = \mathbf{F}_{int} - \mathbf{S}\mathbf{P}_{tot} \quad (2.82)$$

$\mathbf{K}$  et  $\mathbf{M}$  sont respectivement la matrice de rigidité et la matrice de masse de la structure.  $\mathbf{F}_{int}$  est le vecteur des efforts imposés autres que la pression du fluide. Ces grandeurs sont calculées par le code SAMCEF.  $\mathbf{S}$  est une matrice transformant la pression du fluide en des efforts aux noeuds de la structure. Ecrits sous forme vectorielle les composantes de  $\mathbf{S}$  se calculent par

$$\mathbf{f}_i = \int_{\partial\Omega} -p(\mathbf{x})\mathbf{n}(\mathbf{x})N_i(\mathbf{x})d\mathbf{x} = -\sum_{j=1}^{N_f} \left( \int_{\partial\Omega} N_i(\mathbf{x})N_j(\mathbf{x})\mathbf{n}(\mathbf{x})d\mathbf{x} \right) p_j = \sum_{j=1}^{N_f} \mathbf{S}_{ij} p_j \quad (2.83)$$

$N_f$  est le nombre de noeuds sur l'interface fluide-structure.

**Equation intégrale du fluide.**

$$\mathbf{A}\mathbf{P}_{tot} + \mathbf{B}\partial\mathbf{P}_{tot} = \mathbf{P}_{inc} + \alpha\partial\mathbf{P}_{inc} \quad (2.84)$$

**Continuité de la vitesse normale au contact fluide-structure.**

$$\lambda\mathbf{N}\mathbf{U} = \partial\mathbf{P}_{tot} \quad \text{avec } \lambda = \frac{\rho_f\omega^2}{1 - i(\lambda + 2\mu)\frac{\omega}{\rho_f c^2}} \quad (2.85)$$

$\mathbf{N}$  est une matrice diagonale formée par les composantes des normales aux noeuds de l'interface et par zéro aux noeuds intérieurs à la structure.

Plusieurs possibilités de résolution existent mais pour une méthode de résolution directe il est préférable de poser le problème final en termes d'inconnues fluides plutôt que d'inconnues solides ce qui augmenterait beaucoup la taille de la matrice à inverser, voir Paulsen 1992 [201] et Mathews 1986 [166]

En posant  $\mathbf{Z} = \mathbf{K} - \omega^2\mathbf{M}$  nous pouvons obtenir les déplacements de la structure.

$$\mathbf{U} = \mathbf{Z}^{-1}\mathbf{F}_{int} - \mathbf{Z}^{-1}\mathbf{S}\mathbf{P}_{tot} \quad (2.86)$$

Nous portons cette relation dans l'équation intégrale en tenant compte de la condition de continuité de la vitesse

$$\mathbf{A}\mathbf{P}_{tot} + \lambda\mathbf{B}\mathbf{N}\mathbf{U} = \mathbf{P}_{inc} + \alpha\partial\mathbf{P}_{inc} \quad (2.87)$$

$$(\mathbf{A} - \lambda\mathbf{B}\mathbf{N}\mathbf{Z}^{-1}\mathbf{S})\mathbf{P}_{tot} = \mathbf{P}_{inc} + \alpha\partial\mathbf{P}_{inc} - \lambda\mathbf{B}\mathbf{N}\mathbf{Z}^{-1}\mathbf{F}_{int} \quad (2.88)$$

D'où la pression  $\mathbf{P}_{tot}$  par résolution du système linéaire. Les matrices sont pleines et non symétriques. La résolution est effectuée par une méthode de Gauss par blocs.

On peut alors calculer les autres grandeurs  $\mathbf{U}$  et  $\partial\mathbf{P}_{tot}$  par les relations précédentes.

## 2.7 Passage dans le domaine temporel

Pour résoudre un problème non stationnaire il existe deux approches principales. Soit on résout directement à l'aide d'un schéma discret en temps où l'on calcule la solution à l'instant  $n+1$  en fonction des résultats aux instants  $i$  pour  $i \leq n$ . Cette méthode a été utilisée à partir de la formule des potentiels retardés de Kirchoff par Friedman 1962 [86], Mitzner 1967 [175], Shaw 1968 [229], Neilson 1978 [186], Bennet 1981 [18] et Ding 1989 [60]. Ils traitent la diffusion par des obstacles rigides ou par des inclusions fluides. Quelques auteurs, plus rares, comme Von Estorff 1991 [257] ont étendu le formalisme pour des problèmes couplés à des structures élastiques. Cette approche, bien que satisfaisante en temps calcul, nécessite de

conserver tous les résultats intermédiaires car la solution à l'instant  $n+1$  dépend de tous les instants précédents. Elle est utile principalement pour l'étude de phénomènes transitoires rapides comme des ondes de choc.

La deuxième approche est fondée sur une série de calculs dans le domaine fréquentiel suivie d'une transformation de Fourier ou de Laplace. Nous choisirons cette méthode qui est compétitive par rapport à la précédente (Von Estorff 1990 [258] et Manolis 1983 [163]) pour des mouvements dont le spectre n'est pas trop étendu en fréquence. Elle permet surtout d'obtenir les fonctions de transfert qui nous seront utiles dans des problèmes de contrôle actif.

La transformation de Fourier est plus facile à mettre en oeuvre que la transformation de Laplace et sera utilisée principalement pour la diffusion par des corps rigides pour lesquels les fréquences de diffusion sont dans le demi-plan  $Im(\omega) < 0$ . Pour des problèmes couplés certaines fréquences sont a priori proches de l'axe réel et il est préférable dans ce cas de faire une transformation de Laplace sur un chemin inclus dans le demi-plan  $Im(\omega) > 0$ . Rappelons quelques résultats relatifs à la mise en oeuvre numérique de la transformation de Fourier.

Soit  $f(t)$  une fonction dépendant du temps, on définit un échantillonnage de période  $T$  de  $f$  par la distribution

$$f_s(t) = f(t) \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \delta(t - nT) \quad (2.89)$$

La transformée de Fourier de  $f_s$  est

$$\begin{aligned} F_s(\omega) &= \sum_{n=-\infty}^{+\infty} f(nT) e^{i\omega nT} \\ &= \frac{1}{T} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} F(\omega - n\omega_s) \end{aligned} \quad (2.90)$$

$\omega_s = 2\pi/T$  est la pulsation associée à la fréquence d'échantillonnage et  $F$  est la transformée de Fourier de  $f$ . Pour éviter le phénomène d'aliasing il faut que le support de  $F$  soit contenu dans l'intervalle  $[-\frac{\omega_s}{2}, \frac{\omega_s}{2}]$ . Soit  $f_0$  la plus haute fréquence contenue dans le spectre de  $f$ , il faut donc que

$$\frac{1}{2T} \geq f_0 \quad (2.91)$$

En prenant la restriction de  $f$  à l'intervalle  $[0, (N-1)T]$  on peut définir la transformée de Fourier discrète et en obtenir un échantillonnage aux fréquences  $\frac{2\pi k}{NT}$  par

$$\hat{F}\left(\frac{2\pi k}{NT}\right) = \sum_{n=0}^{N-1} f(nT) e^{i\frac{2\pi kn}{N}} \quad (2.92)$$

soit en modifiant la notation

$$\hat{F}_k = \sum_{n=0}^{N-1} f_n e^{i\frac{2\pi kn}{N}} \quad (2.93)$$

On obtient une valeur approchée de la transformée de Fourier de  $f$  qui est la convolution de la valeur exacte  $F$  par la transformée de Fourier de la fonction de fenêtrage qui est ici la

fonction indicatrice de l'intervalle  $[0, (N - 1)T]$ . Les calculs numériques sont effectués par FFT.

Appliquons ceci à une source ponctuelle placée en  $\mathbf{x}_s$  émettant un signal d'amplitude  $s(t)$  de transformée de Fourier  $s(\omega)$ . Pour  $\omega$  fixé la résolution du problème harmonique avec une source ponctuelle en  $\mathbf{x}_s$  d'amplitude unité nous donne la pression  $p(\mathbf{x}, \omega)$  en un point  $\mathbf{x}$  où l'on désire calculer la réponse transitoire. La transformée de Fourier du signal cherché est donc  $s(\omega)p(\mathbf{x}, \omega)$  et une transformation inverse nous en donne la valeur temporelle.

Si l'on suppose que la durée du signal au point  $\mathbf{x}$  est  $T$ , il faut un échantillonnage en fréquence de finesse inférieure à  $1/2T$ . En fait les calculs ne seront pas fait avec cette résolution. On calcule  $p(\mathbf{x}, \omega)$  en un nombre de points en fréquence suffisant pour représenter les variations de la fonction et on interpole par des splines cubiques pour prolonger la solution aux autres fréquences.



# Chapitre 3

## Validation et exemples

### 3.1 Comportement numérique et convergence

Sur quelques problèmes tests dont la solution analytique est connue, nous avons étudié le comportement de l'erreur en fonction de divers paramètres dont la finesse du maillage, la fréquence, le nombre de points de Gauss et la position des points de collocation. L'erreur est définie à partir de la norme  $L^2$  sur la surface de la différence par rapport à la solution exacte soit

$$e = \frac{\|p - p_{exact}\|_{L^2(\partial\Omega)}}{\|p_{exact}\|_{L^2(\partial\Omega)}} \quad (3.1)$$

Il est plus facile de tester le comportement des équations intégrales sur des problèmes découplés, c'est pourquoi nous nous concentrerons essentiellement sur des problèmes d'acoustique.

#### 3.1.1 Acoustique pure

Dans ce cas on peut former simplement des solutions analytiques pour des géométries quelconques en plaçant des sources dans le domaine intérieur. Ces sources créent un champ de pression  $p_s$  connu dans tout l'espace. On résout alors un problème avec comme condition aux limites sur la frontière  $\frac{\partial p}{\partial n} = \frac{\partial p_s}{\partial n}$ . La solution en pression doit être égale à  $p_s$ .

Les différents cas tests sont définis sur les figures suivantes et sont constitués d'un dipôle dans un cylindre ou dans une sphère. Pour étudier l'influence de coins sur la surface, on considérera aussi les cas d'un dipôle plongé dans un carré ou dans un cube. En raison des symétries la partie maillée est restreinte à  $y \geq 0$  en 2D et à la partie  $y \geq 0$  et  $z \geq 0$  en dimension 3.

Avant tout il convient de déterminer les positions optimales des points de collocation à l'intérieur des mailles. Des tests ont été effectués à partir des exemples précédents à la fréquence  $ka = 4$ , où  $a = 1.m$  est le rayon dans le cas du cylindre ou de la sphère et le demi-côté pour le carré ou le cube. Nous prendrons  $c = 343.54m/s$  pour la vitesse du son dans l'air.

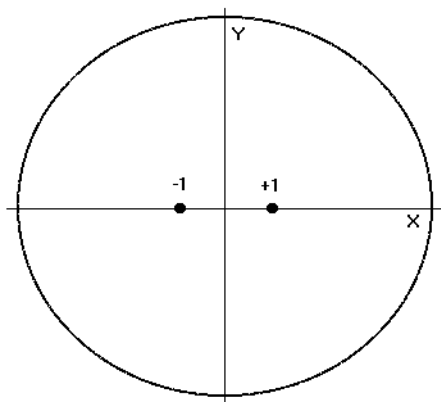


FIG. 3.1 – *Problème 1: Dipôle dans un cylindre.*

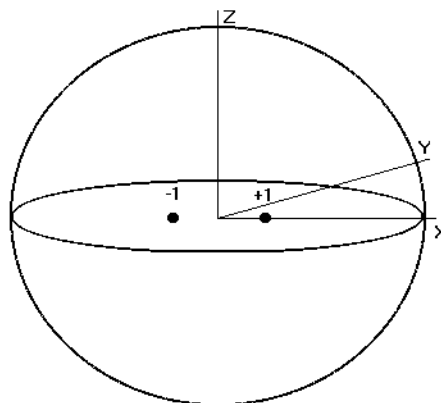


FIG. 3.3 – *Problème 3: Dipôle dans une sphère.*

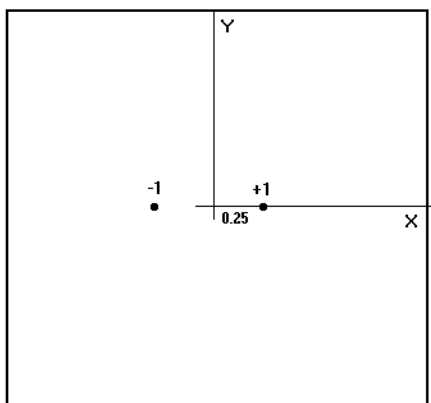


FIG. 3.2 – *Problème 2: Dipôle dans un carré.*

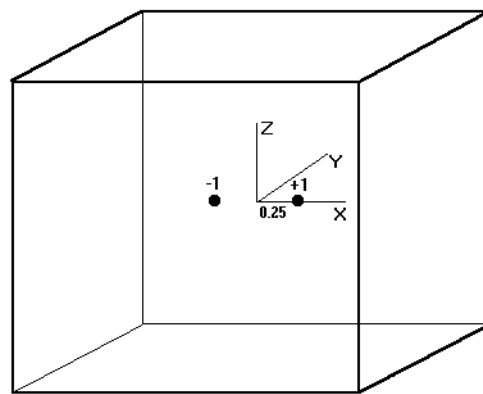


FIG. 3.4 – *Problème 4: Dipôle dans un cube.*

Les maillages, assez grossiers pour engendrer des erreurs appréciables, sont réalisés pour avoir environ 5 noeuds par longueur d'onde ce qui se traduit par des maillages de degré 2 de 8 éléments pour le carré, 5 éléments pour le cylindre, 18 éléments pour la sphère et 24 éléments pour le cube. Nous avons tracé l'erreur en fonction de la position des points de collocation dans la maille élémentaire (paramètre  $\nu$  du chapitre précédent). Les points sources sont placés sur l'axe x à une distance  $d = 0.25m$  de l'origine et ont des amplitudes opposées. La figure 3.5 montre la valeur de l'erreur en fonction de  $\nu$  pour les 4 problèmes précédents. Les valeurs  $\nu = 0.05$  en dimension 2 et  $\nu = 0.10$  en dimension 3 réalisent un compromis entre les différentes courbes et seront adoptées dans les applications numériques qui suivent. Les valeurs précises choisies pour ces paramètres ne sont pas déterminantes car les courbes sont régulières.

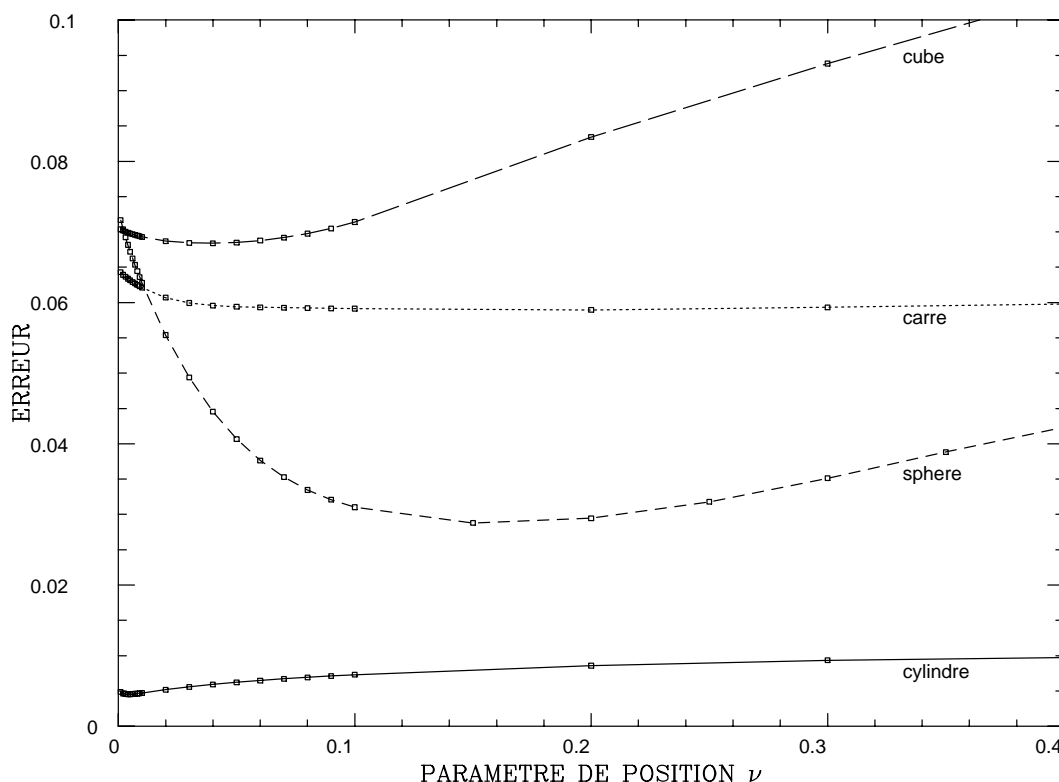


FIG. 3.5 – Influence de la position du point de collocation sur l'erreur.

Nous nous proposons ensuite de déterminer la vitesse de convergence en fonction de la finesse du maillage pour les problèmes 1 et 2, c'est à dire pour des problèmes bidimensionnels. Le paramètre de maillage est le nombre de noeuds sur la frontière qui est directement relié dans ce cas à la distance entre deux noeuds voisins car les maillages sont uniformes. La figure 3.6 et les suivantes sont tracées en échelles logarithmiques (de base 10) pour faciliter la lecture des pentes.

Pour le cas du cylindre nous trouvons une vitesse de convergence de l'ordre de 2.3 donc quadratique par une interpolation au sens des moindres carrés des points de la courbe. Le calcul pour le carré a été effectué à l'aide de deux maillages différents. Un premier maillage classique conduit à la courbe notée carré1 et une vitesse de convergence plus faible que dans le cas précédent (1.5 environ). Un deuxième maillage (carré2) a été effectué en dédoublant

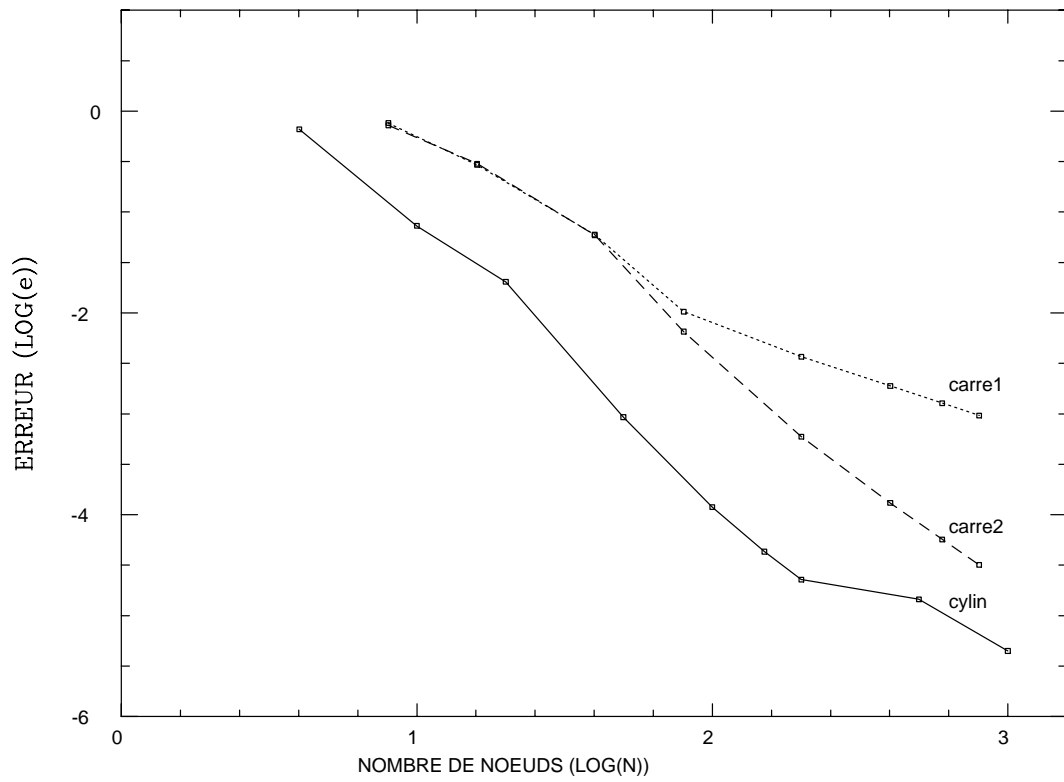


FIG. 3.6 – Convergence en dimension 2.

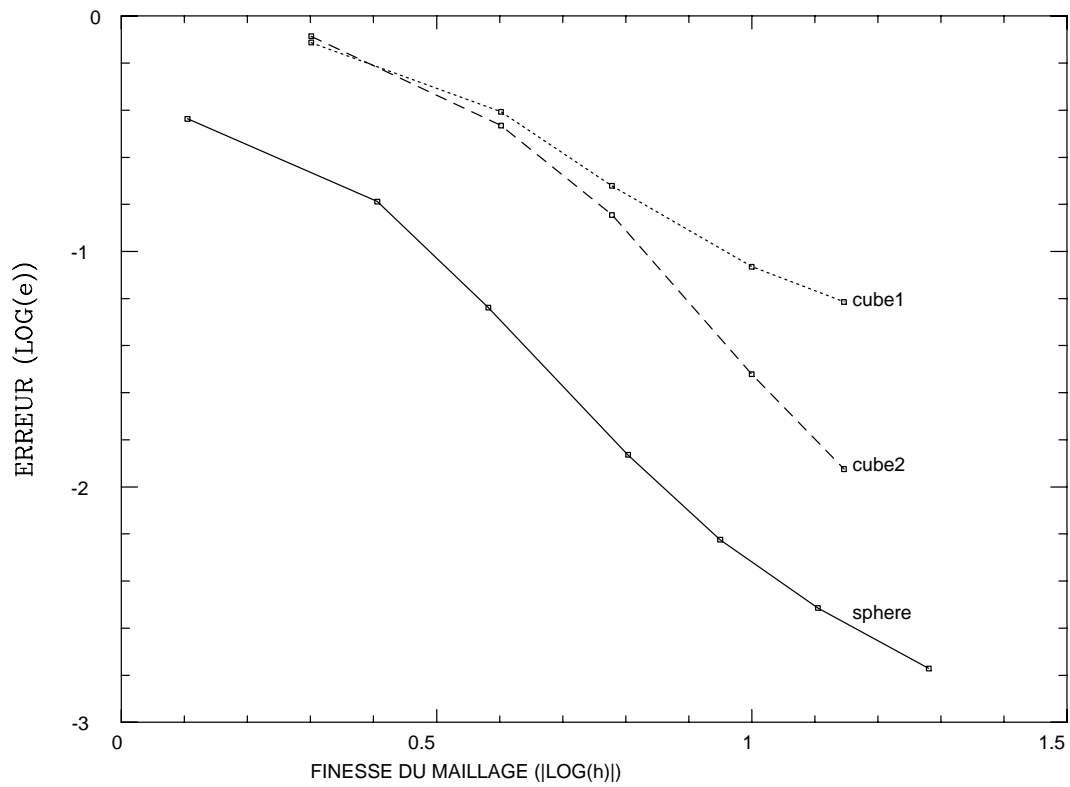


FIG. 3.7 – Convergence en dimension 3.

les noeuds des coins. Remarquons qu'avec le choix adopté pour les points de collocation on obtient toujours une équation par noeud. On constate une nette amélioration au niveau de la vitesse de convergence qui vaut de nouveau 2.3.

Ces trois exemples montrent l'efficacité de la méthode numérique dans les problèmes bidimensionnels. On constate en particulier que les singularités géométriques n'empêchent pas une bonne convergence qui peut être amélioré si le maillage tient compte des coins en dédoublant les noeuds en ces points.

La figure 3.7 présente les résultats analogues obtenues en dimension 3 avec des maillages sensiblement uniformes. Le paramètre de maillage, noté  $h$ , est la distance moyenne entre deux noeuds. Le maillage du cube a de nouveau été réalisé selon deux techniques. L'une avec un maillage classique (cube1) et l'autre (cube2) en créant pour les points sur les coins et sur les arêtes un noeud différent pour chaque direction possible de la normale. De nouveau la convergence est améliorée par ce procédé. Nous trouvons une vitesse de convergence de 1.4 pour le cube avec un maillage normal et de 2.2 pour le maillage séparant les coins. Elle vaut 2.1 pour la surface sphérique. On obtient donc des convergences sensiblement quadratiques même pour des objets présentant des singularités géométriques.

Pour mesurer l'intérêt d'utiliser des éléments de degré deux nous avons comparé avec des éléments de degré un. Dans les cas de la sphère et du cube (cube2), la figure 3.8 montre la variation de l'erreur pour les deux types de maillage. Le maillage de degré un est obtenu à partir du maillage de degré deux en divisant les mailles en quatre. Il comporte donc quelques noeuds supplémentaires (environ 25%). La comparaison des deux courbes montre que néanmoins les résultats sont plus précis pour des éléments de degré deux. Pour la sphère les vitesses de convergence estimées sont de 2.1 en degré deux et de 1.5 en degré un, de plus l'erreur obtenue avec des éléments quadratiques est nettement inférieure à celle obtenue avec des éléments linéaires.

### 3.1.2 Comportement aux voisinages de coins

Pour affiner l'étude de la convergence nous nous intéressons à la convergence ponctuelle au voisinage d'une singularité géométrique. Pour un problème avec frontière rigide en dimension deux le comportement de la solution au voisinage d'un angle est

$$p(r, \theta) = a + br^{\frac{\pi}{\alpha}} \sin\left(\frac{\pi\theta}{\alpha}\right) + O(r^{\frac{2\pi}{\alpha}}) \quad (3.2)$$

$r$  et  $\theta$  sont les coordonnées polaires du point de calcul avec pour origine le sommet de l'angle.  $\alpha$  est l'angle intérieur au domaine fluide. Ce champ de pression n'est pas  $C^{1,\mu}$  et son gradient tend vers l'infini au voisinage du coin. Pour vérifier le comportement du calcul numérique pour cette situation nous avons modélisé le triangle représenté sur la figure 3.9.

Le coin est pris pour origine des coordonnées. La longueur est  $L = 1.m$  et la hauteur  $H = 2.m$  ce qui conduit à  $\alpha = 270^\circ$ . La surface est rigide et le champ de pression est calculé au sommet pour des maillages uniformes sur la frontière avec et sans dédoublement des noeuds aux points singuliers. La source est placée soit en  $S1(-2/3, 0)$  soit en  $S2(0.2, 0.2)$  et le calcul est effectué à  $f = 1000Hz$ .

La figure 3.10 représente l'erreur sur la pression en S lorsque la source est placée en S1 ce qui conduit à une solution régulière. On constate qu'il y a convergence ponctuelle pour les

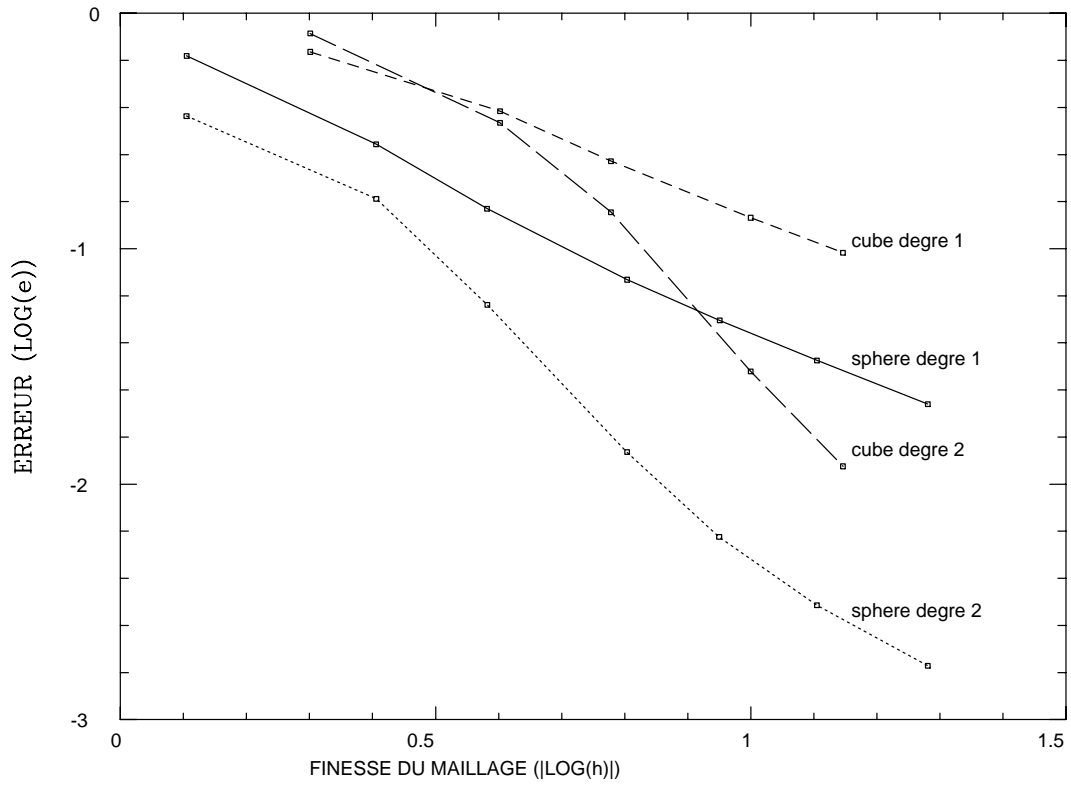


FIG. 3.8 – *Comparaison des éléments linéaires et quadratiques*

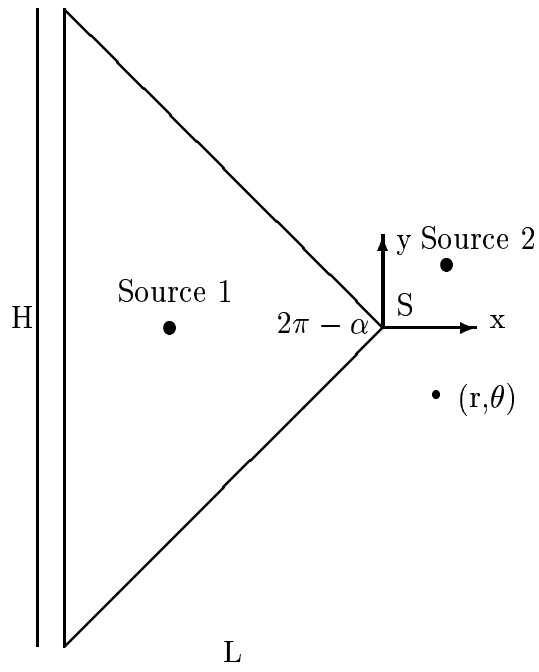


FIG. 3.9 – *Cas d'un angle.*

deux types de maillage mais que le dédoublement des noeuds augmente considérablement la vitesse de convergence. La même figure contient la variation de l'erreur pour une source placée en S2 avec les mêmes maillages. La solution analytique n'étant pas connue la solution de référence est obtenue numériquement avec un maillage très fin. La conclusion est semblable au cas précédent avec cependant une convergence plus lente qui traduit le comportement plus singulier de la solution.

La figure 3.11 montre la variation de la pression en fonction de  $r^{\frac{\pi}{\alpha}}$  pour un champ produit par une source placée en (1,1). Au voisinage de l'origine la courbe est une droite ce qui prouve que la pression a bien le comportement en  $r^{\frac{\pi}{\alpha}}$ .

Nous avons de même étudié l'exemple tridimensionnel du cube avec une source dipolaire S1 d'amplitude -1 en (-0.25,0,0) et 1 en (0.25,0,0) ainsi qu'un problème de diffraction engendré par 8 sources placées au point S2(2,2,2) et à ses symétriques par rapport aux plans de coordonnées ce qui permet de ne mailler que  $\frac{1}{8}$  du cube. On étudie la convergence ponctuelle au sommet S(1,1,1) pour ces deux exemples avec des maillages usuels et dédoublés. Les résultats sont reproduits sur la figure 3.12 et conduisent à la même conclusion que dans le cas bidimensionnel.

On constate donc que le calcul conduit à une solution correcte même pour un champ de pression peu régulier.

### 3.1.3 Problèmes couplés

Nous nous intéressons de même à la convergence pour des problèmes couplés. Dans ce cas le nombre de solutions analytiques est très restreint. Nous testerons uniquement un cylindre élastique et une coque sphérique (voir figure 3.13 et 3.14) soumis à une pression interne uniforme pour lesquels des solutions simples peuvent être construites. Le cylindre a un rayon interne d'un mètre et une épaisseur de 1.cm. La sphère a le même rayon et une épaisseur de 2.cm. Le matériau utilisé est l'acier de propriétés  $E = 2.10^{11}Pa$ ,  $\nu = 0.3$ ,  $\rho = 7800.kg/m^3$ . La pression interne est de  $100N/m^2$  pour le cylindre et  $1.N/m^2$  pour la sphère. Seuls 1/4 du cylindre et 1/8 de la sphère sont maillés en raison des symétries avec des maillages uniformes à un élément suivant l'épaisseur. Les calculs sont effectués à 1000Hz pour le cylindre et 400Hz pour la sphère.

Dans les deux cas l'erreur a été tracée en fonction de la finesse du maillage et les résultats sont reproduits sur la figure 3.15. On trouve une convergence de l'ordre de 2.3 pour la coque sphérique et de 3.6 pour le cylindre. La symétrie des problèmes traités qui conduit à une pression constante sur l'interface fluide-solide explique en partie ces bons résultats.

## 3.2 Suppression des fréquences singulières

Différents calculs ont été effectués avec les problèmes tests précédents pour comparer le comportement de l'équation intégrale de Kirchoff et la formulation modifiée en ajoutant l'équation dérivée. La figure 3.16 montre la variation de l'erreur, définie comme précédemment, en fonction de la fréquence pour un problème bidimensionnel (dipôle dans un cylindre avec 10 mailles). Quand la constante de couplage  $\alpha$  est nulle l'erreur est inacceptable aux voisinages des fréquences singulières. Par contre la valeur  $\alpha = \alpha_{opt}$  supprime ce phénomène

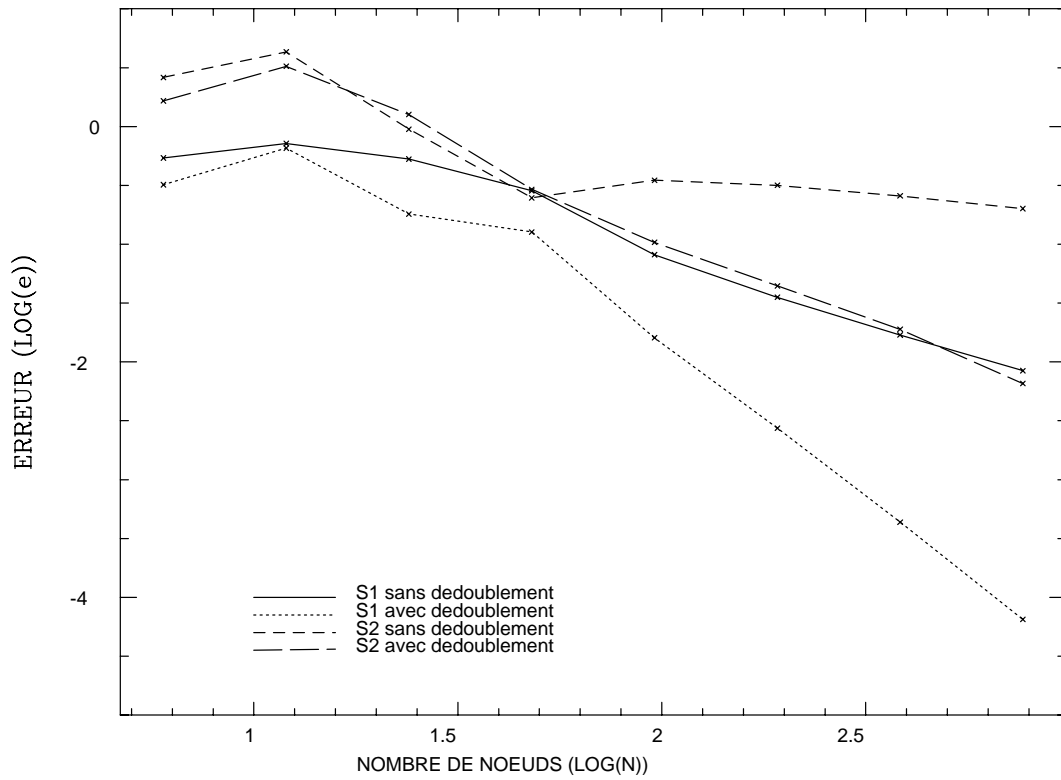


FIG. 3.10 – *Erreur sur la pression au coin.*

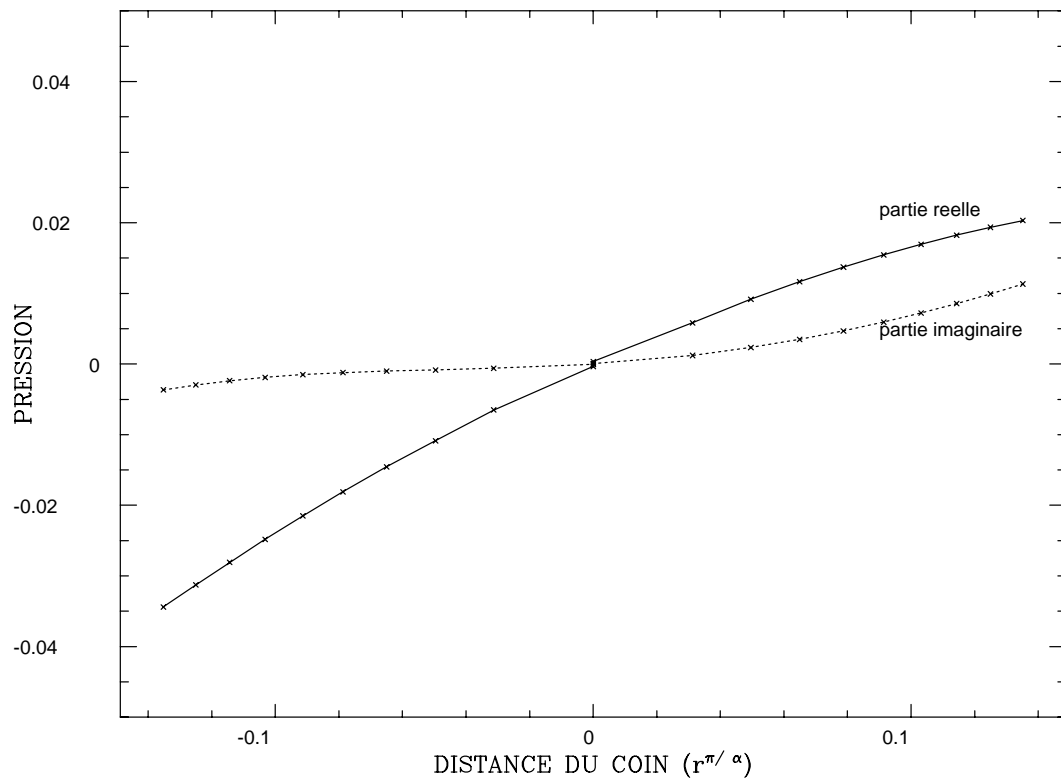


FIG. 3.11 – *Pression au voisinage du coin.*

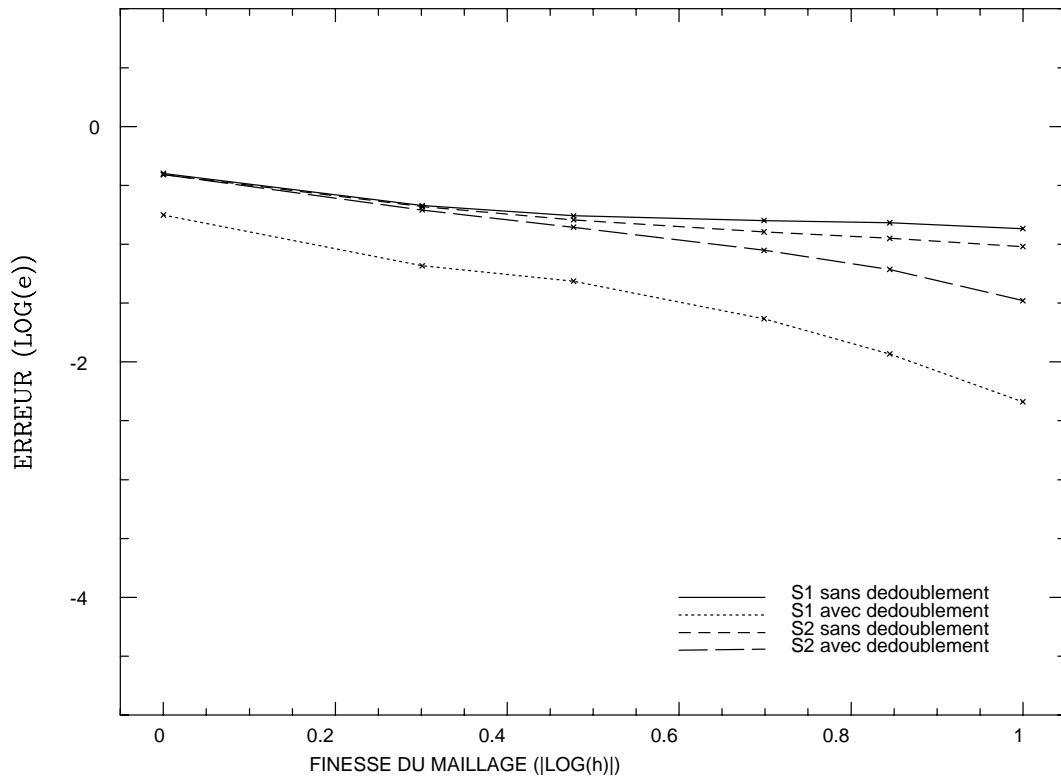


FIG. 3.12 – Erreur sur la pression au sommet du cube.

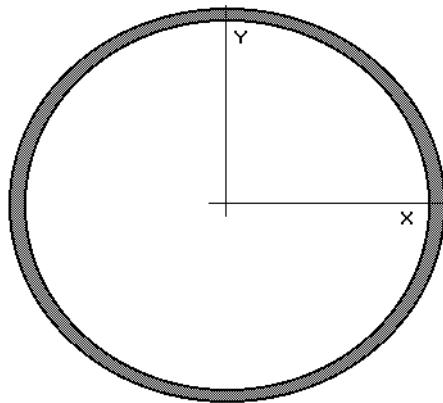


FIG. 3.13 – Vibrations d'un tube élastique.

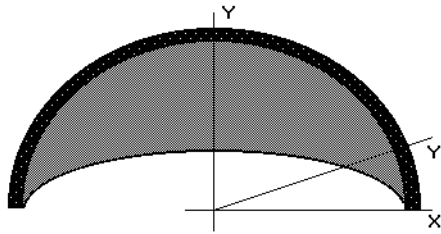


FIG. 3.14 – Vibrations d'une coque sphérique.

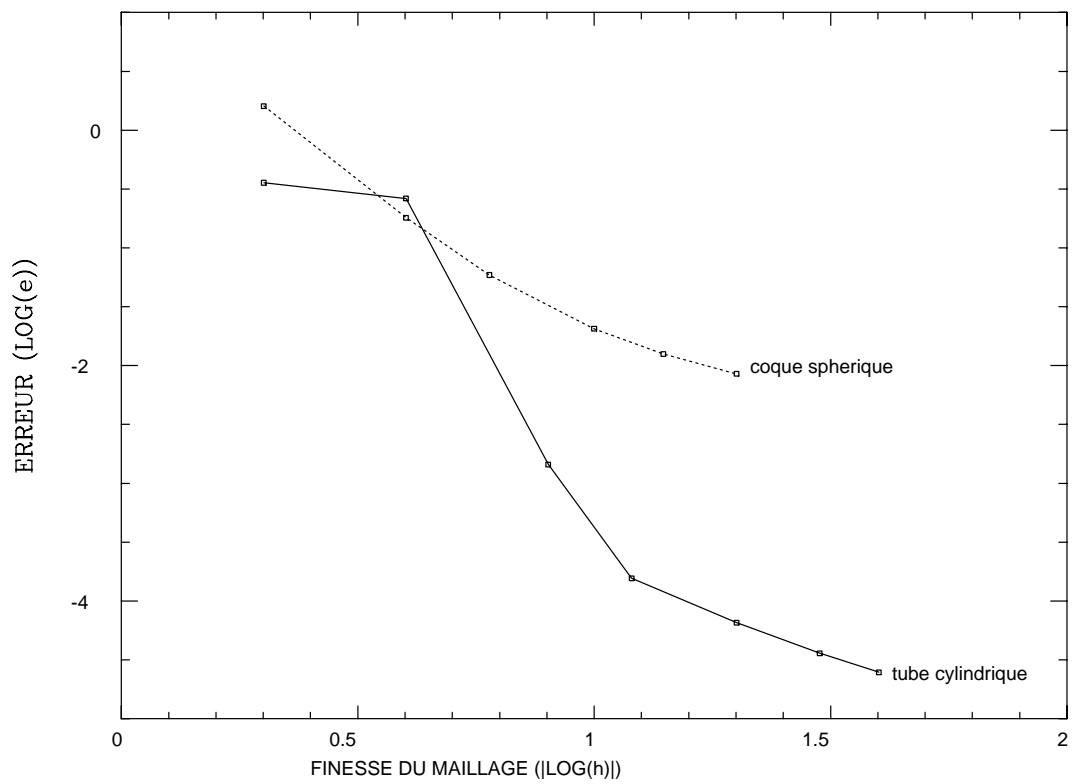


FIG. 3.15 – Convergence pour des problèmes couplés.

et permet d'obtenir une erreur de même ordre de grandeur quelque soit la fréquence. Divers tests ont permis de retenir la valeur  $\alpha_{opt} = \frac{i|k|}{\text{sup}(|k|^2, 50)}$  comme proche de l'optimum. La valeur classique est  $\alpha = i/|k|$ . La notre permet de diminuer la contribution de l'équation dérivée à basse fréquence où elle est moins précise que l'équation simple déduite de la formule de Kirchoff.

Pour un problème tridimensionnel le résultat est semblable comme le montre la figure 3.17. L'exemple traité est un dipôle dans une sphère (problème 3 de la section précédente avec 9 mailles). On observe de nouveau une amélioration très nette du comportement des solutions avec la même valeur pour  $\alpha_{opt}$ .

Ces deux exemples confirment l'intérêt de cette méthode de suppression des fréquences singulières. L'utilisation d'éléments de degré deux permet de conserver une bonne convergence en fonction de la finesse du maillage. Ceux utilisés dans les deux exemples précédents sont relativement grossiers mais permettent néanmoins une bonne approximation des solutions.

Un test est réalisé à haute fréquence, au voisinage de  $ka=100$ . ( $a=1.m$ ), pour le cas du cylindre (figure 3.18). Le nombre de modes intérieurs inférieurs à cette fréquence peut être évalué par la formule asymptotique

$$N(\omega) = \frac{S}{4\pi} \left(\frac{\omega}{c_0}\right)^2 \quad (\text{cas } 2D) \quad (3.3)$$

soit dans le cas présent  $N(\omega) = 2500$ . L'intervalle de fréquence représenté sur la figure contient  $dN/d\omega \Delta\omega \approx 366$  modes intérieurs. Quand la constante de couplage  $\alpha$  est nulle l'erreur est chaotique et prend des valeurs inacceptables. La valeur optimisée de  $\alpha$  montre au contraire un comportement très satisfaisant. L'erreur est très régulière en fonction de la fréquence et se situe bien en dessous de la valeur moyenne obtenue avec un couplage nul.

Deux autres tests ont été réalisés pour des problèmes couplés. La figure 3.19 montre la variation de l'erreur en fonction de la fréquence pour le rayonnement d'un tube soumis à une pression interne uniforme. La figure 3.20 présente la situation analogue d'une coque sphérique. Dans les deux cas nous constatons que l'erreur aux voisinages des fréquences singulières est encore présente dans ce type de problème et que l'équation intégrale modifiée conduit à un comportement satisfaisant.

### 3.3 Calcul de réponses temporelles

On se propose de calculer la réponse temporelle en un point de l'espace quand l'excitation est un point source émettant dans le fluide. En champ libre tridimensionnel la pression à une distance  $r$  d'une source fixe est donnée par

$$p_{inc}(r, t) = \frac{s(t - r/c)}{4\pi r} \quad (3.4)$$

où  $s(t)$  est l'amplitude de la source au temps  $t$ . Dans le domaine fréquentiel la relation s'écrit

$$p_{inc}(r, \omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{s(t - r/c)}{4\pi r} e^{i\omega t} dt$$

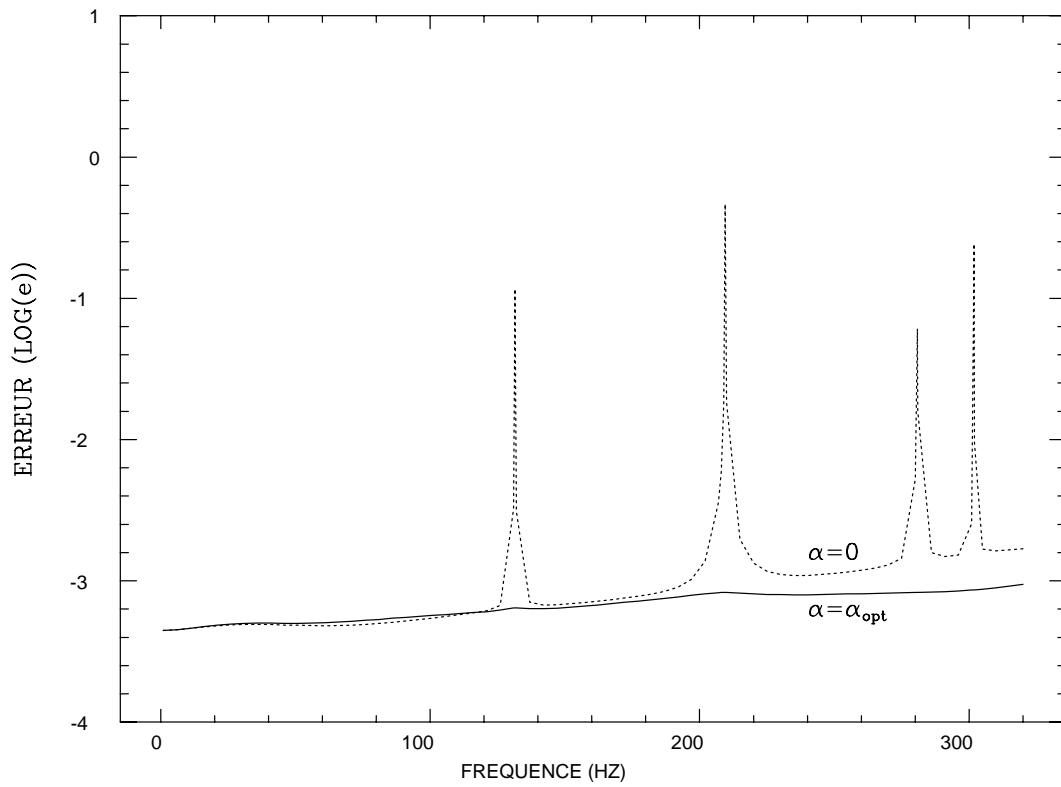


FIG. 3.16 – Variation de l'erreur pour un problème 2D.

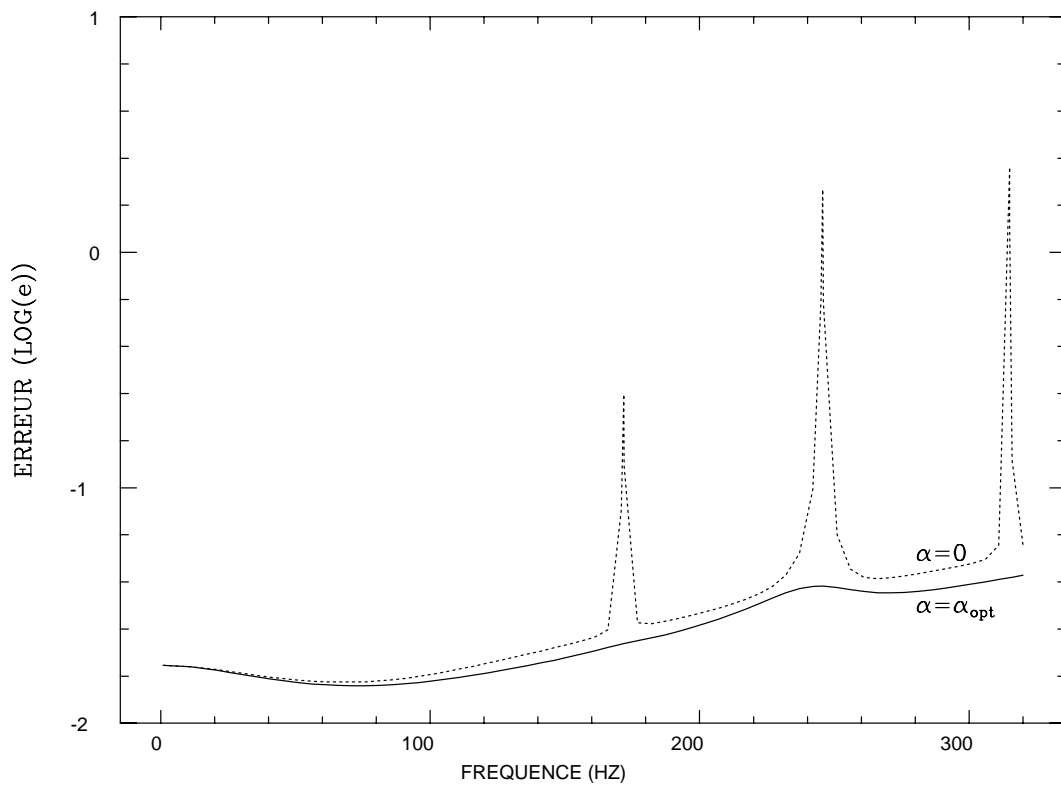


FIG. 3.17 – Variation de l'erreur pour un problème 3D.

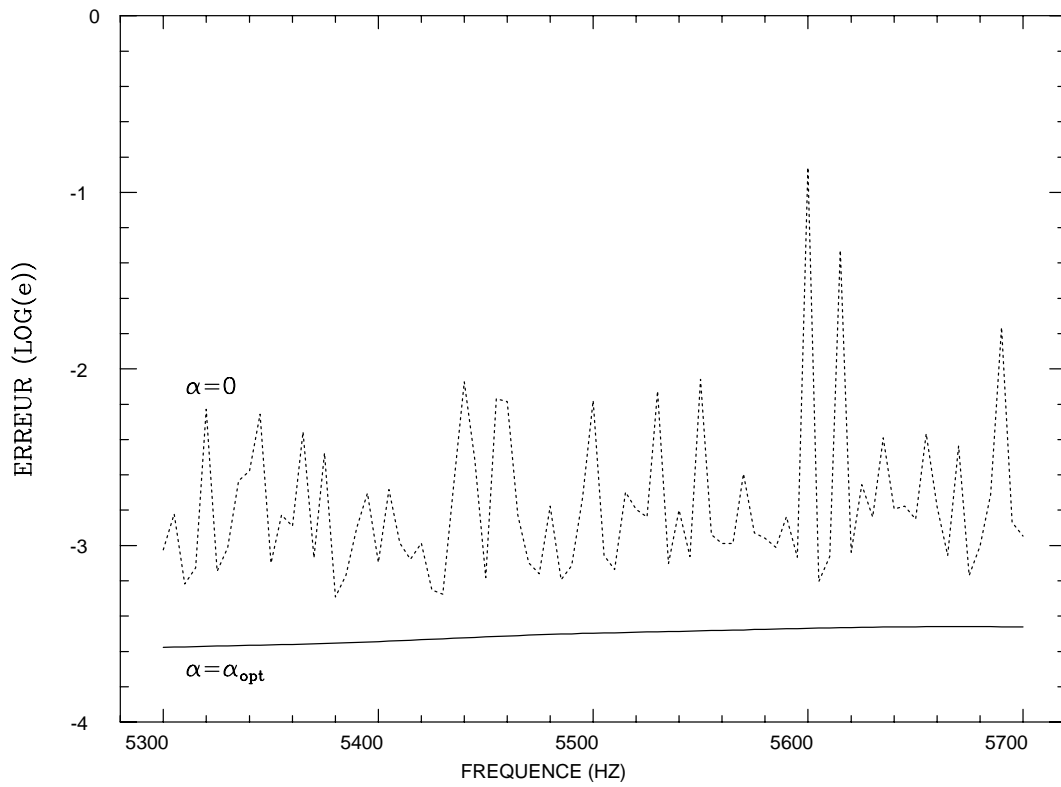


FIG. 3.18 – Variation de l'erreur à haute fréquence.

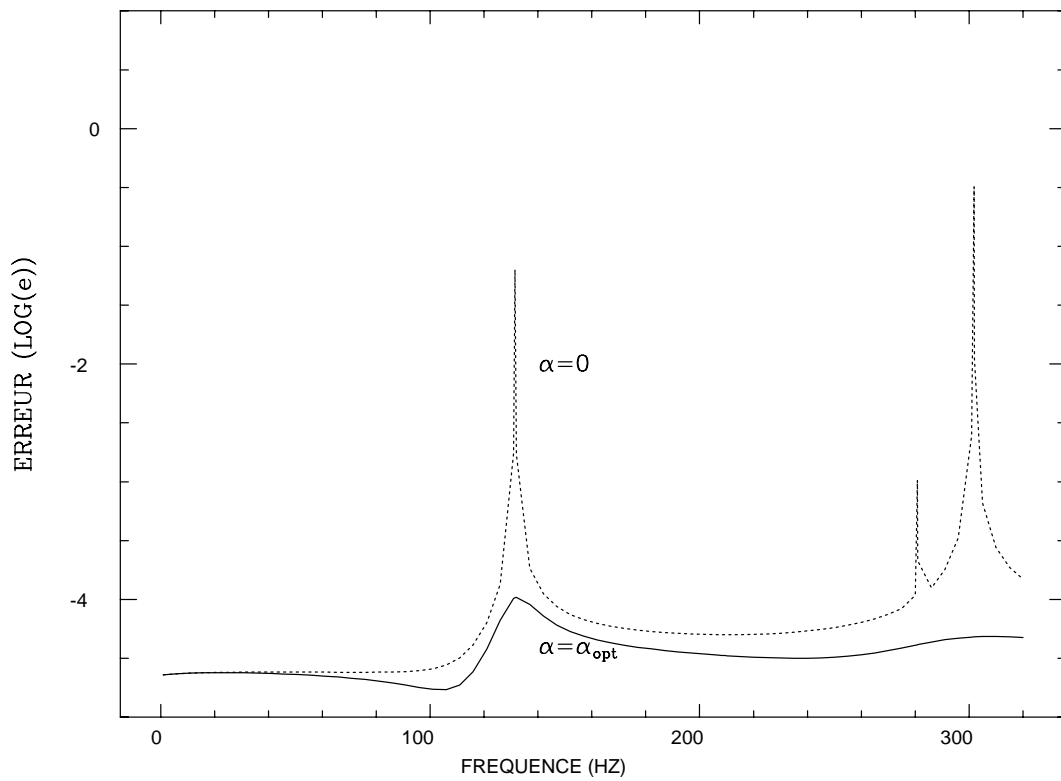


FIG. 3.19 – Variation de l'erreur pour un problème couplé 2D.

$$\begin{aligned}
&= \frac{e^{i\omega r/c}}{4\pi r} \int_{-\infty}^{+\infty} s(t - r/c) e^{i\omega(t-r/c)} dt \\
&= \frac{e^{ikr}}{4\pi r} s(\omega)
\end{aligned} \tag{3.5}$$

où  $s(\omega)$  est la transformée de Fourier de la fonction source  $s(t)$ .

En dimension deux nous avons

$$p_{inc}(r, t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{t-r/c} \frac{s(\tau)}{\sqrt{(\tau - t)^2 - r^2/c^2}} d\tau \tag{3.6}$$

Dans le domaine fréquentiel

$$\begin{aligned}
p_{inc}(r, \omega) &= \int_{-\infty}^{+\infty} p_{inc}(r, t) e^{i\omega t} dt \\
&= \int_{-\infty}^{+\infty} \left[ \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{t-r/c} \frac{s(\tau)}{\sqrt{(\tau - t)^2 - r^2/c^2}} d\tau \right] e^{i\omega t} dt \\
&= \int_{-\infty}^{+\infty} \left[ \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{-r/c} \frac{s(t+u)}{\sqrt{u^2 - r^2/c^2}} du \right] e^{i\omega t} dt \\
&= \frac{i}{4} H_0(kr) s(\omega)
\end{aligned} \tag{3.7}$$

grâce à la relation

$$\int_1^{\infty} \frac{e^{ixt}}{\sqrt{t^2 - 1}} dt = \frac{\pi i}{2} H_0(x) \tag{3.8}$$

Soit  $p_s(\mathbf{x}, \omega)$  la pression totale au point  $\mathbf{x}$  calculée lorsque l'excitation est une source ponctuelle harmonique d'amplitude unité, la transformée de Fourier de la réponse temporelle lorsque l'excitation est  $s(t)$  est donc  $p(\mathbf{x}, \omega) = s(\omega) p_s(\mathbf{x}, \omega)$  et la solution temporelle s'obtient par transformation inverse.

$$p(\mathbf{x}, t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} p(\mathbf{x}, \omega) e^{-i\omega t} d\omega \tag{3.9}$$

Supposons que la source émet pendant l'intervalle  $[0, T]$  et que son spectre est contenu dans  $[-2\pi F_{max}, 2\pi F_{max}]$ . Selon le théorème de Shannon la période d'échantillonnage du signal en temps  $T_e$  doit vérifier

$$F_{max} \leq \frac{1}{2T_e} \tag{3.10}$$

Prenons pour exemple le cas d'un créneau en temps  $s(t)$  de durée  $T$ . La transformée de Fourier vaut

$$s(\omega) = e^{i\omega T/2} T \frac{\sin(\omega T/2)}{\omega T/2} \tag{3.11}$$

Nous avons la relation

$$\int_0^{\alpha} \frac{\sin^2 x}{x^2} dx \sim \frac{\pi}{2} - \frac{1}{2\alpha} \quad \text{quand } \alpha \rightarrow +\infty \tag{3.12}$$

ce qui conduit à

$$\left(\int_{-2\pi F}^{2\pi F} |s(\omega)|^2 d\omega\right)^{1/2} \sim \sqrt{2\pi T} \left(1 - \frac{1}{2\pi^2 FT}\right) \quad (3.13)$$

Nous faisons donc une erreur de moins de 1% sur la norme  $L^2$  de  $s(\omega)$  en prenant la restriction à l'intervalle  $[-2\pi F_{max}, 2\pi F_{max}]$  avec  $F_{max} = \frac{100}{2\pi^2 T}$ . On en déduit la période d'échantillonnage nécessaire pour le signal  $s(t)$

$$T_e = \frac{1}{2F_{max}} = \frac{\pi^2 T}{100} \quad (3.14)$$

Supposons que le signal perçu au point d'observation soit nul au delà d'un temps  $T_0$ . Pour que le signal en fréquence soit bien échantillonné il faut

$$\Delta f \leq \frac{1}{T_0} \quad (3.15)$$

Le nombre de points requis pour les transformées de Fourier discrètes doit satisfaire

$$\begin{aligned} 2TF_{max} &\leq N \\ 2T_0F_{max} &\leq N \end{aligned} \quad (3.16)$$

en général  $T_0 \geq T$  donc  $N \geq 2T_0F_{max}$ .

Pour tester la méthode de calcul nous avons résolu le problème bidimensionnel de la diffusion des ondes acoustiques par un cylindre rigide de rayon unité centré à l'origine. Une source ponctuelle est placée en  $(-2, 0)$  et le point d'observation se situe en  $(2, 0)$ . Dans les exemples suivants la source émet pendant la durée  $T_s = 0.05s$  un signal unité et le temps d'observation est  $T_o = 5.s$ . Un calcul numérique a été effectué avec une résolution en fréquence de 50.Hz dans la bande  $[125, 2000.Hz]$ . Dans l'intervalle  $[0, 100.Hz]$  la résolution est poussée à 10.Hz avec un raffinement autour de 0 pour capter la forme de la singularité logarithmique à l'origine. Le calcul fournit la pression incidente et surtout la pression totale à ces fréquences. La figure 3.21 présente la pression incidente en l'absence de l'obstacle obtenue par un calcul analytique en temps à l'aide de la formule 3.6 et par une transformation de Fourier de la pression incidente exprimée dans le domaine fréquentiel avec la résolution précédente en fréquence (et la correction due à la distance explicitée ci-dessous). On constate un bon accord entre les deux courbes ce qui montre que le nombre de points en fréquence est correct pour cet exemple. Le temps nécessaire au signal pour atteindre le point d'observation est  $t = D/c = 1.16 \cdot 10^{-2}s$  ce que l'on retrouve sur la courbe.

Pour la pression diffusée la réponse harmonique  $p_s(\mathbf{x}, \omega)$  est comparée à la solution analytique obtenue par un développement en série. La figure 3.22 compare les modules des pressions calculées numériquement et analytiquement. La pression numérique est interpolée entre les points de calcul à l'aide de splines cubiques. On constate qu'au delà de 100.Hz, c'est à dire quand la résolution en fréquence devient plus faible, des erreurs importantes sont introduites. La figure 3.23 qui compare les parties réelles montre bien l'origine du phénomène qui est une trop faible résolution pour bien représenter les variations de la pression en fonction de la fréquence. La comparaison des parties imaginaires conduirait au même résultat.

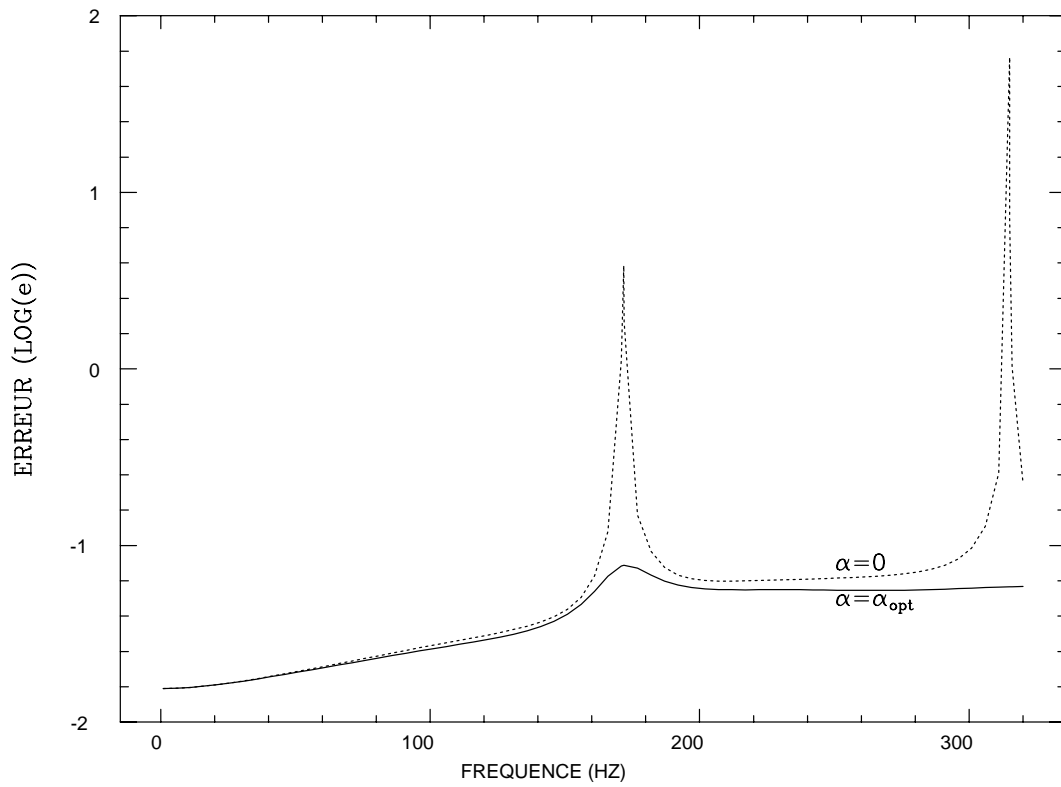


FIG. 3.20 – Variation de l'erreur pour un problème couplé 3D.

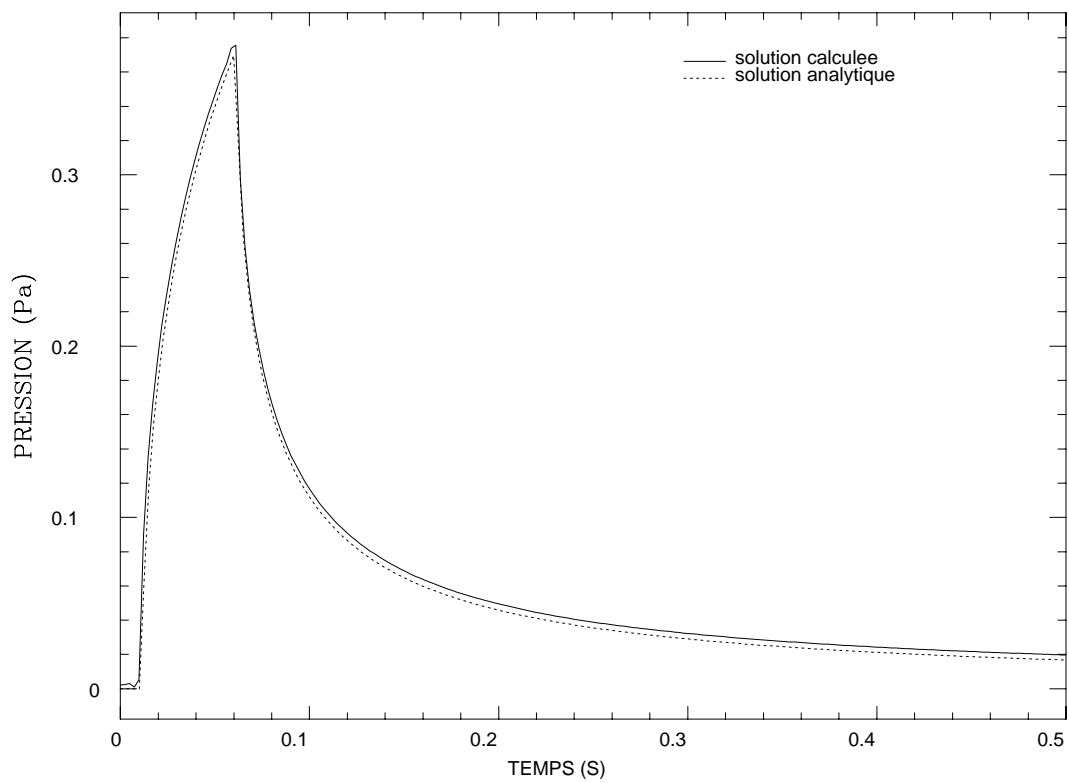


FIG. 3.21 – Champ de pression incident au point d'observation.

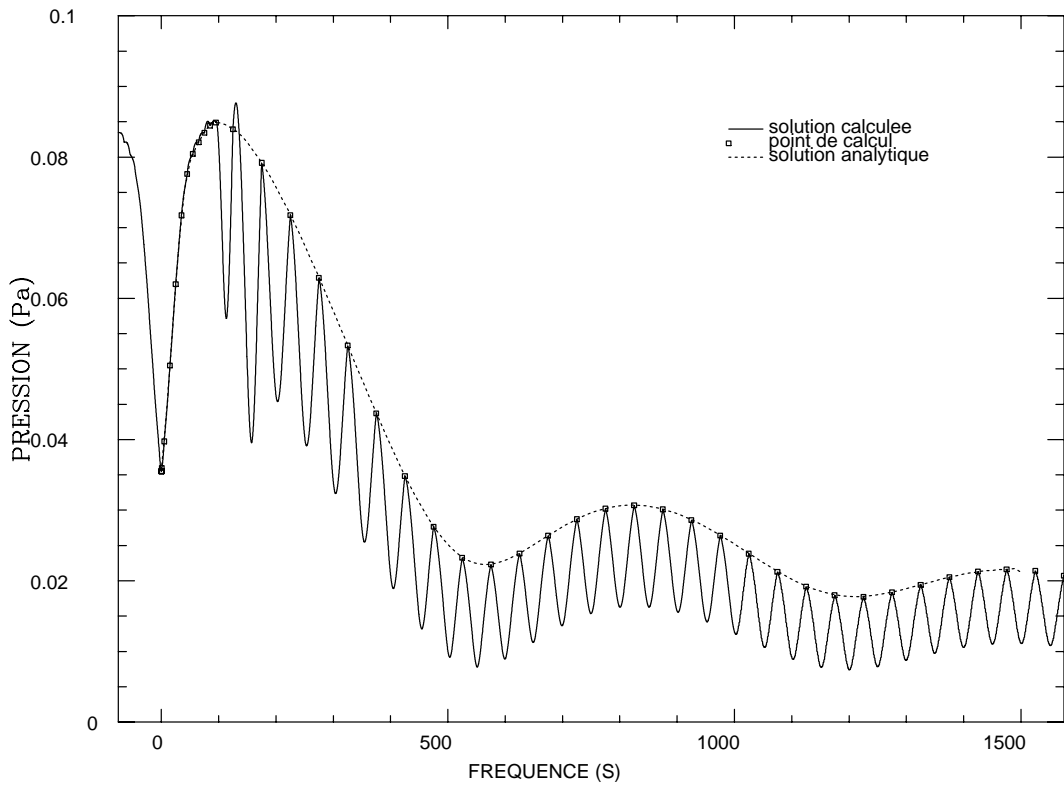


FIG. 3.22 – *Module de la pression diffusée.*

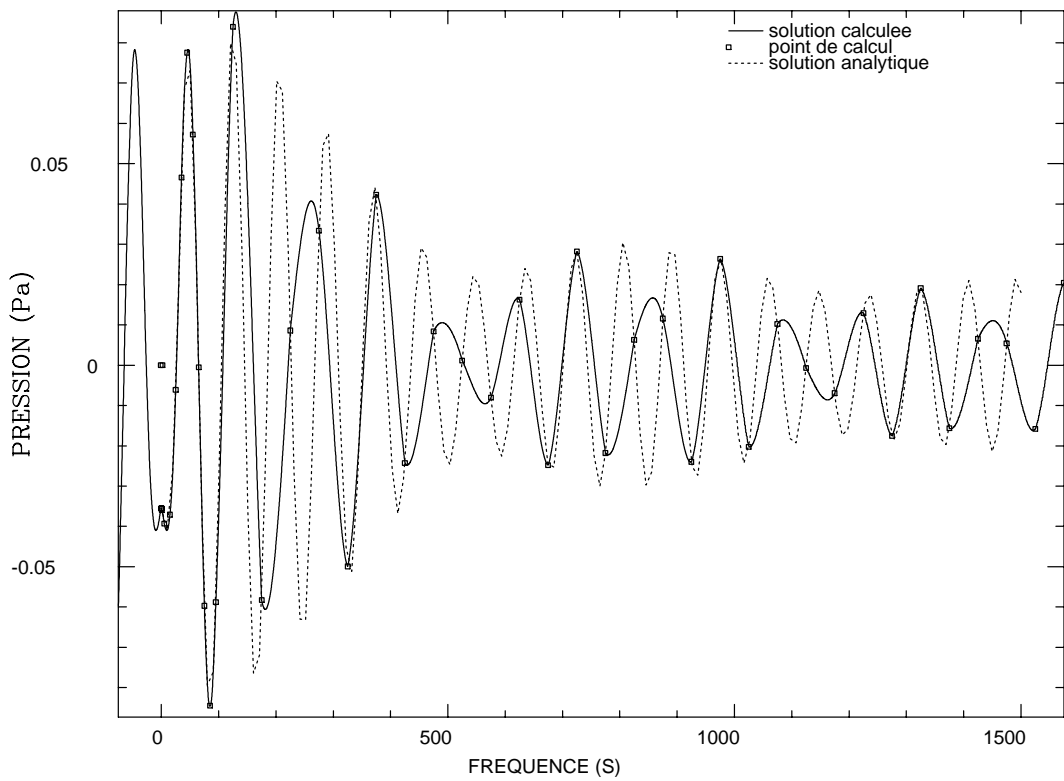


FIG. 3.23 – *Partie réelle de la pression diffusée.*

Pour remédier à ce problème nous pourrions augmenter le nombre de points en fréquence ce qui conduirait à un accroissement sensible du temps de calcul. Les résultats du chapitre 3 montre cependant qu'à grande distance la pression diffusée se comporte en  $e^{ikr}$  multipliée par une fonction dépendant du point et de la fréquence. Nous ferons l'hypothèse que cette fonction varie lentement en fonction de la fréquence par rapport au terme  $e^{ikr}$ . Le calcul consiste maintenant à multiplier la solution obtenue par  $e^{-ikr}$ , à réaliser l'interpolation en fréquence par des splines puis à multiplier le résultat obtenu par  $e^{ikr}$ . La distance  $r$  retenue est prise entre la source et le point d'observation. Cette démarche a été utilisée et conduit à la courbe 3.24 montrant la variation du module de la pression et à la courbe 3.25 qui montre la partie réelle. On constate une très nette amélioration du résultat.

Une transformation de Fourier inverse de  $p(\mathbf{x}, \omega)$  conduit aux courbes courbes 3.26 et 3.27 qui montrent respectivement les variations temporelles des pressions diffusée et totale. Dans cet exemple la pression incidente est dominante. Sa lente décroissance en fonction du temps provient de la nature particulière des solutions de l'équation des ondes en dimension deux où un signal émis en champ libre à un instant donné continuera à être perceptible à tout instant futur alors qu'en dimension trois un signal émis en champ libre n'est perceptible, en un point donné, que durant un intervalle de temps égal à la durée d'émission.

La figure 3.28 représente le champ de pression derrière un mur bidimensionnel de hauteur 2.m et d'épaisseur 2.cm dont la base est située à l'origine des coordonnées. Une source ponctuelle est placée en (2,0.5) et les champs sont calculés au point (-2,0.5) situé derrière le mur. La source émet un signal unité durant 0.007s. Le sol est supposé parfaitement réfléchissant. La comparaison entre le champ incident et le champ total montre un effet d'atténuation du à l'obstacle. La pression reste nulle jusqu'à l'instant  $t = 1.46 \cdot 10^{-2}s$  qui correspond au plus court chemin de la source au point d'observation.

Un exemple a été traité avec un mur tridimensionnel de hauteur 2.m et de longueur infinie. La source est située en (2,0,0.5) et le sol est réfléchissant. Le calcul est effectué par la méthode décrite dans le chapitre suivant. Le point d'observation est en (-2,0,0.5) derrière le mur. La figure 3.29 présente la pression incidente et la pression totale calculées par la même méthode numérique. On peut vérifier la valeur de la pression incidente soit  $p = 3.97 \cdot 10^{-2}Pa$  donnée par la formule 3.4. Le phénomène de Gibbs perturbe légèrement le résultat à ce niveau de précision. On observe qu'en dimension trois la décroissance de la pression est rapide après la fin d'émission de la source.

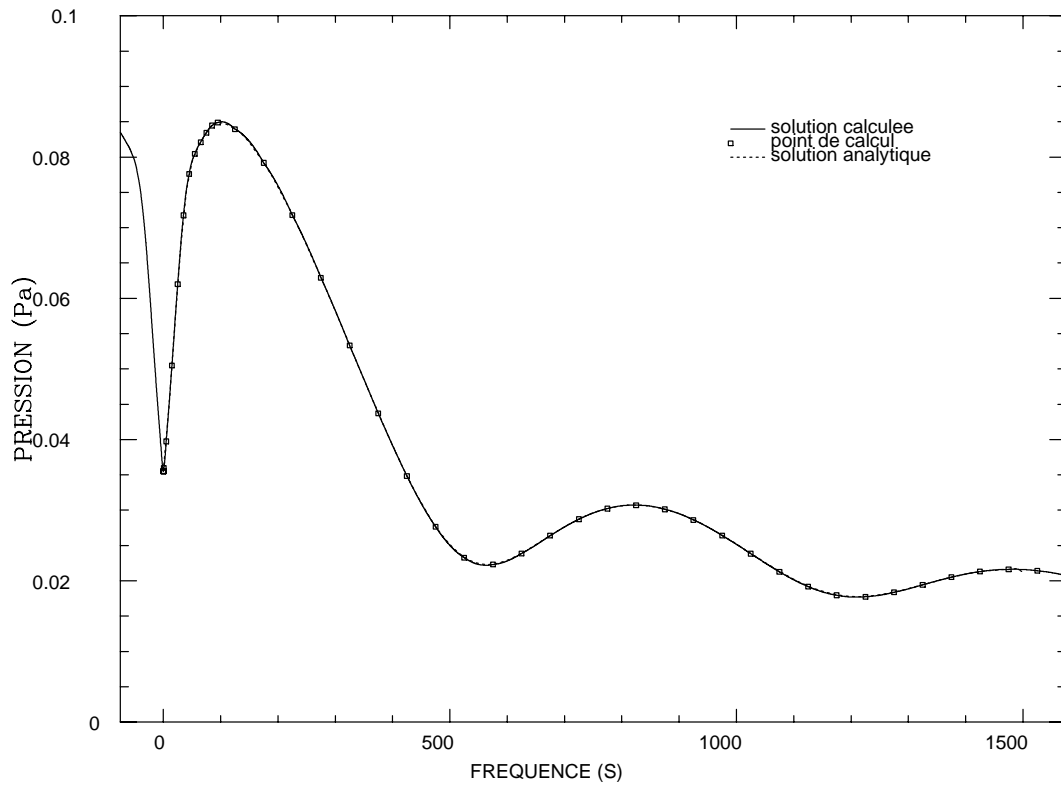


FIG. 3.24 – *Module de la pression diffusée.*

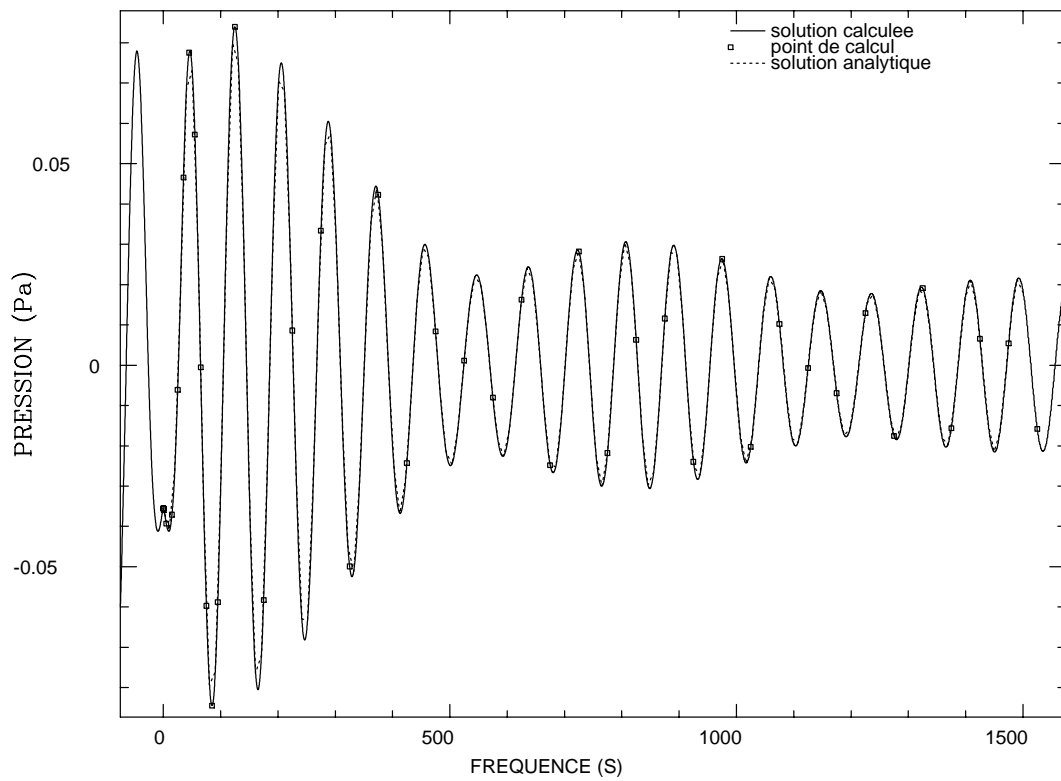


FIG. 3.25 – *Partie réelle de la pression diffusée.*

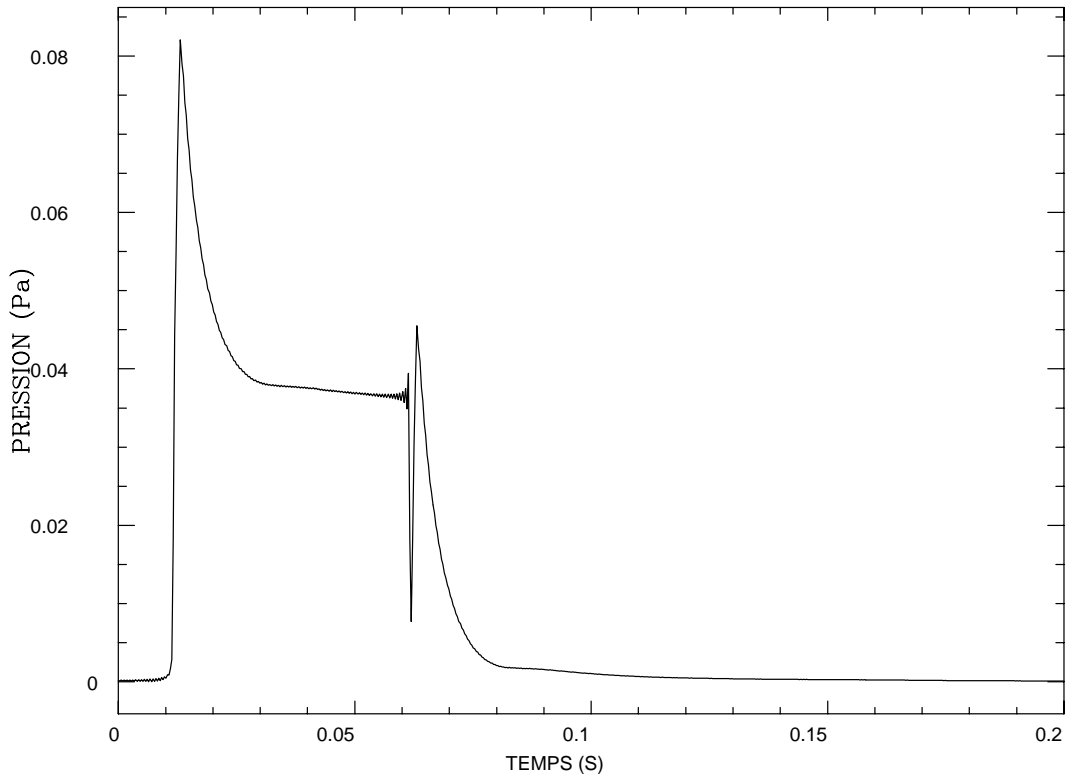


FIG. 3.26 – Evolution de la pression diffusée en fonction de temps pour un point derrière le cylindre.

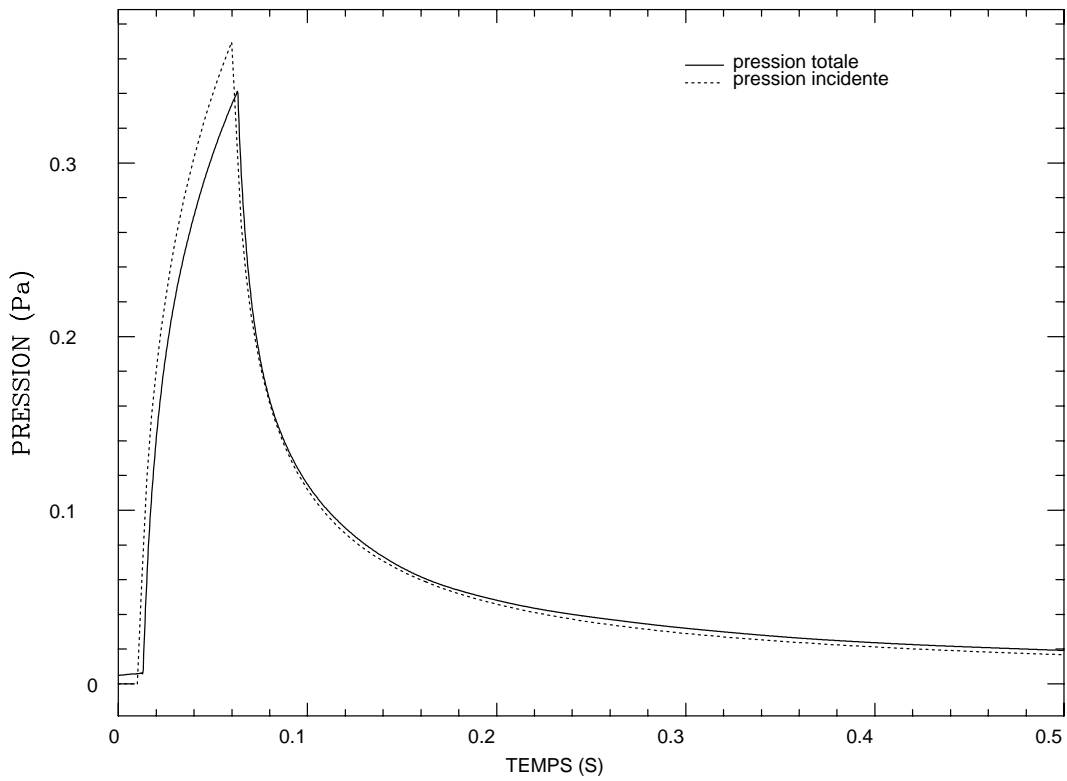


FIG. 3.27 – Evolution de la pression totale en fonction de temps pour un point derrière le cylindre.

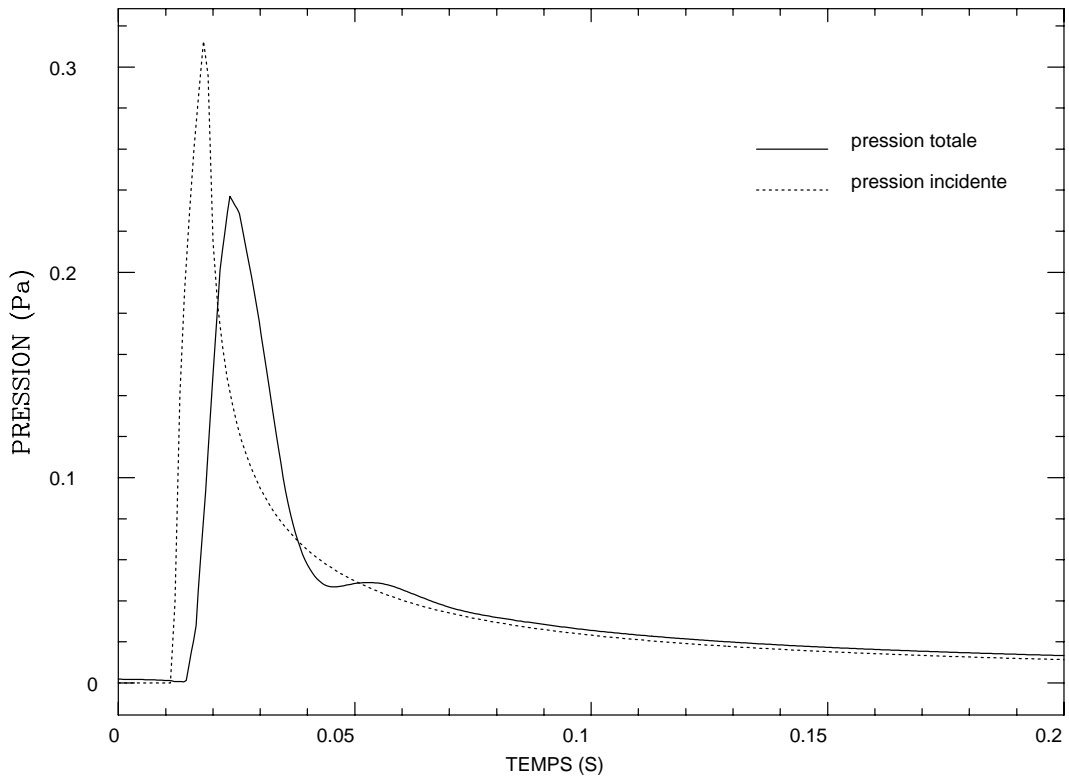


FIG. 3.28 – Evolution de la pression derrière un mur bidimensionnel.

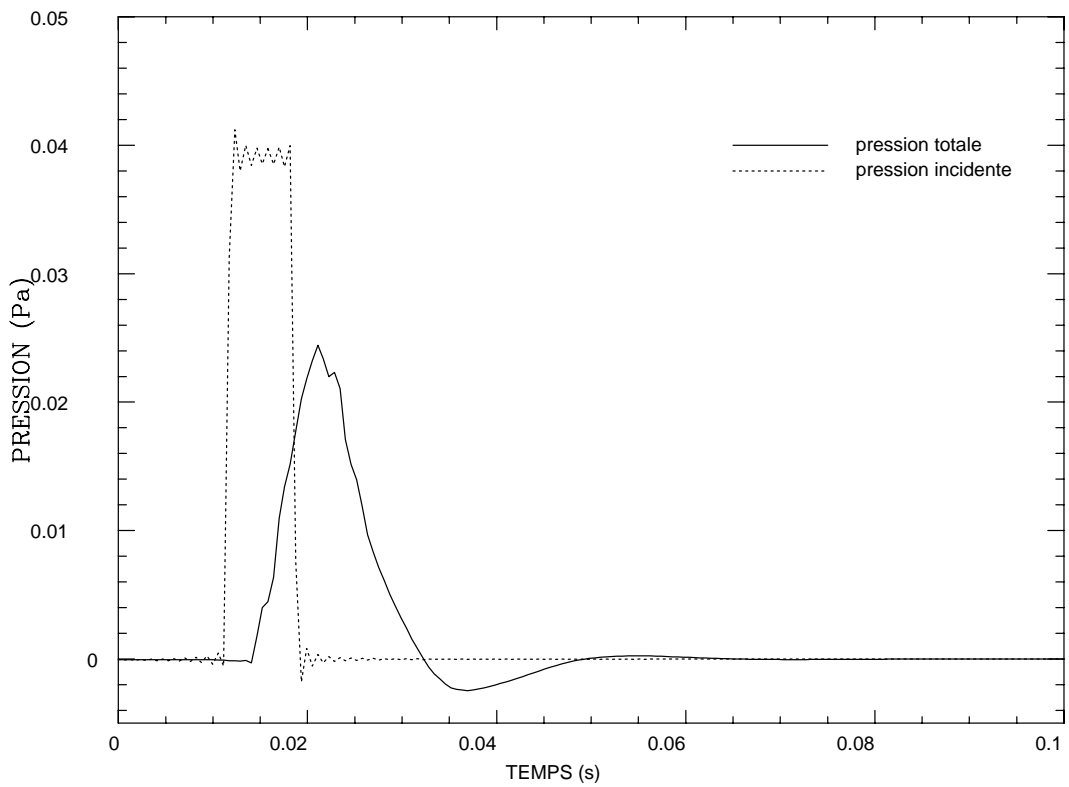


FIG. 3.29 – Evolution de la pression derrière un mur tridimensionnel.



# Chapitre 4

## Pression autour d'un mur de section constante

### 4.1 Introduction

Nous nous proposons d'utiliser les résultats précédents pour calculer l'atténuation apportée par un mur antibruit soumis à un champ de pression incident. Classiquement l'atténuation est calculée par des méthodes semi-analytiques dérivées des solutions de Sommerfeld et Macdonald qui donnent la diffraction d'une onde plane ou cylindrique par un demi-plan infini, voir Maekawa 1965 [160]. Pierce 1974 [204], Jonasson 1972 [129] et Tolstoy 1989 [251] ont traité les cas d'un angle entre deux plans et d'une ligne polygonale 2D. On obtient ainsi des estimations des atténuations pour ces géométries simples. Elles ont été vérifiées expérimentalement avec un accord correct par plusieurs auteurs dont Isei 1980 [124] et Rasmussen 1985 [208]. La théorie de la diffraction de Keller, appliquée au cas d'un mur antibruit par Kurze 1971 et 1974 [148] [147], donne une estimation du champ de pression dans la zone d'ombre à partir de la valeur du champ diffracté par le sommet du mur. Elle peut se généraliser pour des géométries plus complexes. Les erreurs introduites par ces méthodes approchées sont cependant difficilement quantifiables notamment pour les basses fréquences pour lesquelles les calculs de diffraction ne sont pas adaptés. Lorsque la géométrie est complexe, lorsque l'on désire des résultats précis ou lorsque le mur est revêtu d'absorbants les méthodes numériques deviennent nécessaires. Elles sont aussi utiles pour des basses fréquences, lorsque la longueur d'onde devient du même ordre de grandeur que la dimension du mur. Kawai 1990 [133], Sez nec 1980 [228], Hothersall 1991 [116] [117] et Antes 1991 [7] ont calculé par équations intégrales l'atténuation apportée par des murs de formes diverses. Les modélisations sont essentiellement bidimensionnelles avec une excitation due à une ligne de sources. Antes et Kawai ont calculé des murs tridimensionnels de longueurs finies avec une excitation par une source ponctuelle en maillant le mur à l'aide d'éléments surfaciques. En raison du volume de calcul ces modélisations sont limitées à des murs de longueurs raisonnables mais surtout aux domaines des basses fréquences (quelques centaines de Hertz au mieux) avec des sources suffisamment éloignées du mur. Autrement le nombre de mailles nécessaire est tel que le calcul devient irréalisable. Numériquement il est donc possible par ces méthodes de calculer le comportement en présence d'une ligne de source ou d'une source ponctuelle à basse fré-

quence. Les expériences sont cependant faites le plus souvent avec des sources ponctuelles et les bruits réels, comme ceux produits par des trains ou des files de voitures, sont mieux représentés par des lignes de sources incohérentes que les modélisations numériques ci-dessus ne peuvent calculer. Seules les méthodes semi-analytiques fournissent des résultats dans ces situations.

Dans ce chapitre nous développerons une méthode qui permet dans le cas d'un mur infiniment long et de section constante, d'obtenir son comportement tridimensionnel, c'est à dire le champ de pression lorsque l'excitation est une source ponctuelle ou une ligne de sources incohérentes à partir de la résolution de problèmes bidimensionnels uniquement. Nous montrerons en particulier que la courbe d'atténuation du comportement 3D s'obtient facilement à partir de la connaissance du comportement en fréquence de la solutions 2D avec un faible sur-coût en calcul.

### 4.1.1 Principe

On se propose de calculer la solution d'un problème de diffraction par une source ponctuelle en dimension 3 autour d'un objet rigide présentant une symétrie de translation dans une direction ( $y$ ) comme le mur infini représenté sur la figure 4.1.

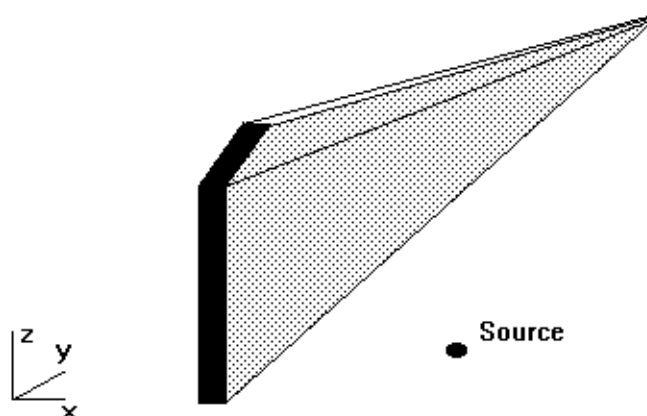


FIG. 4.1 – Structure présentant une symétrie de translation.

Le point de départ consiste à remarquer que le champ d'une source ponctuelle 3D peut se décomposer sur les champs 2D par la formule (Gradshteyn 1980 [101])

$$\frac{e^{ik\sqrt{r^2+y^2}}}{4\pi\sqrt{r^2+y^2}} = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{i\alpha y} G(r, k^2 - \alpha^2) d\alpha \quad (4.1)$$

avec

$$G(r, \mu) = \begin{cases} \frac{i}{4} H_0(r\sqrt{\mu}) & \text{si } \mu > 0 \\ \frac{1}{2\pi} K_0(r\sqrt{|\mu|}) & \text{si } \mu < 0 \end{cases} \quad (4.2)$$

où  $K_0$  est la fonction de Bessel modifiée d'ordre 0 et  $r = \sqrt{x^2 + z^2} > 0$  est la distance radiale dans le plan  $(x,z)$  avec une origine prise au point occupé par la source.

Soit  $q(x, k^2 - \alpha^2, z) = q_{inc}(x, k^2 - \alpha^2, z) + q_{dif}(x, k^2 - \alpha^2, z)$ , la solution du problème 2D suivant

$$\begin{aligned}\Delta q_{dif} + (k^2 - \alpha^2)q_{dif} &= 0 \text{ dans } \Omega_2 \\ \frac{\partial q_{dif}}{\partial n} + \frac{\partial q_{inc}}{\partial n} &= 0 \text{ sur } \partial\Omega_2 \\ q_{inc}(x, k^2 - \alpha^2, z) &= G(r, k^2 - \alpha^2)\end{aligned}\quad (4.3)$$

où  $\Omega_2$  est le domaine 2D extérieur à l'objet (section  $y=0$ ). Dans ce problème  $\alpha$  est un paramètre et  $(x,z)$  sont les variables d'espace.

La solution du problème tridimensionnel,

$$\begin{aligned}\Delta q_{dif} + k^2 q_{dif} &= 0 \text{ dans } \Omega_3 \\ \frac{\partial q_{dif}}{\partial n} + \frac{\partial q_{inc}}{\partial n} &= 0 \text{ sur } \partial\Omega_3 \\ q_{inc}(x, y, z) &= \frac{e^{ikr}}{4\pi r}\end{aligned}\quad (4.4)$$

où  $\Omega_3$  est le domaine 3D extérieur à l'objet, est alors

$$p(x, y, z) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{i\alpha y} q(x, k^2 - \alpha^2, z) d\alpha \quad (4.5)$$

Pour  $k < |\alpha|$  la solution  $q_{inc}(x, k^2 - \alpha^2, z)$  est exponentiellement décroissante car  $K_0(z) \sim \sqrt{\frac{\pi}{2z}} e^{-z}$  pour  $z \rightarrow +\infty$  et lorsque  $(kr \gg 1)$  on peut faire l'approximation

$$P(x, y, z) \simeq \frac{1}{2\pi} \int_{-2k}^{+2k} e^{i\alpha y} q(x, k^2 - \alpha^2, z) d\alpha = \frac{1}{\pi} \int_0^{+2k} \cos(\alpha y) q(x, k^2 - \alpha^2, z) d\alpha \quad (4.6)$$

La solution du problème tridimensionnel s'obtient ainsi par une transformée de Fourier de problèmes bidimensionnels dont la résolution est bien moins coûteuse. Un balayage en fréquence d'un problème 3D s'obtient à partir d'un balayage en fréquence de problèmes 2D dans les domaines réels et imaginaires purs. En particulier il est alors possible, comme dans la section précédente, d'en déduire le comportement en temps à l'aide d'une seconde transformation de Fourier.

## 4.2 Atténuation

Nous définirons l'atténuation comme le rapport entre le champ de pression calculé avec le mur et celui en champ libre selon la formule

$$At = 20. \log\left(\frac{|p_{cal}|}{|p_{lib}|}\right) \quad (4.7)$$

Cette formule est directement applicable pour une source ponctuelle ou une ligne de sources cohérentes pour lesquelles  $|p_{lib}| = \frac{1}{4\pi r}$  ou  $|p_{lib}| = \frac{1}{4}|H_0(kr)|$ .

Une ligne de sources incohérentes est modélisée par des sources ponctuelles tridimensionnelles décorréliées entre elles. Une source alignée suivant l'axe  $y$  de longueur  $dl$  à la position  $y = l$  émet un signal, en champ libre, de pression carrée

$$d(|p_{lib}|^2) = \frac{1}{(4\pi)^2(r^2 + l^2)}\mu(l)dl \quad (4.8)$$

au point de réception situé à la position  $y=0$  et à la distance radiale  $r = \sqrt{x^2 + z^2}$ .

La pression engendrée par toute la ligne est donc

$$|p_{lib}|^2 = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{(4\pi)^2(r^2 + l^2)}\mu(l)dl \quad (4.9)$$

Si la densité  $\mu$  est constante

$$|p_{lib}|^2 = \frac{\pi\mu}{(4\pi)^2 r} = \frac{\mu}{16\pi r} \quad (4.10)$$

Le champ de pression total, en présence du mur, du à une source ponctuelle unité en  $y = 0$  est

$$P(x, y, z) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{i\alpha y} q(x, k^2 - \alpha^2, z) d\alpha \quad (4.11)$$

pour une source en  $y = y_0$  d'amplitude  $\mu(y_0)$

$$d(|p|^2)(x, y, z) = |P(x, y - y_0, z)|^2 \mu(y_0) dy_0 \quad (4.12)$$

La ligne de source crée donc le champ

$$|p|^2(x, y, z) = \int_{-\infty}^{+\infty} |P(x, y - y_0, z)|^2 \mu(y_0) dy_0 \quad (4.13)$$

Si l'amplitude est constante

$$|p|^2(x, y, z) = \mu \int_{-\infty}^{+\infty} |P(x, y_0, z)|^2 dy_0 \quad (4.14)$$

Le rapport avec la pression émise en champ libre (formule 4.10) donne l'atténuation apportée par le mur en présence d'une ligne de sources incohérentes suivant la formule 4.7.

## 4.3 Applications

### 4.3.1 Comparaison avec une solution semi-analytique

Appliquons les résultats précédents au calcul du champ de pression autour d'un mur droit et mince (1cm) de hauteur 2m. Une source est placée en S(2,0,0.5) et l'observateur est situé en R(-2,0,0.5). Le champ calculé est comparé à la solution approchée déduite de la méthode de Sommerfeld-Macdonalds qui permet de calculer le champ diffracté par un demi-plan. Pour

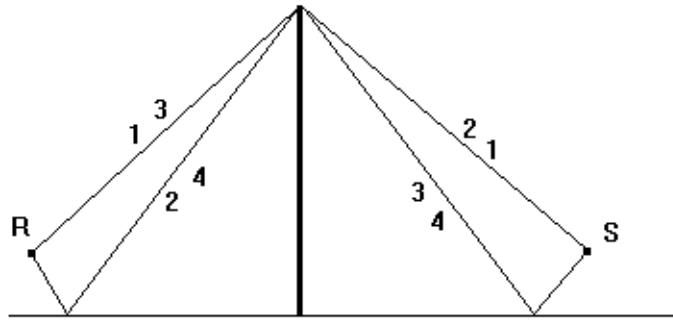


FIG. 4.2 – Contributions au champ de pression en R.

tenir compte des réflexions sur le sol il faut sommer la contribution de 4 chemins acoustiques comme indiqué sur la figure 4.2.

Le tableau 4.1 compare les valeurs obtenues à 500 et 1000Hz. Les valeurs sont relativement proches. Les différences s'expliquent par le caractère approché du champ sommé sur les 4 chemins et par l'épaisseur non nulle du mur.

fréquence	P calculé	$ P $	P Sommerfeld	$ P $
500 Hz	$-6.49 \cdot 10^{-3} + 3.15 \cdot 10^{-3}i$	$7.22 \cdot 10^{-3}$	$-6.63 \cdot 10^{-3} + 3.94 \cdot 10^{-3}i$	$7.71 \cdot 10^{-3}$
1000 Hz	$-3.7 \cdot 10^{-4} - 4.95 \cdot 10^{-3}i$	$4.96 \cdot 10^{-3}$	$-1.24 \cdot 10^{-3} - 5.25 \cdot 10^{-3}i$	$5.39 \cdot 10^{-3}$

TAB. 4.1 –

### 4.3.2 Atténuation suivant le type de source

Nous avons calculé l'atténuation pour les 4 sections représentées sur les figures 4.3 à 4.6 avec une source en  $(2,0,0.5)$  qui peut être une ligne de source cohérente ou incohérente ou une source ponctuelle 3D. Le point d'observation en  $(-2,0,0.5)$ . L'épaisseur  $e$  est 10cm.  $H$  désigne la hauteur totale et vaut 2m pour les 4 exemples. Pour le cas D,  $L$  vaut 50cm.

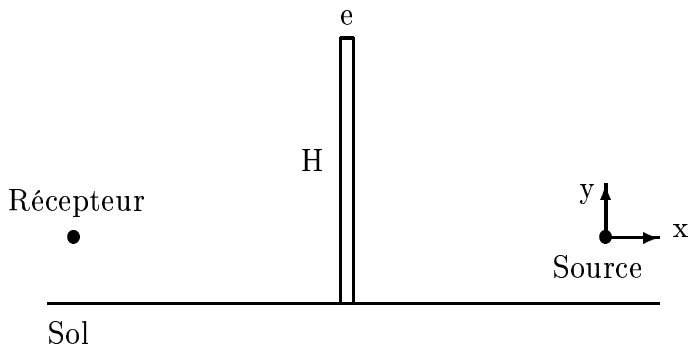


FIG. 4.3 – *Mur droit. Cas A.*

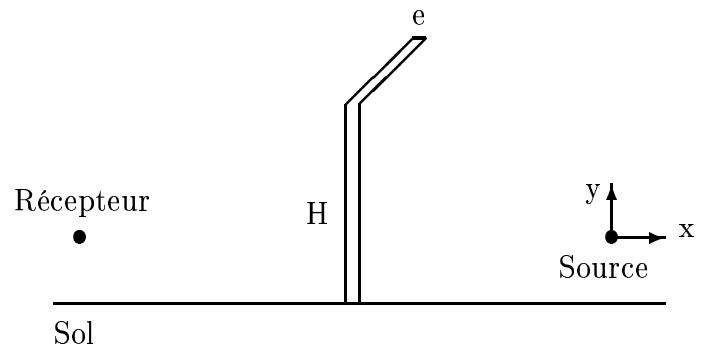


FIG. 4.5 – *Mur à sommet incliné. Cas C.*

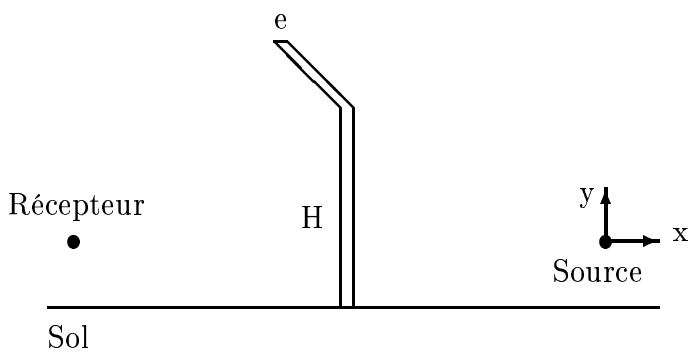


FIG. 4.4 – *Mur à sommet incliné. Cas B.*

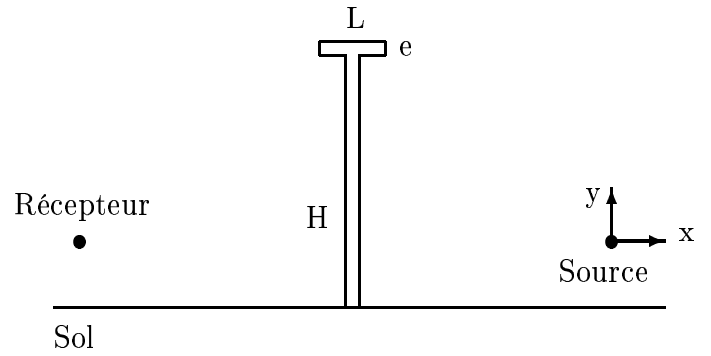


FIG. 4.6 – *Mur à sommet en T. Cas D.*

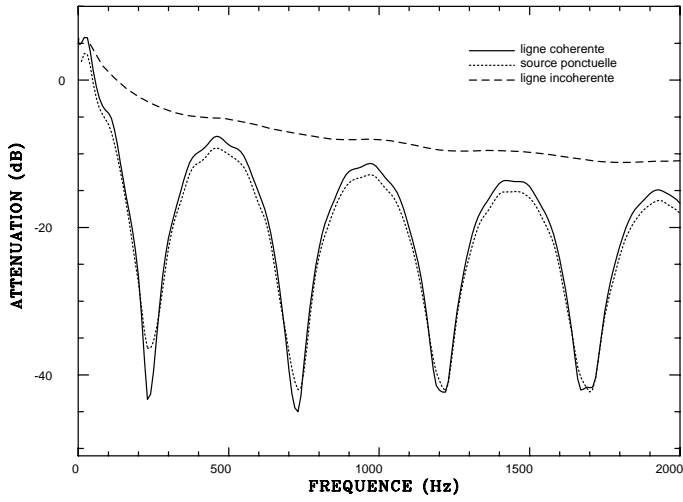


FIG. 4.7 – Atténuation. Cas A.

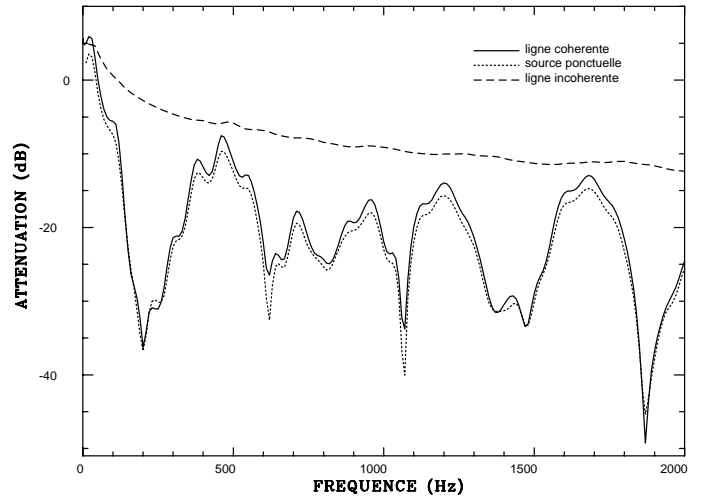


FIG. 4.9 – Atténuation. Cas C.

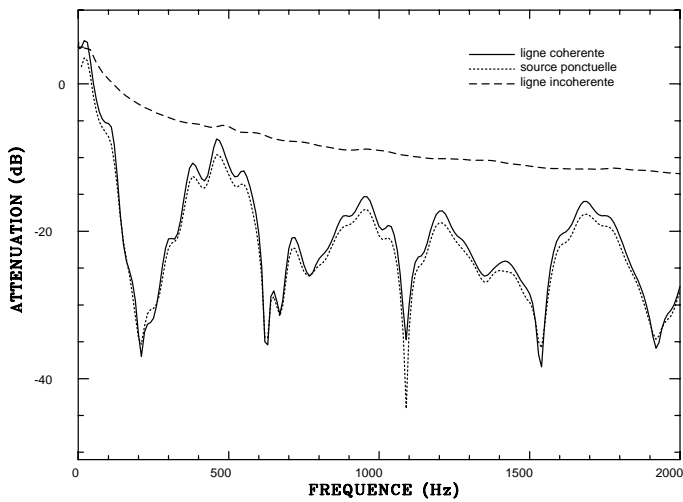


FIG. 4.8 – Atténuation. Cas B.

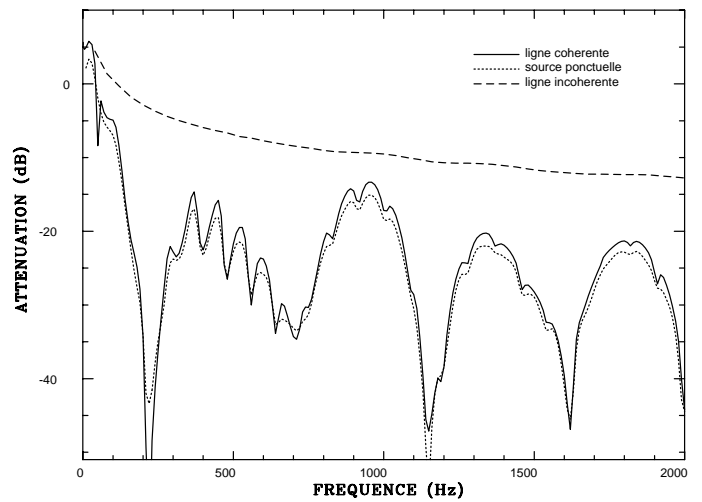


FIG. 4.10 – Atténuation. Cas D.

Nous pouvons constater sur les figures 4.7 à 4.10 que les atténuations pour une ligne de source cohérente ou une source ponctuelle 3D sont quasiment identiques. Le comportement en présence d'une ligne de sources incohérentes est par contre nettement différent et montre une atténuation s'amplifiant en fonction de la fréquence avec une valeur moyenne plus faible que pour une source ponctuelle. Nous n'obtenons pas de phénomène d'interférence dans ce cas.

La figure 4.11 compare les atténuations pour une ligne de sources incohérentes en fonction de la forme du haut du mur. Les différences sont assez faibles mais la forme en T montre cependant une amélioration de quelques dB.

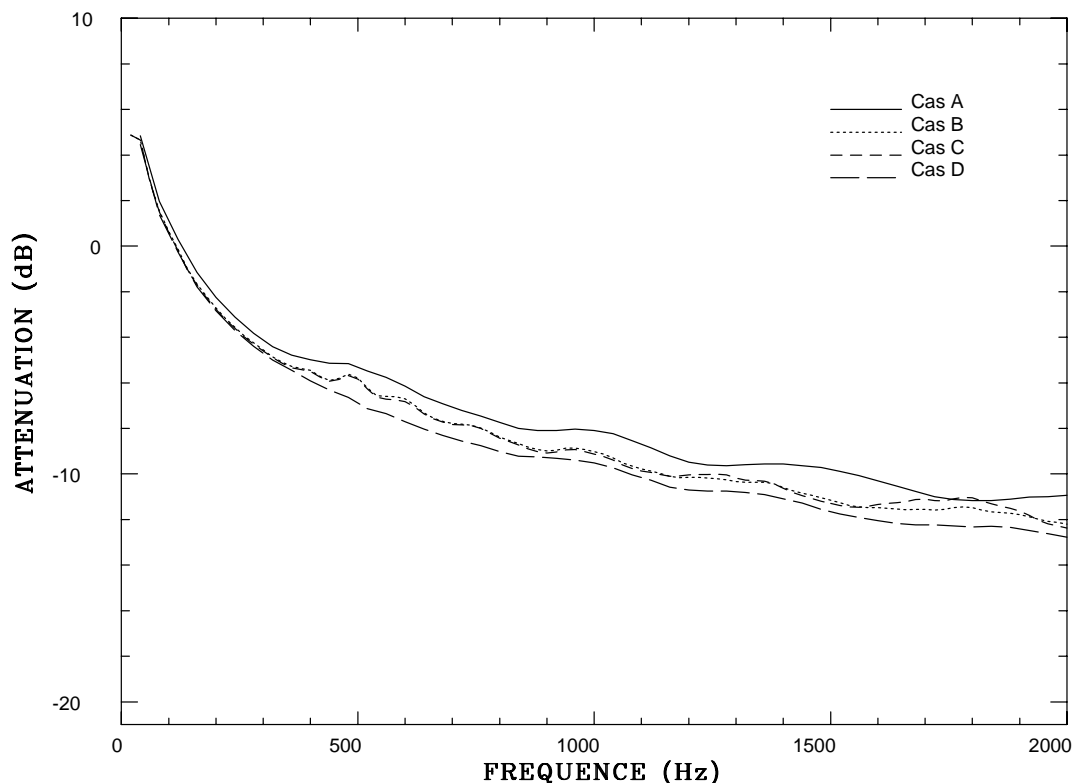


FIG. 4.11 – Influence de la forme du haut du mur sur l'atténuation.

## 4.4 Déplacement le long d'un mur

### 4.4.1 Calcul

Nous combinons les résultats des sections précédentes pour calculer les variations temporelles du champ de pression créé par un mobile se déplaçant le long d'un mur infini rigide. La pression vérifie

$$\Delta P - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 P}{\partial t^2} = -s(t)\delta(\mathbf{x} - \mathbf{X}(t)) \quad (4.15)$$

si le mobile émet un signal d'amplitude  $s(t)$  à la position  $\mathbf{X}(t)$  au temps  $t$ . Nous supposons que la source se déplace parallèlement à  $y$ . Soit  $p$  la transformée de Fourier de  $P$  suivant  $y$

et t. Nous avons

$$\begin{aligned} P(x, y, z, t) &= \frac{1}{(2\pi)^2} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} p(x, \alpha, z, \omega) e^{i\alpha y} e^{-i\omega t} d\alpha d\omega \\ p(x, \alpha, z, \omega) &= \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} P(x, y, z, t) e^{-i\alpha y} e^{i\omega t} dy dt \end{aligned} \quad (4.16)$$

p vérifie l'équation

$$\begin{aligned} \Delta p - \alpha^2 p + k^2 p &= - \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} s(t) \delta(\mathbf{x} - \mathbf{X}(t)) e^{-i\alpha y} e^{i\omega t} dy dt \\ &= - \left( \int_{-\infty}^{+\infty} s(t) e^{-i\alpha Y(t)} e^{i\omega t} dt \right) \delta(x - X) \delta(z - Z) \\ &= -S(\alpha, \omega) \delta(x - X) \delta(z - Z) \end{aligned} \quad (4.17)$$

On a alors

$$p(x, \alpha, z, \omega) = S(\alpha, \omega) q(x, k^2 - \alpha^2, z) \quad (4.18)$$

et le champ de pression est donné par

$$P(x, y, z, t) = \frac{1}{(2\pi)^2} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} S(\alpha, \omega) q(x, k^2 - \alpha^2, z) e^{i\alpha y} e^{-i\omega t} d\alpha d\omega \quad (4.19)$$

$$S(\alpha, \omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} s(t) e^{-i\alpha Y(t)} e^{i\omega t} dt \quad (4.20)$$

L'intégrale en  $\alpha$  peut être limitée à  $2k$  comme précédemment.

#### 4.4.2 Quelques cas particuliers

Dans le cas d'un déplacement uniforme nous avons  $Y(t) = Y_0 + Ut$ ,

$$S(\alpha, \omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} s(t) e^{-i\alpha(Y_0 + Ut)} e^{i\omega t} dt = e^{-i\alpha Y_0} s(\omega - \alpha U) \quad (4.21)$$

et

$$P(x, y, z, t) = \frac{1}{(2\pi)^2} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-i\alpha Y_0} s(\omega - \alpha U) q(x, k^2 - \alpha^2, z) e^{i\alpha y} e^{-i\omega t} d\alpha d\omega \quad (4.22)$$

La vitesse de la source se traduit par un décalage en fréquence sur  $s$ , c'est à dire un effet Doppler. Pour une source harmonique d'amplitude unité émettant à la pulsation  $\omega_0$  nous avons

$$P(x, y, z, t) = \frac{1}{2\pi} e^{-i\omega_0 t} \int_{-\infty}^{+\infty} q(x, (\omega_0 + \alpha U)^2 / c^2 - \alpha^2, z) e^{i\alpha(y - Y_0 - Ut)} d\alpha \quad (4.23)$$

En champ libre la formule des potentiels retardés donne

$$p(\mathbf{x}, t) = \int_{\Omega_{ext}} \frac{e^{-i\omega_0(t - |\mathbf{x} - \mathbf{y}|/c)}}{4\pi |\mathbf{x} - \mathbf{y}|} \delta(\mathbf{y} - \mathbf{X}(t - |\mathbf{x} - \mathbf{y}|/c)) d\mathbf{y} \quad (4.24)$$

soit finalement

$$p(\mathbf{x}, t) = \frac{e^{-i\omega_0(t-|\mathbf{x}-\mathbf{y}|/c)}}{4\pi(|\mathbf{x}-\mathbf{y}| - (\mathbf{x}-\mathbf{y}) \cdot \frac{\mathbf{U}}{c}(t-|\mathbf{x}-\mathbf{y}|/c))} \quad (4.25)$$

où  $\mathbf{U}$  est la vitesse du mobile et  $\mathbf{y}$  est donné par

$$\mathbf{y} = \mathbf{X}(t - |\mathbf{x} - \mathbf{y}|/c) \quad (4.26)$$

On constate en particulier que le module de la pression est indépendant de la fréquence  $\omega_0$  dans le cas d'un mouvement uniforme.

### 4.4.3 Exemples

Calculons le champ de pression derrière le mur droit étudié à la section précédente avec les mêmes dispositions de la source et de l'observateur. Le mobile se déplace à la vitesse de 50.m/s et émet un signal harmonique d'amplitude unité. Le signal est étudié sur l'intervalle  $[0,10s]$ , le temps  $t=5s$  correspondant au passage devant l'observateur. Les figures 4.12, 4.13, 4.14 et 4.15 représentent respectivement le module de la pression pour des fréquences d'émission de 50., 250., 500. et 900.Hz.

En l'absence du mur l'interférence du signal direct avec le signal réfléchi sur le sol conduit à une diminution de la valeur du pic à moyenne fréquence puis à un dédoublement des deux signaux à haute fréquence. Pour le champ derrière le mur on peut calculer la différence de marche entre les deux signaux pour des chemins passant par le sommet du mur.

$$\delta\phi = \frac{2\pi f \Delta}{c} \quad (4.27)$$

Dans l'exemple traité la différence de longueur des deux chemins est  $\Delta = 0.70m$  et  $\delta\phi = \pi$  pour  $f = c/(2\Delta) = 245.Hz$ . Cette valeur explique que la courbe à 250.Hz passe par une valeur très faible au temps 5s.

## 4.5 Conclusion

La méthode proposée permet donc un calcul efficace de l'atténuation d'un mur antibruit lorsque celui-ci est de section constante. Il est seulement nécessaire de calculer la solution de problèmes bidimensionnels pour des fréquences réelles et imaginaires pures avec un maillage très simple puisqu'il est réduit à la modélisation d'une courbe. Nous pouvons obtenir facilement le champ de pression du à une source ponctuelle tridimensionnelle et avec quelques calculs le champ produit par une ligne de sources incohérentes. Nous pouvons en particulier étudier l'influence de la géométrie du mur dans ce cas de grand intérêt pratique. Le modèle permet la prise en compte d'une impédance sur le mur. Il serait intéressant d'essayer d'intégrer un sol avec une impédance finie.

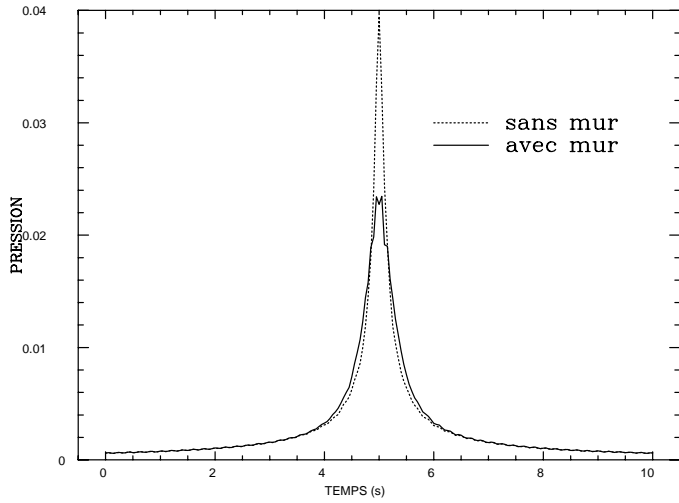


FIG. 4.12 – *Emission à 50.Hz*

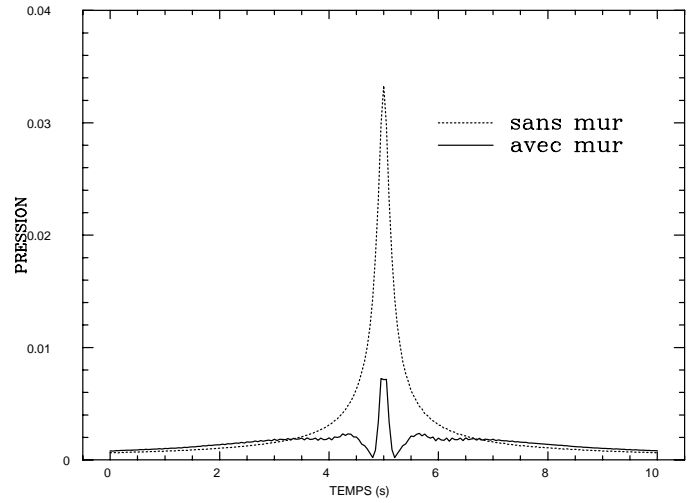


FIG. 4.14 – *Emission à 500.Hz*

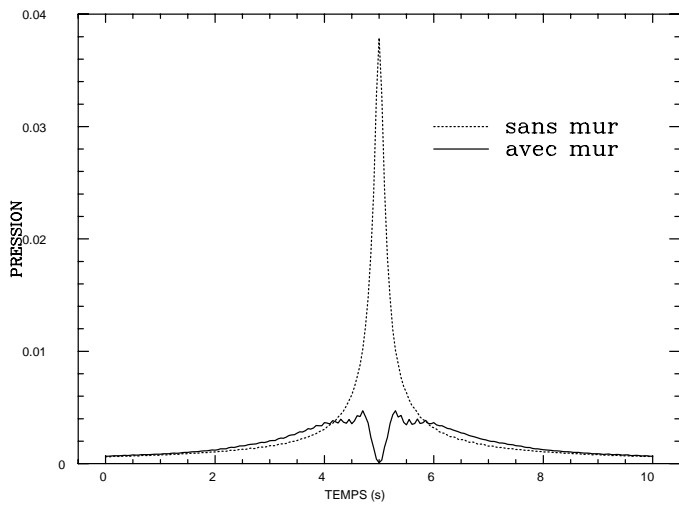


FIG. 4.13 – *Emission à 250.Hz*

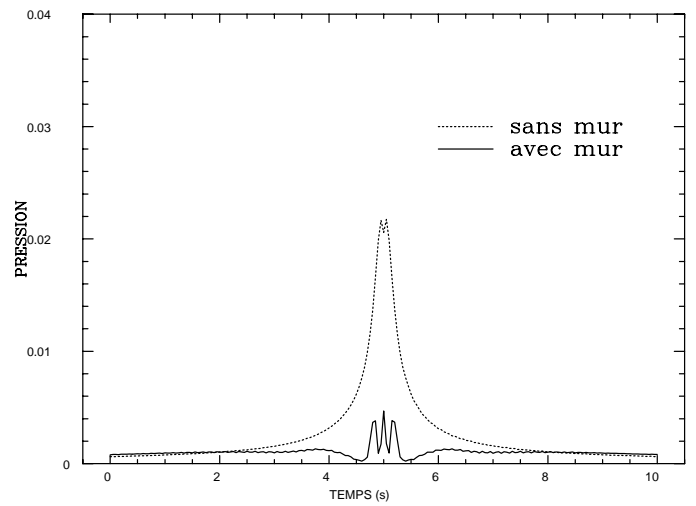


FIG. 4.15 – *Emission à 900.Hz*



## Troisième partie

### Quelques aspects du contrôle actif du son en domaine ouvert



# Chapitre 1

## Contrôle actif en domaine ouvert. Régime harmonique.

### 1.1 Principe du contrôle actif

#### 1.1.1 introduction

La réduction du bruit et des vibrations est généralement effectuée par des moyens passifs avec des matériaux viscoélastiques ou des matériaux poreux qui agissent en transformant l'énergie mécanique en chaleur. Les développements techniques récents, notamment la disponibilité de processeurs de signaux performants, a rendu possible la réalisation du contrôle actif où une perturbation primaire indésirable est contrôlée en créant une perturbation opposée à l'aide de sources secondaires pour que la somme des deux effets soit nulle. Les deux applications principales sont l'acoustique et les vibrations de structures.

L'idée d'utiliser un contrôle actif n'est pas nouvelle puisque le principe semble remonter à P. Lueg (Guicking 1990 [104]) qui a décrit dans un brevet déposé en 1933 les composants essentiels d'un contrôle actif du son dans une gaine. L'onde primaire est captée par un microphone. Ce signal est traité par un dispositif électronique qui pilote un haut-parleur secondaire dont le champ doit être opposé à celui de l'onde primaire (figure 1.1). Les techniques de l'époque n'ont toutefois pas permis la mise en pratique de cette idée. La première démonstration expérimentale est due à Olson 1953 [194] qui a montré qu'en ajustant le champ produit par un haut-parleur à l'aide d'un contrôle par feed-back, on pouvait réduire la pression acoustique au voisinage d'un microphone de référence de 10 à 25dB sur une bande de 3 octaves dans le domaine des basses fréquences.

Le contrôle actif des vibrations, qui partage beaucoup de concepts avec le contrôle actif en acoustique, s'est surtout concentré sur l'étude de poutres qui comme les gaines sont des structures unidimensionnelles plus faciles à modéliser. Si l'on désire contrôler les vibrations sur l'ensemble de la structure, l'approche la plus usuelle consiste à en contrôler les premiers modes (Baz 1988 [15] et Morgan 1991 [176]). Le principal problème est d'éviter le spillover qui est l'excitation des modes non contrôlés par les sources secondaires (Meirovitch 1982 et 1983 [167] [170]). L'analogie acoustique est le contrôle du champ de pression à basse fréquence dans une cavité. Une autre approche se contente d'atténuer les vibrations dans une partie de

la poutre. En terme de propagation d'ondes il faut supprimer les ondes se propageant de la perturbation vers la zone à contrôler et créer ainsi une zone isolée des vibrations au risque cependant de les augmenter ailleurs. Cette approche a été adoptée par Mace 1987 [159], Lu 1989 [158], Pines 1990 [205] et Pan 1991 [198] pour contrôler la propagation d'ondes de flexion. Clark 1992 [44] a contrôlé simultanément des ondes de flexion et des ondes longitudinales à l'aide d'un filtrage adaptatif multi-voies décrit par Sommerfeldt 1991 [237]. Castel 1990 [33] et Destuynder 1992 [57] ont décrit le contrôle d'une plaque élastique à l'aide d'éléments piézoélectriques.

En acoustique la première application véritable du contrôle actif fut la réduction du bruit dans des gaines de ventilation. A des fréquences inférieures à la fréquence de coupure le son se propage par onde plane et peut donc être décrit par un scalaire que l'on mesure à l'aide d'un seul micro. Un champ opposé produit par une source secondaire peut théoriquement annuler complètement le son en aval de celle-ci. Le principe du contrôle présenté sur la figure 1.1 et voisin de celui imaginé par P. Lueg est de capter le bruit par un micro primaire P et de générer à l'aide d'un dispositif de contrôle C le signal envoyé à la source secondaire S. Un micro d'erreur E permet de contrôler l'annulation du signal en aval. Le feed-back de la source secondaire sur le signal primaire limite l'efficacité de dispositifs simples comme ceux proposés par Lueg ou Olson. C'est pourquoi les premiers développements ont consisté à créer des capteurs et des sources complexes pour ne capter et n'engendrer que des ondes unidirectionnelles ce qui supprime ainsi le feed-back. Au contraire l'approche moderne s'oriente vers l'utilisation de sources et de capteurs simples associés à des filtres adaptatifs pour atteindre des atténuations de l'ordre de 20 à 30 dB (Roure 1985 [215], Munjal 1988, 1989 [180] [179], Erikson 1991 [75], Ordunã 1992 [195] et Nelson 1992 [187]). Le contrôle se fait à l'aide d'un filtre à réponse impulsionnelle finie (FIR) ou plus rarement à l'aide d'un filtre à réponse infinie (IIR) (Eriksson 1991 [74]) reliant le signal capté en P au signal envoyé au haut-parleur. Ces filtres sont actualisés par des algorithmes LMS (Least mean squares)(FIR) ou RLMS (Recursive Least Mean Square)(IIR) pour annuler le signal capté en E. La réalisation pratique de ce type de contrôle n'a été rendue possible que grâce à un traitement numérique du signal par des processeurs spécialisés et au développement de la théorie des filtres adaptatifs. En particulier la version de l'algorithme LMS connue sous le nom de filtered-x algorithm (Snyder 1990 [235] et Boucher 1991 [22]) permet de prendre en compte les fonctions de transfert des micros, des hauts-parleurs et des différents chemins acoustiques. Des systèmes performants ont été mis au point et permettent d'obtenir des atténuations de l'ordre de 30 dB pour une propagation par onde plane. Dans ce cas précis des recherches poussées ont été menées pour permettre par exemple de réduire les effets de la turbulence sur le contrôle voir Bouc 1987 [23].

D'un point de vue physique la réduction du son par contrôle actif peut résulter de deux phénomènes complémentaires. Des interférences destructrices peuvent permettre de réfléchir l'onde incidente mais conduisent à une augmentation de la puissance totale mise en jeu. Le second mécanisme est une modification de l'impédance au niveau des sources pour en diminuer le rayonnement. La puissance rayonnée est donnée par  $\frac{1}{2}Re(Z)|p|^2$  et devient très faible lorsque la partie réelle de l'impédance  $Re(Z)$  tend vers 0. La source secondaire peut même agir en absorbant une partie de l'énergie émise par la source primaire, voir par exemple Snyder 1989 [234] pour ces questions.

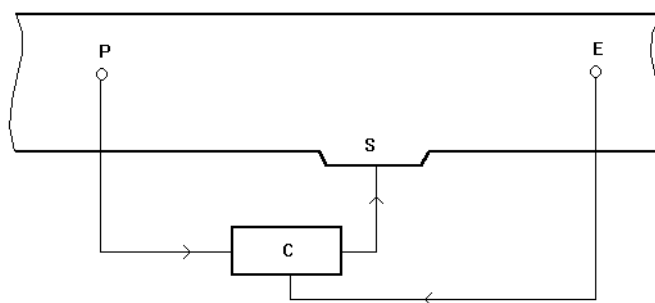


FIG. 1.1 – *Principe d'un contrôle actif dans une gaine.*

L'intérêt s'est aussi porté sur le contrôle du son dans des espaces clos. A l'origine ces recherches ont été motivées par la réduction du bruit à l'intérieur d'avions mus par des turbopropulseurs qui génèrent un bruit important dans le domaine basses fréquences aux harmoniques de la fréquence de passage de l'hélice. Salikudin 1990 [216] a réduit le bruit en plaçant des sources secondaires à l'extérieur du fuselage. Bullmore 1990 [28], à partir d'un modèle simplifié du fuselage, a calculé l'apport potentiel d'un contrôle actif en régime harmonique à l'aide de 16 sources secondaires et 32 microphones placés à l'intérieur. Ce modèle a été vérifié expérimentalement par Elliott 1990 [70]. D'autres possibilités sont d'utiliser un contrôle local au sommet de chaque fauteuil (Eatwell 1991 [65]) ou de contrôler les vibrations du fuselage (Mandic 1991 [162]). Dans le même esprit quelques applications à la réduction du bruit à l'intérieur des habitacles d'automobiles apparaissent (Gratadour 1992 [102]).

Nelson, Bullmore, Elliott 1987, 1992 et Curtis 1990 [188] [29] [67] [51] [187] dans une étude théorique, numérique et expérimentale ont exploré en détail le principe du contrôle actif en régime harmonique dans une enceinte rectangulaire. Ils ont montré que le contrôle visant à minimiser l'énergie totale n'est efficace que si les sources secondaires sont à une distance inférieure à une demi-longueur d'onde de la source primaire lorsque la densité modale est élevée. Il est aussi possible de créer dans cette situation des zones de silence si l'on accepte d'augmenter le champ de pression ailleurs (Elliott 1988 [68]). A faible densité modale, il suffit de placer les sources secondaires sur des maxima du champ produit par la source primaire pour obtenir une bonne atténuation globale. Le contrôle est surtout efficace au voisinage des résonances de la cavité. Aux autres fréquences le champ résulte d'une contribution de nombreux modes et le contrôle est moins efficace. Des généralisations se sont orientées vers le traitement d'une excitation aléatoire (Joplin 1990 [132]) et de problèmes couplés fluide-structure en milieu borné. Dans ce dernier cas l'intérêt s'est surtout porté sur la transmission du son dans une cavité par l'intermédiaire d'une paroi élastique (Pan 1990 et 1991 [199] [196] [197] et Thomas 1990 [243]) avec un contrôle des vibrations de la paroi.

Dans des domaines ouverts Elliott 1991 [69] et Nelson 1987 [189] ont contrôlé en régime harmonique le champ de pression émis par des sources ponctuelles à l'aide d'autres sources ponctuelles placées à proximité. Dans le cas d'une seule source primaire et secondaire la

puissance globale émise n'est réduite de manière significative que si la distance entre les sources est inférieure à une demi-longueur d'onde.

En dehors du rayonnement de sources en champ libre l'étude dans des domaines ouverts s'est surtout concentrée sur la minimisation de la puissance rayonnée par une structure, principalement des plaques ou des poutres. Deffayet 1988 [54] contrôle la puissance rayonnée par une plaque rectangulaire à basse fréquence à l'aide d'une distribution de sources secondaires placées sur la plaque. La puissance, en régime harmonique, est une fonction quadratique de l'amplitude des sources secondaires ce qui permet de trouver facilement les amplitudes qui la minimisent. Meirovitch 1990 [169] [168] réduit les vibrations par la théorie du contrôle optimal. Fuller 1990 et 1991 [87] [88] minimise la transmission d'une onde plane à travers une plaque ou le rayonnement engendré par les vibrations d'une poutre à l'aide de forces ponctuelles. Pan 1992 [200] a utilisé en plus des sources secondaires placées près de la plaque et a vérifié expérimentalement la valeur prédite de la minimisation.

Pour des structures plus complexes Cunefare 1991 [49] [48] a exprimé la puissance rayonnée en résolvant l'équation intégrale sur la surface du corps. En régime harmonique on obtient ainsi une forme discrète de la puissance écrite en fonction du champ de vitesse sur la surface. On peut la minimiser par rapport à l'amplitude d'un champ de vitesse produit par des sources secondaires. Bauman 1991 1992 [14] [13] réduit ainsi le champ rayonné par des structures élastiques couplées à des fluides. Les mouvements de la structure sont exprimés par combinaison de modes propres et un critère portant sur le champ lointain permet de ne minimiser que ceux qui contribuent effectivement au champ rayonné. Une étude détaillée réalisée par Naghshineh 1992 [181] montre que le mécanisme de contrôle se traduit au voisinage des résonances par une diminution des vibrations de la structure et par une redistribution du champ de vitesse pour les autres fréquences ce qui peut parfois engendrer une augmentation des vibrations.

Peu d'auteurs se sont intéressés à des problèmes de contrôle actif dans le cas où le champ de pression est diffracté par un obstacle. Ise 1991 [125] a étudié expérimentalement et avec un modèle analytique de diffraction de Fresnel-Kirchoff le contrôle d'un écran par une seule source secondaire. Il a obtenu une atténuation moyenne de l'ordre de 5dB dans le voisinage de la source secondaire à basse fréquence.

Nous nous proposons dans ce chapitre d'étendre ces résultats au contrôle du champ de pression en domaine ouvert en présence d'un obstacle de forme quelconque qui diffuse un champ de pression incident suivant le modèle décrit dans la partie II. On étudiera en particulier l'effet de la position de la source secondaire sur l'efficacité du contrôle et l'amélioration obtenue en augmentant le nombre de sources.

## 1.2 Contrôle actif en domaine ouvert

Nous nous restreindrons dans ce chapitre au cas de problèmes harmoniques. A l'aide de la formule de Kirchoff on montre qu'il est possible d'annuler le champ de pression dans un volume de l'espace à l'aide d'une distribution continue de monopôles et de dipôles sur la surface du domaine (Nelson 1992 [187]). Ces distributions continues ne sont cependant pas réalisables en pratique c'est pourquoi nous nous intéresserons à un contrôle à l'aide de sources secondaires ponctuelles. Le schéma type du système est décrit sur la figure 1.2. Un champ

de pression primaire est produit par des sources ponctuelles ou distribuées  $S_p$ . Des sources secondaires notées  $S_1, S_2, \dots, S_n$  sont disposées dans l'espace dans le but de créer une zone de silence dans un domaine noté  $Z$ . La propagation est modifiée, par rapport à un champ libre, par la présence d'un obstacle qui peut déjà apporter une atténuation importante dans la zone à contrôler. L'application envisagée est le renforcement de l'effet d'écran d'un mur antibruit à l'aide d'un contrôle actif.

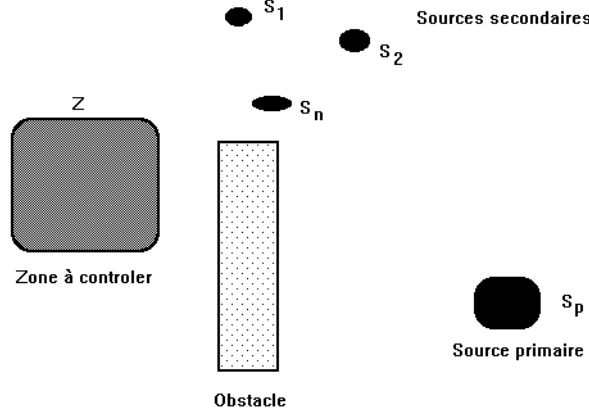


FIG. 1.2 – Contrôle actif en domaine ouvert.

La source primaire crée un champ de pression noté  $p_p(\mathbf{x}, \omega)$  et les sources secondaires créent des champs respectifs  $p_1^s(\mathbf{x}, \omega), p_2^s(\mathbf{x}, \omega), \dots, p_n^s(\mathbf{x}, \omega)$ . Si l'on suppose les sources secondaires ponctuelles ou ne dépendant que d'une amplitude scalaire les champs qu'elles produisent peuvent s'écrire sous la forme  $p_i^s(\mathbf{x}, \omega) = a_i(\omega)p_i(\mathbf{x}, \omega)$  où  $p_i(\mathbf{x}, \omega)$  est le champ produit par une source d'amplitude unité. Les champs  $p_p(\mathbf{x}, \omega)$  et  $p_i(\mathbf{x}, \omega)$  se calculent en résolvant un problème de diffraction à l'aide de la méthode numérique décrite en partie II. Les champs incidents sont donnés par  $\frac{i}{4}H_0(k|\mathbf{x} - \mathbf{x}_s|)$  et  $\frac{e^{ik|\mathbf{x} - \mathbf{x}_s|}}{4\pi|\mathbf{x} - \mathbf{x}_s|}$ , en 2D et 3D respectivement où  $\mathbf{x}_s$  est la position de la source et  $H_0$  la fonction de Hankel. Il s'agit donc de déterminer les amplitudes  $a_i(\omega)$  minimisant le champ de pression dans la zone  $Z$ , c'est à dire le critère

$$J(a_1, a_2, \dots, a_n) = \int_Z |p_{tot}(\mathbf{x}, \omega)|^2 d\mathbf{x} = \int_Z |p_p(\mathbf{x}, \omega) + \sum_{i=1}^n a_i(\omega)p_i(\mathbf{x}, \omega)|^2 d\mathbf{x} \quad (1.1)$$

où  $p_{tot}$  est le champ de pression total du à toutes les sources.

$J$  est relié à l'énergie potentielle contenue dans le domaine  $Z$  par la formule

$$E_p = \frac{1}{2\rho c^2} \int_Z |p_{tot}(\mathbf{x}, \omega)|^2 d\mathbf{x} = \frac{J}{2\rho c^2} \quad (1.2)$$

## 1.3 Contrôle avec une seule source secondaire

### 1.3.1 Minimisation de $J$

Commençons par traiter le cas le plus simple d'un contrôle par une seule source secondaire. La dépendance de la pression en fonction de  $\omega$  sera sous-entendue dans toute la suite

de ce chapitre. On doit minimiser

$$J(a) = \int_Z |p_{tot}(\mathbf{x})|^2 d\mathbf{x} \quad (1.3)$$

$$= \int_Z |p_p(\mathbf{x}) + ap(\mathbf{x})|^2 d\mathbf{x} \quad (1.4)$$

$$= \int_Z |p_p(\mathbf{x})|^2 d\mathbf{x} + \int_Z 2Re(ap_p^*(\mathbf{x})p(\mathbf{x}))d\mathbf{x} + |a|^2 \int_Z |p(\mathbf{x})|^2 d\mathbf{x} \quad (1.5)$$

La valeur de a qui minimise J est

$$a = -\frac{\int_Z p_p(\mathbf{x})p^*(\mathbf{x})d\mathbf{x}}{\int_Z |p(\mathbf{x})|^2 d\mathbf{x}} \quad (1.6)$$

la valeur de J au minimum est

$$J_{min} = \int_Z |p_p(\mathbf{x})|^2 d\mathbf{x} - \frac{|\int_Z p_p^*(\mathbf{x})p(\mathbf{x})d\mathbf{x}|^2}{\int_Z |p(\mathbf{x})|^2 d\mathbf{x}} \quad (1.7)$$

Nous définirons l'efficacité du contrôle par le rapport entre l'énergie potentielle avec et sans contrôle suivant la formule

$$\gamma = 10 \log\left(\frac{J_{min}}{J(0)}\right) = 10 \log\left(1 - \frac{|\int_Z p_p^*(\mathbf{x})p(\mathbf{x})d\mathbf{x}|^2}{\int_Z |p_p(\mathbf{x})|^2 d\mathbf{x} \int_Z |p(\mathbf{x})|^2 d\mathbf{x}}\right) \quad (1.8)$$

$\gamma$  dépend essentiellement de la fréquence, de la position des sources et de la zone à contrôler Z.

### 1.3.2 Limitation du surbruit

La minimisation précédente peut conduire à une augmentation de la pression en dehors de la zone contrôlée Z. Pour limiter ce phénomène nous définirons un nouveau domaine de l'espace  $Z_1$  sur lequel la pression ne doit pas augmenter. La nouvelle fonction de coût est

$$J_1(a) = \int_Z |p_p(\mathbf{x}) + ap(\mathbf{x})|^2 d\mathbf{x} + \left(\int_{Z_1} |p_p(\mathbf{x}) + ap(\mathbf{x})|^2 d\mathbf{x} - \alpha \int_{Z_1} |p_p(\mathbf{x})|^2 d\mathbf{x}\right)^+ \quad (1.9)$$

où  $x^+ = \max(x, 0)$ . Le paramètre  $\alpha$  permet de définir le niveau de surbruit admis. La minimisation de J est réalisée grâce à un algorithme de gradient en prenant

$$\begin{aligned} \nabla J_1(a) &= 2H\left(\int_{Z_1} |p_p(\mathbf{x}) + ap(\mathbf{x})|^2 d\mathbf{x} - \alpha \int_{Z_1} |p_p(\mathbf{x})|^2 d\mathbf{x}\right) \left(\int_{Z_1} p_p(\mathbf{x})p^*(\mathbf{x})d\mathbf{x} + a \int_{Z_1} |p(\mathbf{x})|^2 d\mathbf{x}\right) \\ &\quad + 2 \int_Z p_p(\mathbf{x})p^*(\mathbf{x})d\mathbf{x} + 2a \int_Z |p(\mathbf{x})|^2 d\mathbf{x} \end{aligned} \quad (1.10)$$

avec  $H(x) = 1$  si  $x > 0$  et 0 sinon. Nous pouvons de même définir l'efficacité du contrôle  $\gamma_1$  à partir de la valeur atteinte par J au minimum de  $J_1$ .

### 1.3.3 Exemples

Calculons à titre de premier exemple l'atténuation derrière un mur apportée par une source secondaire dans une modélisation bidimensionnelle. Le mur, d'une hauteur  $h=2\text{m}$  et d'une épaisseur  $e=10\text{cm}$ , est supposé rigide. Une ligne de source  $S_p$  est placée en  $(2.,0.5)$ . On s'intéresse au champ de pression dans le rectangle de sommets  $A(-2.,0.)$  et  $B(-1.,3.)$  situé derrière le mur, voir figure 1.3. La source ponctuelle secondaire peut être placée à l'une des positions numérotées de 1 à 11 ( $d=50.\text{cm}$ ) avec  $S1=(-d,6d)$ , ...,  $S11=(d,d)$ .

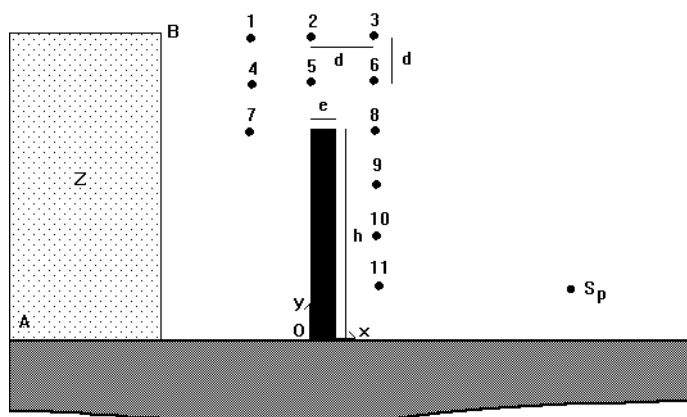


FIG. 1.3 – Mur antibruit contrôlé par une source

Position	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
$\gamma$ (dB)	-0.15	-0.13	-1.13	-1.39	-0.30	-1.32	-3.52	-10.7	-18.7	-17.3	-16.6
$ a $	0.04	0.04	0.14	0.11	0.06	0.16	0.12	0.61	0.99	1.12	4.29
phase ( $^\circ$ )	140.	39.	-79.	59.	-137.	174.	-52.	-165.	22.	-174.	-131.
$\gamma_1$ (dB), $\alpha = 1$	-0.15	-0.13	0.	-1.20	-0.30	0.	-3.52	-10.7	-6.60	-3.26	-0.32
$\gamma_1$ (dB), $\alpha = 1.5$	-0.15	-0.13	-1.13	-1.39	-0.30	-1.32	-3.52	-10.7	-18.7	-9.54	-1.26

TAB. 1.1 – Atténuation suivant la source en 2D à 500Hz

Pour un calcul effectué à  $f=500\text{Hz}$ , le tableau 1.1 donne  $\gamma$ , le module et la phase de l'amplitude  $a$  de la source secondaire suivant la position. La lecture de ce tableau permet de constater la grande influence de la position de la source secondaire sur l'efficacité du contrôle. Placer la source secondaire derrière le mur semble bien moins efficace que la placer devant. Pour un champ libre ou un espace clos la meilleure atténuation est obtenue pour une source secondaire proche de la source primaire quand le but est de minimiser l'énergie totale rayonnée par les deux sources. Dans le cas présent, où le but est un contrôle sur une partie de l'espace seulement, la meilleure situation pour cette fréquence est la position 9. La norme de l'amplitude  $a$  est approximativement égale à celle de la source primaire et sa phase vaut  $22^\circ$ . La longueur d'onde est  $\lambda = 0.69\text{m}$  et la distance entre la source 9 et la source primaire est  $D = 1.80\text{m}$ . Dans cette situation un contrôle est donc obtenu avec une distance supérieure à une demi-longueur d'onde et sur une étendue plus grande que

la longueur d'onde. La cartographie 1 montre l'allure du champ de pression avec et sans contrôle sur une distance horizontale de 3.m de part et d'autre du mur. On constate en fait que la zone contrôlée s'étend au-delà de la zone Z choisie. Le tableau contient aussi la valeur de  $\gamma_1$  obtenue en prenant  $Z_1 = [1, 3] \times [0, 2]$  et  $\alpha = 1$ . La valeur maximale de l'atténuation est réduite à 10.7dB et est obtenue pour le point 8. Un autre calcul est effectué avec  $\alpha = 1.5$  ce qui autorise une augmentation de 3.5dB au voisinage de la source primaire. La contrainte supplémentaire se traduit par une diminution de l'atténuation pour les sources 10 et 11. La source 9 qui conduit à l'atténuation maximale n'est par contre pas affectée. En autorisant une légère augmentation du champ du pression au voisinage de la source primaire nous retrouvons l'atténuation maximale avec cette géométrie de sources.

Nous avons ensuite fait varier la fréquence en cherchant à chaque fois la valeur du minimum de pression et le numéro de la source le réalisant. Le résultat montre que l'atténuation maximale est obtenue pour l'une des positions 8, 9, 10 ou 11 suivant la fréquence. La figure 1.4 montre la variation de l'atténuation en fonction de la fréquence dans l'intervalle  $[0, 1000\text{Hz}]$  lorsque la source secondaire occupe l'une des positions précédentes.

La position de la meilleure source varie en fonction de la fréquence et n'est généralement pas celle qui est située la plus près de la source primaire. Le contrôle est très efficace à basse fréquence et reste supérieur à 10dB sauf dans deux bandes étroites aux environs de 250Hz et 725Hz. La figure 1.5 montre la meilleure atténuation obtenue en fonction de la fréquence parmi les 11 positions sur l'intervalle  $[0, 2000\text{Hz}]$ . Le caractère chahuté de la courbe provient du changement de la position optimale de la source qui n'est autorisée à varier, dans cet exemple, que dans un ensemble discret. Dans les bandes où les performances se dégradent il semble qu'une seule source secondaire ne soit plus suffisant pour assurer le contrôle.

Nous traitons maintenant le cas d'un obstacle tridimensionnel. Il s'agit d'un mur de hauteur  $h=2\text{m}$ , d'épaisseur  $e=20\text{cm}$  et de longueur 8.m symétrique par rapport à  $y=0$ . Une source ponctuelle est placée en  $S_p(2., 0., 0.5)$  et des sources secondaires sont disposées près du mur comme sur la figure 1.6 avec  $S_1=(-2d, 0, 10d)$ , ...,  $S_{15}=(2d, 0, 0)$ . Les sources sont situées dans le plan de symétrie du mur et espacées de  $d=0.25\text{m}$ . Le calcul est effectué à 100Hz et l'amplitude de la source secondaire est calculée pour atténuer la pression dans le parallélépipède de sommets A(-2,0,0) et B(-1,1,3) situé derrière le mur.

Position	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
$\gamma(\text{dB})$	-4.7	-6.1	-7.0	-7.5	-7.5	-7.6	-7.1	-6.0	-4.8	-3.4	-1.5	-3.2	-12.9	-15.9	-15.1
$ a $	0.15	0.18	0.22	0.27	0.32	0.34	0.37	0.41	0.47	0.59	0.72	1.3	1.1	0.82	0.74
phase( $^\circ$ )	159	145	130	110	85	89	84	72	59	45	15	-84	-110	-117	-119
$\gamma_1(\text{dB}) \alpha = 1$	-4.7	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	-5.9	-4.8	-3.4	-1.5	0.0	0.0	0.0	0.0
$\gamma_1(\text{dB}) \alpha = 1.5$	-4.7	-6.1	-7.0	-7.5	-7.5	-7.6	-7.1	-6.0	-4.8	-3.4	-1.5	-2.1	-4.0	-5.5	-5.9

TAB. 1.2 – Atténuation suivant la source en 3D à 100Hz

Le tableau 1.2 donne l'atténuation en dB pour les positions 1 à 15. L'optimum est obtenu pour la position 14 qui est proche de la source primaire et conduit à une atténuation de 15.9dB dans la zone d'optimisation. Le champ de pression dans le plan  $z=1.5\text{m}$  soit 1.m au dessus de la source primaire est tracé avec et sans source secondaire et est reproduit sur la cartographie 2. La présence de cette source conduit à une diminution du champ de pression en moyenne

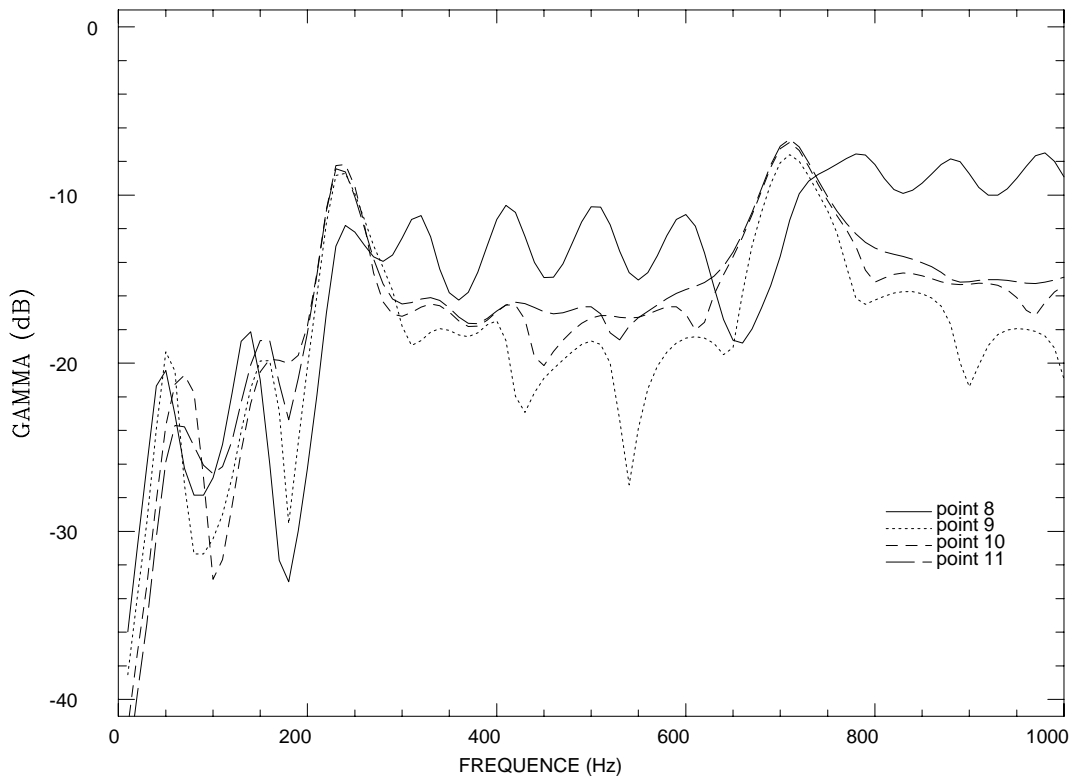


FIG. 1.4 – Atténuation en fonction de la fréquence et de la position de la source secondaire

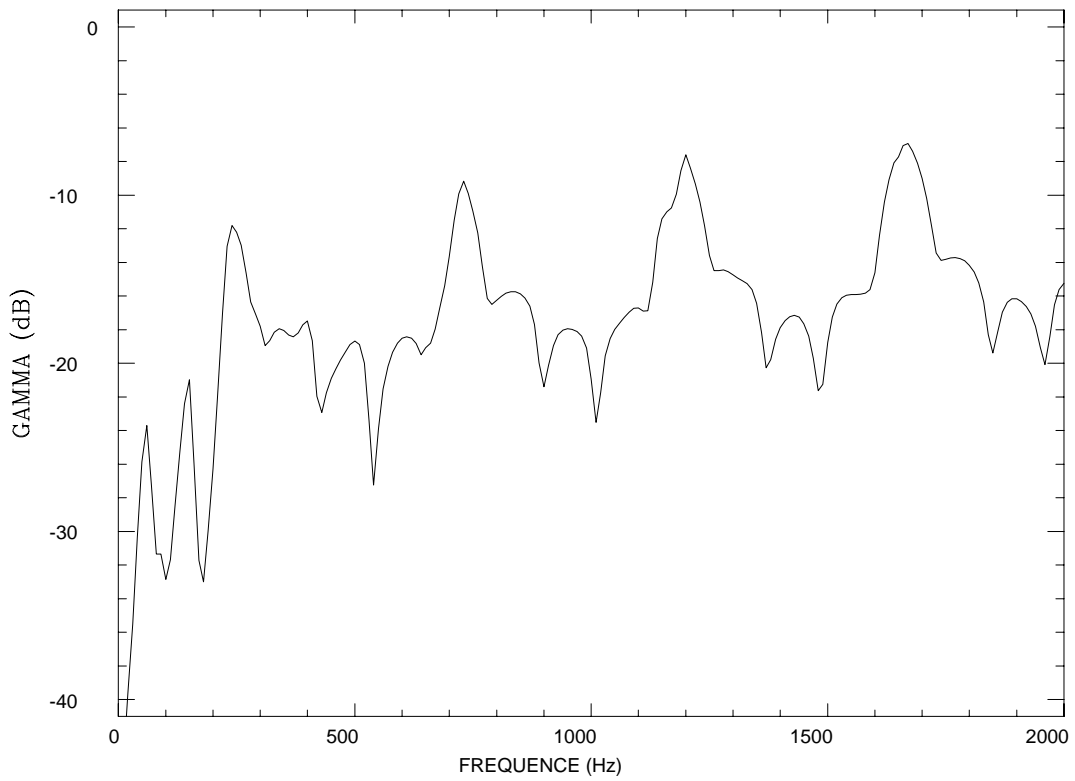


FIG. 1.5 – Meilleure atténuation en fonction de la fréquence.

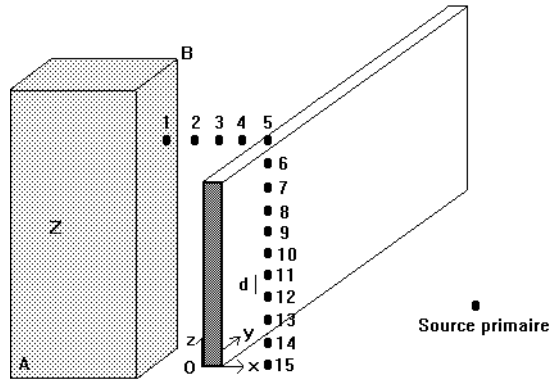


FIG. 1.6 – Mur antibruit 3D contrôlé par une source (domaine  $y \geq 0$ )

derrière le mur sur une étendue nettement supérieure à la zone de contrôle. Du côté de la source primaire la pression est légèrement augmentée. Le mécanisme de contrôle semble être de nouveau une réflexion de l'onde produite par la source primaire. Une minimisation avec contrôle du surbruit donne peu de résultat avec  $\alpha = 1$  en interdisant toute augmentation. Avec  $\alpha = 1.5$  nous obtenons 7.6dB avec la source 6 située près du sommet du mur. Un calcul a été effectué à plus haute fréquence (500Hz). Les résultats sont présentés dans le tableau 1.3.

Position	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
$\gamma$ (dB)	-0.6	-0.3	-0.3	-0.4	-1.8	-5.8	-6.9	-9.2	-9.4	-6.9	-8.1	-10.5	-2.0	-4.7	-8.0
$ a $	0.05	0.04	0.05	0.07	0.14	0.22	0.38	0.53	0.76	1.3	0.92	1.1	1.9	1.4	0.98
phase ( $^\circ$ )	11	-144	120	-73	180	-145	-165	128	3	-92	156	-2	-150	162	-9
$\gamma_1$ (dB) $\alpha = 1$	0.0	-0.3	-0.3	-0.4	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	-2.8	0.0	-5.3	0.0	-1.7	0.0
$\gamma_1$ (dB) $\alpha = 1.5$	-0.6	-0.3	-0.3	-0.4	-1.8	-5.8	-6.9	-9.2	-9.4	-6.9	-8.1	-10.5	-1.4	-4.7	-5.9

TAB. 1.3 – Atténuation suivant la source en 3D à 500Hz

L'optimum est obtenu pour une source secondaire placée en position 12 ce qui conduit à une réduction de 10.5dB du champ de pression dans la zone Z. La cartographie 3 représente le champ de pression suivant la même coupe que précédemment. La zone où la pression est atténuée est moins étendue qu'à 100Hz mais occupe encore un domaine nettement supérieur à la zone d'optimisation. Le contrôle avec limitation du surbruit conduit au même résultat pour  $\alpha = 1.5$

Il ressort des exemples précédents qu'il existe deux positions intéressantes pour la source secondaire. Soit près de la source primaire si la fréquence est basse. Soit près du bord diffractant si la fréquence est élevée ou si l'on veut réduire le surbruit.

Pour estimer l'influence de la taille de la zone Z nous avons réalisé une série de calculs pour le cas bidimensionnel à 725Hz en fixant le point A. La taille de Z évolue suivant un facteur d'échelle  $e$  en prenant pour point B  $(-2.+e,3e)$  avec  $0 \leq e \leq 1$ ,  $e = 1$  correspond au

cas déjà étudié. La figure 1.7 présente l'atténuation obtenue en fonction de  $e$  pour une source placée en position 9.

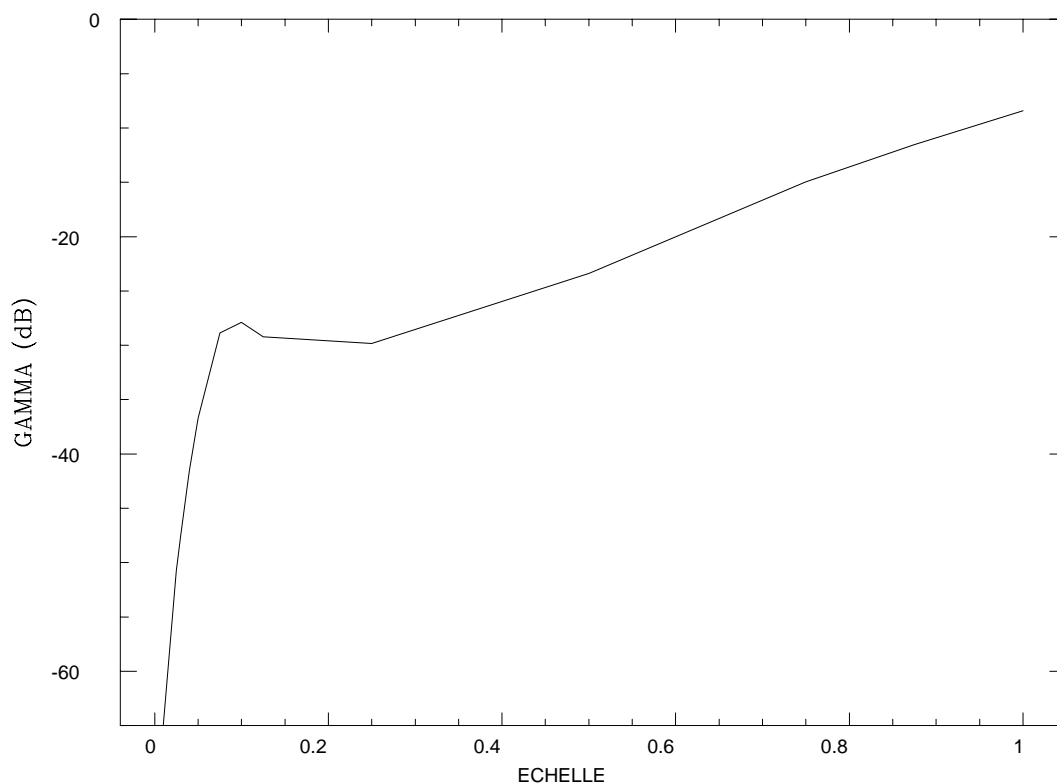


FIG. 1.7 – Atténuation en fonction de la taille de  $Z$ .

L'atténuation devient très importante quand la plus grande dimension du parallélépipède est inférieure à  $\lambda/2 = 0.24m$  ce qui est en accord avec le calcul en annexe sur l'atténuation dans une boule du champ de pression créé par une source.

## 1.4 Contrôle avec plusieurs sources secondaires

Les résultats précédents peuvent être améliorés en utilisant plusieurs sources secondaires pour créer une distribution spatiale du champ de pression plus proche de celle de la source primaire. Pour le calcul des amplitudes optimales il s'agit de nouveau de minimiser le critère quadratique

$$\begin{aligned}
 J(a_1, a_2, \dots, a_n) &= \int_Z |p_p(\mathbf{x}) + \sum_{i=1}^n a_i p_i(\mathbf{x})|^2 d\mathbf{x} & (1.11) \\
 &= \int_Z |p_p(\mathbf{x})|^2 d\mathbf{x} + 2 \sum_{i=1}^n \operatorname{Re}(a_i \int_Z p_p^*(\mathbf{x}) p_i(\mathbf{x}) d\mathbf{x}) + \sum_{i,j=1}^n \int_Z a_i^* a_j p_i^*(\mathbf{x}) p_j(\mathbf{x}) d\mathbf{x}
 \end{aligned}$$

$J$  peut se mettre sous la forme matricielle

$$J(a_1, a_2, \dots, a_n) = c + {}^t \mathbf{b}^* \mathbf{X} + {}^t \mathbf{X}^* \mathbf{b} + {}^t \mathbf{X}^* \mathbf{A} \mathbf{X} \quad (1.12)$$

avec

$$c = \int_Z |p_p(\mathbf{x})|^2 d\mathbf{x} \quad (1.13)$$

$${}^t \mathbf{X} = (a_1, a_2, \dots, a_n) \quad (1.14)$$

$${}^t b_i^* = \int_Z p_p^*(\mathbf{x}) p_i(\mathbf{x}) d\mathbf{x} \quad (1.15)$$

$$A_{ij} = \int_Z p_i^*(\mathbf{x}) p_j(\mathbf{x}) d\mathbf{x} \quad (1.16)$$

Le minimum de J est atteint pour

$$\mathbf{X}_{min} = -\mathbf{A}^{-1} \mathbf{b} \quad (1.17)$$

et il vaut

$$J_{min} = c - {}^t \mathbf{b}^* \mathbf{A}^{-1} \mathbf{b} \quad (1.18)$$

Ce procédé suppose que  $\mathbf{A}$  est inversible et relativement bien conditionnée.

A basse fréquence avec plusieurs sources secondaires  $\mathbf{A}$  est souvent singulière à la précision des calculs numériques. Pour éviter ce problème la détermination de l'amplitude optimale des sources peut être effectuée par une méthode d'orthonormalisation. A partir des champs de pression  $(p_1, \dots, p_n)$  engendrés par les sources secondaires on construit une suite orthonormée  $(q_1, \dots, q_m)$  vérifiant

$$\int_Z q_i^* q_j d\mathbf{x} = \delta_{ij} \quad (1.19)$$

$$\begin{aligned} q_1 &= \alpha_{11} p_{i_1} \\ q_2 &= \alpha_{21} p_{i_1} + \alpha_{22} p_{i_2} \\ &\dots \\ q_m &= \alpha_{m1} p_{i_1} + \dots + \alpha_{mm} p_{i_m} \end{aligned} \quad (1.20)$$

Pour essayer de minimiser rapidement le champ de pression résiduel en fonction du nombre de sources  $p_{i_s}$  est choisis parmi les  $p_i$  restant (tels que  $i \notin \{i_1, \dots, i_{s-1}\}$ ) pour rendre maximum le rapport  $\frac{|\langle p_p, r \rangle|}{\|p_p\| \cdot \|r\|}$  où r est égal à  $p_i$  moins sa projection orthogonale sur le sous espace engendré par  $(q_{i_1}, \dots, q_{i_{s-1}})$ . Nous sélectionnons ainsi le champ qui à l'étape suivante apporte une réduction significative du champ résiduel.

Le champ de pression  $p_p$  se décompose alors en

$$p_p = \alpha_1 q_1 + \dots + \alpha_m q_m + r_p \quad (1.21)$$

où

$$\begin{aligned} \langle r_p, q_1 \rangle &= \dots = \langle r_p, q_m \rangle = 0 \\ \alpha_i &= \langle p_p, q_i \rangle \end{aligned} \quad (1.22)$$

L'efficacité du contrôle se définit par

$$\gamma = 10 \log\left(\frac{J_{min}}{J(0)}\right) \quad (1.23)$$

avec

$$J_{min} = \int_Z |p_p - \alpha_1 q_1 - \dots - \alpha_m q_m|^2 d\mathbf{x} \quad (1.24)$$

Ce procédé, que nous appellerons méthode 1, limite la croissance des amplitudes des sources secondaires qui peuvent devenir importantes quand la matrice  $\mathbf{A}$  est mal conditionnée ce qui conduit à une solution difficile à mettre en oeuvre expérimentalement et peut engendrer des surbruits dans les zones non contrôlées.

Nous pouvons aussi calculer  $\gamma$  en fonction du nombre de sources secondaires en limitant la décomposition aux  $s$  premières sources.

$$p_p = \alpha_1 q_1 + \dots + \alpha_s q_s + r_s \quad (1.25)$$

Cette décomposition partielle n'est pas nécessairement optimale mais permet d'estimer le gain en atténuation en fonction du nombre de sources.

Pour un faible nombre de sources secondaires nous comparerons avec la solution optimale obtenue en testant toutes les combinaisons possible à  $s$  sources secondaires parmi les  $m$ . Ce procédé sera appelé méthode 2.

### 1.4.1 Exemples

Nous reprenons les exemples précédents avec les mêmes dispositions pour les sources secondaires mais nous considérons des contrôles à l'aide de plusieurs sources.

Commençons par le mur bidimensionnel à basse fréquence (100Hz). Le tableau 1.4 donne l'atténuation  $\gamma$  en fonction du nombre de sources utilisées et des positions des sources ajoutées. Dans ce cas parmi les 11 sources seules 4 sont nécessaires pour obtenir une atténuation supérieure à 60dB. Les calculs avec une forte atténuation doivent être effectués avec une grande précision pour obtenir une valeur correcte car celle-ci résulte de la différence de deux champs de pression presque égaux. Au delà de 40dB la valeur de  $\gamma$  peut être entachée d'une erreur importante mais il est peu probable que l'expérience puisse conduire à de telles valeurs.

Nb de sources	1	2	3	4
$\gamma$ (dB) méthode 1	-32.8	-40.9	-43.7	-57.2
sources méthode 1	10	10,3	10,3,6	10,3,6,7
$\gamma$ (dB) méthode 2	-32.8	-45.2	-58.6	< -60.
sources méthode 2	10	3,8	5,6,11	3,5,6,8

TAB. 1.4 – Atténuation en fonction du nombre de sources (2D, 100Hz)

Le tableau 1.5 est le résultat d'un calcul à 500Hz. On remarque que l'addition d'une deuxième source permet d'augmenter significativement l'atténuation à condition de tester tous les cas. On peut remarquer, comme dans l'exemple précédent, que la combinaison de

Nb de sources	1	2	3	4
$\gamma$ (dB) méthode 1	-18.7	-18.9	-19.7	-36.8
sources méthode 1	9	9,1	9,1,4	9,1,4,10
$\gamma$ (dB) méthode 2	-18.7	-35.6	-44.7	-48.5
sources méthode 2	9	9,10	6,8,9	5,6,8,10

TAB. 1.5 – Atténuation en fonction du nombre de sources (2D, 500Hz)

sources qui conduit à l'optimum varie considérablement en autorisant l'addition d'une source supplémentaire.

Un dernier calcul 2D a été effectué à 1700Hz (tableau 1.6). Cette fréquence a été choisie car elle représente un minimum d'atténuation sur la courbe 1.5. Comme dans le cas précédent l'addition d'une deuxième source améliore considérablement le résultat. Les sources supplémentaires ont par contre un effet assez faible.

Nb de sources	1	2	3	4
$\gamma$ (dB) méthode 1	-9.0	-18.0	-19.2	-19.8
sources méthode 1	9	9,8	9,8,11	9,8,11,10
$\gamma$ (dB) méthode 2	-9.0	-18.0	-19.2	-20.3
sources méthode 2	9	9,8	9,8,11	7,8,9,11

TAB. 1.6 – Atténuation en fonction du nombre de sources (2D, 1700Hz)

La figure 1.8 compare, en fonction de la fréquence, l'atténuation obtenue avec une, deux ou trois sources. Nous constatons que l'addition d'une seconde source permet un accroissement important de l'atténuation. La troisième source n'apporte un effet notable que dans des certaines bandes de fréquence.

Un calcul analogue est effectué pour l'exemple tridimensionnel à 500Hz. L'addition de sources secondaires suivant la disposition de la figure 1.6 améliore lentement le résultat.

Nb de sources	1	2	3	4	5	6
$\gamma$ (dB) méthode 1	-10.5	-10.5	-11.0	-11.2	-13.2	-15.7
sources méthode 1	12	12,5	12,5,15	12,5,15,1	12,5,15,1,2	12,5,15,1,2,3
$\gamma$ (dB) méthode 2	-10.5	-12.1	-12.9	-14.5	-16.0	-17.7
sources méthode 2	12	8,12	2,3,12	2,3,11,12	2,4,5,11,12	1,2,3,13,14,15

TAB. 1.7 – Atténuation en fonction du nombre de sources (3D, 500Hz)

Un autre calcul a été effectué avec un mur de longueur infinie et des sources ponctuelles tridimensionnelles. La zone de contrôle reste inchangée mais deux nouvelles couches de sources secondaires sont ajoutées en  $y=0.5m$  et  $y=1m$ . Les résultats à 500 Hz sont donnés par le tableau 1.8.

Nous constatons une nette amélioration de l'atténuation maximale en fonction du nombre de sources secondaires. La figure 1.9 donne le comportement en fonction de la fréquence. En

Nb de sources	1	2	3	4
$\gamma$ (dB) méthode 2	-16.8	-21.6	-25.1	-27.9

TAB. 1.8 – Atténuation en fonction du nombre de sources (3D, 500Hz)

comparant avec le comportement bidimensionnel nous observons une plus faible influence du nombre de sources au delà de 1000Hz. Pour des fréquences inférieures nous obtenons des atténuations importantes, de l'ordre de 15 à 20 dB, avec 3 sources seulement. D'autres exemples peuvent être trouvées dans Duhamel 1993 [63].

## 1.5 Contrôle du champ diffusé

Au lieu de contrôler le champ total on se propose de ne contrôler que le champ diffusé ce qui revient à rendre la structure "invisible" d'un point de vue acoustique. En ne retenant que la partie diffusée des champs de pression le critère à minimiser devient.

$$\begin{aligned}
J^{dif}(a_1, a_2, \dots, a_n) &= \int_Z |p_p^{dif}(\mathbf{x}) + \sum_{i=1}^n a_i p_i^{dif}(\mathbf{x})|^2 d\mathbf{x} \\
&= \int_Z |p_p^{dif}(\mathbf{x})|^2 d\mathbf{x} + 2 \sum_{i=1}^n \operatorname{Re}(a_i \int_Z p_p^{*dif}(\mathbf{x}) p_i^{dif}(\mathbf{x})) d\mathbf{x} \\
&\quad + \sum_{i,j=1}^n \int_Z a_i^* a_j p_i^{*dif}(\mathbf{x}) p_j^{dif}(\mathbf{x}) d\mathbf{x}
\end{aligned} \tag{1.26}$$

La suite du calcul est identique aux cas précédents en remplaçant les champs de pression totaux par les champs diffusés.

### 1.5.1 Exemples

Nous traiterons à titre d'exemple le cas d'un cylindre rigide de rayon 1m centré à l'origine et soumis au champ d'une onde plane incidente. Des sources sont disposées autour du cylindre suivant le dispositif indiqué sur la figure 1.10. Le problème étant symétrique, la moitié de la structure sera modélisée et toutes les sources auront un symétrique en phase non représenté sur la figure. On se propose de contrôler le champ diffusé dans la zone  $Z = [-4, -2] \times [0, 2]$  qui est le champ renvoyé dans la direction du champ incident.

Le tableau 1.9 résulte d'un calcul à 500Hz. L'optimum est trouvé pour une source se situant dans la direction de l'onde à contrôler. La figure 1.11 présente la réduction maximale obtenue pour le champ de pression diffusé en fonction de la fréquence. A partir de 100hz la position 1 est optimale. On constate qu'au delà de 500Hz la valeur de l'atténuation maximale diminue régulièrement avec la fréquence.

Le tableau 1.10 donne, à 500Hz, le champ diffusé en fonction du nombre de sources secondaires. L'addition de sources conduit à des gains importants en atténuation.

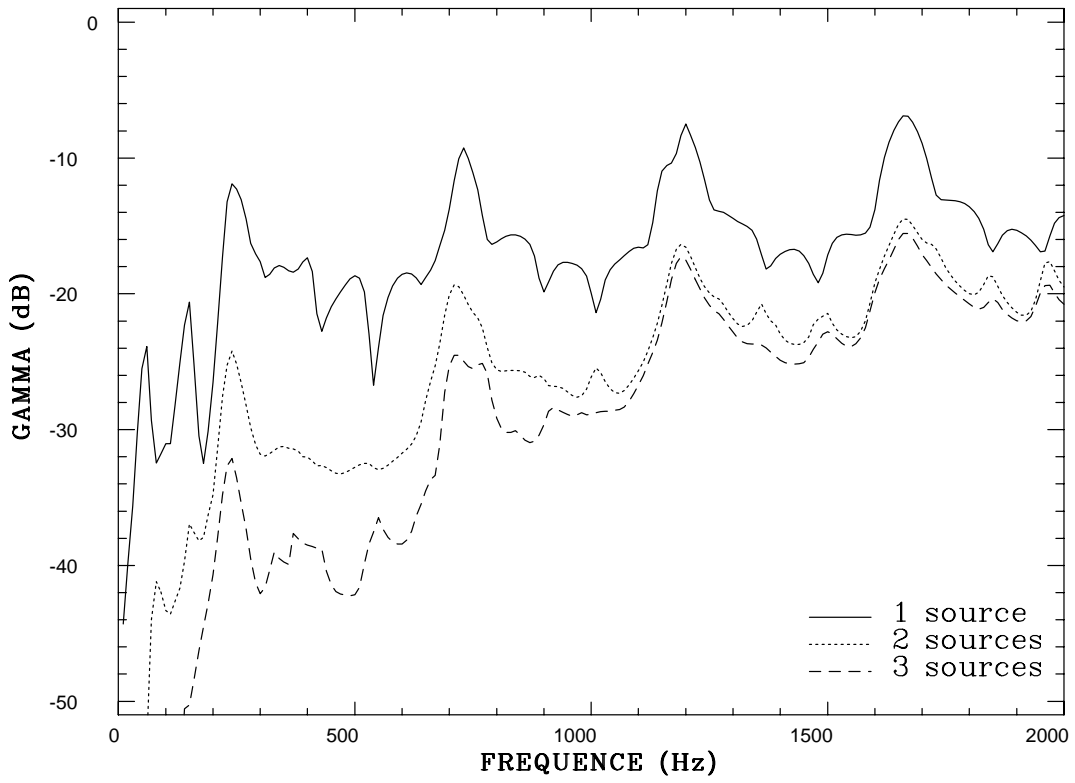


FIG. 1.8 – Atténuation en fonction du nombre de sources (2D).

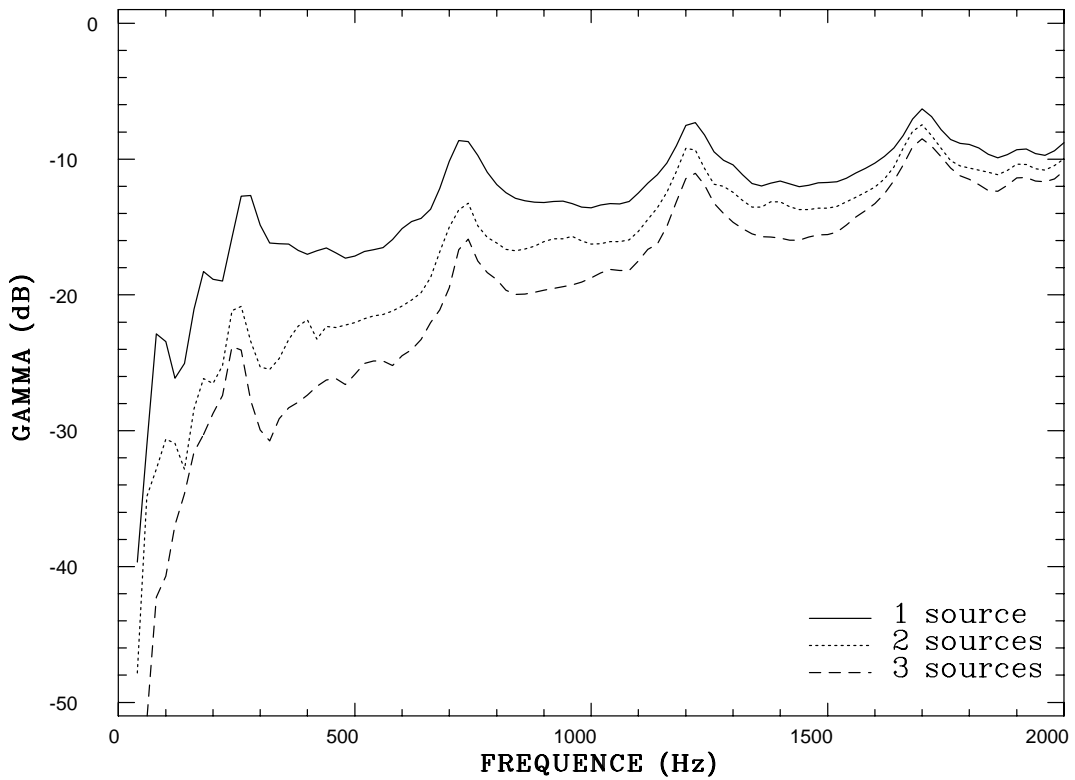


FIG. 1.9 – Atténuation en fonction du nombre de sources (3D).

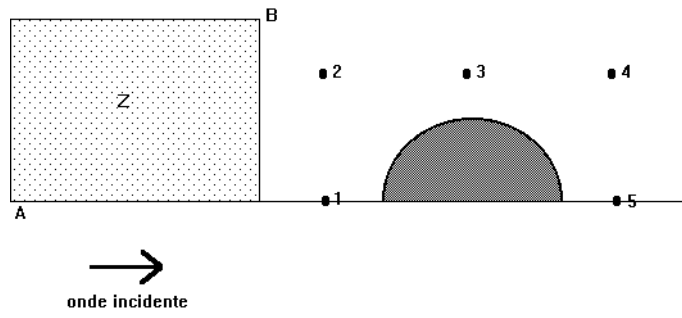


FIG. 1.10 – *Contrôle de la diffusion par un cylindre*

source	1	2	3	4	5
$\gamma$ (dB)	-13.7	-0.04	-0.3	-2.4	-1.8
$ a $	14.5	2.9	12.0	20.5	7.3
phase ( $^{\circ}$ )	57.	74.	-120.	56.	-34.

TAB. 1.9 – *Contrôle du champ diffusé*

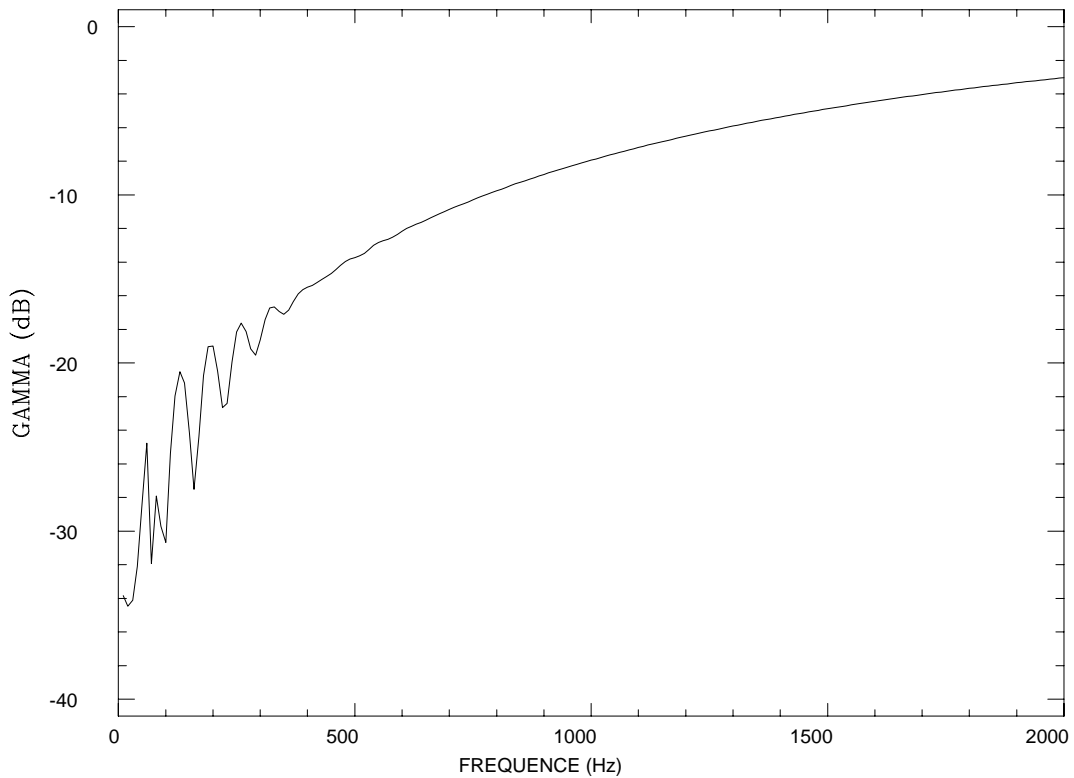


FIG. 1.11 – *Atténuation du champ diffusé.*

Nb de sources	1	2	3	4	5
$\gamma$ (dB)	-13.7	-20.7	-24.9	-39.6	-53.2
sources	1	1,2	1,2,5	1,2,3,4	1,2,3,4,5

TAB. 1.10 – *Champ diffusé en fonction du nombre de sources*

# Chapitre 2

## Contrôle actif en domaine ouvert. Régime instationnaire.

### 2.1 Dispositif de contrôle

Par rapport au chapitre précédent nous désirons traiter des problèmes plus concrets dans lesquels le signal pourra être instationnaire et aléatoire. De plus il n'est connu qu'à travers un réseau de microphones qui servent à capter le signal incident aux points  $(C_k), k = 1, \dots, c$  et à mesurer l'erreur dans la zone à contrôler aux points  $(E_l), l = 1, \dots, e$  (voir figure 2.1). Le signal primaire est produit par une ou plusieurs sources situées au voisinage de  $S_p$ . Le contrôle est effectué par des sources secondaires placées en  $S_j, j = 1, \dots, s$  dans le but de minimiser le son dans un domaine D.

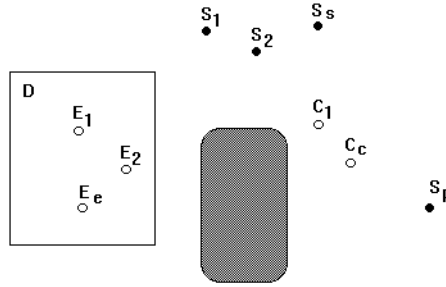


FIG. 2.1 – Schéma d'un dispositif de contrôle actif.

Nous supposons que le signal primaire dépend linéairement de  $p$  paramètres ce qui s'exprime au point  $\mathbf{y}$  à la fréquence  $\omega$  par

$$p_{prim}(\mathbf{y}, \omega) = \sum_{i=1}^p r_i(\omega) \hat{p}_{prim}^i(\mathbf{y}, \omega) \quad (2.1)$$

$\hat{p}_{prim}^i(\mathbf{y}, \omega)$  est le champ produit par une source  $i$  unité vibrant à la pulsation  $\omega$ .  $r_i(\omega)$  sont les amplitudes des sources dans le domaine fréquentiel. Cette description convient dans le cas d'un signal harmonique ou déterministe.

Nous nous intéresserons en fait au cas plus général où les amplitudes  $r_1(t), \dots, r_p(t)$  sont des variables aléatoires. La relation entre les bruits émis par les sources  $i$  et  $j$  entre deux instants  $t_1$  et  $t_2$  est définie par une matrice de corrélation.

$$R_{ij}^p(t_1, t_2) = E(r_i(t_1)r_j(t_2)) \quad (2.2)$$

où  $E$  désigne l'espérance de la variable aléatoire  $r_i(t_1)r_j(t_2)$  (en supposant les variables centrées, soit  $E(r_i) = 0$ ). Nous nous limiterons aux processus stationnaires pour lesquels  $\mathbf{R}^p$  ne dépend que de l'intervalle de temps  $\tau = t_2 - t_1$ . En supposant de plus le processus ergodique nous avons

$$R_{ij}^p(\tau) = E(r_i(t)r_j(t+\tau)) = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} r_i(t)r_j(t+\tau)dt = R_{ji}^p(-\tau) \quad (2.3)$$

La puissance spectrale des sources primaires se définit par

$$S_{ij}^p(\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} R_{ij}^p(\tau)e^{i\omega\tau}d\tau = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T}(r_{Ti}^*(\omega)r_{Tj}(\omega)) = S_{ji}^p(-\omega) \quad (2.4)$$

où l'indice  $T$  signifie que la fonction en temps est tronquée à l'intervalle  $[-T/2, T/2]$ .

### Cas particuliers

1) Les sources sont indépendantes.

$\mathbf{R}^p$  est diagonale et

$$\begin{aligned} R_{ij}^p(\tau) &= R_i(\tau)\delta_{ij} \\ S_{ij}(\omega) &= S_i(\omega)\delta_{ij} \end{aligned} \quad (2.5)$$

où  $R_i(\tau)$  est la fonction d'autocorrélation de la source  $i$  et  $S_i(\omega)$  sa puissance spectrale.  $\mathbf{S}$  est une matrice d'ordre  $p$  si l'on suppose  $S_i(\omega) > 0$  pour tous  $i$  et  $\omega$ .

2) Le signal est harmonique de pulsation  $\omega_0$

Les sources ont pour amplitudes  $A_i$ .

$$R_{ij}^p(\tau) = \frac{1}{2}Re(A_i A_j^* e^{i\omega_0\tau}) \quad (2.6)$$

$$S_{ij}(\omega) = \frac{\pi}{2}(A_i A_j^* \delta(\omega + \omega_0) + A_i^* A_j \delta(\omega - \omega_0)) \quad (2.7)$$

Dans ce cas  $\mathbf{S}$  est une matrice d'ordre 1 aux pulsations  $\omega_0$  et  $-\omega_0$ .

Le champ secondaire est produit par  $s$  sources placées en  $S_j, j = 1, \dots, s$  et d'amplitudes  $s_j$ . Il s'exprime dans le domaine fréquentiel par

$$p_{sec}(\mathbf{y}, \omega) = \sum_{j=1}^s s_j(\omega) \hat{p}_{sec}^j(\mathbf{y}, \omega) \quad (2.8)$$

où  $\hat{p}_{sec}^j(\mathbf{y}, \omega)$  sont les champs produits par des sources d'amplitude unité. Nous noterons

$$\mathbf{s}(\omega) = \begin{pmatrix} s_1(\omega) \\ \vdots \\ s_s(\omega) \end{pmatrix} \quad (2.9)$$

le vecteur des amplitudes des sources secondaires.

Dans le domaine temporel les valeurs des pressions s'obtiennent à partir des amplitudes par des convolutions en temps (cas général) ou par une transformation de Fourier inverse (cas déterministe).

$$\begin{aligned} p_{prim}(\mathbf{y}, t) &= \sum_{i=1}^p (r_i * \hat{p}_{prim}^i)(\mathbf{y}, t) \\ &= \frac{1}{2\pi} \sum_{i=1}^p \int_{-\infty}^{+\infty} r_i(\omega) \hat{p}_{prim}^i(\mathbf{y}, \omega) e^{-i\omega t} d\omega \\ p_{sec}(\mathbf{y}, t) &= \sum_{j=1}^s (s_j * \hat{p}_{sec}^j)(\mathbf{y}, t) \\ &= \frac{1}{2\pi} \sum_{j=1}^s \int_{-\infty}^{+\infty} s_j(\omega) \hat{p}_{sec}^j(\mathbf{y}, \omega) e^{-i\omega t} d\omega \end{aligned} \quad (2.10)$$

Le champ total en un point  $\mathbf{y}$  au temps  $t$  est

$$p_{tot}(\mathbf{y}, t) = p_{prim}(\mathbf{y}, t) + p_{sec}(\mathbf{y}, t) \quad (2.11)$$

Le principe du contrôle est de chercher les amplitudes  $s_j(t)$  des sources secondaires pour minimiser le champ de pression acoustique dans le domaine  $D$  de l'espace à l'aide d'un contrôle ponctuel en des points particuliers  $\mathbf{E}_l, l = 1, \dots, e$ . La fonction de coût sera

$$J = E\left(\sum_{l=1}^e |p_{tot}(\mathbf{E}_l, t)|^2\right) \quad (2.12)$$

Nous suivrons l'approche utilisée par l'algorithme LMS qui consiste à chercher les amplitudes des sources secondaires sous la forme  $s_j(\omega) = \sum_{k=1}^c G_{jk}(\omega) p_{tot}(\mathbf{C}_k, \omega)$ , c'est à dire déduites du champ total aux points  $\mathbf{C}_k$  à l'aide des filtres  $G_{jk}$ . Le champ total contient la contribution des sources secondaires et donc l'effet de feedback de celles-ci sur le contrôle est modélisé. Le problème revient en fait à déterminer les fonctions de transfert  $G_{jk}(\omega)$  optimales.

Nous commencerons par étudier le cas plus simple des contrôles sans contrainte sur  $\mathbf{G}$  avant de traiter la situation où ces filtres devront vérifier la causalité.

## 2.2 Contrôle non-causal

### 2.2.1 Principe

Notons

$$\mathbf{c}(t) = \begin{pmatrix} c_1(t) \\ \vdots \\ c_c(t) \end{pmatrix} \quad (2.13)$$

Le vecteur représentant le signal capté aux points  $\mathbf{C}_k$ ,  $1 \leq k \leq c$  à l'instant  $t$  dû au champ primaire seul. Nous avons

$$c_k(t) = \sum_{i=1}^p (r_i * \hat{p}_{prim}^i)(\mathbf{C}_k, t) \quad (2.14)$$

La matrice de corrélation du champ primaire entre les points  $\mathbf{C}_k$  est

$$\begin{aligned} R_{kk'}^c(\tau) &= E(c_k(t)c_{k'}(t+\tau)) \\ &= \sum_{i,i'=1}^p E\left(\int_{-\infty}^{+\infty} r_i(\tau_1)\hat{p}_{prim}^i(\mathbf{C}_k, t-\tau_1)d\tau_1 \int_{-\infty}^{+\infty} r_{i'}(\tau_2)\hat{p}_{prim}^{i'}(\mathbf{C}_{k'}, t+\tau-\tau_2)d\tau_2\right) \\ &= \sum_{i,i'=1}^p \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \hat{p}_{prim}^i(\mathbf{C}_k, t-\tau_1)\hat{p}_{prim}^{i'}(\mathbf{C}_{k'}, t+\tau-\tau_2)E(r_i(\tau_1)r_{i'}(\tau_2))d\tau_1d\tau_2 \\ &= \sum_{i,i'=1}^p \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \hat{p}_{prim}^i(\mathbf{C}_k, t-\tau_1)\hat{p}_{prim}^{i'}(\mathbf{C}_{k'}, t+\tau-\tau_2)R_{ii'}^p(\tau_2-\tau_1)d\tau_1d\tau_2 \end{aligned} \quad (2.15)$$

Une transformation de Fourier change les convolutions en produits et donne

$$S_{kk'}^c(\omega) = \sum_{i,i'=1}^p P_{ik}(-\omega)P_{i'k'}(\omega)S_{ii'}^p(\omega) = \sum_{i,i'=1}^p P_{ik}^*(\omega)P_{i'k'}(\omega)S_{ii'}^p(\omega) \quad (2.16)$$

où la matrice  $\mathbf{P}$  est définie par  $P_{ik}(\omega) = \hat{p}_{prim}^i(\mathbf{C}_k, \omega)$ . Sous forme matricielle la relation 2.16 s'exprime par

$$\mathbf{S}^c(\omega) = {}^t\mathbf{P}(-\omega)\mathbf{S}^p(\omega)\mathbf{P}(\omega) = \mathbf{P}^H(\omega)\mathbf{S}^p(\omega)\mathbf{P}(\omega) \quad (2.17)$$

(L'exposant  $H$  désigne le hermitien conjugué). Le vecteur pression totale aux points  $\mathbf{C}_k$  est

$$\mathbf{c}(t) + (\mathbf{F} * \mathbf{s})(t) \quad (2.18)$$

où  $\mathbf{F}$  modélise le feed-back des sources secondaires et s'exprime par

$$\begin{aligned} (\mathbf{F} * \mathbf{s})_k(t) &= \sum_{j=1}^s (F_{kj} * s_j)(t) \\ &= \sum_{j=1}^s \int_0^{\infty} F_{kj}(\tau) s_j(t-\tau) d\tau \end{aligned} \quad (2.19)$$

car les fonctions de transfert  $F_{kj}$  qui représentent le comportement d'un système physique sont causales. Dans la modélisation nous avons  $F_{kj}(\omega) = \hat{p}_{sec}^j(\mathbf{C}_k, \omega)$ . Ces fonctions peuvent être mesurées expérimentalement et, dans ce cas, contiendront en plus du terme précédent les fonctions de transfert modélisant le comportement des microphones et des haut-parleurs secondaires.

Les amplitudes  $\mathbf{s}$  vérifient donc

$$\mathbf{s} = \mathbf{G} * (\mathbf{c} + \mathbf{F} * \mathbf{s}) \quad (2.20)$$

où  $\mathbf{G}$  est la matrice des fonctions de transfert  $[G_{jk}(t)]$ ,  $1 \leq j \leq s$ ,  $1 \leq k \leq c$  entre le champ de pression aux capteurs et les signaux envoyés aux sources secondaires. C'est l'inconnu du problème que l'on se propose de calculer et qui sera déterminée expérimentalement à l'aide de l'algorithme LMS.

De même nous pouvons construire le vecteur  $\mathbf{d}$  des pressions aux points d'erreur  $\mathbf{E}_l$  dû au champ primaire seul soit

$$d_l(t) = p_{prim}(\mathbf{E}_l, t) \quad 1 \leq l \leq e \quad (2.21)$$

Aux mêmes points le champ dû aux sources secondaires est

$$(\mathbf{C} * \mathbf{s})(t) \quad (2.22)$$

avec  $C_{lj}(\omega) = \hat{p}_{sec}^j(\mathbf{E}_l, \omega)$   $1 \leq l \leq e$ ,  $1 \leq j \leq s$ . La matrice  $\mathbf{C}$  sera de nouveau calculée en résolvant des problèmes de diffraction et peut être mesurée expérimentalement. Le vecteur champ total aux points  $\mathbf{E}_l$  est donc

$$\mathbf{d}(t) + (\mathbf{C} * \mathbf{s})(t) \quad (2.23)$$

Dans cette section nous n'imposerons pas de contrainte sur  $\mathbf{G}$ . Nous pouvons alors travailler dans le domaine fréquentiel. Les convolutions se transforment en produits et nous pouvons étudier le comportement fréquence par fréquence de manière indépendante. Avec une dépendance implicite des variables en fonction de  $\omega$  l'équation 2.20 donne

$$\mathbf{s} = (\mathbf{I} - \mathbf{GF})^{-1} \mathbf{Gc} = \mathbf{Hc} \quad (2.24)$$

ce qui définit le filtre  $\mathbf{H}$  entre le champ primaire aux points  $\mathbf{C}_k$  et les amplitudes des sources secondaires. On peut retrouver  $\mathbf{G}$  à partir de  $\mathbf{H}$  par

$$\mathbf{G} = \mathbf{H}(\mathbf{I} + \mathbf{FH})^{-1} \quad (2.25)$$

Nous choisirons en fait de minimiser par rapport à  $\mathbf{H}$  à partir duquel le critère d'erreur s'exprime simplement.  $\mathbf{G}$  se retrouve ensuite par la relation précédente. Le critère d'erreur est alors

$$\begin{aligned} J(\omega) &= E((\mathbf{d} + \mathbf{Cs})^H (\mathbf{d} + \mathbf{Cs})) \\ &= E((\mathbf{d} + \mathbf{CHc})^H (\mathbf{d} + \mathbf{CHc})) \end{aligned} \quad (2.26)$$

Cette dernière écriture peut être transformée en remarquant que

$$\begin{aligned}
(\mathbf{CHc})_l &= \sum_{j=1}^s \sum_{k=1}^c C_{lj} H_{jk} c_k \\
&= \sum_{j=1}^s \sum_{k=1}^c C_{lj} c_k H_{jk} \\
&= \sum_{j=1}^s \sum_{k=1}^c R_{ljk} H_{jk} \\
&= (\mathbf{Rh})_l
\end{aligned} \tag{2.27}$$

où la matrice  $\mathbf{R}$  et le vecteur  $\mathbf{h}$  sont définis par

$$\mathbf{R} = \begin{pmatrix} R_{111}(\omega) & \cdot & R_{11c}(\omega) & \cdot & R_{1sc}(\omega) \\ \cdot & & & & \cdot \\ \cdot & & & & \\ R_{l11}(\omega) & \cdot & R_{l1c}(\omega) & \cdot & R_{lsc}(\omega) \end{pmatrix} \tag{2.28}$$

et

$$\mathbf{h} = \begin{pmatrix} h_{11}(\omega) \\ \cdot \\ h_{1c}(\omega) \\ \cdot \\ h_{sc}(\omega) \end{pmatrix} \tag{2.29}$$

Le critère à minimiser devient

$$\begin{aligned}
J(\omega) &= E((\mathbf{d} + \mathbf{Rh})^H (\mathbf{d} + \mathbf{Rh})) \\
&= E(\mathbf{d}^H \mathbf{d}) + E(\mathbf{d}^H \mathbf{R}) \mathbf{h} + \mathbf{h}^H E(\mathbf{R}^H \mathbf{d}) + \mathbf{h}^H E(\mathbf{R}^H \mathbf{R}) \mathbf{h}
\end{aligned} \tag{2.30}$$

Le comportement dépend de l'inversibilité et du conditionnement de la matrice  $E(\mathbf{R}^H \mathbf{R})$ . Nous avons

$$\begin{aligned}
E(\mathbf{R}^H \mathbf{R})_{(jk)(j'k')} &= E\left(\sum_{l=1}^e C_{lj}^* c_k^* C_{lj'} c_{k'}\right) \\
&= \sum_{l=1}^e C_{lj}^* C_{lj'} E(c_k^* c_{k'}) \\
&= \sum_{l=1}^e C_{lj}^* C_{lj'} S_{kk'}^c \\
&= (\mathbf{C}^H \mathbf{C})_{jj'} S_{kk'}^c
\end{aligned} \tag{2.31}$$

Pour que  $E(\mathbf{R}^H \mathbf{R})$  soit inversible il faut assez de micros d'erreurs pour que  $\mathbf{C}^H \mathbf{C}$  soit définie positive et peu de capteurs pour que le rang de  $\mathbf{S}^c$  soit égal à  $c$ . Pour éviter une étude détaillée des différents cas et des problèmes associés nous minimiserons en fait

$$J_\epsilon = J + \epsilon \mathbf{h}^H \mathbf{h} \tag{2.32}$$

où l'on introduit une pénalisation avec un paramètre  $\epsilon$  pour éviter un accroissement trop important des coefficients des filtres en cas de mauvais conditionnement. Le filtre optimal est alors

$$\mathbf{h}_{opt} = -(E(\mathbf{R}^H \mathbf{R}) + \epsilon \mathbf{I})^{-1} E(\mathbf{R}^H \mathbf{d}) \quad (2.33)$$

$$J_\epsilon^{min} = E(\mathbf{d}^H \mathbf{d}) - E(\mathbf{d}^H \mathbf{R})(E(\mathbf{R}^H \mathbf{R}) + \epsilon \mathbf{I})^{-1} E(\mathbf{R}^H \mathbf{d}) \quad (2.34)$$

avec

$$\begin{aligned} E(\mathbf{d}^H \mathbf{d}) &= \mathbf{Q}^H \mathbf{S}^p \mathbf{Q} \\ Q_{il} &= \hat{p}_{prim}^i(\mathbf{E}_l, \omega) \end{aligned} \quad (2.35)$$

et

$$\begin{aligned} E(\mathbf{R}^H \mathbf{d})_{jk} &= E(C_{lj}^* c_k^* Q_{i'l} r_{i'}) \\ &= E(C_{lj}^* P_{ik}^* r_i^* Q_{i'l} r_{i'}) \\ &= C_{lj}^* P_{ik}^* Q_{i'l} S_{ii'}^p \end{aligned} \quad (2.36)$$

(Sommmation sur les indices répétés).

Pour un contrôle non causal dans une bande de fréquence  $[f_{inf}, f_{sup}]$  le critère est

$$J_\epsilon = \int_{2\pi f_{inf}}^{2\pi f_{sup}} J_\epsilon(\omega) d\omega \quad (2.37)$$

Sa minimisation se réalise fréquence par fréquence et

$$J_\epsilon^{min} = \int_{2\pi f_{inf}}^{2\pi f_{sup}} J_\epsilon^{min}(\omega) d\omega \quad (2.38)$$

Comme au chapitre précédent nous pouvons ensuite définir l'efficacité du contrôle par

$$\gamma = 10 \log_{10} \left( \frac{J_\epsilon^{min}}{J_0} \right) \quad (2.39)$$

où  $J_0$  est la valeur du critère en l'absence de contrôle ( $\mathbf{h}=0$ ).

## 2.2.2 Remarques et exemples

Cette situation est très voisine des cas étudiés dans le chapitre précédent. Nous pouvons cependant faire quelques remarques générales sur ce système.

Lorsque le champ primaire est engendré par une source ponctuelle un seul capteur suffit pourvu qu'il ne soit pas situé en un point où le champ de pression primaire est nul. En effet dans ce cas

$$s_j = H_{j1} c_1 \quad (2.40)$$

et si  $c_1 \neq 0$  on peut trouver des scalaires  $H_{j1}$ ,  $1 \leq j \leq s$  qui créent la distribution de sources secondaires optimale minimisant  $J(\omega)$ .

Si le nombre de micros d'erreur vérifie  $e \leq s$ , il est possible de trouver une distribution optimale qui annule le champ de pression sur tous les microphones d'erreur sauf configuration exceptionnelle.

Le cas le plus intéressant est  $s < e$ . Par rapport au chapitre précédent la valeur du critère J et l'atténuation obtenue sont un peu différentes. Toutefois quand e croit le critère se rapproche de l'intégrale de  $p^2$  multipliée par e et les deux critères finissent par se confondre.

Pour illustrer ceci nous avons repris l'exemple du mur bidimensionnel avec la disposition des sources définie sur la figure 2.2. Le contrôle est effectué par 3 micros d'erreur placés en  $\mathbf{E}_1 = (-1.5, 0.5)$ ,  $\mathbf{E}_2 = (-1.5, 1.5)$ ,  $\mathbf{E}_3 = (-1.5, 2.5)$ , un capteur placé en  $\mathbf{C}_3 = (1.0, 1.5)$  et la source primaire en  $\mathbf{S}_p = (2.0, 0.5)$ .

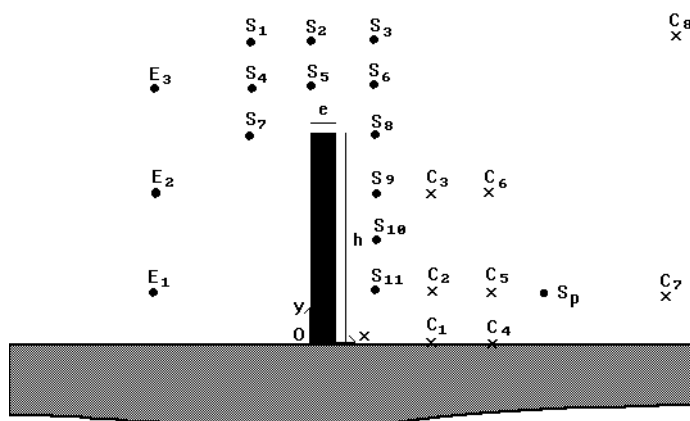


FIG. 2.2 – Positions des sources, des capteurs et des micros d'erreur.

Le tableau 2.1 compare, à la fréquence 500Hz, les valeurs de l'atténuation obtenues avec la somme des carrés des pressions aux points d'erreur et le critère défini au chapitre précédent par l'intégrale de  $p^2$  sur le domaine  $D=[-2,-1] \times [0,3]$  (avec 15 points de Gauss par côté). Bien que les valeurs de l'atténuation soient un peu différentes la tendance en fonction de la position de la source secondaire est identique.

Position Source Sec.	$\mathbf{S}_1$	$\mathbf{S}_2$	$\mathbf{S}_3$	$\mathbf{S}_4$	$\mathbf{S}_5$	$\mathbf{S}_6$	$\mathbf{S}_7$	$\mathbf{S}_8$	$\mathbf{S}_9$	$\mathbf{S}_{10}$	$\mathbf{S}_{11}$
$\gamma$ (dB)(chap. préc.)	-0.1	0.0	-0.9	-1.0	-0.2	-1.3	-3.0	-10.7	-18.5	-17.4	-16.0
$\gamma$ (dB)(3 micros)	-1.2	-0.8	-1.0	-1.1	0.0	-3.9	-4.1	-12.6	-20.8	-19.5	-16.1

TAB. 2.1 – Atténuation suivant la source en 2D à 500Hz

Les valeurs de l'atténuation dépendent du nombre de micros utilisés. Pour évaluer cet effet la figure 2.3 représente l'évolution de l'atténuation en fonction du nombre de micros à la fréquence 2000Hz avec une source secondaire placée au point 9 et un capteur en  $\mathbf{C}_3$ . Les micros sont disposés régulièrement dans le domaine D avec le même intervalle de distance en hauteur et largeur. Nous constatons une convergence vers la valeur -14.2dB obtenue avec le critère d'intégration sur le domaine D. Un faible nombre de micros tend à surestimer l'atténuation réalisable. Toutefois l'erreur sur le niveau d'atténuation en prenant 3 micros n'est que de 25% et cette configuration peut suffire dans des applications pratiques.

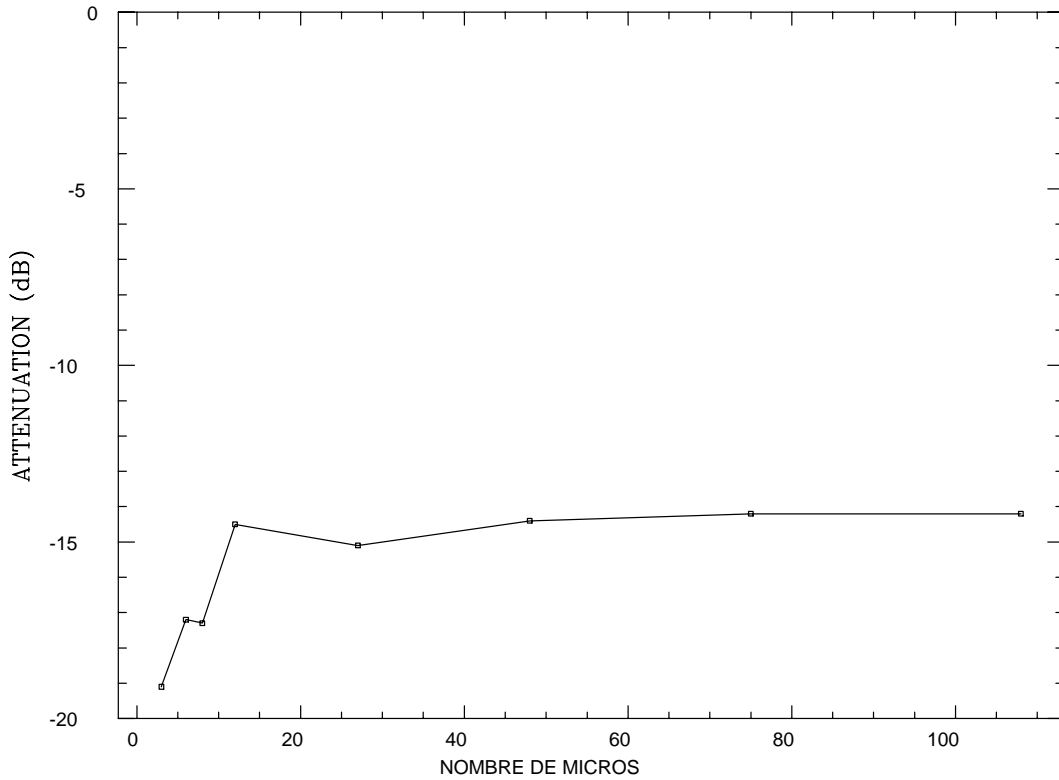


FIG. 2.3 – Variation de l'atténuation en fonction du nombre de micros d'erreur.

Avec la même disposition géométrique le tableau 2.2 donne l'atténuation lors d'un contrôle sur la bande de fréquence [10Hz,2000Hz] avec le critère défini par la relation 2.37 en supposant une puissance spectrale de la source primaire constante dans cet intervalle de fréquence. A titre de comparaison nous avons aussi calculé l'atténuation pour un contrôle à 12 micros. La différence entre les deux séries de valeurs est faible. Nous obtenons ainsi une estimation de l'efficacité moyenne du contrôle par rapport à la fréquence. Les points intéressants se situent de nouveau devant le mur et à son sommet.

Position Source Sec.	$S_1$	$S_2$	$S_3$	$S_4$	$S_5$	$S_6$	$S_7$	$S_8$	$S_9$	$S_{10}$	$S_{11}$
$\gamma$ (dB)(3 micros)	-13.5	-15.3	-15.7	-15.3	-16.8	-18.3	-16.2	-27.0	-30.8	-31.9	-32.6
$\gamma$ (dB)(12 micros)	-12.6	-14.2	-15.1	-14.7	-16.2	-17.5	-15.0	-25.4	-29.6	-30.2	-30.6

TAB. 2.2 – /

Atténuation sur la bande [10Hz,2000Hz]

Un calcul tridimensionnel est effectué à 500Hz et dans la bande [5Hz,2000Hz]. La figure 2.2 représente maintenant une coupe par le plan contenant les sources qui sont ponctuelles alors que précédemment il s'agissait de lignes de sources. Le tableau 2.3 donne l'atténuation pour un contrôle à 3 et 12 micros et un capteur en  $C_3$ . Les positions intéressantes sont de nouveau devant le mur.

Dans le cas d'un champ primaire dû à plusieurs sources le nombre et la position des capteurs ont une grande influence. Traitons par exemple la situation bidimensionnelle où le champ primaire est engendré par 4 sources non corrélées et placées en  $S_{p1} = (2, 0)$ ,  $S_{p2} = (2, 0.5)$ ,  $S_{p3} = (2.5, 0)$  et  $S_{p4} = (2.5, 0.5)$ . Définissons 6 positions possible pour les capteurs en  $C_1 = (1, 0)$ ,  $C_2 = (1, 0.5)$ ,  $C_3 = (1, 1.5)$ ,  $C_4 = (1.5, 0)$ ,  $C_5 = (1.5, 0.5)$  et  $C_6 = (1.5, 1.5)$ . La

Position Source Sec.	$S_1$	$S_2$	$S_3$	$S_4$	$S_5$	$S_6$	$S_7$	$S_8$	$S_9$	$S_{10}$	$S_{11}$
$\gamma$ (dB)(500Hz) 3 mic.	-2.7	-1.0	-0.9	-1.2	-0.4	-3.7	-5.2	-14.6	-25.9	-20.0	-18.6
$\gamma$ (dB)(500Hz) 12 mic.	-0.1	-0.5	-0.6	-1.0	0.0	-2.6	-4.2	-13.2	-20.0	-19.1	-16.7
$\gamma$ (dB)(5-2000Hz) 3 mic.	-5.1	-5.6	-4.8	-5.0	-4.8	-6.0	-7.3	-15.6	-24.0	-21.6	-20.8
$\gamma$ (dB)(5-2000Hz) 12 mic.	-3.4	-3.8	-4.2	-3.9	-4.2	-5.0	-5.5	-14.0	-21.4	-19.9	-18.5

TAB. 2.3 – /

Atténuation en 3D à 500 Hz et sur la bande [5Hz,2000Hz]

figure 2.4 représente le niveau d'atténuation à 500Hz en plaçant la source secondaire au point 9 et en ajoutant successivement les capteurs de  $C_1$  à  $C_6$ . On constate qu'à partir de 4 capteurs le champ primaire est complètement observable et l'addition de capteurs supplémentaires est sans effet.

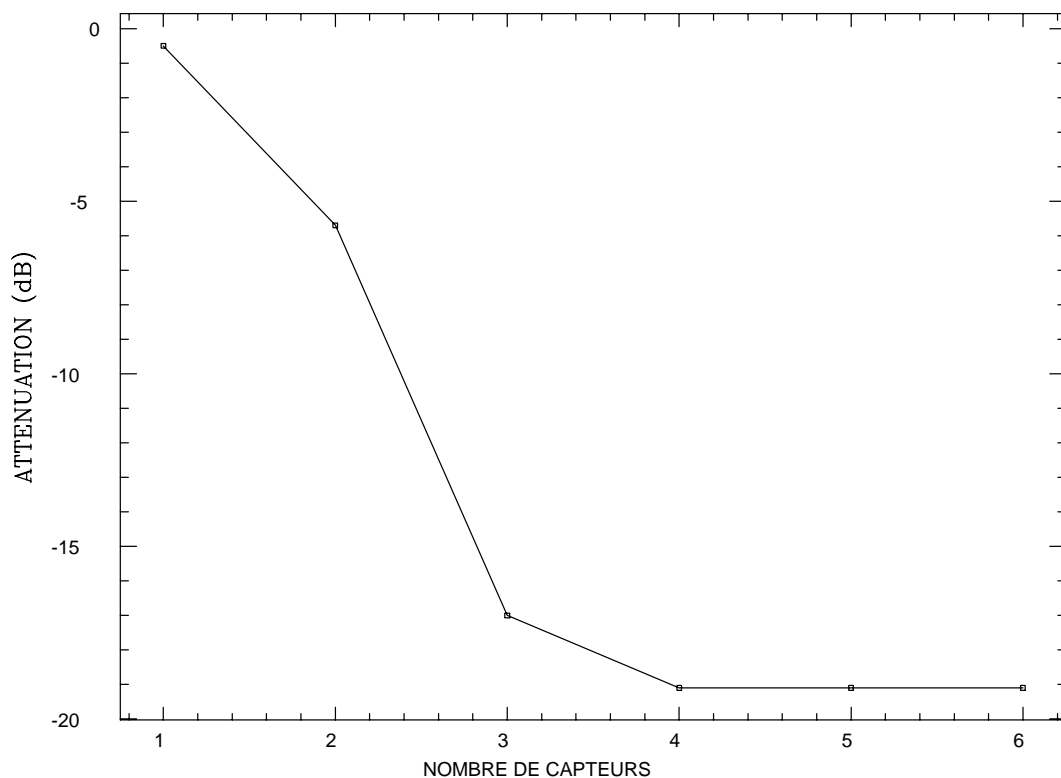


FIG. 2.4 – Influence du nombre de capteurs.

Dans les situations où le nombre de capteurs est inférieur au nombre de degrés de liberté du champ primaire leurs positions sont déterminantes. Avec les 4 sources primaires précédentes, un contrôle effectué à 500Hz à l'aide d'un seul capteur et d'une source secondaire en position 9 conduit au tableau 2.4 qui donne l'atténuation obtenue en plaçant le capteur successivement aux positions  $C_1$  à  $C_8$  avec  $C_7 = (3, 0.5)$  et  $C_8 = (3, 3)$  ainsi qu'aux positions occupées par les sources  $S_8$  et  $S_{10}$ . On peut constater dans ce cas la grande influence de la position sur le résultat. La proximité de la source primaire ne semble pas un critère important pour l'efficacité. Par contre la proximité de la source secondaire semble souhaitable. Plus important encore semble être la proximité du chemin de diffraction. Le champ primaire

dans la zone des micros d'erreur provient en effet du champ primaire diffracté par le haut du mur et sa mesure est donc essentielle.

Position capteur	$\mathbf{C}_1$	$\mathbf{C}_2$	$\mathbf{C}_3$	$\mathbf{C}_4$	$\mathbf{C}_5$	$\mathbf{C}_6$	$\mathbf{C}_7$	$\mathbf{C}_8$	$\mathbf{S}_8$	$\mathbf{S}_{10}$
$\gamma$ (dB)	-0.5	-4.1	-11.3	-0.7	-2.1	-4.4	-3.6	-1.4	-18.5	-4.5

TAB. 2.4 – Influence de la position du capteur

## 2.3 Contrôle causal

Dans le domaine temporel l'amplitude des sources est

$$s_j(t) = \sum_{k=1}^c (H_{jk} * c_k)(t) = \sum_{k=1}^c \int_{-\infty}^{+\infty} H_{jk}(\tau) c_k(t - \tau) d\tau \quad (2.41)$$

Si l'on veut que le contrôle soit causal, c'est à dire qu'il n'anticipe pas sur le comportement futur de la source, il faut  $H_{jk}(\tau) = 0$  pour  $\tau < 0$ . On se propose donc de trouver des fonctions  $H_{jk}(\tau)$  causales qui minimisent l'erreur aux points  $\mathbf{E}_l$  soit

$$\begin{aligned} J &= E \left( \sum_{l=1}^e |d_l(t) + \sum_{j=1}^s (s_j * \hat{p}_{sec}^j)(\mathbf{E}_l, t)|^2 \right) \\ &= E \left( \sum_{l=1}^e |d_l(t) + \sum_{j=1}^s \sum_{k=1}^c \int_0^{+\infty} H_{jk}(\tau) (\hat{p}_{sec}^j * c_k)(\mathbf{E}_l, t - \tau) d\tau|^2 \right) \end{aligned} \quad (2.42)$$

Posons

$$\begin{aligned} \mathbf{h}(\tau) &= \begin{pmatrix} H_{11}(\tau) \\ \cdot \\ H_{1c}(\tau) \\ \cdot \\ H_{sc}(\tau) \end{pmatrix} \\ \mathbf{k}(\tau) &= \begin{pmatrix} (\hat{p}_{sec}^1 * c_1)(\mathbf{E}_1, \tau) & \cdot & (\hat{p}_{sec}^1 * c_c)(\mathbf{E}_1, \tau) & \cdot & (\hat{p}_{sec}^s * c_c)(\mathbf{E}_1, \tau) \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ (\hat{p}_{sec}^1 * c_1)(\mathbf{E}_l, \tau) & \cdot & (\hat{p}_{sec}^1 * c_c)(\mathbf{E}_l, \tau) & \cdot & (\hat{p}_{sec}^s * c_c)(\mathbf{E}_l, \tau) \end{pmatrix} \end{aligned} \quad (2.43)$$

Nous avons

$$\begin{aligned} J &= E \left( |\mathbf{d}(t) + \int_0^{+\infty} \mathbf{k}(t - \tau) \mathbf{h}(\tau) d\tau|^2 \right) \\ &= E(\mathbf{d}^t(t) \mathbf{d}(t)) + 2E \left( \int_0^{+\infty} {}^t \mathbf{h}(\tau) {}^t \mathbf{k}(t - \tau) \mathbf{d}(t) d\tau \right) + \\ &\quad E \left( \int_0^{+\infty} \int_0^{+\infty} {}^t \mathbf{h}(\tau_2) {}^t \mathbf{k}(t - \tau_2) \mathbf{k}(t - \tau_1) \mathbf{h}(\tau_1) d\tau_1 d\tau_2 \right) \\ &= c + 2 \int_0^{+\infty} {}^t \mathbf{h}(\tau) \cdot \mathbf{b}(\tau) d\tau + \int_0^{+\infty} \int_0^{+\infty} {}^t \mathbf{h}(\tau_2) \mathbf{a}(\tau_2 - \tau_1) \mathbf{h}(\tau_1) d\tau_1 d\tau_2 \end{aligned} \quad (2.44)$$

où

$$\begin{aligned}
c &= E({}^t\mathbf{d}(t)\mathbf{d}(t)) \\
&= \frac{1}{2\pi} \sum_{l,i,i'} \int_{-\infty}^{+\infty} Q_{il}^*(\omega) Q_{i'l}(\omega) S_{ii'}^p(\omega) d\omega \\
\mathbf{b}(\tau) &= E({}^t\mathbf{k}(t-\tau)\mathbf{d}(t)) \\
b_{jk}(\tau) &= \frac{1}{2\pi} E\left(\int_{-\infty}^{+\infty} Q_{il}(\omega) r_i(\omega) P_{i'k}^*(\omega) r_{i'}^*(\omega) C_{ij}^*(\omega) e^{-i\omega\tau} d\omega\right) \\
&= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} Q_{il}(\omega) P_{i'k}^*(\omega) C_{ij}^*(\omega) S_{ii'}^p(\omega) e^{-i\omega\tau} d\omega \\
\mathbf{a}(\tau) &= E({}^t\mathbf{k}(t)\mathbf{k}(t+\tau)) \\
a_{jkj'k'}(\tau) &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} C_{lj}^*(\omega) P_{ik}^*(\omega) C_{lj'}(\omega) P_{i'k'}(\omega) S_{ii'}^p(\omega) e^{-i\omega\tau} d\omega \quad (2.45)
\end{aligned}$$

On remarque que  $a_{j'k'jk}(\tau) = a_{jkj'k'}(-\tau)$ . La fonction  $\mathbf{h}(\tau)$  qui rend J minimum satisfait l'équation de Wiener-Hopf

$$\mathbf{b}(\tau) + \int_0^{+\infty} \mathbf{a}(\tau - \tau_1) \mathbf{h}(\tau_1) d\tau_1 = 0 \quad (2.46)$$

Définissons une discrétisation en temps en posant  $\tau_0 = 0, \dots, \tau_n = \frac{n}{N}T, \dots, \tau_N = T$ . On suppose que les fonctions de transfert prennent des valeurs négligeables pour  $t > T$ . Nous pouvons définir les grandeurs discrètes

$$\begin{aligned}
\mathbf{B} &= \begin{pmatrix} \mathbf{b}(\tau_0) \\ \vdots \\ \mathbf{b}(\tau_N) \end{pmatrix} \\
\mathbf{H} &= \frac{T}{N} \begin{pmatrix} \mathbf{h}(\tau_0) \\ \vdots \\ \mathbf{h}(\tau_N) \end{pmatrix} \\
{}^t\mathbf{K}(t) &= \begin{pmatrix} {}^t\mathbf{k}(t - \tau_0) \\ \vdots \\ {}^t\mathbf{k}(t - \tau_N) \end{pmatrix} \\
\mathbf{A} &= E({}^t\mathbf{K}(t)\mathbf{K}(t)) \\
A_{nm} &= (\mathbf{a}(\tau_n - \tau_m)) \quad 0 \leq n, m \leq N \quad (2.47)
\end{aligned}$$

L'équation de Wiener-Hopf sous forme discrète est

$$\mathbf{B} + \mathbf{A}\mathbf{H} = 0 \quad (2.48)$$

et a pour solution

$$\mathbf{H} = -\mathbf{A}^{-1}\mathbf{B} \quad (2.49)$$

Dans les simulations numériques  $J$  est calculée par cette formule. Dans une application réelle on minimiserait par un algorithme de gradient. Sous forme discrète  $J$  vaut

$$J = c + 2{}^t\mathbf{H}\mathbf{B} + {}^t\mathbf{H}\mathbf{A}\mathbf{H} \quad (2.50)$$

Son gradient par rapport à  $\mathbf{H}$  est

$$\nabla_H J = 2(\mathbf{B} + \mathbf{A}\mathbf{H}) \quad (2.51)$$

$$= 2E({}^t\mathbf{K}(t)\mathbf{d}(t) + {}^t\mathbf{K}(t)\mathbf{K}(t)\mathbf{H}) \quad (2.52)$$

$$= 2E({}^t\mathbf{K}(t)\mathbf{e}(t)) \quad (2.53)$$

où  $\mathbf{e}(t)$  est le vecteur des signaux d'erreur mesurés aux points  $\mathbf{E}_l$  au temps  $t$ .

En remplaçant l'espérance par les grandeurs instantanées, l'algorithme LMS minimise  $J$  par la méthode du gradient suivant la formule

$$\mathbf{H}_{n+1} = \mathbf{H}_n - 2\mu {}^t\mathbf{K}_n \mathbf{e}_n \quad (2.54)$$

où  $\mu$  est assez petit pour assurer la convergence et  $\mathbf{H}_n, \mathbf{K}_n, \mathbf{e}_n$  sont les valeurs des variables au temps  $n$ .

### 2.3.1 Exemples

Nous avons, dans un premier temps, fait un calcul sur une bande étroite de 2Hz centrée sur 500Hz avec un capteur en  $\mathbf{C}_3$  pour retrouver les résultats du cas harmonique. La source émet avec une puissance spectrale unité dans cette bande de fréquence et nous prenons des filtres de faibles longueurs ( $N=5$ ). Nous trouvons des résultats identiques au tableau 2.1.

Pour des problèmes avec de plus larges bandes de fréquence la longueur du filtre utilisé devient un paramètre important. La figure 2.5 représente la variation de l'atténuation en fonction de la longueur du filtre pour l'exemple du mur bidimensionnel contrôlé par 3 micros, une source secondaire placée au point 9 et un capteur en  $\mathbf{C}_3$  ou 4 capteurs en  $\mathbf{C}_2, \mathbf{C}_3, \mathbf{C}_5$  et  $\mathbf{C}_6$ . L'atténuation se stabilise pour de grandes longueurs de filtre. Dans ce cas particulier il faut prendre une longueur supérieure à 200 pour éviter une baisse sensible de l'atténuation par rapport au maximum atteignable avec cette configuration. Nous adopterons cette valeur dans les exemples suivants.

Reprenons la situation du mur bidimensionnel avec une ligne de sources émettant un bruit blanc dans la bande [10Hz,2000Hz]. Nous nous proposons de comparer l'efficacité respective d'un contrôle non-causal et causal avec de 1 à 4 capteurs  $\mathbf{C}_2, \mathbf{C}_3, \mathbf{C}_5$  et  $\mathbf{C}_6$  ajoutés successivement. Le tableau 2.5 montre que l'utilisation d'un seul capteur conduit à une atténuation médiocre alors qu'avec 4 capteurs on est proche de l'atténuation maximale atteignable pour cette configuration avec un contrôle non-causal. L'utilisation de 2 capteurs peut conduire à un résultat acceptable sauf au point 11 pour lequel le capteur  $\mathbf{C}_3$  est mal placé.

Pour estimer l'influence de la position des capteurs nous avons repris l'exemple précédent avec la source secondaire en  $\mathbf{S}_9$  et un seul capteur. Pour obtenir un contrôle efficace il faut

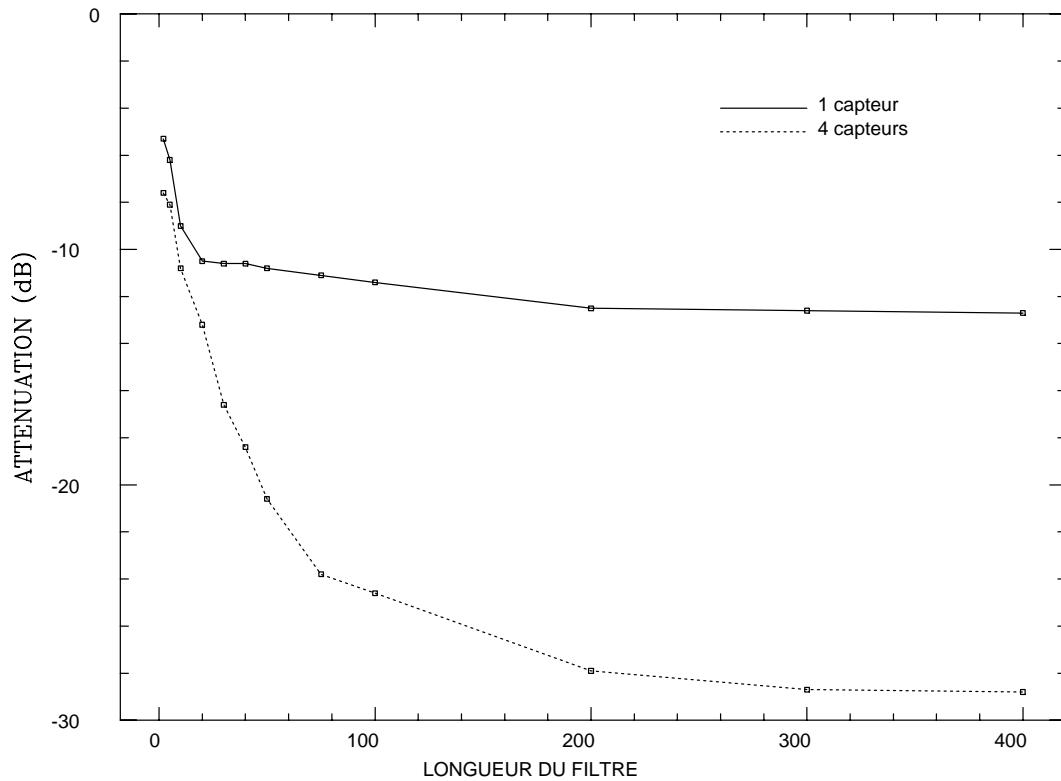


FIG. 2.5 – Evolution de l'atténuation en fonction de la longueur du filtre utilisé.

Position Source Sec.	$S_1$	$S_2$	$S_3$	$S_4$	$S_5$	$S_6$	$S_7$	$S_8$	$S_9$	$S_{10}$	$S_{11}$
$\gamma$ (dB)(causal 1 capt.)	-10.2	-11.5	-12.3	-11.1	-12.3	-13.5	-11.3	-14.8	-14.3	-12.3	-11.8
$\gamma$ (dB)(causal 2 capt.)	-11.0	-12.9	-13.5	-12.6	-14.3	-16.0	-13.7	-22.1	-22.4	-23.5	-15.0
$\gamma$ (dB)(causal 3 capt.)	-11.2	-13.1	-13.7	-13.0	-14.7	-16.2	-14.4	-24.4	-26.5	-27.9	-29.5
$\gamma$ (dB)(causal 4 capt.)	-11.2	-13.1	-13.7	-13.0	-14.7	-16.3	-14.4	-25.0	-27.9	-29.0	-30.0
$\gamma$ (dB)(non-causal)	-13.5	-15.3	-15.7	-15.3	-16.8	-18.3	-16.2	-27.0	-30.8	-31.9	-32.6

TAB. 2.5 – /

Comparaison d'un contrôle causal et non-causal en 2D sur [10Hz,2000Hz]

que la distance entre la source primaire et les micros d'erreur soit supérieure à la distance entre la source primaire et le capteur plus la distance entre la source secondaire et les micros d'erreur. Il est ainsi possible de réagir en fonction du signal émis par la source primaire. Dans le cas contraire le contrôle se réduit à une prédiction optimale de ce signal pour la configuration étudiée. Le tableau 2.6 donne la variation de l'atténuation en fonction de sa position pour 10 points différents. On constate que quelque soit sa position un seul capteur ne suffit pas pour obtenir l'atténuation maximale.

Une étude complète d'un contrôle à une source secondaire et un capteur d'erreur avec les positions définies précédemment donne un optimum avec la position  $S_{10} = (0.5, 1)$  pour le capteur et  $S_8 = (0.5, 2)$  pour la source secondaire et conduit à une atténuation de 18.6dB dans la bande de fréquence [10Hz,2000Hz].

Un calcul semblable est effectué pour des sources tridimensionnelles sur la bande de

Position capteur	$C_1$	$C_2$	$C_3$	$C_4$	$C_5$	$C_6$	$C_7$	$C_8$	$S_8$	$S_{10}$
$\gamma$ (dB)	-16.5	-14.3	-12.5	-12.5	-11.9	-14.4	-9.8	-5.3	-9.5	-17.3

TAB. 2.6 – Influence de la position du capteur en 2D

fréquence [5Hz,2000Hz] et conduit au tableau 2.7 analogue du tableau 2.5. Les tendances sont tout à fait semblables à la situation 2D.

Position Source Sec.	$S_1$	$S_2$	$S_3$	$S_4$	$S_5$	$S_6$	$S_7$	$S_8$	$S_9$	$S_{10}$	$S_{11}$
$\gamma$ (dB)(causal 1 capt.)	-4.4	-4.7	-4.4	-4.5	-4.4	-5.3	-5.9	-9.8	-10.4	-9.6	-8.3
$\gamma$ (dB)(causal 2 capt.)	-4.8	-5.2	-4.5	-4.7	-4.5	-5.7	-7.0	-15.2	-22.8	-20.8	-12.2
$\gamma$ (dB)(causal 3 capt.)	-4.8	-5.2	-4.5	-4.7	-4.6	-5.8	-7.0	-15.3	-23.4	-21.2	-20.3
$\gamma$ (dB)(causal 4 capt.)	-4.8	-5.2	-4.5	-4.8	-4.6	-5.8	-7.0	-15.3	-23.5	-21.3	-20.3
$\gamma$ (dB)(non-causal)	-5.1	-5.6	-4.8	-5.0	-4.8	-6.0	-7.3	-15.6	-24.0	-21.6	-20.8

TAB. 2.7 – /

Comparaison d'un contrôle causal et non-causal en 3D sur [5Hz,2000Hz]

Le tableau 2.8 montre l'influence de la position du capteur lors d'un contrôle 3D sur la même bande de fréquence. Les positions optimales sont légèrement différentes de la situation 2D. On obtient une faible atténuation pour les positions qui ne conduisent pas à un respect de la causalité ( $C_8$  et  $S_8$ ).

Une étude de tous les cas avec un capteur et une source secondaire donne pour optimum un capteur en  $C_4$  avec une source en  $S_{11}$  pour une atténuation de 19.6dB.

Un seul capteur associé à une source secondaire peut suffire à apporter une atténuation importante s'ils sont convenablement placés.

Position capteur	$C_1$	$C_2$	$C_3$	$C_4$	$C_5$	$C_6$	$C_7$	$C_8$	$S_8$	$S_{10}$
$\gamma$ (dB)	-21.2	-10.2	-11.9	-19.5	-18.6	-15.3	-12.5	-1.6	-3.0	-11.1

TAB. 2.8 – Influence de la position du capteur en 3D

## 2.4 Conclusion

La présence d'un mur permet d'obtenir une atténuation classique due à l'effet d'écran et de limiter le champ dans la zone d'ombre à la partie diffractée d'amplitude plus faible que le champ de pression moyen. Le contrôle peut alors se concentrer sur ce champ diffracté et est par conséquent plus facile à mettre en oeuvre que pour un champ libre. Cela explique aussi pourquoi les positions intéressantes pour les sources secondaires sont généralement situées au voisinage du sommet du mur près du chemin de diffraction sauf à basse fréquence où il est préférable de les placer le plus près possible des sources primaires. On ne constate généralement pas de surbruit important au voisinage de la source primaire. Une comparaison a été effectuée avec la situation sans mur voir Duhamel 1993 [64]. Dans ce cas on peut

obtenir un effet d'atténuation avec plusieurs sources secondaires au prix cependant d'une forte augmentation du champ de pression au voisinage des sources primaires.

Le contrôle d'une ligne de source pour des problèmes bidimensionnels conduit facilement à des atténuations de plus de 20dB sur la bande de fréquence [0-2000Hz] en utilisant seulement deux sources secondaires. Pour les exemples tridimensionnels nous pouvons espérer environ 15dB sur les cas présentés. L'étude en régime instationnaire n'a pas montré de grandes différences quant à l'atténuation maximale réalisable si le nombre de capteurs est suffisant pour obtenir une estimation correcte du champ de pression de la source primaire.

# Conclusion générale

Une méthode numérique a été développée pour calculer l'effet d'atténuation d'une onde acoustique à la traversée d'un stratifié élastique en contact avec un fluide. Quelques exemples de comportements de stratifiés ont permis d'observer l'influence de la composition, de l'épaisseur des couches et de l'ordre d'empilement. La méthode permettrait aussi le calcul des coefficients de réflexion et le test du pouvoir absorbant d'un empilement donné de matériaux.

Pour des problèmes plus généraux une méthode mixte éléments finis-équation intégrale a été construite. La partie éléments finis est générée par le code SAMCEF et permet la prise en compte de structures générales comportant en particulier des inhomogénéités. Nous pouvons aussi profiter des facilités de pré et post-traitement du code pour créer le maillage et visualiser les résultats. La méthode intégrale, fondée sur la formulation de Burton et Miller, s'affranchit du problème des fréquences singulières grâce à un noyau hypersingulier qui a été régularisé à l'aide de solutions statiques du problème intérieur. Dans le cas de la dimension deux, nous avons montré que l'utilisation d'éléments  $C^0$  n'était pas incompatible avec la régularisation proposée. L'utilisation d'une solution extérieure peut théoriquement supprimer les singularités créées par des coins. Une transformation de Fourier de la solution en fréquence permet d'obtenir le comportement temporel.

Dans le cas particulier d'un mur de section constante nous avons développé une méthode permettant d'obtenir le comportement tridimensionnel en présence d'une source ponctuelle ou d'une ligne de sources incohérentes à partir de la résolution de problèmes bidimensionnels seuls. Nous pouvons ainsi comparer l'efficacité de différentes géométries de section sur l'atténuation apportée par le mur avec un coût en calcul réaliste par rapport à un maillage tridimensionnel. Nous pouvons en particulier obtenir le comportement à haute fréquence (quelques milliers de Hz) ou avec des sources proches de l'objet. Des développements sont nécessaires pour inclure un comportement non rigide du sol.

Ces méthodes ont été appliquées à des problèmes de contrôle actif pour lesquels un calcul précis du champ de pression est important car les phénomènes d'interférence mis en jeu nécessitent une bonne connaissance des phases des pressions. A partir des champs engendrés par les sources primaires et secondaires nous pouvons calculer la réduction du niveau de pression pour une configuration donnée dans le domaine fréquentiel. Cette analyse a été étendue au domaine temporelle en réalisant un contrôle à l'aide de filtres adaptatifs dont on calcule numériquement les valeurs optimales. Elle permet d'observer l'influence très importante de la position des microphones, des sources secondaires et de la longueur des filtres sur l'efficacité du contrôle.

Le dispositif décrit dans le dernier chapitre est très proche d'une réalisation expérimentale concrète où les champs sont captés en des points particuliers à l'aide de micros. Les sources secondaires sont des haut-parleurs. Les micros et les haut-parleurs nécessaires sont ceux habituellement utilisés pour le matériel hifi et par conséquent bon marchés. Leurs caractéristiques en fonction de la fréquence sont incluses dans les fonctions de transfert qui modélisent les différents chemins acoustiques. Les directivités des sources réelles peuvent modifier en partie les résultats. Elles sont cependant modélisables en remplaçant les sources ponctuelles par des combinaisons de sources. Le contrôle est réalisé à l'aide d'une carte de traitement numérique du signal implémentée dans un micro-ordinateur et basée autour d'un DSP (digital

signal processor) plus ou moins puissant suivant le nombre de voies disponibles et la rapidité de réponse exigée qui dépend essentiellement de la distance entre les capteurs, les sources secondaires et les micros d'erreur. Ces distances sont a priori supérieures à celles rencontrées dans une gaine de ventilation où le dispositif de contrôle a montré son efficacité. Le contrôle est effectué par un algorithme de type LMS fonctionnant sur le DSP. L'étape de vérification expérimentale peut commencer par une étude sur maquette avant un test sur un site réel.

# Annexe A

## viscoélasticité

Nous avons seulement besoin de calculer les valeurs complexes des modules d'élasticité en fonction de la fréquence pour quelques modèles rhéologiques. Nous rapellons ici la forme des trois principaux modèles utilisés en pratique.

### A.1 Modèle de Kelvin-Voigt

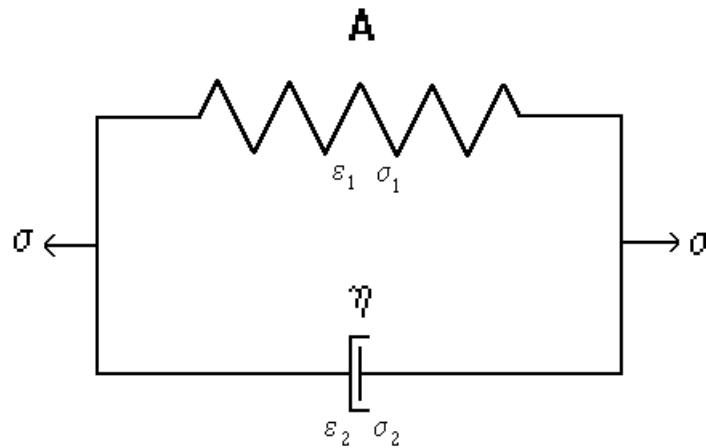


FIG. A.1 – Schéma du modèle de Kelvin-Voigt.

Les contraintes  $\sigma$  et les déplacements  $\epsilon$  vérifient les relations suivantes

$$\sigma = A\epsilon_1 + \eta\epsilon_2' \quad (\text{A.1})$$

$$\epsilon_1 = \epsilon_2 = \epsilon \quad (\text{A.2})$$

Pour des grandeurs sinusoïdales en temps on obtient

$$\sigma = (A - i\omega\eta)\epsilon \quad (\text{A.3})$$

Le module complexe vaut donc

$$E(\omega) = A - i\omega\eta \quad (\text{A.4})$$

## A.2 Modèle de Maxwell

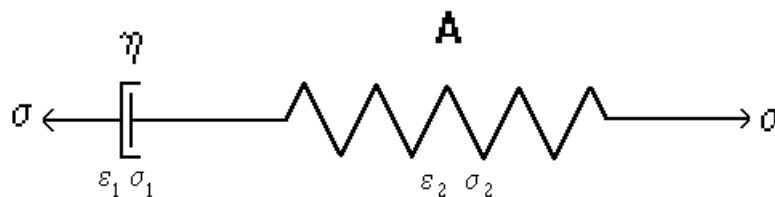


FIG. A.2 – Schéma du modèle de Maxwell.

Les équations sont

$$\sigma = A\epsilon_2 = \eta\epsilon_1' = -\eta i\omega\epsilon_1 \quad (\text{A.5})$$

$$\epsilon = \epsilon_1 + \epsilon_2 \quad (\text{A.6})$$

d'où

$$\epsilon = \frac{\sigma}{A} - \frac{\sigma}{\eta i\omega} \quad (\text{A.7})$$

$$E(\omega) = -\frac{A\eta i\omega}{A - i\eta\omega} = \frac{A\eta^2\omega^2}{A^2 + \eta^2\omega^2} - i\frac{A^2\eta\omega}{A^2 + \eta^2\omega^2} \quad (\text{A.8})$$

## A.3

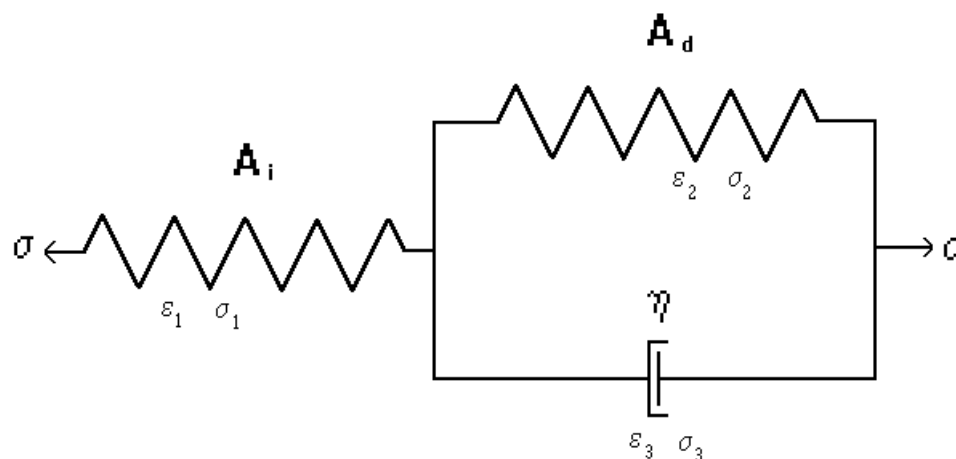


FIG. A.3 – Schéma du modèle de Zener.

Les équations sont

$$\sigma = \sigma_1 = \sigma_2 + \sigma_3$$

$$\epsilon = \epsilon_1 + \epsilon_2$$

$$\epsilon_2 = \epsilon_3 \quad (\text{A.9})$$

d'où

$$\epsilon = \frac{\sigma}{A_i} + \frac{\sigma}{A_d - \eta i \omega} \quad (\text{A.10})$$

$$E(\omega) = E_i + \frac{E_d - E_i}{1 - i\tau\omega} \quad (\text{A.11})$$

En définissant

$$\begin{aligned} E_i &= A_i \\ E_d &= \frac{A_i A_d}{A_i + A_d} \\ \tau &= \frac{\eta}{A_i + A_d} \end{aligned} \quad (\text{A.12})$$

$E_i$  est le module instantané,  $E_d$  le module différé et  $\tau$  le temps de relaxation.

Dans tous les cas on définit l'angle de perte par

$$tg(\varphi) = \frac{Im(E)}{Re(E)} \quad (\text{A.13})$$

soit

$$E(\omega) = |E| (\cos(\varphi) + i \sin(\varphi)) \quad (\text{A.14})$$

L'utilisation de modèles plus élaborés ne pose pas de difficulté dès lors que l'on connaît la dépendance de  $E$  en fonction de  $\omega$ . Il suffit d'ajouter dans le programme les quelques lignes traduisant cette fonction. On généralise ces relations au cas tridimensionnel pour obtenir la dépendance du tenseur des coefficients d'élasticité en fonction de la pulsation  $\omega$ .



# Annexe B

## Atténuation dans une sphère

Nous nous proposons de calculer l'atténuation du champ produit par une source primaire ponctuelle à l'aide d'une autre source ponctuelle à l'intérieur d'une sphère éloignée des deux sources voir figure B.1.

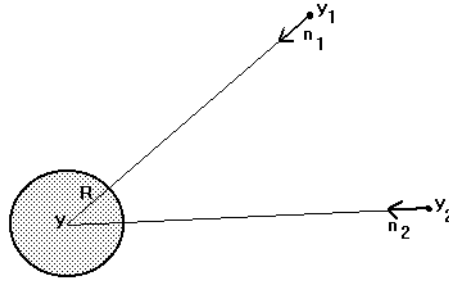


FIG. B.1 – Contrôle dans une sphère.

Les champs de pression créés par les deux sources placées en  $\mathbf{y}_1$  et  $\mathbf{y}_2$  sont au voisinage du centre  $\mathbf{y}$  de la sphère

$$\begin{aligned} p_1(\mathbf{x}) &= \frac{e^{ik|\mathbf{x}-\mathbf{y}_1|}}{4\pi|\mathbf{x}-\mathbf{y}_1|} \simeq \frac{e^{ik|\mathbf{y}-\mathbf{y}_1|}}{4\pi|\mathbf{y}-\mathbf{y}_1|} e^{ik\frac{\mathbf{y}-\mathbf{y}_1}{|\mathbf{y}-\mathbf{y}_1|} \cdot (\mathbf{x}-\mathbf{y})} = A_1 e^{ik\mathbf{n}_1 \cdot (\mathbf{x}-\mathbf{y})} \\ p_2(\mathbf{x}) &= \frac{e^{ik|\mathbf{x}-\mathbf{y}_2|}}{4\pi|\mathbf{x}-\mathbf{y}_2|} \simeq \frac{e^{ik|\mathbf{y}-\mathbf{y}_2|}}{4\pi|\mathbf{y}-\mathbf{y}_2|} e^{ik\frac{\mathbf{y}-\mathbf{y}_2}{|\mathbf{y}-\mathbf{y}_2|} \cdot (\mathbf{x}-\mathbf{y})} = A_2 e^{ik\mathbf{n}_2 \cdot (\mathbf{x}-\mathbf{y})} \end{aligned} \quad (\text{B.1})$$

L'atténuation optimale apportée par la source 2 vaut

$$\gamma = 10 \log \left( 1 - \frac{|\int_{B_R} e^{ik(\mathbf{n}_2 - \mathbf{n}_1) \cdot \mathbf{r}} d\mathbf{r}|^2}{V^2} \right) \quad (\text{B.2})$$

où  $B_R$  est la boule de centre  $\mathbf{y}$ , de rayon  $R$  et de volume  $V$ . Posant

$$a = |\mathbf{n}_2 - \mathbf{n}_1| \quad (\text{B.3})$$

on obtient

$$\int_{B_R} e^{ik(\mathbf{n}_2 - \mathbf{n}_1) \cdot \mathbf{r}} d\mathbf{r} = \frac{4}{3}\pi R^3 f(kaR) \quad (\text{B.4})$$

avec

$$f(x) = 3\left(\frac{\sin(x)}{x^3} - \frac{\cos(x)}{x^2}\right) \quad (\text{B.5})$$

au voisinage de  $x = 0$

$$\begin{aligned} f(x) &= 1 - \frac{x^2}{10} + O(x^3) \\ \gamma &\simeq 10 \log\left(\frac{x^2}{5}\right) \end{aligned} \quad (\text{B.6})$$

L'atténuation devient importante quand

$$\begin{aligned} \frac{(kaR)^2}{5} &< 1 \\ R &< \frac{\sqrt{5}\lambda}{2\pi a} \end{aligned} \quad (\text{B.7})$$

En moyenne sur les différentes orientations  $a$  vaut  $4/3$ . La zone d'atténuation importante est donc

$$R < \frac{3\sqrt{5}\lambda}{8\pi} \sim 0.27\lambda \quad (\text{B.8})$$

# Bibliographie

- [1] **Amini S. and Harris P. J.** *A comparison between various boundary integral formulation of the exterior acoustic problem.* *Comput. Meth. Appl. Mech. Eng.*, 84:59–75, 1990.
- [2] **Amini S. and Wilton D. T.** *An investigation of boundary element methods for the exterior acoustic problem.* *Comput. Meth. Appl. Mech. Eng.*, 54:49–65, 1986.
- [3] **Amini S., Ke C. and Harris P. J.** *Iterative solution of boundary element equations for the exterior Helmholtz problem.* *J. Vib. Acous.*, 112:257–262, April 1990.
- [4] **Angélini J. J. et Hutin P. M.** *Problème extérieur de Neumann pour l'équation d'Helmholtz. La difficulté des fréquences irrégulières.* *La recherche aérospatiale*, 3:187–196, Mai-Juin 1983.
- [5] **Angell T. S. and Kleinman R. E.** *Boundary integral equations for the Helmholtz equation: the third boundary value problem.* *Math. Meth. in the Appl. Sci.*, 4:164–193, 1982.
- [6] **Angell T. S. and Kress R.**  *$L^2$ -Boundary integral equations for the Robin problem.* *Math. Meth. Appl. Sci.*, 6:345–352, 1984.
- [7] **Antes H.** *Applications in environmental noise.* In *Boundary element methods in acoustics*, pages 225–260, chap 11. Computational mechanics publications. Elsevier Applied Sciences, 1991.
- [8] **Arikan O., Telatar E. and Atalar A.** *Reflection coefficient null of acoustic waves at a liquid-anisotropic-solid interface.* *J. Acoust. Soc. Am.*, 85(1):1–10, January 1989.
- [9] **Banaugh R. P. and Goldsmith W.** *Diffraction of steady acoustic waves by surfaces of arbitrary shape.* *J. Acoust. Soc. Am.*, 35(10):1590–1601, October 1963.
- [10] **Bardos C., Concordel M. et Lebeau G.** *Extension de la théorie de la diffusion pour un corps élastique immergé dans un fluide. Comportement asymptotique des résonances.* *J. Acoustique*, 2:31–38, Mars 1989.
- [11] **Baron M. L., Bleich H. H. and Matthews A. T.** *Forced vibrations of an elastic circular cylindrical body of finite length submerged in an acoustic fluid.* *Int. J. Solids Structures*, 1:3–22, 1965.
- [12] **Baskar S., Varadan V. V. and Varadan V. K.** *Thin shell theories and acoustic wave scattering by infinitely long cylindrical shells of arbitrary cross section.* *J. Acoust. Soc. Am.*, 75(6):1673–1679, June 1984.
- [13] **Baumann W. T., Ho F. and Robertshaw H. H.** *Active structural acoustic control of broadband disturbances.* *J. Acoust. Soc. Am.*, 92(4):1998–2005, 1992.
- [14] **Baumann W. T., Saunders W. R. and Robertshaw H. H.** *Active suppression of acoustic radiation from impulsively excited structures.* *J. Acoust. Soc. Am.*, 90(6):3202–3208, December 1991.
- [15] **Baz A. and Poh S.** *Performance of an active control system with piezoelectric actuators.* *J. Sound. Vib.*, 126(2):327–343, 1988.
- [16] **Bendtsen H.** *Noise and traffic planning in towns. The danish exemple.* In Delanne Y., editor, *Maîtrise du bruit routier en milieu urbain*, Nantes, 12-15 mai 1992. International Conference.

- [17] **Ben Mariem J. and Hamdi M. A.** *A new boundary finite element method for fluid-structure interaction problems.* Int. j. numer. methods eng., 24:1251–1267, 1987.
- [18] **Bennet C. L. and Mieras H.** *Time domain integral equation solution for acoustic scattering from fluid targets.* J. Acoust. Soc. Am., 69(5):1261–1265, May 1981.
- [19] **Bettess P.** *Infinite elements.* Int. j. numer. methods eng., 11:53–64, 1977.
- [20] **Bettess P., Emson C. and Chiam T. C.** *A new mapped infinite element for exterior wave problems.* In Bettess P. Lewis R. W. and Hinton E., editors, *Numerical methods in coupled systems*, pages 489–504. John Wiley & Sons, 1984.
- [21] **Boström A.** *Scattering of stationary acoustic waves by an elastic obstacle immersed in a fluid.* J. Acoust. Soc. Am., 67(2):390–398, February 1980.
- [22] **Boucher C. C., Elliott S. J. and Nelson P. A.** *The effects of modelling errors on the performance and stability of active noise control systems.* In Rogers C. A. and Fuller C. R., editors, *Recent Advances in Active Control of Sound and Vibration*, pages 290–301, Blacksburg, Virginia, April 15-17 1991. Virginia Polytechnic Institute and State University, Technomic.
- [23] **Bouc R. and Felix D.** *A real-time procedure for acoustic-turbulence filtering ducts.* J. Sound. Vib., 118(1):1–10, 1987.
- [24] **Bouwkamp C. J.** *Diffraction theory.* Rep. Progr. Phys., 17:35–100, 1954.
- [25] **Brezis H.** *Analyse fonctionnelle.* Masson, 1987.
- [26] **Brod K.** *On the uniqueness of solution for all wavenumbers in acoustic radiation.* J. Acoust. Soc. Am., 76(4):1238–1243, October 1984.
- [27] **Brundrit G. B.** *A solution to the problem of scalar scattering from a smooth, bounded obstacle using integral equations.* Quart. Journ. Mech. and Applied Math., XVIII(4):473–489, 1965.
- [28] **Bullmore A. J., Nelson P. A. and Elliott S. J.** *Theoretical studies of the active control of propeller-induced cabin noise.* J. Sound. Vib., 140(2):191–217, 1990.
- [29] **Bullmore A. J., Nelson P. A., Curtis A. R. D. and Elliott S. J.** *The active minimization of harmonic enclosed sound fields, Part II: A computer simulation.* J. Sound. Vib., 117(1):15–33, 1987.
- [30] **Burke J. E.** *Scattering by penetrable spheroids.* J. Acoust. Soc. Am., 43(4):871–875, 1968.
- [31] **Burton A. J. and Miller G. F.** *The application of integral equation methods to the numerical solution of some exterior boundary-value problems.* Proc. Roy. Soc. Lond., A.323:201–210, 1971.
- [32] **Butler J. L.** *Solution of acoustical-radiation problems by boundary collocation.* J. Acoust. Soc. Am., 48(1):325–336, 1970.
- [33] **Castel L., Destuynder Ph., Legrain I. et Richard N.** *Quelques aspects du contrôle dynamique des structures à l'aide de matériaux piézoélectriques.* La recherche aérospatiale, 3:29–43, Mai-Juin 1990.
- [34] **Cazenave T.** *Equations d'évolution non linéaires.* Cours de 3ème cycle. Université Pierre et Marie Curie, 1987.
- [35] **Cervenka P. and Challande P.** *A new efficient algorithm to compute the exact reflection and transmission factors for plane waves in layered absorbing media (liquids and solids).* J. Acoust. Soc. Am., 89(4):1579–1589, April 1991.
- [36] **Chatelin F.** *Non symmetric eigenvalue problems in structural mechanics.* In P.G. Ciarlet and E. Sanchez-Palencia, editors, *Applications of multiple scaling in mechanics*, Ecole Normale Supérieure, Paris, November, 24-28 1986. international conference, Masson 1987.
- [37] **Chen L. H.** *Acoustic emissions from submerged structures.* In Banerjee P. K. and Shaw R. P., editors, *Developments in boundary element methods-2*, pages 245–281. Applied science publishers, 1982.

- [38] **Chen L. H. and Schweikert D. G.** *Sound radiation from an arbitrary body.* J. Acoust. Soc. Am., 35(10):1626–1632, October 1963.
- [39] **Chertock G.** *Sound radiation from prolate spheroids.* J. Acoust. Soc. Am., 33(7):871–876, July 1961.
- [40] **Chertock G.** *Sound radiation from vibrating surfaces.* J. Acoust. Soc. Am., 36(7):1305–1313, July 1964.
- [41] **Chertock G.** *Solutions for sound-radiation problems by integral equations at the critical wavenumbers.* J. Acoust. Soc. Am., 47(1):387–388, 1970.
- [42] **Chien C. C., Rajiyah H. and Atluri S. N.** *An effective method for solving the hypersingular integral equations in 3 – D acoustics.* J. Acoust. Soc. Am., 88(2):918–937, August 1990.
- [43] **Chimenti D. E. and Nayfeh A. H.** *Ultrasonic reflection and guided wave propagation in biaxially laminated composite plates.* J. Acoust. Soc. Am., 87(4):1409–1415, April 1990.
- [44] **Clark R. L., Pan J. and Hansen C. H.** *An experimental study of the active control of multiple-wave types in an elastic beam.* J. Acoust. Soc. Am., 92(2):871–876, August 1992.
- [45] **Colton D. and Kress R.** *The unique solvability of the null field equations of acoustics.* Quart. Journ. Mech. and Applied Math., 36(1):87–95, 1983.
- [46] **Copley L. G.** *Integral equation method for radiation from vibrating bodies.* J. Acoust. Soc. Am., 41(4):807–816, 1967.
- [47] **Copley L. G.** *Fundamental results concerning integral representations in acoustic radiation.* J. Acoust. Soc. Am., 44(1):28–32, 1968.
- [48] **Cunefare K. A. and Koopman G. H.** *A boundary element approach to optimization of active noise control sources on three-dimensional structures.* J. Vib. Acous., 113:387–394, July 1991.
- [49] **Cunefare K. A. and Koopmann G. H.** *Global optimum active noise control: Surface and far-field effects.* J. Acoust. Soc. Am., 90(1):365–373, July 1991.
- [50] **Cunefare K. A., Koopmann G. and Brod K.** *A boundary element method for acoustic radiation valid for all wavenumbers.* J. Acoust. Soc. Am., 85(1):39–48, January 1989.
- [51] **Curtis A. R. D., Nelson P. A. and Elliott S. J.** *Active reduction of a one-dimensional enclosed sound field: An experimental investigation of three control strategies.* J. Acoust. Soc. Am., 88(5):2265–2268, November 1990.
- [52] **D’Archangelo J. M., Savage P., Überall H., Yoo K. B., Brown S. H. and Dickey J. W.** *Complex eigenfrequencies of rigid and soft spheroids.* J. Acoust. Soc. Am., 77(1):6–10, January 1985.
- [53] **Dautray R. et Lions J. L.** Analyse mathématique et calcul numérique pour les sciences et les techniques. Masson, 1984.
- [54] **Deffayet C. and Nelson P. A.** *Active control of low-frequency harmonic sound radiated by a finite panel.* J. Acoust. Soc. Am., 84(6):2192–2199, December 1988.
- [55] **Delhommeau G., Peseux B. and Quevat J. P.** *Natural frequencies of immersed plates evaluated by a mixed method. Finite element method and boundary integral method.* In Bettes P. Hinton E. and Lewis R. W., editors, Numerical methods for coupled problems, Swansea, September 7-11 1981. International Conference, Pineridge press.
- [56] **Deruntz J. A. and Geers T. L.** *Added mass computation by the boundary integral method.* Int. j. numer. methods eng., 12:531–549, 1978.
- [57] **Destuynder Ph. et Legrain I.** *Contrôle actif de vibrations par éléments piézo-électriques.* La recherche aérospatiale, 5:1–14, Septembre-October 1992.
- [58] **Dhatt G. and Touzot G.** Une présentation de la méthode des éléments finis. Collection université de Compiègne. Maloine, Paris, 1981.

- [59] **Dieulesaint E. et Royer D.** *Ondes élastiques dans les solides*. Masson, 1974.
- [60] **Ding Y., Forestier A. and Duong T. H.** *A Galerkin scheme for the time domain integral equation of acoustic scattering from a hard surface*. J. Acoust. Soc. Am., 86(4):1566–1572, October 1989.
- [61] **Dokumaci E.** *A study of the failure of numerical solutions in boundary element analysis of acoustic radiation problems*. J. Sound. Vib., 139(1):83–97, 1990.
- [62] **Doolittle R. D. and Überall H.** *Sound scattering by elastic cylindrical shells*. J. Acoust. Soc. Am., 39(2):272–275, 1966.
- [63] **Duhamel D.** *Amélioration des murs antibruit par contrôle actif*. Lille-Villeneuve d’Ascq, Septembre 1993. 11e Congrès français de mécanique, Association universitaire de mécanique.
- [64] **Duhamel D.** *Renforcement de l’effet d’écran des murs antibruit par contrôle actif*. Technical report, ENPC-CERAM, Septembre 1993.
- [65] **Eatwell G. P.** *The use of the silentseat in aircraft cabins*. In Rogers C. A. and Fuller C. R., editors, *Recent Advances in Active Control of Sound and Vibration*, pages 302–309, Blacksburg, Virginia, April 15-17 1991. Virginia Polytechnic Institute and State University, Technomic.
- [66] **Eisenhart L. P.** *Separable systems in euclidean 3-space*. Phys. Review, 45:427–428, 1934.
- [67] **Elliott S. J., Curtis A. R. D., Bullmore A. J. and Nelson P. A.** *The active minimization of harmonic enclosed sound fields, Part III: Experimental verification*. J. Sound. Vib., 117(1):35–58, 1987.
- [68] **Elliott S. J., Joseph P., Bullmore A. J. and Nelson P. A.** *Active cancellation at a point in a pure tone diffuse sound field*. J. Sound. Vib., 120(1):183–189, 1988.
- [69] **Elliott S. J., Joseph P., Nelson P. A. and Johnson M. E.** *Power output minimization and power absorption in the active control of sound*. J. Acoust. Soc. Am., 90(5):2501–2512, November 1991.
- [70] **Elliott S. J., Nelson P. A., Stothers I. M. and Boucher C. C.** *In-flight experiments on the active control of propeller-induced cabin noise*. J. Sound. Vib., 140(2):219–238, 1990.
- [71] **Engblom J. J. and Nelson R. B.** *Consistent formulation of sound radiation from arbitrary structure*. J. Appl. Meca. , 42(2):295–300, June 1975.
- [72] **Engquist B. and Madja A.** *Absorbing boundary conditions for the numerical simulation of waves*. Math. Comp., 31(139):629–651, July 1977.
- [73] **Ergun A. and Kleinman R. E.** *The exterior Neumann problem for the three-dimensional Helmholtz Equation*. Arch. Rat. Mech. Anal., 23:218–236, 1966.
- [74] **Eriksson L. J.** *Development of the filtered-U algorithm for active noise control*. J. Acoust. Soc. Am., 89(1):257–265, January 1991.
- [75] **Eriksson L. J.** *The continuing evolution of active noise control with special emphasis on ductborne noise*. In Rogers C. A. and Fuller C. R., editors, *Recent Advances in Active Control of Sound and Vibration*, pages 237–245, Blacksburg, Virginia, April 15-17 1991. Virginia Polytechnic Institute and State University, Technomic.
- [76] **Everstine G. C. and Henderson F. M.** *Coupled finite element/boundary element approach for fluid-structure interaction*. J. Acoust. Soc. Am., 87(5):1938–1947, May 1990.
- [77] **Faran J. J.** *Sound scattering by solid cylinders and spheres*. J. Acoust. Soc. Am., 23(4):405–418, July 1951.
- [78] **Felippa C. A.** *A family of early-time approximations for fluid-structure interaction*. J. Appl. Meca. , 47:703–708, December 1980.
- [79] **Felippa C. A. and Geers T. L.** *Axisymmetric free vibration of a submerged shell*. J. Acoust. Soc. Am., 67(5):1427–1431, May 1980.

- [80] **Filippi P. J. T.** *Layer potentials and acoustic diffraction.* J. Sound. Vib., 54(4):473–500, 1977.
- [81] **Flax L., Dragonette L. R. and Überall H.** *Theory of elastic resonance excitation by sound scattering.* J. Acoust. Soc. Am., 63(3):723–731, March 1978.
- [82] **Flax L., Raju P. K., George J. and Überall H.** *Resonating fields inside elastic scattering objects.* J. Acoust. Soc. Am., 68(3):973–979, September 1980.
- [83] **Flax L., Varadan V. K. and Varadan V. V.** *Scattering of an obliquely incident acoustic wave by an infinite cylinder.* J. Acoust. Soc. Am., 68(6):1832–1835, December 1980.
- [84] **Folds D. L. and Loggins C. D.** *Transmission and reflection of ultrasonic waves in layered media.* J. Acoust. Soc. Am., 62(5):1102–1109, November 1977.
- [85] **Francis D. T. I.** *Partial use of the Helmholtz gradient formulation to obtain unique solutions to acoustic radiation problems at characteristic frequencies.* J. Sound. Vib., 145(3):495–498, 1991.
- [86] **Friedman M. B. and Shaw R.** *Diffraction of pulses by cylindrical obstacles of arbitrary cross section.* J. Appl. Meca., 29:40–46, March 1962.
- [87] **Fuller C. R.** *Active control of sound transmission/radiation from elastic plates by vibration inputs: I. Analysis.* J. Sound. Vib., 136:1–15, 1990.
- [88] **Fuller C. R. and Burdisso R. A.** *A wavenumber domain approach to the active control of structure-borne sound.* J. Sound. Vib., 148(2):355–360, 1991.
- [89] **Fyfe K. R., Ismail F. and Sas P.** *Failure of a reported exterior overdetermination technique to resolve acoustic boundary element method (BEM) critical frequencies.* J. Acoust. Soc. Am., 89(1):444–445, January 1991.
- [90] **Gaunaurd G. C.** *Elastic and acoustic resonance wave scattering.* Appl. Meca., 42(6):143–192, June 1989.
- [91] **Gaunaurd G. C. and Überall H.** *Relation between creeping-wave acoustic transients and the complex-frequency poles of the singularity expansion method.* J. Acoust. Soc. Am., 78(1):234–243, July 1985.
- [92] **Gaunaurd G. C. and Werby M. F.** *Sound scattering by resonantly excited, fluid-loaded, elastic spherical shells.* J. Acoust. Soc. Am., 90(5):2536–2550, November 1991.
- [93] **Gaunaurd G. C. and Wertman W. H.** *Asymptotic and numerical determinations of the complex eigenfrequencies and the real resonances of an acoustically insonified sphere.* J. Acoust. Soc. Am., 91(5):2489–2501, May 1992.
- [94] **Geers T. L.** *Doubly asymptotic approximations for transient motions of submerged structures.* J. Acoust. Soc. Am., 64(5):1500–1508, November 1978.
- [95] **Geers T. L. and Felippa C. A.** *Doubly asymptotic approximations for vibration analysis of submerged structures.* J. Acoust. Soc. Am., 73(4):1152–1159, April 1983.
- [96] **Gilbarg D. and Trudinger N.** Elliptic partial differential equations of second order. Springer-Verlag, 1983.
- [97] **Givoli D. and Keller J. B.** *A finite element method for large domains.* Comput. Meth. Appl. Mech. Eng., 76:41–66, 1989.
- [98] **Gladwell G. M. L.** *A variational formulation of damped acousto-structural vibration problems.* J. Sound. Vib., 4(2):172–186, 1966.
- [99] **Gladwell G. M. L. and Mason V.** *Variational finite element calculation of the acoustic response of a rectangular panel.* J. Sound. Vib., 14(1):115–135, 1971.
- [100] **Goodman R. R. and Stern R.** *Reflection and transmission of sound by elastic spherical shells.* J. Acoust. Soc. Am., 34(3):338–344, March 1962.

- [101] **Gradshteyn I. S. and Ryzhik I. M.** *Table of integrals, series and products.* Academic press, 1980.
- [102] **Gratadour J.** *Application du contrôle actif du bruit à l'intérieur d'un habitacle d'automobile.* Mécanique Matériaux Electricité, 446:16–20, Octobre-Novembre 1992.
- [103] **Greenspan D. and Werner P.** *A numerical method for the exterior Dirichlet problem for the reduced wave equation.* Arch. Rat. Mech. Anal., 23:288–316, 1966.
- [104] **Guicking D.** *On the invention of active noise control by Paul Lueg.* J. Acoust. Soc. Am., 87(5):2251–2254, May 1990.
- [105] **Guiggiani M. and Casalini P.** *Direct computation of Cauchy principal value integrals in advanced boundary elements.* Int. j. numer. methods eng., 24:1711–1720, 1987.
- [106] **Guiggiani M. and Gigante A.** *A general algorithm for multidimensional Cauchy principal value integrals in the boundary element method.* J. Appl. Meca. , 57:906–915, December 1990.
- [107] **Günter N. M.** *Potential theory.* Ungar publishing Co., New York, 1967.
- [108] **Hackman R. H. and Todoroff D. G.** *An application of the spheroidal-coordinate-based transition matrix: The acoustic scattering from high aspect ratio solids.* J. Acoust. Soc. Am., 78(3):1058–1071, September 1985.
- [109] **Hall W. S. and Robertson W. H.** *Standard Helmholtz integral equation calculations near characteristic frequencies.* J. Sound. Vib., 126(2):367–368, 1988.
- [110] **Hamdi M. A.** *Une formulation variationnelle par équations intégrales pour la résolution de l'équation de Helmholtz avec des conditions aux limites mixtes.* C. R. Acad. Sc. Paris, 292, Série II:17–20, 1981.
- [111] **Harari I. and Hughes T. J. R.** *Finite element methods for the Helmholtz equation in an exterior domain: Model problems.* Comput. Meth. Appl. Mech. Eng., 87:59–96, 1991.
- [112] **Harari I. and Hughes T. J. R.** *A cost comparison of boundary element and finite element methods for problems of time-harmonic acoustics.* Comput. Meth. Appl. Mech. Eng., 97:77–102, 1992.
- [113] **Harris P. J.** *A boundary element method for the Helmholtz equation using finite part integration.* Comput. Meth. Appl. Mech. Eng., 95:331–342, 1992.
- [114] **Henneke E. G.** *Reflection-Refracton of a stress wave at a plane boundary between anisotropic media.* J. Acoust. Soc. Am., 51(1):210–217, 1972.
- [115] **Henneke E. G. and Jones G. L.** *Critical angle for reflection at a liquid-solid interface in single crystals.* J. Acoust. Soc. Am., 59(1):204–205, January 1976.
- [116] **Hothersall D. C., Chandler-Wilde S. N. and Hajmirzae M. N.** *Efficiency of single noise barriers.* J. Sound. Vib., 146(2):303–322, 1991.
- [117] **Hothersall D. C., Crombie D. H. and Chandler-Wilde S. N.** *The performance of T-profile and associated noise barriers.* Applied acoustics, 32:269–287, 1991.
- [118] **Huang H.** *Transient interaction of plane acoustic waves with a spherical elastic shell.* J. Acoust. Soc. Am., 45(3):661–670, 1969.
- [119] **Huang H. and Wang Y. F.** *Asymptotic fluid-structure interaction theories for acoustic radiation prediction.* J. Acoust. Soc. Am., 77(4):1389–1394, April 1985.
- [120] **Hunt J. T., Knittel M. R. and Barach D.** *Finite element approach to acoustic radiation from elastic structures.* J. Acoust. Soc. Am., 55(2):269–280, February 1974.
- [121] **Hunt J. T., Knittel M. R., Nichols C. S. and Barach D.** *Finite element approach to acoustic scattering from elastic structures.* J. Acoust. Soc. Am., 57(2):287–299, February 1975.
- [122] **Hwang J. Y. and Chang S. C.** *A retracted boundary integral equation for exterior acoustic problem with unique solution for all wavenumbers.* J. Acoust. Soc. Am., 90(2):1167–1180, August 1991.

- [123] **Ingber M. S. and Rudolphi T. J.** *Solution of potential problems using combinations of the regular and derivative boundary integral equations.* Appl. Math. Modelling, 14:536–543, October 1990.
- [124] **Isei T., Embleton T. F. W. and Piercy J. E.** *Noise reduction by barriers on finite impedance ground.* J. Acoust. Soc. Am., 67(1):46–58, January 1980.
- [125] **Ise S., Yano H. and Tachibana H.** *Basic study on active noise barrier.* J. Acoust. Soc. Jpn, 12(6):299–306, 1991.
- [126] **Jeans R. A. and Mathews I. C.** *Solution of fluid-structure interaction problems using a coupled finite element and variational boundary element technique.* J. Acoust. Soc. Am., 88(5):2459–2466, November 1990.
- [127] **Jeng G. and Wexler A.** *Isoparametric, finite element, variational solution of integral equations for three-dimensional fields.* Int. j. numer. methods eng., 11:1455–1471, 1977.
- [128] **Jiang J. K. and Prasad M. G.** *On the applications of the boundary-element method to acoustical field studies of vibrating structures.* J. Vib. Acous. Str. Rel. Design, 108:454–461, 1986.
- [129] **Jonasson H. G.** *Diffraction by wedges of finite acoustic impedance with applications to depressed roads.* J. Sound. Vib., 25(4):577–585, 1972.
- [130] **Jones D. S.** *Integral equations for the exterior acoustic problem.* Quart. Journ. Mech. and Applied Math., XXVII(1):129–142, 1974.
- [131] **Jones D. S.** Acoustic and electromagnetic waves. Oxford science publications, 1989.
- [132] **Joplin P. M. and Nelson P. A.** *Active control of low-frequency random sound in enclosures.* J. Acoust. Soc. Am., 87(6):2396–2404, June 1990.
- [133] **Kawai Y. and Terai T.** *The application of integral equation methods to the calculation of sound attenuation by barriers.* Applied acoustics, 31:101–117, 1990.
- [134] **Kellogg O. D.** Foundations of Potential Theory. Springer-verlag, Berlin-Heidelberg-New York, 1967.
- [135] **Klauson A. and Metsaveer J.** *Sound scattering by a cylindrical shell reinforced by lengthwise ribs and walls.* J. Acoust. Soc. Am., 91(4):1834–1843, April 1992.
- [136] **Kleinman R. E.** *The Dirichlet problem for the Helmholtz equation.* Arch. Rat. Mech. Anal., 18:205–229, 1965.
- [137] **Kleinman R. E. and Kreß R.** *On the condition number of integral equations in acoustics using modified fundamental solutions.* IMA J. Appl. Math., 31:79–90, 1983.
- [138] **Kleinman R. E. and Roach G. F.** *Boundary integral equations for the three-dimensional Helmholtz equation.* SIAM Review, 16(2):214–236, April 1974.
- [139] **Kleinman R. E. and Roach G. F.** *On modified Green functions in exterior problems for the Helmholtz equation.* Proc. Roy. Soc. Lond., A383:313–332, 1982.
- [140] **Kleinman R. E. and Roach G. F.** *Operators of minimal norm via modified Green's functions.* Proc. Roy. Soc. Edinb., 94A:163–178, 1983.
- [141] **Kondapalli P. S., Shippy D. J. and Fairweather G.** *Analysis of acoustic scattering in fluids and solids by the method of fundamental solutions.* J. Acoust. Soc. Am., 91(4):1844–1853, April 1992.
- [142] **Koopmann G. H. and Benner H.** *Method for computing the sound power of machines based on the Helmholtz integral.* J. Acoust. Soc. Am., 71(1):78–89, January 1982.
- [143] **Kress R. and Roach G. F.** *On mixed boundary value problems for the Helmholtz equation.* Proc. Roy. Soc. Edin., 77A:65–77, 1977.
- [144] **Kreß R. and Spassov W. T.** *On the condition number of boundary integral operators for the exterior Dirichlet problem for the Helmholtz equation.* Numer. Math., 42:77–95, 1983.

- [145] **Krishnasamy G., Schmerr L. W., Rudolphi T. J. and Rizzo F. J.** *Hypersingular boundary integral equations: some applications in acoustic and elastic wave scattering.* J. Appl. Meca. , 57:404–414, June 1990.
- [146] **Kristensson G., Ramm A. G. and Ström S.** *Convergence of the T-matrix approach in scattering theory. II.* J. Math. Phys., 24(11):2619–2631, November 1983.
- [147] **Kurze U. J.** *Noise reduction by barriers.* J. Acoust. Soc. Am., 55(3):504–518, March 1974.
- [148] **Kurze U. J. and Anderson G. S.** *Sound attenuation by barriers.* Applied acoustics, 4:35–53, 1971.
- [149] **Lamure C. A.** *Gestion de la circulation et aménagement des voies.* In Delanne Y., editor, *Maîtrise du bruit routier en milieu urbain*, Nantes, 12-15 mai 1992. International Conference.
- [150] **Latcha M. A. and Akay A.** *Application of the Helmholtz integral in acoustics.* J. Vib. Acous. Stress and Rel. Design, 108:447–453, October 1986.
- [151] **Leis R.** *Über das Neumannsche randwertproblem für die Helmholtzsche schwingungsgleichung.* Arch. Rat. Mech. Anal., 2:101–113, 1958.
- [152] **Levine H. and Schwinger J.** *On the theory of diffraction by an aperture in an infinite plane screen. I.* Phys. Review, 74(8):958–974, October 1948.
- [153] **Lim R. and Hackman R. H.** *Comments on the calculation of cross sections for elastic-wave scattering using the T matrix.* J. Acoust. Soc. Am., 87(3):1070–1075, March 1990.
- [154] **Lin T.** *The numerical solution of Helmholtz’s equation for the exterior Dirichlet problem in three dimensions.* SIAM J. Numer. Anal., 22(4):670–686, August 1985.
- [155] **Lin T. C.** *A proof for the Burton and Miller integral equation approach for the Helmholtz equation.* J. Math. Anal. and Appl., 103:565–574, 1984.
- [156] **Lin W. H. and Raptis A. C.** *Acoustic scattering by elastic solid cylinders and spheres in viscous fluids.* J. Acoust. Soc. Am., 73(3):736–748, March 1983.
- [157] **Liu Y. and Rizzo F. J.** *A weakly singular form of the hypersingular boundary integral equation applied to 3-D acoustic wave problems.* Comput. Meth. Appl. Mech. Eng., 96:271–287, 1992.
- [158] **Lu J., Crocker M. J. and Raju P. K.** *Active vibration control using wave control concepts.* J. Sound. Vib., 134(2):364–368, 1989.
- [159] **Mace B. R.** *Active control of flexural vibrations.* J. Sound. Vib., 114(2):253–270, 1987.
- [160] **Maekawa Z.** *Noise reduction by screens.* Memoirs of the faculty of engineering, Kobe university, 11:29–53, 1965.
- [161] **Makris S. E., Dym C. L. and Smith J. M.** *Transmission loss optimization in acoustic sandwich panels.* J. Acoust. Soc. Am., 79(6):1833–1843, June 1986.
- [162] **Mandic D. S. and Jones J. D.** *Adaptive active control of sound fields in elastic cylinders via vibrational inputs.* AIAA Journal, 29(10):1552–1561, October 1991.
- [163] **Manolis G. D.** *A comparative study on three boundary element method approaches to problems in elastodynamics.* Int. j. numer. methods eng., 19:73–91, 1983.
- [164] **Martin P. A.** *On the null-field equations for the exterior problems of acoustics.* Quart. Journ. Mech. and Applied Math., 33:385–396, 1980.
- [165] **Martin P. A., Rizzo F. J. and Gonsalves I. R.** *On hypersingular boundary integral equations for certain problems in mechanics.* Mech. Res. Comm., 16(2):65–71, 1989.
- [166] **Mathews I. C.** *Numerical techniques for three-dimensional steady-state fluid-structure interaction.* J. Acoust. Soc. Am., 79(5):1317–1325, May 1986.

- [167] **Meirovitch L. and Baruh H.** *Control of self-adjoint distributed-parameter systems.* AIAA J. Guidance, 5(1):60–66, Jan.-Feb. 1982.
- [168] **Meirovitch L. and Thangjitham S.** *Active control of sound radiation pressure.* J. Vib. Acous., 112:237–244, April 1990.
- [169] **Meirovitch L. and Thangjitham S.** *Control of sound radiation from submerged plates.* J. Acoust. Soc. Am., 88(1):402–407, July 1990.
- [170] **Meirovitch L., Baruh H. and Oz H.** *A comparison of control techniques for large flexible systems.* AIAA J. Guidance, 6(4):302–310, July-August 1983.
- [171] **Merchant B. L., Nagl A., Stoyanov Y. J., Überall H., Brown S. H. and Dickey J. W.** *Resonant phase matching of surface waves on impenetrable spheroids.* J. Acoust. Soc. Am., 80(6):1754–1756, December 1986.
- [172] **Meyer W. L., Bell W. A., Stallybrass M. P. and Zinn B. T.** *Prediction of the sound field radiated from axisymmetric surfaces.* J. Acoust. Soc. Am., 65(3):631–638, March 1979.
- [173] **Meyer W. L., Bell W. A., Zinn B. T. and Stallybrass M. P.** *Boundary integral solutions of three dimensional acoustic radiation problems.* J. Sound. Vib., 59(2):245–262, 1978.
- [174] **Miller R. D., Moyer E. T., Huang H. and Uberall H.** *A comparison between the boundary element method and the wave superposition approach for the analysis of the scattered fields from rigid bodies and elastic shells.* J. Acoust. Soc. Am., 89(5):2185–2196, May 1991.
- [175] **Mitzner K. M.** *Numerical solution for transient scattering from a hard surface of arbitrary shape-Retarded potential technique.* J. Acoust. Soc. Am., 42(2):391–397, 1967.
- [176] **Morgan D. R.** *An adaptive modal-based active control system.* J. Acoust. Soc. Am., 89(1):248–256, January 1991.
- [177] **Morse P. M. and Feshbach H.** Methods of Theoretical Physics, volume 1. McGraw-Hill, New York, 1953.
- [178] **Mott G.** *Reflection and refraction coefficients at a fluid-solid interface.* J. Acoust. Soc. Am., 50(3):819–829, 1971.
- [179] **Munjal M. L. and Eriksson L. J.** *An analytical, one-dimensional, standing-wave model of a linear active noise control system in a duct.* J. Acoust. Soc. Am., 84(3):1086–1093, September 1988.
- [180] **Munjal M. L. and Eriksson L. J.** *Analysis of a hybrid noise control system for a duct.* J. Acoust. Soc. Am., 86(2):832–834, August 1989.
- [181] **Naghshineh K. and Koopmann G. H.** *A design method for achieving weak radiator structures using active vibration control.* J. Acoust. Soc. Am., 92(2):856–870, August 1992.
- [182] **Nayfeh A. H.** *The general problem of elastic wave propagation in multilayered anisotropic media.* J. Acoust. Soc. Am., 89(4):1521–1531, April 1991.
- [183] **Nayfeh A. H. and Chimenti D. E.** *Ultrasonic wave reflection from liquid-coupled orthotropic plates with application to fibrous composites.* J. Appl. Mech., 55:863–870, December 1988.
- [184] **Nayfeh A. H. and Chimenti D. E.** *Elastic wave propagation in fluid-loaded multiaxial anisotropic media.* J. Acoust. Soc. Am., 89(2):542–549, February 1991.
- [185] **Nayfeh A. H. and Taylor T. W.** *Surface wave characteristics of fluid-loaded multilayered media.* J. Acoust. Soc. Am., 84(6):2187–2191, December 1988.
- [186] **Neilson H. C., Lu Y. P. and Wang Y. F.** *Transient scattering by arbitrary axisymmetric surfaces.* J. Acoust. Soc. Am., 63(6):1719–1726, June 1978.
- [187] **Nelson P. A. and Elliott S. J.** Active control of sound. Academic press, 1992.

- [188] **Nelson P. A., Curtis A. R. D., Elliott S. J. and Bullmore A. J.** *The active minimization of harmonic enclosed sound fields, Part I: Theory.* J. Sound. Vib., 117(1):1–13, 1987.
- [189] **Nelson P. A., Curtis A. R. D., Elliott S. J. and Bullmore A. J.** *The minimum power output of free field point sources and the active control of sound.* J. Sound. Vib., 116(3):397–414, 1987.
- [190] **Nicolas-Vullierme B.** *A contribution to doubly asymptotic approximations: An operator top-down derivation.* J. Vib. Acoust., 113:409–415, July 1991.
- [191] **Nicolas-Vullierme B. and Osmont D.** *Reduction of the noise radiated by submerged structures: optimisation of layered coatings.* 1er Congrès Français d’acoustique, Lyon, 10-13 Avril 1990.
- [192] **Noble B.** *Existence and uniqueness of solutions of integral equations for acoustic radiation and diffraction problems.* J. Acoust. Soc. Am., 42(5):1203, November 1967.
- [193] **Ohayon R. and Sanchez-Palencia E.** *On the vibration problem for an elastic body surrounded by a slightly compressible fluid.* R.A.I.R.O. Analyse numérique, 17(3):311–326, 1983.
- [194] **Olson H. F. and May E. G.** *Electronic sound absorber.* J. Acoust. Soc. Am., 25(6):1130–1136, November 1953.
- [195] **Ordunã-Bustamante F. and Nelson P. A.** *An adaptive controller for the active absorption of sound.* J. Acoust. Soc. Am., 91(5):2740–2747, May 1992.
- [196] **Pan J. and Hansen C. H.** *Active control of noise transmission through a panel into a cavity:II. Experimental study.* J. Acoust. Soc. Am., 90(3):1488–1492, September 1991.
- [197] **Pan J. and Hansen C. H.** *Active control of noise transmission through a panel into a cavity:III. Effect of the actuator location.* J. Acoust. Soc. Am., 90(3):1493–1501, September 1991.
- [198] **Pan J. and Hansen C. H.** *Active control of total vibratory power flow in a beam. I:Physical system analysis.* J. Acoust. Soc. Am., 89(1):200–209, January 1991.
- [199] **Pan J., Hansen C. H. and Bies D. A.** *Active control of noise transmission through a panel into a cavity:I. Analytical study.* J. Acoust. Soc. Am., 87(5):2098–2108, May 1990.
- [200] **Pan J., Snyder S. D. and Hansen C. H.** *Active control of far-field sound radiated by a rectangular panel-A general analysis.* J. Acoust. Soc. Am., 91(4):2056–2066, April 1992.
- [201] **Paulsen K. D. and Liu W.** *Memory and operations count scaling of coupled finite-element and boundary element systems of equations.* Int. j. numer. methods eng., 33:1289–1304, 1992.
- [202] **Peterson B. A., Varadan V. V. and Varadan V. K.** *T-matrix approach to study the vibration frequencies of elastic bodies in fluids.* J. Acoust. Soc. Am., 74(3):1051–1056, September 1983.
- [203] **Piaszczyk C. M. and Klosner J. M.** *Acoustic radiation from vibrating surfaces at characteristic frequencies.* J. Acoust. Soc. Am., 75(2):363–375, February 1984.
- [204] **Pierce A. D.** *Diffraction of sound around corners and over wide barriers.* J. Acoust. Soc. Am., 55(5):941–955, May 1974.
- [205] **Pines D. J. and Von Flotow A. H.** *Active control of bending wave propagation at acoustic frequencies.* J. Sound. Vib., 142(3):391–412, 1990.
- [206] **Pinsky P. M., Thompson L. L. and Abboud N. N.** *Local high-order radiation boundary conditions for the two-dimensional time-dependent structural acoustics problem.* J. Acoust. Soc. Am., 91(3):1320–1335, March 1992.
- [207] **Ramm A. G.** *Convergence of the T-matrix approach to scattering theory.* J. Math. Phys., 23(6):1123–1125, June 1982.
- [208] **Rasmussen K. B.** *On the effect of terrain profile on sound propagation outdoors.* J. Sound. Vib., 98(1):35–44, 1985.

- [209] **Reut Z.** *On the boundary integral methods for the exterior acoustic problem.* J. Sound. Vib., 103(2):297–298, 1985.
- [210] **Reut Z.** *Numerical solution of acoustic problems by integral equations.* J. Sound. Vib., 132(3):523–524, 1989.
- [211] **Rizzo F. J., Shippy D. J. and Rezayat M.** *A boundary integral equation method for radiation and scattering of elastic waves in three dimensions.* Int. j. numer. methods eng., 21:115–129, 1985.
- [212] **Roach G. F.** *On the commutative properties of boundary integral operators.* Proc. Amer. Math. Soc., 73(2):219–227, February 1979.
- [213] **Rokhlin S. I. and Wang Y. J.** *Analysis of boundary conditions for elastic wave interaction with an interface between two solids.* J. Acoust. Soc. Am., 89(2):503–515, February 1991.
- [214] **Rokhlin S. I., Bolland T. K. and Adler L.** *Reflection and refraction of elastic waves on a plane interface between two generally anisotropic media.* J. Acoust. Soc. Am., 79(4):906–918, April 1986.
- [215] **Roure A.** *Self-adaptive broadband active sound control system.* J. Sound. Vib., 101(3):429–441, 1985.
- [216] **Salikuddin M., Tanna H. K., Burrin R. H. and Khan M. M. S.** *Application of active noise control to model propeller noise.* J. Sound. Vib., 137(1):9–41, 1990.
- [217] **Sanchez Hubert J. and Sanchez Palencia E.** Vibration and coupling of continuous systems. Springer-Verlag, 1989.
- [218] **Sayhi M. N., Ousset Y. and Verchery G.** *Solution of radiation problems by collocation of integral formulations in terms of single and double layer potentials.* J. Sound. Vib., 74(2):187–204, 1981.
- [219] **Schenck H. A.** *Improved integral formulation for acoustic radiation problems.* J. Acoust. Soc. Am., 44(1):41–58, 1968.
- [220] **Segalman D. J. and Lobitz D. W.** *A method to overcome computational difficulties in the exterior acoustics problem.* J. Acoust. Soc. Am., 91(4):1855–1861, April 1992.
- [221] **Seybert A. F.** *A note on methods for circumventing non-uniqueness when using integral equations.* J. Sound. Vib., 115(1):171–172, 1987.
- [222] **Seybert A. F. and Rengarajan T. K.** *The use of CHIEF to obtain unique solutions for acoustic radiation using boundary integral equations.* J. Acoust. Soc. Am., 81(5):1299–1306, May 1987.
- [223] **Seybert A. F. and Soenarko B.** *Radiation and scattering of acoustic waves from bodies of arbitrary shape in a three-dimensional half space.* J. Vib. Acous. Stress and Rel. Design, 110:112–117, January 1988.
- [224] **Seybert A. F. and Wu T. W.** *Modified Helmholtz integral equation for bodies sitting on an infinite plane.* J. Acoust. Soc. Am., 85(1):19–23, January 1989.
- [225] **Seybert A. F., Soenarko B., Rizzo F. J. and Shippy D. J.** *Application of the BIE method to sound radiation problems using an isoparametric element.* J. Vib. Acous. Stress and Rel. Design, 106:414–420, July 1984.
- [226] **Seybert A. F., Soenarko B., Rizzo F. J. and Shippy D. J.** *An advanced computational method for radiation and scattering of acoustic waves in three dimensions.* J. Acoust. Soc. Am., 77(2):362–368, February 1985.
- [227] **Seybert A. F., Wu T. W. and Wu X. F.** *Radiation and scattering of acoustic waves from elastic solids and shells using the boundary element method.* J. Acoust. Soc. Am., 84(5):1906–1912, November 1988.
- [228] **Seznec R.** *Diffraction of sound around barriers: use of the boundary elements technique.* J. Sound. Vib., 73(2):195–209, 1980.

- [229] **Shaw R. P.** *Comment on "Numerical solution for transient scattering from a hard surface of arbitrary shape-retarded potential technique.* J. Acoust. Soc. Am., 43(3):638–639, 1968.
- [230] **Shaw R. P. and Bugl P.** *Transmission of plane waves through layered linear viscoelastic media.* J. Acoust. Soc. Am., 46(3):649–654, 1969.
- [231] **Shaw R. P. and Huang S. C.** *The fictitious eigenvalue difficulty in the T-matrix and the BEM methods for exterior wave scattering.* J. Acoust. Soc. Am., 86(2):839–842, August 1989.
- [232] **Silbiger A.** *Radiation from circular pistons of elliptical profile.* J. Acoust. Soc. Am., 33(11):1515–1522, November 1961.
- [233] **Skudrzyk E.** *The foundations of acoustics.* Springer-Verlag, 1971.
- [234] **Snyder S. D. and Hansen C. H.** *Active noise control in ducts: Some physical insights.* J. Acoust. Soc. Am., 86(1):184–194, July 1989.
- [235] **Snyder S. D. and Hansen C. H.** *The influence of transducer transfer functions and acoustic time delays on the implementation of the LMS algorithm in active noise control systems.* J. Sound. Vib., 141(3):409–424, 1990.
- [236] **Sommerfeld A.** *Partial Differential Equations in Physics.* Academic press, New-York, 1949.
- [237] **Sommerfeldt S. D.** *Multi-channel adaptive control of structural vibration.* Noise Control Eng. J., 37(2):77–89, September-October 1991.
- [238] **Stallybrass M. P.** *On a pointwise variational principle for the approximate solution of linear boundary value problems.* J. Math. and Meca., 16(11):1247–1286, 1967.
- [239] **Strutt J. W. (Lord Rayleigh).** *The Theory of Sound*, volume 2. Dover Publications, New York, 1945 (reprint of the second edition of 1894).
- [240] **Stupfel B., Lavie A. and Decarpigny J. N.** *Combined integral equation formulation and null-field method for the exterior acoustic problem.* J. Acoust. Soc. Am., 83(3):927–941, March 1988.
- [241] **Terai T.** *A note on the paper "On calculation of sound fields around three dimensional objects by integral equation methods".* J. Sound. Vib., 70(1):140–141, 1980.
- [242] **Terai T.** *On calculation of sound fields around three dimensional objects by integral equation methods.* J. Sound. Vib., 69(1):71–100, 1980.
- [243] **Thomas D. R., Nelson P. A. and Elliott S. J.** *Experiments on the active control of the transmission of sound through a clamped rectangular plate.* J. Sound. Vib., 139(2):351–355, 1990.
- [244] **Thomson W. T.** *Transmission of elastic waves through a stratified solid medium.* J. Appl. Physics, 21:89–93, February 1950.
- [245] **Tobocman W.** *Calculation of acoustic wave scattering by means of the Helmholtz integral equation. I.* J. Acoust. Soc. Am., 76(2):599–607, August 1984.
- [246] **Tobocman W.** *Calculation of acoustic wave scattering by means of the Helmholtz integral equation. II.* J. Acoust. Soc. Am., 76(5):1549–1554, November 1984.
- [247] **Tobocman W.** *'Addendum and Erratum': Comparison of the T-matrix and Helmholtz integral equation methods for wave scattering calculations.* J. Acoust. Soc. Am., 78(2):805–808, August 1985.
- [248] **Tobocman W.** *Comparison of the T-matrix and Helmholtz integral equation methods for wave scattering calculations.* J. Acoust. Soc. Am., 77(2):369–374, February 1985.
- [249] **Tobocman W.** *Extension of the Helmholtz integral equation method to shorter wavelengths I.* J. Acoust. Soc. Am., 80(6):1828–1837, December 1986.
- [250] **Tobocman W.** *Extension of the Helmholtz integral equation method to shorter wavelengths II.* J. Acoust. Soc. Am., 82(2):704–706, August 1987.

- [251] **Tolstoy I.** *Exact, explicit solutions for diffraction by hard sound barriers and seamonts.* J. Acoust. Soc. Am., 85(2):661–669, February 1989.
- [252] **Trompette P., Fleury C. et Knopf-Lenoir C.** Optimisation des structures. Institut pour la promotion des sciences de l'ingénieur, Paris, 1987.
- [253] **Ursell F.** *On the exterior problems of acoustics.* Proc. Camb. Phil. Soc., 74:117–125, 1973.
- [254] **Ursell F.** *On the exterior problems of acoustics: II.* Proc. Camb. Phil. Soc., 84:545–548, 1978.
- [255] **Varadan V. K. and Varadan V. V.** *Computation of rigid body scattering by prolate spheroids using the T-matrix approach.* J. Acoust. Soc. Am., 71(1):22–25, January 1982.
- [256] **Varadan V. V., Lakhtakia A. and Varadan V. K.** *Comments on recent criticism of the T-matrix method.* J. Acoust. Soc. Am., 84(6):2280–2281, December 1988.
- [257] **Von Estorff O. and Antes H.** *On FEM-BEM coupling for fluid-structure interaction analysis in the time domain.* Int. j. numer. methods eng., 31:1151–1168, 1991.
- [258] **Von estorff O., Pais A. L. and Kausel E.** *Some observations on time domain and frequency domain boundary elements.* Int. j. numer. methods eng., 29:785–800, 1990.
- [259] **Waterman P. C.** *New formulation of acoustic scattering.* J. Acoust. Soc. Am., 45(6):1417–1429, 1969.
- [260] **Werby M. F. and Green L. H.** *An extended unitary approach for acoustical scattering from elastic shells immersed in a fluid.* J. Acoust. Soc. Am., 74(2):625–630, August 1983.
- [261] **Wilcox C. H.** *A generalization of theorems of Rellich and Atkinson.* Proc. Amer. Math. Soc., 7:271–276, 1956.
- [262] **Williams W., Parke N. G., Moran D. A. and Sherman C. H.** *Acoustic radiation from a finite cylinder.* J. Acoust. Soc. Am., 36(12):2316–2322, December 1964.
- [263] **Wilton D. T.** *Acoustic radiation and scattering from elastic structures.* Int. j. numer. methods eng., 13:123–138, 1978.
- [264] **Wood W. L.** *On the finite element solution of an exterior boundary value problem.* Int. j. numer. methods eng., 10:885–891, 1976.
- [265] **Wu T. W. and Seybert A. F.** *A weighted residual formulation for the CHIEF method in acoustics.* J. Acoust. Soc. Am., 90(3):1608–1614, September 1991.
- [266] **Wu T. W., Seybert A. F. and Wan G. C.** *On the numerical implementation of a Cauchy principal value integral to insure a unique solution for acoustic radiation and scattering.* J. Acoust. Soc. Am., 90(1):554–560, July 1991.
- [267] **Wu X. F. and Pierce A. D.** *Uniqueness of solutions to variationally formulated acoustic radiation problems.* J. Vib. Acoust., 112:263–267, April 1990.
- [268] **Yeh C.** *The diffraction of waves by a penetrable ribbon.* J. Math. Phys., 4(1):65–71, January 1963.
- [269] **Yeh C.** *Scattering of acoustic waves by a penetrable prolate spheroid. I. Liquid prolate spheroid.* J. Acoust. Soc. Am., 42(2):518–521, 1967.



# Table des figures

1.1	Multicouche en contact avec un fluide. . . . .	12
1.2	Repères dans une couche. . . . .	14
2.1	Bicouche isotrope. Angle d'incidence: $-0^0, \dots, 45^0, \dots, -80^0$ . . . . .	28
2.2	Bicouche isotrope en contact avec de l'air. $-0^0, \dots, 45^0, \dots, -80^0$ . . . . .	29
2.3	Mur en béton d'épaisseur 5cm (1), 10cm (2), 15cm (3) et 50 cm(4). . . . .	29
2.4	Bicouche isotrope avec une onde transverse. $-0^0, \dots, 45^0, \dots, -80^0$ . . . . .	30
2.5	Bicouche isotrope viscoélastique. $-0^0, \dots, 45^0, \dots, -80^0$ . . . . .	31
2.6	6 couches de matériaux isotropes. $-0^0, \dots, 45^0, \dots, -80^0$ . . . . .	31
2.7	Bicouche avec un matériau composite. $-0^0, \dots, 45^0, \dots, -80^0$ . . . . .	33
2.8	Bicouche séparant deux fluides. $-0^0, \dots, 45^0, \dots, -80^0$ . . . . .	33
2.9	Bicouche avec $\phi = 45^0$ . $-0^0, \dots, 45^0, \dots, -80^0$ . . . . .	34
2.10	Effet de l'orientation dans le plan d'incidence. $-0^0, \dots, 30^0, \dots, -60^0$ . . . . .	34
2.11	Bicouche isotrope. $-e_1 = 0, e_2 = 0.05, \dots, e_1 = e_2 = 0.025, \dots, -e_1 = 0.05, e_2 = 0$ . . . . .	36
2.12	Bicouche isotrope. — solution optimale à 8 couches, $\dots$ 8 couches périodiques, $\dots$ 2 couches optimisées. . . . .	36
1.1	Rayonnement d'une structure sous-marine. . . . .	40
1.2	mur antibruit. . . . .	41
1.3	Domaine étudié . . . . .	44
1.4	Problème couplé . . . . .	47
2.1	Définition des domaines et des normales. . . . .	66
2.2	Domaine avec des coins. Notations . . . . .	76
2.3	Noeuds et points de collocation en 2D. . . . .	79
2.4	Noeuds et points de collocation en 3D. . . . .	80
2.5	Elément singulier 2D. . . . .	81
2.6	Elément singulier 3D. . . . .	82
3.1	Problème 1: Dipôle dans un cylindre. . . . .	88
3.2	Problème 2: Dipôle dans un carré. . . . .	88
3.3	Problème 3: Dipôle dans une sphère. . . . .	88
3.4	Problème 4: Dipôle dans un cube. . . . .	88
3.5	Influence de la position du point de collocation sur l'erreur. . . . .	89
3.6	Convergence en dimension 2. . . . .	90
3.7	Convergence en dimension 3. . . . .	90
3.8	Comparaison des éléments linéaires et quadratiques . . . . .	92
3.9	Cas d'un angle. . . . .	92
3.10	Erreur sur la pression au coin. . . . .	94
3.11	Pression au voisinage du coin. . . . .	94
3.12	Erreur sur la pression au sommet du cube. . . . .	95
3.13	Vibrations d'un tube élastique. . . . .	95
3.14	Vibrations d'une coque sphérique. . . . .	96

3.15	Convergence pour des problèmes couplés. . . . .	96
3.16	Variation de l'erreur pour un problème 2D. . . . .	98
3.17	Variation de l'erreur pour un problème 3D. . . . .	98
3.18	Variation de l'erreur à haute fréquence. . . . .	99
3.19	Variation de l'erreur pour un problème couplé 2D. . . . .	99
3.20	Variation de l'erreur pour un problème couplé 3D. . . . .	102
3.21	Champ de pression incident au point d'observation. . . . .	102
3.22	Module de la pression diffusée. . . . .	103
3.23	Partie réelle de la pression diffusée. . . . .	103
3.24	Module de la pression diffusée. . . . .	105
3.25	Partie réelle de la pression diffusée. . . . .	105
3.26	Evolution de la pression diffusée en fonction de temps pour un point derrière le cylindre. . . . .	106
3.27	Evolution de la pression totale en fonction de temps pour un point derrière le cylindre. . . . .	106
3.28	Evolution de la pression derrière un mur bidimensionnel. . . . .	107
3.29	Evolution de la pression derrière un mur tridimensionnel. . . . .	107
4.1	Structure présentant une symétrie de translation. . . . .	110
4.2	Contributions au champ de pression en R. . . . .	113
4.3	Mur droit. Cas A. . . . .	114
4.4	Mur à sommet incliné. Cas B. . . . .	114
4.5	Mur à sommet incliné. Cas C. . . . .	114
4.6	Mur à sommet en T. Cas D. . . . .	114
4.7	Atténuation. Cas A. . . . .	115
4.8	Atténuation. Cas B. . . . .	115
4.9	Atténuation. Cas C. . . . .	115
4.10	Atténuation. Cas D. . . . .	115
4.11	Influence de la forme du haut du mur sur l'atténuation. . . . .	116
4.12	Emission à 50.Hz . . . . .	119
4.13	Emission à 250.Hz . . . . .	119
4.14	Emission à 500.Hz . . . . .	119
4.15	Emission à 900.Hz . . . . .	119
1.1	Principe d'un contrôle actif dans une gaine. . . . .	125
1.2	Contrôle actif en domaine ouvert. . . . .	127
1.3	Mur antibruit contrôlé par une source . . . . .	129
1.4	Atténuation en fonction de la fréquence et de la position de la source secondaire . . . . .	131
1.5	Meilleure atténuation en fonction de la fréquence. . . . .	131
1.6	Mur antibruit 3D contrôlé par une source (domaine $y \geq 0$ ) . . . . .	132
1.7	Atténuation en fonction de la taille de Z. . . . .	133
1.8	Atténuation en fonction du nombre de sources (2D). . . . .	138
1.9	Atténuation en fonction du nombre de sources (3D). . . . .	138
1.10	Contrôle de la diffusion par un cylindre . . . . .	139
1.11	Atténuation du champ diffusé. . . . .	139
2.1	Schéma d'un dispositif de contrôle actif. . . . .	141
2.2	Positions des sources, des capteurs et des micros d'erreur. . . . .	148
2.3	Variation de l'atténuation en fonction du nombre de micros d'erreur. . . . .	149
2.4	Influence du nombre de capteurs. . . . .	150
2.5	Evolution de l'atténuation en fonction de la longueur du filtre utilisé. . . . .	154
A.1	Schéma du modèle de Kelvin-Voigt. . . . .	159
A.2	Schéma du modèle de Maxwell. . . . .	160
A.3	Schéma du modèle de Zener. . . . .	160

B.1 Contrôle dans une sphère. . . . . 163



# Liste des tableaux

4.1	.....	113
1.1	Atténuation suivant la source en 2D à 500Hz	129
1.2	Atténuation suivant la source en 3D à 100Hz	130
1.3	Atténuation suivant la source en 3D à 500Hz	132
1.4	Atténuation en fonction du nombre de sources (2D, 100Hz)	135
1.5	Atténuation en fonction du nombre de sources (2D, 500Hz)	136
1.6	Atténuation en fonction du nombre de sources (2D, 1700Hz)	136
1.7	Atténuation en fonction du nombre de sources (3D, 500Hz)	136
1.8	Atténuation en fonction du nombre de sources (3D, 500Hz)	137
1.9	Contrôle du champ diffusé	139
1.10	Champ diffusé en fonction du nombre de sources	140
2.1	Atténuation suivant la source en 2D à 500Hz	148
2.2	Atténuation sur la bande [10Hz,2000Hz	149
2.3	Atténuation en 3D à 500 Hz et sur la bande [5Hz,2000Hz	150
2.4	Influence de la position du capteur	151
2.5	Comparaison d'un contrôle causal et non-causal en 2D sur [10Hz,2000Hz	154
2.6	Influence de la position du capteur en 2D	155
2.7	Comparaison d'un contrôle causal et non-causal en 3D sur [5Hz,2000Hz	155
2.8	Influence de la position du capteur en 3D	155