Identification rapide de la température dans les structures du génie civil

Alexandre Nassiopoulos

▶ **To cite this version:**

Alexandre Nassiopoulos. Identification rapide de la température dans les structures du génie civil. Engineering Sciences [physics]. Ecole des Ponts ParisTech, 2008. English. NNT : . pastel-00003729

HAL Id: pastel-00003729
https://pastel.hal.science/pastel-00003729

Submitted on 15 May 2008

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

Thèse
présentée pour l'obtention du diplôme de

Docteur de **l'Ecole Nationale des Ponts et Chaussées**
spécialité : Mécanique

par **Alexandre Nassiopoulos**

sujet :

Identification rapide de la température dans les structures du génie civil

Soutenue le 28 janvier 2008 à Champs-sur-Marne devant le jury composé de :

Président :	M. Martin RAYNAUD
Directeur de thèse :	M. Frédéric BOURQUIN
Rapporteurs :	M. Andrei CONSTANTINESCU M. Martin RAYNAUD
Examinateurs :	M. Pierre ARGOUL M. Dominique CHAPELLE

Résumé

Le contrôle de santé des structures par méthodes vibratoires se heurte à l'influence prédominante des effets thermiques et suscite le besoin de méthodes d'assimilation thermique en temps réel pour éliminer ces effets.

On propose des algorithmes qui permettent de reconstituer, à un instant donné, le champ de température dans une structure tridimensionnelle à partir de mesures ponctuelles enregistrées sur un intervalle de temps précédant cet instant. La démarche adoptée est celle de la méthode adjointe tirée de la théorie du contrôle optimal : on résout un problème de minimisation au sens des moindres carrés d'une fonction de coût mesurant l'écart entre les données et le champ de température reconstruit.

La minimisation dans un espace de type H^1 lève la difficulté habituelle de la méthode adjointe à la fin de la fenêtre d'observation, ce qui permet la reconstruction précise de la température à l'instant courant.

La définition des valeurs ponctuelles du champ de température impose le choix d'espaces de contrôle de régularité importante. Pour pouvoir utiliser des méthodes usuelles de discrétisation malgré un second membre formé de masses de Dirac, l'état adjoint est défini par des techniques spécifiques fondées sur la transposition.

Le formalisme dual adopté conduit à poser le problème dans un espace essentiellement unidimensionnel. En réduisant la quantité de calculs en ligne, au prix d'une série de précalculs, il donne lieu à des algorithmes d'assimilation en temps réel applicables à des structures tridimensionnelles de géométrie complexe.

La robustesse des méthodes par rapport aux erreurs de modélisation et au bruit de mesure est évaluée numériquement et validée expérimentalement.

Mots clés : assimilation de données, identification, contrôle optimal, équation de la chaleur.

Abstract

Structural Health Monitoring techniques come up against dominant environmental effects due to ambient temperature variations. Real time temperature data assimilation is crucial for the elimination of these effects in ambient vibration monitoring algorithms.

We develop algorithms for the estimation of the temperature field at a given moment, based on pointwise measurements over the time period preceding that moment. The approach is based upon the adjoint method in optimal control theory. The problem consists in minimizing in the least squares sense a regularized quadratic performance index measuring the gap between the data and a reconstructed temperature at sensor locations.

The well-known convergence difficulty of the adjoint technique near the final instant of the observation period is eliminated here by minimizing the performance index in a smooth enough functional space, thus enabling the reconstruction of the current temperature in the entire domain.

High regularity spaces must be chosen so that we can define pointwise values of the temperature field. In order to use standard discretization methods, we propose special transposition-based techniques for the computation of the adjoint state.

A dual formulation enables precomputing strategies and constructs high-speed algorithms well suited for real-time applications.

The robustness of the algorithms with respect to modelling errors or measurement noise is tested both numerically and experimentally.

Keywords : data assimilation, identification, optimal control, heat equation.

Remerciements

Ce travail a été effectué dans la division Métrologie et Instrumentation du Laboratoire central des Ponts et Chaussées (LCPC) sous la direction de M. Frédéric BOURQUIN à qui je tiens à témoigner ma plus sincère gratitude. J'ai beaucoup appris grâce à sa rigueur et ses conseils, sans lesquels cette thèse n'aurait jamais vu le jour. Je garderai en mémoire ses qualités inestimables en tant que scientifique et en tant qu'encadrant.

Je veux aussi remercier très chaleureusement mes collègues de la section nantaise de la division avec lesquels nous avons collaboré pour la réalisation de la partie expérimentale du travail. Je pense plus particulièrement à M. Jean-Pierre DESROCHE, à M. Louis-Marie COTTINEAU, M. Jean DUMOULIN, M. Fabien TREYSSEDE, M. Jean-Philippe GOURDON et M. Patrick ZERBIB. Merci à tous pour votre enthousiasme et pour l'accueil que vous m'avez réservé. J'ai aussi une pensée particulière pour M. Andrew SMYTH, professeur invité, avec qui les discussions furent très riches en enseignements.

M. Martin RAYNAUD et M. Andrei CONSTANTINESCU m'ont fait l'honneur d'accepter de rapporter sur ma thèse, et je les en remercie sincèrement. Je veux aussi remercier M. Dominique CHAPPELLE d'avoir accepté de faire partie du jury.

Je profite de cette occasion pour remercier tous mes collègues de la division avec qui mes rapports durant ces trois années ont été aussi agréables qu'enrichissants. Cyril et Michaël, Eric, François, Frédéric, Gonzague, Sylvie. Merci à tous.

Enfin, je voudrais remercier mes parents à qui je dois mon goût pour la science et la recherche depuis mon plus jeune âge. Mais surtout, ma pensée la plus tendre va à celle qui s'est tenue à mes côtés durant les longues heures de préparation de cette thèse, rendant ainsi ces trois années différemment agréables. Edwige, à qui je dédie ce travail.

Table des matières

1 Introduction **1**
1.1 Contexte de l'étude . . . 1
1.1.1 SHM et détection d'endommagement . . . 1
1.1.2 Problèmes inverses . . . 4
1.1.3 Caractère mal posé des problèmes inverses et régularisation . . . 4
1.2 Méthodes de résolution du problème inverse de conduction de la chaleur . . . 7
1.2.1 Méthodes fondées sur des approches de type différences finies . . . 8
1.2.2 Autres approches... . . . 9
1.3 Méthodes d'optimisation, contrôle optimal . . . 10
1.3.1 Approches de type moindres carrés . . . 10
1.3.2 Contrôle optimal et méthode adjointe (moindres carrés 'généralisés') . . . 12
1.4 Approches de type observateurs . . . 14
1.5 Synthèse : objectifs, démarche générale adoptée et résultats principaux . . . 17
1.5.1 Comparaison des différentes approches pour l'estimation de la température . . . 18
1.5.2 Assimilation de données ponctuelles par méthode adjointe . . . 19
1.5.3 Bilan des méthodes développées . . . 23
1.5.4 Organisation du manuscrit . . . 24

2 L'assimilation de données par contrôle optimal **27**
2.1 L'équation de la chaleur . . . 28
2.1.1 Description physique . . . 28
2.1.2 Formulation variationnelle . . . 29
2.1.3 Adimensionnement des variables . . . 30
2.1.4 Mise en œuvre d'un calcul par éléments finis . . . 31
2.2 Problèmes inverses . . . 34
2.2.1 Inverse généralisé et équation normale . . . 34
2.2.2 Décomposition en valeurs singulières . . . 35
2.2.3 Régularisation de Tikhonov appliquée à la reconstruction de la température . . . 36
2.3 La méthode adjointe en contrôle optimal . . . 38
2.3.1 Le cadre abstrait . . . 38
2.3.2 Formulation duale . . . 40
2.3.3 Application au problème d'assimilation de la température . . . 42

3 Reconstruction de la température : solide 1D **45**
3.1 Le problème inverse et la régularisation de Tikhonov . . . 46
3.2 La méthode adjointe dans le cas unidimensionnel . . . 47
3.2.1 Reconstruction dans $L^2(0,L) \times \left(L^2(0,T)\right)^2$ . . . 47
3.2.2 Algorithmes de descente pour la minimisation de la fonctionnelle . . . 48
3.2.3 Reconstruction dans $H^1(0,L) \times \left(H^1(0,T)\right)^2$ . . . 50
3.2.4 Conditions de compatibilité . . . 51
3.3 Résultats . . . 53
3.3.1 Résultats avec données non bruitées . . . 53
3.3.2 Résultats avec données bruitées . . . 58
3.4 Conclusions . . . 63

4 Reconstruction de la température : solide 3D **65**
4.1 Reconstruction d'une source volumique . . . 67
4.1.1 Formulation primale . . . 67
4.1.1.1 Contrôle dans $L^2(0,T;L^2(\Omega))$ . . . 67
4.1.1.2 Contrôle dans $H^1(0,T;L^2(\Omega))$ . . . 69
4.1.2 Formulation duale . . . 70
4.1.3 Méthode de transposition pour la définition de l'état adjoint . . . 72
4.2 Reconstruction d'un flux . . . 75
4.2.1 Formulation primale . . . 75
4.2.2 Formulation duale . . . 78
4.2.3 Méthode de transposition pour la définition de l'état adjoint . . . 80
4.3 Reconstruction de la température initiale . . . 86
4.3.1 Formulation primale . . . 86
4.3.2 Formulation duale . . . 87
4.3.3 Méthode de transposition pour la définition de l'état adjoint . . . 88
4.4 Relaxation des observations : observations non ponctuelles . . . 90
4.5 Bilan . . . 93
4.5.1 Reconstruction simultanée de θ^0 et Φ . . . 93
4.5.2 Calcul sur fenêtres glissantes . . . 94

5 Implantation numérique et algorithmes **97**
5.1 Remarques d'ordre général concernant la discrétisation . . . 98
5.1.1 Convergence uniforme de la méthode des éléments finis pour des équations paraboliques . . . 98
5.1.2 Approximation de l'espace des observations . . . 102
5.2 Reconstruction d'un flux . . . 104
5.2.1 Implantation numérique de l'état adjoint . . . 104
5.2.2 Algorithmes itératifs . . . 107

5.2.2.1 Algorithme du gradient conjugué appliqué à la minimisation de la fonctionnelle primale . . . 108
5.2.2.2 Algorithme du gradient conjugué appliqué à la minimisation de la fonctionnelle duale . . . 111
5.2.3 Algorithme direct appliqué au problème dual . . . 113
5.2.3.1 Construction de la matrice grammienne . . . 113
5.2.3.2 Inversion . . . 115
5.2.3.3 Récapitulatif de l'algorithme . . . 116
5.2.3.4 Etude de la matrice grammienne . . . 116
5.2.4 Bilan des différents algorithmes de reconstruction du flux . . . 117
5.2.5 Résultats avec données de synthèse . . . 119
5.3 Reconstruction d'une source interne . . . 134
5.3.1 Implantation numérique de l'état adjoint . . . 134
5.3.2 Algorithme direct appliqué au problème dual . . . 135
5.3.2.1 Construction de la matrice grammienne . . . 136
5.3.2.2 Inversion . . . 137
5.3.2.3 Récapitulatif de l'algorithme . . . 138
5.3.3 Résultats avec données de synthèse . . . 139
5.4 Reconstruction de la condition initiale . . . 148
5.4.1 Algorithme direct appliqué au problème dual . . . 148
5.4.1.1 Construction de la matrice grammienne . . . 149
5.4.1.2 Inversion . . . 150
5.4.1.3 Récapitulatif de l'algorithme . . . 150
5.4.2 Résultats avec données de synthèse . . . 151
5.5 Conclusions . . . 153

6 Performances des méthodes proposées 155
6.1 Sensibilité au bruit de mesure . . . 157
6.1.1 Paramètre de régularisation . . . 157
6.1.2 Simulations avec données bruitées . . . 160
6.2 Sensibilité aux incertitudes du modèle . . . 162
6.2.1 Sensibilité au coefficient de diffusivité κ . . . 165
6.2.2 Sensibilité au coefficient d'échange α . . . 166
6.2.3 Sensibilité aux incertitudes sur la position des capteurs . . . 168
6.2.4 Conclusions . . . 175
6.3 Comparaison avec les approches de type Kalman . . . 176
6.3.1 Le filtre de Kalman . . . 176
6.3.2 Mise sous forme d'équation d'état du problème de la chaleur . . . 177
6.3.3 Exemple d'application . . . 178
6.4 Comparaison avec une approche de type interpolation . . . 181
6.5 Conclusions . . . 185

7 Validation expérimentale des méthodes **187**
7.1 Dispositif expérimental . . . 188
7.1.1 Matériel . . . 188
7.1.1.1 Description de la maquette . . . 188
7.1.1.2 Dispositif de mesure et d'acquisition . . . 189
7.1.1.3 Enceinte climatique . . . 190
7.1.1.4 Eléments chauffants . . . 191
7.1.2 Etalonnage de la chaîne de mesure . . . 191
7.2 Détermination expérimentale de la diffusivité thermique . . . 194
7.2.1 Théorie . . . 194
7.2.2 Protocole . . . 195
7.2.3 Résultats . . . 195
7.3 Validation expérimentale de la méthode d'assimilation thermique . . . 198
7.3.1 Protocole . . . 198
7.3.1.1 Phase de stabilisation . . . 198
7.3.1.2 Cycle de chauffe . . . 198
7.3.2 Résultats . . . 198
7.3.3 Conclusions . . . 209
7.4 Bilan du chapitre . . . 210

8 Conclusions générales **211**
8.1 En guise de conclusion : surveillance de l'état thermique d'un voussoir de pont . . . 211
8.2 Bilan et perspectives . . . 214
8.2.1 Résultats principaux . . . 214
8.2.2 Perspectives . . . 215

A **217**
A.1 Géométrie de la maquette utilisée pour les essais et disposition des capteurs . . . 217

B Assimilation thermique 1D par méthode adjointe libérée **219**
B.1 Introduction . . . 219
B.2 Formulation générale du problème . . . 221
B.2.1 L'équation de la chaleur . . . 221
B.2.2 Reconstruction de la température . . . 222
B.2.3 Un problème mal posé . . . 223
B.2.4 Régularisation de Tikhonov . . . 224
B.3 Minimisation dans L^2 . . . 224
B.3.1 La méthode de l'état adjoint . . . 225
B.3.2 Résultats . . . 227
B.4 Reconstruction dans H^1 . . . 228
B.4.1 Position du problème . . . 228
B.4.2 Calcul du gradient . . . 229

B.4.3 Résultats . . . 232
B.5 Conclusions . . . 232

C A step towards model-based Temperature Elimination in SHM 235
C.1 Introduction . . . 235
C.2 Problem statement . . . 236
C.3 Minimization in L^2 . . . 237
C.3.1 The adjoint state method . . . 237
C.3.2 Results . . . 238
C.4 Minimization in H^1 . . . 240
C.5 Towards temperature elimination in Ambient Vibration Monitoring . . . 241
C.6 Conclusions . . . 242

D Temperature identification based on pointwise transient measurements 243
D.1 Introduction . . . 243
D.2 Problem statement . . . 244
D.3 Minimization procedures . . . 245
D.3.1 Minimization in L^2 . . . 245
D.3.2 Minimization in H^1 . . . 247
D.4 Dual formulation . . . 248
D.5 Model reduction . . . 248
D.6 Numerical test case . . . 249
D.7 Conclusions . . . 249

E On the use of branch modes for the boundary control of flexible structures 251
E.1 Introduction . . . 251
E.2 The controllability gramian as a tool for control synthesis . . . 252
E.3 On the mechanical nature of the controllability gramian . . . 253
E.4 Galerkin approximation of the controllability gramian . . . 255
E.5 Consistent stresses for active control . . . 256
E.5.1 Sloshing modes . . . 256
E.5.2 Branch modes . . . 259
E.5.2.1 Branch modes for the Laplace operator . . . 259
E.5.2.2 Branch modes for the boundary control of thin plates . . . 262
E.5.2.3 Numerical tests . . . 264
E.5.3 Wave equation in a parallelepipedic domain . . . 264
E.6 Concluding remarks . . . 266

Chapitre 1

Introduction

1185 après J.-C. : la construction du Pont Saint-Bénézet, communément appelé le Pont d'Avignon, est achevée. Long de 920 mètres, large de 4 mètres, supporté par 22 arches, il fut construit en 8 ans et constitua pendant des siècles le seul point de traversée du Rhône entre la mer Méditerranée et Lyon. Plus de 800 ans plus tard, le Viaduc de Millau s'élance sur les gorges du Tarn à une hauteur maximale de 343 mètres. Long de 2640 mètres, il est maintenu par 7 piles. Les travaux ont duré 38 mois. L'ouvrage bat le record du monde pour la taille spectaculaire de sa pile principale, haute de 245 mètres. C'est aussi un ouvrage d'exception par sa légèreté et par les innovations techniques mises en œuvre pour sa construction et lors de son exploitation. Une multitude de capteurs en tout genre surveillent en permanence sa capacité à résister aux sollicitations et à l'usure du temps.

Hormis leur fonction, ces deux édifices ont un point commun : ils témoignent du désir constant de l'homme de parvenir à pérenniser son œuvre grâce à des techniques de plus en plus sophistiquées. La fiabilité de la structure est ici l'enjeu majeur. Grâce aux progrès réalisés dans les méthodes de surveillance de santé, les ponts de demain seront des structures intelligentes, intégrant dès leur construction des systèmes capables de détecter une perte de fiabilité due à un endommagement précoce.

1.1 Contexte de l'étude

1.1.1 SHM et détection d'endommagement

L'endommagement dans une structure provoque une modification de ses propriétés mécaniques, telles que les fréquences propres de vibration, les déformées modales ou l'amortissement. Plusieurs méthodes de surveillance de santé (*Structural Health Monitoring* ou *SHM*) sont fondées sur la surveillance de ces propriétés. Les techniques *Ambient Vibration Monitoring* (Wenzel & Pichler, 2005) reposent sur une mesure en continu des vibrations dues à une excitation naturelle (sous l'action du vent, du traffic routier, etc.). Les propriétés vibratoires sont en permanence comparées à un état de référence connu (Basseville *et al.* , 2000). Les méthodes de surveillance de santé visent ainsi à déceler l'existence d'un défaut, à le localiser, à évaluer sa gravité et à prédire la durée de vie résiduelle de l'ouvrage (Rytter, 1993). Le lecteur intéressé trouvera dans Farrar *et al.* (2003) une revue de la vaste littérature concernant ces techniques.

La sensibilité des propriétés mécaniques varie selon les cas d'endommagement et selon la géométrie de la structure. Farrar & Jauregui (1996), lors d'un endommagement contrôlé du pont I-40 à Rio Grande (Nouveau Mexique, EU), constatent qu'un endommagement mettant sévèrement en cause la sécurité de la structure induit un changement de la première fréquence propre d'environ 2%. Cette valeur est très faible par rapport aux changements provoqués par la variation des conditions environnementales ambiantes : lors du même essai, des études ont montré que la même fréquence propre variait de 5% sur 24 heures à cause de la variation de température (Farrar *et al.* , 2003).

Parallèlement, les techniques de contrôle structural actif, semi-actif ou passif pourraient permettre de réduire les contraintes internes d'une structure et d'en augmenter la stabilité (Baratta *et al.* , 2004). Leur application rencontre cependant les mêmes difficultés liées aux variations environnementales (Parisse *et al.* , 2005). Bourquin (2001c) montre en effet que de petites variations des paramètres peuvent conduire à des variations importantes de la réponse contrôlée d'une structure.

La maîtrise de l'influence des conditions environnementales et notamment de la température sont un défi majeur pour toutes les techniques évoquées plus haut. C'est ce que concluent les auteurs du rapport du laboratoire Los Alamos (EU) (Farrar *et al.* , 2003) concernant les techniques de surveillance vibratoire : "One of the main obstacles for deploying a monitoring system in field is the environmental and operational variation of structures. Although many damage detection techniques are successfully applied to scaled models or specimen tests in controlled laboratory environments, the performance of these techniques in real operational environments is still questionable and needs to be validated".

Un grand nombre de travaux tente de remédier à ces difficultés. Il s'agit dans la majorité des cas d'approches de type 'boîte noire' fondées par exemple sur une analyse statistique en composantes principales (Kullaa, 2002, 2003, 2004) ou sur un apprentissage par réseaux de neurones (Sohn *et al.* , 2001). L'autre catégorie d'approches favorise l'utilisation d'un modèle qui corrèle les variations de fréquence aux variations de température. Cette corrélation peut être issue d'observations sur le terrain (Rohrmann *et al.* , 2000; Wood, 1992), ou d'une modélisation physique thermomécanique. On peut citer ici les travaux de Nasser (2006) qui emploient les méthodes de détection d'endommagement fondées sur l'analyse de la matrice de Hankel des données (Basseville *et al.* , 2000). Le rejet des effets environnementaux peut être envisagé grâce à des modèles des structures étudiées (Basseville *et al.* , 2006a,b).

On retrouve dans la littérature plusieurs modèles permettant en effet de relier les effets de la température aux contraintes mécaniques (Géradin & Rixen, 1994; Jirasek & Bažant, 2002). A cet effet, Erlicher & Bourquin (2006) ont récemment proposé une méthode de modélisation thermomécanique pour des structures tridimensionnelles en prenant en compte d'éventuelles précontraintes. Treyssède (2006) étudie en particulier les effets de précontraintes thermiques sur des structures unidimensionnelles, en mettant l'accent sur les effets de préflexion.

Toutefois, l'utilisation de modèles thermomécaniques nécessite la connaissance préalable du champ de température à l'intérieur de la structure. Pour cela, le recours à des méthodes d'instrumentation et de mesure semble inévitable. Le nombre de capteurs de température sur de grands ouvrages peut atteindre aujourd'hui plusieurs centaines (Wong, 2004), ce qui témoigne de l'importance de cette grandeur physique et de ses variations spatiales. Mais les techniques de mesure de température ne permettent en aucun cas la connaissance directe d'un champ tridimensionnel en tout point. Les cap-

teurs le plus souvent utilisés dans le domaine du génie civil (thermocouples, éléments Pt100, thermistances,...), ne peuvent livrer que des mesures ponctuelles. Récemment, des structures en béton se sont vues équipées de fibres optiques utilisant l'effet Raman pour la mesure de la température linéique. L'effet Brillouin (Lanticq *et al.* , 2006) pourrait aussi être utilisé à terme. Les techniques liées à la thermographie infrarouge (Maierhofer *et al.* , 2006) sont aussi un choix potentiel, mais les difficultés liées à leur mise en œuvre ne permettent pas d'envisager une utilisation en continu sur site. Dans tous les cas cités, les techniques de mesure expérimentales ne peuvent cependant fournir qu'une connaissance locale du champ thermique dans une structure. A cela s'ajoute l'inaccessibilité de certaines parties de la structure, rendant nécessaire une étape d'assimilation de données pour reconstruire le champ de température à partir de données partielles sur celui-ci.

Selon la définition donnée dans Le Dimet & Blum (2002), l'assimilation de données est "l'ensemble des techniques qui permettent de combiner de façon optimale (en un sens à définir) l'information mathématique contenue dans les équations et l'information physique provenant des observations en vue de reconstituer l'état" du système. Le terme *assimilation de données* est très couramment employé dans les domaines de la météorologie et de l'océanographie (Pham *et al.* , 1998b; Kalnay, 2003) où le nombre de données provenant de mesures physiques est relativement faible par rapport au nombre de degrés de liberté des systèmes d'écoulement étudiés. Ici, le système considéré est le processus de diffusion de chaleur qui régit le champ de température dans la structure étudiée.

Le problème de la reconstruction du champ de température qui fait l'objet du présent travail peut aussi être vu comme un problème inverse. En thermique, le problème classique de conduction de la chaleur consiste à déterminer le champ de température résultant d'une condition initiale et de conditions aux limites connues. Pour reconstruire le champ de température à partir de mesures partielles, nous nous fixerons comme objectif la détermination de la condition initiale ou des conditions aux limites responsables de ce champ. Il s'agit donc de la démarche inverse, d'où la dénomination de *problème inverse*. On pourra en déduire par post-traitement une estimation du champ de température à l'instant présent (l'instant final de la fenêtre d'observation) dont on a besoin dans les méthodes de surveillance de santé. L'approche *problème inverse* prend en compte la dynamique de la diffusion de la chaleur, et se distingue nettement d'une simple interpolation des données à l'instant final.

Le problème que nous nous proposons de traiter ici se présente comme suit. On considère un solide à une température initiale θ^0 occupant un domaine Ω. En notant f une source interne et Φ des sources surfaciques, la température à l'intérieur du solide est régie par l'équation de diffusion de la chaleur, qui est un cas d'équation parabolique :

$$\begin{cases} \rho c \dfrac{\partial \theta}{\partial t} - div\, \kappa\, grad\, \theta = f & \text{dans} \quad \Omega \times [0,T] \\ (\kappa\, grad\, \theta).\vec{n} + \alpha\theta = \Phi & \text{sur} \quad \partial\Omega \times [0,T] \\ \theta(x,0) = \theta^0(x) & \text{dans} \quad \Omega \end{cases}$$

Nous reviendrons plus tard sur le choix des conditions aux limites et sur la signification physique des différents paramètres de cette expression. Nous supposons que nous disposons de mesures ponctuelles $\theta_k^d(t)$, $k = 1..m$ délivrées par m capteurs situés aux points x_k. A partir de ces données, l'objectif fixé est d'estimer la condition initiale θ^0 et les sources surfaciques Φ ou volumiques f qui sont responsables

de ces mesures.

1.1.2 Problèmes inverses

Du fait de leur large champ d'applications, les problèmes inverses liés à la conduction de la chaleur ont été largement étudiés durant les quatre dernières décennies, parallèlement au développement de techniques numériques et de moyens de calcul permettant leur résolution.

Traditionnellement, les problèmes inverses sont classés en deux catégories : les problèmes qui visent à déterminer des conditions aux limites ou des sources inconnues (comme cela est le cas ici) et les problèmes liés à l'estimation de paramètres intrinsèques du système. Le premier type de problèmes apparaît dès que la mesure directe de la grandeur physique étudiée n'est pas possible en pratique. Les hautes températures et la difficulté d'accès dans la chambre de combustion d'un moteur automobile (Delattre *et al.* , 2001; Constantinescu *et al.* , 2004), dans une enceinte contenant un feu (Raynaud & Bransier, 1986) ou sur les faces actives d'outils d'usinage (Huang & Tsai, 2005; Huang & Lo, 2005) sont des cas où le recours à des méthodes inverses est nécessaire.

Dans la deuxième catégorie de problèmes inverses, l'objectif fixé est de déterminer, à partir d'une connaissance partielle du champ de température, des paramètres de modèle inconnus. Il est possible par exemple de déterminer la conductivité d'un matériau à partir de mesures transitoires (Yang, 1999; Kügler, 2003; Plana *et al.* , 2006; Chen & Wu, 2006) ou d'utiliser cette méthode pour la détection non intrusive de défauts de géométrie internes (Chapko *et al.* , 1998; Chapko & Kügler, 2004; Mera *et al.* , 2005). Les problèmes inverses d'identification de paramètres se rencontrent dans de nombreux autres domaines allant de la géoméchanique (Lecampion *et al.* , 2002; Lecampion & Constantinescu, 2005) aux mathématiques financières.

La difficulté principale des problèmes inverses est leur caractère généralement mal posé (Engl *et al.* , 1994). Un problème est bien posé au sens de Hadamard s'il vérifie les propriétés suivantes :

1. Pour toute donnée admissible, une solution existe.
2. Pour toute donnée admissible, la solution est unique.
3. La solution dépend continûment des données.

Dès lors que l'une de ces conditions est violée, le problème est considéré comme mal posé. En pratique, cela veut souvent dire qu'il n'existe pas de solution unique ou que, si elle existe, une légère modification des données conduit à des solutions très différentes. C'est le cas par exemple des ensembles chaotiques tels que les systèmes météorologiques pour lesquels une infime variation des données (le battement d'ailes d'un papillon en Chine...) peut faire basculer le système d'un état à un autre (un orage au lieu d'une journée ensoleillée en Bretagne...).

1.1.3 Caractère mal posé des problèmes inverses et régularisation

Dans ce qui suit, nous mettons en évidence le caractère mal posé du problème inverse de la chaleur. Bien que cela ne fasse pas l'objet du présent travail, cette mise au point montre l'intérêt de l'utilisation d'une méthode de régularisation.

Les propriétés lissantes de l'équation de conduction sont responsables du caractère mal posé du problème inverse de la chaleur. Intuitivement, la distribution de températures dans un solide isolé tend à s'homogénéiser. En effet, si la température initiale présente de fortes variations spatiales, celles-ci tendent à disparaître avec le temps et il devient difficile, voire impossible, de les reconstituer : le phénomène de la conduction de la chaleur est irréversible.

Considérons par exemple le problème simplifié suivant qui donne une illustration claire du phénomène. Soit θ la solution du problème de la chaleur unidimensionnel

$$\begin{cases} \dfrac{\partial \theta}{\partial t} - \dfrac{\partial^2 \theta}{\partial x^2} = 0 & \text{dans} \quad [0, L] \times [0, T] \\ \theta(0) = \theta(L) = 0 & \text{dans} \quad [0, T] \\ \theta(x, T) = f(x) & \text{dans} \quad [0, L] \end{cases}$$

On connaît la condition finale $\theta(x, T) = f(x)$ et on cherche à déterminer le champ à l'instant initial

$$g(x) = \theta(x, 0).$$

Si on note $\{\lambda_k, \phi_k\}$ l'ensemble des solutions du problème de valeurs propres

$$\begin{cases} -\dfrac{d^2 \phi}{dx^2} = \lambda \phi & \text{dans} \quad [0, L] \\ \phi(0) = \phi(L) = 0 \end{cases}$$

avec $\displaystyle\int_0^L \phi_k^2 \, dx = 1$, alors la température peut être écrite comme combinaison linéaire des fonctions propres ϕ_k :

$$\theta(x, t) = \sum_{k=1}^{\infty} \nu_k(t) \phi_k(x).$$

La fonction inconnue $g(x)$ peut également être décomposée sur la même base :

$$g(x) = \sum_{k=1}^{\infty} c_k \phi_k(x),$$

avec

$$c_k = \int_0^L g(x) \phi_k(x) \, dx.$$

En remplaçant l'expression de $\theta(x, t)$ dans le problème initial, on obtient le système d'équations différentielles suivant :

$$\begin{cases} \dfrac{d\nu_k(t)}{dt} + \lambda_k \nu_k(t) = 0 & \text{dans} \quad [0, T] \\ \nu_k(0) = c_k \end{cases}$$

pour tout k. La résolution de ce système d'équations permet alors d'écrire la température sous la forme

$$\theta(x, t) = \sum_{k=1}^{\infty} c_k \phi_k(x) e^{-\lambda_k t}$$

En utilisant cette expression, le champ final $f(x)$ s'écrit

$$\begin{aligned} f(x) &= \sum_{k=1}^{\infty} c_k \phi_k(x) e^{-\lambda_k T} \\ &= \int_0^L g(x) K(x,\xi)\, d\xi \end{aligned}$$

avec

$$K(\xi) = \sum_{k=1}^{\infty} e^{-\lambda_k T} \phi_k(x) \phi_k(\xi).$$

Le théorème de Picard (Engl *et al.* , 1994) précise alors que le problème inverse admet une solution si et seulement si

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{|f_k|^2}{\left(e^{-\lambda_k T}\right)^2} < \infty$$

où $f_k = \int_0^L f(x)\phi_k(x)\, dx$. La solution $g(x)$ est dans ce cas donnée par

$$g(x) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{f_k \phi_k(x)}{e^{-\lambda_k T}}$$

Cette dernière expression donne un éclairage sur la nature mal posée du problème. Si une petite perturbation est ajoutée aux données, telle que $f^\delta = f + \delta\phi_k$, on obtient la solution perturbée $g^\delta = g + \delta\phi_k e^{\lambda_k T}$. Or, pour tout opérateur auto-adjoint d'inverse compact (tel que le Laplacien), les valeurs propres λ_k tendent vers l'infini :

$$\lim_{k \to +\infty} \lambda_k = +\infty.$$

De manière plus précise, la première formule asymptotique de Weyl donne une idée de la croissance des valeurs propres : $\lambda_k \sim k^{\frac{2m}{d}}$, d étant la dimension de l'espace dans lequel on se place, et $2m$ l'ordre de l'opérateur différentiel ($2m = 2$ pour le Laplacien). Le rapport

$$\frac{\|g^\delta - g\|}{\|f^\delta - f\|} = e^{\lambda_k T}$$

peut par conséquent devenir arbitrairement grand.

Une petite erreur sur les données f^δ induit une grande erreur sur la solution g^δ (Muniz *et al.* , 1999; Masood, 2005; Liu, 2002). Cette analyse montre aussi que les composantes des données sont d'autant plus amplifiées par l'opérateur inverse qu'elles sont de haute fréquence. Celles-ci sont donc le plus responsables du caractère mal posé du problème. Toutes les méthodes dites *de régularisation* pour résoudre ce problème inverse auront tendance à filtrer les hautes fréquences (Shen, 1999; Battaglia, 2002). C'est par exemple le cas de la méthode de Tikhonov (Tikhonov & Arsenin, 1977), largement employée dans ce contexte, et qui opère un filtrage implicite des composantes haute fréquence de la solution (Vogel, 2002). Nous y reviendrons plus en détail dans le cœur de l'exposé. D'autres méthodes, comme la décomposition en valeurs singulières tronquée (*Truncated Singular Value Decomposition* ou TSVD), opèrent une troncature explicite des hautes fréquences (Shenefelt *et al.* , 2002; Shen, 1999; Mera *et al.* , 2003; Kim & Nelson, 2004, 2000). Videcoq & Petit (2001), Battaglia (2002) et Girault

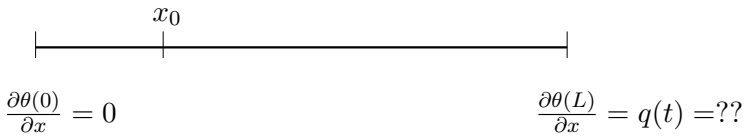
et al. (2003) montrent dans leurs travaux qu'il existe un lien entre les composantes fréquentielles détectables sur une condition de surface inconnue et la profondeur des mesures.

Les méthodes de régularisation sont toutes fondées sur le même principe : le problème initial est remplacé par un problème proche de celui-ci, mais bien posé, pour lequel la procédure de résolution est stable. L'erreur induite par ce changement de problème est appelée *biais déterministe* (*deterministic bias*) par Raynaud & Beck (1988), qui proposent une méthode systématique de comparaison des méthodes inverses. La méthode idéale engendrerait un biais déterministe nul, mais cette méthode n'existe pas vu le caractère mal posé du problème. En fait, toute méthode de régularisation sera un compromis entre le biais déterministe introduit et la *sensibilité aux mesures* (*sensitivity*) (Raynaud & Beck, 1988). Celle-ci mesure la déviation de la solution lorsque les données sont entachées d'erreurs.

1.2 Méthodes de résolution du problème inverse de conduction de la chaleur

Faire une revue exhaustive de la littérature concernant les problèmes inverses liés à la conduction de la chaleur semble très difficile. Nous proposons d'en donner ici un aperçu qui couvre le plus large éventail possible des méthodes existantes.

Une des premières tentatives de résolution d'un problème de ce genre remonte à 1960 avec le travail de Stolz (1960), qui traite du problème de la détermination d'un flux et d'une température inconnus sur un solide unidimensionnel à partir de la mesure de la température en un point x_0 (cf. schéma ci-dessous).



Ce problème type a souvent fait l'objet de travaux dans la littérature sous le nom de *sideways heat equation*. La solution proposée par Stolz (1960) est basée sur une relation analytique entre la température et le flux inconnu. Grâce à une décomposition de la fonction inconnue en une somme de composantes simples, l'inversion de cette relation peut être faite numériquement.

Les méthodes fondées sur des expressions analytiques ont rapidement été abandonnées car elles restent limitées sur le type de géométries qu'il est possible de traiter. Les travaux précurseurs de Burggraf (1964) et Sparrow *et al.* (1964) ont été repris plus récemment par Monde (2000), qui donne des solutions analytiques du problème pour des solides semi-infinis ou finis fondées sur une discrétisation semi-polynômiale des fonctions inconnues. La méthode peut être étendue au cas 2D (Monde *et al.* , 2003). Dans Monde & Mitsutake (2001), la même démarche conduit à des expressions analytiques pour la détermination du coefficient de conductivité. Enfin, Woodfield *et al.* (2006a) et Woodfield *et al.* (2006b) proposent des améliorations de la méthode. Ces travaux semblent néanmoins d'application très limitée.

1.2.1 Méthodes fondées sur des approches de type différences finies

La discrétisation par différences finies de l'équation de la chaleur a ouvert d'autres pistes de résolution numérique. La connaissance de θ en x_0 divise le domaine en 2 ; une partie 'directe' entre la condition limite connue et le point de mesure (cf. schéma ci-dessus) qui peut être résolue de manière classique, et une partie 'inverse' dans le reste du domaine. Le domaine est discrétisé en un certain nombre de mailles. Dans un premier temps, un schéma aux différences finies classique permet la détermination de la température dans la partie directe du domaine. Un schéma spécifique permet ensuite de déterminer la température au nœud juxtaposé à x_0. Le schéma utilise une relation explicite entre la température inconnue sur ce nœud et les températures connues au nœud précédent. Une fois les températures sur ce nœud et pour tous les pas de temps déterminées, la procédure est répétée pour le nœud suivant jusqu'à couvrir toute la région inverse.

On retrouve ces schémas dans la littérature sous la dénomination de *méthodes de retour vers la surface*, ou *space marching* (Raynaud, 1997), pour évoquer leur aspect séquentiel dans l'espace. En fonction des pas de temps qui interviennent dans la relation donnant la température (molécule de calcul), des méthodes différentes sont obtenues (D'Souza, 1975; Murio, 1989; Raynaud & Bransier, 1986; Al-Khalidy, 1998). Le schéma proposé par Sassi & Raynaud (1998) est nettement plus performant en termes de stabilité et de précision que ses prédécesseurs. Récemment, Eldén (1997) a proposé un schéma de ce type basé sur une méthode de lignes. Berntsson (1998) décrit en détail le cadre mathématique et les propriétés régularisantes d'un algorithme découlant de ce travail.

Un large éventail d'algorithmes de résolution du problème inverse de la chaleur est dérivé de la méthode de spécification de fonction (*function specification method* ou FSM) proposée par Beck (1970). A chaque pas de temps t^{n+1}, on suppose connus la distribution de températures et le flux au pas de temps précédent t^n. On minimise alors une fonctionnelle de type moindres carrés portant sur les températures aux pas de temps t^{n+1} à t^{n+r}. La minimisation de cette fonctionnelle par rapport au flux au pas de temps t^n permet de déterminer la valeur de ce dernier. La minimisation est faite grâce à une expression explicite des coefficients de sensibilité. Les températures futures aux pas de temps t^{n+1} à t^{n+r} sont utilisées pour apporter la régularisation nécessaire au processus de minimisation (Beck *et al.* , 1985). Elles sont déterminées via une hypothèse simplifiée sur l'évolution du flux lui-même. Sans ces pas de temps futurs, la formule d'inversion n'est autre que celle proposée par Stolz (1960) (Ling *et al.* , 2006). On retrouve dans Beck *et al.* (1996) une comparaison de ce type de régularisation avec la méthode de Tikhonov dont il sera question plus loin. Là encore, il serait trop ambitieux de vouloir passer en revue l'ensemble des travaux inspirés de cette méthode. Nous nous contenterons de citer les travaux récents de Ling *et al.* (2003), qui utilisent la méthode des éléments finis pour la discrétisation préalable des modèles. Les travaux de Lin *et al.* (2004) permettent de réduire l'erreur induite par l'hypothèse sur les pas de temps futurs. Ling *et al.* (2005) et Ling *et al.* (2006) apportent certaines améliorations en utilisant notamment des pas de temps différents pour les mesures et pour l'inversion. La stabilité numérique de la méthode est étudiée par Ling & Atluri (2006).

Chantasiriwan (2001) combine la FSM à une discrétisation par éléments frontières pour la résolution d'un problème inverse en deux dimensions. Combinée à des méthodes de réduction de modèle, la FSM a également permis dans Videcoq & Petit (2001), Battaglia (2002) et Girault *et al.* (2003) de résoudre

le problème inverse dans des cas bidimensionnels.

En parallèle, on retrouve dans d'autres travaux une multitude d'autres schémas d'inversion. Par exemple, Chang *et al.* (2005) ont proposé un schéma numérique original qui préserve les propriétés de groupe, ce qui garantit la stabilité de la procédure numérique. Shidfar & Zakeri (2005) ont développé par ailleurs une méthode dérivée d'un shéma semi-implicite. Chen *et al.* (2002) puis Chen & Wu (2006) ont utilisé la transformée de Laplace dans des contextes différents pour aborder le problème.

Une idée tout à fait différente pour régulariser le problème est utilisée dans la méthode de *quasi-réversibilité* (Lattès & Lions, 1967). L'opérateur

$$\partial_t - \Delta$$

est dissipatif. Lorsque le sens du temps est inversé, cette propriété est à l'origine du caractère mal posé du problème rétrograde. On remplace alors cet opérateur par l'opérateur

$$\partial_t - \Delta - \epsilon\Delta^2$$

avec ϵ petit. Le problème rétrograde lié à ce nouvel opérateur est bien posé ce qui rend sa résolution numériquement stable.

La méthode proposée par Weber (1981) reprend la même idée. Elle consiste à ajouter à l'équation de la chaleur parabolique classique un terme hyperbolique, c'est-à-dire à remplacer l'opérateur de la chaleur par

$$\epsilon\partial_{tt} + \partial_t - \Delta,$$

avec ϵ petit. Outre le fait que l'équation de la chaleur hyperbolique ainsi obtenue puisse s'avérer intéressante pour la modélisation de phénomènes thermiques transitoires rapides ou faisant intervenir des températures importantes, le problème rétrograde lié à ce nouvel opérateur est bien posé. Cette méthode a été reprise par Masood (2005) et Huang & Wu (2006), et appliquée récemment à un cas tridimensionnel par Hsu (2006).

1.2.2 Autres approches...

Pour finir cette revue de l'état de l'art des méthodes de résolution du problème inverse de la chaleur, nous citerons ici les méthodes qui utilisent les algorithmes génétiques (Chiwiacowski & de Campos Velho, 1991) ou de type *recuit simulé* ou *particle swarm* (Colaço *et al.* , 2006). Il s'agit d'algorithmes de minimisation qui simulent des comportements biologiques et qui présentent certains caractères autoadaptatifs. On retrouve à la base de ces méthodes une fonctionnelle de coût qui doit être régularisée au préalable par une technique adaptée. Une autre méthode qui mérite d'être citée pour son originalité est celle de la simulation de réseau (*network simulation method*) (Zueco *et al.* , 2006). Elle est fondée sur l'écriture des équations différentielles régissant la diffusion de la chaleur sous forme de réseau électrique avec des équivalences physiques entre les grandeurs électriques et thermiques.

1.3 Méthodes d'optimisation, contrôle optimal

1.3.1 Approches de type moindres carrés

Le problème inverse peut être mis sous forme de problème d'optimisation, où les inconnues sont déterminées de telle sorte qu'elles minimisent l'écart (en un sens à préciser) entre les mesures issues de l'observation du système physique et les mesures calculées par modèle (cf. schéma **??**). Dans le cas idéal où les deux quantités sont égales, et s'il y a unicité de la solution, les paramètres d'entrée du modèle numérique sont ceux du système physique.

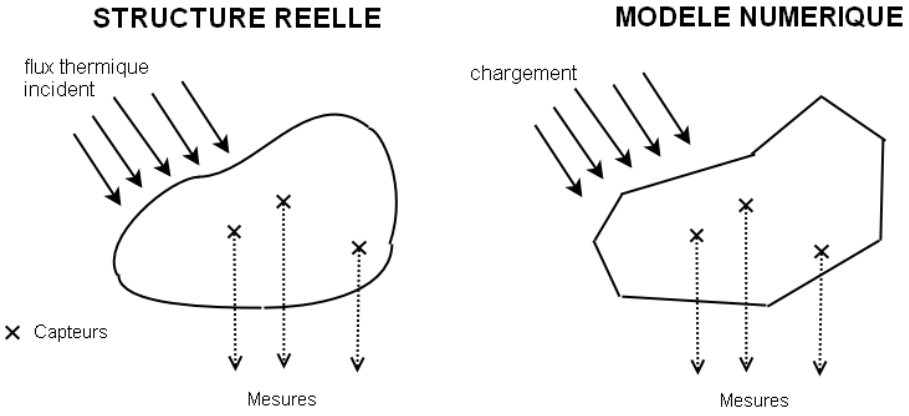


FIG. 1.1 – Le système réel et le modèle numérique dans l'approche de type moindres carrés

En général, on se contente d'une approximation, ce qui donne de la souplesse à ces méthodes. La manière avec laquelle l'écart est minimisé et les tolérances admises permettent d'intégrer les erreurs de modélisation, le bruit de mesure ainsi que toutes les autres sources d'erreur de manière 'optimale'. L'avantage majeur de ce type d'approche est la modularité : la démarche fait apparaître de manière distincte et quasiment indépendante les différentes phases correspondant au choix du modèle, à la formulation du problème de minimisation, au choix de l'algorithme de minimisation (du problème continu), aux différentes couches d'approximation et à l'intégration numérique via la discrétisation des équations continues. Ainsi, la mise en œuvre de telles méthodes peut faire appel à des boîtes à outils développées indépendamment, ce qui donne un avantage pratique considérable.

L'écart entre les mesures et les données reconstruites est d'habitude mesuré par un critère quadratique (Alifanov & Rumyantsev, 1988; Alifanov, 1994; Alifanov *et al.* , 1995). Ceci permet de faire appel au vaste arsenal de méthodes de dérivation et de minimisation de la théorie de l'optimisation. Pour le problème de la reconstruction du champ de température avec mesures ponctuelles, le critère permettant de déterminer le chargement thermique inconnu Φ s'écrira par exemple :

$$E(\Phi) = \frac{1}{2} \sum_{k=1}^{m} \int_0^T \Big(\theta(x_k, t) - \theta_k^d(t) \Big)^2 \, dt \tag{1.1}$$

où $\theta_k^d(t)$ sont les mesures physiques délivrées au cours du temps par les m capteurs situés en x_k, et $\theta(x_k, t)$ les valeurs aux points x_k données par le modèle numérique. Des méthodes génériques de

minimisation permettent de déterminer le minimum de cette fonction de coût.

Du fait du caractère mal posé du problème, la minimisation du critère (1.1) ne peut en aucun cas être envisagée sans un procédé de régularisation. Certains algorithmes présentent des propriétés régularisantes intrinsèques. Par exemple, l'algorithme du gradient conjugué reconstruit en priorité les composantes basse fréquence de la solution. La procédure itérative qui en résulte est stable (Nemirovskii, 1986; Carthel *et al.* , 1994) à condition qu'elle soit arrêtée lorsque l'écart quadratique entre les données et les valeurs reconstruites (mesuré par $E(\Phi)$ par exemple) est de l'ordre de grandeur de l'erreur ou bruit de mesure δ, estimé tel que

$$\delta \sim \sum_{k=1}^{m} \int_0^T \left(\theta_k^d(t) - \theta_k^*(t)\right)^2 dt$$

($\theta_k^*(t)$ sont les données non bruitées). Ce principe, appelé *principe de discrépance* (*discrepancy principle*) (Morozov, 1993; Alifanov, 1994) est le critère de référence pour la régularisation des méthodes de type optimisation (Alifanov & Egerov, 1985; Huang & Özisik, 1992; Alifanov *et al.* , 1995; Huang & Yan, 1995; Huang & Wang, 1999). δ représente la limite au-delà de laquelle une reconstruction n'a plus de sens (on ne peut pas recréer de l'information inexistante) ou devient inutile. Lorsque cette limite est dépassée, les processus de calcul deviennent rapidement instables. Des versions différentes du même critère peuvent être rencontrées selon l'algorithme de minimisation adopté (cf. King (1989) et Han *et al.* (1995) par exemple).

Une manière générique de régulariser le problème consiste à ajouter au critère de coût (1.1) un terme supplémentaire fonction des inconnues. Ce terme peut être vu comme une sorte de pénalisation qui empêche ces dernières de prendre des valeurs trop grandes. La méthode la plus employée est la régularisation de Tikhonov (Tikhonov & Arsenin, 1977). La fonction de coût est remplacée par la fonctionnelle régularisée

$$J(\Phi) = \frac{1}{2} \sum_{k=1}^{m} \int_0^T \left(\theta(x_k, t) - \theta_k^d(t)\right)^2 dt + \frac{\epsilon}{2} \|\Phi\|^2 \tag{1.2}$$

Le paramètre ϵ est une petite constante positive qui est choisie en fonction des caractéristiques spécifiques du problème à résoudre (Engl *et al.* , 1994). La régularisation de Tikhonov a été mise en œuvre pour la résolution d'un grand nombre de problèmes pratiques (El Bagdouri & Jarny, 1986; Jarny *et al.* , 1991; Alifanov, 1994; Alifanov *et al.* , 1995; Beck *et al.* , 1996; Özisik & Orlande, 2000; Liu, 2002; Tautenhahn & Jin, 2003; Kügler, 2003). La régularisation de Tikhonov d'ordre supérieur fait intervenir les dérivées d'ordre supérieur des inconnues. (Muniz *et al.* , 2000; Ramos *et al.* , 2001; Xie & Zou, 2005). Selon le même principe, d'autres définitions du terme de régularisation conduisent à des méthodes différentes. Des considérations de type stochastique portant sur l'entropie du système sont par exemple à la base de la méthode du *maximum d'entropie* (*maximum entropy*) (Chiwiacowski & de Campos Velho, 1991; Ramos *et al.* , 2001).

Une fois la fonctionnelle régularisée choisie, celle-ci est ensuite minimisée grâce à un algorithme itératif comme les algorithmes du gradient, du gradient conjugué ou autres algorithmes de Krylov (Ciarlet, 2000). Engl *et al.* (1994) proposent une version du gradient conjugué appliquée à l'équation normale dont la solution est l'inverse généralisé. On peut aussi citer les algorithmes *steepest descent* ou de Kozlov et Maz'ya (Mera *et al.* , 2001, 2003).

Le paramètre de régularisation ϵ doit être choisi avec beaucoup d'attention. Une trop grande valeur éloigne le résultat de la solution vraie, alors qu'une valeur trop faible fait apparaître le caractère mal posé du problème. Les méthodes de détermination de ϵ peuvent être classées en deux catégories. D'un côté, les méthodes *a priori* permettent la définition de ϵ sans connaissance préalable du résultat. A l'opposé, les méthodes *a posteriori* font intervenir le résultat du calcul inverse dans le choix de ϵ et leur implantation prend en général un caractère itératif (Engl *et al.* , 1994; Vogel, 2002).

1.3.2 Contrôle optimal et méthode adjointe (moindres carrés 'généralisés')

La théorie du contrôle optimal, introduite par Lions dans les années 60 (Lions, 1968), fournit un cadre mathématique général applicable aux systèmes distribués gérés par des équations différentielles. L'objectif d'un problème de contrôle optimal est de déterminer un certain nombre de fonctions intervenant dans le système de telle sorte que le système soit conduit d'un état connu vers un état souhaité en un laps de temps donné. Ceci est réalisé par minimisation d'une fonction de coût et un grand arsenal de méthodes permet de déterminer une solution dans le cas où celle-ci existe.

La méthode adjointe issue de cette théorie permet de déterminer le gradient d'une fonctionnelle quadratique comme solution d'un problème annexe : le problème adjoint. Les fastidieuses étapes de différentiation sont remplacées ici par la résolution unique d'un problème qui a fondamentalement la même structure que l'équation d'état du système. La notion de dualité y est sous-jacente : la solution du problème adjoint, appelée *état adjoint*, appartient en fait à un espace de fonctions qui est le dual de l'espace des inconnues (appelées dans ce contexte *variables de contrôle*).

La théorie du contrôle optimal a été la pierre fondatrice d'une branche importante des mathématiques appliquées, à la frontière d'une vaste gamme d'applications d'ingénierie. On y retrouve les notions de *contrôlabilité exacte* ou *approchée*. Pour un système d'évolution dont l'état $y(t)$ vérifie

$$\mathcal{A}y(t) = \mathcal{B}v(t) \tag{1.3}$$

le problème de *contrôlabilité exacte* consiste à chercher un contrôle v dans un espace donné tel que $y(T) = y_T$, où T est un horizon temporel fixe et y_T une cible à atteindre. A défaut de pouvoir résoudre ce problème, on résout le problème de *contrôlabilité approchée* dans lequel on cherche v tel que $\|y(T) - y_T\| \leq \epsilon$, avec ϵ petit et $\|\cdot\|$ la norme de l'espace des états auquel y_T appartient. La méthode HUM (*Hilbert Uniqueness Method*), introduite par Lions (1988), permet la résolution efficace de ce type de problèmes et a été reprise dans de nombreux travaux de recherche.

En ce qui concerne l'équation de la chaleur, les travaux de Carthel *et al.* (1994) traitent du problème de la contrôlabilité exacte frontière par une approche HUM. Lebeau & Robbiano (1994) démontrent que le problème de contrôle exact lorsque $y_T = 0$ admet une solution, à la fois pour un contrôle frontière et pour un contrôle distribué dans le domaine. Glowinski & Lions (1994, 1996) traitent les problèmes de contrôle exact et approché des équations de la chaleur, des ondes et de Navier-Stokes, avec des contrôles distribués (dans le domaine) ou ponctuels (par des sources placées en des points du domaine).

La méthode de l'état adjoint a été utilisée pour résoudre le problème inverse de la chaleur par Alifanov & Egerov (1985) (voir aussi (Alifanov, 1994)). Elle a été reprise plusieurs fois par la suite.

Jarny *et al.* (1991) présentent les différentes applications possibles allant de la détermination de sources ou de conditions aux limites à l'estimation de paramètres. L'attrait de la méthode est lié à la facilité de sa mise en œuvre : l'équation adjointe a en général une structure similaire à l'équation d'état. Le problème inverse se ramène donc à un certain nombre de résolutions de deux problèmes bien posés, implantables avec les mêmes outils. Outre son adaptabilité à des problèmes très différents, cette méthode s'applique sans difficulté intrinsèque à des géométries complexes (Chapko *et al.* , 1998; Huang & Wang, 1999; Chapko & Kügler, 2004; Huang & Lo, 2005; Huang *et al.* , 2005; Huang & Wu, 2006; Johansson, 2005, 2006), et peut être appliquée indifféremment à des systèmes linéaires ou non-linéaires. Dans Loulou & Artioukhine (2006) par exemple, la méthode est utilisée pour l'estimation d'un flux sur une structure tridimensionnelle sur la base de mesures ponctuelles ou surfaciques.

Appliquée à la détermination de sources dépendant du temps, la méthode adjointe met en évidence un inconvénient majeur de la formulation de type moindres carrés appliquée dans un cadre Hilbertien de fonctions à carré intégrable. Dans ce cadre, le gradient de la fonctionnelle quadratique vérifie une condition finale homogène en temps : sa valeur à l'instant final de la fenêtre de reconstruction est nulle. Les inconnues déterminées par minimisation héritent à leur tour de cette propriété. Par conséquent, le cadre de fonctions à carré intégrable, pourtant habituellement utilisé dans ce contexte, ne permet pas la reconstruction exacte du champ de température à l'instant final.

Cette difficulté est connue dans la littérature. Alifanov & Egerov (1985) proposent d'utiliser un algorithme du gradient conjugué modifié pour la contourner (voir aussi Silva Neto & Özisik (1992)). Il est fondé sur une hypothèse de régularité de la solution qui se traduit par une propriété intégrale. Dans Alifanov (1994), le même auteur propose de répéter l'algorithme de minimisation plusieurs fois en introduisant une procédure de lissage entre chaque répétition. Dans Huang & Yan (1995) et Huang & Wang (1999), l'adjoint est remplacé par un état adjoint artificiel dans lequel la valeur au pas de temps final est remplacée par la valeur au pas de temps précédent. Ce champ ne correspond plus au gradient de la fonctionnelle.

Nous proposons dans le présent travail une méthode générale et rigoureuse pour résoudre cette difficulté. L'idée reste similaire à celle qui sous-tend la méthode de Alifanov & Egerov (1985), mais le point de vue adopté est différent, conférant rigueur, universalité et adaptabilité (Bourquin & Nassiopoulos, 2006a; Nassiopoulos & Bourquin, 2006; Bourquin & Nassiopoulos, 2006b). Contrairement au cadre habituellement choisi, nous placerons le problème de minimisation dans le cadre de l'espace de Sobolev H^1, c'est-à-dire faisant intervenir des fonctions dont la dérivée est à carré intégrable. Nous verrons que cette démarche permet de reconstruire correctement les fonctions inconnues au temps final. Même si le lissage des données proposé par Alifanov & Egerov (1985) et Alifanov (1994) est proche de notre méthode, le cadre fonctionnel adopté ici permet d'intégrer les conditions de régularité dans la formulation même du problème continu et d'assurer la convergence ponctuelle en temps de l'algorithme de minimisation. Le choix de la méthode de discrétisation ou de l'algorithme de minimisation reste ainsi largement indépendant du choix du cadre fonctionnel.

La méthode adjointe a eu un grand succès dans le domaine de l'assimilation de données en météorologie et en océanographie, où l'objectif est la détermination de l'état initial de systèmes complexes faisant intervenir les équations d'écoulement de Navier-Stokes (Kalnay, 2003; Le Dimet & Talagrand, 1986). La connaissance de l'état initial permet d'initialiser les modèles de circulation qui

donnent une prévision à moyen terme de l'état du système. Vues la non-linéarité et la complexité des systèmes considérés, l'assimilation de données est une question cruciale dans ce domaine. Introduite avec les systèmes d'assimilation variationnels 3D-VAR puis 4D-VAR (Le Dimet & Talagrand, 1986; Talagrand & Courtier, 1987), elle est maintenant à la base des algorithmes utilisés par un très grand nombre de centres de prévision météorologique dans le monde (Rabier *et al.* , 2000; Mahfouf & Rabier, 2000; Klinker *et al.* , 2000). Elle est aussi à la base de plusieurs modèles de prévision océanique (Weaver *et al.* , 2003a,b; Nodet, 2006) ou de dispersion de particules (Bocquet, 2005a,b; Yelva & Bocquet, 2006). Trémolet (2006) propose une version du 4D-VAR qui permet de déterminer simultanément l'état initial et une estimation de l'erreur de modélisation. Puel (2007) a développé par ailleurs une méthode d'assimilation de données qui permet d'obtenir directement l'état final, c'est-à-dire la prévision, en utilisant les inégalités de Carleman.

En exploitant la dualité, il est possible de réécrire le problème variationnel dans un formalisme différent. Le problème initial est remplacé par un problème posé dans l'espace des observations, ce qui est équivalent à minimiser la fonctionnelle *duale*. Les deux problèmes sont liés par dualité de Fenchel-Rockafellar (Ekeland & Temam, 1974), et la solution de l'un détermine la solution de l'autre. Mais le problème dual offre un avantage considérable en termes de temps de calcul du fait que la dimension de l'espace des observations est en général plus faible que celle de l'espace des variables de contrôle. Le formalisme dual a été utilisé en assimilation de données météorologiques : il présente l'avantage supplémentaire de permettre la prise en compte intrinsèque des erreurs de modélisation (Courtier, 1997; Auroux, 2002). Nous l'utiliserons ici pour construire des algorithmes de reconstruction de la température rapides et efficaces.

Le choix d'une discrétisation de l'état adjoint reste cependant une question ouverte. On peut montrer en effet que l'état adjoint discrétisé par une méthode donnée ne correspond pas forcément à l'état adjoint de l'équation directe discrétisée (Chenais, 1994; Sirkes, 1997). Talagrand & Courtier (1987) insistent sur l'utilisation d'un état adjoint calculé directement à partir de l'équation directe discrétisée. C'est ce que font par ailleurs les codes d'adjointisation automatique (Giering & Kaminski, 1998) comme les codes TAPENADE (Hascoët & Pascual, 2004) ou YAO. D'un autre côté, Sirkes (1997) et Lü *et al.* (2004) modèrent ce jugement en montrant que les erreurs induites sont faibles. Ils soutiennent que l'utilisation d'un modèle adjoint au niveau continu permet d'avoir un meilleur choix de méthodes numériques pour concentrer les efforts sur la recherche de stabilité de calcul. En réalité, la question n'est réellement importante que dans les cas où la fonctionnelle est très plate (comme notamment dans les applications difficiles concernant les écoulements aérodynamiques). La descente peut alors être fortement biaisée par des erreurs, même petites, dans le calcul du gradient.

1.4 Approches de type observateurs

Un large éventail de méthodes potentiellement intéressantes découle d'une approche de type observateurs. Un observateur est un algorithme qui délivre à tout moment une estimation optimale du système étudié sur la base d'une information partielle sur son état (cf. schéma 1.2). Si x est un vecteur

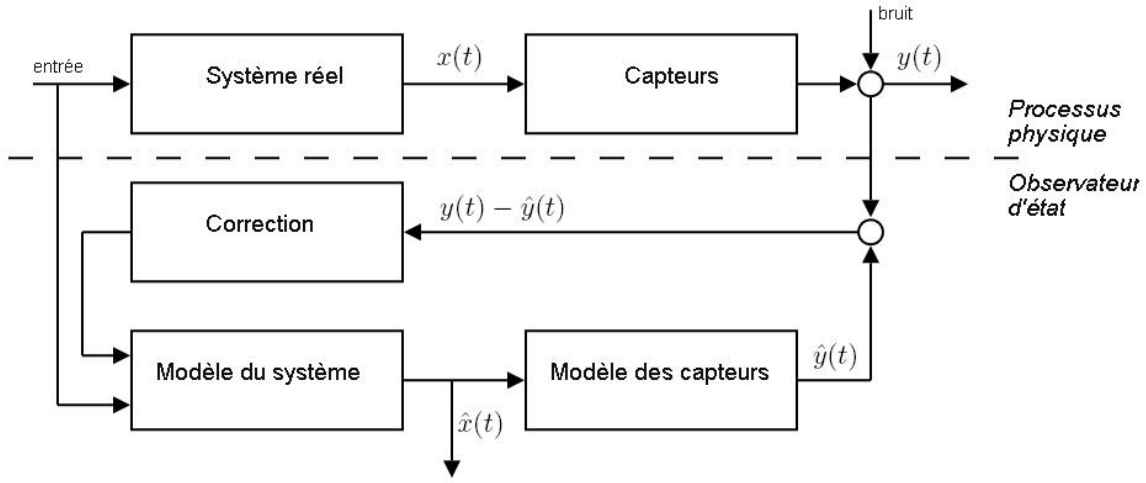


FIG. 1.2 – Schéma-bloc d'un observateur d'état

représentant l'état du système, on obtient un estimé $\hat{x}$ par une formule de rétroaction

$$\hat{x}^{n+1} = \hat{x}^n + K(y^n - \hat{y}).$$

L'exposant n représente le pas de temps, y et $\hat{y}$ sont respectivement les observations et leurs estimations, et K la matrice de gain (le bloc 'correcteur' du schéma 1.2). Concevoir un observateur consiste à déterminer de manière optimale le gain K (Stengel, 1986). Par exemple, Marquardt & Auracher (1990) proposent une stratégie de détermination du gain sur la base de considérations déterministes, et l'appliquent à l'estimation d'un flux sur un modèle unidimensionnel. Dans Blum & Marquardt (1997), une interprétation fréquentielle des algorithmes de reconstruction conduit à la conception d'un observateur minimisant le compromis entre le biais déterministe et la sensibilité.

Dans les domaines de la météorologie et de l'océanographie, les méthodes de type observateurs ont toujours concurrencé les méthodes variationnelles fondées sur des approches de type optimisation (Hunt *et al.* , 2004). Plusieurs codes de prévision océanique utilisent l'approche observateurs. La méthode la plus citée est le filtrage de Kalman : le gain K est déterminé de manière à minimiser la matrice de covariance des erreurs. On montre que K est alors solution d'une équation différentielle particulière, l'équation de Riccati (Kalman, 1960). Le filtrage de Kalman étendu (*Extended Kalman Filtering*) s'applique aux systèmes non-linéaires.

Il est possible d'établir une équivalence stricte entre le filtrage de Kalman et la minimisation d'une fonctionnelle quadratique pondérée par la matrice de covariance. On peut montrer par ailleurs que le système d'optimalité lié à la méthode adjointe conduit aussi à la résolution d'une matrice de Riccati si on exploite la dépendance linéaire entre l'état direct et l'état adjoint valable pour des systèmes linéaires, ou avec une hypothèse semblable pour des systèmes non linéaires (Yahia & del Barrio, 1999; Del Barrio, 2003). Des méthodes hybrides ont également été développées, combinant les avantages des deux approches (Robert *et al.* , 2006).

Pour des systèmes à grand nombre de degrés de liberté, la taille des équations de Riccati à résoudre rend cette approche inefficace en temps de calcul. Des versions plus rapides ont été proposées, fondées

sur la réduction des modèles d'état considérés. Le filtre SEEK (*Singular Evolutive Extended Kalman filter*) utilise une matrice de covariance des erreurs d'ordre réduit (Pham *et al.* , 1998b). Cette matrice évolue au cours du temps en fonction des données pour suivre les non-linéarités du système, d'où la dénomination de filtre *évolutif*. Le filtre proposé par Moireau *et al.* (2007) utilise une variante du filtre SEEK pour l'estimation de paramètres inconnus, couplée à une estimation simultanée de l'état du système. L'algorithme est très rapide grâce à une stratégie de rétroaction colocalisée (*collocated feedback control*). Le filtre SEIK (*Singular Evolutive Interpolated Kalman filter*) (Pham *et al.* , 1998a) remplace la linéarisation effectuée dans le filtre SEEK par une interpolation linéaire. Plusieurs améliorations ont été apportées (Hoteit *et al.* , 2000, 2002; Carme *et al.* , 2001) par la suite. Le filtre UKF (*Unscented Kalman Filter*) développé plus récemment ne fait intervenir aucune étape de linéarisation de la dynamique (Gove & Hollinger, 2006; Mariani & Ghisi, 2007), ce qui lui confère de meilleures performances sur des problèmes fortement non-linéaires. Il a récemment prouvé son efficacité pour la surveillance en temps réel de structures sous chargement intense (Wu & Smyth, 2007).

En ce qui concerne notre problème, la détermination de sources dépendant du temps semble à première vue incompatible avec l'approche de type Kalman. Le filtre de Kalman classique suppose en effet que les excitations principales du système étudié sont connues. Lorsque celles-ci ne le sont pas, elles entrent dans la modélisation comme termes de bruit. Nous verrons dans le chapitre 6 que cette stratégie permet de suivre l'évolution de l'état d'un système unidimensionnel, mais uniquement loin des sources d'excitation du système. Son efficacité dans le cas d'un système tridimensionnel reste à évaluer, mais on s'attend à des performances encore moins bonnes. Des approches spécifiques ont pourtant été développées pour déterminer des sources avec une approche Kalman (Tuan *et al.* , 1996; Ji *et al.* , 1997; Tuan *et al.* , 1997), mais il s'agit essentiellement de méthodes hybrides combinant une stratégie de type observateurs et la minimisation d'un critère de coût.

1.5 Synthèse : objectifs, démarche générale adoptée et résultats principaux

Dans l'optique du développement de techniques de contrôle de santé par surveillance vibratoire, il importe de fournir aux praticiens des méthodes fiables et rapides d'assimilation du champ de température en tout point d'une structure, à partir de mesures ponctuelles à l'intérieur de celle-ci. Ce travail a pour ambition de donner un début de réponse à la nécessité de maîtrise des effets des précontraintes thermomécaniques dans une structure, dans une démarche globale de surveillance de santé des ouvrages.

Considérons une structure occupant un domaine Ω. On note $\theta(x,t)$ le champ de température dans ce solide, où $x \in \Omega$ désigne la variable d'espace et $t \geq 0$ la variable de temps : le champ $\theta(x,t)$ est régi par l'équation de la chaleur

$$\left\{ \begin{array}{lll} \dfrac{\partial \theta}{\partial t} - div(\kappa\, grad\, \theta) = f & \text{dans} \quad \Omega & t \geq 0 \\ (\kappa\, grad\, \theta) \cdot \vec{n} + \alpha\theta = \Phi & \text{sur} \quad \partial\Omega & t \geq 0 \\ \theta(x,0) = \theta^0(x) & \text{dans} \quad \Omega & \end{array} \right. \tag{1.4}$$

où $f = f(x,t)$ désigne une source de chaleur interne distribuée, $\kappa = \kappa(x)$ le coefficient scalaire de conductivité et $\Phi(x,t) = \alpha\theta_{ext} - g(x,t)$ une source de chaleur en surface qui combine les échanges par convection et le flux de chaleur g. Ici, la masse volumique ρ et la chaleur massique c sont unitaires : nous expliquerons dans la partie 2.1 page 28 comment on obtient cette équation et ces conditions aux limites.

Nous supposons que m capteurs ponctuels sont répartis dans le domaine Ω aux points x_k, et qu'ils fournissent au cours du temps les mesures $\{\theta_k^d(t)\}_{k=1}^m$. A l'instant courant, noté t_a, on souhaite connaître *le champ de température en tout point du domaine* Ω, et pas seulement au niveau des capteurs. Pour y parvenir, on utilise la seule information disponible du système, c'est-à-dire les mesures enregistrées sur un intervalle de temps de longueur T précédant cet instant (pour $t \in [t_a - T, t_a]$).

Le champ de température vérifie le système (1.4) qu'il suffit de résoudre pour $x, t \in \Omega \times [t_a - T, t_a]$, avec la condition initiale $\theta(x, t_a - T) = \theta^0(x)$, les sources en surface Φ, et la source volumique f. Or, ces données sont inconnues : nous nous fixons alors comme objectif de les déterminer à l'aide des mesures $\{\theta_k^d(t)\}_{k=1}^m$ pour $t \in [t_a - T, t_a]$.

Pour faire face à la problématique de surveillance vibratoire des structures, il est nécessaire de développer des algorithmes rapides s'exécutant en *temps réel* ou quasi-réel, c'est-à-dire dont *le temps d'exécution est très court par rapport au temps caractéristique de modification de l'état thermomécanique.*

Nous avons par ailleurs cherché à développer des algorithmes ne faisant intervenir que des méthodes de disrétisation usuelles. Les problèmes sont traités de manière à pouvoir mener les calculs dans les espaces fonctionnels où celles-ci convergent habituellement. On propose ainsi des méthodes implantables avec des outils logiciels généralistes sans intervention dans les couches profondes des codes. Précisons aussi que les applications visées nécessitent de pouvoir traiter des géométries tridimensionnelles avec les mêmes contraintes fortes sur le temps de calcul.

1.5.1 Comparaison des différentes approches pour l'estimation de la température

Une approche de type interpolation, dans laquelle le champ est estimé de manière à satisfaire au mieux les données et, éventuellement, des hypothèses préalables sur celui-ci, est loin d'être suffisante pour répondre au problème donné. Les sources de chaleur sur la surface d'un ouvrage sont variables dans le temps et dans l'espace. Toute tentative d'estimation de ce champ qui n'est jamais à l'équilibre est vouée à l'échec si la dynamique du phénomène physique n'est pas prise en compte. Nous le vérifierons grâce à des simulations numériques sur un exemple concret dans la partie 6.4, chapitre 6, où nous montrons que l'interpolation de données ne permet pas de reconstruire le champ $\theta(x, t_a)$.

Une approche de type observateurs comme le filtrage de Kalman, fondée sur un modèle, peut paraître à première vue plus appropriée. Elle s'avère cependant tout aussi inadaptée au problème posé. En filtrage de Kalman, les variables d'entrée du système (ici, Φ et f) sont supposées connues, ou du moins mesurées (elles peuvent être bruitées). La reconstruction utilise les variables d'observation (ici, les mesures $\{\theta_k^d(t)\}_{k=1}^m$) et les mesures des variables d'entrée. Si les variables d'entrée ne sont pas connues ou ne peuvent être mesurées -ce qui est le cas ici- l'excitation du système est considérée comme du bruit gaussien. Cependant, dans le cas d'un champ de température, les effets transitoires sont relativement lents, et les gradients de température dus par exemple à une source surfacique rapidement variable dans le temps peuvent être importants comparés à la valeur moyenne du champ dans le domaine. Si l'on souhaite pouvoir reconstituer ces gradients de température, il est nécessaire de connaître ou d'estimer les conditions aux limites. Nous verrons dans la partie 6.3, chapitre 6, la comparaison de la reconstruction du champ de température par filtrage de Kalman et par les méthodes développées ici : le filtre de Kalman ne permet pas de reconstruire la température à l'instant courant $\theta(x, t_a)$.

Nous privilégions par conséquent ici une approche de type contrôle optimal, dans laquelle on vise à déterminer la condition initiale et les sources de chaleur (surfaciques ou volumiques) qui sont à l'origine du champ de température. Cette approche est fondée sur un modèle : on détermine les inconnues de telle sorte qu'elles minimisent un critère de coût mesurant l'écart entre les signaux issus des capteurs et les valeurs aux mêmes emplacements d'un champ de température prédit par modèle.

Le problème peut être formulé ainsi : on cherche l'ensemble $\{\theta^0, \Phi, f\}$ qui minimise l'écart au sens des moindres carrés entre les données $\{\theta_k^d(t)\}_{k=1}^m$ et les valeurs aux points x_k du champ reconstruit, solution de (1.4). Supposons pour l'instant que θ^0 et f sont nuls. Pour simplifier les notations, supposons aussi que l'instant courant est $t_a = T$ et que la fenêtre d'observation est $t \in [0, T]$. On cherche à minimiser la fonctionnelle quadratique

$$J(\Phi) = \frac{1}{2} \sum_{k=1}^{m} \int_0^T \Big(\theta(x_k, t) - \theta_k^d(t)\Big)^2 dt + \frac{\epsilon}{2} \|\Phi\|_{\mathcal{V}}^2 \tag{1.5}$$

Le deuxième terme représente le terme de régularisation de Tikhonov. $\mathcal{V}$ est l'*espace de contrôle* et $\|\cdot\|_{\mathcal{V}}$ sa norme. Le choix de $\mathcal{V}$ a une répercussion importante sur les résultats.

J étant différentiable, son minimum est donné par la condition $\nabla J = 0$, où le gradient ∇J est donné par

$$J(\Phi + \delta\Phi) - J(\Phi) = \big(\nabla J(\Phi), \delta\Phi\big)_{\mathcal{V}} + \mathcal{O}\|\delta\Phi\|_{\mathcal{V}}^2 \tag{1.6}$$

$\delta\Phi$ représente une faible variation de Φ, et $\delta\theta$ la solution correspondante de (1.4).

1.5.2 Assimilation de données ponctuelles par méthode adjointe

Plaçons-nous dans un espace unidimensionnel : cela permet de mettre plus facilement en évidence le problème de l'instant final lorsque l'espace de contrôle est l'espace L^2 en temps. Une barre conductrice de longueur L (le domaine Ω est alors réduit à $[0, L]$, et les bords sont les deux points $x_1 = 0$ et $x_2 = L$) est chauffée par un flux de chaleur Φ_1 en x_1 et par un flux Φ_2 en x_2. Si $\{\Phi_1, \Phi_2\} \in \mathcal{V} = \left(L^2(0,T)\right)^2$, alors (1.4) admet une solution $\theta \in L^2\big(0,T; H^1(0,L)\big)$ (Lions & Magenes, 1968).

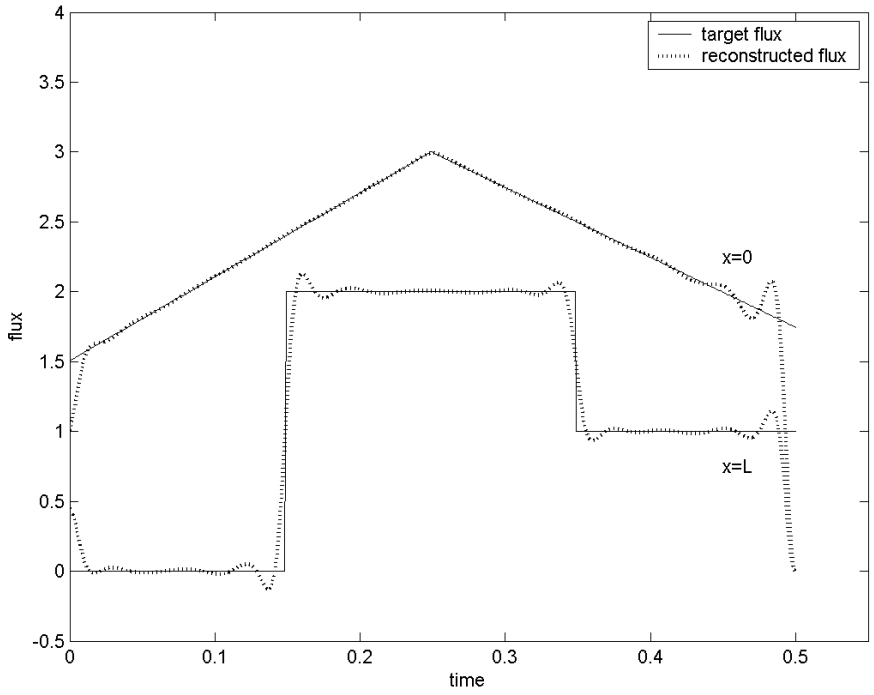
On introduit alors l'*état adjoint*, solution du *problème adjoint* :

$$\begin{cases} -\dfrac{\partial p}{\partial t} - div(\kappa\, grad\, p) = \displaystyle\sum_{k=1}^{m} \Big(\theta(x_k,t) - \theta_k^d(t)\Big)\,\delta_{x_k} & \text{dans} \quad \Omega \times [0,T] \\ (\kappa\, grad\, p)\cdot\vec{n} + \alpha p = 0 & \text{sur} \quad \partial\Omega \times [0,T] \\ p(x,T) = 0 & \text{dans} \quad \Omega \end{cases} \tag{1.7}$$

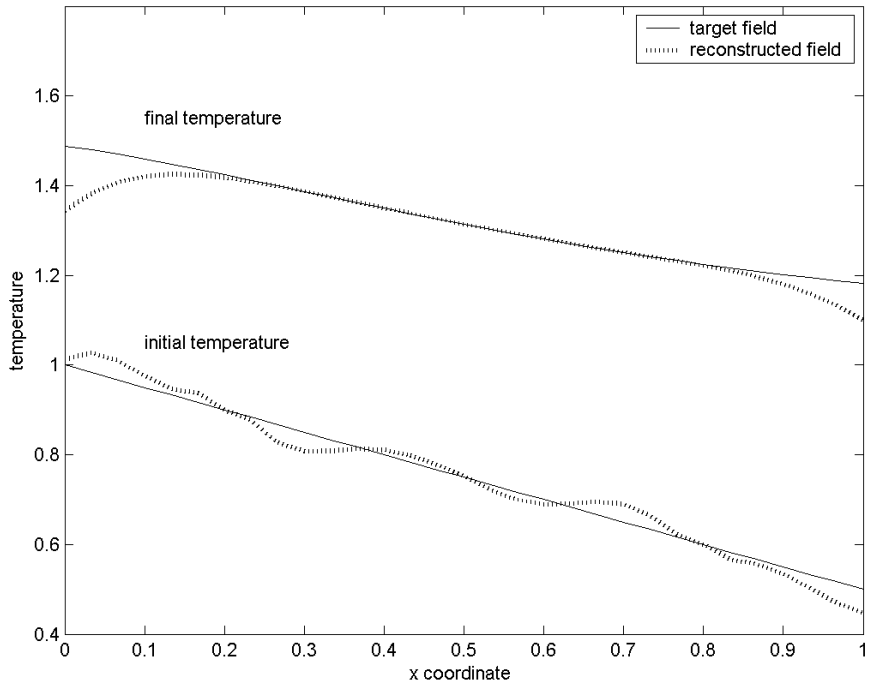
qui permet d'écrire le gradient de la fonctionnelle. Lorsque $\mathcal{V} = \left(L^2(0,T)\right)^2$, on montre que le gradient de J est donné par

$$\nabla J(\{\Phi_1, \Phi_2\}) = \{p(x_1,t) + \epsilon\Phi_1(t), p(x_2,t) + \epsilon\Phi_2(t)\} \tag{1.8}$$

Dans (1.7), p vérifie une condition finale nulle en temps, c'est-à-dire $p(x,T) = 0$. Par ailleurs, le minimum de J vérifie $\nabla J = 0$. Grâce à (1.8), on voit alors que $\Phi_i(T) = 0$. Les résultats de la reconstruction héritent donc de la valeur finale nulle (cf. figure 1.3(a)), ceci restant vrai quel que soit l'algorithme de minimisation utilisé.



(a) Flux cible et flux reconstruit



(b) Température finale cible et température finale reconstruite

FIG. 1.3 – Reconstruction dans L^2

Lorsqu'un algorithme itératif est employé par exemple pour la détermination de sources, la valeur finale du résultat de la minimisation reste égale à la valeur utilisée pour l'initialisation (Alifanov & Egerov, 1985; Alifanov, 1994). La modification artificielle de l'état adjoint proposée par Huang & Yan (1995) et Huang & Wang (1999) ne semble pas compatible avec le développement d'algorithmes implantables de manière universelle, et n'est pas généralisable pour des raisons dues à la convergence.

Cette propriété, intrinsèquement liée au choix de la fonctionnelle et à l'espace $\mathcal{V}$, empêche la reconstruction exacte de la température finale comme le montre la figure 1.3(b).

Pour contourner cette difficulté, nous proposons ici un changement de cadre fonctionnel consistant à choisir comme espace de contrôle $\mathcal{V} = \left(H^1(0,T)\right)^2$. Les fonctions Φ_i appartenant à cet espace présentent plus de régularité en temps.

Lorsque $\mathcal{V} = \left(H^1(0,T)\right)^2$, on montre que le gradient de J est donné par

$$\nabla J(\{\Phi_1, \Phi_2\}) = \Big\{P_1(t) + \epsilon\Phi_1(t), P_2(t) + \epsilon\Phi_2(t)\Big\} \tag{1.9}$$

où $\{P_1, P_2\}$ sont solutions de

$$\left\{\begin{array}{ll} -\bar{\beta}\dfrac{d^2P_i}{dt^2} + \tilde{\beta}P_i = p(x_i,t) \quad \text{sur} \quad [0,T] & \\ \dfrac{dP_i}{dt}(0) = \dfrac{dP_i}{dt}(T) = 0 & i = 1,2 \end{array}\right. \tag{1.10}$$

Le gradient de la fonctionnelle est cette fois-ci donné par les fonctions P_1 et P_2 qui vérifient des conditions aux limites en temps de Neumann homogènes. Cela *libère* la valeur du flux à l'instant final, et le résultat de la reconstruction est satisfaisant sur toute la fenêtre temporelle.

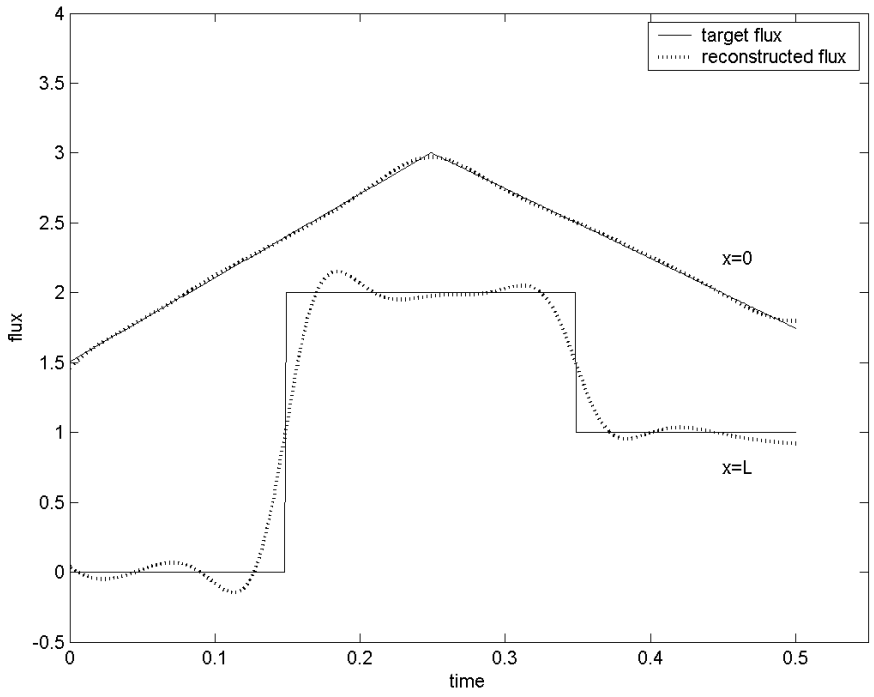
La figure 1.4(a) montre sur un exemple numérique que la valeur finale du flux est correctement estimée, ce qui permet une reconstruction exacte de la température finale (figure 1.4(b)). Alors que la méthode adjointe habituelle ne permet de connaître le champ de température à un instant donné uniquement lorsqu'on dispose de données de mesure à des instants postérieurs (autrement dit, à l'instant présent, elle permet de reconstruire l'état à un instant passé), la méthode que nous proposons ici permet la reconstruction du champ inconnu à l'instant présent.

Nous reviendrons plus en détail sur ce point dans le chapitre 3.

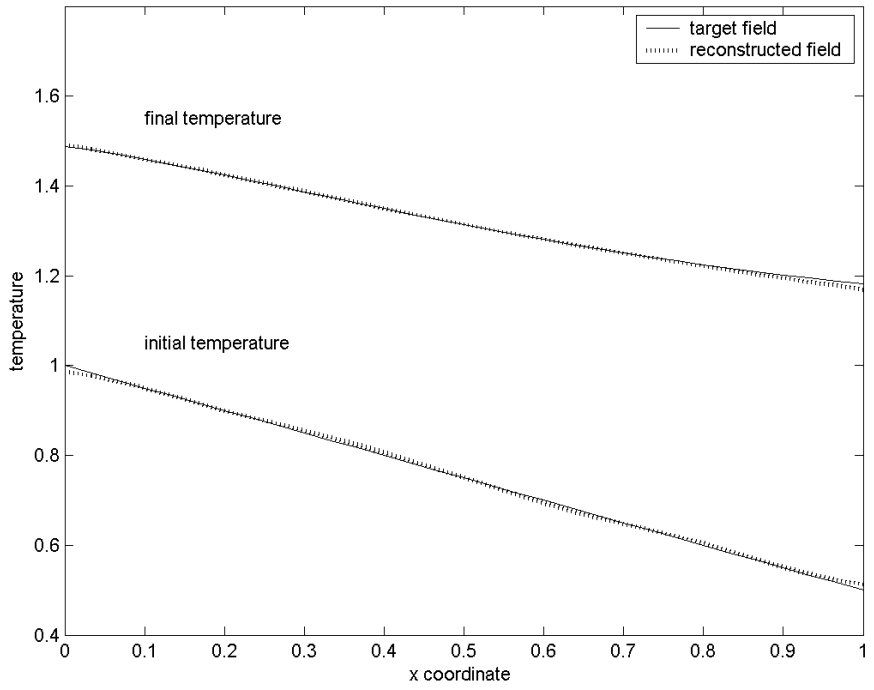
Le choix de l'espace $\mathcal{V}$ soulève une autre question cruciale. Il est nécessaire que les variables de contrôle soient de régularité suffisante pour que la solution θ de (1.4) soit définie en tout point. Si cette condition n'est pas respectée, les quantités $\theta(x_k,t)$ n'ont pas de sens et nous ne pouvons pas définir la fonctionnelle J. Or, les espaces fonctionnels dans lesquels les méthodes de discrétisation usuelles convergent n'offrent pas la régularité requise en dimension d'espace supérieure à 1.

Gardons pour simplifier l'hypothèse $\theta^0 = 0$ et $f = 0$. Dans un espace à trois dimensions (Φ est alors une fonction dans $\partial\Omega \times [0,T]$), et afin de pouvoir définir $\theta(x_k,t)$, on est amené à choisir comme espace de contrôle l'espace $\mathcal{V} = H^1(\partial\Omega \times [0,T])$. On note p la solution de l'équation adjointe (1.7) pour un domaine $\Omega \in \mathbb{R}^3$. Le second membre de cette équation fait intervenir des masses de Dirac, qui, dans le cas tridimensionnel, appartiennent à l'espace $H^{-2}(\Omega)$, mais pas à $H^{-1}(\Omega)$ qui est l'espace naturel.

Pour calculer le gradient, nous avons développé des méthodes spécifiques fondées sur la transposition qui permettent de déterminer l'image P de p dans $\mathcal{V}$ par l'isomorphisme de Riesz (il ne faut



(a) Flux cible et flux reconstruit



(b) Température finale cible et température finale reconstruite

FIG. 1.4 – Reconstruction dans H^1

pas confondre $P = P(x,t)$ et les fonctions P_i dans (1.9)). L'idée est de développer P sur une base de fonctions g_r de $\mathcal{V}$ et de résoudre

$$\begin{cases} \dfrac{\partial v_r}{\partial t} - div\,\kappa grad\, v_r = 0 & \text{dans} \quad \Omega \times [0,T] \\ (\kappa\, grad\, v_r)\cdot \vec{n} + \alpha v_r = g_r & \text{sur} \quad \partial\Omega \times [0,T] \\ v_r(0) = 0 & \text{dans} \quad \Omega \end{cases} \tag{1.11}$$

P vérifie alors

$$\big(P, g_r\big)_{\mathcal{V}} = \sum_{k=1}^{m} \int_0^T \Big(\theta(x_k,t) - \theta_k^d(t)\Big)\, v_r(x_k,t)\, dt \tag{1.12}$$

Cette expression permet de calculer P de façon convergente avec des méthodes de discrétisation habituelles. Elle permet d'implanter l'ensemble de la méthode dans des codes de calcul généralistes de façon simple et fiable. La méthode de transposition, appliquée à la reconstruction de f, Φ ou θ^0, sera présentée dans un cadre continu dans les parties 4.1.3, 4.2.3 et 4.3.3 respectivement.

Pour répondre aux objectifs de calcul en temps réel, nous introduisons une formulation duale du problème dans laquelle les inconnues à déterminer sont des fonctions de l'espace des observations $\mathcal{M}$. Si on note τ l'opérateur de $\mathcal{V}$ vers $\mathcal{M}$ tel que $\tau\Phi = \{\theta(x_k,t)\}_{k=1}^m$, alors son *adjoint* τ^* est l'opérateur de $\mathcal{M}'$ vers $\mathcal{V}'$ défini par

$$\langle \tau^* x, y\rangle_{\mathcal{V}',\mathcal{V}} = \langle x, \tau y\rangle_{\mathcal{M}',\mathcal{M}} \quad \forall x \in \mathcal{M}',\, \forall y \in \mathcal{V}.$$

Le problème dual consiste à chercher $\{X_k\}_{k=1}^m \in \mathcal{M}'$ tel que

$$\tau\tau^*\{X_k\}_{k=1}^m + \epsilon\{X_k\}_{k=1}^m = \{\theta_k^d(t)\}_{k=1}^m \tag{1.13}$$

Si on pose $\Phi = \tau\{X_k(t)\}_{k=1}^m$, alors Φ est le minimum de $J(\Phi)$ (on dit que Φ est solution du problème primal). Le problème dual consiste à minimiser la *fonctionnelle duale* : nous introduirons plus en détail toutes ces notions dans le cœur de l'exposé, d'abord de manière abstraite dans le chapitre 2 puis appliquées au problème inverse de la chaleur dans le chapitre 4.

Les flux sur le bord sont des fonctions de l'espace (sur la frontière) et du temps : ils sont donc définis sur un domaine tridimensionnel. En revanche, $\{X_k(t)\}_{k=1}^m$ est constitué d'autant de fonctions du temps que de capteurs : il s'agit donc essentiellement d'une grandeur définie sur un domaine unidimensionnel. C'est précisément l'avantage de la formulation duale : après discrétisation, la taille des sytèmes à résoudre est nettement inférieure pour le problème dual, ce qui conduit à une grande économie de temps de calcul.

Par ailleurs, la formulation duale offre la possibilité d'effectuer une grande partie de précalculs hors ligne en réduisant ainsi la quantité de calculs en ligne. Elle permet ainsi d'obtenir des outils de calcul en temps réel. Contrairement au problème primal, il est envisageable d'utiliser des algorithmes de résolution directe pour le problème dual.

1.5.3 Bilan des méthodes développées

Dans le cadre de ce travail, nous avons conçu des algorithmes rapides permettant de reconstruire des flux en surface, des sources internes ou des conditions initiales inconnus à partir de mesures

ponctuelles dans des structures tridimensionnelles. Ces outils conceptuels et opératoires permettent ainsi l'assimilation en temps réel d'un champ de température. Un algorithme direct fondé sur la formulation duale pour la reconstruction du flux permet par exemple de reconstruire un champ inconnu sur un solide tridimensionnel massif avec une erreur relative inférieure à 3% en utilisant moins de 10 capteurs. Avec un modèle d'environ 10 000 degrés de liberté discrétisé par éléments finis linéaires, la reconstruction d'un flux constitué de 20 composantes modales ne dure que 2-3 minutes environ.

Les algorithmes développés sont robustes par rapport au bruit de mesure, qui est intrinsèquement pris en compte dans la régularisation. Nous avons également testé leur robustesse par rapport aux erreurs de modélisation. Le champ reconstruit est plus sensible à certains paramètres physiques (comme la position des capteurs) qu'à d'autres (comme le coefficient de diffusivité), mais la reconstruction est dans son ensemble robuste par rapport aux erreurs de modélisation.

Les algorithmes développés s'implantent facilement avec des logiciels d'éléments finis usuels sans intervention profonde dans les codes. Une boîte à outils *Matlab*© a été créée et les simulations ont été effectuées à l'aide du code d'éléments finis *Openfem*©[1].

Enfin, pour vérifier la faisabilité des méthodes sur un cas réel, des essais ont été menés en laboratoire sur une maquette en béton. Ils ont permis de valider la démarche globale sous des conditions réelles d'utilisation, c'est-à-dire avec des incertitudes sur la modélisation et des mesures bruitées.

1.5.4 Organisation du manuscrit

Le manuscrit est structuré de la manière suivante :

- Dans le *chapitre 2*, nous présentons l'équation de la chaleur et les conditions aux limites choisies pour modéliser les échanges de chaleur dans les applications visées. La méthode du contrôle optimal est ensuite présentée dans un formalisme abstrait ; on en dégage les principales notions. Ce formalisme est enfin appliqué au problème de l'assimilation de données de température par reconstruction des conditions initiales et des sources.

- Dans le *chapitre 3*, la méthode est entièrement explicitée dans le cas de la reconstruction de la condition initiale et des conditions aux limites sur une structure unidimensionnelle. Ce cas simple permet de mettre en évidence le problème de l'état final et l'avantage qu'offre la reconstruction dans l'espace H^1 pour remédier à cette difficulté.

- Le *chapitre 4* traite de la reconstruction dans le cas tridimensionnel. Nous précisons le choix des espaces de contrôle permettant de définir les différentes fonctionnelles de coût. Nous présentons la méthode générale pour reconstruire une source volumique f, une source surfacique Φ et une condition initiale θ^0 inconnues. Dans ce chapitre, nous explicitons le formalisme dual et la méthode de transposition permettant de définir le champ adjoint dans le cas continu.

- A partir des méthodes mises en place dans le chapitre précédent, nous nous intéressons dans le *chapitre 5* à la discrétisation et à l'implantation pratique des différents algorithmes qui en découlent. Nous nous plaçons dans des espaces de dimension finie liés à des maillages de l'espace

[1] Openfem : http ://www-rocq.inria.fr/OpenFEM

et du temps, et nous donnons le détail de l'implantation d'algorithmes directs ou itératifs. Nous présentons enfin des résultats de simulations.

– Le *chapitre 6* discute les performances et les limites des outils algorithmiques développés. Tout d'abord, nous évaluons les performances des algorithmes en présence de bruit de mesure ou d'erreurs de modélisation. Ensuite, nous comparons les résultats à ceux fournis par filtrage de Kalman et par interpolation afin de montrer numériquement le bien-fondé du choix de l'approche contrôle optimal.

– Le *dernier chapitre* concerne enfin la validation expérimentale des méthodes menée en laboratoire : l'algorithme de reconstruction est mis à l'épreuve face à une situation physique concrète, sur une structure réelle.

– Les annexes contiennent une série de publications qui ont découlé de ce travail. Dans Bourquin & Nassiopoulos (2006a), nous présentons la *méthode adjointe libérée* qui consiste à formuler le problème dans l'espace H^1 en temps. Dans Bourquin & Nassiopoulos (2006b) nous proposons une vue d'ensemble du problème de la reconstruction de la température pour l'élimination des effets de précontrainte d'origine thermique dans les méthodes de détection d'endommagement. Ces deux travaux traitent du problème en une dimension de l'espace. Dans Nassiopoulos & Bourquin (2006) nous posons les bases de la méthode duale pour le problème tridimensionnel. Nous nous intéressons enfin dans Bourquin & Nassiopoulos (2007) à l'utilisation des modes de branche en contrôle optimal. Ces fonctions propres d'un opérateur frontière permettent de définir le flux d'une fonction $L^2(\Omega)$ sur $\partial\Omega$. Ils sont utilisés ici dans la méthode de transposition pour la reconstruction du flux.

En guise de conclusion, nous présentons des résultats de simulations numériques retraçant un scénario de surveillance en temps réel de l'état thermique d'un pont.

Chapitre 2

Modélisation de la conduction de la chaleur et assimilation de données par contrôle optimal

Nous présentons dans ce chapitre l'équation et les conditions aux limites associées modélisant la conduction de la chaleur, ainsi que les différents paramètres physiques qui entrent en jeu. Nous utilisons la méthode des éléments finis en espace et le Θ-schéma d'intégration en temps pour résoudre numériquement le problème.

Ce modèle sert de base à l'élaboration de la stratégie inverse pour l'assimilation de données de température. En partant du cadre abstrait de la méthode adjointe tirée de la théorie du contrôle optimal, nous formulons le problème de reconstruction d'une source surfacique, volumique ou d'une condition initiale grâce à des observations ponctuelles.

2.1 L'équation de la chaleur

2.1.1 Description physique

Soit un solide occupant un domaine Ω dans $\mathbb{R}^3$ et soit $\partial\Omega$ sa frontière. On note $x = (x_1, x_2, x_3) \in \Omega$ la variable d'espace et $t \in [0, T]$ la variable de temps. La distribution de température $\theta(x, t)$ dans le solide est régie par l'équation de la chaleur, qui est un cas particulier d'équation de diffusion :

$$\rho c \frac{\partial \theta}{\partial t} - div(\mathbf{K} grad\, \theta) = f \tag{2.1}$$

$f = f(x, t)$ désigne une source de chaleur interne distribuée, $\rho = \rho(x)$ est la masse volumique du matériau, $c = c(x)$ sa chaleur massique et $\mathbf{K} = \mathbf{K}(x)$ son tenseur de conductivité. Le tenseur $\mathbf{K}$ est symétrique, défini positif et se réduit souvent à un tenseur diagonal. Si la conduction est isotrope, c'est-à-dire si le phénomène de diffusion a lieu avec la même vitesse dans toutes les directions, $\mathbf{K}$ s'écrit $\mathbf{K} = \kappa(x)\mathbf{I}$, où $\kappa = \kappa(x)$ désigne le coefficient scalaire de conductivité et $\mathbf{I}$ la matrice identité.

A l'instant initial, le champ de température est donné par $\theta(x, 0) = \theta^0(x)$. Le solide est placé dans un environnement à une température extérieure $\theta_{ext}(x, t)$. Les interactions avec le milieu extérieur peuvent être décrites par quatre sortes de conditions aux limites :

– Température imposée (condition aux limites de type Dirichlet)

$$\theta = \theta_{ext} \quad \text{sur} \quad \partial\Omega \times [0, T] \tag{2.2}$$

– Flux imposé à la surface (condition aux limites de type Neumann)

$$-(\mathbf{K} grad\, \theta) \cdot \vec{n} = g \quad \text{sur} \quad \partial\Omega \times [0, T] \tag{2.3}$$

– Flux convectif à la surface

$$-(\mathbf{K} grad\, \theta) \cdot \vec{n} = \alpha_{conv}(\theta - \theta_{ext}) \quad \text{sur} \quad \partial\Omega \times [0, T] \tag{2.4}$$

– Echanges par rayonnement

$$-(\mathbf{K} grad\, \theta) \cdot \vec{n} = \epsilon_s \sigma(\theta^4 - \theta_{ext}^4) \quad \text{sur} \quad \partial\Omega \times [0, T] \tag{2.5}$$

Dans les expressions précédentes, $g = g(x, t)$ est un flux de chaleur, $\alpha_{conv} = \alpha_{conv}(x|_{\partial\Omega}) \geq 0$ désigne le coefficient d'échange convectif, $\vec{n}$ le vecteur unitaire sortant normal à Ω le long de $\partial\Omega$, ϵ_s est l'émissivité de la surface et σ la constante de Stefan-Boltzman ($\sigma = 5,670\,400.10^{-8}\, JK^{-4}m^{-2}s^{-1}$).

En réalité, les quatre sortes de conditions aux limites cohabitent : elles se superposent avec un poids différent selon les cas. Lorsque la différence entre θ et θ_{ext} n'est pas très prononcée, ce qui est le cas dans la majorité des applications concernant des structures de génie civil, l'expression (2.5) peut être linéarisée de la manière suivante :

$$\begin{aligned} \epsilon_s \sigma(\theta^4 - \theta_{ext}^4) &= \epsilon_s \sigma \Big[\theta^3 + \theta^2 \theta_{ext} + \theta \theta_{ext}^2 + \theta_{ext}^3\Big](\theta - \theta_{ext}) \\ &\sim \epsilon_s \sigma \theta_{moy}(\theta - \theta_{ext}) \end{aligned} \tag{2.6}$$

On voit apparaître alors un facteur, que l'on appellera coefficient d'échange par rayonnement, dépendant d'une température moyenne $\theta_{moy} = \left[\theta^3 + \theta^2\theta_{ext} + \theta\theta_{ext}^2 + \theta_{ext}^3\right]$:

$$\alpha_{ray} = \epsilon_s \sigma \theta_{moy}$$

La condition aux limites modélisant un échange par rayonnement peut ainsi être, en première approximation, mise sous la forme

$$-(\mathbf{K} grad\,\theta)\cdot\vec{n} = \alpha_{ray}(\theta - \theta_{ext}) \quad \text{sur} \quad \partial\Omega \times [0,T] \tag{2.7}$$

En fin de compte, les conditions aux limites peuvent être modélisées de manière représentative par l'expression

$$(\mathbf{K} grad\,\theta)\cdot\vec{n} + \alpha(\theta - \theta_{ext}) = -g(x,t) \quad \text{sur} \quad \partial\Omega \times [0,T] \tag{2.8}$$

où $\alpha = \alpha_{conv} + \alpha_{ray}$ est le coefficient d'échange global regroupant les phénomènes de convection et de rayonnement. Si on pose

$$\Phi(x,t) = \alpha\theta_{ext} - g(x,t),$$

on obtient

$$(\mathbf{K} grad\,\theta)\cdot\vec{n} + \alpha\theta = \Phi \quad \text{sur} \quad \partial\Omega \times [0,T] \tag{2.9}$$

Il s'agit d'une condition aux limites de type *Fourier-Robin* ou condition aux limites mixte. Ce type de condition aux limites est représentatif d'une très vaste gamme de problèmes thermiques et reste valable dans la majorité des applications visées ici. On remarque que les conditions aux limites de type Dirichlet (respectivement, de type Neumann) peuvent être vues comme des conditions aux limites de type Fourier-Robin avec un coefficient α qui tend vers l'infini (respectivement, qui tend vers zéro). Tout problème de Dirichlet ou de Neumann peut donc être résolu comme un problème avec conditions aux limites de Fourier-Robin en ajustant le paramètre α.

Pour rester dans un cadre assez général, on utilisera donc tout le long de ce travail des conditions aux limites de type mixte données par (2.9) pour la modélisation des échanges de chaleur. Du point de vue mathématique, Φ sera l'inconnue considérée.

Remarque :

Par abus de langage, on appellera *flux* tout au long de ce travail cette quantité

$$\Phi(x,t) = \alpha\theta_{ext} - g(x,t).$$

En toute rigueur, on appelle flux la quantité $\mathbf{K} grad\,\theta.\vec{n}$. Si $\Phi = 0$, le flux réel est alors égal à $\mathbf{K} grad\,\theta.\vec{n} = -\alpha\theta$.

2.1.2 Formulation variationnelle

Par souci de simplicité, le matériau sera désormais supposé isotrope. Tout ce qui est présenté par la suite reste cependant valable dans le cas non isotrope. Au vu de ce qui a été décrit plus haut, la diffusion de la chaleur est modélisée par l'équation parabolique :

$$\begin{cases} \rho c \dfrac{\partial\theta}{\partial t} - div(\kappa\, grad\,\theta) = f & \text{dans} \quad \Omega \times [0,T] \\ (\kappa\, grad\,\theta)\cdot\vec{n} + \alpha\theta = \Phi & \text{sur} \quad \partial\Omega \times [0,T] \\ \theta(x,0) = \theta^0(x) & \text{dans} \quad \Omega \end{cases} \tag{2.10}$$

Paramètre	**Symbole**	**Unités**
Variable spatiale	x	m
Variable temporelle	t	s
Conductivité thermique	κ	$W \cdot m^{-1} \cdot K^{-1}$
Coefficient d'échange	α	$W \cdot m^{-2} \cdot K^{-1}$
Chaleur massique	c	$J \cdot K^{-1} \cdot kg^{-1}$
Masse volumique	ρ	$kg \cdot m^{-3}$
Flux	$\Phi = \alpha\theta_{ext} - g$	$W \cdot m^{-2}$
Source interne volumique	f	$W \cdot m^{-3}$

TAB. 2.1 – Paramètres physiques du matériau

Paramètre	**Symbole**	**Unités**
Constante de temps	$\bar{t}$	s
Constante de température	$\bar{\theta}$	$^{\circ}K$
Constante de longueur	$\bar{L}$	m

TAB. 2.2 – Constantes pour l'adimensionnement des variables

Notons que l'ensemble $\{\theta^0, \Phi, f\}$ détermine de manière unique la solution $\theta(x,t)$ du problème (2.10). Cette équation peut être écrite sous forme variationnelle : étant donnés $f \in L^2(\Omega \times [0,T])$, $\Phi \in L^2(\partial\Omega \times [0,T])$ et $\theta(x,0) = \theta^0(x) \in H^1(\Omega)$, (2.10) possède une solution faible $\theta \in L^2(0,T;H^1(\Omega)) \cup C^0(0,T;L^2(\Omega))$ vérifiant (Lions & Magenes, 1968)

$$\left\{ \begin{array}{l} \displaystyle\int_\Omega \rho c \frac{\partial\theta}{\partial t} v\, dx + \int_\Omega (\kappa grad\,\theta)(grad\, v)\, dx + \int_{\partial\Omega} \alpha\theta v\, d\gamma = \\ \qquad\qquad \displaystyle\int_\Omega f v\, dx + \int_{\partial\Omega} \Phi v\, d\gamma \qquad \forall v \in H^1(\Omega) \\ \\ \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad \theta(x,0) = \theta^0(x) \end{array} \right. \tag{2.11}$$

2.1.3 Adimensionnement des variables

Les unités des différentes grandeurs intervenant dans (2.10) sont résumées dans le tableau 2.1. Du point de vue numérique, il est toujours plus intéressant de traiter des équations et des variables adimensionnelles. Pour obtenir une équation sans dimension, nous effectuons des changements de variables en posant

$$\tilde{t} = \frac{t}{\bar{t}}, \quad \tilde{x} = \frac{x}{\bar{L}} \quad \text{et} \quad \tilde{\theta} = \frac{\theta}{\bar{\theta}}.$$

Les constantes $\bar{t}$, $\bar{L}$ et $\bar{\theta}$ sont choisies pour que $\tilde{t}$, $\tilde{L}$ et $\tilde{\theta}$ soient de l'ordre de grandeur de l'unité. Leurs unités sont données dans le tableau 2.2.

Paramètre	**Expression**
Diffusivité	$\tilde{\kappa} = \frac{\kappa \bar{t}}{\rho c \bar{L}^2}$
Coefficient d'échange	$\alpha = \frac{\alpha \bar{t}}{\rho c \bar{L}}$
Flux	$\tilde{\Phi} = (g - \alpha\theta_{ext})\frac{\bar{t}}{\rho c \bar{L}\bar{\theta}}$
Source volumique interne	$\tilde{f} = \frac{f\bar{t}}{\rho c \bar{\theta}}$

TAB. 2.3 – Paramètres physiques adimensionnés du matériau

Avec ces changements de variable, l'équation de la chaleur s'écrit :

$$\begin{cases} \dfrac{\partial \tilde{\theta}}{\partial \tilde{t}} - div_{\tilde{x}}(\tilde{\kappa}\, grad_{\tilde{x}}\, \theta) = \tilde{f} & \text{dans} \quad \Omega \times [0,T] \\ (\tilde{\kappa}\, grad_{\tilde{x}}\, \tilde{\theta}) \cdot \vec{n} + \tilde{\alpha}\tilde{\theta} = \tilde{\Phi} & \text{sur} \quad \partial\Omega \times [0,T] \\ \tilde{\theta}(x,0) = \tilde{\theta}^0 & \text{dans} \quad \Omega \end{cases} \tag{2.12}$$

expression dans laquelle $grad_{\tilde{x}}$ et $div_{\tilde{x}}$ indiquent des dérivations par rapport à $\tilde{x}$ et non pas par rapport à x, contrairement à $grad$ et div dans (2.10). Les différentes grandeurs intervenant dans (2.12), notées avec un tilde $\tilde{()}$ sont données dans le tableau 2.3. Le coefficient $\frac{k}{\rho c}$ est communément appelé coefficient de diffusivité de la chaleur. On appellera donc ainsi le coefficient sans dimension $\tilde{\kappa} = \frac{\kappa \bar{t}}{\rho c \bar{L}^2}$.

Pour alléger les notations, le tilde $\tilde{()}$ sera désormais omis : il sera sous-entendu que les variables sont toujours sans dimension. Le modèle que nous considérerons donc tout au long de l'étude sera donné par l'équation adimensionnelle

$$\begin{cases} \dfrac{\partial \theta}{\partial t} - div(\kappa\, grad\, \theta) = f & \text{dans} \quad \Omega \times [0,T] \\ (\kappa\, grad\, \theta) \cdot \vec{n} + \alpha\theta = \Phi & \text{sur} \quad \partial\Omega \times [0,T] \\ \theta(x,0) = \theta^0(x) & \text{dans} \quad \Omega \end{cases} \tag{2.13}$$

dans laquelle, selon les cas, f, ϕ ou θ^0 pourront prendre des valeurs nulles.

Remarque :

On voit dans (2.13) que deux paramètres déterminent la nature du processus de diffusion : il s'agit de la diffusivité κ et du coefficient d'échange α.

2.1.4 Mise en œuvre d'un calcul par éléments finis

Reprenons la forme variationnelle de l'équation de la chaleur, donnée par (2.11). En gardant les paramètres adimensionnels, elle peut être réécrite de manière plus compacte

$$\begin{cases} \frac{d}{dt}\big(\theta(t), v\big) + a(\theta(t), v) = \big(f(t), v\big) + \big(\Phi(t), v\big)_\Gamma \quad \forall v \in V = H^1(\Omega) \\ \theta(0) = \theta^0 \end{cases} \tag{2.14}$$

si on note

$$a(u,v) = \int_\Omega (\kappa grad\, u)(grad\, v)\, dx + \int_{\partial\Omega} \alpha uv\, d\gamma \quad \forall u, v \in V$$

la forme bilinéaire apparaissant dans (2.11) et

$$\big(u,v\big) = \int_\Omega uv\,dx \qquad \big(u,v\big)_\Gamma = \int_{\partial\Omega} uv\,d\gamma, \qquad \forall u,v \in V$$

les produits scalaires dans $H^1(\Omega)$ et $H^1(\partial\Omega)$ respectivement.

L'égalité (2.14) doit être comprise au sens des distributions dans $[0,T]$. Notons que si X est un espace de Hilbert pour le produit scalaire $\big(\cdot,\cdot\big)_X$, alors $L^2\big(0,T;X\big)$ est un espace de Hilbert pour le produit scalaire

$$\big(u,v\big)_{L^2(0,T,X)} = \int_0^T \big(u,v\big)_X\,dt.$$

Si $u : t \to u(t)$ est une fonction de $L^2\big(0,T;X\big)$ et si v est un élément de X, alors la fonction $t \to \big(u(t),v\big)_X$ appartient à $L^2(0,T)$ (Raviart & Thomas, 1998).

Soit V_h un sous-espace de V de dimension finie et P_h l'opérateur de projection de V sur V_h. On considère le problème approché suivant : étant donné $\theta_h^0 \in V_h$, trouver une fonction $\theta_h : t \in [0,T] \to \theta_h(t) \in V_h$ solution du problème différentiel

$$\left\{\begin{array}{l} \frac{d}{dt}\big(\theta_h(t),v_h\big) + a(\theta_h(t),v_h) = \big(f(t),v\big) + \big(\Phi(t),v_h\big)_\Gamma \quad \forall v_h \in V_h \\ \theta_h(0) = P_h\theta^0 \end{array}\right. \tag{2.15}$$

Cette discrétisation en espace du problème est à la base de la méthode des éléments finis. Dans cette méthode, l'espace V_h est construit sur un maillage du domaine. Il est engendré par des fonctions d'interpolation dont les supports sont les éléments du maillage. Elles peuvent être linéaires, paraboliques, ou de degré supérieur. Si cette base est notée $\{\psi^i\}_{i=1}^I$ (I est la dimension de l'espace V_h), le problème se met sous la forme matricielle

$$\left\{\begin{array}{l} \mathbf{M}\frac{d\{\theta\}}{dt} + \mathbf{K}\{\theta\} = \{f\} \\ \mathbf{f} = \mathbf{f}^0 \end{array}\right. \tag{2.16}$$

où $\mathbf{M} = \{\big(\psi^i,\psi^j\big)\}_{1\le i,j\le I}$ est la matrice de masse et $\mathbf{K} = \{a(\psi^i,\psi^j)\}_{1\le i,j\le I}$ est la matrice de rigidité du système, $\{\theta\}$ étant le vecteur des composantes de θ_h sur la base $\{\psi^i\}_{i=1}^I$ et $\{f\}$ le second membre constitué des composantes $f_i = \big(f(t),\psi^i\big) + \big(\Phi(t),\psi^i\big)_\Gamma$, $1 \le i \le I$.

Pour aborder la résolution numérique du système (2.15) il faut aussi introduire une discrétisation de la variable temporelle. On choisi un découpage uniforme (pour simplifier) de l'intervalle $[0,T]$, avec un pas de temps

$$\delta t = \frac{T}{N}$$

pour un entier N. On pose alors

$$t_n = n\delta t, \quad 0 \le n \le N$$

Avec ce maillage temporel, on cherche à calculer une approximation θ^n de $\theta(t_n)$. Nous utiliserons pour cela le Θ-schéma, qui consiste à remplacer l'équation différentielle (2.15) par le schéma aux différences finies

$$\left\{\begin{array}{l} \frac{1}{\delta t}\big(\theta_h^{n+1} - \theta_h^n, v_h\big) + a(\Theta\theta_h^{n+1} + (1-\Theta)\theta_h^n, v_h) = \\ \big(\Theta f(t_{n+1}) + (1-\Theta)f(t_n), v_h\big) + \big(\Theta\Phi(t_{n+1}) + (1-\Theta)\Phi(t_n), v_h\big)_\Gamma \\ \qquad \forall v_h \in V_h, \quad 0 \le n \le N-1 \\ \\ \theta_h^0 = P_h\theta^0 \end{array}\right. \tag{2.17}$$

avec Θ un réel compris entre 0 et 1.

Les propriétés de stabilité du Θ-schéma sont résumées ci-dessous :

- pour $0 \leq \Theta < \frac{1}{2}$, le schéma est stable si

$$\lambda\delta \leq \frac{2}{1-2\Theta},$$

  λ étant la plus grande valeur propre de l'opérateur lié à la forme bilinéaire $a(\cdot,\cdot)$
- si $\Theta \geq \frac{1}{2}$, le schéma est inconditionnellement stable

Remarquons aussi qu'en fonction de la valeur de Θ nous retrouvons des schémas d'approximation connus sous les noms de :

- *Euler explicite* si $\Theta = 0$
- *Crank-Nicholson* si $\Theta = \frac{1}{2}$
- *Euler implicite* si $\Theta = 1$

Le schéma de Crank-Nicholson ($\Theta = \frac{1}{2}$) est d'ordre 2, c'est-à-dire que la méthode converge en $\mathcal{O}(\delta t^2)$. Pour $\Theta \neq \frac{1}{2}$, le Θ-schéma est d'ordre 1.

A chaque pas de temps, il faut résoudre le système linéaire

$$\Big(\mathbf{M} + \Theta\delta t\mathbf{K}\Big)\{\theta\}^{n+1} = \delta t\Big(\Theta\{f\}^{n+1} - (1-\Theta)\{f\}^{n}\Big) + \Big(\mathbf{M} + (1-\Theta)\delta t\mathbf{K}\Big)\{\theta\}^{n} \tag{2.18}$$

dans lequel le second membre est connu. Puisque Θ est positif ou nul, la matrice $\mathbf{M}+\Theta\delta t\mathbf{K}$ est définie positive. On peut donc utiliser la méthode de Cholesky pour résoudre ce système linéaire.

2.2 Problèmes inverses

Après avoir vu la méthode de mise en œuvre d'un calcul éléments finis pour déterminer le champ de température dans un solide, connaissant son état initial et les sources de chaleur auxquelles il est soumis, nous nous intéressons maintenant à la démarche inverse. Nous supposons qu'aucune information n'est a priori donnée sur les sources de chaleur. A l'instant t_a, nous disposons au contraire d'observations ponctuelles du champ de température (l'état du système) enregistrées sur une période de durée T précédant l'instant t_a, c'est-à-dire dans la fenêtre d'observations $[t_a - T, t_a]$. Pour reconstruire le champ complet, nous recherchons les sources de chaleur et l'état initial (à l'instant $t_a - T$) qui sont à l'origine de ce champ. Le calcul direct tel qu'il a été montré plus haut permet alors de retrouver le champ de température à tout instant. Nous sentons d'ores et déjà que la démarche impliquera une partie de calculs rétrogrades en temps (par lesquels on retrouve des conditions initiales et des sources de chaleur qui ont précédé l'état actuel) et une partie de calculs directs (qui permettent de trouver l'état actuel à partir de conditions antérieures).

Si x désigne l'ensemble des fonctions représentant des sources (surfaciques ou volumiques) et des conditions initiales, et si y désigne l'ensemble des observations (dans le cas de capteurs ponctuels par exemple, y est sera constitué d'autant de fonctions du temps que de capteurs), alors le problème qu'on cherche à résoudre est du type

$$\tau x = y,$$

où τ représente le processus de conduction de la chaleur et le dispositif de mesure. L'équation est sous-déterminée : la dimension de l'espace des inconnues est très supérieure à celle de l'espace des données. On résout alors le problème au sens des moindres carrés, rejoignant ainsi les notions d'inverse généralisé et d'équation normale.

2.2.1 Inverse généralisé et équation normale

$\mathcal{X}$ et $\mathcal{Y}$ étant des espaces de Hilbert, soit $\tau : \mathcal{X} \to \mathcal{Y}$ un opérateur linéaire de $\mathcal{X}$ vers $\mathcal{Y}$, et le problème défini par

$$\tau x = y$$

où $y \in \mathcal{Y}$ est donné et $x \in \mathcal{X}$ est l'inconnue.

Dans le cas d'un problème mathématiquement mal posé, l'inversion de τ pour la détermination de x n'est pas directement envisageable. On introduit alors la notion nouvelle d'*inverse généralisé* (ou *inverse de Moore-Penrose*). Dans ce cas, x n'est plus recherché comme solution au sens classique de $\tau x = y$, mais au sens des moindres carrés : on dit que x est solution au sens des moindres carrés de $\tau x = y$ si

$$\|\tau x - y\| = inf\{\|\tau z - y\| \,|z \in \mathcal{X}\} \tag{2.19}$$

De manière un peu plus précise, on appelle solution optimale au sens des moindres carrés de $\tau x = y$ la solution au sens des moindres carrés de norme minimale, i.e.

$$\|x\| = inf\{\|z\| \,|z \text{ est solution au sens des moindres carrés de } \tau x = y\} \tag{2.20}$$

Avec ces deux définitions, on peut définir l'inverse généralisé comme l'opérateur qui à $y \in \mathcal{Y}$ associe la solution optimale au sens des moindres carrés de $\tau x = y$. Il est souvent noté $\tau^\dagger$ dans la littérature, et la solution correspondante est notée $x^\dagger$:

$$x^\dagger = \tau^\dagger y \tag{2.21}$$

La solution optimale au sens des moindres carrés de $\tau x = y$ est par ailleurs caractérisée par l'*équation normale*

$$\tau^* \tau x = \tau^* y \tag{2.22}$$

où $\tau^* : \mathcal{Y}' \to \mathcal{X}'$ est l'opérateur adjoint de τ tel que

$$\langle \tau x, y \rangle_{\mathcal{Y},\mathcal{Y}'} = \langle x, \tau^* y \rangle_{\mathcal{X},\mathcal{X}'} \tag{2.23}$$

Dans l'expression précédente, $\mathcal{Y}'$ est l'espace dual de $\mathcal{Y}$ (l'espace des formes linéaires dans $\mathcal{Y}$), $\mathcal{X}'$ est l'espace dual de $\mathcal{X}$ et $\langle \cdot, \cdot \rangle_{\mathcal{X},\mathcal{X}'}$ représente le produit de dualité entre $\mathcal{X}$ et $\mathcal{X}'$. On peut démontrer (Engl *et al.* , 1994) que $x^\dagger$ est solution de l'équation normale (2.22) et qu'on peut donc écrire :

$$\tau^\dagger = \left(\tau^* \tau\right)^{-1} \tau^* \tag{2.24}$$

2.2.2 Décomposition en valeurs singulières

La notion de *valeurs singulières* généralise la notion de valeurs propres liée aux opérateurs auto-adjoints. L'adjoint d'un opérateur $\tau : \mathcal{X} \to \mathcal{Y}$ est l'opérateur $\tau^* : \mathcal{Y}' \to \mathcal{X}'$ qui vérifie la relation

$$\langle \tau x, y \rangle_{\mathcal{Y},\mathcal{Y}'} = \langle x, \tau^* y \rangle_{\mathcal{X},\mathcal{X}'} \tag{2.25}$$

Un opérateur auto-adjoint est l'adjoint de lui-même ($\tau = \tau^*$). Pour un opérateur linéaire auto-adjoint compact il existe un système de valeurs propres et vecteurs propres $(\lambda_n; v_n)$, $n = 1..\infty$ tel que

$$\tau v_n = \lambda_n v_n \quad \forall n.$$

Avec ce système propre l'opérateur peut être diagonalisé grâce à l'expression

$$\tau x = \sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n \langle x, v_n \rangle v_n.$$

Lorsque τ n'est pas auto-adjoint la définition d'un tel système propre n'a pas de sens. Pour un tel opérateur $\tau : \mathcal{X} \to \mathcal{Y}$, on appelle *valeurs singulières* de τ la famille de réels$\{\sigma_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ tels que $\{\sigma_n^2\}_{n\in\mathbb{N}}$ sont les valeurs propres de l'opérateur (auto-adjoint) $\tau^*\tau$. On peut montrer que dans ce cas, $\{\sigma_n^2\}_{n\in\mathbb{N}}$ sont aussi les valeurs propres de $\tau\tau^*$. Si $\{v_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ sont les vecteurs propres de $\tau^*\tau$, et si on définit $\{u_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ tels que

$$u_n = \frac{\tau v_n}{\|\tau v_n\|},$$

alors les triplets $(\sigma_n; v_n, u_n)$ définissent le *système singulier* de τ. Ils vérifient les relations suivantes :

$$\begin{aligned} \tau v_n &= \sigma_n u_n \\ \tau^* u_n &= \sigma_n v_n \\ \tau x &= \sum_{n=1}^{\infty} \sigma_n \langle x, v_n \rangle u_n, \; \forall x \in \mathcal{X} \\ \tau^* y &= \sum_{n=1}^{\infty} \sigma_n \langle y, u_n \rangle v_n, \; \forall y \in \mathcal{Y} \end{aligned} \tag{2.26}$$

Les deux dernières expressions sont les *expansions en valeurs singulières* de τ et τ^* respectivement.

Avec ces définitions, il est possible d'écrire l'inverse généralisé comme une série. En effet, la relation suivante est vérifiée pour tout $y \in \mathcal{D}(\tau^\dagger)$ (Engl *et al.* , 1994) :

$$\tau^\dagger y = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\langle y, u_n \rangle}{\sigma_n} v_n \tag{2.27}$$

L'expansion en valeurs singulières permet aussi de définir un critère d'existence de $x^\dagger$:

$$y \in \mathcal{D}(\tau^\dagger) \Longleftrightarrow \sum_{n=1}^{\infty} \frac{|\langle y, u_n \rangle|^2}{\sigma_n^2} < \infty \tag{2.28}$$

Le critère précédent, appelé de *Picard* (Engl *et al.* , 1994) montre que la solution au sens des moindres carrés de $\tau x = y$ existe si et seulement si les coefficients $\langle y, u_n \rangle$ décroissent suffisament vite par rapport aux valeurs singulières $\{\sigma_n\}_{n \in \mathbb{N}}$. Le calcul des valeurs singulières et l'étude de leur vitesse de décroissance peut donc fournir des renseignements sur le caractère mal posé d'un problème donné.

2.2.3 Régularisation de Tikhonov appliquée à la reconstruction de la température

Pour l'assimilation des données de température, nous visons la détermination des sources de chaleur et de la condition initiale inconnues responsables du champ dont nous disposons des mesures $\{\theta(x_k, t)\}_{k=1}^m$ aux points x_k. Si τ est l'opérateur qui modélise le phénomène de la conduction et la chaîne de mesure, on cherche à résoudre

$$\tau\{\theta^0, \Phi, f\} = \{\theta(x_k, t)\}_{k=1}^m$$

Pour obtenir une solution au sens des moindres carrés de ce problème, on définit la fonction de coût quadratique

$$\frac{1}{2} \sum_{k=1}^{m} \int_0^T \Big(\theta(x_k, t) - \theta_k^d(t)\Big)^2 dt$$

Nous employons la méthode de Tikhonov pour régulariser le problème. Elle consiste à ajouter à cette fonction de coût un terme quadratique dépendant des arguments. La fonctionnelle ainsi construite présente alors des propriétés de convexité. Dans le cas traité ici, elle s'écrit :

$$J(\{\theta^0, \Phi, f\}) = \frac{1}{2} \sum_{k=1}^{m} \int_0^T \Big(\theta(x_k, t) - \theta_k^d(t)\Big)^2 dt + \frac{\epsilon}{2} \|\{\theta^0, \Phi, f\}\|_{\mathcal{V}}^2 \tag{2.29}$$

Nous notons $\mathcal{V}$ l'espace de contrôle dans lequel est recherché l'ensemble des inconnues $\{\theta^0, \Phi, f\}$, $(\cdot,\cdot)_\mathcal{V}$ le produit scalaire dans $\mathcal{V}$ et $\|\cdot\|_\mathcal{V}$ la norme associée. Le choix de cet espace a une grande influence sur les résultats, et il sera précisé plus loin.

Nous notons également $\mathcal{M}$ l'espace fonctionnel des observations $\{\theta_k^d(t)\}_{k=1}^m$, $(\cdot,\cdot)_\mathcal{M}$ le produit scalaire dans $\mathcal{M}$ et $\|\cdot\|_\mathcal{M}$ la norme associée. (2.29) se réécrit

$$J(\{\theta^0, \Phi, f\}) = \frac{1}{2}\|\theta(x_k,t) - \theta_k^d(t)\|_\mathcal{M}^2 + \frac{\epsilon}{2}\|\{\theta^0, \Phi, f\}\|_\mathcal{V}^2 \tag{2.30}$$

Nous considérons donc le problème de trouver $\{\theta^0, \Phi, f\} \in \mathcal{V}$ tel que :

$$\left\{ \; J(\{\theta^0, \Phi, f\}) = \min_{\{\tilde\theta^0, \tilde\Phi, \tilde f\}\in\mathcal{V}} J(\{\tilde\theta^0, \tilde\Phi, \tilde f\}) \right. \tag{2.31}$$

Il conduit inévitablement à une solution approchée, mais qui tend vers la solution idéale lorsque $\epsilon \to 0$. Ce problème est par contre mathématiquement bien posé, ce qui rend sa résolution numérique stable.

Une autre manière de comprendre l'effet de la régularisation de Tikhonov est d'utiliser le point de vue de la décomposition en valeurs singulières. Nous avons vu que la solution de $\tau\{\theta^0, \Phi, f\} = \{\theta_k^d\}_{k=1}^m$, si elle existe, est donnée par

$$\{\theta^0, \Phi, f\} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\langle y, u_n\rangle}{\sigma_n} v_n$$

où $y = \{\theta_k^d\}_{k=1}^m$ et $\big(\sigma_n; u_n, v_n\big)$ est le système de valeurs singulières de τ. Or, dans le cas de la conduction de la chaleur, les coefficients $\langle y, u_n\rangle$ ne décroissent pas suffisament vite en général, si bien que le critère de Picard n'est pas vérifié.

La solution $\{\theta^0, \Phi, f\}$ du problème régularisé (2.31), s'écrit, dans la base des valeurs singulières de τ :

$$\{\theta^0, \Phi, f\} = \sum_{n=1}^{\infty} f_n \frac{\langle y, u_n\rangle}{\sigma_n} v_n, \quad f_n = \frac{\sigma_n^2}{\sigma_n^2 + \epsilon} \tag{2.32}$$

Cette nouvelle expression permet de comprendre l'effet de la régularisation : les composantes de haute fréquence (qui correspondent souvent au bruit) de y ne se propagent plus avec un facteur $\frac{1}{\sigma_n}$ comme dans (2.27) mais avec le facteur $\frac{\sigma_n}{\sigma_n^2+\epsilon}$. Elles restent alors bornées lorsque $n \to \infty$ (Engl *et al.* , 1994; Momose *et al.* , 2005).

> **Remarque :** Un autre point de vue pour introduire la méthode de régularisation est donné par Glowinski & Lions (1994, 1996) : il existe une infinité de contrôles $\{\theta^0, \Phi, f\}$ tels que $\theta(x_k,t) = \{\theta_k^d(t)\}_{k=1}^m$. Une manière d'en sélectionner un est de choisir le contrôle de norme minimale, défini par $\min_{\{\theta^0,\Phi,f\}\in\mathcal{V}} \frac{1}{2}\|\{\theta^0, \Phi, f\}\|_\mathcal{V}^2$. La condition précédente peut alors être vue alors comme une contrainte, et cela revient à résoudre le problème pénalisé
>
> $$\min_{\{\theta^0,\Phi,f\}\in\mathcal{V}} \frac{1}{2}\|\{\theta^0, \Phi, f\}\|_\mathcal{V}^2 + \frac{\beta}{2}\|\theta(x_k,t) - \theta_k^d(t)\|_\mathcal{M}^2$$
>
> avec β grand. Cette dernière expression donne une autre interprétation du coefficient de régularisation ϵ dans (3.2) comme l'inverse d'un coefficient de pénalisation.

2.3 La méthode adjointe en contrôle optimal

La méthode adjointe, issue de la théorie du contrôle optimal (Lions, 1968), permet d'aborder de manière générique les problèmes de type optimisation. Présentée ici sous forme abstraite pour garder le maximum de généralité, elle est utilisée tout au long de ce travail pour le développement d'algorithmes d'assimilation (Larrouturou & Lions, 1996).

2.3.1 Le cadre abstrait

Soit un espace de Hilbert V, qu'on désigne comme l'espace des états du système, et un opérateur A linéaire continu de V vers V'. Les variables de contrôle appartiennent à un espace de Hilbert noté $\mathcal{V}$. Soit aussi un opérateur B linéaire continu de $\mathcal{V}$ vers V'. Avec ces notations, on suppose que l'état du système $y \in V$ est donné par l'équation d'état

$$Ay = Bv \quad \text{dans } V' \tag{2.33}$$

Supposons maintenant que l'information accessible sur le système est Cy, où C est un opérateur linéaire continu de V dans un Hilbert réel $\mathcal{M}$. C modélise le processus d'observation, par exemple une série de capteurs. Les informations disponibles dans le cadre de l'assimilation de données sont issues de ce même processus. Nous noterons $h^d \in \mathcal{M}$ ces données.

Avec ces notations, on définit le critère

$$J(v) = \frac{1}{2}\|Cy(v) - h^d\|^2_{\mathcal{M}} + \frac{\epsilon}{2}\|v\|^2_{\mathcal{V}} \tag{2.34}$$

et le problème que l'on souhaite résoudre consiste à trouver $u \in \mathcal{V}$ tel que

$$J(u) = \min_{v \in \mathcal{V}} J(v) \tag{2.35}$$

Dans ce qui suit, nous allons déterminer les conditions d'optimalité pour ce problème, en passant par la définition d'un état adjoint qui va permettre de les écrire explicitement. Tout d'abord, en remarquant que $y(v) = A^{-1}Bv$ est linéaire et continu en v, nous pouvons réécrire $J(v)$ sous la forme suivante :

$$J(v) = \frac{1}{2}\pi(v,v) - L(v) + \frac{1}{2}\|h^d\|_{\mathcal{M}} \tag{2.36}$$

en posant

$$\pi(v,w) = \Big(Cy(v), Cy(w)\Big)_{\mathcal{M}} + \epsilon\Big(u,w\Big)_{\mathcal{V}}, \quad L(v) = \Big(h^d, Cy(v)\Big)_{\mathcal{M}} \tag{2.37}$$

Dans cette expression, π est une forme bilinéaire continue symétrique et coercive sur $\mathcal{V}$, et L une forme linéaire continue sur $\mathcal{V}$.

Dans ces conditions, un résultat classique de la théorie de l'optimisation indique que l'unique solution $u \in \mathcal{V}$ de (2.36) vérifie la condition d'optimalité

$$u \in \mathcal{V}, \quad \pi(u,v) = L(v) \quad \forall v \in \mathcal{V} \tag{2.38}$$

> **Remarque :** La coercivité de π vient du fait que $\pi(v,v) \geq \epsilon\|v\|^2_{\mathcal{V}}$, ϵ étant le paramètre de régularisation introduit par la méthode de Tikhonov. La régularisation rend donc la fonctionnelle coercive, ce qui garantit l'existence d'un minimum.

L'inconvénient des expressions (2.37) et (2.38) est qu'elles ne portent pas directement sur u mais sur $y(v)$. La méthode adjointe permet de réécrire ces conditions d'optimalité pour les rendre exploitables. Tout d'abord, introduisons l'isomorphisme Λ de $\mathcal{M}$ vers $\mathcal{M}'$ tel que, pour tout $g \in \mathcal{M}$, $\Lambda g \in \mathcal{M}'$ est défini par

$$\langle \Lambda g, h \rangle_{\mathcal{M}',\mathcal{M}} = (g,h)_{\mathcal{M}} \quad h \in \mathcal{M}.$$

De même, on introduit l'isomorphisme I de $\mathcal{V}$ sur $\mathcal{V}'$ tel que, pour tout $v \in \mathcal{V}$, $Iv \in \mathcal{V}'$ est défini par

$$\langle Iv, w \rangle_{\mathcal{V}',\mathcal{V}} = (v,w)_{\mathcal{V}} \quad w \in \mathcal{V}.$$

L'existence de Λ et I est assurée par le théorème de Riesz. Avec ces notations, on remarque que

$$\pi(v,w) = \langle C^*\Lambda C y(v), y(w) \rangle_{V',V} + \epsilon (v,w)_{\mathcal{V}} \quad \forall v, w \in \mathcal{V} \tag{2.39}$$

On définit alors *l'état adjoint* du système comme l'unique solution $p = p(v)$ de

$$A^* p = C^*\Lambda(Cy(v) - h^d) \quad \text{dans } V' \tag{2.40}$$

Calculons explicitement l'expression $\pi(u,v) - L(v)$ (on utilise le fait que $V'' = V$) :

$$\begin{aligned} \pi(u,v) - L(v) &= \epsilon \Big(u, v\Big)_{\mathcal{V}} + \langle C^*\Lambda(Cy(u) - h^d), y(v) \rangle_{V',V} \\ &= \epsilon \Big(u, v\Big)_{\mathcal{V}} + \langle A^* p(u), y(v) \rangle_{V',V} \\ &= \epsilon \Big(u, v\Big)_{\mathcal{V}} + \langle p(u), Ay(v) \rangle_{V,V'} \\ &= \epsilon \Big(u, v\Big)_{\mathcal{V}} + \langle p(u), Bv \rangle_{V,V'} \\ &= \epsilon \Big(u, v\Big)_{\mathcal{V}} + \langle B^* p(u), v \rangle_{\mathcal{V}',\mathcal{V}} \\ &= \Big(\epsilon u + I^{-1} B^* p(u), v\Big)_{\mathcal{V}} \end{aligned} \tag{2.41}$$

Remarque : A^*, C^* et B^* sont les opérateurs adjoints de A, B et C respectivement. L'adjoint d'un opérateur linéaire continu D de X vers Y est l'opérateur D^* linéaire continu de Y' vers X' tel que

$$\langle D^* y', x \rangle_{X',X} = \langle y', Dx \rangle_{Y',Y}, \forall x \in X, \forall y' \in Y' \tag{2.42}$$

Grâce à la dernière expression dans (2.41), on conclut qu'une fonction $u \in \mathcal{V}$ est un contrôle optimal pour le problème étudié si et seulement si le système suivant est vérifié

$$\begin{aligned} &Ay = Bv && \text{dans } V' \\ &A^* p = C^*\Lambda(Cy(v) - h^d) && \text{dans } V' \\ &\epsilon u + I^{-1} B^* p(u) = 0 \end{aligned} \tag{2.43}$$

Le gradient de J est donné par

$$\nabla J(u) = \epsilon u + I^{-1} B^* p(u) \tag{2.44}$$

Remarque :

Soit l'opérateur

$$\begin{aligned} \tau : \quad & \mathcal{V} \to \mathcal{M} \\ & \tau v = Cy(v) \end{aligned} \tag{2.45}$$

où $y(v)$ est solution de l'équation d'état $Ay(v) = Bv$. L'opérateur τ modélise le processus de conduction de la chaleur et la chaîne de mesures (l'observation). L'opérateur adjoint de τ est l'opérateur τ^* tel que

$$\begin{array}{rl} \tau^* : & \mathcal{M}' \to \mathcal{V}' \\ & \langle \tau^* x, y \rangle_{\mathcal{V}',\mathcal{V}} = \langle x, \tau y \rangle_{\mathcal{M}',\mathcal{M}} \end{array} \tag{2.46}$$

En utilisant ces notations, on montre que la minimisation de la fonctionnelle $J(v)$ revient à résoudre l'*équation normale* du problème régularisé, qui s'écrit :

$$\left(I^{-1}\tau^*\Lambda\tau + \epsilon\right) v = I^{-1}\tau^*\Lambda h^d \quad \text{dans } \mathcal{V} \tag{2.47}$$

En effet, après quelques manipulations, nous pouvons écrire

$$\begin{array}{rcl} J & = & \frac{1}{2}\|Cy(v) - h^d\|^2_{\mathcal{M}} + \frac{\epsilon}{2}\|v\|^2_{\mathcal{V}} \\ & = & \frac{1}{2}\Big(I^{-1}\tau^*\Lambda\tau v, v\Big)_{\mathcal{V}} - \Big(I^{-1}\tau^*\Lambda h^d, v\Big)_{\mathcal{V}} + \frac{1}{2}\Big\langle \Lambda h^d, h^d \Big\rangle_{\mathcal{M}',\mathcal{M}} + \frac{\epsilon}{2}\|v\|^2_{\mathcal{V}} \end{array} \tag{2.48}$$

et l'on voit apparaître, dans la dernière expression, la forme quadratique $q(u,v) = \big((I^{-1}\tau^*\Lambda\tau + \epsilon)u, v\big)_{\mathcal{V}}$, $\forall u, v \in \mathcal{V}$. Le minimum de J est donné par la condition (2.47).

2.3.2 Formulation duale

Dans le cadre établi plus haut, le problème initial

$$\tau v = h^d \tag{2.49}$$

a été repris sous une formulation de type moindres carrés avec régularisation de Tikhonov, et nous avons vu que cela revient à résoudre l'équation normale

$$\left(I^{-1}\tau^*\Lambda\tau + \epsilon\right) v = I^{-1}\tau^*\Lambda h^d \quad \text{dans } \mathcal{V} \tag{2.50}$$

Introduisons à présent le nouveau problème suivant : trouver $X \in \mathcal{M}'$ tel que

$$\Lambda\tau I^{-1}\tau^* X = \Lambda h^d \tag{2.51}$$

Si ce problème a une solution, et si on pose

$$v = I^{-1}\tau^* X \tag{2.52}$$

alors on voit que v est solution de (2.49). Cette idée est sous-jacente de ce que l'on appelle la formulation duale du problème, que nous présentons ci-dessous.

Le problème (2.51) est presque standard, car l'opérateur $\Lambda\tau I^{-1}\tau^*$ est symétrique. Mais il n'est pas coercif ce qui rend nécessaire une forme de régularisation. Au lieu de chercher à résoudre (2.51), nous cherchons $X \in \mathcal{M}'$ tel que

$$\Lambda\tau I^{-1}\tau^* X + \epsilon X = \Lambda h^d \qquad \text{dans } \mathcal{M}' \tag{2.53}$$

Comme nous allons le montrer, ce problème est le dual du problème régularisé (2.50).

Résoudre (2.53) revient à minimiser la fonctionnelle

$$\begin{aligned} I(X) &= \frac{1}{2}\langle \tau I^{-1}\tau^* X, X\rangle_{\mathcal{M},\mathcal{M}'} + \frac{\epsilon}{2}\langle \Lambda^{-1}X, X\rangle_{\mathcal{M},\mathcal{M}'} - \langle h^d, X\rangle_{\mathcal{M},\mathcal{M}'} \\ &= \frac{1}{2}\|\tau^* X\|^2_{\mathcal{V}'} + \frac{\epsilon}{2}\|X\|^2_{\mathcal{M}'} - \langle h^d, X\rangle_{\mathcal{M},\mathcal{M}'} \end{aligned} \tag{2.54}$$

Cette fonctionnelle I est associée par dualité de Fenchel-Rockafellar (Ekeland & Temam, 1974) à la fonctionnelle (2.34). En effet, soit

$$v \in \mathcal{V}, \quad F_1(v) = \frac{1}{2}\|v\|^2_{\mathcal{V}} \tag{2.55}$$

et

$$Y \in \mathcal{M}, \quad F_2(Y) = \frac{1}{2}\|Y - h^d\|^2_{\mathcal{M}} \tag{2.56}$$

de sorte que $J(v) = \big(F_1(v) + F_2(\tau v)\big)$ (avec $\epsilon = 1$ pour simplifier). Les transformées de Legendre-Fenchel de $F_1(v)$ et $F_2(Y)$ sont respectivement $F_1^*(w)$ et $F_2^*(X)$ telles que

$$\begin{aligned} w \in \mathcal{V}', \qquad F_1^*(w) &= \sup_{v\in\mathcal{V}} \Big[\langle v, w\rangle_{\mathcal{V},\mathcal{V}'} - F_1(v)\Big] \\ &= \frac{1}{2}\|w\|^2_{\mathcal{V}'} \end{aligned} \tag{2.57}$$

et

$$\begin{aligned} X \in \mathcal{M}', \qquad F_2^*(X) &= \sup_{Y\in\mathcal{M}} \Big[\langle Y, X\rangle_{\mathcal{M},\mathcal{M}'} - F_2(Y)\Big] \\ &= \frac{1}{2}\|X\|^2_{\mathcal{M}'} + \langle h^d, X\rangle_{\mathcal{M},\mathcal{M}'} \end{aligned} \tag{2.58}$$

L'application directe du théorème de Fenchel-Rockafellar donne alors :

$$\begin{aligned} \inf_{v\in\mathcal{V}} \Big[F_1(v) + F_2(\tau v)\Big] &= -\inf_{X\in\mathcal{M}'} \Big[F_1^*(\tau^* X) + F_2^*(-X)\Big] \\ &= -\inf_{X\in\mathcal{M}'} \frac{1}{2}\|\tau^* X\|^2_{\mathcal{V}'} + \frac{1}{2}\|X\|^2_{\mathcal{M}'} - \langle h^d, X\rangle_{\mathcal{M},\mathcal{M}'} \end{aligned} \tag{2.59}$$

En conclusion, minimiser $J(v)$ ou minimiser $I(X)$ sont deux problèmes équivalents.

Le minimum $X \in \mathcal{M}'$ de $I(X)$ et le minimum $v \in \mathcal{V}$ de $J(v)$ sont liés par la relation

$$v = I^{-1}\tau^* X \tag{2.60}$$

En formulation variationnelle le problème (2.53) s'écrit :

$$\begin{aligned} &\Big(\big(\Lambda\tau I^{-1}\tau^* + \epsilon\big)X, Y\Big)_{\mathcal{M}'} = \Big(\Lambda h^d, Y\Big)_{\mathcal{M}'} \quad \forall Y \in \mathcal{M}' \\ &\qquad\qquad \Leftrightarrow \\ &\Big(\tau^* X, \tau^* Y\Big)_{\mathcal{V}'} + \epsilon\Big(X, Y\Big)_{\mathcal{M}'} = \Big(\Lambda h^d, Y\Big)_{\mathcal{M}'} \quad \forall Y \in \mathcal{M}' \end{aligned} \tag{2.61}$$

ce qui donne

$$\Big(I^{-1}\tau^* X, I^{-1}\tau^* Y\Big)_{\mathcal{V}} + \epsilon\Big(X, Y\Big)_{\mathcal{M}'} = \Big(\Lambda h^d, Y\Big)_{\mathcal{M}'} \quad \forall Y \in \mathcal{M}' \tag{2.62}$$

La dernière expression est de la forme

$$a(X, Y) = L(Y) \quad \forall Y \in \mathcal{M},$$

avec $a(X,Y)$ une forme bilinéaire et $L(Y)$ une forme linéaire dans $\mathcal{M}'$. Cette dernière expression servira à construire des algorithmes de résolution du problème de reconstruction très performants en termes de coût de calcul.

La formulation duale présente un grand intérêt dû au fait que l'espace des observations $\mathcal{M}$ est en général de dimension beaucoup plus petite que l'espace de contrôle. Dans le cas d'observations ponctuelles par exemple, l'inconnue dans $\mathcal{M}$ est constituée d'autant de fonctions du temps que de capteurs, contrairement à une inconnue dans $\mathcal{V}$ qui est une variable du temps et de l'espace. Après discrétisation, le nombre réel d'inconnues à déterminer sera en général bien inférieur en formulation duale qu'en formulation primale, ce qui conduira à des algorithmes nettement plus rapides.

2.3.3 Application au problème d'assimilation de la température

Le cadre général présenté plus haut donne un éclairage sur la démarche qui va être suivie, avec plusieurs variantes, tout au long de ce travail.

On suppose que le processus de conduction de la chaleur est fidèlement modélisé par l'équation parabolique

$$\begin{cases} \dfrac{\partial \theta}{\partial t} - div(\kappa\, grad\, \theta) = f & \text{dans} \quad \Omega, \quad t \geq 0 \\ (\kappa\, grad\, \theta) \cdot \vec{n} + \alpha\theta = \Phi & \text{sur} \quad \partial\Omega, \quad t \geq 0 \\ \theta(x,0) = \theta^0(x) & \text{dans} \quad \Omega \end{cases} \tag{2.63}$$

(cf. partie 2.1). Nous supposons que m capteurs sont répartis dans le domaine Ω aux points x_k, et qu'ils fournissent au cours du temps les mesures $\{\theta_k^d(t)\}_{k=1}^m$. A l'instant t_a, on souhaite connaître le champ de température en tout point du domaine Ω.

Pour cela, on utilise les mesures fournies sur un intervalle de temps de longueur T précédent cet instant, c'est-à-dire pour $t \in [t_a - T, t_a]$. Le champ de température vérifie le système 2.63 qu'il faut donc résoudre pour $x, t \in \Omega \times [t_a - T_d, t_a]$. Or, les données du problème, c'est-à-dire la condition initiale θ^0, les conditions aux limites Φ, et la source volumique f sont inconnues. On dispose au contraire des mesures $\{\theta_k^d(t)\}_{k=1}^m$ pour $t \in [t_a - T, t_a]$. Nous nous fixons alors comme objectif de déterminer les données inconnues pour 2.63 à partir de ces mesures : il s'agit donc de résoudre le problème de la chaleur dans le sens rétrograde en temps.

Remarque :

Dorénavant, et tout au long de l'exposé, nous effectuons le changement de variable suivant :

$$\tilde{t} = t - (t_a - T).$$

Avec ce glissement d'origine, la fenêtre d'observation est $\tilde{t} \in [0, T]$. Nous notons t au lieu de $\tilde{t}$ la nouvelle variable de temps qui variera entre 0 (l'instant où l'enregistrement des mesures démarre) et T (l'instant actuel).

Ce problème inverse peut être formulé comme un problème de contrôle : on cherche l'ensemble $\{\theta^0, \Phi, f\}$ qui minimise l'écart entre les données $\{\theta_k^d(t)\}_{k=1}^m$ et les valeurs aux points x_k du champ reconstruit, solution de 2.63. Il reste à présent à définir comment on mesure cet écart, et dans quels espaces de fonctions les inconnues, ou variables de contrôle, sont recherchées.

Nous reprenons le cadre pratique des *moindres carrés généralisés* : l'objectif du problème de contrôle est de minimiser la fonctionnelle quadratique

$$J(\{\theta^0,\Phi,f\}) = \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{m}\int_0^T \Big(\theta(x_k,t)-\theta_k^d(t)\Big)^2\,dt + \frac{\epsilon}{2}\|\{\theta^0,\Phi,f\}\|_{\mathcal{V}}^2 \tag{2.64}$$

où le second terme est le terme de régularisation de Tikhonov. Selon les cas, la variable de contrôle sera alternativement l'ensemble $\{\theta^0,\Phi,f\}$, ou bien une de ces trois fonctions uniquement.

Cette fonctionnelle est la fonctionnelle primale. Nous appliquons ci-dessous la méthode adjointe pour en calculer le gradient. Le gradient de $J(\{\theta^0,\Phi,f\})$, noté $\nabla J(\{\theta^0,\Phi,f\})$, vérifie la relation

$$\begin{aligned} D(\{\delta\theta^0,\delta\Phi,\delta f\}) &= J(\{\theta^0,\Phi,f\}+\{\delta\theta^0,\delta\Phi,\delta f\}) - J(\{\theta^0,\Phi,f\}) \\ &= \big(\nabla J(\{\theta^0,\Phi,f\}),\{\delta\theta^0,\delta\Phi,\delta f\}\big)_{\mathcal{V}} + \mathcal{O}\|\{\delta\theta^0,\delta\Phi,\delta f\}\|_{\mathcal{V}}^2 \end{aligned} \tag{2.65}$$

Quelques lignes de calcul formel montrent que

$$\begin{aligned} D(\{\delta\theta^0,\delta\Phi,\delta f\}) &= \int_0^T \sum_{k=1}^{M}\Big(\theta(x_k,t)-\theta_k^d(t)\Big)\delta\theta(x_k,t)\,dt \\ &\quad +\epsilon\big(\{\theta^0,\Phi,f\},\{\delta\theta^0,\delta\Phi,\delta f\}\big)_{\mathcal{V}} + \mathcal{O}\|\{\delta\theta^0,\delta\Phi,\delta f\}\|_{\mathcal{V}}^2 \end{aligned} \tag{2.66}$$

Dans ces deux expressions, $\delta\theta$ vérifie l'équation de sensibilité

$$\left\{\begin{array}{ll} \dfrac{\partial\delta\theta}{\partial t} - div(\kappa\, grad\,\delta\theta) = \delta f & \text{dans} \quad \Omega\times[0,T] \\ (\kappa\, grad\,\delta\theta)\cdot\vec{n} + \alpha\delta\theta = \delta\Phi & \text{sur} \quad \partial\Omega\times[0,T] \\ \delta\theta(x,0) = \delta\theta^0(x) & \text{dans} \quad \Omega \end{array}\right. \tag{2.67}$$

dont une formulation faible s'écrit

$$\left\{\begin{array}{l} \displaystyle\int_\Omega \frac{\partial\delta\theta}{\partial t} v\,dx + \int_\Omega (\kappa grad\,\delta\theta)(grad\,v)\,dx + \int_{\partial\Omega}\alpha\delta\theta v\,d\gamma = \\ \qquad \displaystyle\int_\Omega \delta f\, v\,dx + \int_{\partial\Omega}\delta\Phi\, v\,d\gamma \qquad \forall v \\ \\ \delta\theta(x,0) = \delta\theta^0(x) \end{array}\right. \tag{2.68}$$

On introduit à ce niveau l'état adjoint solution de l'équation

$$\left\{\begin{array}{ll} -\dfrac{\partial p}{\partial t} - div(\kappa grad\, p) = \displaystyle\sum_{k=1}^{m}\Big(\theta(x_k,t)-\theta_k^d(t)\Big)\,\delta_{x_k} & \text{dans} \quad \Omega\times[0,T] \\ (\kappa grad\, p)\cdot\vec{n} + \alpha p = 0 & \text{sur} \quad \partial\Omega\times[0,T] \\ p(x,T) = 0 & \text{dans} \quad \Omega \end{array}\right. \tag{2.69}$$

dont une formulation faible s'écrit

$$\left\{\begin{array}{l} \displaystyle -\int_\Omega \frac{\partial p}{\partial t} w\,dx + \int_\Omega (\kappa grad\, p)(grad\, w)\,dx + \int_{\partial\Omega}\alpha p w\,d\gamma = \\ \qquad \displaystyle\sum_{k=1}^{m}\Big(\theta(x_k,t)-\theta_k^d(t)\Big)\, w(x_k) \qquad \forall w \\ \\ p(x,T) = 0 \end{array}\right. \tag{2.70}$$

En combinant (2.68) et (2.70), après intégration en temps et une intégration par parties, on montre que

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{m}\int_0^T \Big(\theta(x_k,t)-\theta_k^d(t)\Big)\delta\theta(x_k,t)\,dt &= \int_\Omega p(x,0)\delta\theta^0(x)\,dx+\int_{\partial\Omega\times[0,T]} p\delta\Phi\,d\gamma\,dt \\ &\quad+\int_{\Omega\times[0,T]} p\delta f\,dx\,dt\end{aligned} \tag{2.71}$$

En remplaçant cette dernière expression dans (2.71) et en identifiant avec (2.65) on conclut que

$$\nabla J(\{\theta^0,\Phi,f\}) = \big\{p(x,0)+\epsilon\theta^0, p|_{\partial\Omega}+\epsilon\Phi, p+\epsilon f\big\} \tag{2.72}$$

Le problème dual consiste à chercher une famille de fonctions $\{X_k(t)\}_{k=1}^m$ telles que

$$\theta(x_k,t;p)+\epsilon X_k(t)=\theta_k^d(t) \tag{2.73}$$

où p est solution de

$$\left\{\begin{array}{ll} -\dfrac{\partial p}{\partial t}-div(\kappa grad\, p)=\displaystyle\sum_{k=1}^m X_k(t)\,\delta_{x_k} & \text{dans}\quad \Omega\times[0,T] \\ (\kappa grad\, p)\cdot\vec{n}+\alpha p=0 & \text{sur}\quad \partial\Omega\times[0,T] \\ p(x,T)=0 & \text{dans}\quad \Omega \end{array}\right. \tag{2.74}$$

et $\theta(x,t;p)$ solution de

$$\left\{\begin{array}{ll} \dfrac{\partial\theta}{\partial t}-div(\kappa\, grad\,\theta)=p & \text{dans}\quad \Omega\times[0,T] \\ (\kappa\, grad\,\theta)\cdot\vec{n}+\alpha\theta=p|_{\partial\Omega} & \text{sur}\quad \partial\Omega\times[0,T] \\ \theta(x,0)=p(x,0) & \text{dans}\quad \Omega \end{array}\right. \tag{2.75}$$

Ces calculs suivent rigoureusement la démarche présentée de manière abstraite dans la partie 2.3. Soulignons cependant qu'il ne s'agit pour l'instant que de calculs formels, présentés uniquement pour donner un premier aperçu général de la démarche suivie. Pour compléter le tableau, il faudra préciser les hypothèses de régularité nécessaires sur les fonctions inconnues pour que chaque expression ait un sens.

Il faudra notamment se placer dans des espaces particuliers afin que les valeurs de θ en un point soient définies. Dans le cas tridimensionnel, cela conduira à choisir pour $\mathcal{V}$ des espaces de Sobolev de type H^1. Une autre difficulté (liée à la première) concerne le sens donné aux problèmes (2.69) ou (2.74). Le second membre de ces équations paraboliques est formé de masses de Dirac qui appartiennent à l'espace H^{-2}. Dans le cas tridimensionnel, ces problèmes ne pourront être résolus que par des techniques de transposition adéquates.

Chapitre 3

Reconstruction de la température dans un solide unidimensionnel

Nous présentons dans ce qui suit la résolution du problème d'assimilation de température dans le cas d'un solide unidimensionnel. La méthode adjointe est appliquée à la détermination d'une température initiale et de sources aux bord (flux) inconnues. On met en évidence la difficulté bien connue liée à l'instant final de la fenêtre de reconstruction, et nous proposons une méthode originale pour y remédier fondée sur l'utilisation d'un cadre fonctionnel inhabituel dans la littérature. Les algorithmes itératifs construits autour de la formulation primale permettent ainsi la reconstruction exacte du champ de température final.

3.1 Le problème inverse et la régularisation de Tikhonov

Considérons une barre occupant le domaine $\Omega = [0, L]$. Ce solide est à une température initiale θ^0 et est soumis à des flux de chaleur Φ_1 et Φ_2 à chaque extrémité $x = 0$ et $x = L$ respectivement. Le champ de température est régi par l'équation :

$$\begin{cases} \dfrac{\partial \theta}{\partial t} - \dfrac{\partial}{\partial x}(\kappa \dfrac{\partial \theta}{\partial x}) = 0 & \text{dans} \quad [0, L] \times [0, T] \\ -\kappa \dfrac{\partial \theta}{\partial x}(x_1, t) + \alpha \theta(x_1, t) = \Phi_1(t) & \text{sur} \quad [0, T] \\ \kappa \dfrac{\partial \theta}{\partial x}(x_2, t) + \alpha \theta(x_2, t) = \Phi_2(t) & \text{sur} \quad [0, T] \\ \theta(x, 0) = \theta_0(x) & \text{dans} \quad [0, L] \end{cases} \tag{3.1}$$

Comme nous l'avons vu dans le chapitre 2, $\Phi(x, t) = g(x, t) + \alpha \theta_{ext}$ où g est un flux de chaleur avec des conditions aux limites de Fourier-Robin et θ_{ext} est la température ambiante.

Les m capteurs placés dans le solide aux points x_k, $k = 1..m$ fournissent les mesures $\{\theta_k^d(t)\}_{k=1}^m, t \in [0, T]$. A partir de ces mesures, nous nous donnons comme objectif de reconstruire la température dans l'intervalle de temps $[0, T]$.

Pour y parvenir, nous introduisons la fonctionnelle régularisée de Tikonov :

$$J(\{\theta_0, \Phi_1, \Phi_2\}) = \frac{1}{2} \sum_{k=1}^{m} \int_0^T \Big(\theta(x_k, t) - \theta_k^d(t)\Big)^2 dt + \frac{\epsilon}{2} \|\{\theta_0, \Phi_1, \Phi_2\}\|_U^2 \tag{3.2}$$

où $\mathcal{V}$ est l'espace de contrôle et $\| \cdot \|_{\mathcal{V}}$ la norme associée. Le second terme dans (3.2) est le terme de régularisation de Tikhonov et ϵ le paramètre de régularisation. Avec ces notations, l'objectif est de trouver $\{\theta_0, \Phi_1, \Phi_2\}$ dans $\mathcal{V}$ tels que :

$$J(\{\theta_0, \Phi_1, \Phi_2\}) = \inf_{\{\tilde{\theta}^0, \tilde{\Phi}_1, \tilde{\Phi}_2\} \in \mathcal{V}} J(\{\tilde{\theta}^0, \tilde{\Phi}_1, \tilde{\Phi}_2\}) \tag{3.3}$$

Un algorithme de descente, tel que le gradient conjugué, sera utilisé pour résoudre ce problème. Nous détaillons dans ce qui suit la méthode de l'état adjoint qui permet le calcul du gradient de J. Comme nous le verrons, le calcul de l'état adjoint dépend fortement du choix de l'espace de contrôle $\mathcal{V}$. Dans la littérature, l'espace des fonctions à carré sommable, c'est-à-dire

$$\mathcal{V} = L^2(0, L) \times \big(L^2(0, T)\big)^2$$

est habituellement choisi. Malheureusement, ce choix conduit à la difficulté bien connue près de l'instant final $t = T$. Dans le nouveau cadre fonctionnel proposé ici, nous faisons le choix de l'espace de fonctions

$$\mathcal{V} = H^1(0, L) \times \big(H^1(0, T)\big)^2 .$$

Ce choix modifie très légèrement la procédure de calcul mais est beaucoup plus satisfaisante quant à la reconstruction du champ final.

3.2 La méthode adjointe dans le cas unidimensionnel

3.2.1 Reconstruction dans $L^2(0,L) \times (L^2(0,T))^2$

Dans ce premier cas, nous supposons que $\{\theta_0, \Phi_1, \Phi_2\} \in \mathcal{V} = L^2(0,L) \times \big(L^2(0,T)\big)^2$. Sous cette hypothèse, (3.1) admet une solution $\theta \in L^2\big(0,T;H^1(0,L)\big)$ (Lions & Magenes, 1968). On peut définir les observations $\{\theta(x_k,t)\}_{k=1}^m \in L^2(0,T)^m$ qui dépendent de manière continue des données. $\mathcal{V}$ est muni du produit scalaire

$$\big(u,v\big)_{\mathcal{V}} = \int_0^L u_0 v_0 \, dx + \sum_{i=1}^{2} \int_0^T u_i v_i \, dt \tag{3.4}$$

$\forall u = \{u_0,u_1,u_2\}, v = \{v_0,v_1,v_2\} \in \mathcal{V}$.

Par définition, le gradient ∇J de J vérifie

$$\begin{array}{rcl} D & = & J(\{\theta_0+\delta\theta_0, \Phi_1+\delta\Phi_1, \Phi_2+\delta\Phi_2\}) - J(\{\theta_0,\Phi_1,\Phi_2\}) \\ & = & (\nabla J, \{\delta\theta_0,\delta\Phi_1,\delta\Phi_2\}) + \mathcal{O}\|\{\delta\theta_0,\delta\Phi_1,\delta\Phi_2\}\|_{\mathcal{V}}^2 \end{array} \tag{3.5}$$

Un simple calcul montre que

$$\begin{array}{rcl} D & = & \displaystyle\sum_{k=1}^{m} \int_0^T \Big(\theta(x_k,t) - \theta_k^d(t)\Big)\, \delta\theta(x_k,t)\, dt + \epsilon \left[\int_\Omega \theta_0 \delta\theta_0 \, dx + \sum_{i=1}^{2} \int_0^T \Phi_i \delta\Phi_i \, dt \right] \\ & & + \mathcal{O}\Big\| \{\delta\theta_0,\delta\Phi_1,\delta\Phi_2\} \Big\|_{\mathcal{V}}^2 \end{array} \tag{3.6}$$

où $\delta\theta$ est solution de l'*équation de sensibilité* :

$$\left\{ \begin{array}{ll} \dfrac{\partial\,\delta\theta}{\partial t} - \dfrac{\partial}{\partial x}(\kappa \dfrac{\partial \delta\theta}{\partial x}) = 0 & \text{dans} \quad [0,L]\times[0,T] \\ -\kappa \dfrac{\partial\theta}{\partial x}(x_1,t) + \alpha\delta\theta = \delta\Phi_1 & \text{sur} \quad [0,T] \\ \kappa \dfrac{\partial\theta}{\partial x}(x_2,t) + \alpha\delta\theta = \delta\Phi_2 & \text{sur} \quad [0,T] \\ \delta\theta(x,0) = \delta\theta_0 & \text{dans} \quad [0,L] \end{array} \right. \tag{3.7}$$

On introduit alors $p(x,t)$, unique solution dans $L^2\big(0,T;H^1(0,L)\big)$ de l'*équation adjointe* :

$$\left\{ \begin{array}{ll} -\dfrac{\partial p}{\partial t} - \dfrac{\partial}{\partial x}(\kappa \dfrac{\partial p}{\partial x}) = \displaystyle\sum_{k=1}^{m} \Big(\theta(x_k,t) - \theta_k^d(t)\Big)\, \delta_{x_k} & \text{dans} \quad [0,L]\times[0,T] \\ -\kappa \dfrac{\partial p}{\partial x}(x_1,t) + \alpha p(x_1,t) = 0 & \text{sur} \quad [0,T] \\ \kappa \dfrac{\partial p}{\partial x}(x_2,t) + \alpha p(x_2,t) = 0 & \text{sur} \quad [0,T] \\ p(x,T) = 0 & \text{dans} \quad [0,L] \end{array} \right. \tag{3.8}$$

L'équation (3.8) est de structure identique à l'équation de la chaleur, mais le sens du temps est renversé : le terme dérivé en temps est de signe négatif et une condition finale en temps est imposée. Il s'agit d'une équation de la chaleur rétrograde. En effectuant un changement de variable $t' = T - t$, on obtient un problème qui peut être résolu avec les mêmes méthodes que l'équation de la chaleur directe. Notons toutefois que la condition finale $p(x,T) = 0$ a une influence importante sur les résultats, comme nous le verrons par la suite.

Selon la théorie du contrôle optimal, l'état adjoint p permet d'écrire explicitement le gradient de J :

$$\nabla J(\{\theta_0, \Phi_1, \Phi_2\}) = \{p(x,0) + \epsilon\theta_0, p(x_1,t) + \epsilon\Phi_1(t), p(x_2,t) + \epsilon\Phi_2(t)\} \tag{3.9}$$

Nous donnons ci-dessous les étapes principales permettant d'obtenir cette relation. L'équation (3.7) s'écrit sous forme variationnelle :

$$\begin{cases} -\displaystyle\int_0^L \frac{\partial \delta\theta}{\partial t} v dx + \int_0^L \kappa \frac{\partial \delta\theta}{\partial x}\frac{\partial v}{\partial x} dx + \sum_{i=1,2} \alpha \delta\theta(x_i,t) v(x_i) = \sum_{i=1,2} \Phi_i(t) v(x_i) \\ \quad \forall v \in H^1(0,L) \\ \delta\theta(x,0) = \delta\theta_0(x) \end{cases} \tag{3.10}$$

De même, une forme variationnelle de (3.8) est donnée par :

$$\begin{cases} -\displaystyle\int_0^L \frac{\partial p}{\partial t} w dx + \int_0^L \kappa \frac{\partial p}{\partial x}\frac{\partial w}{\partial x} dx + \sum_{i=1,2} \alpha p(x_i,t) w(x_i) = \sum_{k=1}^{m} \Big(\theta(x_k,t) - \theta_k^d(t)\Big) w(x_k) \\ \quad \forall w \in H^1(0,L) \\ p(x,T) = 0 \end{cases} \tag{3.11}$$

(3.10) et (4.55) sont intégrées en temps. En remplaçant v par p dans la première expression et w par $\delta\theta$ dans la deuxième, on montre, après intégration par parties en temps, que

$$\sum_{k=1}^{m} \int_0^T \Big(\theta(x_k,t) - \theta_k^d(t)\Big)\, \delta\theta(x_k,t) dt = \int_\Omega \rho c p(x,0) \delta\theta_0(x)\, dx + \sum_{i=1}^{2} \int_0^T p(x_i,t) \delta\Phi_i(t)\, dt \tag{3.12}$$

La dernière expression est une forme linéaire continue de $\{\delta\theta_0, \delta\Phi_1, \delta\Phi_2\}$. L'expression (3.9) découle naturellement de l'identification de (3.6) et (3.12) avec (3.5).

Remarque :

La régularité de θ et p est une propriété spécifique de la dimension 1 d'espace. En dimension supérieure, il faudra travailler dans des espaces moins naturels et adapter les méthodes numériques en conséquence.

3.2.2 Algorithmes de descente pour la minimisation de la fonctionnelle

Des algorithmes de descente comme l'algorithme du gradient conjugué bien connu peut être mis en œuvre pour la minimisation de J. A chaque itération, l'algorithme nécessite la résolution de l'équation de la chaleur directe et de l'équation de l'état adjoint. Après initialisation des variables avec une valeur arbitraire $\{\theta_0^{(0)}, \Phi_1^{(0)}, \Phi_2^{(0)}\}$, les étapes principales à chaque itération sont :

- Calcul de $\theta^{(n)}(x,t)$ solution de (3.1) avec $\{\theta_0, \Phi_1, \Phi_2\} = \{\theta_0^{(n)}, \Phi_1^{(n)}, \Phi_2^{(n)}\}$
- Calcul de $p(x,t)$ solution de (3.8) avec $\theta(x_k,t) = \theta^{(n)}(x_k,t)$
- Calcul du gradient $\nabla J^{(n)}(\{\theta_0^{(n)}, \Phi_1^{(n)}, \Phi_2^{(n)}\}) = \{p^{(n)}(x,0) + \epsilon\theta_0^{(n)}, p^{(n)}(x_1,t) + \epsilon\Phi_1^{(n)}(t),\ p^{(n)}(x_2,t) + \epsilon\Phi_2^{(n)}(t)\}$
- Calcul de la direction de descente.
- Mise à jour des variables : $\{\theta_0^{(n+1)}, \Phi_1^{(n+1)}, \Phi_2^{(n+1)}\} = \{\theta_0^{(n)}, \Phi_1^{(n)}, \Phi 2^{(n)}\} + \rho^{(n)} d^{(n)}$

Dans les expressions ci-dessus, $\rho^{(n)}$ est le pas de descente qui minimise la fonctionnelle dans la direction de descente. Dans l'algorithme du gradient conjugué, cette dernière est donnée par

$$d^{(n)} = -\nabla J^{(n)} + \frac{\|\nabla J^{(n)}\|^2_{\mathcal{V}}}{\|\nabla J^{(n-1)}\|^2_{\mathcal{V}}} d^{(n-1)}$$

Bien entendu, tout autre algorithme de type Krylov pourrait être utilisé. L'algorithme du gradient conjugué a des propriétés autorégularisantes (Nemirovskii, 1986) à condition d'utiliser comme critère d'arrêt le *principe de discrépance* (discrepancy principle) (Alifanov, 1994; Beck *et al.* , 1996). Les itérations sont stoppées dès que

$$\sum_{k=1}^{m} \int_0^T \left(\theta^{(n)}(x_k,t) - \theta_k^d(t)\right)^2 dt \leq c\delta, \quad c > 1,$$

où δ est l'estimation de l'erreur de mesure telle que $\|\theta_k^d - \theta_k^*\| \leq \delta$ (θ_k^* sont les mesures exactes sans bruit). Si cette stratégie d'arrêt est utilisée, le paramètre de Tikhonov ϵ peut être nul.

La procédure itérative permet de détecter l'inconvénient de la méthode telle qu'elle a été présentée jusqu'ici. Rappelons la condition finale sur l'état adjoint $p(x,T) = 0$. A cause de cette condition, les valeurs à $t = T$ de la deuxième et troisième composantes du gradient $\nabla J^{(n)}$ sont nulles également quelle que soit l'itération n :

$$\nabla_i J^{(n)}(T) = 0 \qquad i = 1, 2$$

(on note $\nabla J^{(n)} = \{\nabla_1 J^{(n)}(x), \nabla_2 J^{(n)}(t), \nabla_3 J^{(n)}(t)\}$). Au final, au bout de N itérations, les flux reconstruits vérifient :

$$\Phi_1^{(N)}(T) = \Phi_1^{(0)}(T)$$

et

$$\Phi_2^{(N)}(T) = \Phi_2^{(0)}(T).$$

La valeur finale des flux reconstruits sera égale à la valeur finale des flux d'initialisation. Si aucune information n'est a priori disponible sur les flux, les variables d'initialisation sont typiquement nulles.

En réalité, les solutions convergent dans L^2, ce qui ne suffit pas à garantir la convergence en tout point. Cette difficulté a été signalée dans plusieurs travaux de la littérature (Alifanov, 1994; Alifanov & Egerov, 1985; Silva Neto & Özisik, 1992; Huang & Özisik, 1992; Huang & Wang, 1999). Alifanov (1994) propose que la procédure de minimisation soit répétée un certain nombre de fois en initialisant chaque nouvelle procédure par des fonctions dont la valeur au pas de temps final a été remplacée par la valeur au pas de temps précédent. Malgré un coût de calcul plus important, le résultat à l'instant final converge vers le résultat exact. Dans Huang & Wang (1999), l'état adjoint est remplacé par un état adjoint artificiel dont la valeur au pas de temps final est remplacée par la valeur au pas de temps précédent. Les travaux de Alifanov & Egerov (1985); Silva Neto & Özisik (1992); Huang & Özisik (1992) proposent une méthode de gradient conjugué modifiée, dans laquelle les inconnues doivent vérifier une propriété de régularité supplémentaire.

Les travaux de la littérature se sont donc focalisés sur la méthode de minimisation pour résoudre le problème du temps final. Néanmoins, le problème n'est pas lié à la convergence de la méthode, mais plutôt à la propriété du gradient de J d'être nul à l'instant final. D'où l'idée de changer de cadre fonctionnel pour prendre en compte de manière plus intrinsèque une propriété de régularité en temps.

3.2.3 Reconstruction dans $H^1(0,L) \times (H^1(0,T))^2$

Supposons désormais que $\mathcal{V} = H^1(0,L) \times \left(H^1(0,T)\right)^2$, muni du produit scalaire

$$\begin{aligned}\left(u,v\right)_{\mathcal{V}} = &\int_0^L \bar{\alpha} u_0 v_0 \, dx + \int_0^L \tilde{\alpha} \frac{du_0}{dx}\frac{dv_0}{dx}\, dx \\ &+ \sum_{i=1}^{2} \left\{ \int_0^T \bar{\beta} u_i v_i \, dt + \int_0^T \tilde{\beta} \frac{du_i}{dt}\frac{dv_i}{dt}\, dt \right\}\end{aligned} \tag{3.13}$$

$\forall u = \{u_0, u_1, u_2\}, v = \{v_0, v_1, v_2\} \in \mathcal{V}$, où $\bar{\alpha}$, $\tilde{\alpha}$, $\bar{\beta}$ et $\tilde{\beta}$ sont des paramètres réels positifs.

Sous ces hypothèses, (3.1) admet une solution $\theta(x,t)$ et les mesures $\{\theta(x_k,t)\}_{k=1}^m$ sont bien définies. On cherche alors $\{\theta_0, \Phi_1, \Phi_2\} \in \mathcal{V}$ tel que

$$J(\{\theta_0, \Phi_1, \Phi_2\}) = \inf_{\{\tilde{\theta}_0, \tilde{\Phi}_1, \tilde{\Phi}_2\} \in \mathcal{V}} J(\{\tilde{\theta}^0, \tilde{\Phi}_1, \tilde{\Phi}_2\}) \tag{3.14}$$

où

$$\begin{aligned}J(\{\theta_0, \Phi_1, \Phi_2\}) \;=\; &\frac{1}{2}\sum_{k=1}^{m} \int_0^T \left(\theta(x_k,t) - \theta_k^d(t)\right)^2 dt + \frac{\epsilon}{2}\left\{ \int_0^L \bar{\alpha}\theta_0^2 dx + \int_0^L \tilde{\alpha}\left(\frac{d\theta_0}{dx}\right)^2 dx + \right. \\ &\left. \sum_{i=1}^{2}\left[\int_0^T \bar{\beta}\Phi_i(t)^2 d\gamma dt + \int_0^T \tilde{\beta}\left(\frac{d\Phi_i(t)}{dt}\right)^2 dt \right] \right\}\end{aligned} \tag{3.15}$$

et $\theta(x,t)$ est solution de(3.1).

A partir de la définition de l'état adjoint dans $L^2(0,L) \times \left(L^2(0,T)\right)^2$ (équation (3.8)), on montre de manière formelle que

$$\begin{aligned}D \;=\; &\int_\Omega \rho c p(x,0)\delta\theta_0(x)\, dx + \sum_{i=1}^{2}\int_0^T p(x_i,t)\delta\Phi_i(t)\, dt \\ &+\epsilon\left(\{\theta_0,\Phi_1,\Phi_2\},\{\delta\theta_0,\delta\Phi_1,\delta\Phi_2\}\right)_{\mathcal{V}} + \mathcal{O}\left\|\{\delta\theta_0,\delta\Phi_1,\delta\Phi_2\}\right\|_{\mathcal{V}}^2\end{aligned} \tag{3.16}$$

Contrairement au cas L^2, l'identification de cette dernière expression avec la définition du gradient (3.5) n'est pas possible. Dans ce cas, le gradient est donné par un ensemble de fonctions

$$P = \{P_0(x), P_1(t), P_2(t)\} \in H^1(0,L) \times \left(H^1(0,T)\right)^2$$

vérifiant :

$$\int_0^L p(x,0)w = \tilde{\alpha}\int_0^T P_0 w\, dt + \bar{\alpha}\int_0^L \frac{dP_0}{dt}\frac{dw}{dt}\, dt \qquad \forall w \in H^1(0,L) \tag{3.17}$$

et

$$\int_0^T p(x_i,.)w = \tilde{\beta}\int_0^T P_i w\, dt + \bar{\beta}\int_0^L \frac{dP_i}{dt}\frac{dw}{dt}\, dt \qquad \forall w \in H^1(0,T) \tag{3.18}$$

En remplaçant les deux dernières équations dans (3.16), on montre que

$$\nabla J(\{\theta_0,\Phi_1,\Phi_2\}) \;=\; \left\{P_0(x) + \epsilon\theta_0(x), P_1(t) + \epsilon\Phi_1(t), P_2(t) + \epsilon\Phi_2(t)\right\} \tag{3.19}$$

Les problèmes (3.17) et (3.18) sont les formes faibles de

$$\begin{cases} -\bar{\alpha}\dfrac{d^2P_0}{dx^2} + \tilde{\alpha}P_0 = p(x,0) \quad \text{dans} \quad [0,L] \\ \dfrac{dP_0}{dt}(0) = \dfrac{dP_0}{dx}(L) = 0 \end{cases} \tag{3.20}$$

et

$$\begin{cases} -\bar{\beta}\dfrac{d^2P_i}{dt^2} + \tilde{\beta}P_i = p(x_i,t) \quad \text{dans} \quad [0,T] \\ \dfrac{dP_i}{dt}(0) = \dfrac{dP_i}{dt}(T) = 0 \end{cases} \tag{3.21}$$

respectivement. Le calcul du nouvel état adjoint nécessite la résolution d'un problème elliptique en temps. On voit donc l'effet du changement de norme : le gradient est donné ici par des fonctions vérifiant des conditions aux limites de type Neumann, contrairement à la condition $p(T) = 0$ sur le gradient dans le cas L^2. Par conséquent, la valeur du résultat de la minimisation n'est pas fixée à l'instant final. Le changement de norme conduit à des solutions plus régulières et libère l'instant final du résultat de la reconstruction.

La minimisation de J équivaut à la résolution de l'équation normale (Engl *et al.* , 1994). De ce point de vue, le changement de norme est une manière de préconditionner l'équation normale (Luong *et al.* , 1998).

Les problèmes (3.20) et (3.21) sont de structure similaire et peuvent être facilement implantés dans un code éléments finis standard. L'implantation de l'algorithme global n'utilise que des outils simples et standards qui peuvent être trouvés dans des librairies existantes. Ceci est l'un des avantages de l'approche fondée sur le contrôle optimal.

Les coefficients $\tilde{\alpha}$, $\bar{\alpha}$, $\tilde{\beta}$ et $\bar{\beta}$ peuvent dépendre de x ou t respectivement. Cette liberté pourrait être utilisée pour développer des stratégies de reconstruction réutilisant de l'information a priori sur les inconnues. Par exemple, $\bar{\beta}$ pourrait être choisi petit pour des faibles valeurs de t et de valeur croissante lorsque $t \to T$. Ceci aurait comme effet la reconstruction précise de changements brusques sur une partie importante de la fenêtre d'observation tout en gardant une reconstruction exacte près de l'instant final.

3.2.4 Conditions de compatibilité

Avec ce nouveau cadre fonctionnel, le calcul des différents composantes du gradient se fait de manière séparée. Par conséquent, la condition de compatibilité entre les données peut être violée. Plus précisément, la relation

$$(-1)^i K\frac{d\theta_0(x_i)}{dx} + \alpha\theta_0(x_i) = \Phi_i(0) \tag{3.22}$$

pour $i = 1, 2$ n'est plus nécessairement vérifiée : les flux de la température initiale reconstruite peuvent être différents des valeurs initiales des flux reconstruits.

Une façon de remédier à cette difficulté est de considérer cette relation comme une contrainte et de résoudre un problème d'optimisation avec contraintes. Soit $\mathcal{V}_c$ l'espace des fonctions de $\mathcal{V}$ vérifiant (3.22). Le problème d'optimisation sous contraintes consiste à chercher $\{\theta_0, \Phi_1, \Phi_2\}$ tels que :

$$J(\{\theta_0, \Phi_1, \Phi_2\}) = \inf_{\{\tilde{\theta}_0, \tilde{\Phi}_1, \tilde{\Phi}_2\} \in \mathcal{V}_c} J(\{\tilde{\theta}^0, \tilde{\Phi}_1, \tilde{\Phi}_2\}) \tag{3.23}$$

Ce problème peut être résolu par pénalisation des contraintes. Cette technique consiste à introduire un nouveau terme $F(\{\theta_0, \Phi_1, \Phi_2\})$ dans la fonctionnelle de coût tel que

$$\begin{cases} F = 0 & \text{si} \quad \{\theta_0, \Phi_1, \Phi_2\} \in \mathcal{V}_c \\ F \geq 0 & \text{sinon} \end{cases} \tag{3.24}$$

Soit ϵ' une petite constante positive arbitraire. La nouvelle fonctionnelle s'écrit

$$J_{\epsilon'}(\{\theta_0, \Phi_1, \Phi_2\}) = J_{\epsilon'}(\{\theta_0, \Phi_1, \Phi_2\}) + \frac{1}{2\epsilon'} F(\{\theta_0, \Phi_1, \Phi_2\}) \tag{3.25}$$

Selon la théorie de l'optimisation, si $u_{\epsilon'}$ est solution du problème de minimisation sans contraintes

$$J_{\epsilon'}(u_{\epsilon'}) = \inf_{\tilde{u} \in U} J_{\epsilon'}(u),$$

alors, sous certaines hypothèses vérifiées ici,

$$\lim_{\epsilon' \to 0} u_{\epsilon'} = u.$$

Cette manière de procéder conduit donc à un problème de minimisation sans contraintes et permet d'utiliser les mêmes procédures numériques que dans le cas L^2. Un choix naturel pour F est le suivant :

$$F(\{\theta_0, \Phi_1, \Phi_2\}) = \quad \Big[- K \frac{d\theta_0(0)}{dx} + \alpha\theta_0(0) - \Phi_1(0) \Big]^2 \quad + \Big[K \frac{d\theta_0(L)}{dx} + \alpha\theta_0(L) - \Phi_2(0) \Big]^2 \tag{3.26}$$

Les dérivées premières des fonctions de $H^1(0, L)$ appartiennent à $L^2(0, L)$. On ne peut donc pas définir leur valeur à un point donné. Pour $\theta_0 \in H^1(0, L)$, la quantité $\frac{d\theta_0(x_i)}{dx}$ doit être définie de manière détournée. On utilise l'hypothèse $\Delta\theta_0 = 0$. En multipliant par une fonction test z et en intégrant par parties, on obtient

$$\int_0^L \frac{d\theta_0}{dx} \frac{dz}{dx} \, dx = \frac{d\theta_0(L)}{dx} z(L) - \frac{d\theta_0(0)}{dx} z(0).$$

En choisissant z tel que $z(0) = 0$ et $z(L) = 1$, cette dernière expression s'écrit

$$\int_0^L \frac{d\theta_0}{dx} \frac{dz}{dx} \, dx = \frac{d\theta_0(L)}{dx} z(L)$$

qui fournit une approximation bien définie de $\frac{d\theta_0(x_i)}{dx}$ pour $x_i = L$. Le choix d'une fonction z tel que $z(0) = 1$ et $z(L) = 0$ donne de manière similaire une approximation de $\frac{d\theta_0(x_i)}{dx}$ pour $x_i = 0$.

Cette méthode donne une approximation très grossière de $\frac{d\theta_0(x_i)}{dx}$. Nous pouvons affiner cette approximation en généralisant la démarche. Nous donnons dans (Bourquin & Nassiopoulos, 2007) (cf. annexe) une description de l'utilisation des modes de branche à cet effet.

On verra dans la partie 3.3 l'effet de la prise en compte de la compatibilité sur les résultats.

3.3 Résultats

3.3.1 Résultats avec données non bruitées

Les résultats donnés dans les figures ci-dessus montrent les performances de l'approche décrite. Ils ont été obtenus par des simulations effectuées sur une poutre de longueur L soumise à un flux à chaque extrémité (voir schéma ci-dessous). Les constantes de matériau sont toutes égales à 1. Un calcul direct avec des flux arbitraires donne les valeurs du champ de synthèse aux capteurs situés en $\frac{L}{5}$, $\frac{L}{2}$ et $\frac{4L}{5}$ respectivement. Ces valeurs sont utilisées pour la reconstruction inverse.

$$\underset{x=0}{\overset{\rightarrow}{\Phi_1}(t)} \qquad\qquad \underset{x=L}{\overset{\leftarrow}{\Phi_2}(t)}$$

L'équation du modèle (3.1) est discrétisée en espace avec des éléments finis P1. Le schéma de Cranck-Nicholson est utilisé pour l'intégration en temps.

Les variations brusques des sources sont les plus difficiles à détecter par la procédure inverse (Raynaud & Beck, 1988). Pour évaluer les performances de l'algorithme dans des conditions difficiles, les flux cible Φ_1 et Φ_2 choisis sont une fonction triangle et une fonction carré respectivement. Leur valeur finale est non nulle de manière à mettre en évidence les avantages de l'approche H^1. On fixe $\tilde{\alpha} = 0.1$, $\bar{\alpha} = 1$ et $\tilde{\beta}$. Seul $\bar{\beta}$ peut varier.

La figure 3.1 compare les mesures et les valeurs du champ reconstruit au niveau des capteurs avec l'algorithme L^2. Sur la figure 3.2, les flux reconstruits (traits pointillés) sont comparés aux flux cible (traits pleins). Les flux sont bien reconstruits sur la majeure partie de la fenêtre d'observation mais la précision du résultat se détériore : les flux reconstruits présentent des oscillations et valent 0 lorsque $t = T$. Par conséquent, le champ de température est correctement reconstruit loin de $t = T$ alors que, à l'instant final, le résultat est loin d'être satisfaisant (cf. figure 3.3). Au contraire, la reconstruction dans l'espace H^1 permet la reconstruction exacte du champ de température à l'instant final, comme le montrent les figures 3.4 et 3.5.

Les figures 3.6 à 3.8 montrent l'influence du choix du paramètre $\bar{\beta}$. Plus $\bar{\beta}$ est élevé, plus le flux reconstruit est régulier. Si la valeur de $\bar{\beta}$ est trop élevée, les variations brusques du flux ne sont pas détectées. A l'inverse, une valeur trop faible conduit à une perte de précision près de l'instant final.

La figure 3.9 montre la décroissance des différentes fonctionnelles selon le choix de la norme et la valeur de β. On remarque que les fonctionnelles dans H^1 tendent vers une valeur asymptotique d'autant plus vite que $\bar{\beta}$ est important. Cette valeur croît avec $\bar{\beta}$. Ce comportement n'est pas étonnant dans la mesure où l'appartenance à un espace de type H^1 correspond à une contrainte supplémentaire d'autant plus restrictive que la valeur de $\bar{\beta}$ est élevée.

Les résultats de la reconstruction lorsque ces contraintes ne sont pas activées sont donnés par la figure 3.10, qui doit être comparée aux figures 3.4 and 3.5. La reconstruction de la température initiale est moins satisfaisante près des extrémités $x_1 = 0$ et $x_2 = L$. Le choix entre la version pénalisée ou non de l'algorithme n'est néanmoins pas évident. Lorsque l'on s'intéresse principalement à la valeur

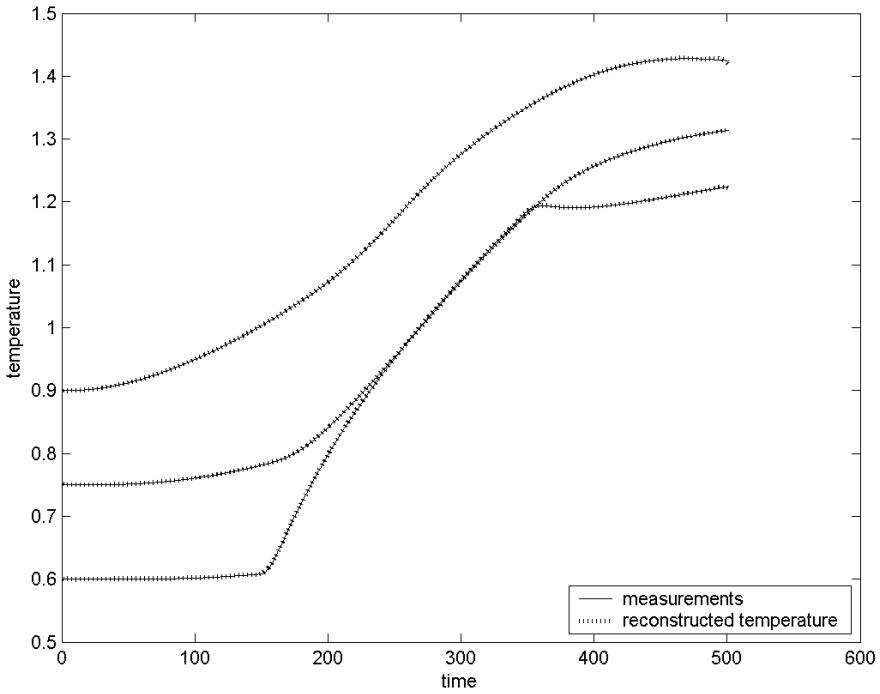


FIG. 3.1 – Reconstruction de la température au niveau des capteurs

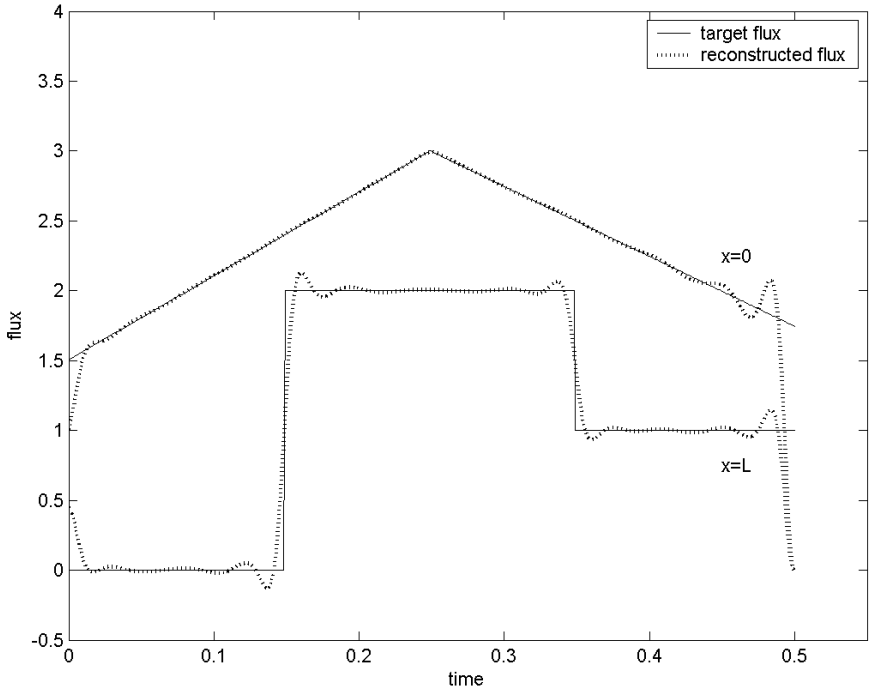


FIG. 3.2 – Reconstruction du flux dans L^2

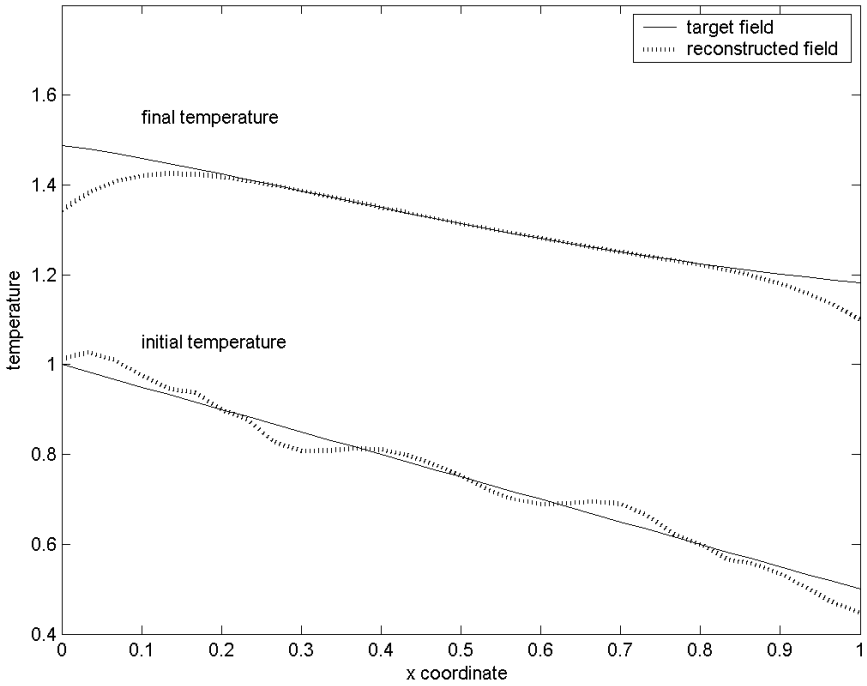


FIG. 3.3 – Reconstruction de la température finale dans L^2

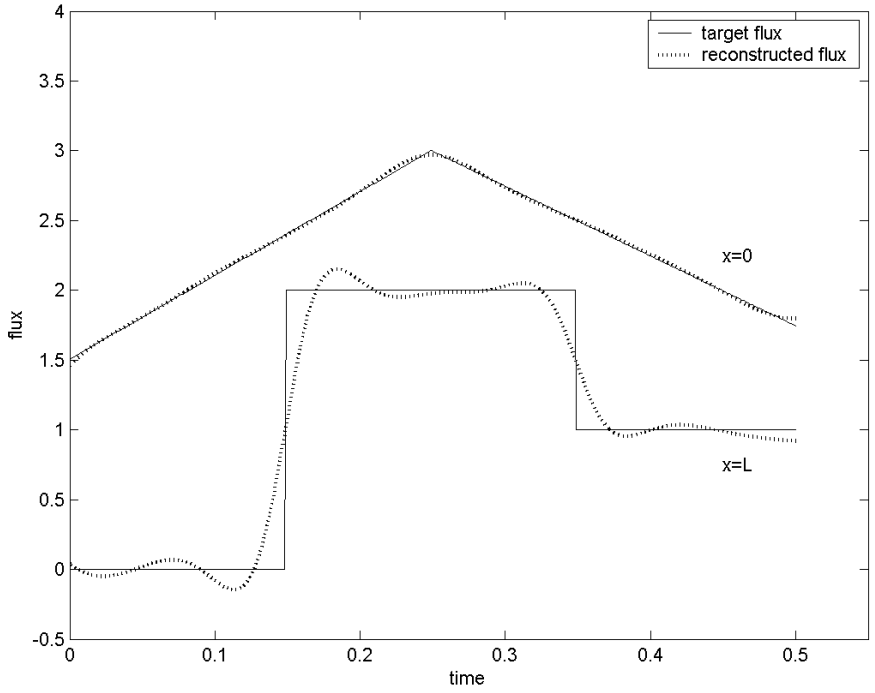


FIG. 3.4 – Reconstruction du flux dans H^1 ($\bar{\beta} = 0.01$)

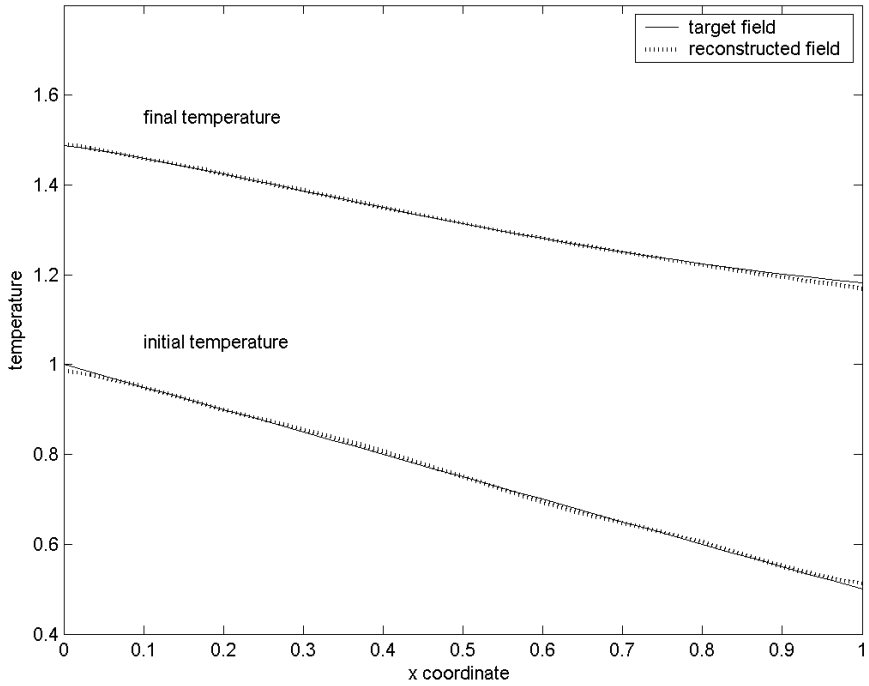


FIG. 3.5 – Reconstruction de la température finale dans H^1 ($\bar{\beta} = 0.01$)

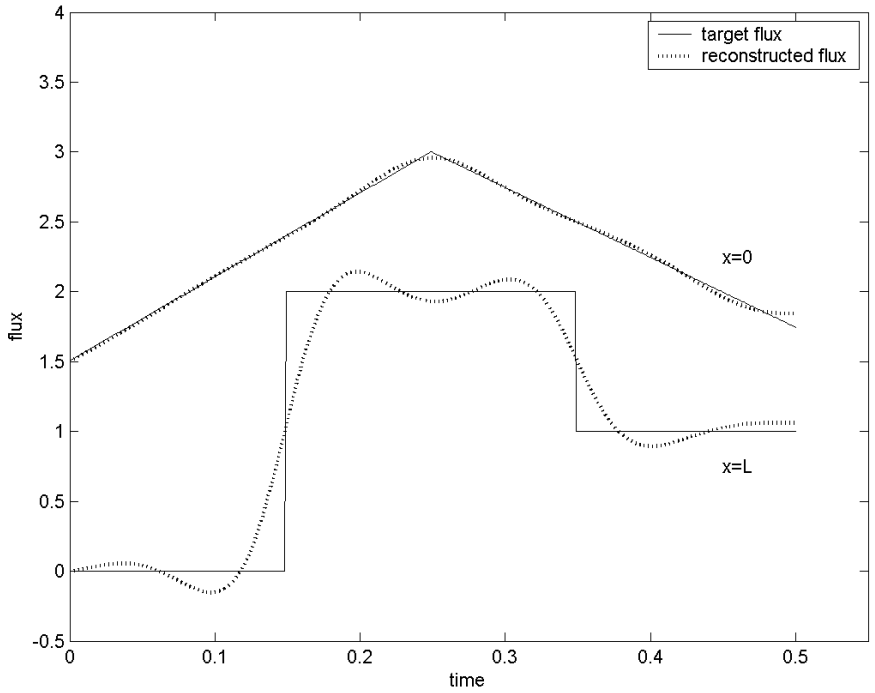


FIG. 3.6 – Reconstruction du flux dans H^1 : $\bar{\beta} = 0.1$

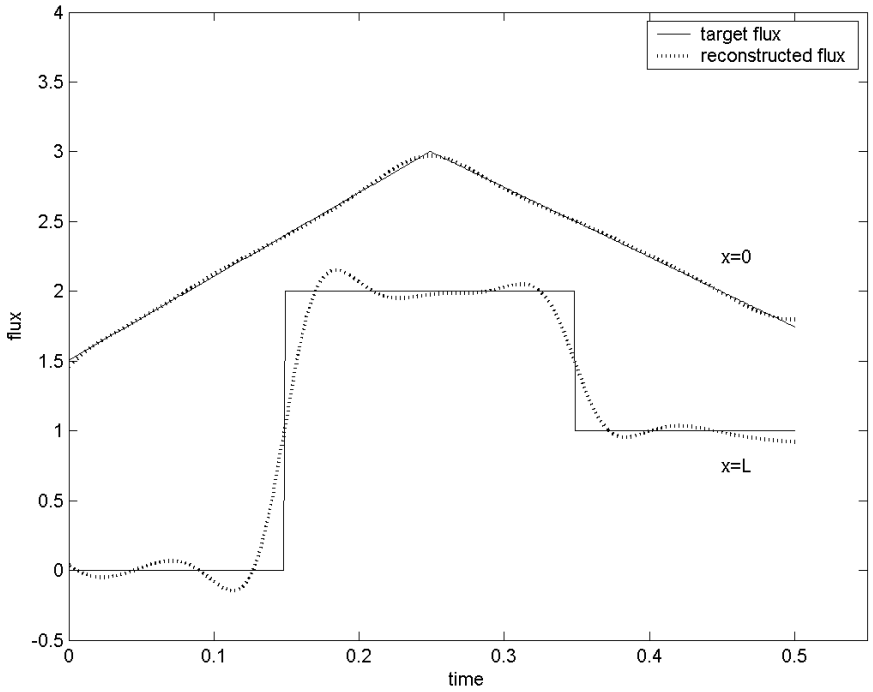


FIG. 3.7 – Reconstruction du flux dans H^1 : $\bar{\beta} = 0.01$

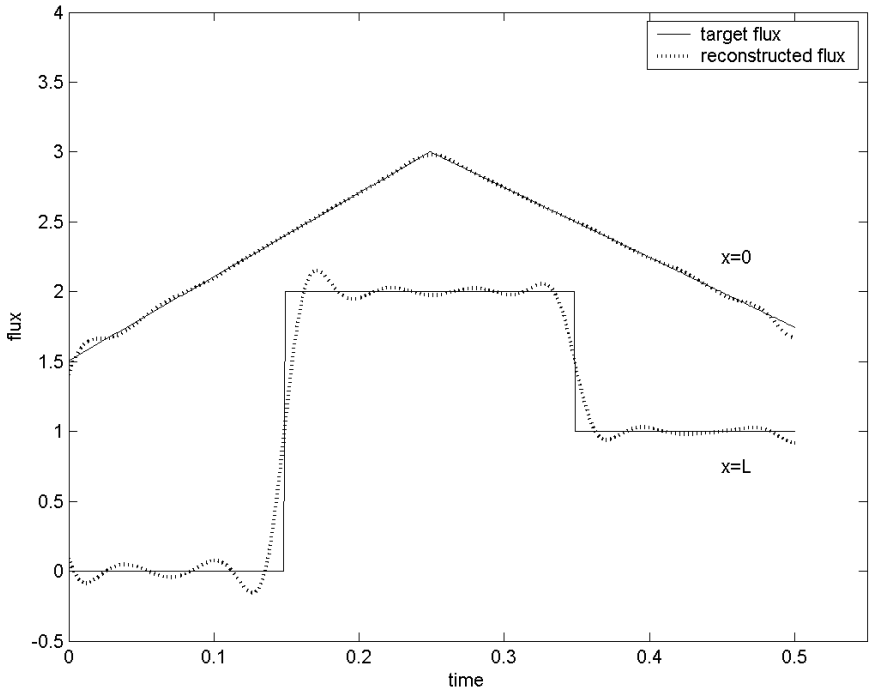


FIG. 3.8 – Reconstruction du flux dans H^1 : $\bar{\beta} = 0.001$

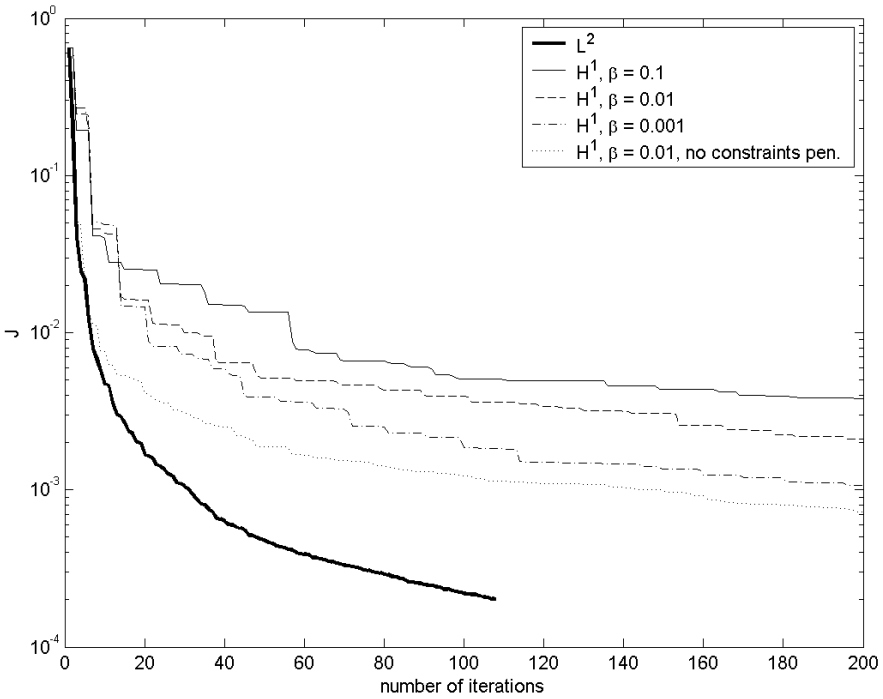


FIG. 3.9 – Convergence des différentes versions de l'algorithme

finale du champ de température, le choix de la version non pénalisée permet d'obtenir des résultats avec un plus faible coût de calcul et une perte de précision moindre.

3.3.2 Résultats avec données bruitées

La performance de toute procédure inverse doit toujours être évaluée dans le cas où les données sont entachées de bruit de mesure. En effet, dans la pratique, les données sont toujours bruitées. Dans ce qui suit, un bruit blanc gaussien d'écart type σ est numériquement ajouté aux données de synthèse. Le rapport signal-bruit est mesuré par

$$\eta = \left(\frac{\|\theta^d - \theta^*\|^2}{\|\theta^*\|^2} \right)^{1/2}$$

$\|\cdot\|$ étant la norme dans $L^2(0,T)^m$. Les données bruitées pour $\sigma^2 = 0,01$ ($\eta = 8\%$) sont comparées, sur la figure 3.11, aux données reconstruites. Les flux et la température finale reconstruits sont données sur les figures 3.12 et 3.13. La perte de précision est évidente mais la température finale reconstruite est encore satisfaisante. Les figures 3.14 et 3.15 montrent les flux reconstruits avec des niveaux de bruit différents sur les données ($\sigma^2 = 0,001$ et $\sigma^2 = 0,1$ respectivement).

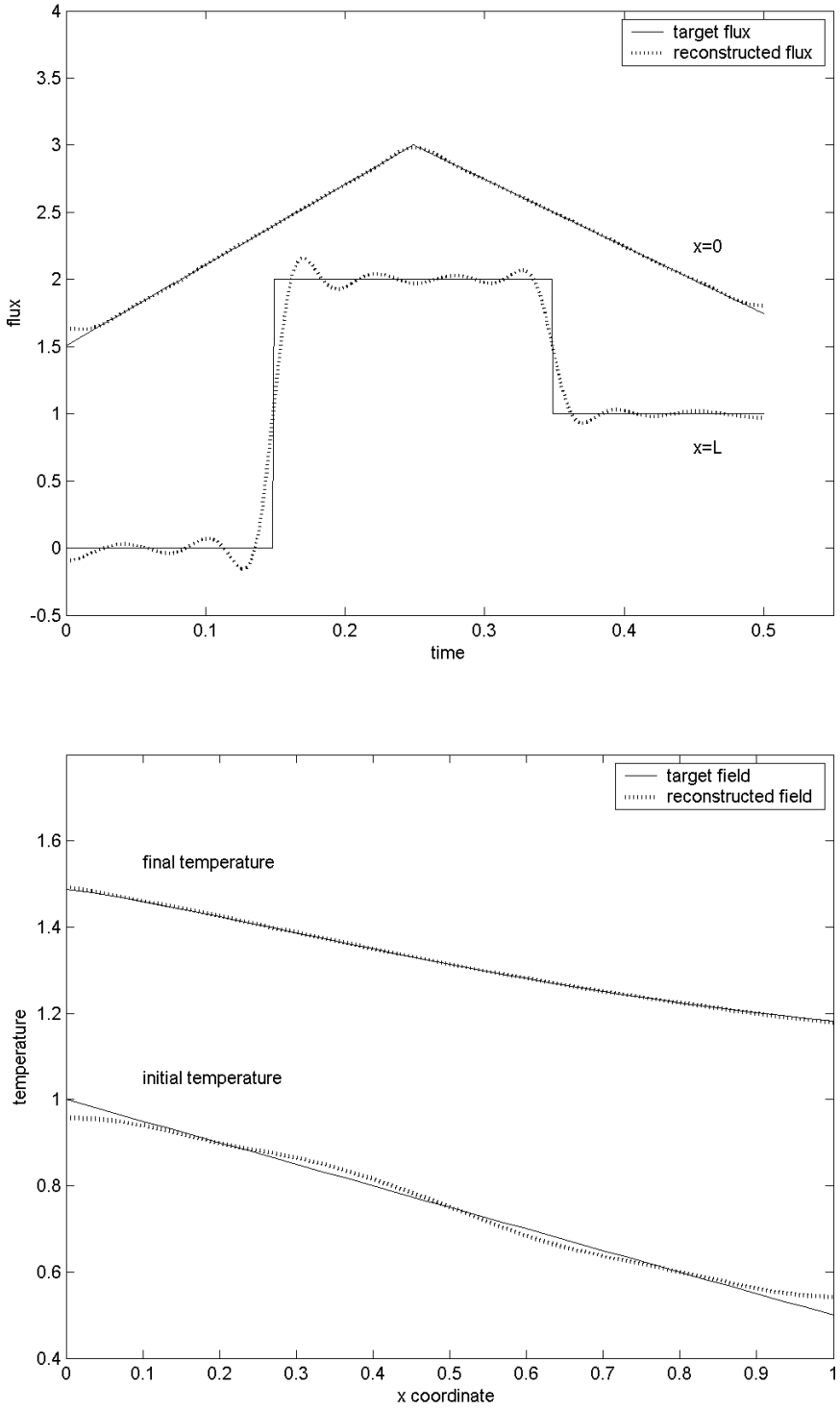


FIG. 3.10 – Reconstruction dans H^1 ($\bar{\beta} = 0,01$, sans pénalisation des contraintes)

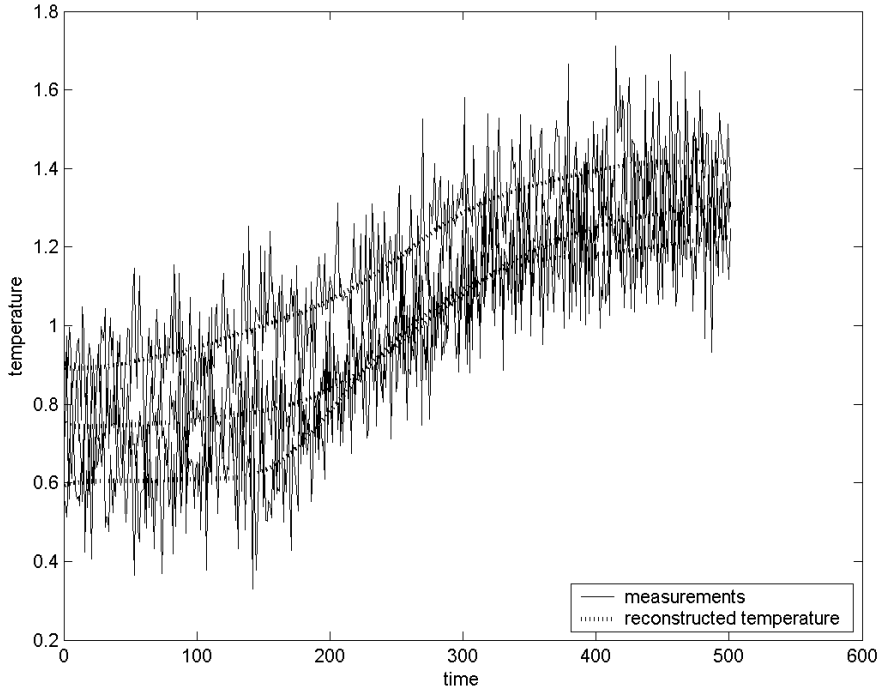


FIG. 3.11 – Données bruitées ($\sigma^2 = 0,01$, $\eta = 8\%$) et température reconstruite au niveau de capteurs

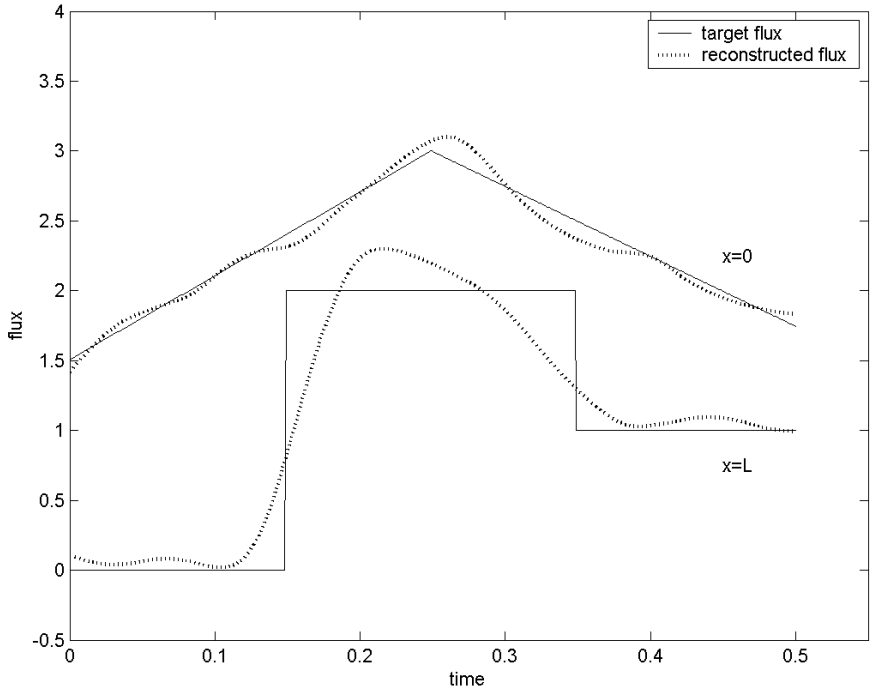


FIG. 3.12 – Flux reconstruit dans H^1 avec données bruitées ($\bar{\beta} = 0,01$, $\sigma^2 = 0,01$, $\eta = 8\%$)

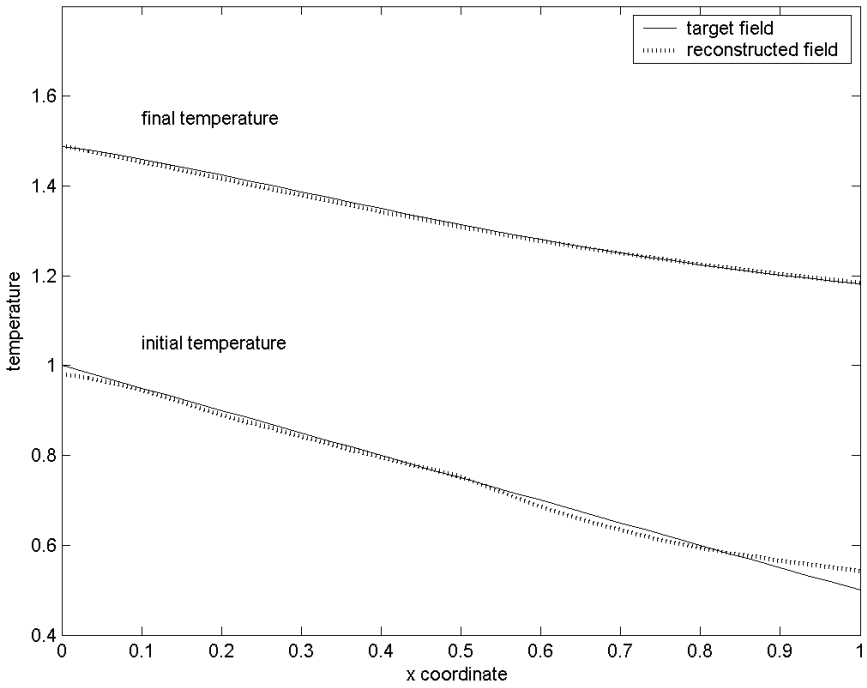


FIG. 3.13 – Température finale reconstruite dans H^1, avec données bruitées ($\bar{\beta} = 0,01$, $\sigma^2 = 0,01$, $\eta = 8\%$)

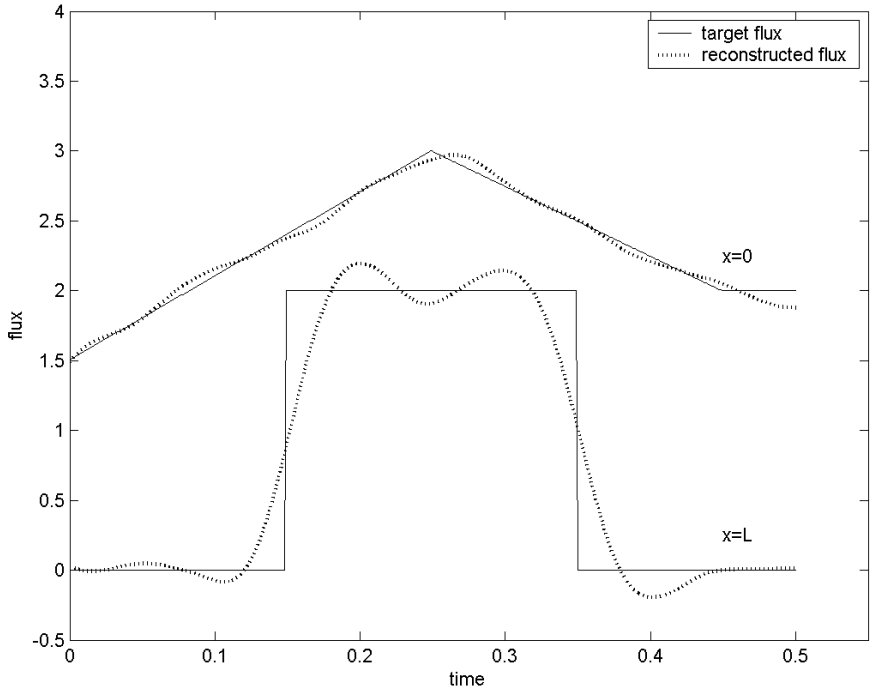


FIG. 3.14 – Reconstruction du flux dans H^1 avec données bruitées ($\bar{\beta} = 0,01$, $\sigma^2 = 0,001$, $\eta = 2\%$)

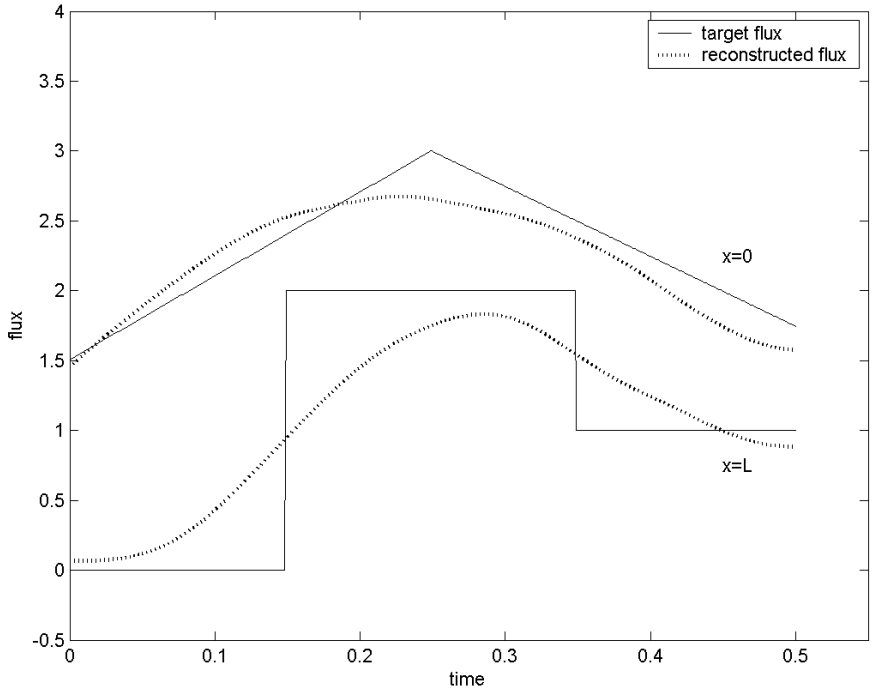


FIG. 3.15 – Reconstruction du flux dans H^1 avec données bruitées ($\bar{\beta} = 0,01$, $\sigma^2 = 0,1$, $\eta = 24\%$)

3.4 Conclusions

Nous avons présenté dans ce chapitre la méthode adjointe avec régularisation de Tikhonov appliquée à la détermination d'une condition initiale et de flux inconnus à partir de mesures ponctuelles. La cas unidimensionnel traité nous a permis de mettre en évidence la difficulté de reconstruction à l'instant final lorsqu'un cadre fonctionnel de type L^2 est adopté. Pour remédier à cette difficulté, nous avons proposé un nouveau cadre fonctionnel dans lequel les inconnues sont recherchées dans l'espace H^1. La température à l'instant final est ainsi correctement estimée. Le calcul de l'état adjoint dans H^1 nécessite la résolution supplémentaire d'un problème elliptique en temps. Les algorithmes de reconstruction proposés restent facilement implantables avec un code d'éléments finis généraliste.

Dans les chapitres suivants, la démarche esquissée ici sera reprise dans le cas tridimensionnel.

Chapitre 4

Reconstruction de la température dans un solide tridimensionnel

Nous reprenons dans ce chapitre la démarche générale adoptée dans le chapitre précédent dans le but de reconstruire cette fois un champ de température inconnu dans un solide tridimensionnel. Pour simplifier la présentation, nous avons séparé les cas où l'on vise à reconstruire une source interne volumique, une source surfacique (flux) ou une température initiale. La reconstruction simultanée de deux ou trois parmi ces grandeurs est possible comme cela a été fait dans le cas unidimensionnel si les conditions de compatibilité sont correctement prises en compte.

Dans chacun des cas, l'état adjoint est calculé via une méthode de transposition. Nous commençons par le cas de la reconstruction d'une source volumique qui est relativement plus simple à présenter. Nous poursuivons ensuite avec les deux autres cas qui font appel à des variantes de la méthode de transposition.

Les différences entre le problème posé dans un espace unidimensionnel et un espace tridimensionnel sont plus profondes que ce que l'intuition pourrait faire croire, et sont essentiellement dues aux observations ponctuelles. Dans le cas unidimensionnel, le choix d'un espace de contrôle de type L^2 est suffisant pour garantir que le problème soit bien posé. Dans un domaine tridimensionnel en revanche, il faut impérativement se placer dans des espaces de fonctions de régularité supérieure.

Revenons sur l'équation de la chaleur sous sa forme générique :

$$\left\{\begin{array}{ll} \dfrac{\partial\theta}{\partial t} - div(\kappa\, grad\,\theta) = f & \text{dans} \quad \Omega\times[0,T] \\ (\kappa\, grad\,\theta)\cdot\vec{n} + \alpha\theta = \Phi & \text{sur} \quad \partial\Omega\times[0,T] \\ \theta(x,0) = \theta^0 & \text{dans} \quad \Omega \end{array}\right. \tag{4.1}$$

Dans le cadre du contrôle optimal, nous souhaitons définir une fonctionnelle de coût mesurant l'écart entre les données $\{\theta_k^d(t)\}_{k=1}^m$ et les valeurs ponctuelles $\{\theta(x_k,t)\}_{k=1}^m$ du champ θ aux emplacements des capteurs. Or, pour que ces valeurs soient bien définies, il faut que θ soit suffisament régulier.

Selon Brézis (1999), pour un espace de Sobolev $H^s(\mathbb{R}^N)$, si

$$\frac{1}{2} - \frac{s}{N} < 0,$$

alors

$$H^s(\mathbb{R}^N) \subset L^\infty(\mathbb{R}^N).$$

Dans ce cas, les fonctions de $H^s(\mathbb{R}^N)$ sont définies en tout point. On voit que :

- en dimension 1 ($N = 1$), toute fonction $v \in H^1(\Omega)$ est définie en tout point ($s = 1$ et $\frac{1}{2} - \frac{1}{1} < 0$)
- en dimension 2 ($N = 2$), v sera définie en tout point dès lors que $v \in H^s(\Omega)$ avev $s > 1$
- en dimension 3 ($N = 3$), v sera définie en tout point dès lors que $v \in H^s(\Omega)$ avev $s > \frac{3}{2}$

La distinction de ces trois cas montre bien en quoi le cas tridimensionnel diffère du cas unidimensionnel.

Pour pouvoir définir la fonctionnelle de coût, il faut garantir une régularité au moins de $H^{\frac{3}{2}}(\Omega)$ de θ (en espace), ce qui impose à son tour le choix d'un espace de contrôle $\mathcal{V}$ suffisament régulier. Lions & Magenes (1968) (théorème 5.3 page 34) donnent le résultat suivant : si $f \in H^{k,k/2m}(\Omega \times [0,T])$, $g \in H^{k+2m-m_j-1/2,(k+2m-m_j-1/2)/2m}(\partial\Omega \times [0,T])$ et $u^0 \in H^{k+m}(\Omega)$, alors, sous certaines hypothèses supplémentaires, le problème

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial t} - div(\kappa\, grad\, u) = f & \text{dans} \quad \Omega \times [0,T] \\ (\kappa\, grad\, u) \cdot \vec{n} + \alpha\theta = g & \text{sur} \quad \partial\Omega \times [0,T] \\ u(x,0) = u^0 & \text{dans} \quad \Omega \end{cases}$$

admet une solution unique $u \in H^{k+2m,k/2m+1}(\Omega \times [0,T])$. On note $H^{r,s}(\Omega \times [0,T])$ l'espace anisotrope

$$H^0\big(0,T;H^r(\Omega)\big) \cap H^s\big(0,T;H^0(\Omega)\big).$$

Le paramètre m désigne le nombre d'opérateurs frontière, et m_j le degré de l'opérateur frontière j : ici, $m = 1$ et $m_1 = 1$.

En particulier, il suffit que Φ et θ^0 soient choisis dans les espaces de Sobolev $H^1(\partial\Omega \times [0,T])$ et $H^1(\Omega)$ respectivement pour garantir $\theta \in L^2\big(0,T;H^2(\Omega)\big)$. Les duaux de ces espaces, auxquels appartiennent les états adjoints respectifs, sont donc des espaces de Sobolev à exposant négatif, d'où la nécessité d'approches spécifiques pour le calcul de l'adjoint.

4.1 Reconstruction d'une source volumique

Nous commençons ici par traiter le problème de la reconstruction d'une source volumique f. Ce cas simple permettra d'introduire une première version de la méthode de transposition qui servira de base pour la suite.

Outre sa plus grande facilité de mise en œuvre, la reconstruction d'une source volumique peut être d'un grand intérêt pratique pour des structures élancées comme des poutres ou des plaques. Prenons l'exemple d'une plaque de faible épaisseur. Le temps caractéristique de conduction dans le sens de l'épaisseur est négligeable pour ce type de géométrie par rapport aux temps caractéristiques de conduction selon les autres directions. Un modèle bidimensionnel qui prend en compte les chargements thermiques en surface comme une source de chaleur interne est dans ce cas une approximation qui permet de réduire de manière conséquente la finesse du maillage.

4.1.1 Formulation primale

4.1.1.1 Contrôle dans $L^2(0,T;L^2(\Omega))$

Considérons l'équation d'état pour une structure à température initiale nulle ($\theta^0 = 0$) soumise à une source interne volumique $f(x,t)$ (on considère $\Phi = 0$) :

$$\left\{\begin{array}{ll} \dfrac{\partial\theta}{\partial t} - div(\kappa\, grad\,\theta) = f & \text{dans} \quad \Omega\times[0,T] \\ (\kappa\, grad\,\theta)\cdot\vec{n} + \alpha\theta = 0 & \text{sur} \quad \partial\Omega\times[0,T] \\ \theta(x,0) = 0 & \text{dans} \quad \Omega \end{array}\right. \tag{4.2}$$

Les m capteurs répartis dans la structure aux points x_k fournissent au cours de l'intervalle de temps $[0,T]$ les mesures notées $\{\theta_k^d(t)\}_{k=1}^m$.

Nous cherchons des hypothèses convenables sur f qui garantissent une régularité de θ suffisante pour définir les valeurs ponctuelles du champ $\theta(x_k,t)$. Selon Lions & Magenes (1968), si $f \in L^2(\Omega\times[0,T])$, alors $\theta \in L^2(0,T;H^2(\Omega))\bigcap H^1(0,T;L^2(\Omega))$ avec continuité par rapport aux données ce qui est suffisant pour définir des valeurs ponctuelles (cf. Brézis (1999)). Nous choisissons donc comme espace de contrôle

$$f \in \mathcal{V} = L^2\big(0,T;L^2(\Omega)\big),$$

$\mathcal{V}$ étant muni du produit scalaire naturel

$$\big(v,w\big)_{\mathcal{V}} = \int_{\Omega\times[0,T]} vw\,dx\,dt \quad \forall v,w\in\mathcal{V}. \tag{4.3}$$

Soit $\mathcal{M} = L^2\,(0,T)^m$ l'espace des observations, et C l'opérateur d'observation tel que $C\theta(x,t) = \{\theta(x_k,t)\}_{k=1}^m$. Ceci permet de définir l'opérateur $\tau : \mathcal{V}\to\mathcal{M}$ tel que

$$\begin{array}{rcl} \tau f & = & C\theta(x,t;f) \\ & = & \{\theta(x_k,t;f)\}_{k=1}^m \end{array} \tag{4.4}$$

Avec ces notations, le problème de la reconstruction consiste à déterminer la source f telle que

$$\tau f = \{\theta_k^d(t)\}_{k=1}^m \tag{4.5}$$

ou, à défaut,

$$\tau f \sim \{\theta_k^d(t)\}_{k=1}^m. \tag{4.6}$$

Pour résoudre ce problème mal posé, nous définissons la fonctionnelle régularisée

$$\boxed{J_\Omega(f) \;=\; \frac{1}{2}\sum_{k=1}^m \int_0^T \Big(\theta(x_k,t,f)-\theta_k^d(t)\Big)^2\,dt + \frac{\epsilon}{2}\int_{\Omega\times[0,T]} f^2\,dx\,dt} \tag{4.7}$$

et nous considérons le problème de minimisation suivant :

$$\left\{\begin{array}{l} \text{Trouver } f\in\mathcal{V}=L^2\big(0,T;L^2(\Omega)\big) \text{ tel que} \\ J_\Omega(f)=\min\limits_{\tilde f\in\mathcal{V}} J_\Omega(\tilde f) \end{array}\right. \tag{4.8}$$

Par définition, le gradient de la fonctionnelle vérifie

$$J(f+\delta f)-J(f)=(\nabla J,\delta f)_{\mathcal{V}}+\mathcal{O}\|\delta f\|_{\mathcal{V}}^2 \quad \forall \delta f\in\mathcal{V} \tag{4.9}$$

Un calcul simple et la continuité de la solution de (4.2) par rapport aux données montrent que

$$\begin{array}{rl} D(\delta f) & = J(f+\delta f)-J(f) \\ & = \displaystyle\sum_{k=1}^m \int_0^T \big[\theta(x_k,t)-\theta_k^d(t)\big]\delta\theta(x_k,t)\,dt+\epsilon\big(f,\delta f\big)_{\mathcal{V}}+\mathcal{O}\|\delta f\|_{\mathcal{V}}^2 \end{array} \tag{4.10}$$

où $\delta\theta$ est solution de (4.2) avec δf au second membre.

On introduit alors l'état adjoint p défini comme unique solution de l'équation adjointe :

$$\left\{\begin{array}{lll} -\dfrac{\partial p}{\partial t}-div(\kappa grad\, p)=\displaystyle\sum_{k=1}^m \Big(\theta(x_k,t)-\theta_k^d(t)\Big)\,\delta_{x_k} & \text{dans} & \Omega\times[0,T] \\ (\kappa grad\, p)\cdot\vec n+\alpha p=0 & \text{sur} & \partial\Omega\times[0,T] \\ p(x,T)=0 & \text{dans} & \Omega \end{array}\right. \tag{4.11}$$

Le terme source du problème parabolique (4.11) est constitué de masses de Dirac qui appartiennent à l'espace $L^2(0,T;H^{-2}(\Omega))$. Nous verrons dans la partie 4.1.3 comment en définir par transposition une solution $p\in L^2(0,T;L^2(\Omega))$.

En multipliant formellement (4.11) par une fonction test w et en intégrant on obtient une formulation faible qui s'écrit :

$$\left\{\begin{array}{l} -\displaystyle\int_\Omega \frac{\partial p}{\partial t}w\,dx+\int_\Omega(\kappa grad\, p)(grad\, w)\,dx+\int_{\partial\Omega}\alpha p w\,d\gamma= \\ \qquad \displaystyle\sum_{k=1}^m \Big(\theta(x_k,t)-\theta_k^d(t)\Big)\,w(x_k) \qquad \forall w \\ \\ p(x,T)=0 \end{array}\right. \tag{4.12}$$

De même, une formulation faible en espace de (4.2), avec δf au second membre, est donnée par

$$\left\{\begin{array}{l} \displaystyle\int_\Omega \frac{\partial\delta\theta}{\partial t}w\,dx+\int_\Omega(\kappa grad\,\delta\theta)(grad\, w)\,dx+\int_{\partial\Omega}\alpha\delta\theta w\,d\gamma= \\ \qquad \displaystyle\int_\Omega \delta f w\,dx, \qquad \forall w \\ \delta\theta(x,0)=0 \end{array}\right. \tag{4.13}$$

A partir de (4.13) et (4.12), et après intégration en temps, on voit que

$$\sum_{k=1}^{m} \int_0^T \big[\theta(x_k,t) - \theta_k^d(t)\big] \delta\theta(x_k,t)\, dt = \int_{\Omega\times[0,T]} p\delta f \, dx\, dt \tag{4.14}$$

qui est une forme linéaire sur $\mathcal{V}$. Dans cette expression, l'intégrale au second membre est un produit de dualité entre $\mathcal{V}$ et $\mathcal{V}'$. Du fait que $\mathcal{V} = L^2(\Omega\times[0,T])$, les deux espaces s'identifient ici l'un à l'autre, et le produit de dualité est par conséquent le produit scalaire usuel dans L^2. On déduit de (4.10) et (4.14) que

$$\nabla J_\Omega = p + \epsilon f \in L^2(\Omega\times[0,T]) \tag{4.15}$$

Remarque :

Les expressions (4.10) à (4.14) et les calculs présentés ont juste un caractère formel. Ils sont donnés pour faciliter la compréhension de la démarche. Il faudra attendre la définition précise de l'état adjoint (ce sera fait dans la partie 4.1.3) pour que le gradient ait un sens bien défini.

La condition d'optimalité pour le problème (4.8) s'écrit

$$\nabla J_\Omega = 0 \quad \Leftrightarrow \quad p + \epsilon f = 0$$

Dans l'approche décrite ici, le gradient de J est donné par p qui s'annule à l'instant final ($p(T) = 0$). Ceci pose de nouveau le problème de l'instant final présenté dans le chapitre 3. Ce problème vient du choix de l'espace de contrôle $\mathcal{V} = L^2(0,T;L^2(\Omega))$. Pour y remédier, nous devons choisir un espace de contrôle plus régulier en temps. C'est ce qui est fait dans le paragraphe suivant.

4.1.1.2 Contrôle dans $H^1(0,T;L^2(\Omega))$

Nous supposons cette fois que la source f appartient à l'espace $\mathcal{V} = H^1\big(0,T;L^2(\Omega)\big)$. Comme cet espace est inclus dans l'espace de contrôle utilisé dans la partie précédente, le problème (4.2) admet encore une solution unique θ suffisamment régulière pour permettre la définition des valeurs ponctuelles. L'espace $\mathcal{V}$ est muni du produit scalaire

$$\big(v,w\big)_{\mathcal{V}} = \int_{\Omega\times[0,T]} vw \, dx\, dt + \int_{\Omega\times[0,T]} \frac{\partial v}{\partial t}\frac{\partial w}{\partial t}\, dx\, dt \tag{4.16}$$

L'objectif de la reconstruction est de déterminer un contrôle $f \in \mathcal{V}$ tel que

$$C\theta(x,t;f) \sim \{\theta_k^d(t)\}_{k=1}^m. \tag{4.17}$$

Nous définissons pour cela la fonctionnelle régularisée

$$\boxed{\begin{aligned} J_\Omega(f) \;=\; & \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{m} \int_0^T \Big(\theta(x_k,t,f) - \theta_k^d(t)\Big)^2 \, dt \\ & + \frac{\epsilon}{2}\left[\int_{\Omega\times[0,T]} f^2\, dx\, dt + \int_{\Omega\times[0,T]} \left(\frac{\partial f}{\partial t}\right)^2 dx\, dt\right] \end{aligned}} \tag{4.18}$$

où θ est solution de (4.2), et nous considérons le problème de contrôle suivant :

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Trouver } f \in \mathcal{V} = H^1(0,T;L^2(\Omega)) \text{ tel que} \\ J_\Omega(f) = \min\limits_{\tilde{f}\in\mathcal{V}} J_\Omega(\tilde{f}) \end{array} \right. \tag{4.19}$$

Comme plus haut, un simple calcul conduit à l'expression (4.10). En utilisant la solution p de (4.12) et (4.14) on obtient

$$D(\delta f) = \int_{\Omega\times[0,T]} p\delta f \, dx\, dt + \epsilon\big(f,\delta f\big)_{\mathcal{V}} + \mathcal{O}\|\delta f\|^2_{\mathcal{V}} \tag{4.20}$$

On voit alors que l'on est conduit à chercher une fonction P telle que

$$\int_{\Omega\times[0,T]} Pw \, dx\, dt + \int_{\Omega\times[0,T]} \frac{\partial P}{\partial t}\frac{\partial w}{\partial t} dx\, dt = \int_{\Omega\times[0,T]} pw \, dx\, dt, \quad \forall w \in \mathcal{V}. \tag{4.21}$$

de sorte que

$$D(\delta f) = \int_{\Omega\times[0,T]} Pw \, dx\, dt + \int_{\Omega\times[0,T]} \frac{\partial P}{\partial t}\frac{\partial w}{\partial t} dx\, dt + \epsilon\big(f,\delta f\big)_{\mathcal{V}} + \mathcal{O}\|\delta f\|^2_{\mathcal{V}} \tag{4.22}$$

où l'on reconnaît le produit scalaire dans $H^1(0,T;L^2(\Omega))$. On en conclut que le gradient de J_Ω est donné par

$$\nabla J_\Omega = P + \epsilon f \quad \in \mathcal{V} \tag{4.23}$$

En réalité, $P \in \mathcal{V}$ est l'image de p par l'isomorphisme I^{-1}. On rappelle que I^{-1} est l'isomorphisme de Riesz tel que

$$\langle v, w\rangle_{\mathcal{V}',\mathcal{V}} = \big(I^{-1}v, w\big)_{\mathcal{V}}.$$

Lorsque $f \in H^1(0,T;L^2(\Omega))$ (Lions & Magenes, 1968), on a $\theta \in H^1(0,T;H^2(\Omega))$. p peut alors être défini par transposition (cf. partie 4.1.3) dans $H^{-1}(0,T;L^2(\Omega))$. (4.21) est la forme explicite de l'isomorphisme I^{-1}.

On remarque aussi que (4.21) est la forme faible d'un problème faisant intervenir l'opérateur Laplacien en temps, avec des conditions aux limites de Neumann. Comme dans le cas unidimensionnel (cf. chapitre 3), le choix de cet espace de contrôle évite le problème de l'instant final.

Au final, la condition d'optimalité pour le problème (4.19) s'écrit

$$\nabla J_\Omega(f) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad P + \epsilon f = 0$$

4.1.2 Formulation duale

Nous présentons ici le problème de la reconstruction sous une formulation duale, dont le principe a été présenté sous forme abstraite dans la partie 2.3.2.

Nous introduisons l'opérateur (on note $X \equiv \{X_k(t)\}_{k=1}^m$)

$$\begin{array}{rcl} \mathcal{D}: \ \mathcal{M}' \to \mathcal{M}' & & \\ \mathcal{D}X & = & C\theta\big(P(X)\big) \\ & = & \{\theta(x_k,t;P(X))\}_{k=1}^m \end{array} \tag{4.24}$$

où $\theta(P)$ est solution de

$$\left\{\begin{array}{ll} \dfrac{\partial\theta}{\partial t} - div(\kappa\, grad\,\theta) = q & \text{dans} \quad \Omega\times[0,T] \\ (\kappa\, grad\,\theta)\cdot\vec{n} + \alpha\theta = 0 & \text{sur} \quad \partial\Omega\times[0,T] \\ \theta(x,0) = 0 & \text{dans} \quad \Omega \end{array}\right. \tag{4.25}$$

Dans (4.25), $q = p$ si $\mathcal{V} = L^2\left(0,T;L^2(\Omega)\right)$ ou $q = P$ (solution de (4.21)) si $\mathcal{V} = H^1\left(0,T;L^2(\Omega)\right)$, avec $p(X)$ solution de

$$\left\{\begin{array}{ll} -\dfrac{\partial p}{\partial t} - div(\kappa grad\, p) = \displaystyle\sum_{k=1}^{m}\Big(\theta(x_k,t) - \theta_k^d(t)\Big)\,\delta_{x_k} & \text{dans} \quad \Omega\times[0,T] \\ (\kappa grad\, p)\cdot\vec{n} + \alpha p = 0 & \text{sur} \quad \partial\Omega\times[0,T] \\ p(x,T) = 0 & \text{dans} \quad [0,T] \end{array}\right. \tag{4.26}$$

Le problème dual régularisé (cf. (2.53) page 40) est alors le suivant :

$$\text{Trouver } X = \{X_k\}_{k=1}^m \in \mathcal{M}' \text{ tel que } \mathcal{D}X + \epsilon X = \Lambda\{\theta_k^d\}_{k=1}^m \tag{4.27}$$

Si on pose $f = I^{-1}\tau^* X$, f est solution du problème primal (4.8).

Le problème (4.27) peut être écrit sous une forme variationnelle :

$$\boxed{a^*(X,\psi) = L\,(\psi) \quad \forall\psi\in\mathcal{M}' = L^2(0,T)^m} \tag{4.28}$$

où $L\,(\psi)$ est une forme linéaire $L^2(0,T)^m \to \mathbb{R}$

$$L\,(\psi) = \Big(\Lambda\{\theta_k^d\},\psi\Big)_{\mathcal{M}'} \;=\; \sum_{k=1}^{m}\int_0^T \theta_k^d(t)\psi_k(t)\,dt \quad \forall\psi\in L^2(0,T)^m \tag{4.29}$$

et

$$a^*(X,\psi) = \Big(I^{-1}\tau^* X, I^{-1}\tau^*\psi\Big)_{\mathcal{V}} + \epsilon\Big(X,\psi\Big)_{\mathcal{M}'}$$

est une forme bilinéaire $L^2(0,T)^m \times L^2(0,T)^m \to \mathbb{R}$ qui s'écrit, selon les cas

– $a^*(X,\psi) = a^{(L^2)}(X,\psi)$ tel que

$$a^{(L^2)}(X,\psi) = \int_{\Omega\times[0,T]} p(X)p(\psi)\,dx\,dt + \epsilon\sum_{k=1}^{m}\int_0^T X_k(t)\psi_k(t)\,dt \quad \forall X,\psi\in L^2(0,T)^m \tag{4.30}$$

si $\mathcal{V} = L^2\left(0,T;L^2(\Omega)\right)$

– $a^*(X,\psi) = a^{(H^1)}(X,\psi)$ tel que

$$\begin{array}{rcl} a^{(H^1)}(X,\psi) & = & \displaystyle\int_{\Omega\times[0,T]} P(X)P(\psi)\,d\gamma\,dt + \int_{\Omega\times[0,T]} \frac{\partial P(X)}{\partial t}\frac{\partial P(\psi)}{\partial t}\,dx\,dt + \\ & & \epsilon\displaystyle\sum_{k=1}^{m}\int_0^T X_k(t)\psi_k(t)\,dt \quad \forall X,\psi\in L^2(0,T)^m \end{array} \tag{4.31}$$

si $\mathcal{V} = H^1\left(0,T;L^2(\Omega)\right)$

Ce problème revient à minimiser la fonctionnelle $I_\Omega(X)$ telle que

$$\boxed{I_\Omega(X) \;=\; \frac{1}{2}a^*(X,X) - L(X)} \tag{4.32}$$

où l'astérisque $*$ remplace (L^2) ou (H^1) respectivement. Le gradient de I_Ω, noté ∇I_Ω, est donné par

$$\nabla I_\Omega = \left\{\theta(x_k,t;q) + \epsilon X_k(t) - \theta_k^d(t)\right\}_{k=1}^m \tag{4.33}$$

($\theta(x,t;q)$ est solution de (4.25) avec $q=p$ ou $q=P$ au second membre, selon le choix de $\mathcal{V}$).

La formulation duale présente plusieurs avantages. Premièrement, la solution à déterminer par l'algorithme du gradient conjugué est recherchée dans l'espace des observations $L^2(0,T)^m$. Cet espace est unidimensionnel, alors que l'espace de contrôle $\mathcal{V}$ repose sur un domaine à quatre dimensions (trois en espace et une en temps). Après discrétisation, la taille des inconnues est nettement plus petite. On peut s'attendre, dans le cas d'algorithmes itératifs, à la convergence en un nombre inférieur d'itérations. De plus, la dimension de l'espace $\mathcal{M}$ dépend seulement de la taille de la fenêtre temporelle et du nombre de capteurs. Le problème peut donc être facilement adapté à des géométries complexes, indépendemment de la dimension de l'espace physique. Enfin, la nature de l'espace des observations ouvre une piste vers la parallélisation des algorithmes, qui pourrait être explorée plus tard.

4.1.3 Méthode de transposition pour la définition de l'état adjoint

Comme nous l'avons vu, dans le cas d'observations ponctuelles, l'état adjoint est solution d'une équation parabolique avec des masses de Dirac dans le terme source. Dans un espace à trois dimensions, ces masses de Dirac appartiennent à l'espace de fonctions $H^{-2}(\Omega)$. Une formulation faible standard dans un espace de type H^1 ne permet donc pas de définir correctement ce terme source. Il est nécessaire de partir d'une formulation dite très faible (Bourquin *et al.* , 2007).

Soit l'équation adjointe ci-dessous avec, pour simplifier, $\kappa = 1$ et une seule source en $x = x_0$ qui varie au cours du temps selon $\phi(t)$:

$$\left\{\begin{array}{ll} -\dfrac{\partial p}{\partial t} - div\, grad\, p = \phi(t)\delta_{x_0} & \text{dans} \quad \Omega\times[0,T] \\ grad\, p\cdot\vec{n} + \alpha p = 0 & \text{sur} \quad \partial\Omega\times[0,T] \\ p(T) = 0 & \text{dans} \quad \Omega \end{array}\right. \tag{4.34}$$

On obtient la formulation très faible en espace par double intégration sur Ω :

$$\left\{\begin{array}{l} -\displaystyle\int_\Omega \frac{\partial p}{\partial t} v\, dx - \int_\Omega p\, div\, grad\, v\, dx + \int_{\partial\Omega} \left(p\, grad\, v\cdot\vec{n} + \alpha p v\right) d\gamma = \phi(t) v(x_0) \\ \qquad \forall v \text{ suffisamment régulier} \\ p(T) = 0 \end{array}\right. \tag{4.35}$$

L'expression (4.35) est valable pour des fonctions test qui sont au moins deux fois dérivables en espace. Si on considère le problème

$$\left\{\begin{array}{ll} \dfrac{\partial v}{\partial t} - div\, grad\, v = f & \text{dans} \quad \Omega\times[0,T] \\ grad\, v\cdot\vec{n} + \alpha v = 0 & \text{sur} \quad \partial\Omega\times[0,T] \\ v(0) = 0 & \text{dans} \quad \Omega \end{array}\right. \tag{4.36}$$

avec $f \in L^2(0,T;L^2(\Omega))$, alors $v \in L^2(0,T;H^2(\Omega))$ donc la condition est vérifiée. En remplaçant dans (4.35), après intégration en temps, on obtient

$$\int_{\Omega\times[0,T]} pf\,dx\,dt = \int_0^T \phi(t)v(x_0,t)\,dt \tag{4.37}$$

Le membre de gauche de (4.37) est le produit scalaire dans $L^2(0,T;L^2(\Omega))$, alors que le membre de droite est une forme linéaire sur $L^2\big(0,T;L^2(\Omega)\big)$. Cette formule de transposition (Lions, 1968) permet de définir p dans $L^2(0,T;L^2(\Omega))$.

Remarque :

Si $\mathcal{V} = H^1\left(0,T;L^2(\Omega)\right)$, alors le membre de gauche de (4.37) est un produit de dualité entre $H^1\left(0,T;L^2(\Omega)\right)$ et $\left(H^1\left(0,T;L^2(\Omega)\right)\right)'$. Dans ce cas, la formule de transposition définit p dans $\left(H^1\left(0,T;L^2(\Omega)\right)\right)'$. En reprenant (4.21), on obtient $P \in H^1(0,T;L^2(\Omega))$ par

$$\int_{\Omega\times[0,T]} Pf\,dx\,dt + \int_{\Omega\times[0,T]} \frac{\partial P}{\partial t}\frac{\partial f}{\partial t}dx\,dt = \int_0^T \phi(t)v(x_0,t)\,dt \tag{4.38}$$

En nous reportant à Bourquin *et al.* (2007), nous montrons dans ce qui suit que ce calcul par transposition est équivalent à un calcul par superposition modale permettant l'obtention d'une solution discrète qui tend vers la solution du problème continu.

Soit $V_q = \text{span}\{y_r\}_{r=1}^q$ un espace réduit engendré par q fonctions y_r formant une base de $H^2(\Omega)$. On remplace alors le problème (4.35) par le problème approché consistant à chercher $p^q \in C^1(0,T;V_q)$ tel que

$$\begin{cases} -\displaystyle\int_\Omega \frac{\partial p^q}{\partial t} y_r\,dx - \int_\Omega p^q div\,grad\,y_r\,dx + \int_{\partial\Omega}\left(p^q grad\,y_r\cdot\vec{n} + \alpha p^q y_r\right)d\gamma = \\ \phi(t)y_r(x_0) \qquad \forall y_r \in V_q \\ p^q(T) = 0 \end{cases} \tag{4.39}$$

L'expression (4.39) peut être évaluée contre une fonction test $\chi_r(t),\ t\in[0,T]$ telle que $\chi_r(0)=0$. En multipliant par χ_r et en intégrant en temps, on obtient

$$\begin{cases} -\displaystyle\int_{\Omega\times[0,T]} p^q y_r \frac{d\chi_r}{dt}\,dx\,dt - \int_{\Omega\times[0,T]} p^q div\,grad\,y_r\chi_r\,dx\,dt + \\ \displaystyle\int_{\partial\Omega\times[0,T]}\left(p^q grad\,y_r\chi_r\cdot\vec{n} + \alpha p^q y_r\right)\chi_r\,d\gamma\,dt = \int_0^T \phi(t)y_r(x_0)\chi_r\,dt \\ \qquad \forall y_r \in V_q \\ p^q(T) = 0 \end{cases} \tag{4.40}$$

La dernière expression est sommée par rapport à r. En posant $v^q = \displaystyle\sum_{r=1}^q y_r\chi_r$, on obtient

$$\begin{aligned} &\int_{\Omega\times[0,T]} p^q \frac{\partial v^q}{\partial t}\,dx\,dt - \int_{\Omega\times[0,T]} p^q div\,grad\,v^q\,dx\,dt + \\ &\int_{\partial\Omega\times[0,T]}\left(p^q grad\,v^q\cdot\vec{n} + \alpha p^q v^q\right)d\gamma\,dt = \int_0^T \phi(t)v^q(x_0,t)\,dt \end{aligned} \tag{4.41}$$

ce qui s'écrit

$$\int_{\Omega\times[0,T]} p^q f^q \, dx \, dt = \int_0^T \phi(t) v^q(x_0,t) \, dt \tag{4.42}$$

si les fonctions v^q vérifient

$$\begin{cases} \dfrac{\partial v^q}{\partial t} - div\, grad\, v^q = f^q & \text{dans} \quad \Omega\times[0,T] \\ grad\, v^q \cdot \vec{n} + \alpha v^q = 0 & \text{sur} \quad \partial\Omega\times[0,T] \\ v^q(0) = 0 & \text{dans} \quad \Omega \end{cases} \tag{4.43}$$

On reconnaît dans l'expression (4.42) une formule de transposition discrète comparable à (4.37). Le passage à la limite, fondé sur des arguments classiques de densité, montre que la limite p de p^q est solution, au sens de la transposition, du problème continu (4.34).

En somme, le problème approché (4.39) permet de définir, par transposition, une solution approchée $p^q \in L^2\big(0,T;L^2(\Omega)\big)$ de (4.34). En définitive, si on note $\{\lambda_r, y_r\}_{r=1}^{\infty} \in \mathbb{R}^+\times H^1(\Omega)$ la famille de solutions du problème aux valeurs propres de l'opérateur Laplacien avec conditions limites mixtes

$$\begin{cases} -\Delta y = \lambda y & \text{dans} \quad \Omega \\ \nabla y.\vec{n} + \alpha y = 0 & \text{sur} \quad \partial\Omega \end{cases} \tag{4.44}$$

nous obtenons une approximation p^q de p comme combinaison linéaire des q premiers modes propres

$$p^q = \sum_{s=1}^{q} p_s(t) y_s(x) \sim p$$

de p, les coefficients p_s étant solutions de

$$\begin{cases} -\displaystyle\sum_{s=1}^{q} \frac{dp_s}{dt} \int_\Omega y_s y_r \, dx + \sum_{s=1}^{q} p_s \lambda_r \int_\Omega y_s y_r \, dx = \phi(t) y_r(x_0) \quad \forall y_r \in V_q \\ p_s(T) = 0 \end{cases} \tag{4.45}$$

ce qui revient à résoudre le problème parabolique avec la méthode de décomposition modale classique. Compte tenu de l'orthogonalité des fonctions y_r par rapport au produit scalaire dans $L^2(\Omega)$, (4.45) se réduit au système diagonal d'équations différentielles ordinaires

$$\begin{cases} -\dfrac{dp_r}{dt} + p_r\lambda_r = \phi(t) y_r(x_0) \quad \forall y_r \in span\{y_r\}_{r=1}^{q} \\ p_r(T) = 0 \end{cases} \tag{4.46}$$

Ce calcul, qui revient à résoudre un problème parabolique avec q degrés de liberté, est très rapide à exécuter.

Si $\mathcal{V} = H^1\big(0,T;L^2(\Omega)\big)$, la même démarche permet de définir une approximation p^q de p dans $H^{-1}\big(0,T;L^2(\Omega)\big)$ (voir remarque page 73). Pour simplifier, nous avons considéré ici un seul capteur en $x = x_0$. On obtient une solution de (4.11) en remplaçant le terme source par une somme. L'image approchée P^q de p^q par I^{-1} est donnée par :

- $P^q = p^q$ si $\mathcal{V} = L^2\big(0,T;L^2(\Omega)\big)$
- P^q est solution de (4.21) avec p^q au second membre si $\mathcal{V} = H^1\big(0,T;L^2(\Omega)\big)$

Cette manière de procéder nous permet donc de définir une approximation calculable de ∇J.

4.2 Reconstruction d'un flux

Après la présentation de la méthode de reconstruction d'une source volumique f, nous nous intéressons à présent à la reconstruction d'un flux inconnu Φ. Pour la reconstruction d'une source volumique, l'état adjoint est défini par la technique de transposition connue dans la littérature (Lions, 1968). Nous proposons pour la reconstruction d'une source surfacique une version adaptée de cette méthode.

4.2.1 Formulation primale

Considérons l'équation de la chaleur avec température initiale nulle ($\theta^0 = 0$) et sans source de chaleur interne ($f = 0$) :

$$\left\{\begin{array}{ll} \dfrac{\partial\theta}{\partial t} - div(\kappa\, grad\,\theta) = 0 & \text{dans} \quad \Omega\times[0,T] \\ (\kappa\, grad\,\theta)\cdot\vec{n} + \alpha\theta = \Phi & \text{sur} \quad \partial\Omega\times[0,T] \\ \theta(x,0) = 0 & \text{dans} \quad \Omega \end{array}\right. \tag{4.47}$$

Les m capteurs répartis dans la structure aux points x_k fournissent au cours de l'intervalle de temps $[0,T]$ les mesures ponctuelles $\{\theta_k^d(t)\}_{k=1}^m$.

D'après Lions & Magenes (1968), (théorème 5.3 p34 (vol 2)), si $\Phi \in L^2(0,T;H^{\frac{1}{2}}(\Omega))\bigcap H^{\frac{1}{4}}(0,T;L^2(\Omega))$, alors $\theta \in L^2(0,T;H^2(\Omega))\bigcap H^1(0,T;L^2(\Omega)))$. En particulier, si $\Phi \in H^1(\partial\Omega\times[0,T])$, θ est alors de régularité suffisante pour que sa valeur en un point soit définie.

Supposons donc que le flux Φ appartienne à l'espace $\mathcal{V} = H^1(\partial\Omega\times[0,T])$. Ce choix n'est certes pas optimal, mais il permettra d'écrire par la suite des normes facilement implantables. On peut définir les observations $\{\theta(x_k,t)\}_{k=1}^m \in L^2(0,T)^m = \mathcal{M}$ qui dépendent de manière continue de Φ. Soit C l'opérateur d'observation tel que $C\theta(x,t) = \{\theta(x_k,t)\}_{k=1}^m$.

L'équation d'état (4.47) et l'opérateur d'observation C permettent de définir à son tour l'opérateur $\tau : \mathcal{V} \to \mathcal{M}$ tel que

$$\begin{array}{rcl} \tau\Phi & = & C\theta(x,t;\Phi) \\ & = & \{\theta(x_k,t;\Phi)\}_{k=1}^m \end{array} \tag{4.48}$$

La reconstruction du flux consiste à trouver $\Phi \in \mathcal{V} = H^1(\partial\Omega\times[0,T])$ tel que

$$\tau\Phi = \{\theta_k^d(t)\}_{k=1}^m \tag{4.49}$$

qui est un problème mal posé.

Pour en déterminer une solution approchée, nous définissons la fonctionnelle régularisée

$$\boxed{J_{\partial\Omega}(\Phi) = \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{m}\int_0^T \Big(\theta(x_k,t;\Phi) - \theta_k^d(t)\Big)^2\, dt + \frac{\epsilon}{2}\|\Phi\|^2_{H^1(\partial\Omega\times[0,T])}} \tag{4.50}$$

et nous considérons le problème de minimisation suivant :

$$\left\{\begin{array}{l} \text{Trouver } \Phi \in \mathcal{V} = H^1(\partial\Omega\times[0,T]) \text{ tel que} \\ J_{\partial\Omega}(\Phi) = \min\limits_{\tilde{\Phi}\in\mathcal{V}} J_{\partial\Omega}(\tilde{\Phi}) \end{array}\right. \tag{4.51}$$

Remarquons que nous n'avons pas écrit explicitement quel est le produit scalaire dans $H^1\big(0,T;H^1(\partial\Omega)\big)$. On gardera la notation abstraite $\big(\cdot,\cdot\big)_{\mathcal{V}}$ (avec la norme associée $\|\cdot\|_{\mathcal{V}}$) jusqu'à la partie 4.2.3 où nous serons amenés, à des fins calculatoires, à définir une nouvelle norme dans cet espace qui facilitera le calcul de l'état adjoint.

Par définition, le gradient de la fonctionnelle est donné par

$$J_{\partial\Omega}(\Phi+\delta\Phi)-J_{\partial\Omega}(\Phi)=(\nabla J_{\partial\Omega},\delta\Phi)_{\mathcal{V}}+\mathcal{O}\|\delta\Phi\|_{\mathcal{V}}^2\quad\forall\delta\Phi\in\mathcal{V} \tag{4.52}$$

Un simple calcul montre que

$$\begin{aligned} D(\delta\Phi) &= J_{\partial\Omega}(\Phi+\delta\Phi)-J_{\partial\Omega}(\Phi)\\ &= \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{m}\int_0^T\big[\theta(x_k,t)-\theta_k^d(t)\big]\delta\theta(x_k,t)\,dt+\epsilon\Big(\Phi,\delta\Phi\Big)_{\mathcal{V}}+\mathcal{O}\|\delta\Phi\|^2 \end{aligned} \tag{4.53}$$

où $\delta\theta$ est solution de (4.47) avec $\delta\Phi$ au second membre. A ce niveau là, on introduit p défini comme l'unique solution du problème :

$$\left\{\begin{array}{lll} -\dfrac{\partial p}{\partial t}-div(\kappa\,grad\,p)=\displaystyle\sum_{k=1}^{m}\Big(\theta(x_k,t)-\theta_k^d(t)\Big)\,\delta_{x_k} & \text{dans} & \Omega\times[0,T]\\ (\kappa grad\,p)\cdot\vec{n}+\alpha p=0 & \text{sur} & \partial\Omega\times[0,T]\\ p(x,T)=0 & \text{dans} & [0,T] \end{array}\right. \tag{4.54}$$

Le terme source de cette équation est une somme de masses de Dirac. p ne peut par conséquent être défini que via une méthode de transposition. Contrairement au cas de la reconstruction d'une source volumique f, la transposition ici doit permettre de définir la trace de l'état adjoint sur la frontière, ce qui modifie la procédure. Nous y reviendrons dans la partie (4.2.3).

Pour l'instant, contentons-nous de dire que la méthode qui sera présentée permet de déterminer l'image $P\in\mathcal{V}$ de $p|_{\partial\Omega}$ par l'isomorphisme de Riesz I^{-1} de $\mathcal{V}'$ dans $\mathcal{V}$. Par définition, P vérifiera

$$\langle p|_{\partial\Omega},w\rangle_{\mathcal{V}',\mathcal{V}}=\big(P,w\big)_{\mathcal{V}}\quad\forall w\in\mathcal{V}.$$

On note $\delta\theta$ la solution de (4.47) En multipliant formellement (4.54) par une fonction test w et en intégrant on obtient une formulation faible qui s'écrit :

$$\left\{\begin{array}{l} -\displaystyle\int_\Omega\frac{\partial p}{\partial t}w\,dx+\int_\Omega(\kappa grad\,p)(grad\,w)\,dx+\int_{\partial\Omega}\alpha pw\,d\gamma=\\ \qquad\displaystyle\sum_{k=1}^{m}\Big(\theta(x_k,t)-\theta_k^d(t)\Big)\,w(x_k)\qquad\forall w\\ \\ p(x,T)=0 \end{array}\right. \tag{4.55}$$

De même, en multipliant (4.47) par une fonction test $w\in H^1(\Omega)$ et en intégrant sur Ω, on obtient une formulation faible en espace qui s'écrit

$$\left\{\begin{array}{l} \displaystyle\int_\Omega\frac{\partial\,\delta\theta}{\partial t}w\,dx+\int_\Omega(\kappa grad\,\delta\theta)(grad\,w)\,dx+\int_{\partial\Omega}\alpha\,\delta\theta w\,d\gamma=\\ \qquad\displaystyle\int_{\partial\Omega}\delta\Phi w\,d\gamma,\qquad\forall w\\ \theta(x,0)=0 \end{array}\right. \tag{4.56}$$

A partir de (4.55) et (4.56), et après intégration par parties en temps, on obtient

$$\frac{1}{2}\sum_{k=1}^{m}\int_0^T \big[\theta(x_k,t)-\theta_k^d(t)\big]\delta\theta(x_k,t)\,dt = \int_{\partial\Omega\times[0,T]} p\delta\Phi\,d\gamma\,dt \tag{4.57}$$

qui est bien une forme linéaire sur $\mathcal{V}$ (le terme intégral dans le second membre de cette expression est à prendre au sens du produit de dualité). En identifiant avec (4.52) on déduit que

$$\begin{array}{rcll} \nabla J &=& I^{-1}p|_{\partial\Omega}+\epsilon\Phi & \\ &=& P+\epsilon\Phi & \in\mathcal{V} \end{array} \tag{4.58}$$

Remarque :

Les expressions (4.53) à (4.57) et les calculs présentés ont juste un caractère formel. Ils sont donnés pour faciliter la compréhension de la démarche. Il faudra attendre la définition précise de l'état adjoint dans la partie 4.2.3 pour que le gradient ait un sens bien défini.

La condition d'optimalité pour le problème (4.51) s'écrit

$$\nabla J=0 \quad\Leftrightarrow\quad I^{-1}p|_{\partial\Omega}+\epsilon\Phi=0\text{dans}\quad\mathcal{V} \tag{4.59}$$

Des méthodes de descente de type gradient ou gradient conjugué peuvent être mises en œuvre pour la minimisation de J.

Remarque :

L'équation adjointe et la restriction sur Σ de l'état adjoint définissent l'opérateur τ^* : $M'\to\mathcal{V}'$ tel que

$$\tau^*\Big\{\big(\theta(x_k,t)-\theta_k^d(t)\big)\Big\}_{k=1}^m = p|_\Sigma \tag{4.60}$$

qui est lié à τ par la relation de dualité

$$\begin{array}{c} \big\langle\tau\varphi,\{\vartheta_k\}_{k=1}^m\big\rangle_{\mathcal{M},\mathcal{M}'}=\big\langle\varphi,\tau^*\{\vartheta_k\}_{k=1}^m\big\rangle_{\mathcal{V},\mathcal{V}'} \\ \forall\,\{\vartheta_k\}_{k=1}^m\in\mathcal{M}',\quad\forall\varphi\in\mathcal{V} \end{array} \tag{4.61}$$

Remarque :

En posant $p=\bar p+\tilde p$ avec $\bar p$ tel que

$$\left\{\begin{array}{lll} -\dfrac{\partial\bar p}{\partial t}-div(\kappa grad\,\bar p)=\displaystyle\sum_{k=1}^m\theta(x_k,t)\,\delta_{x_k} & \text{dans} & \Omega\times[0,T] \\ (\kappa grad\,\bar p)\cdot\vec n+\alpha\bar p=0 & \text{sur} & \partial\Omega\times[0,T] \\ \bar p(x,T)=0 & \text{dans} & [0,T] \end{array}\right. \tag{4.62}$$

et $\tilde p$ tel que

$$\left\{\begin{array}{lll} -\rho c\dfrac{\partial\tilde p}{\partial t}-div(\kappa grad\,\tilde p)=\displaystyle\sum_{k=1}^m\theta_k^d(t)\,\delta_{x_k} & \text{dans} & \Omega\times[0,T] \\ (\kappa grad\,\tilde p)\cdot\vec n+\alpha\tilde p=0 & \text{sur} & \partial\Omega\times[0,T] \\ \tilde p(x,T)=0 & \text{dans} & [0,T] \end{array}\right. \tag{4.63}$$

on voit que (4.59) s'écrit

$$I^{-1}\bar{p}|_{\partial\Omega} + \epsilon\Phi = I^{-1}\tilde{p}|_{\partial\Omega}.$$

Cette expression est à rapprocher de l'expression abstraite (2.47) (l'équation normale du problème régularisé). On rappelle que Λ est l'isomorphisme de $\mathcal{M}$ vers $\mathcal{M}'$ tel que, pour tout

$$\forall g \in \mathcal{M} \quad \langle \Lambda g, h\rangle_{\mathcal{M}',\mathcal{M}} = (g,h)_{\mathcal{M}} \quad h \in \mathcal{M}.$$

Ici, $\mathcal{M} = L^2(0,T)^m$: Λ se réduit par conséquent à l'identité.

4.2.2 Formulation duale

Nous introduisons l'opérateur $\mathcal{D} : \mathcal{M}' \to \mathcal{M}'$ tel que (on note $X \equiv \{X_k(t)\}_{k=1}^m$)

$$\begin{array}{rcl} \mathcal{D}X & = & C\theta\big(P(X)\big) \\ & = & \theta(x_k, t; P(X)) \end{array} \tag{4.64}$$

où $P(X) = I^{-1}p(X)$ avec $p(X)$ solution de

$$\left\{ \begin{array}{ll} -\dfrac{\partial p}{\partial t} - div(\kappa grad\, p) = \displaystyle\sum_{k=1}^{m} \Big(\theta(x_k,t) - \theta_k^d(t)\Big)\,\delta_{x_k} & \text{dans} \quad \Omega\times[0,T] \\ (\kappa grad\, p)\cdot\vec{n} + \alpha p = 0 & \text{sur} \quad \partial\Omega\times[0,T] \\ p(x,T) = 0 & \text{dans} \quad [0,T] \end{array} \right. \tag{4.65}$$

et $\theta(P)$ solution de

$$\left\{ \begin{array}{ll} \dfrac{\partial \theta}{\partial t} - div(\kappa\, grad\,\theta) = 0 & \text{dans} \quad \Omega\times[0,T] \\ (\kappa\, grad\,\theta)\cdot\vec{n} + \alpha\theta = P & \text{sur} \quad \partial\Omega\times[0,T] \\ \theta(x,0) = 0 & \text{dans} \quad \Omega \end{array} \right. \tag{4.66}$$

Le problème dual régularisé (cf. (2.53)) est alors le suivant :

$$\text{Trouver } X = \{X_k\}_{k=1}^m \in \mathcal{M}' \text{ tel que } \mathcal{D}X + \epsilon X = \Lambda\{\theta_k^d\}_{k=1}^m \tag{4.67}$$

Si on pose $\Phi = I^{-1}\tau^* X$, Φ est solution du problème primal (4.51). Le problème (4.67) peut s'écrire sous forme variationnelle : on cherche $X \in \mathcal{M}' = L^2(0,T)^m$ tel que

$$\boxed{a(X,\psi) = L\,(\psi) \quad \forall \psi \in \mathcal{M}'} \tag{4.68}$$

expression dans laquelle $L\,(\psi)$ est une forme linéaire $L^2(0,T)^m \to \mathbb{R}$

$$\begin{array}{rcl} L\,(\psi) & = & \Big(\Lambda\{\theta_k^d\}, \psi\Big)_{\mathcal{M}'} \\ & = & \displaystyle\sum_{k=1}^{m} \int_0^T \theta_k^d(t)\psi_k(t)\,dt \quad \forall \psi \in L^2(0,T)^m \end{array} \tag{4.69}$$

et $a(X,\psi)$ est une forme bilinéaire $L^2(0,T)^m \times L^2(0,T)^m \to \mathbb{R}$ qui s'écrit

$$\begin{array}{rcl} a(X,\psi) & = & \Big(I^{-1}\tau^* X, I^{-1}\tau^*\psi\Big)_{\mathcal{V}} + \epsilon\Big(X,\psi\Big)_{\mathcal{M}'} \\ & = & \Big(P(X), P(\psi)\Big)_{\mathcal{V}} + \epsilon\displaystyle\sum_{k=1}^{m}\int_0^T X_k(t)\psi_k(t)\,dt \end{array} \tag{4.70}$$

On garde pour l'instant la notation abstraite $\Big(\cdot,\cdot\Big)_{\mathcal{V}}$ pour le premier terme parce que le choix de la norme sera précisé plus loin (cf. 4.2.3), en même temps que le développement de la méthode de calcul de P. Le problème dual mis sous cette forme pourra être résolu par une méthode de type Galerkin (cf. partie 5.2).

Le problème dual (4.68) est équivalent au problème de minimisation

$$I_{\partial\Omega}\left(X\right) = \min_{\tilde{X}\in L^2(0,T)^m} I_{\partial\Omega}\left(\tilde{X}\right) \tag{4.71}$$

avec

$$I_{\partial\Omega}\big(X\big) \;=\; \frac{1}{2}a\left(X,X\right) - L\left(X\right) \tag{4.72}$$

qui s'écrit de manière plus explicite

$$I_{\partial\Omega}\big(X\big) \;=\; \frac{1}{2}\Big[\|P(X)\|^2_{\mathcal{V}} + \epsilon\sum_{k=1}^{m}\int_0^T X_k(t)^2\,dt\Big] - \sum_{k=1}^{m}\int_0^T X_k(t)\theta_k^d(t)\,dt \tag{4.73}$$

ou bien

$$\boxed{\begin{array}{rcl} I_{\partial\Omega}\big(X\big) & = & \dfrac{1}{2}\Big[\displaystyle\sum_{k=1}^{m}\int_0^T \theta(x_k,t;P)X_k(t)\,dt + \epsilon\sum_{k=1}^{m}\int_0^T X_k(t)^2\,dt\Big] \\ & & \quad - \displaystyle\sum_{k=1}^{m}\int_0^T X_k(t)\theta_k^d(t)\,dt \end{array}} \tag{4.74}$$

avec $P = I^{-1}p|_{\partial\Omega}$, p étant solution de (4.54).

Remarque : Grâce à la dernière expression dans (4.74), on voit que la fonctionnelle à minimiser peut être vue comme une somme de fonctionnelles :

$$I_{\partial\Omega}\big(X\big) = \sum_{k=1}^{m} I_{\partial\Omega,k}\big(X_k\big) \tag{4.75}$$

avec

$$I_{\partial\Omega,k}\big(X_k\big) \;=\; \frac{1}{2}a_k\left(X_k,X_k\right) - L_k(X_k) \tag{4.76}$$

où

$$\begin{array}{rcl} a_k(X_k,\psi_k) & = & \displaystyle\int_0^T \theta(x_k,t;P)X_k(t)\,dt + \epsilon\int_0^T X_k(t)\psi_k(t)\,dt \\ & & \forall X_k,\psi_k \in L^2(0,T)^m \end{array} \tag{4.77}$$

et

$$\begin{array}{rcl} L_k\left(\psi_k\right) & = & \displaystyle\int_0^T \theta_k^d(t)\psi_k(t)\,dt \\ & & \forall X_k,\psi_k \in L^2(0,T)^m \end{array} \tag{4.78}$$

($P = I^{-1}p$, $p(X_k)$ et $p(\psi_k)$ étant solutions de (4.65) sans la sommation au second membre). Cette façon d'écrire la fonctionnelle ouvre peut-être une piste vers le développement d'un algorithme parallélisé.

4.2.3 Méthode de transposition pour la définition de l'état adjoint

Dans le paragraphe 4.1.3 nous avons présenté une méthode de calcul de l'état adjoint p dans l'espace $L^2\big(0,T;L^2(\Omega)\big)$ ou $H^{-1}\big(0,T;L^2(\Omega)\big)$. Or, pour la reconstruction d'une source surfacique Φ, le gradient de la fonctionnelle est construit à partir de la trace de p sur $\partial\Omega$. La régularité $L^2(\Omega)$ de p ne suffit pas à définir cette trace.

Dans ce qui suit, nous détaillons une approche légèrement différente qui permet de calculer la trace $p|_{\partial\Omega}$ de p, ou, pour être plus précis, l'image P de cette trace par l'isomorphisme I^{-1}.

Supposons la présence d'un seul capteur ($m=1$) situé en $x=x_0$, et fixons $\kappa=1$. Ceci permet de simplifier un peu les notations, et ne constitue bien sûr en aucun cas une limitation à ce qui va être présenté. Nous cherchons à calculer la solution du problème

$$\left\{\begin{array}{ll} -\dfrac{\partial p}{\partial t} - div\, grad\, p = \phi(t)\delta_{x_0} & \text{dans} \quad \Omega\times[0,T] \\ grad\, p\cdot\vec{n} + \alpha p = 0 & \text{sur} \quad \partial\Omega\times[0,T] \\ p(T)=0 & \text{dans} \quad \Omega \end{array}\right. \tag{4.79}$$

grâce à une méthode qui permette d'en définir de manière unique la trace sur $\partial\Omega$. L'équation (4.79) peut être écrite sous la formulation très faible

$$\left\{\begin{array}{l} \displaystyle\int_{\Omega\times[0,T]} p\frac{\partial v}{\partial t}\,dx\,dt + \int_\Omega p(x,0)v(x,0)\,dx - \int_{\Omega\times[0,T]} p\, div\, grad\, v\,dx\,dt + \\ \displaystyle\int_{\partial\Omega\times[0,T]} \big(p\nabla v\cdot\vec{n} + \alpha p v\big)\,d\gamma\,dt = \int_0^T \phi(t)v(x_0)\,dt \\ \qquad \forall v \text{ suffisamment régulier} \end{array}\right. \tag{4.80}$$

A ce stade nous ne précisons pas encore la régularité des fonctions test v. Si celles-ci sont choisies comme solution du problème parabolique

$$\left\{\begin{array}{ll} \dfrac{\partial v}{\partial t} - div\, grad\, v = f & \text{dans} \quad \Omega\times[0,T] \\ grad\, v\cdot\vec{n} + \alpha v = g & \text{sur} \quad \partial\Omega\times[0,T] \\ v(0)=0 & \end{array}\right. \tag{4.81}$$

et en injectant dans (4.80), on voit qu'on peut écrire :

$$\int_{\Omega\times[0,T]} pf\,dx\,dt + \int_{\partial\Omega\times[0,T]} pg\,d\gamma\,dt = \int_0^T \phi(t)v(x_0,t)\,dt \tag{4.82}$$

L'idée ici est d'utiliser comme fonctions test dans (4.80) les fonctions v ainsi calculées. Pour que le second membre dans (4.80) ait un sens, il faut garantir une régularité de v suffisante pour que $v(x_0,t)$ soit défini. Selon Brézis (1999), il faut que v_r appartienne à l'espace $L^2(0,T;H^2(\Omega))\bigcap H^1(0,T;L^2(\Omega))$ ou tout autre espace de régularité supérieure. D'après Lions & Magenes (1968) (théorème 5.3 p34 (vol 2)), il suffit donc que $g\in L^2(0,T;H^{\frac{1}{2}}(\Omega))\bigcap H^{\frac{1}{4}}(0,T;L^2(\Omega))$.

En particulier, il suffit que $g\in H^1(\partial\Omega\times[0,T])$. Ce choix n'est pas optimal, mais il permet une implantation aisée. Dans ce cas, l'expression (4.82) est une formule de transposition pour p. Elle permet de définir de manière unique

$$p\in L^2(\Omega\times[0,T])$$

et

$$p|_{\partial\Omega\times[0,T]} \in \big(H^1(\partial\Omega\times[0,T])\big)'$$

(les intégrations dans (4.82) doivent être comprises au sens du produit de dualité). Tout ceci reste valable lorsque $f = 0$, la méthode étant alors spécifiquement dédiée à la définition de la trace de p uniquement.

En pratique, nous n'avons pas accès à $p|_{\partial\Omega\times[0,T]} \in \big(H^1(\partial\Omega\times[0,T])\big)'$ mais à son image P dans $H^1(\partial\Omega\times[0,T])$. Intéressons-nous à présent au calcul pratique de cette image en procédant par étapes. Tout d'abord, on introduit une norme équivalente dans $H^1(\partial\Omega\times[0,T])$ à l'aide d'un opérateur sur la frontière. Par projection sur une famille de modes propres de cet opérateur, on montre ensuite que le calcul de l'état adjoint consiste à résoudre une série de problèmes annexes facilement implantables.

Si $f = 0$, et si on note I l'isomorphisme de Riesz tel que

$$\langle Iu, v\rangle_{\left(H^1\right)',H^1} = \big(u, v\big)_{H^1},$$

on voit que (4.82) est équivalent à

$$\big(I^{-1}p, g\big)_{H^1} = \int_0^T \phi(t)v(x_0,t)\,dt \tag{4.83}$$

(dans ces dernières expressions, on a noté $H^s \equiv H^s(\partial\Omega\times[0,T])$ pour raccourcir les écritures).

Soit l'opérateur de Poincaré-Steklov $\mathcal{S} : H^1(\partial\Omega) \to L^2(\partial\Omega)$ tel que $\mathcal{S}u = grad\,\tilde{u}.\vec{n}$, où $\tilde{u}$ est solution du problème

$$\left\{\begin{array}{ll} -div\,grad\,\tilde{u} = 0 & \text{dans} \quad \Omega \\ \tilde{u} = u & \text{sur} \quad \partial\Omega \end{array}\right. \tag{4.84}$$

Grâce à l'opérateur $\mathcal{S}$, nous pouvons définir une forme bilinéaire

$$b(v,w) = \int_{\partial\Omega\times[0,T]} \Big(vw + \frac{\partial v}{\partial t}\frac{\partial v}{\partial t} + \mathcal{S}v\mathcal{S}w\Big)\,d\gamma\,dt \qquad \forall v, w \in H^1(\partial\Omega\times[0,T]) \tag{4.85}$$

On peut montrer (Urquiza, 2000) que $b(v,w)$ est un produit scalaire définissant une norme équivalente à la norme usuelle dans $H^1(\partial\Omega\times[0,T])$. Alors, l'isomorphisme I^{-1} associé à ce produit scalaire est l'opérateur qui à une fonction $f \in \big(H^1(\partial\Omega\times[0,T])\big)'$ associe la solution $u \in H^1(\partial\Omega\times[0,T])$ de

$$\left\{\begin{array}{l} -\dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2} + \mathcal{S}^2 u = f \quad \text{ sur } \partial\Omega \\ \dfrac{\partial u}{\partial t}(0) = \dfrac{\partial u}{\partial t}(T) = 0 \end{array}\right.$$

En utilisant le produit scalaire $b(\cdot,\cdot)$ et en posant $P = I^{-1}p$, on est conduit à résoudre (cf. (4.83))

$$b(P,g) = \int_0^T \phi(t)v(x_0,t)\,dt \tag{4.86}$$

Voyons maintenant comment obtenir une approximation de P par (4.86). Notons $\{h_{r_1}(x)\}_{r_1=1}^{\infty} \in H^{1/2}(\partial\Omega)$ la base des modes propres de l'opérateur $\mathcal{S}$ normalisés dans $L^2(\partial\Omega)$. Soit λ_{r_1} la valeur propre associée à h_{r_1} et $\{f_{r_2}\}_{r_2=1}^{\infty}$ une base orthonormée de $H^1([0,T])$. On construit des fonctions g_{r_1,r_2} telles

que $g_{r_1,r_2}(x,t) = h_{r_1}(x) f_{r_2}(t)$. On obtient une approximation P^{q_1,q_2} de P par projection sur une base réduite formée des $q_1 \times q_2$ fonctions $\{g_{r_1,r_2}\}_{r_1=1,r_2=1}^{q_1,q_2}$:

$$P^{q_1,q_2} = \sum_{r_1=1}^{q_1} \sum_{r_2=1}^{q_2} P_{r_1,r_2} h_{r_1}(x) f_{r_2}(t) \sim P. \tag{4.87}$$

On notera $\mathcal{V}_h$ le sous-espace de dimension finie de $\mathcal{V}$ engendré par $\{g_{r_1,r_2}\}_{r_1=1,r_2=1}^{q_1,q_2}$. En remplaçant l'expression de P^{q_1,q_2} dans (4.86), on voit que pour déterminer les coefficients P_{r_1,r_2} on est amené à résoudre

$$\begin{aligned} \sum_{r_1=1}^{q_1} \sum_{r_2=1}^{q_2} P_{r_1,r_2} \int_{\partial\Omega\times[0,T]} \Big[h_{r_1} h_{s_1} f_{r_2} f_{s_2} + h_{r_1} h_{s_1} \frac{df_{r_2}}{dt} \frac{df_{s_2}}{dt} + \mathcal{S}h_{r_1} \mathcal{S}h_{s_1} f_{r_2} f_{s_2} \Big] \, d\gamma \, dt = \\ \int_0^T \phi(t) v_{s_1,s_2}(x_0,t) \, dt \quad \forall s_1 = 1...q_1, \, \forall s_2 = 1...q_2 \end{aligned} \tag{4.88}$$

où les fonctions v_{s_1,s_2} sont solutions de (4.81) avec $g = h_{s_1} f_{s_2}$ au second membre. (4.88) se simplifie, compte tenu de l'orthogonalité des fonctions h_{r_1}, de la manière suivante

$$\begin{aligned} \sum_{r_2=1}^{q_2} P_{r_1,r_2} \int_0^T \Big[\frac{df_{r_2}}{dt} \frac{df_{s_2}}{dt} + (1+\lambda_{r_1}^2) f_{r_2} f_{s_2} \Big] \, dt = \\ \int_0^T \phi(t) v_{r_1,s_2}(x_0,t) \, dt \qquad \forall r_1 = 1..q_1, \, \forall s_2 = 1..q_2 \end{aligned} \tag{4.89}$$

Cette expression peut se mettre sous forme matricielle : on construit q_1 matrices carrées de taille q_2 dont les coefficients sont donnés par les intégrales en temps

$$\int_0^T \Big[\frac{df_{r_2}}{dt} \frac{df_{s_2}}{dt} + (1+\lambda_{r_1}^2) f_{r_2} f_{s_2} \Big] \, dt.$$

Au final, la détermination de l'état adjoint consiste à inverser q_1 systèmes de taille q_2.

Remarque :

Le choix de $g_r \in H^1(\partial\Omega \times [0,T])$ est arbitraire. Il est possible aussi (et ce choix n'est pas optimal non plus) de choisir $g_r \in H_0^1(\partial\Omega \times [0,T])$. Outre le fait que cet espace est plus petit ($H_0^1(\partial\Omega \times [0,T]) \subset H^1(\partial\Omega \times [0,T])$) et que par conséquent la détermination du contrôle sera moins précise, ce choix implique les modifications suivantes sur les expressions :

– $\sqrt{b(v,v)}$ est une norme dès que

$$b(v,w) = \int_{\partial\Omega\times[0,T]} \big(\frac{\partial v}{\partial t} \frac{\partial v}{\partial t} + \mathcal{S}v \mathcal{S}w \big) \, d\gamma \, dt \qquad \forall v, w \in H^1(\partial\Omega \times [0,T])$$

– l'isomorphisme $\mathcal{B} = I^{-1}$ est l'opérateur de $H^{-1}(\partial\Omega \times [0,T])$ vers $H_0^1(\partial\Omega \times [0,T])$ qui à f associe $u = \mathcal{B}f$ tel que

$$\begin{cases} -\dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2} + \mathcal{S}^2 u = f & \text{sur } \partial\Omega \\ u(0) = u(T) = 0 \end{cases}$$

Les conditions aux limites en temps, sur le bord, sont dans ce cas des conditions de Dirichlet. On voit par là que le choix entre ces deux espaces n'est pas sans conséquences. En réalité, il en découle la même distinction rencontrée dans le cas unidimensionnel entre le choix d'un espace L^2 ou un espace H^1 en temps.

Les expressions (4.87) et (4.89) permettent d'obtenir de manière approchée l'image $P \in \mathcal{V}$ de l'état adjoint $p|_{\partial\Omega} \in \mathcal{V}'$ par l'isomorphisme I^{-1}. La donnée de P suffit à construire la matrice grammienne associée au problème dual. On peut s'en convaincre en se reportant à l'expression abstraite du problème dual (4.70).

En pratique, le calcul de la trace de l'état adjoint (ou plutôt de son image par I^{-1}) nécessite trois étapes d'approximation :

- construction des bases réduites $\{h_{r_1}(x)\}_{r_1=1}^{q_1}$ et $\{f_{r_2}(t)\}_{r_2=1}^{q_2}$ qui donnent les fonctions $g_{r_1,r_2}(x,t) = h_{r_1}(x) f_{r_2}(t)$
- calcul des fonctions v_{r_1,r_2} par (4.81)
- calcul d'une approximation de P^{q_1,q_2} par (4.87) et (4.89)

Nous avons introduit les fonctions h_{r_1} comme modes propres de l'opérateur de Poincaré-Steklov $\mathcal{S}$. Par définition, elles vérifient le problème aux valeurs propres suivant :

$$\left\{ \begin{array}{ll} -div\, grad\, h = 0 & \text{dans} \quad \Omega \\ grad\, h.\vec{n} = \lambda h & \text{sur} \quad \partial\Omega \end{array} \right. \tag{4.90}$$

Notons $\mathcal{H}_h$ le sous espace de $H^1(\Omega)$ engendré par les q_1 premières de ces fonctions, tel que

$$\mathcal{H}_h = \text{span}\{h_{r_1}\}_{r_1=1}^{q_1} \subset H^1(\Omega).$$

La famille de solutions $\{\lambda_{r_1}, h_{r_1}\}_{r_1=1}^{\infty}$ de (4.90) peut être déterminée par une méthode de Lanczos itérative. Le problème est bien posé dans $H^{1/2}(\partial\Omega)$. Cependant, si on se place dans un espace $H^1(\Omega)$ typiquement utilisé par un code standard d'éléments finis, la matrice de masse obtenue n'est pas définie positive, alors que de nombreux outils de type 'boîte noire' disponibles nécessitent cette condition (notamment pour les étapes de réorthogonalisation des méthodes Lanczos).

Pour contourner cette difficulté d'ordre pratique, il est possible aussi de déterminer les fonctions h_{r_1}, de manière approchée, comme modes de branche (Flament *et al.* , 1993; Bourquin, 2002) qui vérifient de manière générique

$$\left\{ \begin{array}{ll} -div\, grad\, z = \beta\lambda z & \text{dans} \quad \Omega \\ grad\, z \cdot \vec{n} + \alpha z = \lambda z & \text{dans} \quad \partial\Omega \end{array} \right. \tag{4.91}$$

Ce problème admet une famille de solutions $\{\lambda_\ell, z_\ell\}_{\ell=1}^{\infty}$. Si on choisit α et β très petits, les solutions z_ℓ de ce problème tendent vers les modes de Steklov donnés par (4.90). En revanche, ce deuxième problème est bien posé dans $H^1(\Omega)$ et donne lieu après discrétisation par éléments finis à une matrice de masse définie positive. (4.91) se met sous la forme faible

$$\int_\Omega grad\, z grad\, w\, dx + \int_{\partial\Omega} \alpha z w\, d\gamma = \lambda \Big[\beta \int_{\partial\Omega} z w\, dx + \int_{\partial\Omega} z w\, d\gamma \Big], \quad \forall w \in H^1(\Omega) \tag{4.92}$$

On obtient la base de $\mathcal{H}_h$ en ne gardant que la trace sur $\partial\Omega$ des fonctions z_ℓ :

$$\{h_{r_1}\}_{r_1=1}^{q_1} = \{z_\ell|_{\partial\Omega}\}_{\ell=1}^{q_1}.$$

La famille de fonctions $\{f_{r_2}(t)\}_{r_2=1}^{q_2}$ engendre un sous espace de $H^1([0,T])$ que nous noterons $\mathcal{F}_h$

$$\mathcal{F}_h = \text{span}\{f_{r_2}\}_{r_2=1}^{q_2} \subset H^1([0,T]).$$

Sa construction peut se faire de plusieurs manières. Dans ce qui suit, nous proposons deux choix : dans le premier, $\mathcal{F}_h$ est une base de fonctions propres de l'opérateur Laplacien. Le deuxième choix consiste à utiliser une base d'éléments finis.

Tout d'abord, la base $\{f_{r_2}\}_{r_2=1}^{q_2}$ peut être construite par troncature de la famille des modes de Fourier solutions du problème aux valeurs propres

$$\left\{ \begin{array}{l} -\dfrac{d^2f}{dt^2} = \lambda f \\ \dfrac{df(0)}{dt} = \dfrac{df(T)}{dt} = 0 \end{array} \right. \tag{4.93}$$

Les fonctions f_{r_2} vérifient des conditions aux limites de type Neumann homogène en $t = 0$ et $t = T$: ce sont des fonctions cosinus.

L'espace d'approximation $\mathcal{F}_h$ peut par ailleurs être construit par la méthode des éléments finis,$\{f_{r_2}\}_{r_2=1}^{q_2}$ étant des fonctions de forme d'éléments finis linéaires, paraboliques, ou autre, correspondant à un maillage du domaine $[0,T]$. Ce choix s'avère très intéressant pour la résolution des problèmes (4.81) si la propriété d'invariance temporelle est exploitée (voir ci-dessous).

Une fois construite une base $\{g_{r_1,r_2}\}_{r_1=1,r_2=2}^{q_1,q_2}$, l'étape suivante consiste à calculer les fonctions $v_{r_1,r_2},\ r_1 = 1..q_1,\ r_2 = 1..q_2$ en résolvant le problème (4.81). Ce problème est un problème parabolique de nature similaire à l'équation de la chaleur, et donc les mêmes routines de calcul peuvent être employées pour sa résolution numérique.

A ce stade, l'utilisation de fonctions f_{r_2} choisies comme fonctions de forme d'une base d'éléments finis P1-Lagrange présente un avantage considérable en termes de coût de calcul (nous nous limiterons ici au cas d'éléments finis linéaires, mais l'analyse reste valable dans les autres cas avec peu de modifications). Si $f_{r_2}(r_2\delta t) = 1$, alors la propriété suivante est vérifiée :

$$f_{r_2+1}(t+\delta t) = f_{r_2}(t), \quad t \in [(r_2-1)\delta t, (r_2+1)\delta t] \tag{4.94}$$

(cf. figure 4.1).

Grâce à la propriété d'invariance temporelle des problème paraboliques, les solutions approchées v_{r_1,r_2} de (4.81) vérifient à leur tour

$$v_{r_1,r_2+1}(x,t+h) = v_{r_1,r_2}(x,t) \tag{4.95}$$

Ainsi, il n'est nécessaire de résoudre le problème (4.81) que r_1 fois, pour $r_2 = 2$ (car $v_{r_1,1}(x,t)$ est nul par construction) : les autres vecteurs de la base sont obtenus par translation en temps.

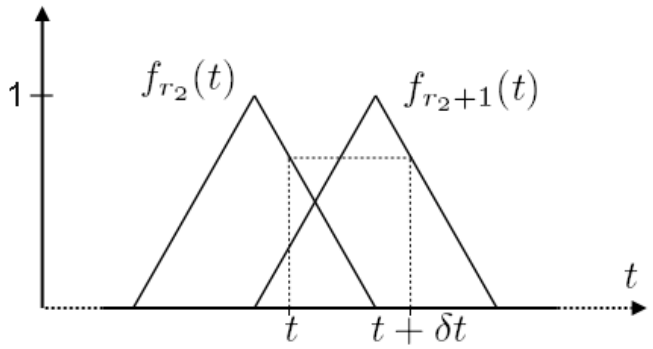


FIG. 4.1 – Propriété d'invariance temporelle des fonctions propres d'éléments finis linéaires

4.3 Reconstruction de la température initiale

4.3.1 Formulation primale

Une démarche similaire à celle qui vient d'être présentée est utilisée pour reconstruire une température initiale inconnue. La méthode fait appel à la valeur à l'instant $t = 0$ du champ adjoint défini par transposition de façon analogue au cas de la reconstruction d'un flux inconnu. Contrairement à ce cas, la norme usuelle dans l'espace de contrôle pourra être utilisée.

Considérons l'équation de la chaleur pour une structure à température initiale $\theta^0(x)$ soumise à aucune source interne ou externe de chaleur :

$$\left\{ \begin{array}{ll} \dfrac{\partial \theta}{\partial t} - div(\kappa\, grad\, \theta) = 0 & \text{dans} \quad \Omega \times [0,T] \\ (\kappa\, grad\, \theta) \cdot \vec{n} + \alpha\theta = 0 & \text{sur} \quad \partial\Omega \times [0,T] \\ \theta(x,0) = \theta^0(x) & \text{dans} \quad \Omega \end{array} \right. \tag{4.96}$$

Une formulation faible en espace de cette équation s'écrit

$$\left\{ \begin{array}{l} \displaystyle\int_\Omega \frac{\partial \theta}{\partial t} w\, dx + \int_\Omega (\kappa grad\, \theta)(grad\, w)\, dx + \int_{\partial\Omega} \alpha\theta w\, d\gamma = 0 \\ \\ \theta(x,0) = \theta^0(x) \qquad \forall w \in H^1(\Omega) \end{array} \right. \tag{4.97}$$

Si $\theta^0 \in \mathcal{V} = H^1(\Omega)$, le problème (4.96) admet une solution unique $\theta \in L^2(0,T;H^2(\Omega)) \bigcap H^1(0,T;L^2(\Omega))$.

Grâce à la régularité de θ, on peut définir les observations $\{\theta(x_k,t)\}_{k=1}^m \in L^2(0,T)^m = \mathcal{M}$ avec dépendance continue par rapport aux données, ainsi que l'opérateur d'observation C tel que $C\theta(x,t) = \{\theta(x_k,t)\}_{k=1}^m$. En posant $\tau : \mathcal{V} \to \mathcal{M}$ tel que

$$\begin{array}{rcl} \tau\theta^0 & = & C\theta(x,t;\theta^0) \\ & = & \{\theta(x_k,t;\theta^0)\}_{k=1}^m \end{array} \tag{4.98}$$

le problème (approché) de la reconstruction de θ^0 consiste à résoudre

$$\tau\theta^0 \sim \{\theta_k^d(t)\}_{k=1}^m \tag{4.99}$$

Pour ce faire, nous définissons la fonctionnelle régularisée

$$J_0(\theta^0) \quad = \quad \frac{1}{2}\sum_{k=1}^m \int_0^T \Big(\theta(x_k,t) - \theta_k^d(t)\Big)^2\, dt + \frac{\epsilon}{2}\|\theta^0\|^2_{H^1(\Omega)} \tag{4.100}$$

c'est-à-dire

$$\boxed{J_0(\theta^0) = \frac{1}{2}\sum_{k=1}^m \int_0^T \Big(\theta(x_k,t) - \theta_k^d(t)\Big)^2\, dt + \frac{\epsilon}{2}\left[\int_\Omega \big(\theta^0\big)^2\, dx + \int_\Omega \big(\nabla\theta^0\big)^2\, dx\right]} \tag{4.101}$$

et le problème de minimisation suivant :

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Trouver } \theta^0 \in \mathcal{V} = H^1(\Omega) \text{ tel que} \\ J_0(\theta^0) = \min\limits_{\tilde{\theta^0} \in \mathcal{V}} J_0(\tilde{\theta^0}) \end{array} \right. \tag{4.102}$$

L'état adjoint p solution de l'équation adjointe :

$$\begin{cases} -\dfrac{\partial p}{\partial t} - div(\kappa grad\, p) = \displaystyle\sum_{k=1}^{m} \Big(\theta(x_k,t) - \theta_k^d(t)\Big)\,\delta_{x_k} & \text{dans} \quad \Omega \times [0,T] \\ (\kappa grad\, p)\cdot \vec{n} + \alpha p = 0 & \text{sur} \quad \partial\Omega \times [0,T] \\ p(x,T) = 0 & \text{dans} \quad \Omega \end{cases} \tag{4.103}$$

permet d'écrire que

$$\nabla J_0 = I^{-1} p(x,0) + \epsilon\theta^0 \in H^1(\Omega) \tag{4.104}$$

où I^{-1} est l'isomorphisme de $\big(H^1(\Omega)\big)'$ vers $H^1(\Omega)$. Nous verrons plus loin comment obtenir numériquement l'image $P = I^{-1}p(x,0) \in \mathcal{V} = H^1(\Omega)$ de la solution de (4.103).

Remarque :

L'équation adjointe et la restriction sur Σ de l'état adjoint définissent l'opérateur τ^* : $M' \to \mathcal{V}'$ tel que

$$\tau^* \Big\{\theta(x_k,t) - \theta_k^d(t)\Big\}_{k=1}^{m} = p \tag{4.105}$$

La condition d'optimalité pour le problème (4.102) s'écrit

$$\nabla J_0 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad P + \epsilon\theta^0 = 0 \quad \text{dans} \quad \mathcal{V} = H^1(\Omega)$$

Notons ici que θ^0 étant une fonction uniquement de l'espace, le problème du temps final tel qu'il a été rencontré dans le cas de la reconstruction de sources ne se présente pas.

4.3.2 Formulation duale

Le problème dual consiste à trouver $X \in L^2(0,T)^m$ tel que

$$\begin{gathered} \int_\Omega P(X)P(\psi) + \nabla P(X)\nabla P(\psi)\,dx + \epsilon \sum_{k=1}^{m} \int_0^T X_k(t)\psi_k(t)\,dt = \sum_{k=1}^{m} \int_0^T \theta_k^d(t)\psi_k(t)\,dt \\ \forall \psi = \{\psi_k\}_{k=1}^m \in L^2(0,T)^m \end{gathered} \tag{4.106}$$

qui est bien de la forme

$$a(X,\psi) = L(\psi) \quad \forall \psi \in L^2(0,T)^m \tag{4.107}$$

où $P(\psi) = I^{-1}p(x,0;\psi)$, $p(\psi)$ étant solution de (4.103) où on remplace le second membre par $\{\psi_k(t)\}_{k=1}^m$. L'intégration dans (4.106) porte sur le domaine Ω, et il n'y a pas d'intégration en temps, contrairement aux cas de la reconstruction de sources volumiques ou surfaciques.

Le problème revient à résoudre le problème de minimisation

$$I_0(X) = \min_{\tilde{X} \in L^2(0,T)^m} I_0\left(\tilde{X}\right) \tag{4.108}$$

où $I_0(X)$ est telle que

$$\begin{aligned} I_0(X) &= \frac{1}{2}a(X,X) - L(X) \\ &= \frac{1}{2}\Big[\int_\Omega \Big(P(X)^2 + \nabla P(X)^2\Big)\,dx + \epsilon\sum_{k=1}^m \int_0^T x_k(t)^2\,dt\Big] \\ &\quad -\sum_{k=1}^m \int_0^T x_k(t)\theta_k^d(t)\,dt \\ &= \frac{1}{2}\Big[\sum_{k=1}^m \int_0^T \theta(x_k,t;P)x_k(t)\,dt + \epsilon\sum_{k=1}^m \int_0^T x_k(t)^2\,dt\Big] \\ &\quad -\sum_{k=1}^m \int_0^T x_k(t)\theta_k^d(t)\,dt \end{aligned} \tag{4.109}$$

Dans cette expression, $\theta(x,t;P)$ est solution de (4.96) avec la condition initiale $P = I^{-1}p(x,0;X)$. Le gradient de I_0, noté ∇I_0, est donné par

$$\nabla I_0 = \{\theta(x_k,t;P) + \epsilon X_k(t) - \theta_k^d(t)\}_{k=1}^m \tag{4.110}$$

4.3.3 Méthode de transposition pour la définition de l'état adjoint

Nous nous intéressons dans ce qui suit au calcul de l'état adjoint. Avec une démarche similaire à celle suivie dans le cas de la reconstruction d'un flux, nous développons une méthode de transposition adaptée au calcul de l'image $P \in \mathcal{V} = H^1(\Omega)$ de $p|_{t=0} \in \mathcal{V}'$ par l'isomorphisme I^{-1}. Nous gardons ici la norme usuelle de l'espace de contrôle $H^1(\Omega)$.

Nous cherchons à calculer l'état adjoint solution du problème ($\kappa = 1$ et $m = 1$ pour simplifier) :

$$\begin{cases} -\dfrac{\partial p}{\partial t} - div\,grad\,p = \phi(t)\delta_{x_0} & \text{dans} \quad \Omega\times[0,T] \\ grad\,p\cdot\vec{n} + \alpha p = 0 & \text{sur} \quad \partial\Omega\times[0,T] \\ p(T) = 0 & \text{dans} \quad \Omega \end{cases} \tag{4.111}$$

L'équation (4.111) peut être écrite sous la formulation très faible

$$\begin{cases} \displaystyle\int_{\Omega\times[0,T]} p\frac{\partial v}{\partial t}\,dx\,dt + \int_\Omega p(x,0)v(x,0)\,dx - \int_{\Omega\times[0,T]} p\,div\,grad\,v\,dx\,dt + \\ \displaystyle\int_{\partial\Omega\times[0,T]} \big(pgrad\,v\cdot\vec{n} + \alpha pv\big)\,d\gamma\,dt = \int_0^T \phi(t)v(x_0)\,dt \\ \qquad \forall v \text{ suffisament régulier} \end{cases} \tag{4.112}$$

Si on choisit comme fonctions test dans (4.112) des fonctions v solutions du problème parabolique

$$\begin{cases} \dfrac{\partial v}{\partial t} - div\,grad\,v = 0 \\ grad\,v\cdot\vec{n} + \alpha v = 0 \\ v(0) = y \end{cases} \tag{4.113}$$

où y est une fonction de $H^1(\Omega)$, on obtient :

$$\int_\Omega py\,dx = \int_0^T \phi(t)v(x_0,t)\,dt \tag{4.114}$$

D'après Lions & Magenes (1968) (théorème 5.3 p34 (vol 2)), $v \in L^2(0,T;H^2(\Omega))$ et $v(x_0,\cdot)$ est bien défini da,s $L^2(0,T)$. L'expression (4.114) est alors une formule de transposition pour p (les intégrations y doivent être comprises au sens du produit de dualité). Elle permet de définir de manière unique

$$p(x,0) \in \big(H^1(\Omega)\big)'.$$

En notant I l'isomorphisme de Riesz tel que

$$\langle Iu, v\rangle_{\left(H^1\right)',H^1} = \big(u,v\big)_{H^1},$$

on peut écrire

$$\big(I^{-1}p, y\big)_{H^1(\Omega)} = \int_0^T \phi(t)v(x_0,t)\,dt \tag{4.115}$$

Si l'espace $H^1(\Omega)$ est muni de la norme

$$\Big(u,v\Big)_{H^1(\Omega)} = \int_\Omega uv\,dx + \int_\Omega \nabla u\nabla v\,dx$$

et si on pose $P = I^{-1}p$, on est conduit à résoudre

$$\int_\Omega Py\,dx + \int_\Omega \nabla P\nabla y\,dx = \int_0^T \phi(t)v(x_0,t)\,dt \tag{4.116}$$

En pratique, on obtient une approximation P^q de P dans un espace de dimension finie engendré par une base de fonctions $\{y_r\}_{r=1}^q$. On choisit les fonctions y_r parmi la famille $\{\lambda_r, y_r(x)\}_{r=1}^\infty$ de solutions du problème aux valeurs propres de l'opérateur Laplacien sur Ω avec conditions aux limites de Neumann. On peut ensuite projeter P sur la base réduite formée par les q fonctions $\{y_r\}_{r=1}^q$ de sorte que

$$P^q = \sum_{r=1}^q P_r y_r(x). \tag{4.117}$$

En remplaçant dans (4.116), le calcul des coefficients P_r conduit à résoudre

$$\sum_{r=1}^q P_r\Big[\int_\Omega y_s y_r\,dx + \int_\Omega \nabla y_s\nabla y_r\,dx\Big] = \int_0^T \phi(t)v_s(x_0,t)\,dt \quad \forall s = 1...q \tag{4.118}$$

v_s vérifiant (4.113) avec y_s au second membre. La dernière expression se réduit, compte tenu de l'orthogonalité des fonctions y_r pour le produit scalaire dans $H^1(\Omega)$, aux q calculs

$$P_r\Big(1+\lambda_r\Big) = \int_0^T \phi(t)v_r(x_0,t)\,dt \quad \forall r = 1...q \tag{4.119}$$

Une fois les intégrales en temps calculées, la détermination de P^q est immédiate. Noter aussi que $v_r = e^{-\lambda_r t}y_r$ donc on économise le calcul de v_r par éléments finis.

4.4 Relaxation des observations : observations non ponctuelles

Jusqu'ici nous avons construit la fonctionnelle de coût en considérant des observations ponctuelles dans le domaine. Pour cela, nous avons dû choisir des espaces de contrôle de régularité suffisante pour avoir $\theta \in L^2\left([0,T];H^2(\Omega)\right)$. Ce choix a par conséquent nécessité l'utilisation de techniques de transposition spécifiques pour définir l'état adjoint.

Une autre manière d'aborder le problème de la reconstruction consiste à relaxer la notion d'observations ponctuelles en faisant l'hypothèse que les mesures disponibles sont en réalité le résultat de la moyenne des températures dans un petit domaine entourant chaque capteur. Chacun de ces domaines sera noté $\omega_k = \{x \in \Omega, |x - x_k| < r\}, \quad \forall k$, avec r son rayon. L'observation fait intervenir la moyenne du champ θ sur ces petits domaines, ce qui permet de s'affranchir de la contrainte d'un champ régulier défini en tout point.

Outre son intérêt numérique, cette relaxation de la notion d'observation n'est pas dépourvue de sens physique. En pratique, toute mesure est intrusive, et il ne serait pas faux de penser que l'inclusion que représente un capteur plongé dans le matériau a un effet de distorsion locale du champ de température. La mesure réelle résulterait donc d'une moyenne des températures dans la zone autour du capteur.

Nous allons présenter les bases de la méthode de reconstruction avec ce type d'observation dans le cas de la reconstruction d'une source surfacique Φ. L'opérateur d'observation C est défini par

$$\begin{aligned} C: \quad & V \to \mathcal{M} \\ & C\theta(x,t) = \{\frac{1}{|\omega_k|}\int_{\omega_k} \theta(x,t)\,dx\}_{k=1}^m \end{aligned} \tag{4.120}$$

Notations : Nous noterons désormais $\theta_k(t) \equiv \dfrac{1}{|\omega_k|}\displaystyle\int_{\omega_k} \theta(x,t)\,dx$, $\forall k$. La fonction caractéristique d'un domaine ω_k sera notée χ_{ω_k}.

L'objectif de la reconstruction est de déterminer un contrôle $\Phi \in \mathcal{V} = L^2\big(0,T;L^2(\partial\Omega)\big)$ tel que

$$C\theta(x,t;\Phi) \sim \{\theta_k^d(x,t)\}_{k=1}^m. \tag{4.121}$$

Nous définissons pour cela la fonctionnelle de coût régularisée J telle que :

$$\begin{aligned} J(\Phi) &= \frac{1}{2}\sum_{k=1}^m \int_0^T \Big[\theta_k(t) - \theta_k^d(t)\Big]^2 dt + \frac{\epsilon}{2}\|\Phi\|_{\mathcal{V}}^2 \\ &= \frac{1}{2}\sum_{k=1}^m \int_0^T \Big[\theta_k(t) - \theta_k^d(t)\Big]^2 dt + \frac{\epsilon}{2}\int_{\partial\Omega\times[0,T]} \Phi^2\,d\gamma dt \end{aligned} \tag{4.122}$$

où θ est solution de l'équation de la chaleur

$$\begin{cases} \dfrac{\partial\theta}{\partial t} - div(\kappa\, grad\,\theta) = 0 & \text{dans} \quad \Omega\times[0,T] \\ (\kappa\, grad\,\theta)\cdot\vec{n} + \alpha\theta = \Phi & \text{sur} \quad \partial\Omega\times[0,T] \\ \theta(x,0) = 0 & \text{dans} \quad \Omega \end{cases} \tag{4.123}$$

Si on multiplie (4.123) par une fonction test $v \in H^1(\Omega)$ on obtient une formulation faible

$$\begin{gathered}\int_{\Omega\times[0,T]} \frac{\partial\theta}{\partial t} v\, dxdt + \int_{\Omega\times[0,T]} (\kappa grad\,\theta)(grad\, v)\, dxdt + \int_{\partial\Omega\times[0,T]} \alpha\theta v\, d\gamma dt = \\ \int_{\partial\Omega\times[0,T]} \Phi v\, d\gamma dt, \quad \forall v \in V\end{gathered} \tag{4.124}$$

Dès que le contrôle Φ est suffisamment régulier l'équation (4.123) admet une solution unique. Si $\Phi \in L^2\big(0,T;L^2(\partial\Omega)\big)$, alors $\theta \in L^2\left([0,T];H^1(\Omega)\right) \cap C^0\left([0,T],L^2(\Omega)\right)$. Les observations $\{\theta_k(t)\}_{k=1}^m$ et la fonctionnelle $J(\Phi)$ sont dans ce cas bien définies.

Le calcul de $D(\delta\Phi) = J(\Phi+\delta\Phi) - J(\Phi)$ nous conduit naturellement vers la définition de l'état adjoint et les conditions d'optimalité :

$$\begin{aligned} D &= \frac{1}{2}\sum_{k=1}^m \int_0^T \Big[\frac{1}{|\omega_k|}\int_{\omega_k} \theta\, dx - \theta_k^d(t) + \frac{1}{|\omega_k|}\int_{\omega_k} \delta\theta\, dx\Big]^2 dt \\ &\quad + \frac{\epsilon}{2}\|\Phi+\delta\Phi\|_{\mathcal{V}}^2 - J(\Phi) \\ &= \sum_{k=1}^m \int_0^T \Big[\frac{1}{|\omega_k|}\int_{\omega_k} \theta\, dx - \theta_k^d(t)\Big]\Big[\frac{1}{|\omega_k|}\int_{\omega_k} \delta\theta\, dx\Big]\, dt + \big(\Phi,\delta\Phi\big)_{\mathcal{V}} + \mathcal{O}\|\delta\Phi\|_{\mathcal{V}}^2 \\ &= \sum_{k=1}^m \int_0^T \int_{\omega_k} \frac{1}{|\omega_k|}\Big[\frac{1}{|\omega_k|}\int_{\omega_k} \theta\, dx - \theta_k^d(t)\Big]\delta\theta\, dx\, dt + \big(\Phi,\delta\Phi\big)_{\mathcal{V}} + \mathcal{O}\|\delta\Phi\|_{\mathcal{V}}^2 \\ &= \sum_{k=1}^m \int_{\Omega\times[0,T]} \frac{1}{|\omega_k|}\Big[\frac{1}{|\omega_k|}\int_{\omega_k} \theta\, dx - \theta_k^d(t)\Big]\chi_{\omega_k}\delta\theta\, dx\, dt + \big(\Phi,\delta\Phi\big)_{\mathcal{V}} + \mathcal{O}\|\delta\Phi\|_{\mathcal{V}}^2 \end{aligned} \tag{4.125}$$

($\delta\theta$ est solution de (4.123) avec $\delta\Phi$ au second membre).

On introduit alors un état adjoint p solution de l'équation de la chaleur rétrograde :

$$\begin{cases} -\dfrac{\partial p}{\partial t} - div(\kappa grad\, p) = \displaystyle\sum_{k=1}^m \frac{1}{|\omega_k|}\Big[\frac{1}{|\omega_k|}\int_{\omega_k} \theta\, dx - \theta_k^d(t)\Big]\chi_{\omega_k} & \text{dans} \quad \Omega\times[0,T] \\ (\kappa grad\, p)\cdot\vec{n} + \alpha p = 0 & \text{sur} \quad \partial\Omega\times[0,T] \\ p(x,T) = 0 & \text{dans} \quad \Omega \end{cases} \tag{4.126}$$

dont la forme faible s'écrit

$$\begin{cases} -\displaystyle\int_\Omega \frac{\partial p}{\partial t} w\, dx + \int_\Omega (\kappa grad\, p)(grad\, w)\, dx + \int_{\partial\Omega} \alpha p w\, d\gamma = \\ \displaystyle\sum_{k=1}^m \int_\Omega \frac{1}{|\omega_k|}\Big[\frac{1}{|\omega_k|}\int_{\omega_k} \theta\, dx - \theta_k^d(t)\Big]\chi_{\omega_k} w\, dx, \quad \forall w \in H^1(\Omega) \\ p(x,T) = 0 \end{cases} \tag{4.127}$$

L'état adjoint p est régulier car le terme source de (4.126) est dans $L^2(\Omega\times[0,T])$. En particulier, $p \in L^2\big(0,T;H^1(\Omega)\big) \cap C^0\big(0,T;L^2(\Omega)\big)$ et même davantage.

Si on intègre en temps (4.124) et (4.127), et après une intégration par parties, on montre que le gradient de J s'écrit

$$\nabla J(\Phi) = p|_{\partial\Omega} + \epsilon\Phi \in L^2\big(0,T;L^2(\partial\Omega)\big) \tag{4.128}$$

et la condition d'optimalité pour le problème de minimisation est :

$$p|_{\partial\Omega} + \epsilon\Phi = 0 \tag{4.129}$$

Des méthodes de descente de type gradient ou gradient conjugué peuvent être mises en œuvre pour la minimisation de J.

Nous pouvons suivre ensuite la même démarche que dans le cas des observations ponctuelles : on peut considérer un flux Φ dans $H^1\big(0,T;L^2(\partial\Omega)\big)$ pour obtenir un état final exact, ou bien réécrire le problème sous une forme duale. On remarquera que l'appartenance L^2 en espace de la variable de contrôle permet de définir directement l'état adjoint dans le même espace. La technique de transposition n'est donc pas nécessaire ici. Mais nous ne nous attarderons pas ici à montrer ces variantes qui découlent très naturellement en suivant les mêmes étapes que ce qui a été présenté plus haut.

4.5 Bilan

4.5.1 Reconstruction simultanée de θ^0 et Φ

Nous avons vu dans ce chapitre des méthodes de détermination, pour un solide tridimensionnel, soit de sa température initiale θ^0, soit des sources de chaleur auxquelles il est soumis. Une méthode spécifique fondée sur la transposition a été développée pour chaque cas.

En réalité, pour pouvoir reconstruire le champ de température inconnu, il sera bien sûr nécessaire de connaître simultanément toutes ces grandeurs. Nous avons montré dans le cas de structures unidimensionnelles dans le chapitre 3 la reconstruction simultanée de θ^0 et Φ. Il est tout à fait possible de le faire aussi dans le cas tridimensionnel, en combinant les méthodes présentées plus haut.

Pour reconstruire le couple de fonctions $\{\theta^0, \Phi\}$ par exemple, la méthode de transposition doit être adaptée pour définir le gradient par rapport aux deux composantes de la variable. Le problème primal consiste à chercher le minimum de la fonctionnelle

$$J(\{\theta^0, \Phi\}) = \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{m}\int_0^T \Big(\theta(x_k, t; \{\theta^0, \Phi\}) - \theta_k^d(t)\Big)^2 \, dt + \frac{\epsilon}{2}\|\{\theta^0, \Phi\}\|^2_{H^1(\Omega)\times H^1(\partial\Omega\times[0,T])} \tag{4.130}$$

Le choix $\{\theta^0, \Phi\} \in \mathcal{V} = H^1(\Omega) \times H^1(\partial\Omega \times [0,T])$ garantit une régularité de θ suffisante pour définir J. Pour calculer le gradient, on introduit $p \in \mathcal{V}'$ solution de

$$\left\{\begin{array}{ll} -\dfrac{\partial p}{\partial t} - div(\kappa grad\, p) = \displaystyle\sum_{k=1}^{m}\Big(\theta(x_k,t) - \theta_k^d(t)\Big)\,\delta_{x_k} & \text{dans} \quad \Omega\times[0,T] \\ (\kappa grad\, p)\cdot\vec{n} + \alpha p = 0 & \text{sur} \quad \partial\Omega\times[0,T] \\ p(x,T) = 0 & \text{dans} \quad [0,T] \end{array}\right. \tag{4.131}$$

Le gradient de J dans est donné par $\{P_1, P_2\} \in \mathcal{V}$ défini par transposition par

$$\big(\{P_1,P_2\},\{y,g\}\big)_{\mathcal{V}} = \sum_{k=1}^{m}\int_0^T \Big(\theta(x_k,t) - \theta_k^d(t)\Big) v(x_k,t)\, dt \tag{4.132}$$

pour tout $\{y, g\} \in \mathcal{V}$, $v(x,t)$ étant solution de

$$\left\{\begin{array}{ll} \dfrac{\partial v}{\partial t} - div(\kappa grad\, v) = 0 & \text{dans} \quad \Omega\times[0,T] \\ (\kappa grad\, v)\cdot\vec{n} + \alpha v = g & \text{sur} \quad \partial\Omega\times[0,T] \\ v(x,0) = y & \text{dans} \quad [0,T] \end{array}\right. \tag{4.133}$$

Des conditions de compatibilité doivent être satisfaites entre P_1 et P_2. Comme dans le cas unidimensionnel, une technique de pénalisation peut être utilisée. Nous avons dans ce cas besoin de calculer les flux sur la frontière de θ^0 : ils peuvent être calculés à l'aide de modes de branche. On retrouve dans les annexes l'extrait d'une publication qui décrit la méthodologie à suivre (Bourquin & Nassiopoulos, 2007). Comme alternative, ces conditions peuvent être satisfaites de manière plus intrinsèque grâce à un choix convenable des fonctions y et g.

Ce calcul par transposition reprend la démarche décrite dans les sections 4.2.3 et 4.3.3 pour le calcul du gradient des fonctionnelles $J_{\partial\Omega}(\Phi)$ ou $J_0(\theta^0)$ respectivement (cf. page 75 et page 86). Il permet de définir les problèmes duaux correspondants.

4.5.2 Calcul sur fenêtres glissantes

Dans une démarche de surveillance de structures en continu, l'utilisateur veut avoir à tout moment une estimation de l'état de l'ouvrage. Pour cela, il définit une fenêtre d'observation sur une période de durée T précédant l'instant présent, et utilise les mesures enregistrées pendant cette durée pour estimer, avec un algorithme de reconstruction, l'état thermique. La fin de la fenêtre d'observation correspond à l'instant présent.

Lorsque cette estimation est réalisée à une cadence régulière, l'utilisateur définit ainsi une série de fenêtres d'observation qui peuvent se superposer dans le temps. Comme l'indique le schéma 4.2 ci-dessous, le début de la fenêtre $N+1$, qui permet la reconstruction à l'instant T_{N+1}, appartient à la fenêtre d'observation N, qui a permis la reconstruction à l'instant T_N précédent. La période entre T_N et T_{N+1} doit être supérieure au temps de résolution pour l'algorithme utilisé. On tend vers une reconstruction en temps réel lorsque cette durée tend vers 0. Les algorithmes décrits jusqu'ici sont suffisamment rapides pour permettre des reconstructions à des intervalles très courts par rapport aux temps caractéristiques des phénomènes thermiques étudiés, et répondent donc à cette problématique.

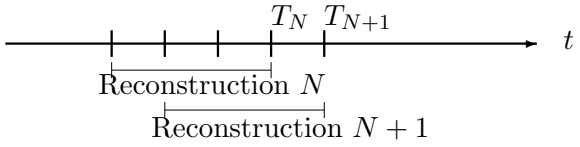


FIG. 4.2 – Reconstruction avec fenêtres d'observation superposées

Dans cette configuration de fenêtres d'observation superposées, l'avantage principal est qu'il n'est plus nécessaire de chercher à estimer l'état au début de la fenêtre d'observation : celui-ci est déjà connu, puisqu'il a été estimé lors de la reconstruction précédente.

En $t = T_{N+1}$, on veut connaître le champ de température $\theta(x, T_{N+1})$. Pour cela, on utilise les mesures $\{\theta_k^d(t)\}_{k=1}^m$ pour $t \in [T_{N+1} - T, T_{N+1}]$, et on cherche $\{\theta_{N+1}^0, \Phi_{N+1}\}$ qui minimise l'écart entre $\{\theta_k^d(t)\}_{k=1}^m$ et $\{\theta_{N+1}(x_k, t)\}_{k=1}^m$, avec θ_{N+1} solution de

$$\left\{\begin{array}{ll} \dfrac{\partial \theta_{N+1}}{\partial t} - div(\kappa\, grad\, \theta_{N+1}) = 0 & \text{dans} \quad \Omega \times [T_{N+1} - T, T_{N+1}] \\ (\kappa\, grad\, \theta_{N+1}) \cdot \vec{n} + \alpha \theta_{N+1} = \Phi_{N+1} & \text{sur} \quad \partial\Omega \times [T_{N+1} - T, T_{N+1}] \\ \theta_{N+1}(x, T_{N+1} - T) = \theta_{N+1}^0 & \text{dans} \quad \Omega \end{array}\right. \tag{4.134}$$

Or, la reconstruction précédente, fondée sur les mesures $\{\theta_k^d(t)\}_{k=1}^m$ pour $t \in [T_N - T, T_N]$, a permis de déterminer $\theta_N(x,t)$ dans $\Omega \times [T_N - T, T_N]$. Si $T > T_{N+1} - T_N$, alors $\theta_{N+1}^0 = \theta_N(x, T_{N+1} - T)$ est connu. La linéarité de l'équation de la chaleur permet d'écrire la solution θ de (4.134) comme la somme de deux champs $\theta_{N+1} = \tilde{\theta} + \bar{\theta}$, avec

$$\left\{\begin{array}{ll} \dfrac{\partial \tilde{\theta}}{\partial t} - div(\kappa\, grad\, \tilde{\theta}) = 0 & \text{dans} \quad \Omega \times [T_{N+1} - T, T_{N+1}] \\ (\kappa\, grad\, \tilde{\theta}) \cdot \vec{n} + \alpha \tilde{\theta} = \Phi_{N+1} & \text{sur} \quad \partial\Omega \times [T_{N+1} - T, T_{N+1}] \\ \tilde{\theta}(x, T_{N+1} - T) = 0 & \text{dans} \quad \Omega \end{array}\right. \tag{4.135}$$

et

$$\begin{cases} \dfrac{\partial \bar{\theta}}{\partial t} - div(\kappa\, grad\, \bar{\theta}) = 0 & \text{dans} \quad \Omega \times [T_{N+1} - T, T_{N+1}] \\ (\kappa\, grad\, \bar{\theta}) \cdot \vec{n} + \alpha \bar{\theta} = 0 & \text{sur} \quad \partial\Omega \times [T_{N+1} - T, T_{N+1}] \\ \bar{\theta}(x, T_{N+1} - T) = \theta^0_{N+1} & \text{dans} \quad \Omega \end{cases} \tag{4.136}$$

La solution $\bar{\theta}$ de (4.136) est déterminée par calcul direct en prenant $\theta^0_{N+1} = \theta_N(x, T_{N+1} - T)$. Il reste à déterminer $\tilde{\theta}$ par reconstruction de Φ_{N+1}, sur la base des mesures $\{\theta^d_k(t) - \bar{\theta}(x_k, t)\}_{k=1}^m, \quad t \in [T_{N+1} - T, T_{N+1}]$.

Concluons cette discussion en remarquant que Φ_{N+1} est en réalité connu dans l'intervalle $[T_{N+1} - T, T_N]$, et que l'on dispose donc d'une ébauche très fiable de cette inconnue si les instants T_N et T_{N+1} sont suffisamment rapprochés. Si des algorithmes itératifs de type gradient sont utilisés, ceci réduit de manière significative le nombre d'itérations avant convergence. Il est possible de mettre en œuvre des techniques de réutilisation des espaces de Krylov générés par les directions de descente successivement calculées, en profitant du fait que ces espaces ne changent pas beaucoup pour des jeux de données proches.

Chapitre 5

Implantation numérique et algorithmes

A partir des méthodes mises en place dans le chapitre précédent, nous nous intéressons dans ce chapitre à l'implantation pratique des différents algorithmes qui en découlent. Nous nous plaçons dans des espaces discrétisés liés à des maillages du domaine et du temps, et nous donnons le détail de mise en œuvre d'algorithmes directs ou itératifs. Des résultats de simulations sont présentés.

5.1 Remarques d'ordre général concernant la discrétisation

5.1.1 Convergence uniforme de la méthode des éléments finis pour des équations paraboliques

Nous nous donnons dorénavant un maillage régulier $\mathcal{K}$ de Ω. Lié à $\mathcal{K}$, nous introduisons l'espace de dimension finie $V^{\delta x} \subset H^1(\Omega)$ construit par éléments finis, c'est-à-dire engendré par des fonctions d'interpolation liées au maillage $\mathcal{K}$. Nous nous donnons aussi un maillage $\mathcal{K}_{\partial\Omega}$ de la frontière $\partial\Omega$ et un espace de dimension finie $\mathcal{H}^{\delta x}$ construit par éléments finis sur ce maillage. Si on veut éviter l'utilisation d'opérateurs de projection spécifiques, $\mathcal{K}_{\partial\Omega}$ peut être défini comme la restriction sur $\partial\Omega$ de $\mathcal{K}$. Nous le définissons ainsi dans ce qui suit.

Nous nous donnons aussi une partition uniforme $\mathcal{T}$ du temps et un pas de temps

$$\delta t = \frac{T}{N},$$

et on pose

$$t^n = n\delta t, \quad 0 \leq n \leq N$$

Nous introduisons enfin, lié à $\mathcal{T}$, un espace de dimension finie $\mathcal{F}^{\delta t} \subset H^1([0,T])$ construit par éléments finis.

Nous avons vu dans la partie 2.1.4 la méthode suivie pour la mise en œuvre du calcul impliquant l'équation parabolique de la chaleur, en utilisant une approximation éléments finis et un Θ-schéma pour la discrétisation en temps. La même démarche est utilisée à chaque fois que l'on doit résoudre une équation de type parabolique comme par exemple pour la résolution des problèmes (4.81) ou (4.113) qui interviennent dans le calcul de l'état adjoint.

Notations :

Nous noterons désormais $w^{\delta x,\delta t}$ toute fonction discrète appartenant à l'intersection d'un espace quelconque X avec l'espace $V^{\delta x} \times \mathcal{F}^{\delta t}$, ou avec l'espace $\mathcal{H}^{\delta x} \times \mathcal{F}^{\delta t}$. L'exposant δt ne doit pas être confondu avec l'exposant n (utilisé aussi dans la partie 2.1.4) : $w^{\delta x,\delta t,n}$ indique la valeur de la fonction $w^{\delta x,\delta t}$ au point t^n de la partition $\mathcal{T}$.

Un point délicat qu'il faut vérifier est la convergence globale (en tout point) de la solution approchée $\theta^{\delta x,\delta t}$

$$\left\{\begin{array}{lll} \dfrac{\partial\theta}{\partial t} - div(\kappa\, grad\,\theta) = f & \text{dans} & \Omega \times [0,T] \\ (\kappa\, grad\,\theta)\cdot\vec{n} + \alpha\theta = \Phi & \text{sur} & \partial\Omega \times [0,T] \\ \theta(x,0) = \theta^0(x) & \text{dans} & \Omega \end{array}\right. \tag{5.1}$$

(θ^0, Φ ou f pouvant être nuls selon les cas) lorsque le problème parabolique est résolu par la méthode des éléments finis et le Θ-schéma d'intégration en temps. On a vu en effet les hypothèses de régularité nécessaires sur les données pour que $\theta(x,t)$ soit défini en tout point. Mais rien ne permet d'affirmer a priori que l'approximation $\theta^{\delta x,\delta t}$ en un point x_k est définie également. En d'autres termes, pour un point x_k du domaine, $\theta^{\delta x,\delta t}(x_k,t)$ converge-t-il vers $\theta(x_k,t)$ lorsque δx et δt tendent vers 0 ? La même question se pose à chaque fois que l'on est amené à résoudre une équation parabolique, comme par exemple pour les problèmes (4.81) ou (4.113) qui ont la même structure.

Une réponse à ce point est difficile à obtenir en général, et ceci dépasserait les objectifs de ce travail. Nous nous contenterons ici de donner quelques éléments de réponse qui devraient pouvoir se généraliser dans les cas des problèmes traités ici. Nous cherchons des estimations d'erreur dans la norme L^∞. Si cette erreur est bornée, alors la solution discrète converge en tout point vers la solution continue.

Ciarlet (1978) fournit des estimations de convergence pour le problème stationnaire. La solution u du problème

$$\int_\Omega \nabla u \nabla v \, dx = \int_\Omega f v \, dx, \, \forall v \in H_0^1(\Omega), \, f \in L^2(\Omega) \tag{5.2}$$

vérifie $u \in H_0^1(\Omega)$. Soit $u^{\delta x}$ une solution approchée de (5.2) dans l'espace d'éléments finis $V^{\delta x} \subset H_0^1(\Omega)$. Si $u \in W^{2,\infty}(\Omega)$ et si le maillage est régulier, alors il existe une constante C indépendante du paramètre de discrétisation δx telle que

$$\|u - u^{\delta x}\|_{L^\infty(\Omega)} \leq C \delta x^2 (\ell^{\delta x})^2 \|u\|_{W^{2,\infty}(\Omega)}$$

où $\ell^{\delta x}$ est un facteur logarithmique tel que

$$\ell^{\delta x} = \max(1, \log(\frac{1}{\delta x})).$$

Dans ces inégalités, $\|\cdot\|_{W^{2,\infty}(\Omega)}$ est une norme associée à l'espace de Sobolev $W^{2,\infty}(\Omega)$. Ces estimations d'erreur montrent qu'il y a convergence uniforme (i.e. convergence en tout point) de la solution $u^{\delta x}$ du problème approché. Dans le cas stationnaire donc, et avec les hypothèses adéquates, $u^{\delta x}(x_0)$ est bien défini.

Thomée (1984) donne les conditions nécessaires de convergence pour les équations paraboliques. Soit le problème

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} - \Delta u = f & \text{dans} \quad \Omega \times [0,T] \\ u = 0 & \text{sur} \quad \partial\Omega \times [0,T] \\ u(\cdot,0) = v & \text{dans} \quad \Omega \end{cases} \tag{5.3}$$

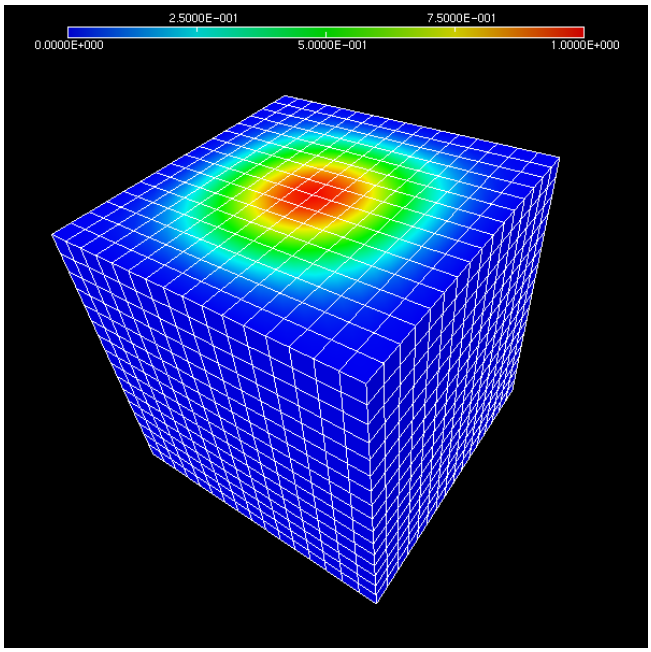
et son analogue semi-discret dans $S^{\delta x} \subset H_0^1(\Omega)$, l'espace des éléments finis linéaires par morceaux qui s'annulent au bord

$$\begin{cases} \frac{\partial u^{\delta x}}{\partial t} - \Delta u^{\delta x} = P^{\delta x} f & \text{dans} \quad \Omega \times [0,T] \\ u^{\delta x}(0) = v^{\delta x} & \text{dans} \quad \Omega \end{cases} \tag{5.4}$$

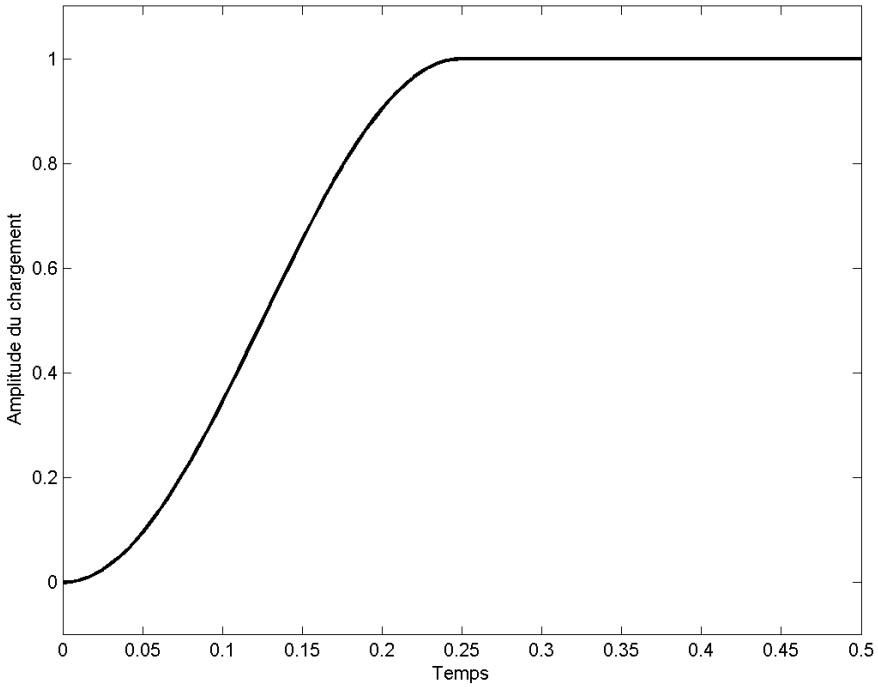
où $v^{\delta x}$ est le projeté de v sur $S^{\delta x}$ par isomorphisme et $P^{\delta x}$ la projection de L^2 vers $S^{\delta x}$. On démontre l'estimation d'erreur

$$\|u - u^{\delta x}\|_{L^\infty} \leq C \delta x^2 \, (\ell^{\delta x})^2 \left(\|v\|_{W^2_\infty} + \int_0^t \|\frac{\partial u}{\partial t}\|_{W^2_\infty} \, ds \right), \quad \text{pour } t > 0.$$

Nous avons effectué néanmoins des simulations numériques pour vérifier la bonne convergence de la valeur ponctuelle par calcul éléments finis dans le cas parabolique traité ici. Elles concernent un modèle cubique avec un capteur en son centre, auquel on applique une source surfacique suffisamment régulière sur une des faces : elle est construite comme une fonction sinusoïdale en deux dimensions s'annulant aux arêtes du cube (cf. figure 5.1). La figure 5.2 montre le résultat des calculs éléments finis avec des maillages de plus en plus fins : on voit que les valeurs du champ sur le point où est situé le capteur convergent lorsque le maillage est raffiné.

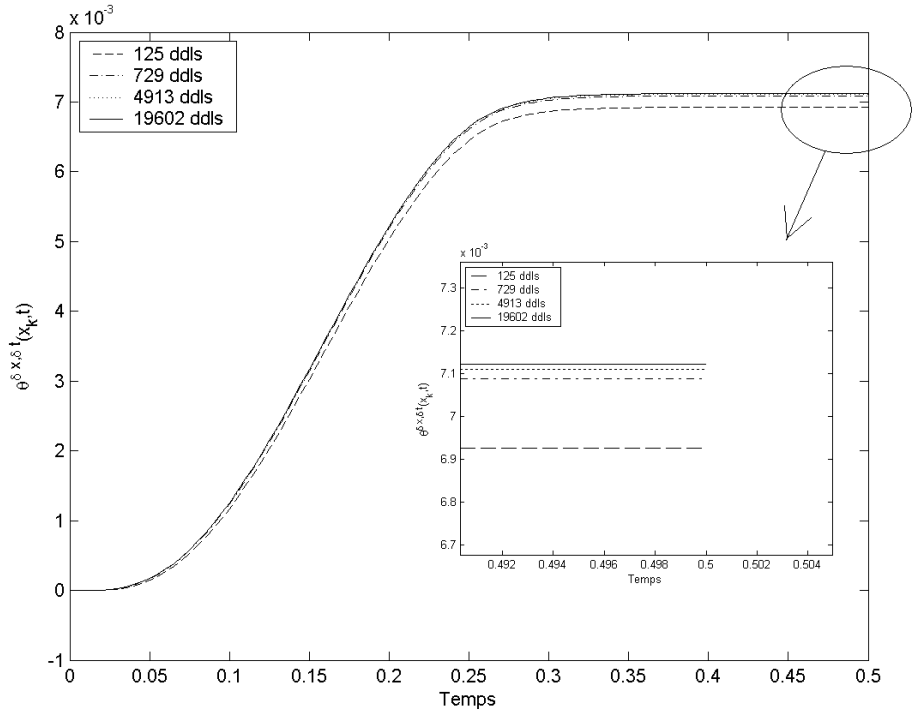


(a) Distribution spatiale

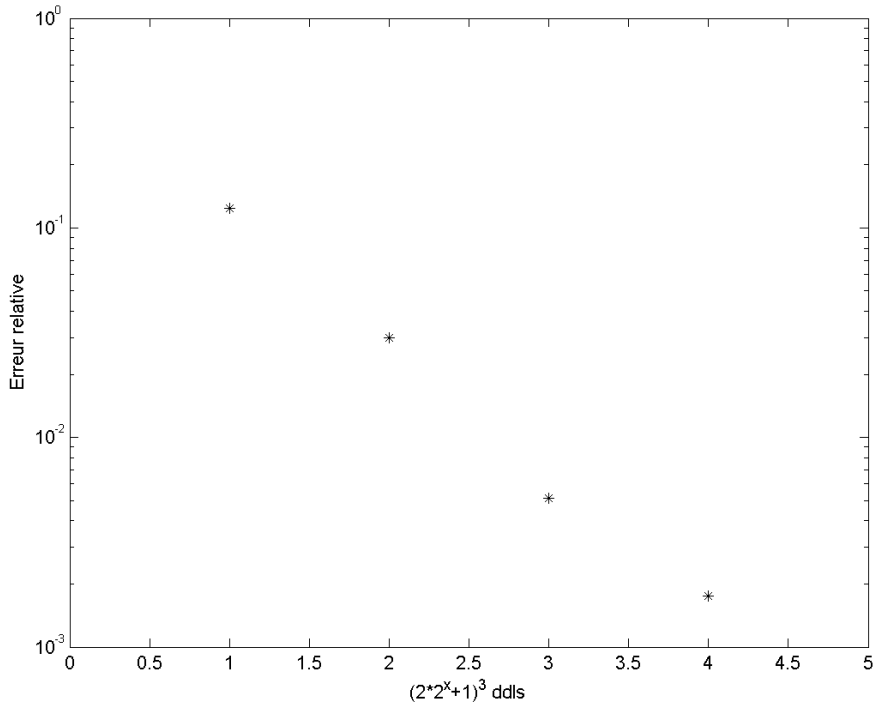


(b) Evolution en temps

FIG. 5.1 – Flux imposé pour le test de la convergence



(a) $\theta^{\delta x,\delta t}(x_k,t)$ calculé avec des maillages différents



(b) Erreur relative par rapport à une solution de référence obtenue avec un maillage très fin

FIG. 5.2 – Convergence de $\theta^{\delta x,\delta t}(x_k,t)$

Remarque :

Les résultats cités plus haut nécessitent un certain nombre d'hypothèses concernant notamment la régularité du maillage. Dans le cas où une des hypothèses est violée et où la convergence uniforme n'est plus vérifiée, il est toujours possible de remplacer la valeur ponctuelle numérique par une moyenne dans une petite zone autour du capteur. La valeur moyenne approchée converge vers la moyenne exacte lorsque la taille du domaine tend vers zéro. Cette manière simple de contourner la difficulté ne nécessite qu'un post-traitement facilement implantable.

5.1.2 Approximation de l'espace des observations

Nous avons vu que, dans le problème dual, la variable inconnue se trouve dans l'espace dual de l'espace des observations $\mathcal{M}'$. Ici, $\mathcal{M} = L^2(0,T)^m$, et on a par conséquent $\mathcal{M}' = \mathcal{M}$.

Pour l'implantation numérique, nous introduisons un sous-espace $\mathcal{M}_h$ de $\mathcal{M}$ de dimension finie. La mesure de chaque capteur k est projetée sur une base de fonctions réduite

$$\{\phi_{ki}\}_{i=1}^{n_k}.$$

L'ensemble de ces bases poru $k = 1$ à m forme une base réduite

$$\left\{\phi_j\right\}_{j=1}^{N_m} \equiv \left\{\{\phi_j\}_{i=1}^{n_k}\right\}_{k=1}^{m}, \quad N_m = \sum_{k=1}^{m} n_k$$

et on définit $\mathcal{M}_h$ comme l'espace engendré par les fonctions de cette base.

Les fonctions ϕ_{ki} peuvent être choisies comme solutions du problème

$$\begin{cases} -\dfrac{d^2\phi_k}{dt^2} = \lambda\phi_k & \text{sur}[0,T] \\ \dfrac{d\phi_k(0)}{dt} = \dfrac{d\phi_k(T)}{dt} = 0 \end{cases} \tag{5.5}$$

qui admet une famille infinie de solutions $\{\lambda_i, \phi_{ki}\}_{i=1}^{\infty}$ (ce sont des fonctions cosinus). Par troncature à l'ordre n_k, on obtient la base voulue en prenant

$$\{\phi_{ki}\}_{i=1}^{n_k}, \ \forall k = 1..m.$$

Le choix d'un nombre de fonctions de base n_k différent pour chaque indice k peut être intéressant si l'on souhaite avoir des précisions différentes pour l'approximation des réponses de chaque capteur, en fonction de leur influence sur l'observation du système.

Le problème de valeurs propres (5.5) possède des solutions explicites faisant intervenir des fonctions cosinus. Pour leur implantation, nous reprenons la partition uniforme $\mathcal{T}$ de $[0,T]$ de paramètre δt introduite plus haut. La base approchée de $\mathcal{M}_h^{\delta t}$, le projeté de $\mathcal{M}_h$ dans $\mathcal{F}^{\delta t}$, s'écrit :

$$\left\{\{\phi_{ki}^{\delta t}\}_{i=1}^{n_k}\right\}_{k=1}^{m} \tag{5.6}$$

Une tout autre manière de construire une base de $\mathcal{M}_h$ est de définir un maillage $\mathcal{T}_2$ de $[0,T]$ (différent de $\mathcal{T}$) et de prendre une base d'éléments finis construite sur ce maillage. On n'a accès en

réalité qu'aux approximations dans l'espace discret $\mathcal{F}^{\delta t}$ des fonctions de forme de cette base, que nous noterons donc là aussi

$$\left\{\{\phi_{ki}^{\delta t}\}_{i=1}^{n_k}\right\}_{k=1}^{m}. \tag{5.7}$$

Le maillage $\mathcal{T}_2$ doit être plus grossier que $\mathcal{T}$. Cette approche donne en général des bases de taille $\sum_{k=1}^{m} n_k$ beaucoup plus élevées, mais les propriétés d'invariance par rapport au temps des équations paraboliques traitées permettent de faire des réductions de coût de calcul non négligeables.

5.2 Reconstruction d'un flux

Nous revenons dans cette partie à la méthode présentée en 4.2 pour la reconstruction du flux, et on présente la manière de parvenir à une implantation pratique de celle-ci. Plusieurs versions différentes de la méthode ont été vues :

– Tout d'abord, le problème en formulation primale consiste à minimiser le fonctionnelle

$$J_{\partial\Omega}(\Phi) = \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{m}\int_0^T \Big(\theta(x_k,t;\Phi) - \theta_k^d(t)\Big)^2\,dt + \frac{\epsilon}{2}\|\Phi\|^2_{H^1(\partial\Omega\times[0,T])} \tag{5.8}$$

(cf. (4.50)). On emploiera des méthodes itératives pour aborder cette minimisation.

– La formulation duale conduit à la minimisation de la fonctionnelle

$$I_{\partial\Omega}\big(X\big) = \frac{1}{2}\Big[\sum_{k=1}^{m}\int_0^T \theta(x_k,t;P)X_k(t)\,dt + \epsilon\sum_{k=1}^{m}\int_0^T X_k(t)^2\,dt\Big] - \sum_{k=1}^{m}\int_0^T X_k(t)\theta_k^d(t)\,dt \tag{5.9}$$

(cf. (4.74)), pour laquelle la mise en œuvre d'algorithmes itératifs peut être avantageuse.

– La minimisation de la fonctionnelle duale équivaut à la résolution du problème variationnel consistant à chercher $\{X_k\}_{k=1}^m \in \mathcal{M}' = L^2(0,T)^m$ solution de (cf. (4.68))

$$\begin{aligned}&\int_{\partial\Omega\times[0,T]}\Big(P(X)P(\psi) + \frac{\partial P(X)}{\partial t}\frac{\partial P(\psi)}{\partial t} + \mathcal{S}P(X)\mathcal{S}P(\psi)\Big)\,d\gamma\,dt + \\ &\epsilon\sum_{k=1}^{m}\int_0^T X_k(t)\psi_k(t)\,dt = \int_0^T \theta_k^d(t)\psi_k(t)\,dt \quad \forall\psi = \{\psi_k\}_{k=1}^m \in \mathcal{M}\end{aligned} \tag{5.10}$$

où $\mathcal{S}$ est l'opérateur de Poincaré-Steklov. Un algorithme de résolution direct, construit à partir de la méthode de Galerkin, peut être envisagé dans ce cas.

Nous avons vu en 4.2.3 une méthode de transposition qui permet de calculer l'image P de la trace de l'état adjoint par l'isomorphisme I^{-1}. Elle est définie par dualité dans l'espace $H^1(\partial\Omega\times[0,T])$ qu'on a doté de la norme convenable pour les calculs

$$b(v,w) = \int_{\partial\Omega\times[0,T]}\big(vw + \frac{\partial v}{\partial t}\frac{\partial v}{\partial t} + \mathcal{S}v\mathcal{S}w\big)\,d\gamma\,dt \qquad \forall v,w \in H^1(\partial\Omega\times[0,T])$$

5.2.1 Implantation numérique de l'état adjoint

Rappels :

On a vu une méthode qui permet d'obtenir une approximation P^{q_1,q_2} de P sur la base $\{g_{r_1,r_2}(x)\}_{r_1=1,r_2=1}^{q_1,q_2}$ donnée par

$$P^{q_1,q_2} = \sum_{r_1=1}^{q_1}\sum_{r_2=1}^{q_2} P_{r_1,r_2}h_{r_1}(x)f_{r_2}(t). \tag{5.11}$$

où les coefficients P_{r_1,r_2} sont solutions de

$$\begin{aligned}&\sum_{r_2=1}^{q_2} P_{r_1,r_2}\Big[\int_0^T \frac{df_{r_2}}{dt}\frac{df_{s_2}}{dt} + (1+\lambda_{r_1}^2)f_{r_2}f_{s_2}\,dt\Big] = \\ &\int_0^T \phi(t)v_{r_1,s_2}(x_0,t)\,dt \qquad \forall r_1 = 1..q_1\,\forall s_2 = 1..q_2\end{aligned} \tag{5.12}$$

Nous allons nous intéresser dans ce qui suit à l'implantation pratique de ces expressions. Nous nous plaçons dans les espaces de dimension finie $V^{\delta x}$ (lié au maillage $\mathcal{K}$ de Ω), $\mathcal{H}^{\delta x}$ (lié au maillage $\mathcal{K}_{\partial\Omega}$ de $\partial\Omega$) et $\mathcal{F}^{\delta t}$ (lié à la partition $\mathcal{T}$ de $[0,T]$) définis en 5.1.

Le calcul de l'état adjoint se décompose en une succession d'étapes :

– Calcul approché de $\{h_{r_1}\}_{r_1}^{q_1}$:
Soit le problème suivant

$$\int_\Omega \nabla\, z^{\delta x} \nabla\, w\, dx + \int_{\partial\Omega} \alpha z^{\delta x} w\, d\gamma = \lambda^{\delta x}\Big[\int_{\partial\Omega} z^{\delta x} w\, dx + \int_{\partial\Omega} z^{\delta x} w\, d\gamma\Big], \quad \forall w \in V^{\delta x} \tag{5.13}$$

qui admet une famille de solutions $\{\lambda_\ell^{\delta x}, z_\ell^{\delta x}\}_{\ell=1}^{I(V^{\delta x})}$ avec $z_\ell^{\delta x} \in V^{\delta x} \subset H^1(\Omega)$ et ($I(V^{\delta x})$ est la dimension de $V^{\delta x}$). On obtient la base de fonctions souhaitée en ne gardant que la trace des fonctions $z_\ell^{\delta x}$ sur $\partial\Omega$:

$$\{h_{r_1}^{\delta x}\}_{r_1=1}^{q_1} = \{z_\ell^{\delta x}|_{\partial\Omega}\}_{\ell=1}^{q_1}.$$

On construit ainsi l'espace

$$\mathcal{H}_h^{\delta x} = \text{span}\{h_{r_1}^{\delta x}\}_{r_1=1}^{q_1}.$$

Les solutions de (5.13) sont aussi des valeurs et vecteurs propres de l'opérateur $\mathcal{S}$ et sont utilisées pour le calcul du produit scalaire défini par $b(\cdot,\cdot)$.

– Calcul approché de $\{f_{r_2}\}_{r_2=1}^{q_2}$:
Si on fait le choix d'une base construite par des modes de Fourier, la base approchée

$$\{f_{r_2}^{\delta t}\}_{r_2=1}^{q_2} \in \mathcal{F}^{\delta t} \subset H^1([0,T])$$

est obtenue en gardant les q_2 premières fonctions propres de Fourier écrites explicitement (fonctions cosinus).
Si on fait le choix d'une base d'éléments finis, on obtient $\{f_{r_2}^{\delta t}\}_{r_2=1}^{q_2}$ directement à l'aide d'un mailleur automatique.
On construit dans les deux cas l'espace

$$\mathcal{F}_h^{\delta t} = \text{span}\{f_{r_2}^{\delta t}\}_{r_2=1}^{q_2}.$$

– La base approchée $\{g_{r_1,r_2}^{\delta x,\delta t}\}_{r_1,r_2=1}^{q_1,q_2}$ est obtenue par produit croisé de $\{h_{r_1}^{\delta x}\}_{r_1=1}^{q_1}$ et $\{f_{r_2}^{\delta t}\}_{r_2=1}^{q_2}$.

– Nous résolvons ensuite le problème (4.81) sous la forme approchée

$$\int_\Omega \frac{\partial v_{r_1,r_2}^{\delta x,\delta t}}{\partial t} w\, dx + \int_\Omega grad\, v_{r_1,r_2}^{\delta x,\delta t} grad\, w\, dx + \int_{\partial\Omega} \alpha v_{r_1,r_2}^{\delta x,\delta t} w\, d\gamma = \int_{\partial\Omega} g_{r_1,r_2}^{\delta x,\delta t} w\, d\gamma, \quad \forall w \in V^{\delta x} \tag{5.14}$$

Pour l'intégration en temps, un schéma d'intégration numérique est nécessaire : nous choisirons, comme dans les parties précédentes, le Θ-schéma. Grâce à la propriété d'invariance temporelle évoquée plus haut, si $\{f_{r_2}^{\delta t}\}_{r_2=1}^{q_2}$ est une base d'éléments finis, le problème n'est résolu que q_1 fois, le reste des solutions étant obtenu par translation de l'abscisse temporelle.

– Résolution approchée de (4.89)

Pour obtenir une approximation de P^{q_1,q_2} (on rappelle que P^{q_1,q_2} est une projection de $I^{-1}p$ sur $\mathcal{H}_h \times \mathcal{F}_h$), on résout $q_1 \times q_2$ fois le problème suivant :

$$\sum_{r_2=1}^{q_2} P_{r_1,r_2}^{\delta x,\delta t}\Big[\int_0^T \frac{df_{r_2}^{\delta t}}{dt}\frac{df_{s_2}^{\delta t}}{dt}\,dt + \int_0^T (1+\lambda_{r_1}^{\delta x\,2}) f_{r_2}^{\delta t} f_{s_2}^{\delta t}\,dt\Big] = \int_0^T \phi^{\delta t}(t) v_{r_1,s_2}^{\delta x,\delta t}(x_0,t)\,dt \qquad \forall r_1 = 1..q_1,\ \forall s_2 = 1..q_2 \tag{5.15}$$

où $\phi^{\delta t}(t)$ est la projection de $\phi(t)$ sur $\mathcal{M}_h^{\delta t}$. En pratique, on construit une suite de matrices $\mathbb{M}_{r_1}$, $r_1 = 1..q_1$ telles que

$$\mathbb{M}_{r_1}^{\delta t,\delta x} = \mathbb{M}^{\delta t}(1+\lambda_{r_1}^{\delta x\,2}) + \mathbb{K}^{\delta t}$$

avec $\mathbb{M}_{ij}^{\delta t} = \displaystyle\int_0^T f_i^{\delta t} f_j^{\delta t}\,dt$ et $\mathbb{K}_{ij}^{\delta t} = \displaystyle\int_0^T \frac{df_i^{\delta t}}{dt}\frac{df_j^{\delta t}}{dt}\,dt$, et on résout les q_1 problèmes matriciels correspondants.

On obtient

$$P^{q_1,q_2,\delta x,\delta t} = \sum_{r_1=1}^{q_1}\sum_{r_2=1}^{q_2} P_{r_1,r_2}^{\delta x,\delta t} h_{r_1}^{\delta x}(x) f_{r_2}^{\delta t}(t). \tag{5.16}$$

Un point délicat qu'il faut vérifier est la convergence de $v_{r_1,r_2}^{\delta x,\delta t}(x_0,t)$ intervenant dans (5.15). Nous avons vu numériquement en 5.1.1 que la méthode des éléments finis permet de calculer correctement cette quantité. Les expressions données dans cette partie sont valables pour une source $\phi(t)$ en $x = x_0$. Pour une somme de sources, ou pour une source $\phi_k(t)$ en $x = x_k$, on modifiera convenablement le second membre dans (5.15).

Pour résumer, la méthode de transposition modifiée présentée ici permet de définir et de calculer P, c'est-à-dire l'image dans $H^1(\partial\Omega \times [0,T])$ de la trace sur le bord de p, qui lui-même est un champ résultant d'une équation parabolique rétrograde avec sources ponctuelles à l'intérieur du domaine.

Du point de vue algorithmique, les principales étapes nécessaires sont les suivantes :

1. Construction et stockage des vecteurs $g_{r_1,r_2}^{\delta x,\delta t}(x,t)$, $r_1 = 1..q_1, r_2 = 1..q_2$
2. Résolution de (5.14) pour les $q_1 \times q_2$ fonctions de base g_{r_1,r_2}
3. Stockage des $v_{r_1,r_2}^{\delta x,\delta t}(x_k,t)$
4. Résolution de (5.15) pour tout $r_1 = 1..q_1$ et $s_2 = 1..q_2$
5. Obtention de l'approximation de P par (5.16)

5.2.2 Algorithmes itératifs

La méthode du gradient conjugué s'applique à des fonctionnelles convexes coercives de type

$$J(u) = \frac{1}{2}(Au, u) - (b, u) \tag{5.17}$$

avec A un opérateur auto-adjoint défini positif. Elle consiste à construire une suite $\big(u_k\big)_{k\geq 0}$ telle que la suite $\big(J(u_k)\big)_{k\geq 0}$ soit décroissante, de la manière suivante. Pour un vecteur initial arbitraire u_0 on pose

$$d_0 = Au_0 - b = \nabla J(u_0), \quad r_0 = \frac{(d_0, d_0)}{(d_0, Ad_0)}$$

et

$$u_1 = u_0 - r_0 d_0$$

($\nabla J(u_0)$ est le gradient de J en u_0). On construit ensuite de proche en proche la suite

$$u_{n+1} = u_n - r_n d_n$$

avec

$$d_n = \nabla J(u_n) + \frac{\|\nabla J(u_n)\|^2}{\|\nabla J(u_{n-1})\|^2} d_{n-1}$$

et

$$r_n = \frac{\big(\nabla J(u_n), d_n\big)}{\big(d_n, Ad_n\big)}.$$

Les directions de descente d_n ainsi choisies sont orthogonales par rapport au produit scalaire défini par A :

$$\big(d_k, Ad_j\big) = 0, \quad j \neq k$$

(on dit qu'elles sont conjuguées). Le scalaire r_n, appelé pas de descente, vérifie la relation

$$J(u_n - r_n d_n) = \min_{r\in\mathbb{R}} J(u_n - r d_n).$$

L'algorithme ainsi construit converge en N itérations au plus.

Pour la reconstruction d'un flux thermique, et en utilisant les notations abstraites du chapitre 2, l'algorithme du gradient conjugué peut être appliqué à la minimisation de la fonctionnelle primale (4.50) qui s'écrit aussi, en utilisant les notations du chapitre 2.

$$J_{\partial\Omega}(\Phi) = \frac{1}{2}\Big(I^{-1}\tau^*\Lambda\tau\Phi, \Phi\Big)_{\mathcal{V}} - \Big(I^{-1}\tau^*\Lambda\theta^d, \Phi\Big)_{\mathcal{V}} + \frac{\epsilon}{2}\|\Phi\|^2_{\mathcal{V}} + \frac{1}{2}\Big\langle\Lambda\theta^d, \theta^d\Big\rangle_{\mathcal{M}',\mathcal{M}} \tag{5.18}$$

Le dernier terme étant forcément positif, il peut être omis. Après l'étape d'initialisation, l'algorithme consiste à construire la série $\Phi_{n+1} = \Phi_n - r_n d_n$ avec

$$s(\Phi_n) = I^{-1}\tau^*\Lambda\big(\tau\Phi_n - \theta^d\big) + \epsilon\Phi_n \quad \in \mathcal{V} \tag{5.19}$$

$$d_n = s(\Phi_n) + \frac{\|s(\Phi_n)\|^2_{\mathcal{V}}}{\|s(\Phi_{n-1})\|^2_{\mathcal{V}}} d_{n-1} \quad \in \mathcal{V} \tag{5.20}$$

$$r_n = \frac{\big(s(\Phi_n), d_n\big)_{\mathcal{V}}}{\|\tau d_n\|^2_{\mathcal{M}} + \epsilon \|d_n\|^2_{\mathcal{V}}} \tag{5.21}$$

Le même algorithme peut être appliqué à la minimisation de la fonctionnelle duale qui s'écrit avec les mêmes notations

$$I_{\partial\Omega}(X) = \frac{1}{2}\big(\tau I^{-1}\tau^* X, X\big)_{\mathcal{M},\mathcal{M}'} + \frac{\epsilon}{2}\big(\Lambda^{-1}X, X\big)_{\mathcal{M},\mathcal{M}'} - \big\langle \theta^d, X\big\rangle_{\mathcal{M},\mathcal{M}'} \tag{5.22}$$

On calcule alors, à chaque itération, $X_{n+1} = X_n - r_n d_n$ avec

$$s(\Phi_n) = \big(\tau I^{-1}\tau^* + \epsilon\Lambda^{-1}\big)X_n - \theta^d \quad \in \mathcal{M} \tag{5.23}$$

$$d_n = g(X_n) + \frac{\|s(X_n)\|^2_{\mathcal{M}}}{\|s(X_{n-1})\|^2_{\mathcal{M}}} d_{n-1} \quad \in \mathcal{M} \tag{5.24}$$

$$r_n = \frac{\big(s(X_n), d_n\big)_{\mathcal{M}}}{\|I^{-1}\tau^* d_n\|^2_{\mathcal{V}} + \epsilon \|d_n\|^2_{\mathcal{M}}} \tag{5.25}$$

5.2.2.1 Algorithme du gradient conjugué appliqué à la minimisation de la fonctionnelle primale

On s'intéresse dans cette partie à la mise en œuvre de l'algorithme du gradient conjugué pour la minimisation de la fonctionnelle primale (4.50) pour la détermination d'un flux inconnu

$$J_{\partial\Omega}(\Phi) = \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{m}\int_0^T \Big(\theta(x_k,t) - \theta^d_k(t)\Big)^2\, dt + \frac{\epsilon}{2}\|\Phi\|^2_{H^1(\partial\Omega\times[0,T])} \tag{5.26}$$

où $\theta(x,t)$ est solution de la chaleur

$$\left\{\begin{array}{ll} \dfrac{\partial\theta}{\partial t} - div(\kappa\, grad\,\theta) = 0 & \text{dans} \quad \Omega\times[0,T] \\ (\kappa\, grad\,\theta)\cdot\vec{n} + \alpha\theta = \Phi & \text{sur} \quad \partial\Omega\times[0,T] \\ \theta(x,0) = 0 & \text{dans} \quad \Omega \end{array}\right. \tag{5.27}$$

Rappels :

On rappelle que l'espace $\mathcal{V} = H^1(\partial\Omega\times[0,T])$ a été doté du produit scalaire

$$\begin{array}{rcll} \big(v,w\big)_{\mathcal{V}} & = & b(v,w) & \\ & = & \displaystyle\int_{\partial\Omega\times[0,T]} \big(vw + \frac{\partial v}{\partial t}\frac{\partial v}{\partial t} + \mathcal{S}v\mathcal{S}w\big)\, d\gamma\, dt & \forall v,w \in H^1(\partial\Omega\times[0,T]) \end{array} \tag{5.28}$$

où $\mathcal{S}$ est l'opérateur de Poincaré-Steklov (cf. (4.84)). Ce produit scalaire nous a permis de développer une méthode de calcul de l'image dans $\mathcal{V}$ de l'adjoint p

$$\begin{array}{rcl} P & = & I^{-1}p \\ & = & I^{-1}\tau^*\Lambda\tau\Phi \in \mathcal{V} \end{array} \tag{5.29}$$

qui donne le gradient de la fonctionnelle J au point Φ, avec $p \in \mathcal{V}' = H^{-1}(\partial\Omega\times[0,T])$ solution par transposition de

$$\left\{\begin{array}{ll} -\dfrac{\partial p}{\partial t} - \Delta p = \displaystyle\sum_{k=1}^{m}\big(\theta(x_k,t) - \theta^d_k(t)\delta_{x_k} & \text{dans} \quad \Omega\times[0,T] \\ \nabla p\cdot\vec{n} + \alpha p = 0 & \text{sur} \quad \partial\Omega\times[0,T] \\ p(T) = 0 & \text{dans} \quad \Omega \end{array}\right. \tag{5.30}$$

On obtient une approximation $P^{q_1,q_2} \in \mathcal{V}_h$ de P comme combinaison linéaire des familles de fonctions $\{h_{r_1}(x)\}_{r_1=1}^{q_1}$ et $\{f_{r_2}(x)\}_{r_2=1}^{q_2}$:

$$P^{q_1,q_2} = \sum_{r_1=1}^{q_1} \sum_{r_2=1}^{q_2} P_{r_1,r_2} h_{r_1}(x) f_{r_2}(t). \tag{5.31}$$

Les fonctions h_{r_1} sont les modes propres de l'opérateur de Poincaré-Steklov, qui sont calculés comme traces sur $\partial\Omega$ des modes de branche, et les fonctions f_{r_2} sont les fonctions de base de Fourier. Le produit entre ces deux familles de fonctions donne la famille de fonctions $\{g_{r_1,r_2}\}_{r_1=1,r_2=1}^{q_1,q_2}$ qui est une base réduite de $H^1(\partial\Omega \times [0,T])$.
Les coefficients P_{r_1,r_2} sont obtenus en inversant les q_1 équations

$$\begin{aligned} &\sum_{r_2=1}^{q_2} P_{r_1,r_2} \int_0^T \Big[\frac{df_{r_2}}{dt}\frac{df_{s_2}}{dt} + (1+\lambda_{r_1}^2) f_{r_2} f_{s_2} \Big]\, dt = \\ &\int_0^T \phi(t) v_{r_1,s_2}(x_0,t)\, dt \qquad \forall r_1 = 1..q_1,\ s_2 = 1..q_2 \end{aligned} \tag{5.32}$$

En pratique, nous minimisons la version discrète de la fonctionnelle $J_{\partial\Omega}$ dont la variable est une fonction $\Phi^{q_1,q_2,\delta x,\delta t} \in \mathcal{V}_h^{\delta x,\delta t}$ telle que

$$J_{\partial\Omega}^{\delta x,\delta t}(\Phi^{q_1,q_2,\delta x,\delta t}) = \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{m} \int_0^T \Big(\theta^{\delta x,\delta t}(x_k,t;\Phi^{q_1,q_2,\delta x,\delta t}) - \theta_k^{d,\delta t}(t)\Big)^2\, dt + \frac{\epsilon}{2}\|\Phi^{q_1,q_2,\delta x,\delta t}\|^2_{\mathcal{V}_h^{\delta x,\delta t}} \tag{5.33}$$

où $\mathcal{V}_h^{\delta x,\delta t}$ est la projection de $\mathcal{V}_h$ sur les maillages $\mathcal{K}^{\delta x}$ et $\mathcal{F}^{\delta t}$. En se reportant à la partie 5.2.1, le gradient est donné par $P^{q_1,q_2,\delta x,\delta t}$ telle que

$$P^{q_1,q_2,\delta x,\delta t} = \sum_{r_1=1}^{q_1} \sum_{r_2=1}^{q_2} P_{r_1,r_2}^{\delta x,\delta t} h_{r_1}^{\delta x}(x) f_{r_2}^{\delta t}(t). \tag{5.34}$$

avec les coefficients $P_{r_1,r_2}^{\delta x,\delta t}$ donnés par

$$\begin{aligned} &\sum_{r_2=1}^{q_2} P_{r_1,r_2}^{\delta x,\delta t} \Big[\int_0^T \frac{df_{r_2}^{\delta t}}{dt}\frac{df_{s_2}^{\delta t}}{dt}\, dt + \int_0^T (1+\lambda_{r_1}^{\delta x^2}) f_{r_2}^{\delta t} f_{s_2}^{\delta t}\, dt \Big] = \\ &\sum_{k=1}^{m} \int_0^T \big(\theta^{\delta x,\delta t}(x_k,t) - \theta_k^{d,\delta t}(t)\big) v_{r_1,s_2}^{\delta x,\delta t}(x_k,t)\, dt \qquad \forall r_1 = 1..q_1,\ \forall s_2 = 1..q_2 \end{aligned} \tag{5.35}$$

Avec ces notations, l'algorithme du gradient conjugué appliqué à la minimisation de (5.33) est constitué des principales étapes suivantes :

– **Initialisation :** *choix de* $\Phi_0^{q_1,q_2,\delta x,\delta t} \in \mathcal{V}_h^{\delta x,\delta t}$ arbitraire

$$\Phi_0^{q_1,q_2,\delta x,\delta t} = \sum_{r_1=1}^{q_1} \sum_{r_2=1}^{q_2} \Phi_{r_1,r_2,0}^{\delta x,\delta t} h_{r_1}^{\delta x} f_{r_2}^{\delta t}$$

– **Pour** $n = 1, 2, ...$ **:**

– *Résolution de l'équation de la chaleur discrète avec les données mises à jour :*

$$\left\{ \begin{array}{c} \displaystyle\int_\Omega \frac{\partial \theta_n^{\delta x,\delta t}}{\partial t} w\, dx + \int_\Omega (\kappa grad\, \theta_n^{\delta x,\delta t})(grad\, w)\, dx + \int_{\partial\Omega} \alpha \theta_n^{\delta x,\delta t} w\, d\gamma = \\ \displaystyle\int_{\partial\Omega} \Phi_n^{q_1,q_2,\delta x,\delta t} w\, d\gamma, \quad \forall w \in \mathcal{H}^{\delta x} \\ \theta_n^{\delta x,\delta t}(x,0) = 0 \end{array} \right. \tag{5.36}$$

– *Calcul de* $P_n^{q_1,q_2,\delta x,\delta t} = \displaystyle\sum_{r_1=1}^{q_1}\sum_{r_2=1}^{q_2} P_{r_1,r_2,n}^{\delta x,\delta t} h_{r_1}^{\delta x} f_{r_2}^{\delta t}$ *avec :*

$$\begin{array}{c} \displaystyle\sum_{r_2=1}^{q_2} P_{r_1,r_2,n}^{\delta x,\delta t} \Big[\int_0^T \frac{df_{r_2}^{\delta t}}{dt}\frac{df_{s_2}^{\delta t}}{dt}\, dt + \int_0^T (1 + (\lambda_{r_1}^{\delta x})^2) f_{r_2}^{\delta t} f_{s_2}^{\delta t}\, dt \Big] = \\ \displaystyle\sum_{k=1}^{m} \int_0^T \Big(\theta_n^{\delta x,\delta t}(x_k,t) - \theta_{k,n}^{d,\delta t}(t) \Big) v_{r_1,s_2}^{\delta x,\delta t}(x_k,t)\, dt \qquad \forall r_1 = 1..q_1,\ s_2 = 1..q_2 \end{array} \tag{5.37}$$

– *Calcul de la direction de descente :*

$$s_n^{q_1,q_2,\delta x,\delta t} = P_n^{q_1,q_2,\delta x,\delta t} + \epsilon \Phi_n^{q_1,q_2,\delta x,\delta t} \tag{5.38}$$

$$d_n^{q_1,q_2,\delta x,\delta t} = s_n^{\delta x,\delta t} + \frac{\| s_n^{\delta x,\delta t} \|^2_{\mathcal{V}_h^{\delta x,\delta t}}}{\| s_{n-1}^{\delta x,\delta t} \|^2_{\mathcal{V}_h^{\delta x,\delta t}}} d_{n-1}^{\delta x,\delta t} \tag{5.39}$$

Si $d_n^{q_1,q_2,\delta x,\delta t}$ est écrit comme une combinaison linéaire

$$d_n^{q_1,q_2,\delta x,\delta t}(x,t) = \sum_{r_1=1}^{q_1}\sum_{r_2=1}^{q_2} d_{n,r_1,r_2}^{\delta x,\delta t} h_{r_1}^{\delta x}(x) f_{r_2}^{\delta t}(t) \tag{5.40}$$

et compte tenu de l'orthogonalité des fonctions $h_{r_1}^{\delta x}$, les coefficients $d_{r_1,r_2,n}^{\delta x,\delta t}$ s'écrivent :

$$d_{r_1,r_2,n}^{\delta x,\delta t} = P_{r_1,r_2,n}^{\delta x,\delta t} + \beta_n d_{r_1,r_2,n-1}^{\delta x,\delta t} + \epsilon \Phi_{r_1,r_2,n}^{\delta x,\delta t} \tag{5.41}$$

avec

$$\beta_n = \frac{\displaystyle\sum_{r_1=1}^{q_1}\sum_{r_2=1}^{q_2}\sum_{s_2=1}^{q_2} P_{r_1,r_2,n}^{\delta x,\delta t}(\phi_{ki}) P_{r_1,r_2,n}^{\delta x,\delta t}(\phi_{lj}) \int_0^T \Big(\frac{df_{r_2}^{\delta t}}{dt}\frac{df_{s_2}^{\delta t}}{dt} + f_{r_2}^{\delta t} f_{s_2}^{\delta t}(1 + \lambda_{r_1}^{\delta x 2}) \Big)\, dt}{\displaystyle\sum_{r_1=1}^{q_1}\sum_{r_2=1}^{q_2}\sum_{s_2=1}^{q_2} P_{r_1,r_2,n}^{\delta x,\delta t}(\phi_{ki}) P_{r_1,r_2,n-1}^{\delta x,\delta t}(\phi_{lj}) \int_0^T \Big(\frac{df_{r_2}^{\delta t}}{dt}\frac{df_{s_2}^{\delta t}}{dt} + f_{r_2}^{\delta t} f_{s_2}^{\delta t}(1 + \lambda_{r_1}^{\delta x 2}) \Big)\, dt} \tag{5.42}$$

– *Calcul de* $q_n^{\delta t} = \tau d_n^{\delta x,\delta t}$ *tel que :*

$$\left\{ \begin{array}{c} \displaystyle\int_\Omega \frac{\partial \vartheta^{\delta x,\delta t}}{\partial t} w\, dx + \int_\Omega (\kappa grad\, \vartheta^{\delta x,\delta t})(grad\, w)\, dx + \int_{\partial\Omega} \alpha \vartheta^{\delta x,\delta t} w\, d\gamma = \\ \displaystyle\int_{\partial\Omega} d_n^{q_1,q_2,\delta x,\delta t} w\, d\gamma, \quad \forall w \in \mathcal{H}^{\delta x} \\ \vartheta^{\delta x,\delta t}(x,0) = 0 \end{array} \right. \tag{5.43}$$

$$q_n^{\delta t} \equiv \{ q_{k,n}^{\delta t}(t) \}_{k=1}^m = \{ \vartheta^{\delta x,\delta t}(x_k,t) \}_{k=1}^m \tag{5.44}$$

– *Calcul du pas optimal r_n tel que :*

$$r_n = \frac{\big(P_n^{q_1,q_2,\delta x,\delta t}, d_n^{q_1,q_2,\delta x,\delta t}\big)_{\mathcal{V}_h^{\delta x,\delta t}}}{\|q_n^{q_1,q_2,\delta x,\delta t}\|^2_{\mathcal{M}_h^{\delta t}} + \epsilon \|d_n^{q_1,q_2,\delta x,\delta t}\|^2_{\mathcal{V}_h^{\delta x,\delta t}}} \tag{5.45}$$

avec

$$\begin{aligned}\big(P_n^{q_1,q_2,\delta x,\delta t}, d_n^{q_1,q_2,\delta x,\delta t}\big)_{\mathcal{V}_h^{\delta x,\delta t}} = & \sum_{r_1=1}^{q_1}\sum_{r_2=1}^{q_2}\sum_{s_2=1}^{q_2} P^{\delta x,\delta t}_{r_1,r_2,n} d^{\delta x,\delta t}_{r_1,s_2,n} \\ & \int_0^T \Big(\frac{df^{\delta t}_{r_2}}{dt}\frac{df^{\delta t}_{s_2}}{dt} + f^{\delta t}_{r_2} f^{\delta t}_{s_2}(1+\lambda^2_{r_1})\Big)\, dt\end{aligned} \tag{5.46}$$

et

$$\begin{aligned}\|d_n^{q_1,q_2,\delta x,\delta t}\|^2_{\mathcal{V}} = & \sum_{r_1=1}^{q_1}\sum_{r_2=1}^{q_2}\sum_{s_2=1}^{q_2} d^{\delta x,\delta t}_{r_1,r_2,n} d^{\delta x,\delta t}_{r_1,s_2,n} \\ & \int_0^T \Big(\frac{df^{\delta t}_{r_2}}{dt}\frac{df^{dt}_{s_2}}{dt} + f^{\delta t}_{r_2} f^{\delta t}_{s_2}(1+\lambda^2_{r_1})\Big)\, dt\end{aligned} \tag{5.47}$$

– *Mise à jour des variables :*

$$\Phi_{n+1}^{q_1,q_2,\delta x,\delta t} = \Phi_n^{q_1,q_2,\delta x,\delta t} - r_n d_n^{q_1,q_2,\delta x,\delta t} \tag{5.48}$$

– *Test de convergence*

5.2.2.2 Algorithme du gradient conjugué appliqué à la minimisation de la fonctionnelle duale

On cherche à minimiser la version discrète de la fonctionnelle duale (on note $X^{\delta t} = \{X_k^{\delta t}(t)\}_{k=1}^m$)

$$I^{\delta x,\delta t}_{\partial\Omega}(X) = \frac{1}{2}\Big[\sum_{k=1}^m \int_0^T \theta^{\delta x,\delta t}(x_k,t;P^{\delta x,\delta t}) X_k^{\delta t}(t)\, dt + \epsilon \sum_{k=1}^m \int_0^T X_k^{\delta t}(t)^2\, dt\Big] - \sum_{k=1}^m \int_0^T X_k^{\delta t}(t)\theta_k^{d,\delta t}(t)\, dt \tag{5.49}$$

$$I_{\partial\Omega}(X^{\delta t}) = \frac{1}{2}\big(\tau I^{-1}\tau^* X^{\delta t}, X^{\delta t}\big)_{\mathcal{M}_h^{\delta t},(\mathcal{M}')_h^{\delta t}} + \frac{\epsilon}{2}\big(\Lambda^{-1} X^{\delta t}, X^{\delta t}\big)_{\mathcal{M}_h^{\delta t},(\mathcal{M}')_h^{\delta t}} - \big\langle \theta^{d,\delta t}, X^{\delta t}\big\rangle_{\mathcal{M}_h^{\delta t},(\mathcal{M}')_h^{\delta t}} \tag{5.50}$$

Les étapes de l'algorithme sont alors les suivantes :

– **Initialisation :** *choix de* $X_0^{\delta t} = \{X_{k,0}^{\delta t}(t)\}_{k=1}^m \in \mathcal{M}_h^{\delta t}$ arbitraire

– **Pour** $n = 1, 2, \ldots$ **:**

– *Calcul de* $P_n^{q_1,q_2,\delta x,\delta t} = \sum_{r_1=1}^{q_1}\sum_{r_2=1}^{q_2} P^{\delta x,\delta t}_{r_1,r_2,n} h^{\delta x}_{r_1} f^{\delta t}_{r_2}$ *avec :*

$$\begin{aligned}&\sum_{r_2=1}^{q_2} P^{\delta x,\delta t}_{r_1,r_2}\Big[\int_0^T \frac{df^{\delta t}_{r_2}}{dt}\frac{df^{\delta t}_{s_2}}{dt}\, dt + \int_0^T (1+\lambda^{\delta x^2}_{r_1}) f^{\delta t}_{r_2} f^{\delta t}_{s_2}\, dt\Big] = \\ &\sum_{k=1}^m \int_0^T X^{\delta t}_{k,n}(t) v^{\delta x,\delta t}_{r_1,s_2}(x_k,t)\, dt \qquad \forall r_1 = 1..q_1,\ \forall s_2 = 1..q_2\end{aligned} \tag{5.51}$$

– *Résolution de l'équation de la chaleur discrète avec $P_n^{q_1,q_2,\delta x,\delta t}$ au second membre :*

$$\left\{\begin{array}{c} \displaystyle\int_\Omega \frac{\partial \theta_n^{\delta x,\delta t}}{\partial t} w\, dx + \int_\Omega (\kappa grad\, \theta_n^{\delta x,\delta t})(grad\, w)\, dx + \int_{\partial\Omega} \alpha \theta_n^{\delta x,\delta t} w\, d\gamma = \\ \displaystyle\int_{\partial\Omega} P_n^{q_1,q_2,\delta x,\delta t} w\, d\gamma, \quad \forall w \in \mathcal{H}^{\delta x} \\ \theta_n^{\delta x,\delta t}(x,0) = 0 \end{array}\right. \tag{5.52}$$

– *Calcul de la direction de descente :*

$$\{s_{k,n}^{\delta x,\delta t}\}_{k=1}^m = \{\theta_n^{\delta x,\delta t}(x_k,t) + \epsilon X_{k,n}^{\delta t}(t) - \theta_k^{d,\delta t}(t)\}_{k=1}^m \tag{5.53}$$

$$\{d_{k,n}^{\delta x,\delta t}\}_{k=1}^m = \left\{s_{k,n}^{\delta x,\delta t}\right\}_{k=1}^m + \beta_n \{d_{k,n-1}^{\delta x,\delta t}\}_{k=1}^m \tag{5.54}$$

avec

$$\beta_n = \frac{\displaystyle\sum_{k=1}^m \int_0^T \left(\theta_n^{\delta x,\delta t}(x_k,t) + \epsilon X_{k,n}^{\delta t}(t) - \theta_k^{d,\delta t}(t)\right) dt}{\displaystyle\sum_{k=1}^m \int_0^T \left(\theta_{n-1}^{\delta x,\delta t}(x_k,t) + \epsilon X_{k,n-1}^{\delta t}(t) - \theta_k^{d,\delta t}(t)\right) dt} \tag{5.55}$$

– *Calcul du pas optimal r_n :*
Calcul de $q_n^{q_1,q_2,\delta x,\delta t}$ comme solution de

$$q_n^{q_1,q_2,\delta x,\delta t} = \sum_{r_1=1}^{q_1}\sum_{r_2=1}^{q_2} q_{r_1,r_2,n}^{\delta x,\delta t} h_{r_1}^{\delta x}(x) f_{r_2}^{\delta t}(t). \tag{5.56}$$

avec les coefficients $q_{r_1,r_2,n}^{\delta x,\delta t}$ donnés par

$$\begin{array}{c} \displaystyle\sum_{r_2=1}^{q_2} q_{r_1,r_2,n}^{\delta x,\delta t}\Big[\int_0^T \frac{df_{r_2}^{\delta t}}{dt}\frac{df_{s_2}^{\delta t}}{dt}\, dt + \int_0^T (1+(\lambda_{r_1}^{\delta x})^2) f_{r_2}^{\delta t} f_{s_2}^{\delta t}\, dt\Big] = \\ \displaystyle\sum_{k=1}^m \int_0^T d_{k,n}^{\delta x,\delta t} v_{r_1,s_2}^{\delta x,\delta t}(x_k,t)\, dt \qquad \forall r_1 = 1..q_1,\ \forall s_2 = 1..q_2 \end{array} \tag{5.57}$$

puis de

$$r_n = \frac{\left(\{s_{k,n}^{\delta x,\delta t}\}_{k=1}^m, \{d_{k,n}^{\delta x,\delta t}\}_{k=1}^m\right)_{\mathcal{M}_h^{\delta t}}}{\|q_n^{q_1,q_2,\delta x,\delta t}\|^2_{\mathcal{V}_h^{\delta x,\delta t}} + \epsilon \|\{d_{k,n}^{\delta x,\delta t}\}_{k=1}^m\|^2_{\mathcal{M}_h^{\delta t}}} \tag{5.58}$$

avec

$$\begin{array}{rl} \|q_n^{q_1,q_2,\delta x,\delta t}\|^2_{\mathcal{V}_h^{\delta x,\delta t}} = & \displaystyle\sum_{r_1=1}^{q_1}\sum_{r_2=1}^{q_2}\sum_{s_2=1}^{q_2} q_{r_1,r_2,n}^{\delta x,\delta t} q_{r_1,s_2,n}^{\delta x,\delta t} \\ & \displaystyle\int_0^T \left(\frac{df_{r_2}^{\delta t}}{dt}\frac{df_{s_2}^{\delta t}}{dt} + f_{r_2}^{\delta t} f_{s_2}^{\delta t}(1+{\lambda_{r_1}^{\delta x}}^2)\right) dt \end{array} \tag{5.59}$$

– *Mise à jour des variables :*

$$\{X_{k,n+1}^{\delta x,\delta t}\}_{k=1}^m = \{X_{k,n}^{\delta x,\delta t}\}_{k=1}^m - r_n \{d_{k,n}^{\delta x,\delta t}\}_{k=1}^m \tag{5.60}$$

– *Test de convergence*

L'algorithme du gradient conjugué appliqué à la fonctionnelle duale converge en un nombre réduit d'itérations du fait de la taille inférieure de l'espace des observations par rapport à l'espace de contrôle. La formulation duale permet néanmoins de construire un algorithme direct qui consiste à construire la matrice correspondant à l'opérateur inverse autoadjoint, qu'il suffit ensuite d'inverser. Cela fait l'objet de ce qui suit.

5.2.3 Algorithme direct appliqué au problème dual

L'algorithme de reconstruction du flux présenté ici est fondé sur la formulation duale variationnelle. Cette formulation conduit à l'inversion directe la *matrice grammienne*. On lui donne l'acronyme RFTD.

Le problème dual sous forme variationnelle consiste à chercher un ensemble de fonctions $\{X_k(t)\}_{k=1}^m \in \mathcal{M}' = L^2(0,T)^m$ telles que :

$$\begin{aligned} &\int_{\partial\Omega\times[0,T]} \Big(\frac{\partial P(X)}{\partial t} \frac{\partial P(\psi)}{\partial t} + \mathcal{S}P(X)\mathcal{S}P(\psi) + P(X)P(\psi) \Big)\, d\gamma\, dt + \\ &\epsilon \sum_{k=1}^{m} \int_0^T X_k(t)\psi_k(t)\, dt = \sum_{k=1}^{m} \int_0^T \theta_k^d(t)\psi_k(t)\, dt \quad \forall \psi = \{\psi_k\}_{k=1}^m \in \mathcal{M} \end{aligned} \tag{5.61}$$

Ce problème peut être résolu de manière approché par une méthode de Galerkin, dont nous montrons la mise en œuvre dans ce suit. Les détails de l'implantation pratique sont passés ensuite en revue.

5.2.3.1 Construction de la matrice grammienne

Considérons de nouveau le sous-espace de dimension finie $\mathcal{M}_h \subset \mathcal{M}$ et la base

$$\Big\{ \{\phi_{ki}\}_{i=1}^{n_k} \Big\}_{k=1}^{m}$$

de cet espace introduits en début de chapitre.

Pour obtenir une approximation $X^h \equiv \{X_k^h(t)\}_{k=1}^m$ de la solution $\{X_k\}_{k=1}^m$ du problème (5.61), on considère le problème approché suivant :

$$\begin{aligned} &\int_{\partial\Omega\times[0,T]} \Big(\frac{\partial P(X^h)}{\partial t} \frac{\partial P(\psi^h)}{\partial t} + \mathcal{S}P(X^h)\mathcal{S}P(\psi^h) + P(X^h)P(\psi^h) \Big)\, d\gamma\, dt + \\ &\epsilon \sum_{k=1}^{m} \int_0^T X_k^h(t)\psi_k^h(t)\, dt = \sum_{k=1}^{m} \int_0^T \theta_k^d(t)\psi_k^h(t)\, dt \quad \forall \psi^h = \{\psi_k^h\}_{k=1}^m \in \mathcal{M}_h \end{aligned} \tag{5.62}$$

Si on cherche la solution de (5.62) sous la forme

$$X^h \equiv \{X_k^h(t)\}_{k=1}^m \sim \left\{ \sum_{i=1}^{n_k} \alpha_{ki}\phi_{ki}(t) \right\}_{k=1}^{m},$$

on est conduit à résoudre le système matriciel

$$\mathbb{A}\mathbf{x} = \mathbf{b}, \quad \mathbb{A} \in \mathcal{A}^{N_m \times N_m}(\mathbb{R}),\, \mathbf{b} \in \mathbb{R}^{N_m},\, N_m = \sum_{k=1}^{m} n_k$$

$$\Leftrightarrow$$

$$\begin{bmatrix} & A_{kilj} & \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \begin{Bmatrix} \alpha_{11} \\ \vdots \\ \alpha_{1n_1} \end{Bmatrix} \\ \begin{Bmatrix} \alpha_{21} \\ \vdots \\ \alpha_{2n_2} \end{Bmatrix} \\ \vdots \\ \begin{Bmatrix} \alpha_{m1} \\ \vdots \\ \alpha_{mn_m} \end{Bmatrix} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \begin{Bmatrix} b_{11} \\ \vdots \\ b_{1n_1} \end{Bmatrix} \\ \begin{Bmatrix} b_{21} \\ \vdots \\ b_{2n_2} \end{Bmatrix} \\ \vdots \\ \begin{Bmatrix} b_{m1} \\ \vdots \\ b_{mn_m} \end{Bmatrix} \end{Bmatrix} \tag{5.63}$$

avec

$$A_{kilj} = \int_{\partial\Omega\times[0,T]} \Big(\frac{\partial P(\phi_{ki})}{\partial t} \frac{\partial P(\phi_{lj})}{\partial t} + \mathcal{S}P(\phi_{ki})\mathcal{S}P(\phi_{lj}) + P(\phi_{ki})P(\phi_{lj}) \Big)\, d\gamma\, dt$$

et

$$b_{ki} = \int_0^T \theta_k^d(t)\phi_{ki}(t)\, dt$$

.

Passons maintenant aux détails de l'implantation pratique de ce problème approché.

En pratique, on calcule les coefficients de la matrice discrétisée $\mathbb{A}^{\delta x,\delta t}$ donnés par

$$\begin{aligned} A_{kilj}^{\delta x,\delta t} &= a(\phi_{ki}^{\delta t}, \phi_{lj}^{\delta t}) \\ &= \int_{\partial\Omega\times[0,T]} \Big(\frac{\partial P^{q_1,q_2,\delta x,\delta t}(\phi_{ki}^{\delta t})}{\partial t} \frac{\partial P^{q_1,q_2,\delta x,\delta t}(\phi_{lj}^{\delta t})}{\partial t} + \\ &\qquad \mathcal{S}P^{q_1,q_2,\delta x,\delta t}(\phi_{ki}^{\delta t})\mathcal{S}P^{q_1,q_2,\delta x,\delta t}(\phi_{lj}^{\delta t}) + \\ &\qquad P^{q_1,q_2,\delta x,\delta t}(\phi_{ki}^{\delta t})P^{q_1,q_2,\delta x,\delta t}(\phi_{lj}^{\delta t}) \Big)\, d\gamma\, dt \\ &\quad + \epsilon \int_0^T \phi_{ki}^{\delta t}\phi_{lj}^{\delta t}\, dt \end{aligned} \tag{5.64}$$

où $P^{q_1,q_2,\delta x,\delta t}$ est donné par

$$P^{q_1,q_2,\delta x,\delta t} = \sum_{r_1=1}^{q_1} \sum_{r_2=1}^{q_2} P_{r_1,r_2}^{\delta x,\delta t} h_{r_1}^{\delta x}(x) f_{r_2}^{\delta t}(t). \tag{5.65}$$

moyennant les résolutions des q_1 systèmes

$$\begin{aligned} &\sum_{r_2=1}^{q_2} P_{r_1,r_2}^{\delta x,\delta t} \Big[\int_0^T \frac{df_{r_2}^{\delta t}}{dt} \frac{df_{s_2}^{\delta t}}{dt}\, dt + \int_0^T (1 + {\lambda_{r_1}^{\delta x}}^2) f_{r_2}^{\delta t} f_{s_2}^{\delta t}\, dt \Big] = \\ &\qquad \int_0^T \phi_{ki}^{\delta t}(t) \upsilon_{r_1,s_2}^{\delta x,\delta t}(x_0,t)\, dt \qquad \forall r_1 = 1..q_1,\, \forall s_2 = 1..q_2 \end{aligned} \tag{5.66}$$

pour déterminer les coefficients $P^{\delta x,\delta t}_{r_1,r_2}$. En injectant l'expression (5.16) dans (5.64), et compte tenu de l'orthogonalité des fonctions $h^{\delta x}_{r_1}$, on obtient

$$\begin{aligned} A^{\delta x,\delta t}_{kilj} &= a(\phi^{\delta t}_{ki},\phi^{\delta t}_{lj}) \\ &= \sum_{r_1=1}^{q_1}\sum_{r_2=1}^{q_2}\sum_{s_2=1}^{q_2} P^{\delta x,\delta t}_{r_1,r_2}(\phi_{ki})P^{\delta x,\delta t}_{r_1,s_2}(\phi_{lj})\int_0^T \Big(\frac{df^{\delta t}_{r_2}}{dt}\frac{df^{\delta t}_{s_2}}{dt} + \\ &\qquad\qquad f^{\delta t}_{r_2}f^{\delta t}_{s_2}(1+\lambda^{\delta x^2}_{r_1}) \Big)\, dt \\ &\quad +\epsilon\int_0^T \phi^{\delta t}_{ki}\phi^{\delta t}_{lj}\, dt \end{aligned} \tag{5.67}$$

5.2.3.2 Inversion

Une fois construite la matrice $\mathbb{A}^{\delta x,\delta t}$, la résolution du problème inverse consiste à résoudre le système

$$\mathbb{A}^{\delta x,\delta t}\mathbf{X}^{\delta t} = \mathbf{b}^{\delta t} \tag{5.68}$$

avec

$$\mathbf{b}^{\delta t} = \{b^{\delta t}_{ki}\}^{m,n_k}_{k=1,i=1}, \quad b^{\delta t}_{ki} = \int_0^T \theta^{d,\delta t}_k(t)\phi^{\delta t}_{ki}\, dt$$

et

$$\mathbf{X}^{\delta t} = \{X^{\delta t}_{ki}\}^{m,n_k}_{k=1,i=1}, \quad \text{tel que } X^{\delta t}_k(t) = \sum_{i=1}^{n_k} X^{\delta t}_{ki}\phi^{\delta t}_{ki}$$

($\theta^{d,\delta t}_k(t)$ sont les mesures discrètes, c'est-à-dire les mesures projetées sur $\mathcal{F}^{\delta t}$).

Ce calcul doit être fait en ligne, mais en pratique la taille du système $\sum_{k=1}^m n_k$ reste faible, ce qui permet une résolution rapide par une méthode algébrique classique. La solution duale $\{X^{\delta t}_k\}^m_{k=1}$ permet de calculer la solution primale Φ (ou plutôt une approximation $\Phi^{q_1,q_2,\delta x,\delta t} \in \mathcal{V}^{\delta x,\delta t}_h$ de celle-ci) grâce à l'expression de l'état adjoint :

$$\begin{aligned} \Phi^{q_1,q_2,\delta x,\delta t} &= P^{q_1,q_2,\delta x,\delta t}(\{X^{\delta t}_k\}^m_{k=1}) \\ &= \sum_{r_1=1}^{q_1}\sum_{r_2=1}^{q_2} P^{\delta x,\delta t}_{r_1,r_2}(\{X^{\delta t}_k\}^m_{k=1})h^{\delta x}_{r_1}(x)f^{\delta t}_{r_2}(t) \end{aligned} \tag{5.69}$$

où $P^{\delta x,\delta t}_{r_1,r_2}$ est donné par la résolution des q_1 systèmes de taille q_2 :

$$\begin{aligned} &\sum_{r_2=1}^{q_2} P^{\delta x,\delta t}_{r_1,s_2}\Big[\int_0^T \frac{df^{\delta t}_{r_2}}{dt}\frac{df^{\delta t}_{s_2}}{dt}\, dt + \int_0^T (1+\lambda^{\delta x^2}_{r_1})f^{\delta t}_{r_2}f^{\delta t}_{s_2}\, dt\Big] = \\ &\sum_{k=1}^m \int_0^T X^{\delta t}_k(t)v^{\delta x,\delta t,\delta t}_{r_1,s_2}(x_k,t)\, dt \qquad \forall r_1 = 1..q_1,\ \forall s_2 = 1..q_2 \end{aligned} \tag{5.70}$$

L'évaluation de cette expression est plus coûteuse en temps de calcul que l'inversion du système (5.68). Mais il ne s'agit là que d'une étape de post-traitement qui peut être dissociée du calcul en ligne.

5.2.3.3 Récapitulatif de l'algorithme

Pour récapituler, voici énumérées les étapes successives qui constituent l'algorithme. Nous faisons la distinction entre celles qui peuvent être effectuées hors ligne, lors de l'étape de précalcul, et celles qui relèvent du calcul en ligne.

Paramètres

- Maillages : $\mathcal{K}$, $\mathcal{T}$, δx, δt
- Constantes liées à la méthode de calcul : q_1, q_2, n_k, $k = 1..m$
- Constantes liées à la physique : m, ϵ

Précalculs hors ligne

1. Résolution de (5.13) pour obtenir $\{h_{r_1}^{\delta x}\}_{r_1=1}^{q_1} = \{z_\ell^{\delta x}|_{\partial\Omega}\}_{r_1=1}^{q_1}$
2. *Si f_r sont des fonctions propres de Fourier*
   - $\{f_{r_2}^{\delta t}\}_{r_2=1}^{q_2} \in \mathcal{F}^{\delta t} \cap H^1([0,T])$ écrites explicitement
   - Résolution des $q_1 \times q_2$ problèmes (5.14)

   Si f_r sont des fonctions de forme d'éléments finis
   - Résolution des q_1 problèmes (5.14) pour $r_2 = 2$
   - Propagation de la solution : pour $r_2 = 3..q_2$

   $$v_{r_1,r_2+1}^{\delta x,\delta t}(x, t+\delta t) = v_{r_1,r_2}^{\delta x,\delta t}(x,t)$$
3. Résolution des q_1 systèmes de taille q_2 (5.66) pour $i = 1..n_k$, $k = 1..m$
4. Calcul des coefficients $A_{kilj}^{\delta x,\delta t}$ par (5.67) (on utilise la symétrie)

Calculs en ligne

1. Calcul du second membre : $b_{ki}^{\delta t} = \displaystyle\int_0^T \theta_k^{d,\delta t}(t)\phi_{ki}^{\delta t}\,dt$
2. Inversion du système $\mathbb{A}^{\delta x,\delta t}\mathbf{X}^{\delta t} = \mathbf{b}^{\delta t}$

Post-traitement

1. Calcul de la solution primale : résolution des q_1 systèmes (5.70) et sommation selon (5.69)

5.2.3.4 Etude de la matrice grammienne

La matrice $\mathbb{A}$ est la matrice grammienne de contrôlabilité du système. Elle est carrée, symétrique, de taille $m \times N_m$, où $N_m = \sum_{k=1}^m n_k$ est le nombre de fonctions de base ϕ_{ki} utilisées pour l'approximation de l'espace des observations. La résolution du problème dual revient à inverser cette matrice. L'étude des coefficients de $\mathbb{A}$ fournit des renseignements intéressants.

Nous pouvons donner une interprétation physique des coefficients de $\mathbb{A}$. Si le capteur k et le capteur l sont remplacés par des sources qui varient en temps selon $\phi_i(t)$ et $\phi_j(t)$ respectivement, ils génèrent deux champs. Le coefficient $\mathbb{A}_{kilj}$ mesure la puissance du produit de ces deux champs sur la surface. L'intensité du coefficient traduit la sensibilité des deux capteurs par rapport à un champ imposé en surface.

Les coefficients $\mathbb{A}_{kilj}$ sont ordonnés comme suit : pour chaque ligne on retrouve rangés dans l'ordre les n_1 coefficients liés au capteur 1 ($\mathbb{A}_{1ilj}, \quad i = 1..n_1$), puis les n_2 coefficients liés au capteur 2 ($\mathbb{A}_{2ilj}, \quad i = 1..n_2$), etc. De même pour les colonnes (la matrice est symétrique).

La figure 5.3 montre la répartition des termes supérieurs à un seuil donné, la matrice $\mathbb{A}$ étant construite pour $m = 14$ capteurs et $n_k = 20, \quad \forall k$ (les fonctions de base ϕ_{ki} sont des fonctions propres de Fourier). On voit apparaître des structures en bloc, qui montrent que les coefficients $\mathbb{A}_{kilj}$ décroissent lorsque i et j décroissent. Chaque bloc traduit la sensibilité du couple de capteurs correspondant.

La figure 5.4 montre la diagonale de $\mathbb{A}$ en échelle logarithmique. La décroissance des valeurs traduit l'atténuation des composantes fréquentielles avec la profondeur : plus un capteur est loin de la surface, moins il sera sensible à des fréquences élevées du flux (correspondant à des valeurs élevées de l'indice i de ϕ_{ki}). Ce n'est pas étonnant de voir par conséquent que chaque fonction ϕ_{ki} ne pèse pas le même poids pour tous les indices i et pour tous les capteurs. A i fixé, le poids du coefficient correspondant n'est pas le même pour tous les capteurs k.

Par conséquent, lorsque les fonctions de base ϕ_{ki} sont des fonctions propres de Fourier, en prendre un nombre égal quel que soit le capteur ne semble pas être une stratégie optimale. Il vaut mieux prendre un nombre n_k important pour un capteur proche de la surface, et un nombre n_k plus petit si celui est plus éloigné. En pratique, il est possible de se fixer un seuil pour la valeur des coefficients de la matrice. Pour un capteur k donné, on calcule alors $\mathbb{A}_{kiki}$ pour i croissant jusqu'à atteindre ce seuil. La valeur de i donne alors la valeur de n_k.

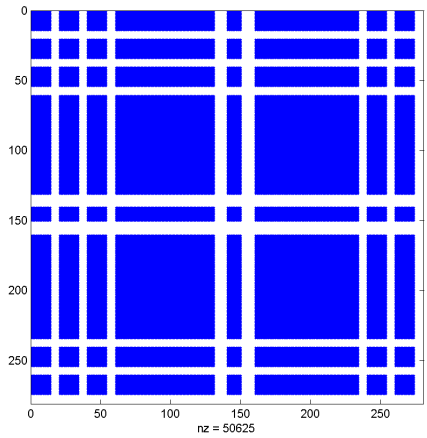
5.2.4 Bilan des différents algorithmes de reconstruction du flux

Le tableau 5.1 récapitule les différents calculs intervenant dans chacun des algorithmes de reconstruction du flux, avec des estimations du temps de calcul associé. On choisit ici les fonctions f_r comme des fonctions de forme d'éléments finis. Les temps approximatifs d'exécution de chaque étape sont donnés à des fins de comparaison. Ils ont été obtenus avec un modèle discrétisé par éléments finis avec 10 000 degrés de liberté environ (paramètre δx) et sur une partition temporelle de 100 pas de temps (paramètre δt). Nous utilisons un ordinateur de bureau *Pentium IV* à $2,8\,GHz$[1].

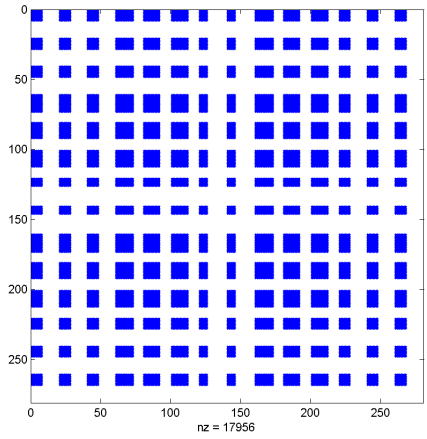
Les avantages de l'approche duale apparaissent clairement. En comparant les deux versions d'algorithmes itératifs, on constate que, outre le nombre beaucoup plus réduit d'itérations nécessaires a priori pour obtenir le résultat, l'algorithme du gradient conjugué appliqué à la fonctionnelle duale fait intervenir beaucoup moins de calculs dans chaque itération que l'algorithme en version primale. L'équation directe est en effet résolue une seule fois par itération, contre deux pour la version primale. L'adjoint est calculé par transposition : sa détermination (deux calculs par itération pour la version duale et un pour la version primale) nécessite l'inversion de q_1 systèmes de taille q_2, ce qui est peu coûteux avec des méthodes usuelles. Le prix à payer est le précalcul de q_1 problèmes paraboliques, dont le résultat est stocké en mémoire.

Comparé aux algorithmes itératifs, l'algorithme direct fondé sur la formulation variationnelle ne nécessite en ligne que l'inversion de la matrice grammienne, de taille $\sum_{i=1}^{n_k}$. Le coût des étapes de

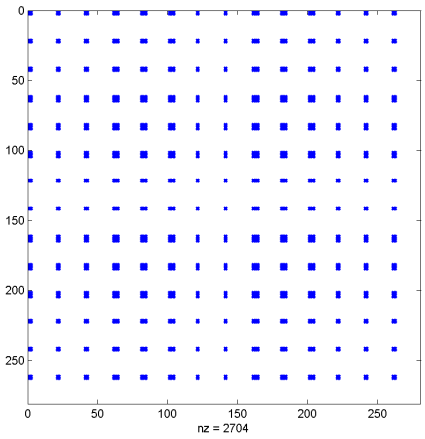
[1]Nous estimons que l'implantation des algorithmes n'est pas optimisée au moment du dépôt de ce travail, et que ces temps de calcul peuvent encore être réduits.



(a) . . . supérieurs à 10^{-5}



(b) . . . supérieurs à 10^{-4}



(c) . . . supérieurs à 10^{-3}

FIG. 5.3 – Répartition des termes de la matrice $\mathbb{A}$. . .

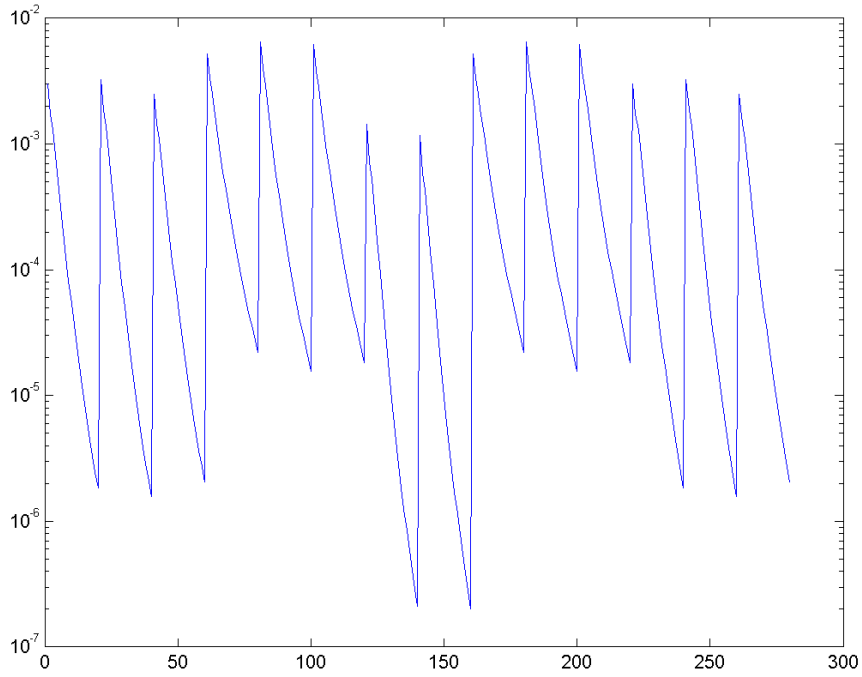


FIG. 5.4 – Diagonale de la matrice $\mathbb{A}$

précalcul est par contre plus élevé, mais ces calculs sont effectués une fois pour toutes. Cette approche paraît donc beaucoup plus intéressante dans le cas général.

Le gradient conjugué en version duale peut néanmoins être un concurrent potentiel si une ébauche fiable du résultat est disponible : dans ce cas, le nombre d'itérations nécessaires est drastiquement réduit. C'est le cas par exemple lorsque les fenêtres d'observation se superposent l'une à l'autre, dans une application de contrôle en continu du champ thermique (cf. partie 4.5.2). Une stratégie de réutilisation des espaces de Krylov, générés par les directions de descente successives, pourrait aussi être explorée pour ce cas de figure.

5.2.5 Résultats avec données de synthèse

Les résultats ci-dessous sont issus de simulations numériques avec l'algorithme dual de reconstruction direct. Ils sont obtenus avec un modèle représentant un bloc de béton dont la géométrie est donnée en annexe. Nous donnerons plus de détails sur le bloc modélisé dans le chapitre 7 concernant les validations expérimentales.

Le principe des simulations numériques est le même que celui adopté dans le chapitre 3 : un calcul direct dans lequel sont imposées des sources surfaciques connues (les données cibles) est effectué. Il fournit des données $\{\theta_k^d(t)\}_{k=1}^m$ prélevées sur les m points x_k où sont supposés placés des capteurs. Ces données sont ensuite utilisées pour reconstruire, à l'aide de l'algorithme dual direct, les données cibles. Pour étudier la stabilité des différents algorithmes en présence de bruit, du bruit blanc peut être ajouté numériquement sur les données. Nous supposons pour toutes les simulations de cette partie que

Calculs	Nature	Temps estimé (s)
GC pour la fonctionnelle primale		
Précalculs		
Obtention de $\{h_{r_1}^{\delta x}\}_{r_1=1}^{q_1}$ par (5.13)	Problème aux valeurs propres	100
Calcul des $v_{r_1,r_2}^{\delta x,\delta t}$ par (5.14) ($r_2 = 2$)	q_1 problèmes paraboliqes	$q_1 \times 30$
Calculs en ligne		
Pour N itérations :		
Résolution de l'équation directe (5.36)	1 problème parabolique	30
Résolution de (5.37)	q_1 systèmes de taille q_2	$q_1 \times 10$
Calcul des $q_1 \times q_2$ coefficients β_n par (5.42)	$q_1 \times q_2 \times (q_1.q_2^2)$ multiplications	100
Calcul de q_n par (5.43)-(5.44)	1 problème parabolique	30
Calcul du pas par (5.46)-(5.47) puis (5.45)	$2 \times (q_1.q_2^2)$ multiplications	100
		$(530 + q_1 \times 10) \times N$
Post-traitement		
Calcul du champ solution	1 problème parabolique	30
GC pour la fonctionnelle duale		
Précalculs		
Obtention de $\{h_{r_1}^{\delta x}\}_{r_1=1}^{q_1}$ par (5.13)	Problème aux valeurs propres	100
Calcul des $v_{r_1,r_2}^{\delta x,\delta t}$ par (5.14) ($r_2 = 2$)	q_1 problèmes paraboliqes	$q_1 \times 30$
Calculs en ligne		
Pour N itérations :		
Résolution de (5.51)	q_1 systèmes de taille q_2	$q_1 \times 10$
Résolution de l'équation directe (5.52)	1 problème parabolique	30
Calcul du coefficient β_n par (5.55)	2 intégrations en temps	..
Calcul de $q_n^{q_1,q_2,\delta x,\delta t}$ par (5.56)-(5.57)	q_1 systèmes de taille q_2	$q_1 \times 10$
Calcul du pas optimal r_n par (5.59) puis (5.58)	$q_1.q_2^2$ multiplications	50
		$(80 + q_1 \times 2) \times N$
Post-traitement		
Calcul du champ adjoint	q_1 systèmes de taille q_2	
Calcul du champ solution	1 problème parabolique	
Algorithme direct dual		
Précalculs		
Obtention de $\{h_{r_1}^{\delta x}\}_{r_1=1}^{q_1}$ par (5.13)	Problème de valeurs propres	100
Calcul des $v_{r_1,r_2}^{\delta x,\delta t}$ par (5.14) ($r_2 = 2$)	q_1 problèmes paraboliqes	$q_1 \times 30$
Résolution de (5.66) pour $k = 1..m\, i = 1..n_k$	$N_m \times q_1$ systèmes de taille q_2	$q_1 \times 10$
Calcul des coefficients $A_{kilj}^{\delta x,\delta t}$ par (5.67)	$\frac{1}{2}N_m^2 \times (q_1.q_2^2)$ multiplications	1000
Calculs en ligne		
Calcul du second membre dans (5.68)		..
Inversion de (5.68)	1 système de taille $N_m \times m$	2
Post-traitement		
Calcul du champ adjoint	q_1 systèmes de taille q_2	$q_1 \times 10$
Calcul du champ solution	1 problème parabolique	30

TAB. 5.1 – Récapitulatif des différents algorithmes de reconstruction du flux.

la température initiale est nulle et qu'il n'existe aucune source interne de chaleur. Aussi, on distingue deux parties de $\partial\Omega$: une partie Γ sur laquelle on suppose que le flux est inconnu, et sur laquelle porte la reconstruction, et une partie $\partial\Omega \setminus \Gamma$ où les flux sont supposés connus et nuls (conditions de surface homogènes). Cela ne modifie pas la méthode de reconstruction ni la conception de l'algorithme.

40 capteurs sont modélisés dans ce bloc, mais ils ne servent pas toujours tous à la reconstruction. En fonction des cas, nous précisons le lot de m capteurs qui sont réellement utilisés pour l'inversion. Les $40-m$ autres peuvent alors servir pour le calcul d'une erreur de reconstruction. Cette configuration paraît arbitraire en simulation, vu qu'on a accès aux champs cible et reconstruit, et qu'on peut calculer une erreur de reconstruction dans l'ensemble du domaine. Mais elle correspond en réalité au protocole qui a été retenu pour la validation expérimentale qui fera l'objet du chapitre 7. La qualité des résultats est par ailleurs évaluée par les différents indicateurs résumés dans le tableau 5.2 (θ_{sim} désigne le champ de température issu de la simulation, et θ_{rec} le champ reconstruit).

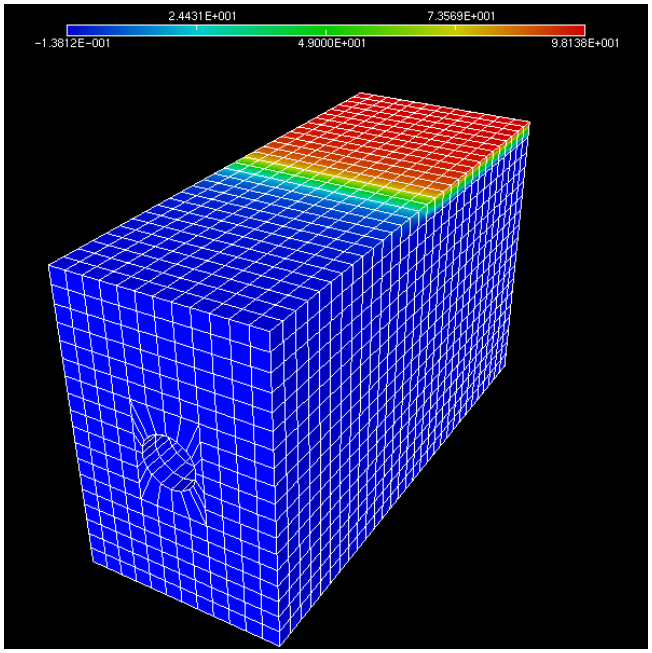
Dans la simulation considérée ici, un flux est imposé sur une partie de la face $z = 0,45$ du solide. Le flux est réparti sur la face $z = 0,45$ du solide et évolue en temps comme l'indique la figure 5.5. L'évolution du flux a été choisie pour présenter des points anguleux qui sont en théorie plus difficiles à reconstruire. La valeur finale n'étant pas nulle, ce choix permettra aussi de visualiser les performances de la méthode à l'instant final. La température initiale est nulle.

Deux lots de capteurs différents sont utilisés pour la reconstruction. Il s'agit des 14 capteurs A1, A4, A6, B1, B4, B6, C2, C7, D1, D4, D6, E1, E4 et E6 pour le premier lot, et des 8 capteurs A1, A6, B4, C2, C7, D4, E1 et E6 pour le deuxième lot (cf. figure 5.6). Leurs emplacements sont schématisés sur la figure 5.6.

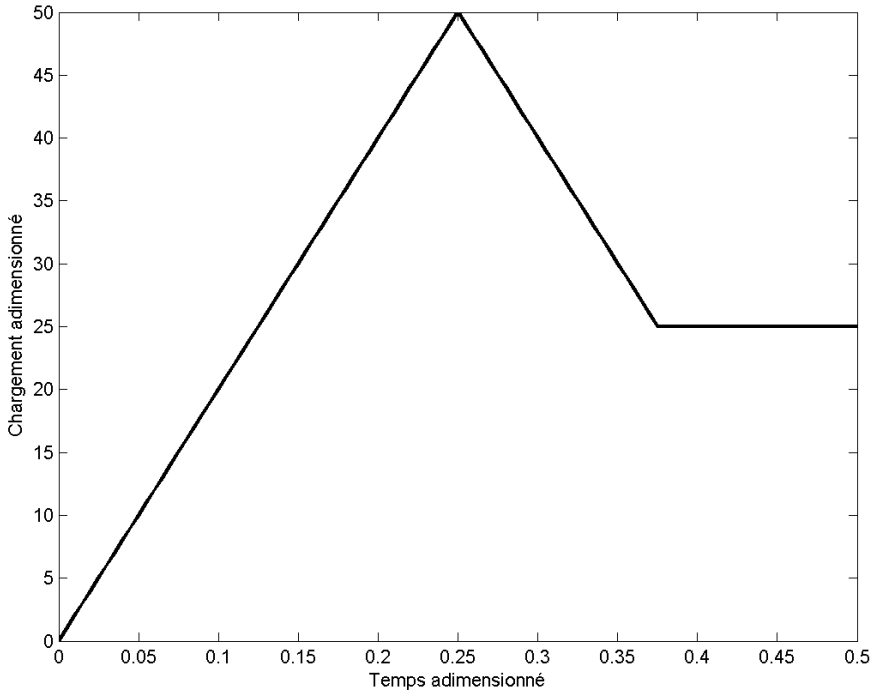
Les fonctions de base ϕ_{ki} de $\mathcal{M}_h$ sont ici les fonctions propres de Fourier avec conditions initiale et finale de Neumann. Les fonctions $g_{r_1,r_2}(x,t)$ sont construites à partir d'une base de modes de branche dont l'allure peut être visualisée sur la figure 5.7. La base en temps est une base éléments finis.

Erreur	**Expression**
Valeur moyenne du champ	$\mathcal{C}_\Omega(t) = \frac{1}{\lvert\Omega\rvert}\left(\int_\Omega \theta^2\,dx\right)^{\frac{1}{2}}$
Valeur moyenne globale	$\mathcal{C}_{\Omega\times[0,T]} = \frac{1}{\lvert\Omega\rvert T}\left(\int_{\Omega\times[0,T]} \theta^2\,dx\,dt\right)^{\frac{1}{2}}$
Erreur moyenne de dans le domaine	$\mathcal{D}_\Omega(t) = \frac{1}{\lvert\Omega\rvert}\left(\int_\Omega \left(\theta_{rec}(x,t) - \theta_{sim}(x,t)\right)^2 dx\right)^{\frac{1}{2}}$
Erreur moyenne globale	$\mathcal{D}_{\Omega\times[0,T]} = \frac{1}{\lvert\Omega\rvert T}\left(\int_{\Omega\times[0,T]} \left(\theta_{rec} - \theta_{sim}\right)^2 dx\,dt\right)^{\frac{1}{2}}$
Erreur relative dans le domaine	$\mathcal{E}_\Omega(t) = \left(\frac{\int_\Omega \left(\theta_{rec}(x,t) - \theta_{sim}(x,t)\right)^2 dx}{\int_\Omega \theta_{sim}(x,T)^2\,dx}\right)^{1/2}$
Erreur relative globale	$\mathcal{E}_{\Omega\times[0,T]} = \left(\frac{\int_{\Omega\times[0,T]} \left(\theta_{rec} - \theta_{sim}\right)^2 dx\,dt}{\int_{\Omega\times[0,T]} \theta_{sim}^2\,dx\,dt}\right)^{1/2}$
Erreur relative au niveau des capteurs	$\mathcal{E}_m = \left(\frac{\sum_{k=1}^{m}\int_0^T \left(\theta_{rec}(x_k,t) - \theta_{sim}(x_k,t)\right)^2 dt}{\sum_{k=1}^{m}\int_0^T \theta_{sim}(x_k,t)^2\,dt}\right)^{1/2}$
Erreur relative au niveau des capteurs de vérification	$\mathcal{E}_{40-m}(t) = \left(\frac{\sum_{k=m}^{40}\left(\theta_{rec}^{\delta x,\delta t}(x_k,t) - \theta_{sim}^{\delta x,\delta t}(x_k,t)\right)^2}{\sum_{k=1}^{m}\left(\theta_{sim}^{\delta x,\delta t}(x_k,T)\right)^2}\right)^{1/2}$

TAB. 5.2 – Définition des erreurs pour la comparaison des résultats.

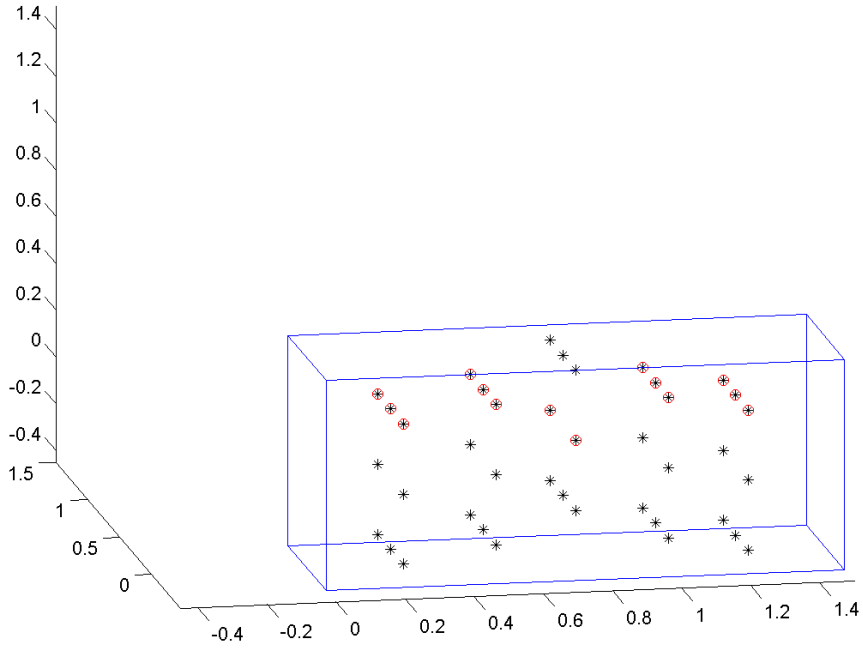


(a) Distribution spatiale

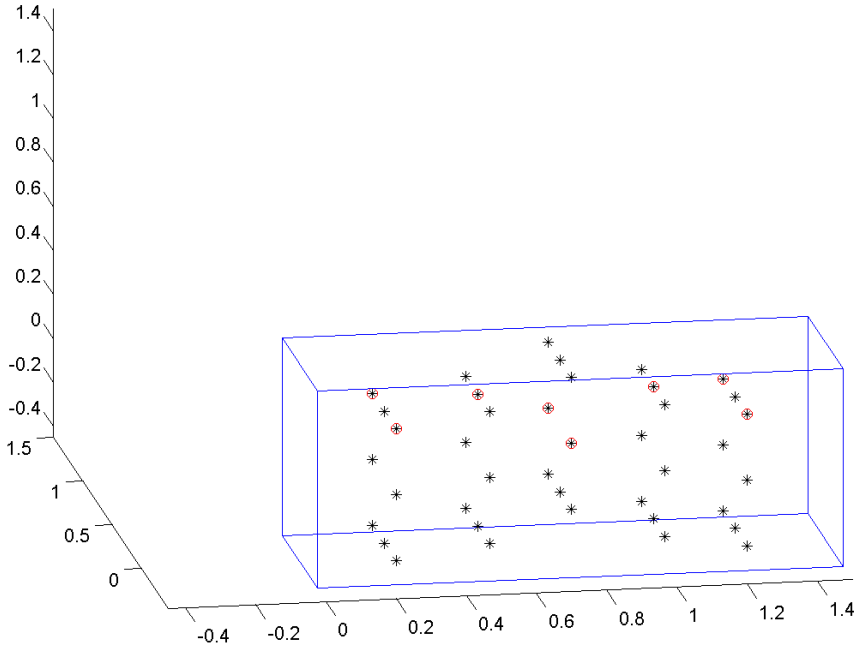


(b) Evolution en temps

FIG. 5.5 – Flux imposé



(a) Lot 1



(b) Lot 2

FIG. 5.6 – Les deux lots de capteurs utilisés pour la reconstruction (astérisques entourés)

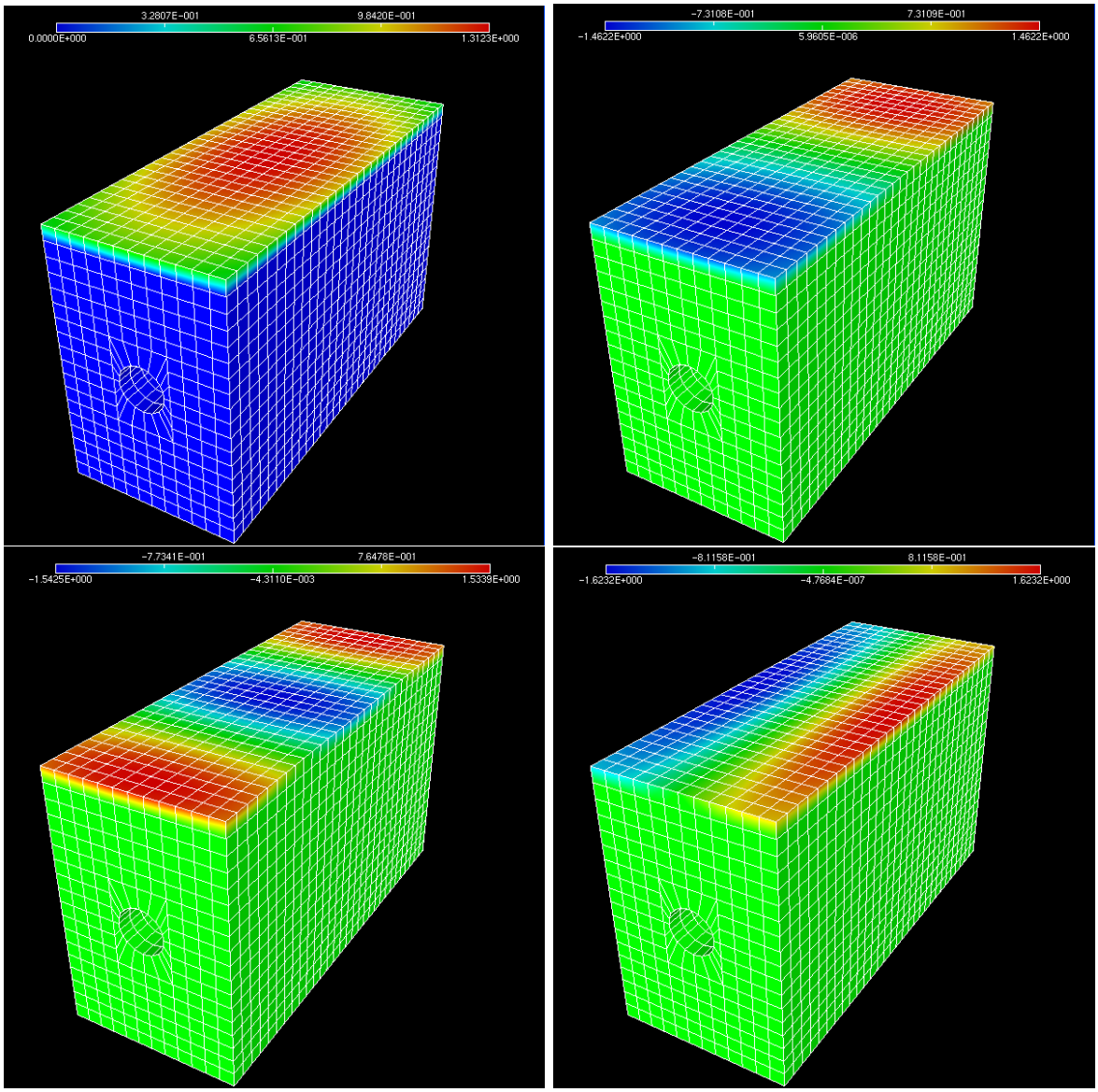


FIG. 5.7 – Trace des 4 premiers modes de branche h_l sur Γ

Sur la figure 5.8 les champs de synthèse et reconstruit sont comparés au niveau des capteurs. L'adéquation au niveau des 14 capteurs utilisés pour la reconstruction (figure 5.8(a)) prouve la bonne convergence de l'algorithme, c'est-à-dire la minimisation du critère quadratique (primal). La figure 5.9 donne les erreurs associées $\mathcal{E}_m$ et $\mathcal{E}_{40-m}$ tandis que la figure 5.10 donne l'erreur $\mathcal{E}_\Omega$ dans le domaine.

La figure 5.11 permet de comparer les flux de synthèse et reconstruits au niveau d'un point arbitraire de la surface et montre la reconstruction correcte de chaque composante du flux (dans la base $\{h_{r_1}(x)\}_{r_1=1}^{q_1}$) en fonction du temps. Le flux est reconstruit avec une erreur relative

$$\Big[\frac{\displaystyle\int_{\Gamma\times[0,T]} \big(\Phi_{rec}-\Phi_{sim}\big)^2\, d\gamma\, dt}{\displaystyle\int_{\Gamma\times[0,T]} \Phi_{sim}\, d\gamma\, dt}\Big]^{\frac{1}{2}}$$

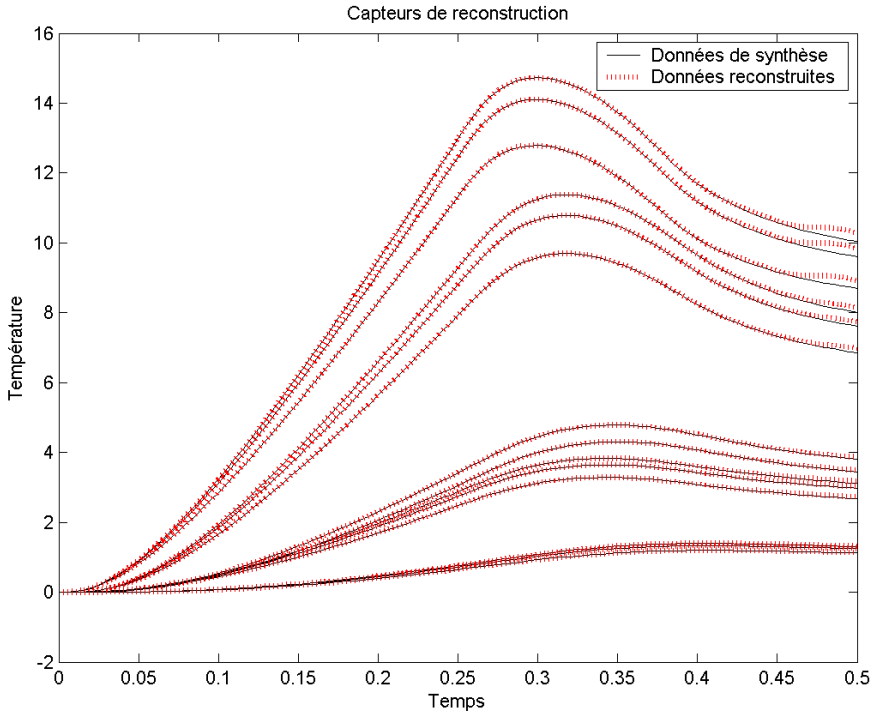
de $11,76\%$ avec le premier lot de capteurs, et de $13,39\%$ avec le deuxième lot.

La figure 5.12 permet enfin une comparaison de l'allure tridimensionnelle des champs de synthèse θ_{sim} et reconstruit θ_{rec}. Le champ moyen au temps final $\mathcal{C}(T)$ étant de $5,21^\circ C$, l'erreur de reconstruction moyenne correspondante $\mathcal{D}(T)$ est de $0,14^\circ C$ avec le premier et le deuxième lots de capteurs, ce qui correspond à une erreur relative de $2,7\%$. Ces valeurs sont résumées dans le tableau 5.3.

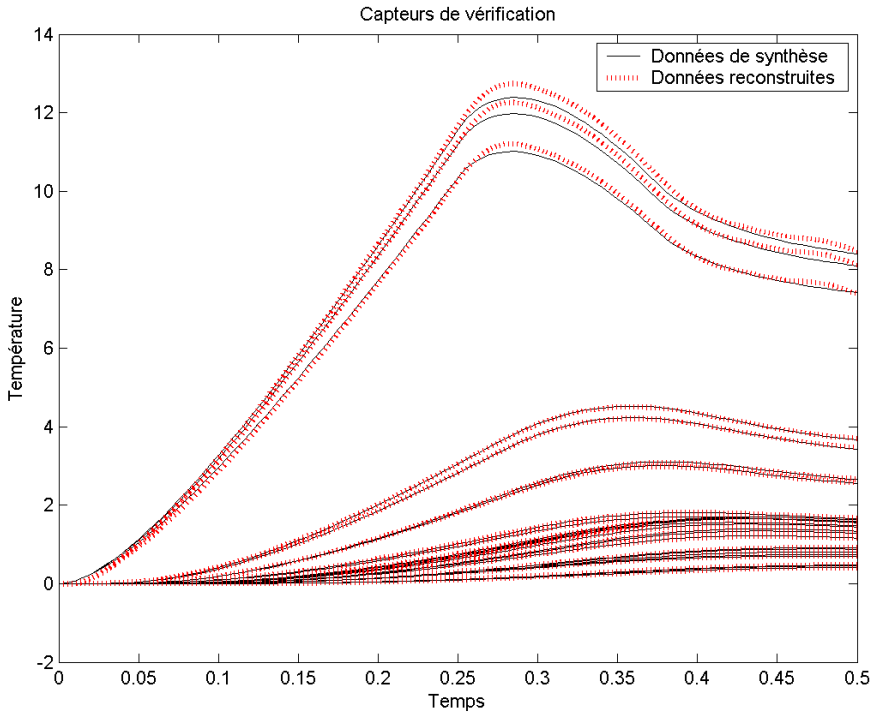
Il n'y a rien de surprenant à trouver une erreur relative sur le champ reconstruction inférieure à l'erreur relative sur le flux : nous avons vu que les hautes fréquences du flux sont les plus difficiles à reconstruire, et c'est sur ces hautes fréquences que se concentre l'erreur. Une partie de cette erreur est amortie à cause des propriétés lissantes de la conduction.

Cas étudié	$\mathcal{C}_{\Omega\times[0,T]}$	$\mathcal{D}_{\Omega\times[0,T]}$	$\mathcal{E}_{\Omega\times[0,T]}$	$\mathcal{C}_\Omega(T)$	$\mathcal{D}_\Omega(T)$	$\mathcal{E}_\Omega(T)$
Champ cible	$7,36^\circ C$			$5,21^\circ C$		
Lot 1	$7,36^\circ C$	$0,19^\circ C$	$2,5\%$	$5,25^\circ C$	$0,14^\circ C$	$2,7\%$
Lot 2	$7,37^\circ C$	$0,21^\circ C$	$2,8\%$	$5,24^\circ C$	$0,14^\circ C$	$2,7\%$

TAB. 5.3 – Erreurs de reconstruction du champ de température

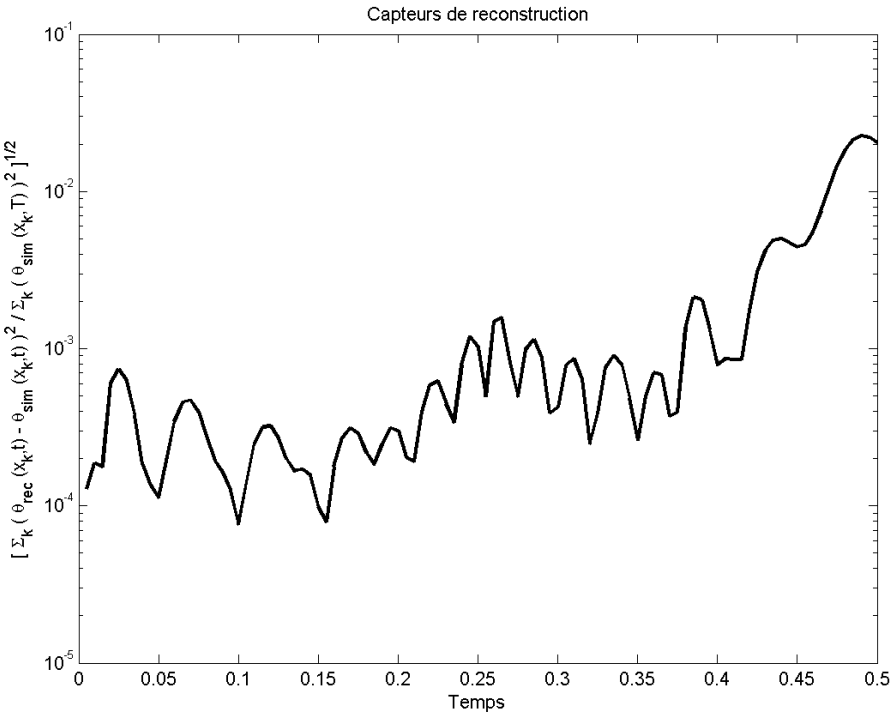


(a) Au niveau des capteurs de reconstruction

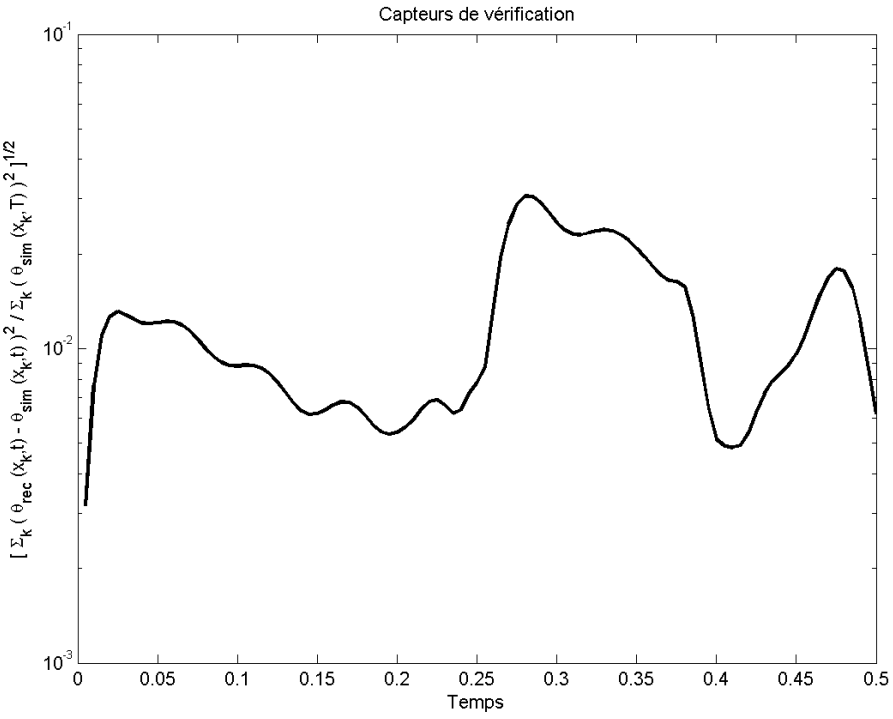


(b) Au niveau des capteurs de vérification

FIG. 5.8 – Algorithme RFTD, lot de capteurs 1 ($q_1 = 20$, $n_k = 20\,\forall k$, $\epsilon = 10^{-10}$) : évolution des champs reconstruit et de synthèse



(a) Au niveau des capteurs de reconstruction $\mathcal{E}_m(t)$



(b) Au niveau des capteurs de vérification $\mathcal{E}_{40-m}(t)$

FIG. 5.9 – Algorithme RFTD, lot de capteurs 1 ($q_1 = 20$, $n_k = 20\,\forall k$, $\epsilon = 10^{-10}$) : erreur de reconstruction

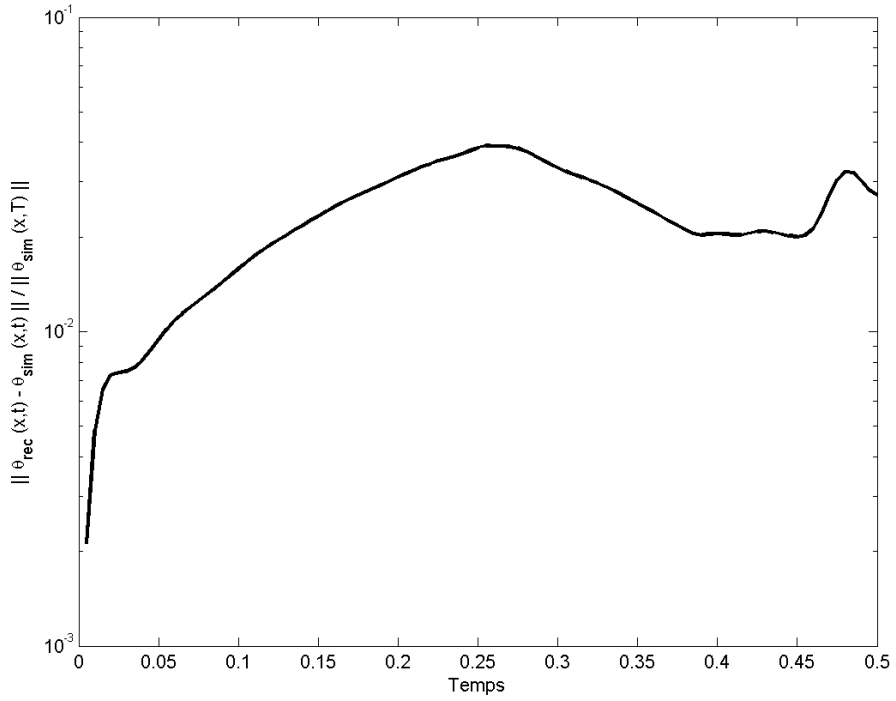
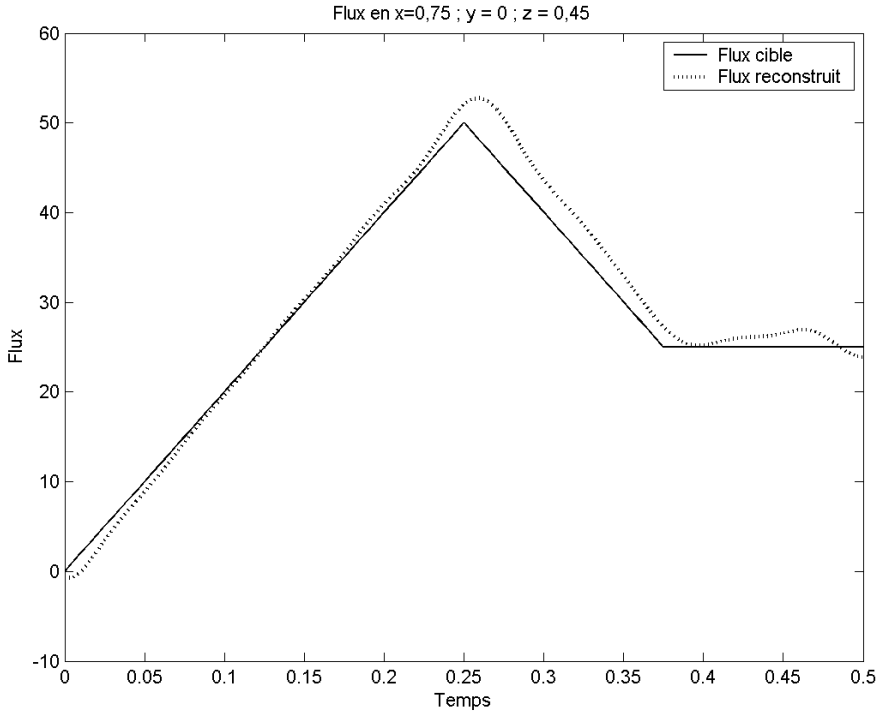
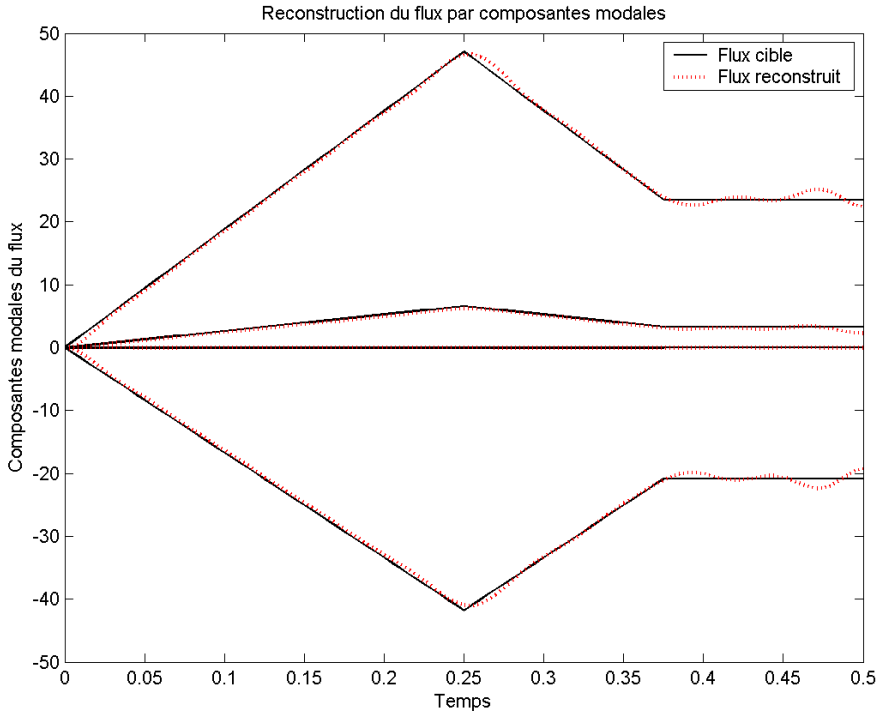


FIG. 5.10 – Algorithme RFTD, lot de capteurs 1 ($q_1 = 20$, $n_k = 20 \forall k$, $\epsilon = 10^{-10}$) : erreur de reconstruction dans le domaine $\mathcal{E}_\Omega(t)$

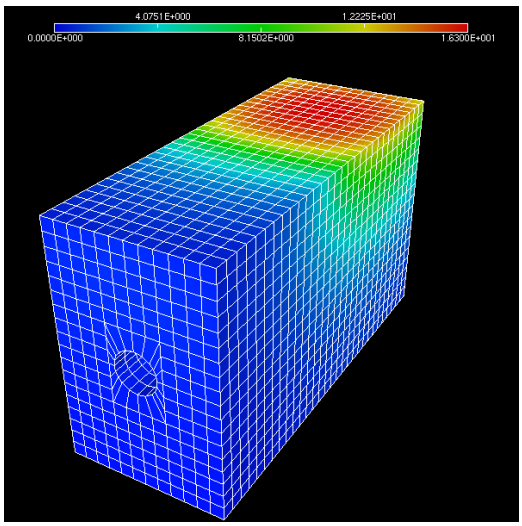


(a) Flux de synthèse et reconstruit au point $(1;\, 0;\, 0,45)$

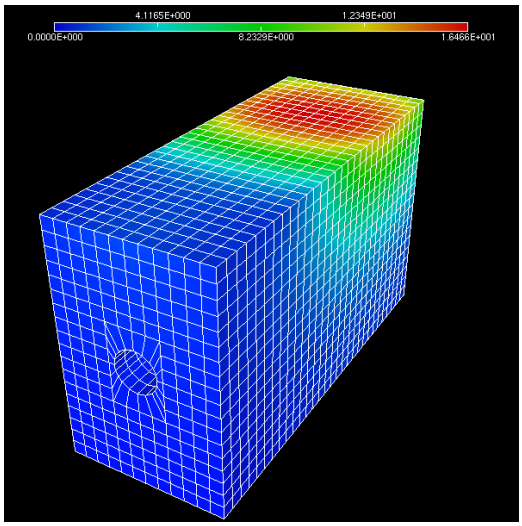


(b) Reconstruction des 5 premières composantes modales du flux dans la base $\{h_{r_1}(x)\}_{r_1=1}^{q_1}$

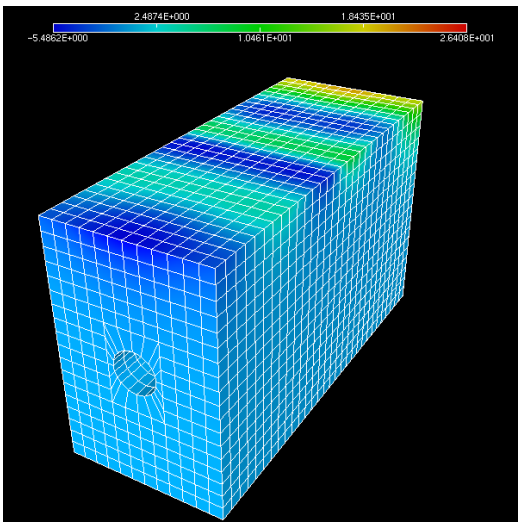
FIG. 5.11 – Algorithme RFTD, lot de capteurs 1 ($q_1 = 20$, $n_k = 20\,\forall k$, $\epsilon = 10^{-10}$)



(a) Champ de synthèse



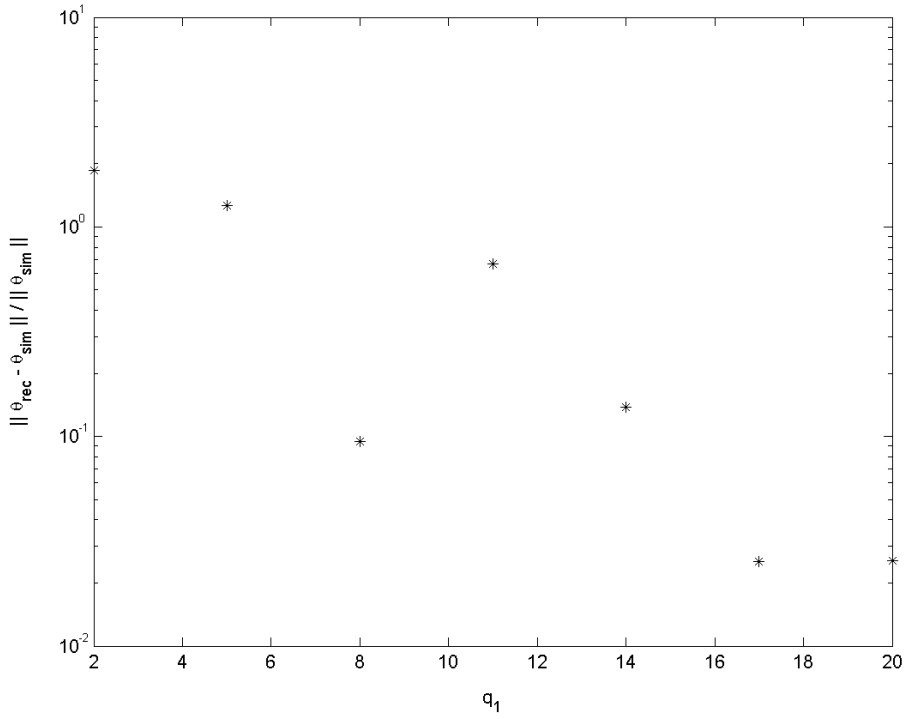
(b) Champ reconstruit



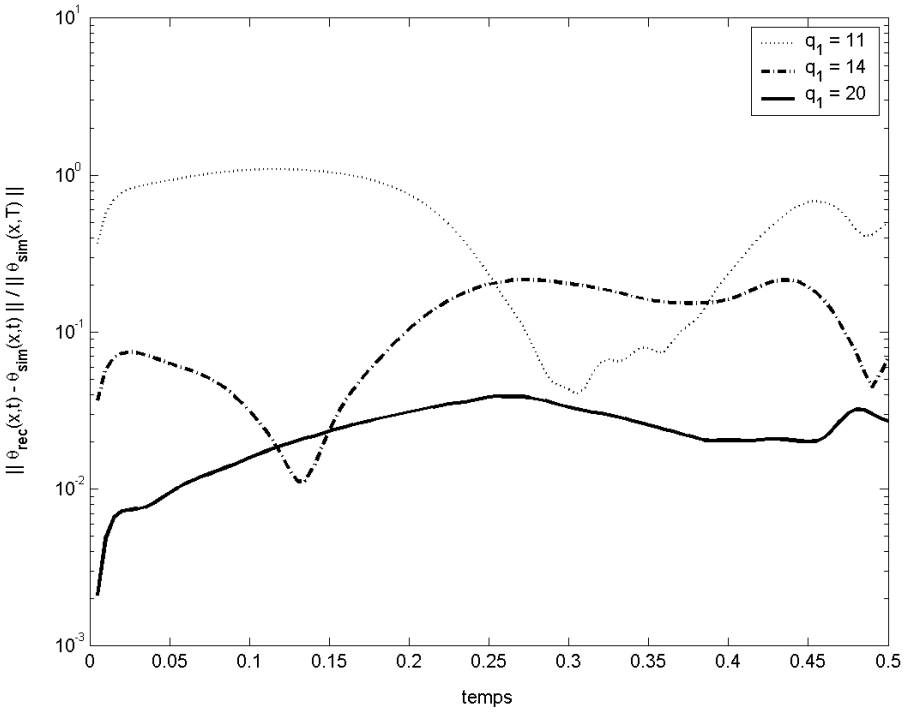
(c) Différence multipliée par 10

FIG. 5.12 – Reconstruit avec le lot de capteurs 2

Pour conclure, nous donnons les figures 5.13 qui donnent une idée de la convergence de la méthode par rapport au paramètre q_1. On constate sur la figure de gauche une décroissance non monotone de l'erreur. Mais la figure de gauche montre bien que la qualité de la reconstruction est meilleure globalement dans le temps lorsque q_1 augmente.



(a) Erreur intégrée dans $\Omega \times [0, T]$



(b) Erreur integrée dans le domaine $\mathcal{E}_\Omega$

FIG. 5.13 – Algorithme RFTD, 14 capteurs ($n_k = 15\,\forall k$, $\epsilon = 10^{-10}$) : erreur relative de reconstruction dans le domaine en fonction de q_1

5.3 Reconstruction d'une source interne

Nous revenons dans cette partie à la méthode présentée en 4.1 pour la reconstruction d'une source interne volumique, et on s'intéresse à son implantation pratique.

Rappels :

Plusieurs formulations différentes de la méthode ont été vues. On les rappelle brièvement ci-dessous.

– Tout d'abord, le problème en formulation primale consiste à minimiser la fonctionnelle

$$J_\Omega(f) = \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{m}\int_0^T \Big(\theta(x_k,t,f)-\theta_k^d(t)\Big)^2\,dt + \frac{\epsilon}{2}\int_{\Omega\times[0,T]} f^2\,dx\,dt$$

si $\mathcal{V} = L^2\big(0,T;L^2(\Omega)\big)$, ou bien

$$\begin{aligned} J_\Omega(f) &= \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{m}\int_0^T \Big(\theta(x_k,t,f)-\theta_k^d(t)\Big)^2\,dt \\ &\quad +\frac{\epsilon}{2}\left[\int_{\Omega\times[0,T]} f^2\,dx\,dt + \int_{\Omega\times[0,T]}\left(\frac{\partial f}{\partial t}\right)^2 dx\,dt\right] \end{aligned}$$

si $\mathcal{V} = H^1\big(0,T;L^2(\Omega)\big)$. Des méthodes itératives peuvent être employées pour aborder cette minimisation.

– La formulation duale conduit à la minimisation de la fonctionnelle duale pour laquelle des algorithmes itératifs peuvent aussi être envisagés.

– La minimisation de la fonctionnelle duale équivaut à la résolution du problème variationnel consistant à trouver $X \in L^2(0,T)^m$ tel que

$$\begin{aligned} &\int_{\Omega\times[0,T]} P(X)P(\phi)\,d\gamma\,dt + \int_{\Omega\times[0,T]} \frac{\partial P(X)}{\partial t}\frac{\partial P(\phi)}{\partial t}\,dx\,dt + \\ &\epsilon\sum_{k=1}^{m}\int_0^T X_k(t)\phi_k(t)\,dt = \sum_{k=1}^{m}\int_0^T \theta_k^d(t)\phi_k(t)\,dt \quad \forall\phi\in L^2(0,T)^m \end{aligned}$$

Un algorithme de résolution direct peut être envisagé dans ce cas.

Nous ne montrerons pas ici comment s'implantent les méthodes itératives pour la minimisation des fonctionnelles primale ou duale : cela se fait de manière très similaire à celle présentée dans le cas de la reconstruction d'un flux. Nous détaillons par contre l'implantation et les résultats d'un algorithme direct fondé sur la formulation duale.

Nous avons vu dans la partie 4.2.3 page 80 une méthode de calcul d'une approximation P^q de l'image P par I^{-1} de l'état adjoint p. Le calcul fait intervenir les q calculs paraboliques (4.45) puis les q résolutions de (4.21) si $\mathcal{V} = H^1\big(0,T;L^2(\Omega)\big)$.

5.3.1 Implantation numérique de l'état adjoint

Soit le problème aux valeurs propres du Laplacien approché :

$$\left\{\begin{array}{l} -div\,grad\,y^{\delta x} = \lambda^{\delta x} y^{\delta x} \\ grad\,y^{\delta x}.\vec{n} + \alpha y^{\delta x} = 0 \end{array}\right. \tag{5.71}$$

Les solutions $\{\lambda_r^{\delta x}, y_r^{\delta x}\}_{r=1}^{I(V^{\delta x})}$ de ce problème sont obtenues par une méthode de Lanczos reposant sur la formulation variationnelle

$$\int_\Omega grad\, y^{\delta x} grad\, w\, dx + \int_{\partial\Omega} \alpha y^{\delta x} w\, d\gamma = \lambda^{\delta x} \int_\Omega y^{\delta x} w\, dx \quad \forall w \in V^{\delta x} \subset H^1(\Omega) \tag{5.72}$$

Nous obtenons une approximation $p^{q,\delta x,\delta t} \in (\mathcal{V}')^{\delta x}$ (le projeté de $\mathcal{V}'$ sur $V^{\delta x}$) de p comme combinaison linéaire des q premières fonctions $y_r^{\delta x}(x)$:

$$p^{q,\delta x,\delta t} = \sum_{r=1}^{q} p_r^{\delta x,\delta t}(t) y_r^{\delta x}(x), \tag{5.73}$$

les coefficients $p_r^{\delta x,\delta t}(t)$ étant déterminés par résolution de :

$$\begin{cases} -\dfrac{dp_r^{\delta x,\delta t}}{dt} + p_r^{\delta x,\delta t}\lambda_r^{\delta x} = \phi^{\delta t}(t) y_r^{\delta x}(x_0) \quad \forall y_r^{\delta x} \in span\{y_r^{\delta x}\}_{r=1}^{q} \\ p_r^{\delta x,\delta t}(T) = 0 \end{cases} \tag{5.74}$$

Enfin,

- si $\mathcal{V} = L^2\left(0,T;L^2(\Omega)\right)$, $P^{q,\delta x,\delta t}$ est directement obtenu par $P^{q,\delta x,\delta t} = p^{q,\delta x,\delta t}$ (I^{-1} est l'identité)
- si $\mathcal{V} = H^1\left(0,T;L^2(\Omega)\right)$, $P^{q,\delta x,\delta t}$ est donné par

$$P^{q,\delta x,\delta t} = \sum_{r=1}^{q} P_r^{\delta x,\delta t}(t) y_r^{\delta x}(x) \tag{5.75}$$

et les coefficients $P_r^{\delta x,\delta t}(t)$ par résolution des q problèmes

$$\int_0^T P_r^{\delta x,\delta t} w\, dt + \int_0^T \frac{dP_r^{\delta x,\delta t}}{dt}\frac{\partial w}{\partial t}\, dt = \int_0^T p_r^{\delta x,\delta t} w\, dt, \quad \forall w \in \mathcal{F}^{\delta t} \subset H^1([0,T]). \tag{5.76}$$

5.3.2 Algorithme direct appliqué au problème dual

L'algorithme de reconstruction d'une source volumique présenté ici est fondé sur la formulation duale variationnelle qui conduit à l'inversion directe la *matrice grammienne*. On lui donne l'acronyme RSTP.

Nous voulons résoudre numériquement le problème dual consistant à trouver $X = \{x_k\}_{k=1}^m \in \mathcal{M}' = L^2(0,T)^m$ tel que

$$a^*(X,\psi) = L(\psi) \quad \forall \psi \in \mathcal{M}' = L^2(0,T)^m \tag{5.77}$$

$a^*(\cdot,\cdot)$ et $L(\cdot)$ définis par (4.30)-(4.31) et (4.29) respectivement, ce qui s'écrit de manière explicite

$$\int_{\Omega\times[0,T]} P(X)P(\psi)\, d\gamma\, dt + \epsilon \sum_{k=1}^{m} \int_0^T X_k(t)\psi_k(t)\, dt = \sum_{k=1}^{m} \int_0^T \theta_k^d(t)\psi_k(t)\, dt \quad \forall \psi \in L^2(0,T)^m$$

si $\mathcal{V} = L^2\left(0,T;L^2(\Omega)\right)$ ou

$$\int_{\Omega\times[0,T]} P(X)P(\psi)\, d\gamma\, dt + \int_{\Omega\times[0,T]} \frac{\partial P(X)}{\partial t}\frac{\partial P(\psi)}{\partial t}\, dx\, dt + \epsilon \sum_{k=1}^{m} \int_0^T X_k(t)\psi_k(t)\, dt = \sum_{k=1}^{m} \int_0^T \theta_k^d(t)\psi_k(t)\, dt \quad \forall \psi \in L^2(0,T)^m$$

si $\mathcal{V} = H^1\left(0,T;L^2(\Omega)\right)$.

5.3.2.1 Construction de la matrice grammienne

Le problème dual sous forme variationnelle peut être résolu par une approche de Galerkin. Le dual de l'espace des observations est approché par l'espace de dimension finie $\mathcal{M}'_h \subset \mathcal{M}'$ dont la base

$$\left\{\{\phi_{ki}\}_{i=1}^{n_k}\right\}_{k=1}^{m}$$

a été introduite dans la partie 5.1.2. On cherche alors $X^h \equiv \{X_k^h(t)\}_{k=1}^m \in \mathcal{M}'_h$ solution du problème approché

$$a^*(X^h,\psi^h) = L\left(\psi^h\right) \quad \forall \psi^h \in \mathcal{M}'_h \tag{5.78}$$

Si la solution est recherchée sous la forme

$$X^h \equiv \{X_k^h(t)\}_{k=1}^m = \left\{\sum_{i=1}^{n_k} \alpha_{ki}\phi_{ki}(t)\right\}_{k=1}^m,$$

on est conduit à résoudre le système matriciel

$$\begin{gathered}\mathbb{A}\mathbf{x} = \mathbf{b}, \quad \mathbb{A} \in \mathcal{A}^{N_m\times N_m}(\mathbb{R}),\ \mathbf{b}\in\mathbb{R}^{N_m},\ N_m = \textstyle\sum_{k=1}^m n_k \\ \Leftrightarrow \\ \begin{bmatrix} & & \\ & A_{kilj} & \\ & & \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \begin{Bmatrix} \alpha_{11} \\ \vdots \\ \alpha_{1n_1} \end{Bmatrix} \\ \begin{Bmatrix} \alpha_{21} \\ \vdots \\ \alpha_{2n_2} \end{Bmatrix} \\ \vdots \\ \begin{Bmatrix} \alpha_{m1} \\ \vdots \\ \alpha_{mn_m} \end{Bmatrix} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \begin{Bmatrix} b_{11} \\ \vdots \\ b_{1n_1} \end{Bmatrix} \\ \begin{Bmatrix} b_{21} \\ \vdots \\ b_{2n_2} \end{Bmatrix} \\ \vdots \\ \begin{Bmatrix} b_{m1} \\ \vdots \\ b_{mn_m} \end{Bmatrix} \end{Bmatrix}\end{gathered} \tag{5.79}$$

avec $A_{kilj} = a*(\phi_{ki},\phi_{lj})$ et $b_{ki} = L(\phi_{ki})$.

Connaissant l'approximation $P^{q,\delta x,\delta t}$ de l'image de l'état adjoint dans $\mathcal{V}_h^{\delta x,\delta t}$ (le projeté de $\mathcal{V}_h$ sur $V^{\delta x}\times\mathcal{F}^{\delta t}$), nous pouvons construire de manière approchée les coefficients de la matrice $\mathbb{A}$.

– Dans le cas où $\mathcal{V} = L^2\left(0,T;L^2(\Omega)\right)$, ceux-ci sont donnés par

$$\begin{aligned} A_{kilj}^{\delta x,\delta t} &= a^{(L^2)}(\phi_{ki}^{\delta t},\phi_{lj}^{\delta t}) \\ &= \int_{\Omega\times[0,T]} p^{q,\delta x,\delta t}(\phi_{ki}^{\delta t}) p^{q,\delta x,\delta t}(\phi_{lj}^{\delta t})\,dx\,dt \\ &\quad +\epsilon\int_0^T \phi_{ki}^{\delta t}(t)\phi_{lj}^{\delta t}(t)\,dt \end{aligned} \tag{5.80}$$

Compte tenu de la forme de $p^{q,\delta x,\delta t}$, cette expression se simplifie en

$$\begin{aligned} A_{kilj}^{\delta x,\delta t} &= \sum_{r=1}^{q} \int_0^T p_r^{\delta x,\delta t}(\phi_{ki}^{\delta t}) p_r^{\delta x,\delta t}(\phi_{lj}^{\delta t})\, dt \\ &\quad + \epsilon \int_0^T \phi_{ki}^{\delta t}(t)\phi_{lj}^{\delta t}(t)\, dt \end{aligned} \tag{5.81}$$

– Dans le cas où $\mathcal{V} = H^1\left(0,T;L^2(\Omega)\right)$, les coefficients approchés de $\mathbb{A}$ sont donnés par

$$\begin{aligned} A_{kilj}^{\delta x,\delta t} &= a^{(H^1)}(\phi_{ki}^{\delta t}, \phi_{lj}^{\delta t}) \\ &= \int_{\Omega\times[0,T]} P^{q,\delta x,\delta t}(\phi_{ki}^{\delta t}) P^{q,\delta x,\delta t}(\phi_{lj}^{\delta t})\, dx\, dt \\ &\quad + \int_{\Omega\times[0,T]} \frac{P^{q,\delta x,\delta t}(\phi_{ki}^{\delta t})}{\partial t} \frac{\partial P^{q,\delta x,\delta t}(\phi_{lj}^{\delta t})}{\partial t}\, dx\, dt \\ &\quad + \epsilon \int_0^T \phi_{ki}^{\delta t}(t)\phi_{lj}^{\delta t}(t)\, dt \end{aligned} \tag{5.82}$$

qui se simplifie en

$$\begin{aligned} A_{kilj}^{\delta x,\delta t} &= \sum_{r=1}^{q} \int_0^T P_r^{\delta x,\delta t}(\phi_{ki}^{\delta t}) P_r^{\delta x,\delta t}(\phi_{lj}^{\delta t})\, dt \\ &\quad + \sum_{r=1}^{q} \int_0^T \frac{dP_r^{\delta x,\delta t}(\phi_{ki}^{\delta t})}{dt} \frac{dP_r^{\delta x,\delta t}(\phi_{lj}^{\delta t})}{dt}\, dt \\ &\quad + \epsilon \int_0^T \phi_{ki}^{\delta t}(t)\phi_{lj}^{\delta t}(t)\, dt \quad \forall \phi_{lj}^{\delta t} \in \mathcal{M}_h^{\delta t} \end{aligned} \tag{5.83}$$

5.3.2.2 Inversion

Une fois construite la matrice $\mathbb{A}^{\delta x,\delta t}$, la résolution du problème inverse consiste à résoudre le système

$$\mathbb{A}^{\delta x,\delta t}\mathbf{X}^{\delta t} = \mathbf{b}^{\delta t} \tag{5.84}$$

avec

$$\mathbf{b}^{\delta t} = \{b_{ki}^{\delta t}\}_{k=1,i=1}^{m,n_k}, \quad b_{ki}^{\delta t} = \int_0^T \theta_k^{d,\delta t}(t)\phi_{ki}^{\delta t}\, dt$$

et

$$\mathbf{X}^{\delta t} = \{X_{ki}^{\delta t}\}_{k=1,i=1}^{m,n}, \quad \text{tel que } X_k^{\delta t}(t) = \sum_{i=1}^{n_k} X_{ki}^{\delta t}\phi_{ki}^{\delta t}$$

($\theta_k^{d,\delta t}(t)$ sont les mesures discrètes, c'est-à-dire les mesures projetées sur $\mathcal{F}^{\delta t}$).

Ce calcul doit être fait en ligne, mais en pratique la taille du système $\sum_{k=1}^{m} n_k$ reste faible ce qui permet une résolution rapide par une méthode algébrique classique. La solution duale $\{X_k^{\delta t}\}_{k=1}^{m}$ permet de calculer la solution primale f (ou plutôt une approximation $f^{q,\delta x,\delta t}$ de celle-ci) grâce à l'expression de l'état adjoint :

$$\begin{aligned} f^{q,\delta x,\delta t} &= q^{q,\delta x,\delta t}(\{X_k^{\delta\tau}\}_{k=1}^{m}) \\ &= \sum_{r=1}^{q} q_r^{\delta x,\delta t}(\{X_k^{\delta t}\}_{k=1}^{m}) y_r^{\delta x}(x) \end{aligned} \tag{5.85}$$

avec $q_r^{\delta x,\delta t} = p_r^{\delta x,\delta t}$ solution de

$$\begin{cases} -\dfrac{dp_r^{\delta x,\delta t}}{dt} + p_r^{\delta x,\delta t}\lambda_r^{\delta x} = \displaystyle\sum_{k=1}^{m} X_k^{\delta t}(t) y_r^{\delta x}(x_0) \quad \forall y_r^{\delta x} \in span\{y_r^{\delta x}\}_{r=1}^{q} \\ p_r^{\delta x,\delta t}(T) = 0 \end{cases} \tag{5.86}$$

si $\mathcal{V} = L^2\left(0,T;L^2(\Omega)\right)$ ou $q_r^{\delta x,\delta t,\delta\tau} = P_r^{\delta x,\delta t,\delta\tau}$ tels que

$$\int_0^T P_r^{\delta x,\delta t} w\, dt + \int_0^T \frac{dP_r^{\delta x,\delta t}}{dt}\frac{\partial w}{\partial t}\, dt = \int_0^T p_r^{\delta x,\delta t} w\, dt, \quad \forall w \in \mathcal{F}^{\delta t} \subset H^1([0,T]). \tag{5.87}$$

si $\mathcal{V} = H^1\left(0,T;L^2(\Omega)\right)$.

5.3.2.3 Récapitulatif de l'algorithme

Pour récapituler, voici énumérées les étapes successives qui constituent l'algorithme RSTP. Nous pouvons faire la distinction entre celles qui peuvent être faites hors ligne, lors de l'étape de précalcul, et celles qui relèvent du calcul en ligne.

Paramètres

- Maillages : $\mathcal{K}$, $\mathcal{T}$, δx, δt
- Constantes liées à la méthode de calcul : q, n_k, $k = 1..m$
- Constantes liées à la physique : m, ϵ

Précalculs hors ligne

1. Résolution de (5.72) pour obtenir $\{y_r^{\delta x}\}_r^q$
2. Résolution des q problèmes (5.74) pour $\phi = \phi_{ki}$, $i = 1..n_k$, $k = 1..m$ pour obtenir $p^{q,\delta x,\delta t}$ par (5.73)
3. *Si* $\mathcal{V} = H^1\left(0,T;L^2(\Omega)\right)$ *:* résolution des q problèmes (5.76) pour chaque ϕ_{ki}
4. Calcul des coefficients $A_{kilj}^{\delta x,\delta t}$ par (5.81) *(si* $\mathcal{V} = L^2\left(0,T;L^2(\Omega)\right)$*)* ou par (5.83) *(si* $\mathcal{V} = H^1\left(0,T;L^2(\Omega)\right)$*)*

Calculs en ligne

1. Calcul du second membre $\mathbf{b}_{ki}^{\delta t} = \displaystyle\int_0^T \theta_k^{d,\delta t}(t)\phi_{ki}^{\delta t}\, dt$
2. Inversion du système $\mathbb{A}^{\delta x,\delta t}\mathbf{X}^{\delta t} = \mathbf{b}^{\delta t}$

Post-traitement

1. Calcul de la solution primale : résolution d'un problème parabolique de q degrés de liberté (5.86) et sommation selon (5.85)

Les différentes étapes de l'algorithme sont peu coûteuses en temps de calcul. Sur un ordinateur de bureau ordinaire de type *Pentium IV* à $2,8\,GHz$, le calcul des fonctions $\{y_r^{\delta x}\}_{r=1}^q$ (première étape de précalcul) dure quelques dizaines de secondes pour un modèle d'environ 10 000 degrés de liberté. La deuxième étape de précalcul fait intervenir N_m résolutions de problèmes hyperboliques à q degrés de liberté. Avec cent pas de temps, le temps d'exécution de cette étape est inférieur à N_m secondes. L'assemblage de $\mathbb{A}$ est l'étape la plus longue en temps de calcul, avec des temps d'exécution de l'ordre de 100 secondes. Enfin, les calculs en ligne ne durent que 2 à 3 secondes.

5.3.3 Résultats avec données de synthèse

Les résultats ci-dessous sont issus de simulations de l'algorithme RSTP.

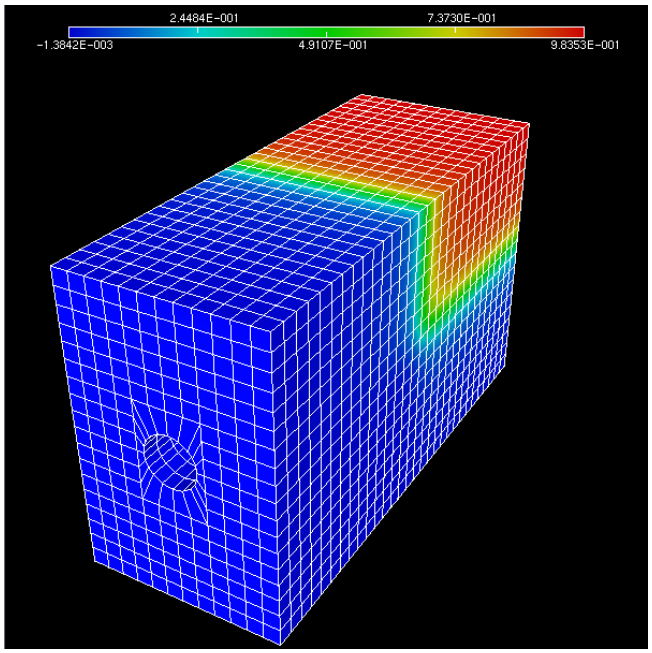
La source montrée sur la figure 5.14 est appliquée sur le bloc. Les mesures au niveau des capteurs déterminées par calcul direct sont utilisées pour sa reconstruction.

Pour le calcul de p nous utilisons la famille $\{v_i\}$ de modes propres du Laplacien avec conditions aux limites mixtes. Les 4 premiers sont représentés sur la figure 5.15.

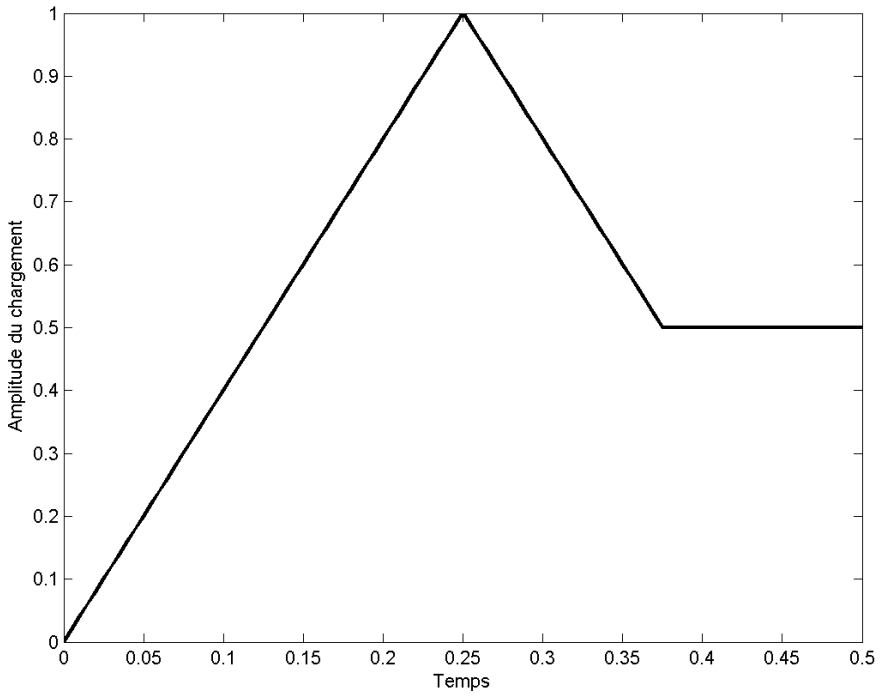
Le lot de 20 capteurs représentés sur la figure 5.16 est utilisé pour la reconstruction. Les figures 5.17 à 5.19 montrent les erreurs de reconstruction $\mathcal{E}_m(t)$, $\mathcal{E}_{40-m}(t)$ et $\mathcal{E}_\Omega(t)$ définies dans le tableau 5.2 page 122, pour le cadre de reconstruction L^2 et le cadre H^1. Selon la tableau 5.4, l'erreur relative globale $\mathcal{E}_{\Omega\times[O,T]}$ est de $4,2\%$ tant pour la reconstruction dans L^2 que pour la reconstruction dans H^1. La différence n'est en réalité pas visible avec les trois chiffres significatifs gardés. Bien que les erreurs relatives dans le domaine pour les deux versions de l'algorithme soient comparables, le gain de précision avec la version H^1 est en revanche visible à l'instant final : $\mathcal{E}_\Omega(T)$ vaut $5,9\%$ pour la version L^2 contre $3,4\%$ pour la version H^1. La figure 5.21 montre les champs de synthèse et reconstruit à l'instant final.

Cas étudié	$\mathcal{C}_{\Omega\times[0,T]}$	$\mathcal{D}_{\Omega\times[0,T]}$	$\mathcal{E}_{\Omega\times[0,T]}$	$\mathcal{C}_\Omega(T)$	$\mathcal{D}_\Omega(T)$	$\mathcal{E}_\Omega(T)$
Champ cible	$3,74\,^\circ C$			$3,07^\circ C$		
Rec. dans $L^2\left(0,T;L^2(\Omega)\right)$	$3,69\,^\circ C$	$0,16\,^\circ C$	$4,2\%$	$2,95\,^\circ C$	$0,17\,^\circ C$	$5,9\%$
Rec. dans $H^1\left(0,T;L^2(\Omega)\right)$	$3,69\,^\circ C$	$0,16\,^\circ C$	$4,2\%$	$3,04\,^\circ C$	$0,10\,^\circ C$	$3,4\%$

TAB. 5.4 – Erreurs de reconstruction du champ de température



(a) Distribution spatiale



(b) Evolution en temps

FIG. 5.14 – Source interne volumique imposée

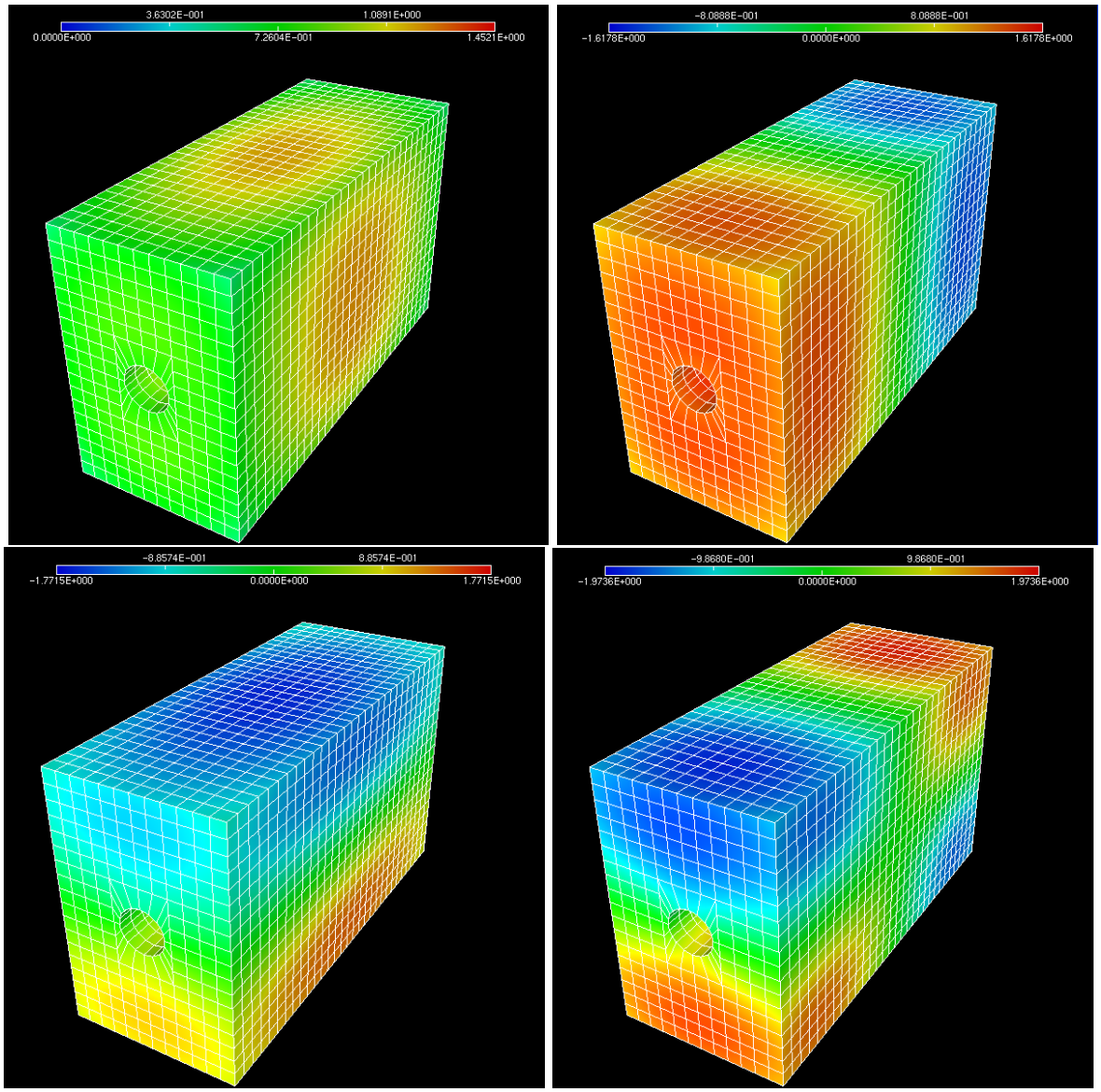


FIG. 5.15 – Les 4 premiers modes v_i, $i = 1..4$ utilisés pour le calcul de p

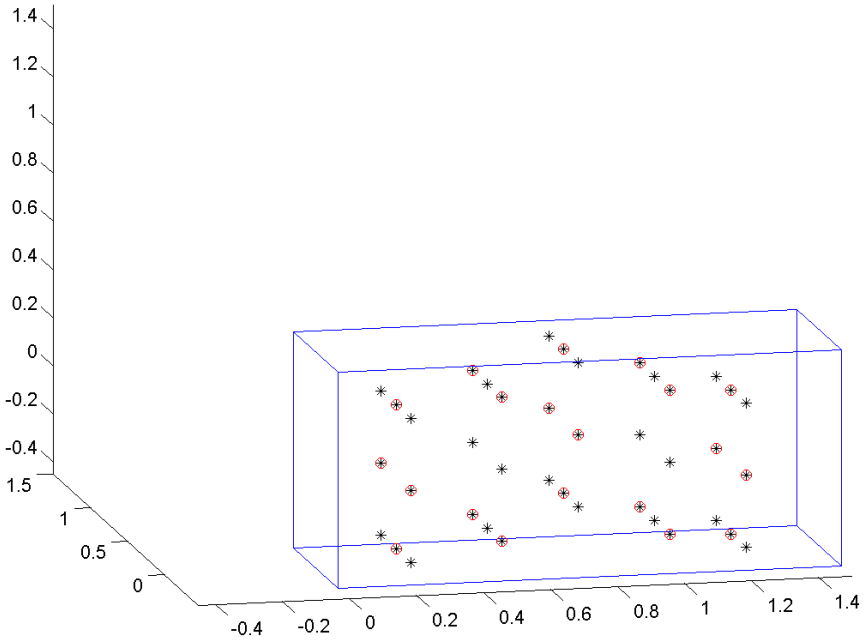
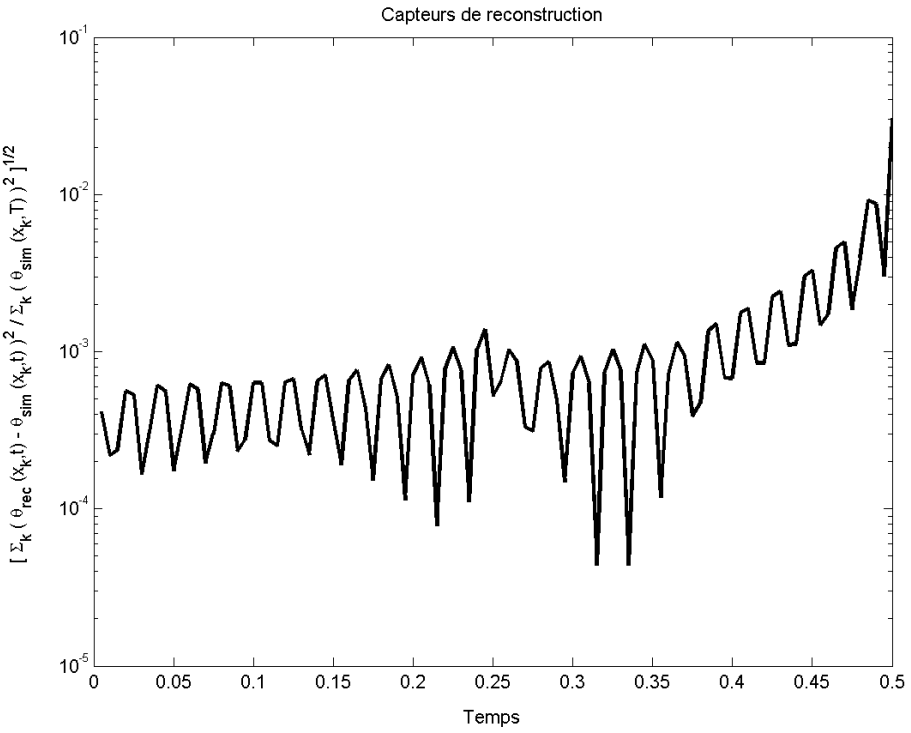
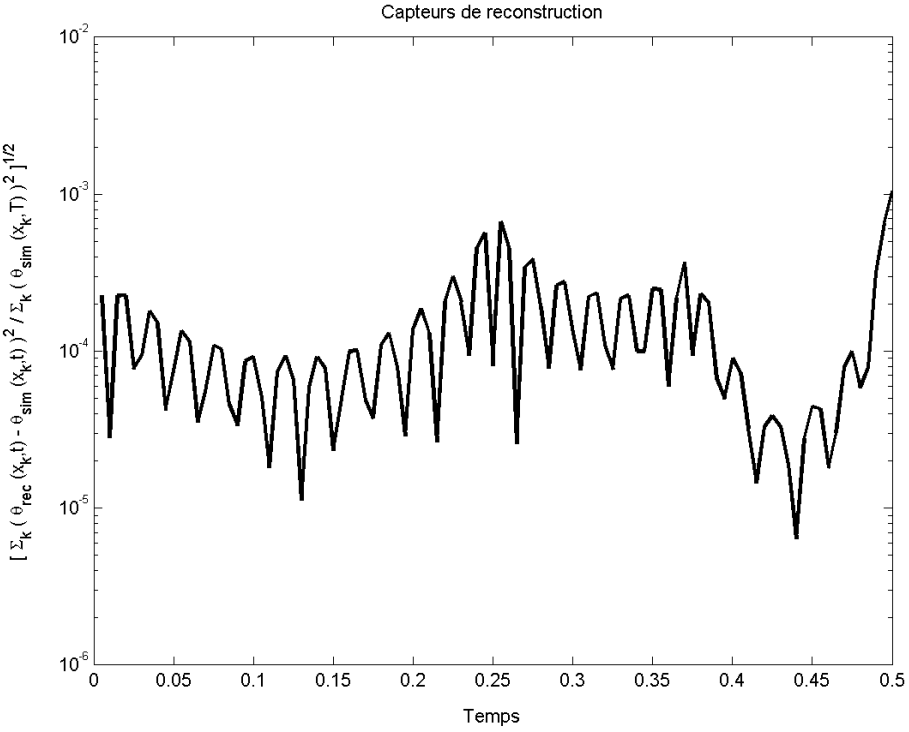


FIG. 5.16 – Les capteurs utilisés pour la reconstruction (astérisques entourés)

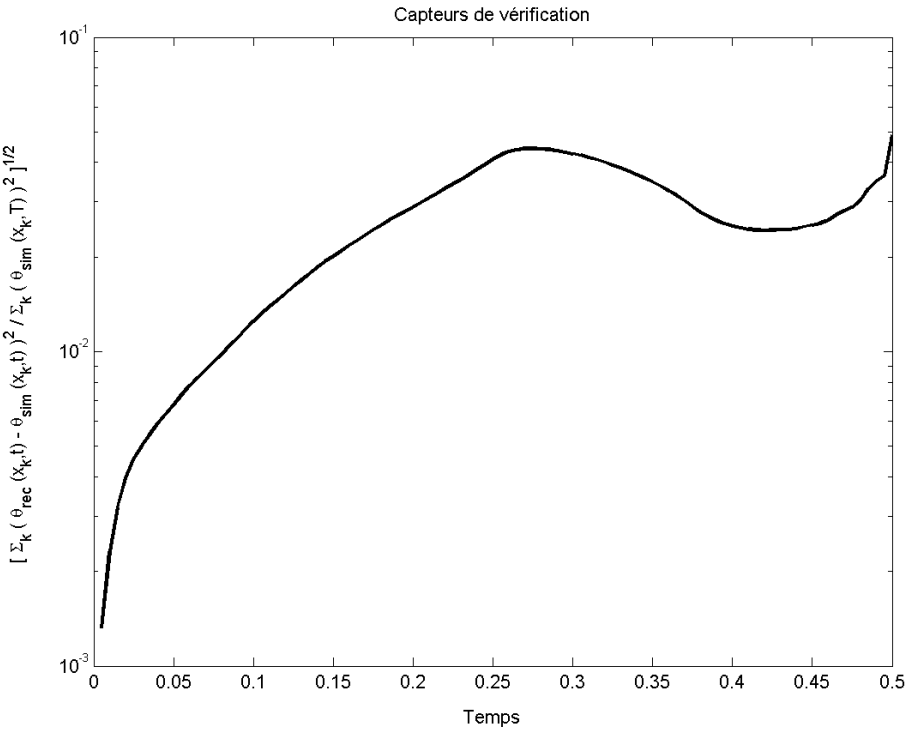


(a) dans $L^2\left(0,T;L^2(\Omega)\right)$

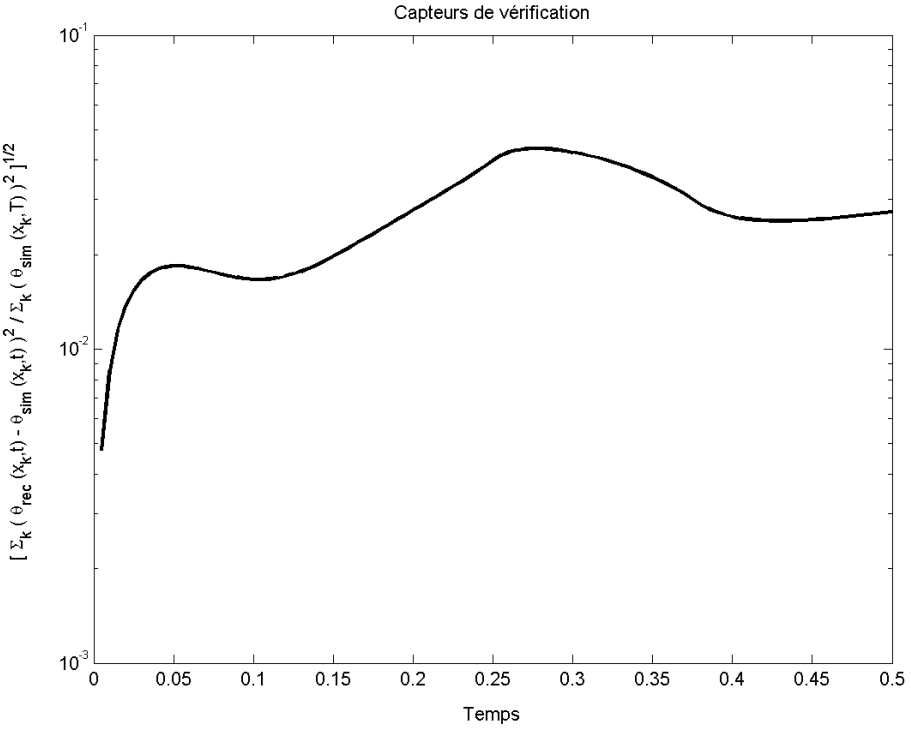


(b) dans $H^1\left(0,T;L^2(\Omega)\right)$

FIG. 5.17 – Algorithme RSTP, 14 capteurs ($q_1 = 25$, $n_k = 25\,\forall k$, $\epsilon = 10^{-10}$) : erreur de reconstruction $\mathcal{E}_m(t)$ au niveau des m capteurs de reconstruction

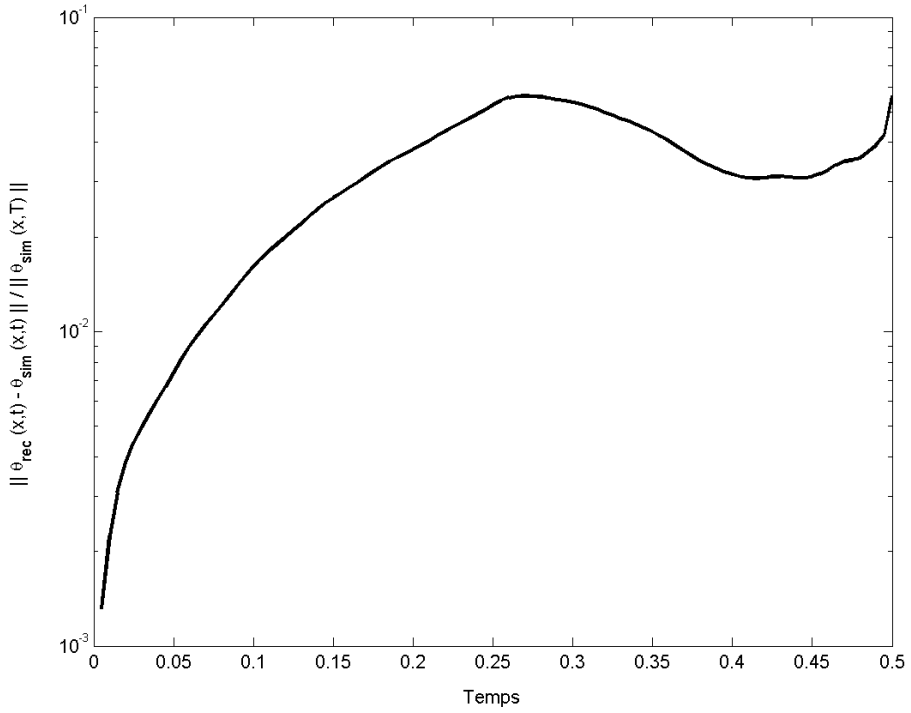


(a) dans $L^2\left(0,T;L^2(\Omega)\right)$

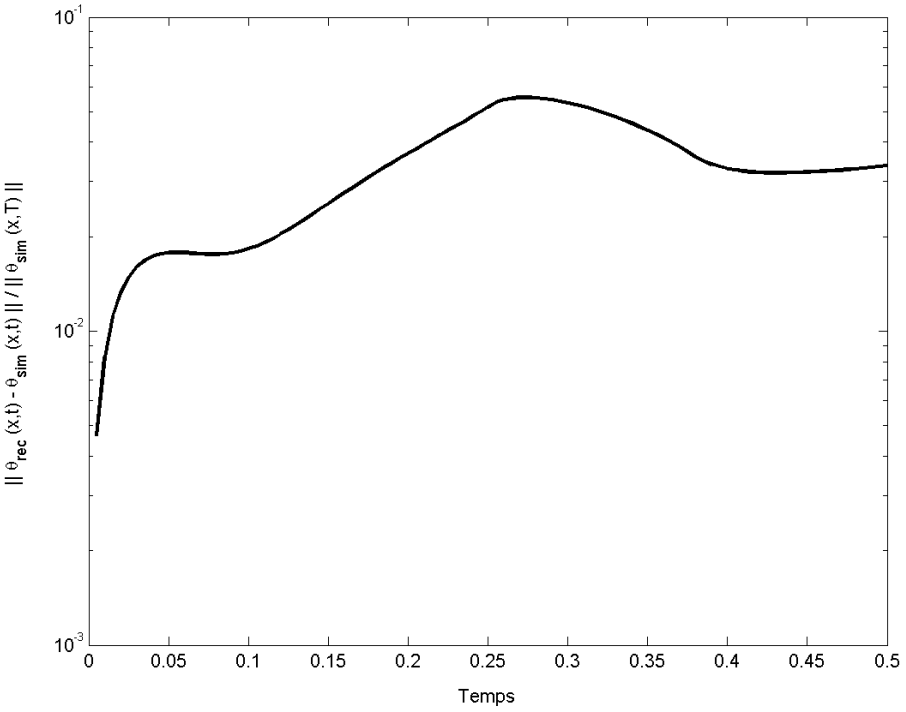


(b) dans $H^1\left(0,T;L^2(\Omega)\right)$

FIG. 5.18 – Algorithme RSTP, 14 capteurs ($q_1 = 25$, $n_k = 25\,\forall k$, $\epsilon = 10^{-10}$) : erreur de reconstruction $\mathcal{E}_{40-m}(t)$ au niveau des $40-m$ capteurs de vérification

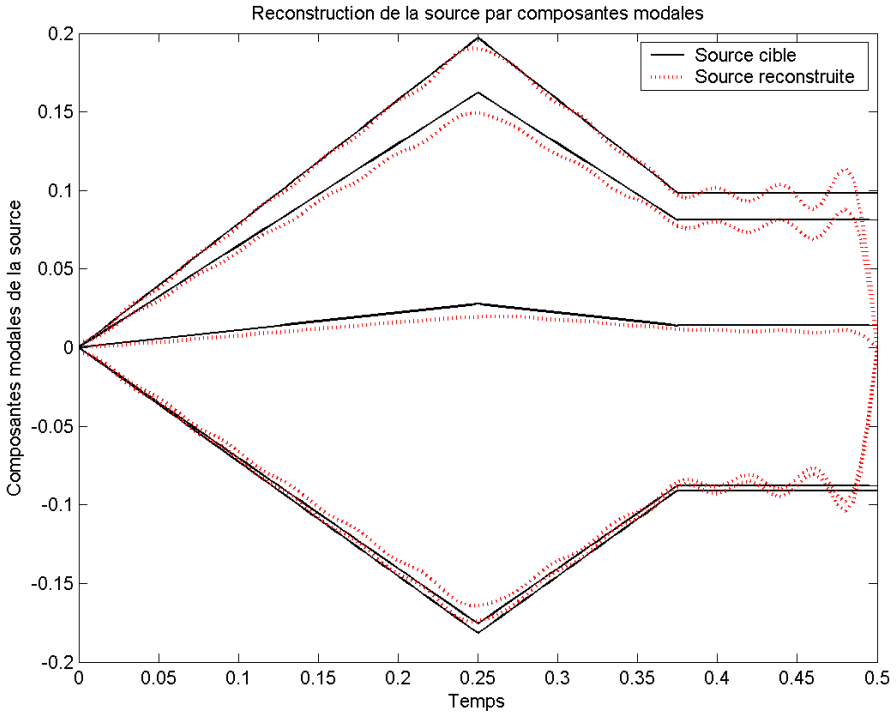


(a) dans $L^2\left(0,T;L^2(\Omega)\right)$

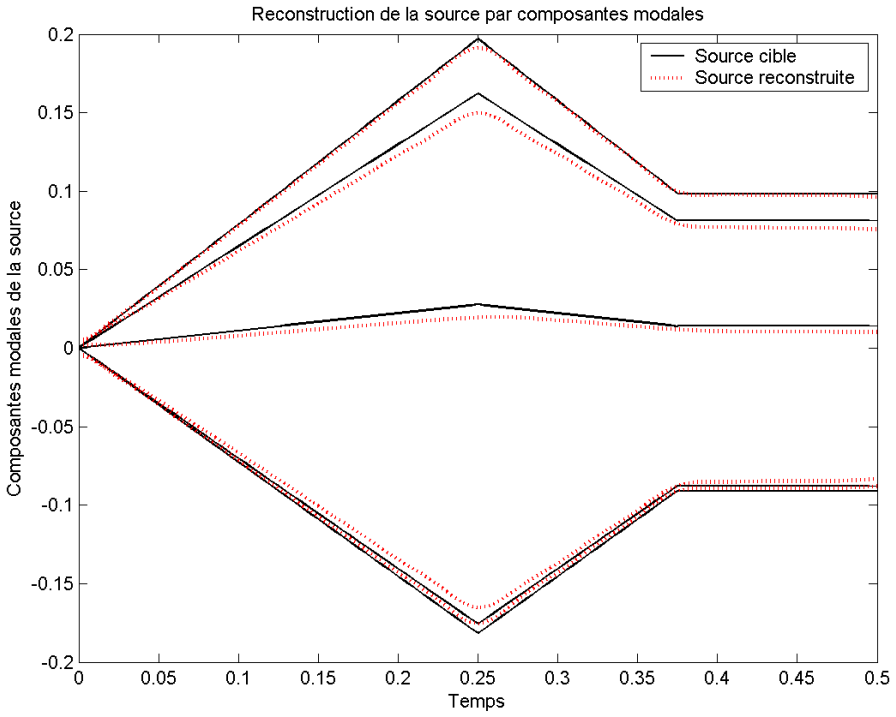


(b) dans $H^1\left(0,T;L^2(\Omega)\right)$

FIG. 5.19 – Algorithme RSTP, 14 capteurs ($q_1 = 25$, $n_k = 25\,\forall k$, $\epsilon = 10^{-10}$) : erreur de reconstruction dans le domaine $\mathcal{E}_\Omega(t)$

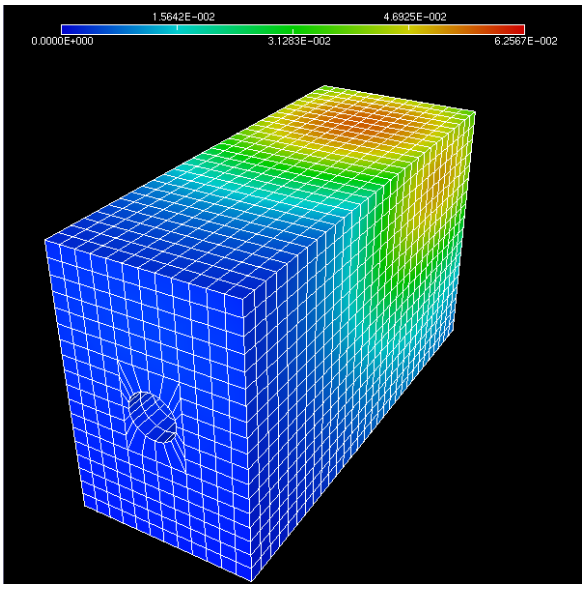


(a) dans $L^2\left(0,T;L^2(\Omega)\right)$

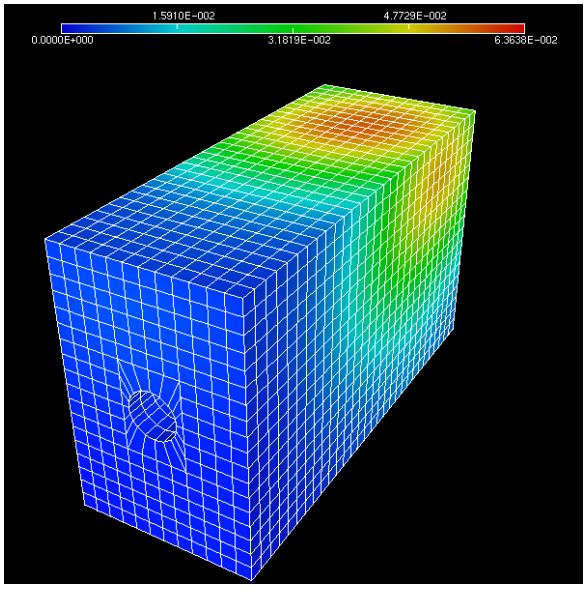


(b) dans $H^1\left(0,T;L^2(\Omega)\right)$

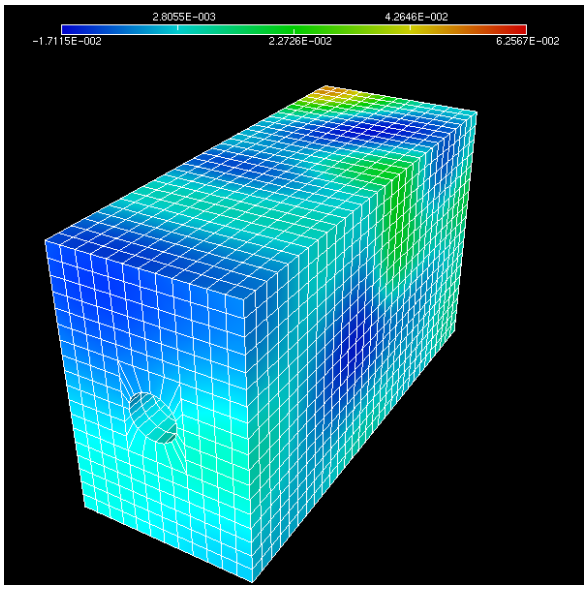
FIG. 5.20 – Algorithme RSTP, 14 capteurs ($q_1 = 25$, $n_k = 25\,\forall k$, $\epsilon = 10^{-10}$) : reconstruction des composantes modales



(a) Champ de synthèse



(b) Champ reconstruit avec 20 capteurs



(c) Différence multipliée par 10

FIG. 5.21 – Reconstruction dans $H^1\left(0,T;L^2(\Omega)\right)$: champ en $t=T$

5.4 Reconstruction de la condition initiale

Nous revenons dans cette partie au problème de reconstruction de la température initiale pour décrire en détail l'implantation d'un algorithme direct fondé sur la formulation variationnelle du problème dual. Nous l'appellerons RTIT.

Comme nous l'avons vu dans la partie 4.3, le problème dual consiste à chercher $X \in \mathcal{M}' = L^2(0,T)^m$ tel que

$$\int_\Omega P(X)P(\psi) + \nabla P(X)\nabla P(\psi)\,dx + \epsilon \sum_{k=1}^{m} \int_0^T X_k(t)\psi_k(t)\,dt = \sum_{k=1}^{m} \int_0^T \theta_k^d(t)\psi_k(t)\,dt \qquad \forall \psi = \{\psi_k\}_{k=1}^m \in L^2(0,T)^m \tag{5.88}$$

avec $P(\cdot) = I^{-1}p(x,0;\cdot)$ calculé par la méthode de transposition décrite en 4.3.3. On utilise la méthode de Galerkin pour écrire le problème dans l'espace approché des observations avant de discrétiser les équations en temps et en espace.

5.4.1 Algorithme direct appliqué au problème dual

Rappels :

L'espace de dimension finie $\mathcal{M}'_h \subset \mathcal{M}'$ doté de la base

$$\left\{ \{\phi_{ki}\}_{i=1}^{n_k} \right\}_{k=1}^{m}$$

(cf. partie 5.1.2), permettent de résoudre le problème dual de manière approchée par la méthode de Galerkin. On cherche pour cela $X^h \in \mathcal{M}'_h$ tel que

$$\int_\Omega P(X^h)P(\psi^h) + \nabla P(X^h)\nabla P(\psi^h)\,dx + \epsilon \sum_{k=1}^{m} \int_0^T X_k^h(t)\psi_k^h(t)\,dt = \sum_{k=1}^{m} \int_0^T \theta_k^d(t)\psi_k^h(t)\,dt \qquad \forall \psi^h = \{\psi_k^h\}_{k=1}^m \in L^2(0,T)^m \tag{5.89}$$

Si X^h est de la forme

$$X^h = \left\{ \sum_{i=1}^{n_k} \alpha_{ki}\phi_{ki}(t) \right\}_{k=1}^{m},$$

le problème (5.89) s'écrit facilement sous forme matricielle.

Grâce à la méthode de transposition exposée dans la partie 4.3.3, nous sommes en mesure de calculer une approximation de $P = I^{-1}p$, c'est-à-dire l'image dans $\mathcal{V} = H^1(\Omega)$ par l'isomorphisme I^{-1} de l'état adjoint $p \in \mathcal{V}' = H^{-1}(\Omega)$. Elle est donnée par une combinaison linéaire sur la famille de modes du Laplacien $\{y_r\}_{r=1}^q$

$$P^q = \sum_{r=1}^{q} P_r y_r(x) \tag{5.90}$$

les coefficients P_r étant solutions de

$$P_r\Big(1+\lambda_r\Big) = \int_0^T \phi(t)v_r(x_0,t)\,dt \quad \forall r = 1...q \tag{5.91}$$

v_r vérifiant (4.113) avec y_r au second membre.

Pour l'implantation numérique, nous devons résoudre les équations (5.91) de manière approchée dans les espaces discrets $V^{\delta x} \times \mathcal{F}^{\delta t}$.

Comme plus haut, nous notons $\mathcal{M}_h^{\delta t} \subset \mathcal{M}_h$ l'espace d'approximation des observations discret, c'est-à-dire le sous-espace de $\mathcal{M}_h$ projeté sur $\mathcal{F}^{\delta t}$. Soit $\{\lambda_r^{\delta x}, y_r^{\delta x}\}_{r=1}^{I(V^{\delta x})}$ la famille des solutions du problème aux valeurs propres du Laplacien approché vérifiant :

$$\int_\Omega \nabla y_r^{\delta x} \nabla w \, dx + \int_{\partial\Omega} \alpha y_r^{\delta x} w \, d\gamma = \lambda_r^{\delta x} \int_\Omega y_r^{\delta x} w \, dx \quad \forall w \in V^{\delta x} \subset H^1(\Omega) \tag{5.92}$$

Les q premières fonctions $y_r^{\delta x}$ sont utilisées comme conditions initiales pour le problème (4.113) qu'il faut résoudre de manière approchée. Pour $r = 1..q$, on cherche $v_r^{\delta x,\delta t}$ solution de

$$\begin{cases} \dfrac{\partial v_r^{\delta x,\delta t}}{\partial t} - \Delta v_r^{\delta x,\delta t} = 0 \\ \nabla v_r^{\delta x,\delta t} \cdot \vec{n} + \alpha v_r^{\delta x,\delta t} = 0 \\ v_r^{\delta x,\delta t}(0) = y_r^{\delta x} \end{cases} \tag{5.93}$$

dont les solutions s'écrivent

$$v_r^{\delta x,\delta t} = e^{-\lambda_r^{\delta x} t} y_r^{\delta x} \tag{5.94}$$

Une approximation de P^q dans $\mathcal{V}_h^{\delta x,\delta t}$, le projeté de $\mathcal{V}_h$ sur $V^{\delta x} \times \mathcal{F}^{\delta t}$, est alors donnée par

$$P^{q,\delta x,\delta t} = \sum_{r=1}^{q} P_r^{\delta x,\delta t}(\phi^{\delta t}) y_r^{\delta x}(x) \tag{5.95}$$

les coefficients $P_r^{\delta x,\delta t}(\phi^{\delta t})$ étant donnés par résolution des q équations scalaires

$$P_r^{\delta x,\delta t}\left(1 + \lambda_r^{\delta x}\right) = \int_0^T \phi^{\delta t}(t) v_r^{\delta x,\delta t}(x_0, t) \, dt \tag{5.96}$$

pour tout $r = 1..q$.

5.4.1.1 Construction de la matrice grammienne

Le problème dual approché conduit à résoudre le problème matriciel

$$\mathbb{A}\mathbf{X} = \mathbf{b}, \quad \mathbb{A} \in \mathcal{A}^{N_m \times N_m}(\mathbb{R}),\ \mathbf{b} \in \mathbb{R}^{N_m},\ N_m = \sum_{k=1}^{m} n_k \tag{5.97}$$

avec

$$\mathbb{A}_{kilj} = \int_\Omega P(\phi_{ki}) P(\phi_{lj}) \, dx + \int_\Omega \nabla P(\phi_{ki}) \nabla P(\phi_{lj}) \, dx + \epsilon \int_0^T \phi_{ki} \phi_{lj} \, dt \tag{5.98}$$

Pour l'implantation numérique, nous n'avons accès qu'à une approximation de $\mathbb{A}$ dont les coefficients sont

$$\begin{aligned} \mathbb{A}_{kilj}^{\delta x,\delta t} = \int_\Omega P^{q,\delta x,\delta t}(\phi_{ki}^{\delta t}) P^{q,\delta x,\delta t}(\phi_{lj}^{\delta t}) \, dx + \int_\Omega \nabla P^{q,\delta x,\delta t}(\phi_{ki}^{\delta t}) \nabla P^{q,\delta x,\delta t}(\phi_{lj}^{\delta t}) \, dx \\ + \epsilon \int_0^T \phi_{ki}^{\delta t} \phi_{lj}^{\delta t} \, dt \end{aligned} \tag{5.99}$$

Compte tenu de (5.95), et en utilisant l'orthogonalité des fonctions $y_r^{\delta x}$, on obtient

$$\mathbb{A}_{kilj}^{\delta x,\delta t} = \sum_{r=1}^{q} \left[P_r^{\delta x,\delta t}(\phi_{ki}^{\delta t}) P_r^{\delta x,\delta t}(\phi_{lj}^{\delta t})(1 + \lambda_r^{\delta x}) \right] + \epsilon \int_0^T \phi_{ki}^{\delta t} \phi_{lj}^{\delta t} \, dt \tag{5.100}$$

5.4.1.2 Inversion

En fin de compte, nous devons résoudre en ligne le système

$$\mathbb{A}^{\delta x,\delta t}\mathbf{X}^{\delta t} = \mathbf{b}^{\delta t}, \quad \mathbb{A} \in \mathcal{A}^{N_m \times N_m}(\mathbb{R}),\, \mathbf{b} \in \mathbb{R}^{N_m},\, N_m = \sum_{k=1}^{m} n_k \tag{5.101}$$

avec

$$\mathbf{b}^{\delta t} = \{b_{ki}^{\delta t}\}_{k=1,i=1}^{m,n_k}, \quad b_{ki}^{\delta t} = \int_0^T \theta_k^{d,\delta t}(t)\phi_{ki}^{\delta t}\, dt$$

et

$$\mathbf{X}^{\delta t} = \{X_{ki}^{\delta t}\}_{k=1,i=1}^{m,n}, \quad \text{tel que } X_k^{\delta t}(t) = \sum_{i=1}^{n_k} X_{ki}^{\delta t}\phi_{ki}^{\delta t}$$

($\theta_k^{d,\delta t}(t)$ sont les mesures discrètes, c'est-à-dire les mesures projetées sur $\mathcal{F}^{\delta t}$).

Après inversion du système nous obtenons une approximation $\{X_k^{\delta t}\}_{k=1}^m \in \mathcal{M}_h^{\delta t}$ de la variable duale $\{X_k(t)\}_{k=1}^m$. A partir de cette solution duale on peut obtenir approximation $\theta^{0,\delta x,\delta t}$ de la solution primale θ^0 grâce à l'expression de l'état adjoint :

$$\begin{aligned} \theta^{0,\delta x,\delta t} &= P^{q,\delta x,\delta t} \\ &= \sum_{r=1}^{q} P_r^{\delta x,\delta t}(\{X_k^{\delta t}\}_{k=1}^m) y_r^{\delta x}(x) \end{aligned} \tag{5.102}$$

avec

$$P_r^{\delta x,\delta t}(1+\lambda_r^{\delta x}) = \sum_{k=1}^{m} \int_0^T X_k^{\delta t}(t) v_r^{\delta x,\delta t}(x_0,t)\, dt \quad \forall r = 1...q \tag{5.103}$$

5.4.1.3 Récapitulatif de l'algorithme

Pour récapituler, voici énumérées les étapes successives qui constituent l'algorithme. Nous pouvons faire la distinction entre celles qui peuvent être faites hors ligne, lors de l'étape de précalcul, et celles qui doivent être effectuées en ligne.

Paramètres

– Maillages : $\mathcal{K}$, $\mathcal{T}$, δx, δt, $\delta\tau$

– Constantes liées à la méthode de calcul : q, n_k, $k = 1..m$

– Constantes liées à la physique : m, ϵ

Précalculs hors ligne

1. Résolution de (5.92) pour obtenir $\{y_r^{\delta x}\}_{r=1}^q$
2. Obtention de $v_r^{\delta x,\delta t}$ par (5.94)
3. Résolution des q équations scalaires (5.96) pour $\phi^{\delta t} = \phi_{ki}^{\delta t},\ i = 1..n_k,\ k = 1..m.$
4. Calcul des coefficients $A_{kilj}^{\delta x,\delta t}$ par (5.100) (on utilise la symétrie)

Calculs en ligne

1. Calcul du second membre $\mathbf{b}_{ki}^{\delta t} = \displaystyle\int_0^T \theta_k^{d,\delta t}(t)\phi_{ki}^{\delta t}\,dt$
2. Inversion du système $\mathbb{A}^{\delta x,\delta t}\mathbf{X}^{\delta t} = \mathbf{b}^{\delta t}$
3. Calcul de la solution primale : résolution des q problèmes (5.103)
4. Calcul de l'équation directe avec $\theta^0 = \sum_{r=1}^q P_r^{\delta x,\delta t}(\{X_k^{\delta t}\}_{k=1}^m) y_r^{\delta x}(x)$

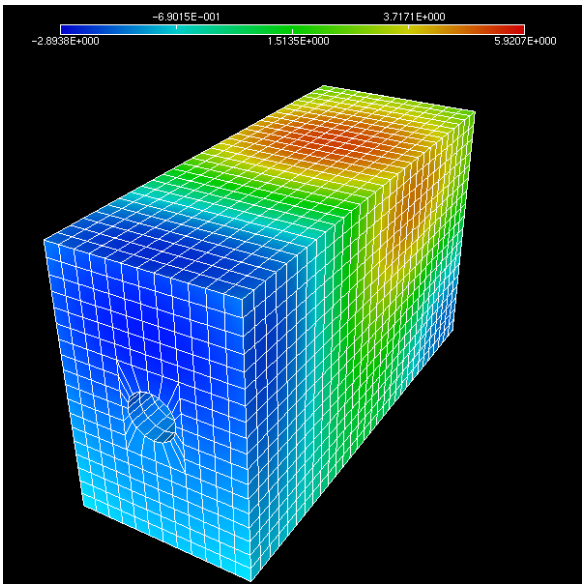
5.4.2 Résultats avec données de synthèse

La reconstruction de la température a été testée par simulations numériques sur le modèle du bloc de béton. On impose une température initiale calculée comme la somme des cinq premiers modes propres de la structure. Les données issues de deux lots de capteurs différents sont utilisées pour la reconstruction inverse : la figure 5.22 montre les champs de synthèse et reconstruit. L'erreur relative de reconstruction de la température initiale est de $2,2\%$ pour le premier lot de 20 capteurs. Avec le deuxième lot constitué de 10 capteurs, elle est de 16% comme on peut le constater sur le tableau 5.5.

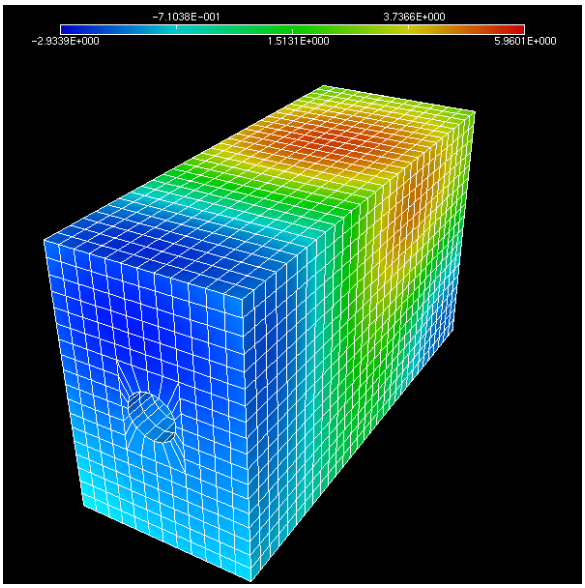
Cas étudié	$\mathcal{C}_{\Omega\times[0,T]}$	$\mathcal{D}_{\Omega\times[0,T]}$	$\mathcal{E}_{\Omega\times[0,T]}$	$\mathcal{C}_\Omega(0)$	$\mathcal{D}_\Omega(0)$	$\mathcal{E}_\Omega(0)$
Champ cible	$0,68\,^\circ C$			$2,86^\circ C$		
Lot 1[a]	$0,68\,^\circ C$	$0,01\,^\circ C$	$1,2\%$	$2,82\,^\circ C$	$0,06\,^\circ C$	$2,2\%$
Lot 2[b]	$0,66\,^\circ C$	$0,06\,^\circ C$	$8,9\%$	$2,65\,^\circ C$	$0,47\,^\circ C$	$16,6\%$

[a] Capteurs 2, 4, 5 et 7 des plans A, C et E, et capteurs 1, 3, 6 et 8 des plans B et D (20 capteurs)
[b] Capteurs 2 et 7 des plans A, C et E, et capteurs 4 et 5 des plans B et D (10 capteurs)

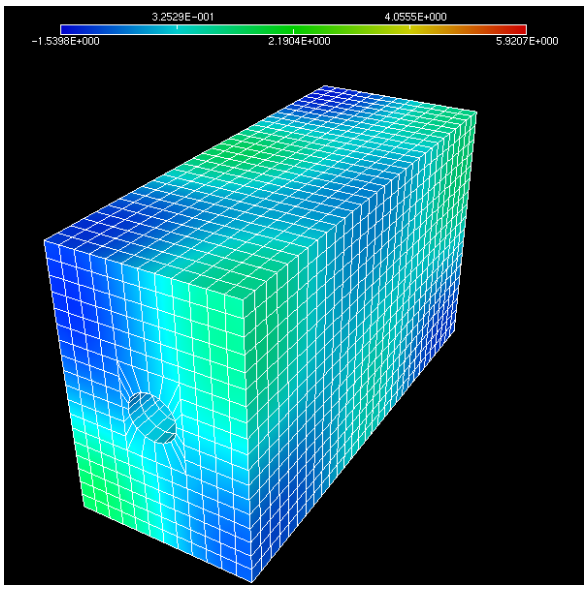
TAB. 5.5 – Erreurs de reconstruction du champ de température



(a) Temp. initiale de synthèse



(b) Temp. initiale reconstruite



(c) Différence multipliée par 10

FIG. 5.22 – Champ de synthèse et champ reconstruit à $t = 0$

5.5 Conclusions

Nous avons vu dans ce chapitre une série d'algorithmes fondés sur les méthodes établies dans le chapitre 4, pour la reconstruction du flux Φ, d'une source f ou de la température initiale θ^0. On a montré que la formulation duale variationnelle conduit à l'inversion en ligne d'une matrice de faible dimension. Les algorithmes directs qui en découlent sont en général plus avantageux en termes de coût de calcul que des algorithmes itératifs.

Tous les algorithmes développés peuvent être implantés avec des outils simples. Ils sont construits comme une succession de problèmes facilement implantables par la méthode des éléments finis et ne font appel qu'à des routines de calcul usuelles. Le développement de ces algorithmes se fait comme une surcouche logicielle et sans intervention dans les codes d'éléments finis utilisés.

Les algorithmes répondent aux besoins de la surveillance thermovibratoire des ouvrages tant pour leur vitesse d'exécution que pour la précision de reconstruction atteinte. Pour l'algorithme dual direct de reconstruction du flux par exemple, le calcul en ligne ne dure que quelques secondes et le post-traitement environ 3 minutes sur un ordinateur de bureau ordinaire. Le champ final est reconstruit avec une erreur relative de seulement $2,7\%$ en utilisant 8 capteurs.

Chapitre 6

Evaluation des performances des méthodes proposées

Une fois les méthodes de reconstruction et leur implantation présentées, nous nous penchons à présent sur l'étude des performances des algorithmes développés. Ceux-ci sont fondés sur un modèle thermique de la structure étudiée. Quelles sont les avantages et les inconvénients de l'approche adoptée ici par rapport à des méthodes de type observateurs de Kalman ou même par rapport à une simple interpolation ?

En pratique, toute modélisation est imparfaite, se heurtant à la fois au manque d'informations précises sur la structure et aux diverses simplifications nécessaires à l'élaboration du modèle. Se pose alors naturellement la question de la qualité de la reconstruction en présence d'erreurs de modélisation. D'un autre côté, l'observation du système peut elle aussi être biaisée : les mesures disponibles sont systématiquement la somme des valeurs du champ réel (les mesures parfaites) et d'erreurs d'origines et de natures variées. Comment réagissent les résultats de la reconstruction en présence de ces erreurs de mesure ?

Dans ce chapitre, nous donnons des éléments de réponse à ces deux questions.

Erreur	**Expression**
Valeur moyenne du champ	$\mathcal{C}_\Omega(t) = \frac{1}{\lvert\Omega\rvert}\left(\int_\Omega \theta^2\,dx\right)^{\frac{1}{2}}$
Valeur moyenne globale	$\mathcal{C}_{\Omega\times[0,T]} = \frac{1}{\lvert\Omega\rvert T}\left(\int_{\Omega\times[0,T]} \theta^2\,dx\,dt\right)^{\frac{1}{2}}$
Erreur moyenne de dans le domaine	$\mathcal{D}_\Omega(t) = \frac{1}{\lvert\Omega\rvert}\left(\int_\Omega \left(\theta_{rec}(x,t) - \theta_{sim}(x,t)\right)^2 dx\right)^{\frac{1}{2}}$
Erreur moyenne globale	$\mathcal{D}_{\Omega\times[0,T]} = \frac{1}{\lvert\Omega\rvert T}\left(\int_{\Omega\times[0,T]} \left(\theta_{rec} - \theta_{sim}\right)^2 dx\,dt\right)^{\frac{1}{2}}$
Erreur relative dans le domaine	$\mathcal{E}_\Omega(t) = \left(\frac{\int_\Omega \left(\theta_{rec}(x,t) - \theta_{sim}(x,t)\right)^2 dx}{\int_\Omega \theta_{sim}(x,T)^2\,dx}\right)^{1/2}$
Erreur relative globale	$\mathcal{E}_{\Omega\times[0,T]} = \left(\frac{\int_{\Omega\times[0,T]} \left(\theta_{rec} - \theta_{sim}\right)^2 dx\,dt}{\int_{\Omega\times[0,T]} \theta_{sim}^2\,dx\,dt}\right)^{1/2}$
Erreur relative au niveau des capteurs	$\mathcal{E}_m = \left(\frac{\sum_{k=1}^{m}\int_0^T \left(\theta_{rec}(x_k,t) - \theta_{sim}(x_k,t)\right)^2 dt}{\sum_{k=1}^{m}\int_0^T \theta_{sim}(x_k,t)^2\,dt}\right)^{1/2}$

TAB. 6.1 – Définition des erreurs pour la comparaison des résultats.

6.1 Sensibilité au bruit de mesure

Les simulations présentées dans les chapitres précédents se plaçaient dans le cas idéal où les données utilisées pour la reconstruction, sensées représenter les mesures fournies par un système réel, étaient directement issues d'un calcul direct. Elles étaient donc exactes et non bruitées.

En pratique, ce cas idéal n'existe pas. Les techniques d'expérimentation les plus sophistiquées ne fourniront que des mesures entachées d'erreurs qui peuvent être dues

- à la précision des capteurs
- à la précision du système d'acquisition
- à la connectique et aux effets néfastes des conditions ambiantes
- à la physique de la mesure (expériences intrusives)

pour ne citer que certaines des origines d'erreur possibles.

Dans le cadre des problèmes inverses, ces erreurs peuvent conduire à des résultats très divergents à cause du caractère mal posé de ce type de problèmes. La régularisation sert à remédier à ces difficultés. Dans ce qui suit, nous revenons brièvement sur le choix des paramètres de régularisation. Nous présentons ensuite des simulations numériques avec des données bruitées pour vérifier les performances de nos algorithmes de reconstruction en présence d'erreurs de mesure.

6.1.1 Paramètre de régularisation

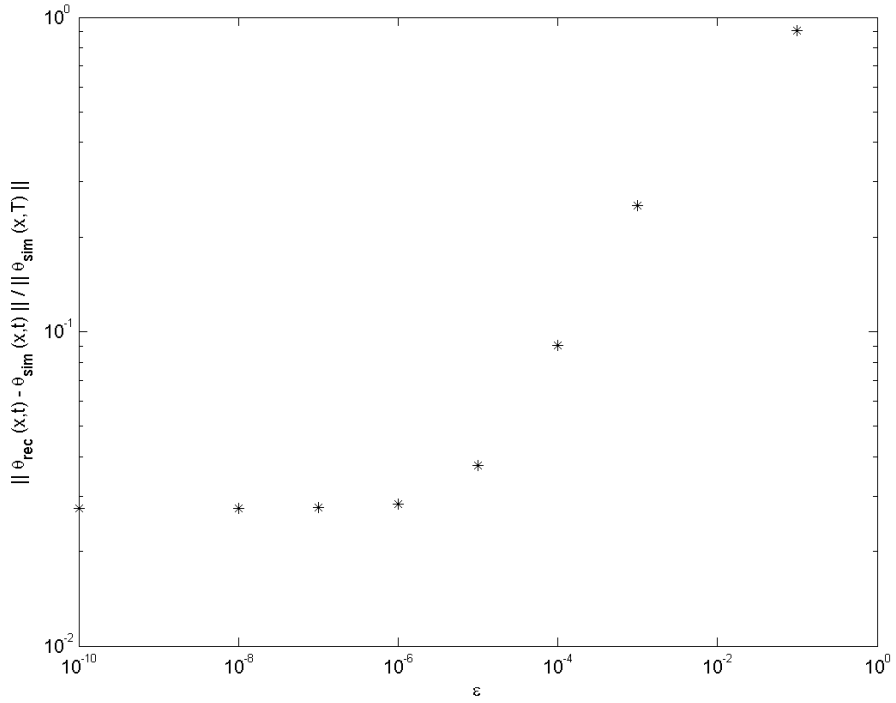
Nous avons déjà évoqué plus haut l'importance du choix approprié de la valeur du paramètre de régularisation ϵ. Une valeur trop importante donne des reconstructions trop régulières et éloigne le résultat de la solution idéale. D'un autre côté, une valeur trop petite réduit l'efficacité de la régularisation et peut conduire à des résultats oscillants ou divergents.

La figure 6.1 reprend le cas test de la partie 5.2.5. L'algorithme de reconstruction est utilisé avec différentes valeurs du paramètre de régularisation ϵ. Les courbes donnent l'erreur relative globale $\mathcal{E}_{\Omega\times[0,T]}$ et l'erreur relative dans le domaine $\mathcal{E}_\Omega$. L'erreur augmente lorsque ϵ dépasse un certain seuil, atteint un minimum, puis augmente de nouveau très légèrement en-dessous de ce seuil, ce qui reflète bien qu'il existe une valeur optimale du paramètre de régularisation qui minimise l'erreur de reconstruction. Le minimum n'est pas très prononcé ici. L'erreur atteint une valeur palier lorsque ϵ est inférieur à 10^{-6}. Du fait qu'ici les mesures ne contiennent pas d'erreur, cette valeur correspond à la limite de précision due aux approximations numériques (notamment, le choix des paramètres q_1 et q_2 dans l'algorithme). Nous verrons un peu plus loin des résultats équivalents, obtenus cette fois avec des mesures bruitées, où le minimum est nettement plus prononcé.

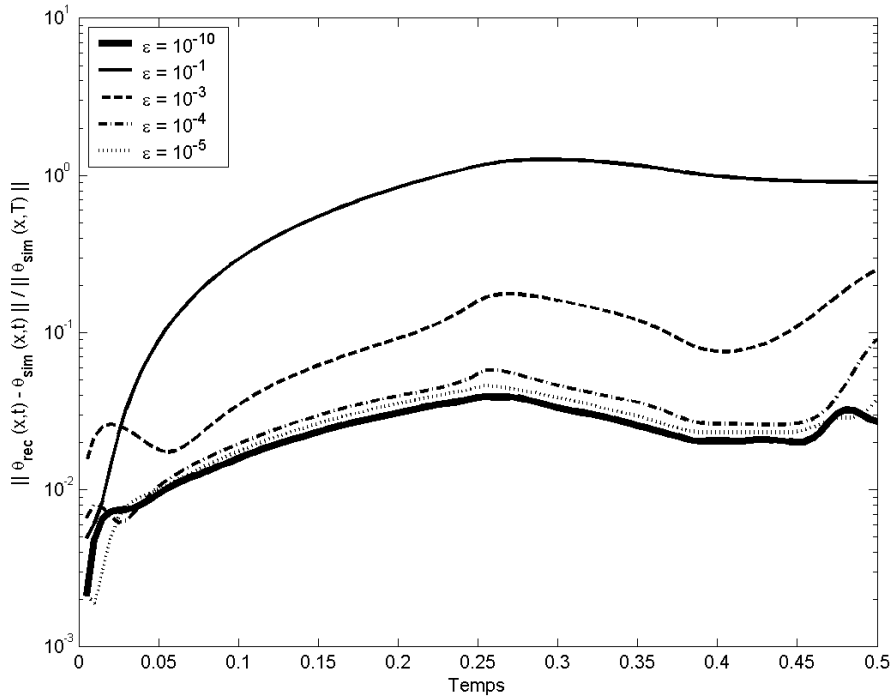
Plusieurs méthodes peuvent être rencontrées dans la littérature concernant le choix de ce paramètre. Ces méthodes visent à réduire l'écart entre la solution idéale x_{vraie} et le résultat x_ϵ de la méthode de régularisation :

$$e_\epsilon = x_\epsilon - x_{vraie}$$

(x représente dans notre cas les sources volumiques, surfaciques et/ou les données initiales). Bien sûr, cette erreur ne peut pas être calculée, vu que par définition la solution idéale x_{vraie} n'est pas connue. Si τ représente le modèle reliant les données x aux données y (l'observation du système), un autre



(a) Erreur globale $\mathcal{E}_{\Omega\times[0,T]}$



(b) Erreur dans le domaine $\mathcal{E}_{\Omega}(t)$

FIG. 6.1 – Erreurs relatives avec des données bruitées ou non pour différentes valeurs de ϵ (reconstruction avec le lot de capteurs 2)

indicateur de l'erreur de reconstruction est l'erreur de prédiction

$$p_\epsilon = \tau e_\epsilon = \tau x_\epsilon - \tau x_{vraie}.$$

Cette erreur de prédiction ne peut pas non plus être calculée, mais elle peut être en revanche estimée. La plupart des méthodes de sélection du paramètre ϵ sont fondées sur cette estimation (Vogel, 2002).

Parmi ces méthodes, nous pouvons citer :

- la méthode *Unbiased Predictive Error Estimator* (UPRE). Cette méthode fait intervenir une estimation de la norme de l'erreur de prédiction, appelée risque de prédiction. A partir d'une relation linéaire entre les données y et la solution régularisée x_ϵ

  $$x_\epsilon = K_\epsilon y$$

  où K_ϵ est l'opérateur régularisé (de Tikhonov dans notre cas), on définit une fonction $U(\epsilon)$ qui est un estimateur sans biais du risque de prédiction. La minimisation de $U(\epsilon)$ par rapport à ϵ détermine la valeur optimale du paramètre de régularisation. La méthode nécessite la connaissance a priori de la variance du bruit de mesure dans les données, supposé blanc.
- la méthode *Generalized Cross Validation* (GCV). Il s'agit d'une variante de la méthode UPRE, mais qui ne requiert pas la connaissance a priori de la variance du bruit de mesure.
- le principe de discrépance (*Discrepancy principle*). Le principe de discrépance a été déjà présenté plus haut, lors de la mise en œuvre d'algorithmes itératifs pour lesquels il est particulièrement adapté (cf. partie 3.2.2). Il consiste à choisir le paramètre de régularisation tel que le résidu

  $$r = \tau x_\epsilon - y$$

  soit du même ordre de grandeur que l'écart-type du bruit de mesure. Dans le cas de l'algorithme du gradient conjugué par exemple, le paramètre de régularisation n'est autre que l'indice de l'itération d'arrêt du processus.
- la méthode *L-curve*. Il s'agit d'une méthode graphique consistant à tracer sur un graphe le logarithme de la norme quadratique de la solution régularisée par rapport à la norme quadratique du résidu, pour des valeurs différentes du paramètre de régularisation. La courbe obtenue présente en général une forme caractéristique en L, et la valeur optimale du paramètre se retrouve à l'angle de la forme en L.

L'inconvénient de ces méthodes est qu'elles utilisent le résultat du problème inverse. Leur implantation se fait donc en général de manière itérative. Lorsque l'algorithme inverse est lui même itératif, le calcul de l'estimateur peut se faire à chaque itération. Mais dans le cas d'un algorithme direct, il est nécessaire de résoudre le problème avec plusieurs valeurs différentes du paramètre de régularisation et de choisir celle qui minimise l'erreur d'estimation. Pour plus de détails sur ces méthodes et sur leur implantation nous renvoyons à Engl *et al.* (1994); Vogel (2002).

Par ailleurs, rappelons aussi que certains algorithmes, comme l'algorithme du gradient conjugué (Nemirovskii, 1986; Carthel *et al.* , 1994) ou l'algorithme *Minimal Error* (King, 1989; Hanke, 1995b) ont des propriétés régularisantes intrinsèques. Cela signifie que le processus présente une propriété d'élimination des hautes fréquences nuisibles à la qualité de la reconstruction par propagation des erreurs. Lorsqu'il s'agit d'algorithmes itératifs, le paramètre de régularisation est alors l'indice de l'itération d'arrêt.

6.1.2 Simulations avec données bruitées

Les résultats présentés ici sont issus de simulations numériques sur modèle du bloc de béton. Elles reprennent le cas traité dans la partie 5.2.5 : le flux dont la répartition spatiale et temporelle sont donnés par la figure 5.5 page 123 est imposé sur la face Γ du solide. Un calcul direct fournit les valeurs du champ de température aux emplacements des 8 capteurs du lot 2 (cf. figure 5.6 page 124). Ces données sont utilisées pour une simulation de l'algorithme de reconstruction. On compare le cas où ces données sont utilisées telles quelles avec le cas où un bruit blanc gaussien d'écart-type $\sigma = 3/2$ leur est ajouté numériquement. L'erreur normalisée sur les données peut être mesurée par :

$$\mathcal{E}_{bruit} = \left(\frac{\sum_{k=1}^{m} \int_0^T \left(\theta_k^{d,bruit} - \theta_k^d\right)^2 dt}{\sum_{k=1}^{m} \int_0^T \left(\theta_k^d\right)^2 dt} \right)^{1/2} = 10\%$$

La figure 6.2 montre les erreurs relatives $\mathcal{E}_{\Omega\times[0,T]}$ et $\mathcal{E}_\Omega(t)$ (cf. tableau 6.1) commises avec des données bruitées selon la valeur de ϵ choisie. Une valeur proche de $\epsilon = 10^{-4}$ semble être un bon choix pour ce niveau de bruit : parmi les valeurs testées, elle donne l'erreur minimum. Dans la pratique, l'utilisateur d'un algorithme de reconstruction ne dispose pas de la possibilité de calculer l'erreur dans le domaine. Son choix du paramètre de régularisation serait plutôt guidé par la courbe de la figure 6.3, qui correspond l'erreur relative $\mathcal{E}_m$ entre les données et les valeurs du champ reconstruit au niveau des capteurs.

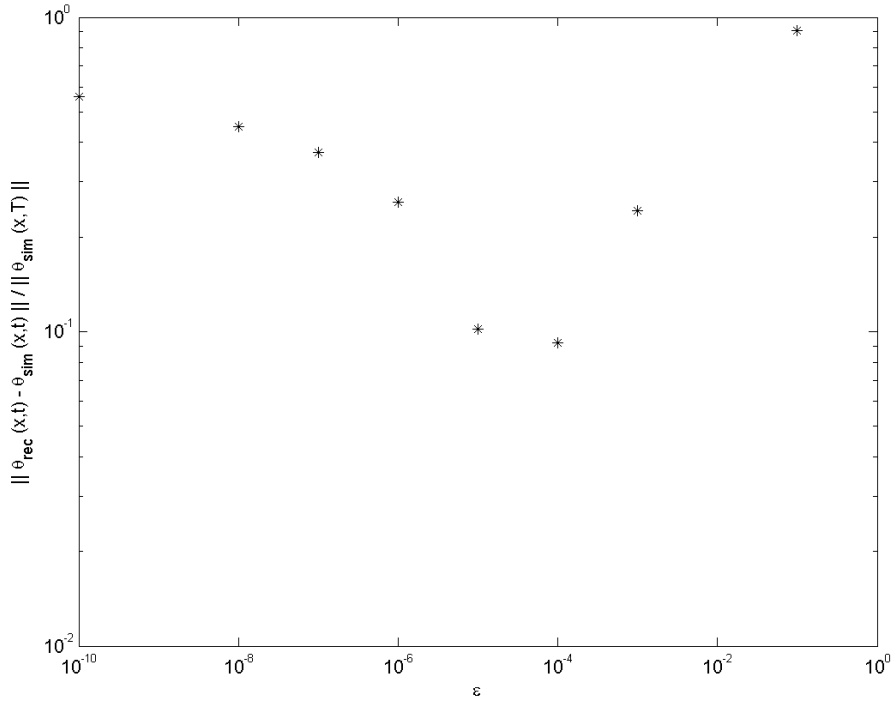
On y voit que le minimum correspond à la même valeur de ϵ. La courbe donnée dans 6.2 correspond, à certains coefficients près, à celles données par la méthode UPRE ou CGV évoquées plus haut. Choisir le paramètre ϵ qui donne le minimum de l'erreur $\mathcal{E}_m$ revient à utiliser le principe de discrépance.

Les figures 6.4 et 6.5 montrent les résultats de la reconstruction avec données bruitées, pour $\epsilon = 10^{-4}$. Si les données sont bruitées avec un rapport $\mathcal{E}_{bruit}$ de 10%, l'algorithme est capable de reconstruire un champ moyen de $7,36\,^\circ C$ (champ de synthèse) avec une erreur moyenne de $0,38\,^\circ C$, ce qui correspond à une erreur relative de $5,2\%$ (contre $2,5\%$ avec des données non bruitées). A l'instant final, le champ moyen de $5,21^\circ C$ est reconstruit avec une erreur moyenne de $0,48^\circ C$ (erreur relative de $9,2\%$ contre $2,7\%$ avec des données non bruitées) (cf. tableau 6.2).

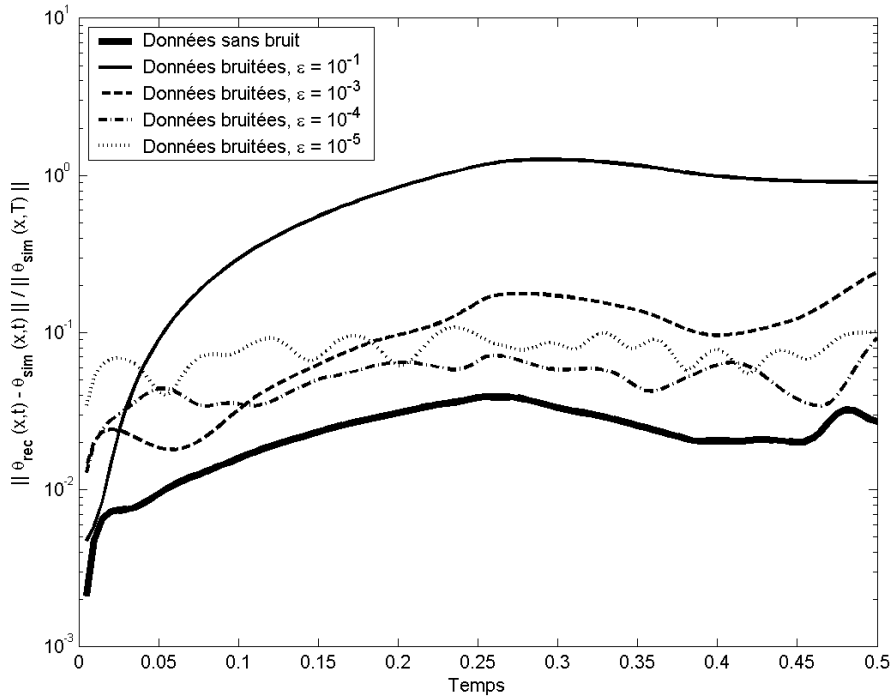
Cas étudié	$\mathcal{C}_{\Omega\times[0,T]}$	$\mathcal{D}_{\Omega\times[0,T]}$	$\mathcal{E}_{\Omega\times[0,T]}$	$\mathcal{C}_\Omega(T)$	$\mathcal{D}_\Omega(T)$	$\mathcal{E}_\Omega(T)$
Champ cible	$7,36\,^\circ C$			$5,21^\circ C$		
Sans bruit[a]	$7,37\,^\circ C$	$0,21\,^\circ C$	$2,8\%$	$5,24\,^\circ C$	$0,14\,^\circ C$	$2,7\%$
Avec bruit ($\mathcal{E}_{bruit} = 10\%$)[b]	$7,24\,^\circ C$	$0,38\,^\circ C$	$5,2\%$	$4,96\,^\circ C$	$0,48\,^\circ C$	$9,2\%$

[a] cf. figure 5.12, partie 5.2.5
[b] cf. figure 6.5

TAB. 6.2 – Reconstruction avec bruit de mesure.



(a) Erreur relative globale $\mathcal{E}_{\Omega\times[0,T]}$



(b) Erreur dans le domaine $\mathcal{E}_\Omega(t)$

FIG. 6.2 – Erreurs relatives avec des données bruitées ou non pour différentes valeurs de ϵ (reconstruction avec le lot de capteurs 2)

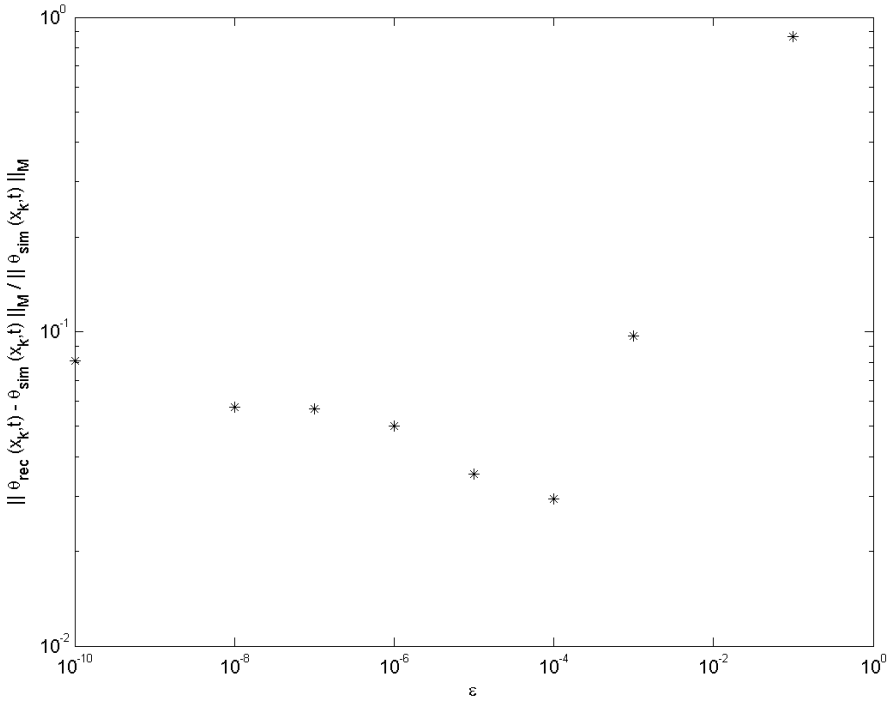


FIG. 6.3 – Erreur relative $\mathcal{E}_m$ au niveau des capteurs avec des données bruitées en fonction de ϵ (reconstruction avec le lot de capteurs 2)

6.2 Sensibilité aux incertitudes du modèle

On cherche à évaluer la sensibilité de la solution du problème de minimisation aux différents paramètres du modèle, pour avoir une idée de l'impact des incertitudes sur les résultat. Plus particulièrement, nous étudions la robustesse de la reconstruction par rapport aux caractéristiques du matériau (les coefficients de diffusivité κ et d'échange α) et par rapport aux positions x_k des capteurs.

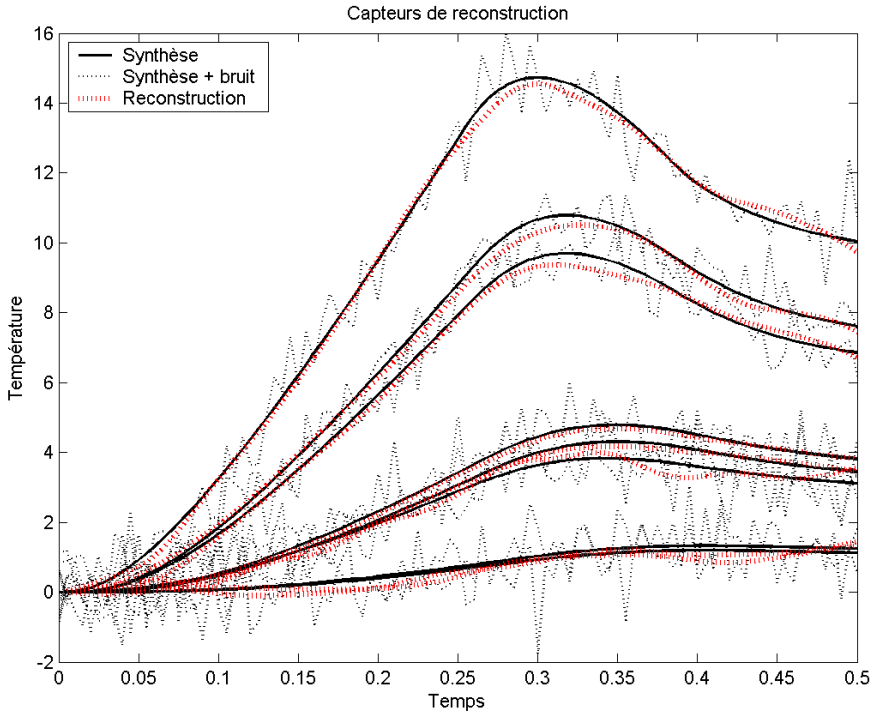
Pour cela, on cherche à quantifier la variation de Φ, c'est-à-dire le résultat de l'algorithme de reconstruction, due à une variation des paramètres. Cela revient à différencier le système d'optimalité par rapport aux paramètres. Brandes & Griesse (2007) montrent que ceci conduit à un problème auxiliaire d'optimisation quadratique avec des contraintes linéaires. Voir aussi Büskens & Griesse (2006); Griesse (2004).

Une idée de la robustesse de la reconstruction par rapport à tel ou tel paramètre peut aussi être fournie par la 'platitude' de la fonctionnelle J : cela fait appel à la notion de Hessien (dérivée seconde) de la fonctionnelle. On montre formellement que

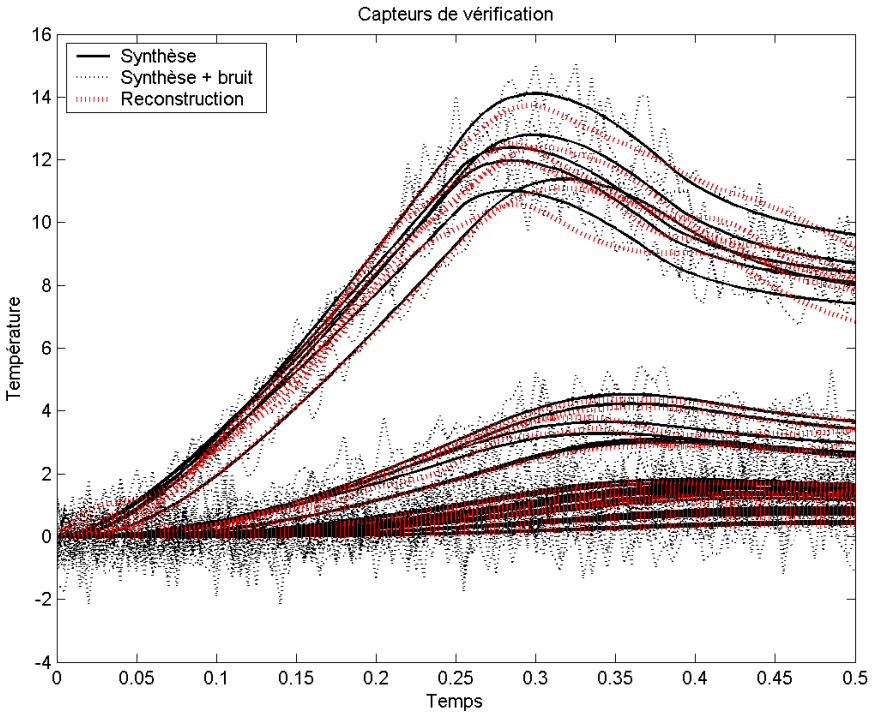
$$\left(\nabla^2 J.\delta\Psi, \delta\Phi\right)_{\mathcal{V}} = \sum_{k=1}^{m} \int_0^T \theta(x_k, t; \delta\Phi)\theta(x_k, t; \delta\Psi)\, dt + \frac{\epsilon}{2} \left(\delta\Psi, \delta\Phi\right)_{\mathcal{V}} \tag{6.1}$$

qui s'écrit aussi

$$\left(\nabla^2 J.\delta\Psi, \delta\Phi\right)_{\mathcal{V}} = \int_{\partial\Omega} p(\theta(\delta\Psi))\delta\Phi\, d\gamma dt + \frac{\epsilon}{2} \left(\delta\Psi, \delta\Phi\right)_{\mathcal{V}} \tag{6.2}$$

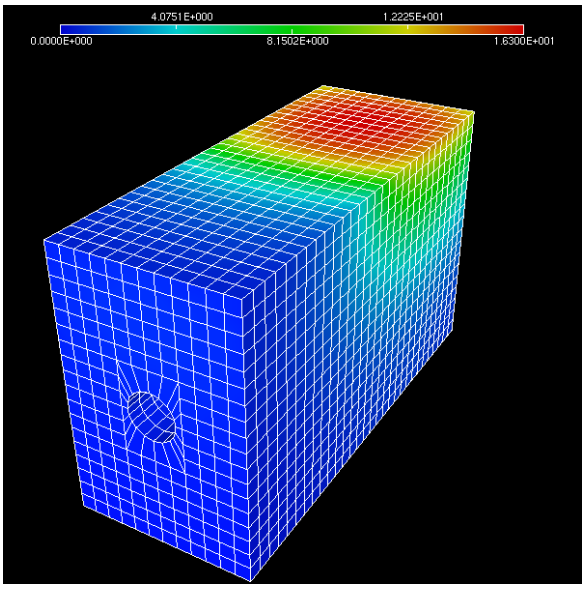


(a) Capteurs de reconstruction (lot 2)

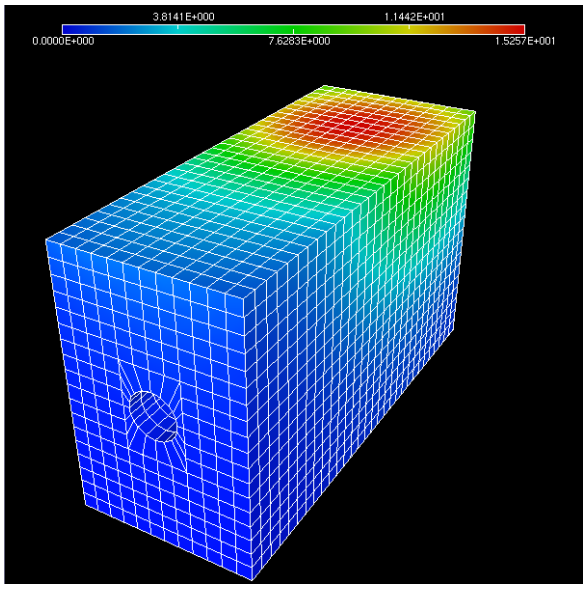


(b) Autres capteurs

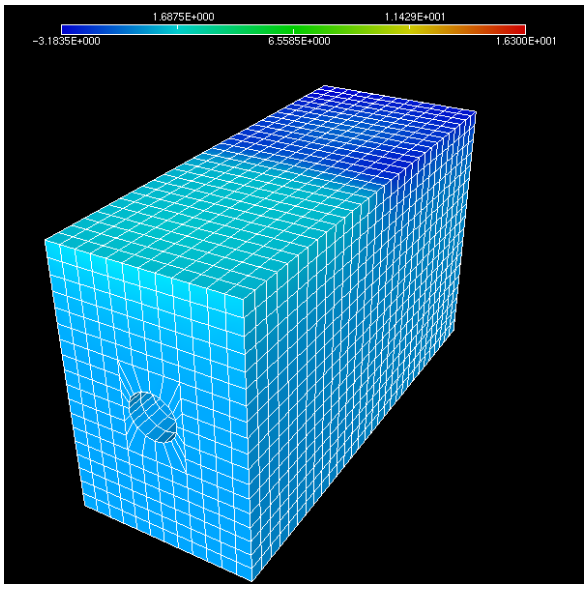
FIG. 6.4 – Reconstruction avec données bruitées ($\mathcal{E}_{bruit} = 10\%$, $\epsilon = 10^{-4}$) : évolution des champs reconstruit et de synthèse au niveau des capteurs



(a) Champ de synthèse



(b) Champ reconstruit



(c) Différence

FIG. 6.5 – Reconstruction avec données bruitées ($\mathcal{E}_{bruit} = 10\%$, $\epsilon = 10^{-4}$) : résultats à $t = T$

$p(\theta(\delta\Psi))$ étant solution de l'état adjoint avec $\theta(x_k, t; \delta\Psi)$ qu second membre.

On voit donc que l'opérateur adjoint, que nous avions aussi noté $I^{-1}\tau^*\Lambda\tau + \epsilon$ auparavant, correspond au Hessien de la fonctionnelle primale $J(\Phi)$. Si on introduit un espace de dimension finie $\mathcal{V}_h \subset \mathcal{V}$ doté d'une base $\{g_r\}_{r=1}^{q_1 q_2}$ (comme dans le chapitre 5), on peut construire une approximation $\mathbb{H} = [H_{rs}] \in \mathcal{A}^{q_1 q_2 \times q_1 q_2}(\mathbb{R})$ de l'opérateur Hessien, telle que

$$\begin{aligned} H_{rs} &= \int_{\partial\Omega} p(\theta(g_r)) g_s \, d\gamma dt + \frac{\epsilon}{2} (g_r, g_s)_{\mathcal{V}_h} \\ &= \sum_{k=1}^{m} \int_0^T \theta(x_k, t, g_r)\theta(x_k, t, g_s) \, dt + \frac{\epsilon}{2} (g_r, g_s)_{\mathcal{V}_h} \end{aligned} \tag{6.3}$$

Le Hessien peut être interprété comme la *Matrice d'Information de Fischer (FIM)* : l'inverse de la FIM correspond à une approximation de la matrice de covariance des erreurs sur la variable estimée Φ. Uciński (1999) propose alors de déterminer des paramètres (tels que le placement des capteurs) qui optimisent la qualité de la reconstruction en minimisant un critère $G(\mathbb{H})$ faisant intervenir la FIM. Par exemple :

- Critère basé sur le déteminant : $G(\mathbb{H}) = -\log\det\mathbb{H}$
- Critère basé sur la plus petite valeur propre : $G(\mathbb{H}) = \lambda_{\max}\left(\mathbb{H}^{-1}\right)$
- Critère basé sur la trace : $G(\mathbb{H}) = \text{trace}\left(\mathbb{H}^{-1}\right)$ ou $G(\mathbb{H}) = -\text{trace}\,(\mathbb{H})$

Le Hessien peut aussi être interprété comme la matrice grammienne de contrôlabilité du système. De la même manière, on peut construire le Hessien de la fonctionnelle duale I : il s'agit en fait de la matrice grammienne de contrôlabilité du système dual, qui a été notée $\mathbb{A}$ tout au long de cet exposé. En exploitant le parallèle qui existe entre observabilité et contrôlabilité, la matrice $\mathbb{A}$ peut être vue comme la matrice grammienne d'observabilité du système primal.

Après cette mise au point théorique sur le calcul des sensibilités, nous nous contenterons ici d'une évaluation 'empirique' de celles-ci, sur la base de simulations numériques. Nous présenterons à cet effet des résultats de reconstruction obtenus avec l'algorithme direct en formulation duale lorsque les paramètres du modèle sont décalés par rapport à leurs valeurs nominales. Nous étudierons à tour de rôle l'impact des imprécisions sur le coefficient de diffusivité κ, sur les coefficients d'échange α en surface et sur les positions x_k des capteurs.

Pour toutes ces simulations, nous partons d'un calcul direct de synthèse avec le chargement imposé pour les simulations numériques présentées dans la partie 5.2.5 (figure 5.5) et pour des valeurs nominales des paramètres. Ensuite, les données fournies par le lot de 8 capteurs A1, A6, B4, C2, C7, D4, E1 et E6[1] représenté sur la figure 6.6 sont utilisées comme données pour la reconstruction utilisant des modèles avec paramètres modifiés. Le résultat de la reconstruction avec valeurs nominales des paramètres est donné sur la figure 6.6. Les écarts par rapport à la solution cible sont évalués grâce aux différentes mesures rappelées dans le tableau 6.1.

6.2.1 Sensibilité au coefficient de diffusivité κ

Les résultats présentés ici concernent la qualité de la reconstruction lorsque la valeur de κ est modifiée par rapport à sa valeur nominale, notée $\bar{\kappa}$. Quatre cas sont étudiés : des variations positives

[1] il s'agit du lot de capteurs noté 'lot 2' dans 5.2.5

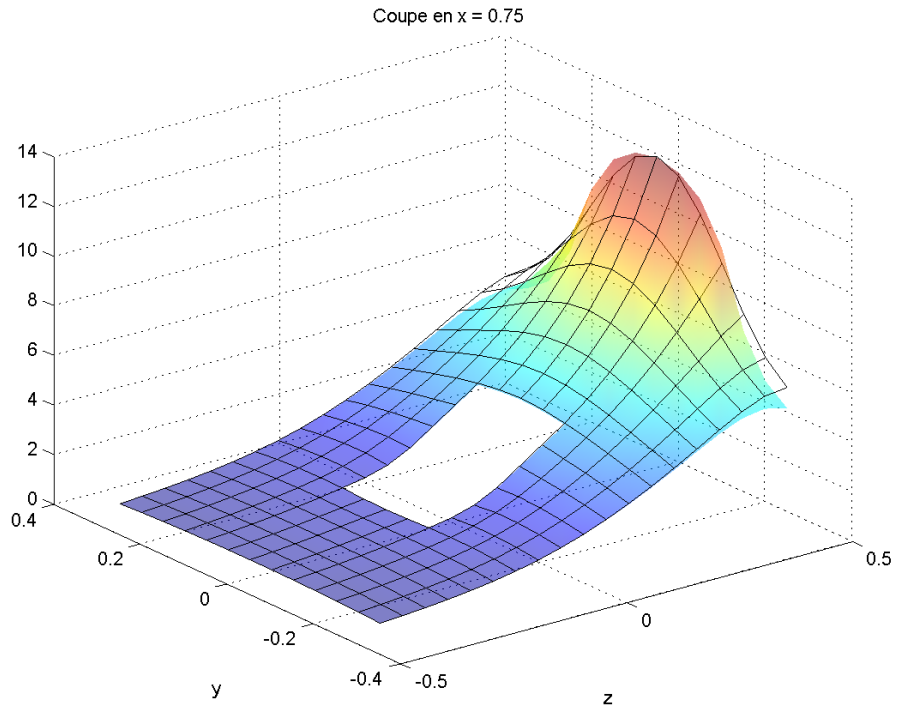


FIG. 6.6 – Champ de synthèse *(surface pleine)* et champ reconstruit *(surface quadrillée)* en $x = 0,75$, valeurs nominales des paramètres.

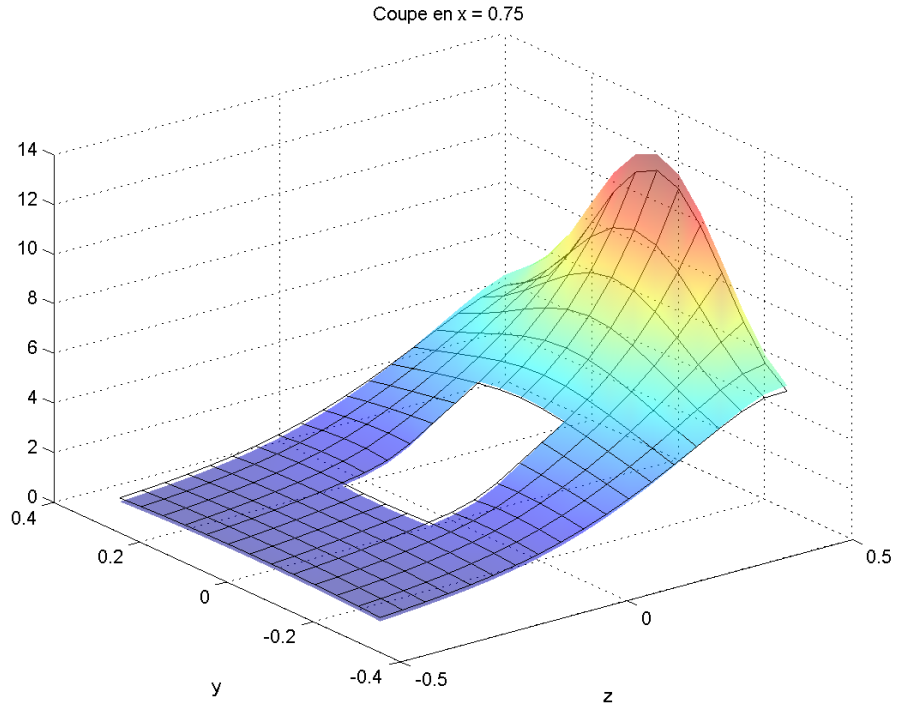
et négatives de 10% ($\kappa = 1,1\bar{\kappa}$ et $\kappa = 0,9\bar{\kappa}$) et de 25% ($\kappa = 1,25\bar{\kappa}$ et $\kappa = 0,75\bar{\kappa}$).

La figure 6.7(a) permet de voir la distorsion de la valeur finale du champ reconstruit sur la partie $x = 0,75$ située au milieu du bloc, lorsque $k = 1,25\bar{k}$. Le champ reconstruit tend à être sous-estimé, bien que la différence entre les deux champs reconstruits soit à peine visible. Elle est plus importante près du bord qui reçoit un flux positif. A l'instant final, l'erreur sur le reconstruction passe de $2,7\%$ avec le modèle exact à $3,6\%$ pour 10% d'écart de la valeur de κ (cf. tableau 6.3). Elle est de $6,0\%$ d'erreur pour un écart de 25%.

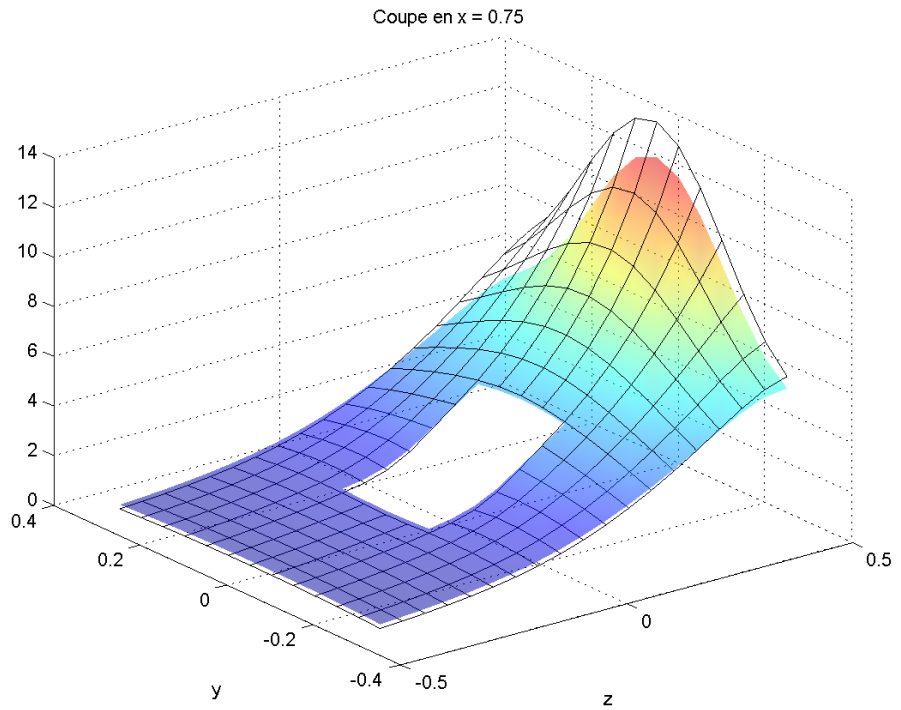
Lorsque les valeurs de κ sont plus petites que la valeur nominale, le constat est à peu près le même. Le champ reconstruit a cette fois tendance à être légèrement sur-estimé près du bord où le flux est non nul (cf. figure 6.7(a)). Mais l'erreur commise reste encore à des niveaux relativement bas : $3,7\%$ d'erreur relative (contre $2,7\%$ pour le modèle exact) lorsque la valeur de κ est de 10% inférieure à sa vraie valeur, et $7,9\%$ lorsque la valeur de κ est inférieure de 25%.

6.2.2 Sensibilité au coefficient d'échange α

Pour l'étude de l'impact sur la reconstruction de l'incertitude sur le coefficient d'échange α, nous avons distingué deux cas : un premier cas où l'incertitude porte sur le coefficient d'échange de la partie de la surface où le flux est inconnu (surface Γ) et sur laquelle porte la reconstruction, et un deuxième cas où l'incertitude porte sur le coefficient d'échange sur la partie complémentaire $\partial\Omega \setminus \Gamma$ de la surface extérieure, où le flux est connu (conditions aux limites homogènes).



(a) $\kappa = 1,25\bar{\kappa}$



(b) $\kappa = 0,75\bar{\kappa}$

FIG. 6.7 – Reconstruction avec valeur inexacte de κ : coupe en $x = 0,75$ ($t = T$). Surface pleine : champ cible, surface quadrillée : champ reconstruit.

Cas étudié	$\mathcal{C}_{\Omega\times[0,T]}$	$\mathcal{D}_{\Omega\times[0,T]}$	$\mathcal{E}_{\Omega\times[0,T]}$	$\mathcal{C}_{\Omega}(T)$	$\mathcal{D}_{\Omega}(T)$	$\mathcal{E}_{\Omega}(T)$
Champ cible	$7,36\,^{\circ}C$			$5,21\,^{\circ}C$		
$\kappa = \bar{\kappa}$	$7,37\,^{\circ}C$	$0,21\,^{\circ}C$	$2,8\%$	$5,24\,^{\circ}C$	$0,14\,^{\circ}C$	$2,7\%$
$\kappa = 1,25\bar{\kappa}$[a]	$7,11\,^{\circ}C$	$0,61\,^{\circ}C$	$8,3\%$	$5,22\,^{\circ}C$	$0,31\,^{\circ}C$	$6,0\%$
$\kappa = 1,10\bar{\kappa}$	$7,25\,^{\circ}C$	$0,32\,^{\circ}C$	$4,3\%$	$5,23\,^{\circ}C$	$0,19\,^{\circ}C$	$3,6\%$
$\kappa = 0,90\bar{\kappa}$	$7,51\,^{\circ}C$	$0,39\,^{\circ}C$	$5,3\%$	$5,27\,^{\circ}C$	$0,19\,^{\circ}C$	$3,7\%$
$\kappa = 0,75\bar{\kappa}$[b]	$7,83\,^{\circ}C$	$0,93\,^{\circ}C$	$12,7\%$	$5,35\,^{\circ}C$	$0,41\,^{\circ}C$	$7,9\%$

[a] cf. figure 6.7(a)
[b] cf. figure 6.7(b)

TAB. 6.3 – Qualité de la reconstruction en fonction des variations de κ.

Vu qu'en pratique l'incertitude sur les valeurs de α peut être très importante (souvent de l'ordre de 100%) nous avons fait les simulations avec des valeurs 2 à 4 fois plus grandes ou plus petites que les valeurs nominales.

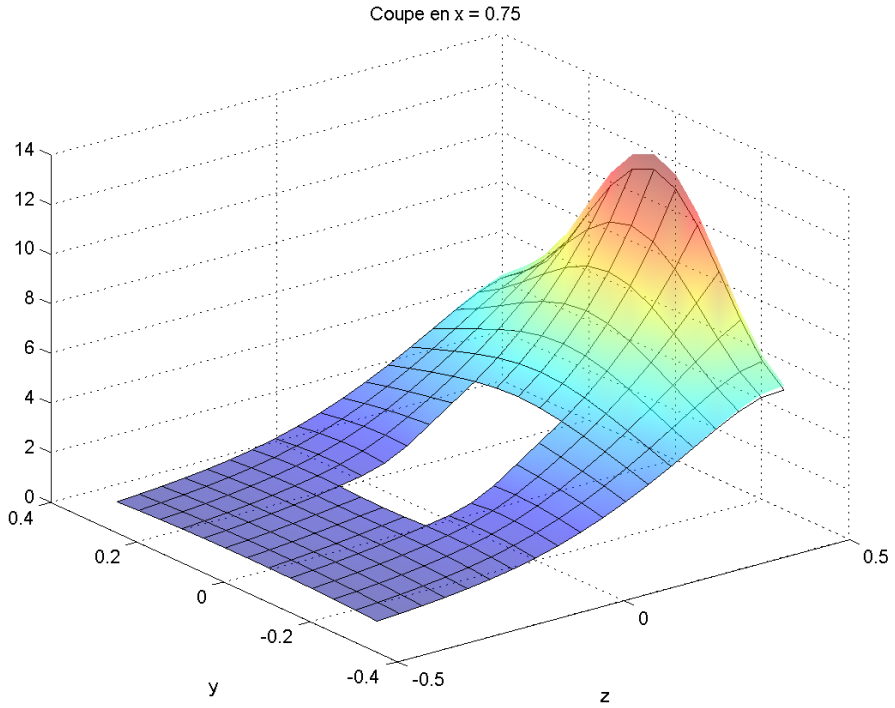
Le premier cas concerne la valeur du coefficient d'échange (noté α_Γ) sur la partie de la surface où le flux est inconnu (sur laquelle porte la reconstruction). On constate que le processus de reconstruction est quasiment insensible à l'erreur sur α_Γ. Que la valeur de α_Γ dans le modèle soit 2 fois plus petite ou plus grande que la valeur réelle, les champs reconstruits avec ou sans erreur diffèrent de manière imperceptible comme le montrent les figures 6.8(a) et 6.8(b). Les erreurs relatives données dans le tableau 6.4 confirment ce résultat.

Si la qualité de la reconstruction est insensible aux erreurs sur la valeur du coefficient α_Γ, elle l'est en revanche beaucoup plus lorsque l'erreur est commise sur la valeur des coefficients d'échange (notés $\alpha_{\partial\Omega\setminus\Gamma}$) des surfaces de flux connu (les surfaces où les conditions aux limites sont homogènes). Les figures 6.9(a) et 6.9(b) montrent les champs reconstruits (pour $x = 0,75$) avec des valeurs 2 fois plus grandes ou plus petites. Avec une valeur de $\alpha_{\partial\Omega\setminus\Gamma}$ deux fois plus grande que la valeur réelle, l'erreur sur le champ reconstruit à l'instant final passe de $2,7\%$ à $20,5\%$, ou à $16,9\%$ pour une valeur deux fois plus petite. Ce constat mérite néanmoins d'être nuancé : l'erreur de reconstruction reste à chaque fois inférieure à l'erreur sur la valeur de $\alpha_{\partial\Omega\setminus\Gamma}$. Pour 300% d'erreur sur $\alpha_{\partial\Omega\setminus\Gamma}$ ($\alpha_{\partial\Omega\setminus\Gamma} = 0,25\bar{\alpha}_{\partial\Omega\setminus\Gamma}$), l'erreur sur le champ reconstruit "n'est que" de $25,0\%$ (cf. tableau 6.4).

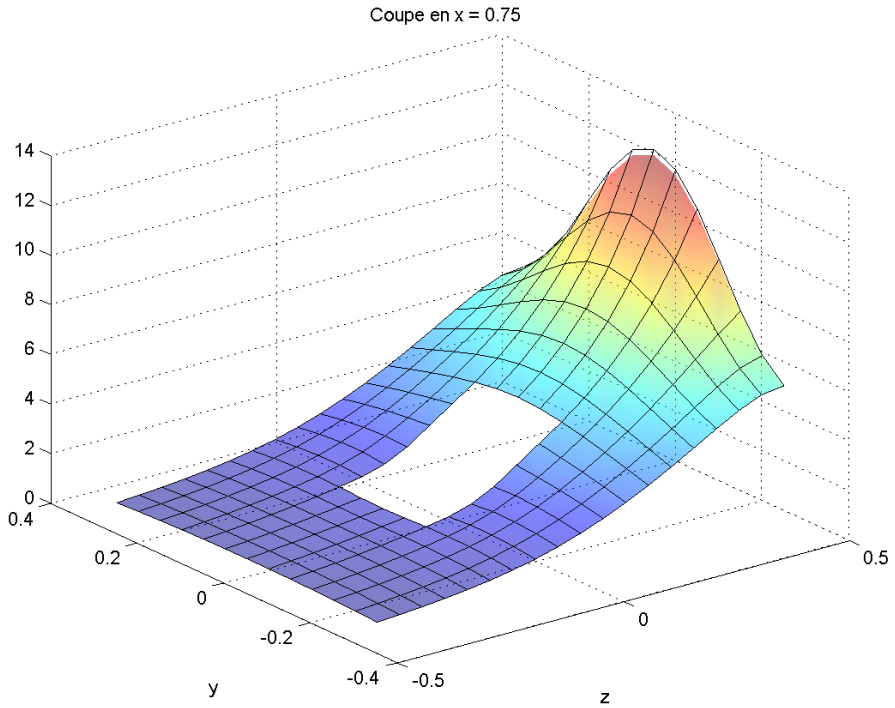
6.2.3 Sensibilité aux incertitudes sur la position des capteurs

Un troisième type d'erreur de modélisation possible est due à l'incertitude sur les positions x_k des capteurs. Pour quantifier l'impact de ce type d'incertitude sur la qualité de la reconstruction, nous avons réalisé des simulations avec des données fournies par des capteurs positionnés non pas sur les points x_k, mais sur des emplacements décalés aléatoirement par rapport à ces positions nominales. Les valeurs du décalage dans les trois directions du système de coordonnées suivent une loi normale centrée en 0 et d'écart type σ. Dans le modèle utilisé pour la reconstruction par la suite, les positions des capteurs sont données par les valeurs nominales de x_k.

La figure 6.10 montre l'effet de décalages d'écart type $\sigma = 0,01$ sur les mesures au niveau de 3

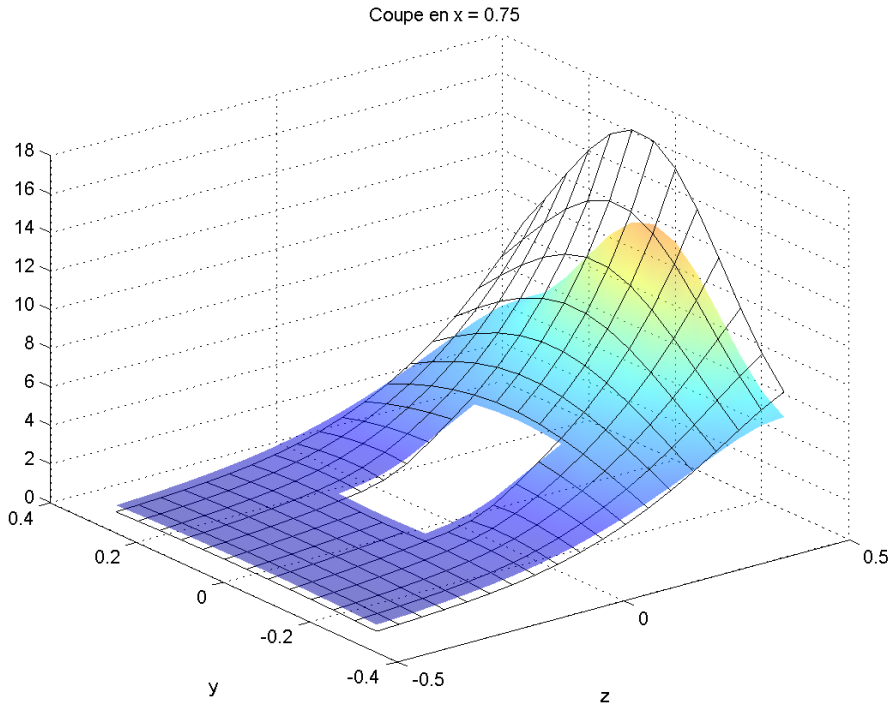


(a) $\alpha_\Gamma = 2\bar{\alpha}_\Gamma$

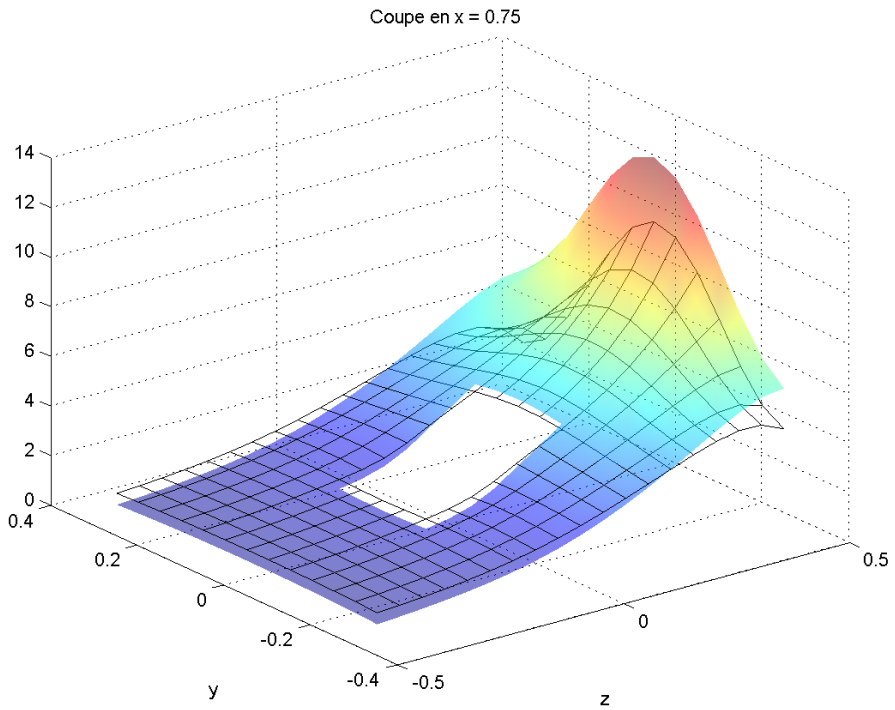


(b) $\alpha_\Gamma = 0,5\bar{\alpha}_\Gamma$

FIG. 6.8 – Reconstruction avec valeur inexacte de α_Γ : coupe en $x = 0,75$ ($t = T$). Surface pleine : champ cible, surface quadrillée : champ reconstruit.



(a) $\alpha_{\partial\Omega\setminus\Gamma} = 2\bar{\alpha}_{\partial\Omega\setminus\Gamma}$



(b) $\alpha_{\partial\Omega\setminus\Gamma} = 0,5\bar{\alpha}_{\partial\Omega\setminus\Gamma}$

FIG. 6.9 – Reconstruction avec valeur inexacte de $\alpha_{\partial\Omega\setminus\Gamma}$: coupe en $x = 0,75$ $(t = T)$. Surface pleine : champ cible, surface quadrillée : champ reconstruit.

Cas étudié	$\mathcal{C}_{\Omega\times[0,T]}$	$\mathcal{D}_{\Omega\times[0,T]}$	$\mathcal{E}_{\Omega\times[0,T]}$	$\mathcal{C}_{\Omega}(T)$	$\mathcal{D}_{\Omega}(T)$	$\mathcal{E}_{\Omega}(T)$
Champ cible	$7,36\,^{\circ}C$				$5,21\,^{\circ}C$	
Valeurs nominales	$7,37\,^{\circ}C$	$0,21\,^{\circ}C$	$2,8\%$	$5,24\,^{\circ}C$	$0,14\,^{\circ}C$	$2,7\%$
Variations de $\bar{\alpha}_{\Gamma}$ *:*						
$\alpha_{\Gamma} = 4\bar{\alpha}_{\Gamma}$	$7,35\,^{\circ}C$	$0,24\,^{\circ}C$	$3,2\%$	$4,90\,^{\circ}C$	$0,47\,^{\circ}C$	$9,0\%$
$\alpha_{\Gamma} = 2\bar{\alpha}_{\Gamma}$ [a]	$7,36\,^{\circ}C$	$0,22\,^{\circ}C$	$2,9\%$	$5,15\,^{\circ}C$	$0,20\,^{\circ}C$	$3,8\%$
$\alpha_{\Gamma} = 0,5\bar{\alpha}_{\Gamma}$ [b]	$7,37\,^{\circ}C$	$0,21\,^{\circ}C$	$2,8\%$	$5,27\,^{\circ}C$	$0,14\,^{\circ}C$	$2,7\%$
$\alpha_{\Gamma} = 0,25\bar{\alpha}_{\Gamma}$	$7,37\,^{\circ}C$	$0,21\,^{\circ}C$	$2,8\%$	$5,27\,^{\circ}C$	$0,14\,^{\circ}C$	$2,7\%$
Variations de $\bar{\alpha}_{\partial\Omega\setminus\Gamma}$ *:*						
$\alpha_{\partial\Omega\setminus\Gamma} = 4\bar{\alpha}_{\partial\Omega\setminus\Gamma}$	$10,36\,^{\circ}C$	$4,88\,^{\circ}C$	$62,3\%$	$6,47\,^{\circ}C$	$2,47\,^{\circ}C$	$47,4\%$
$\alpha_{\partial\Omega\setminus\Gamma} = 2\bar{\alpha}_{\partial\Omega\setminus\Gamma}$ [c]	$8,38\,^{\circ}C$	$1,85\,^{\circ}C$	$25,2\%$	$5,65\,^{\circ}C$	$1,07\,^{\circ}C$	$20,5\%$
$\alpha_{\partial\Omega\setminus\Gamma} = 0,5\bar{\alpha}_{\partial\Omega\setminus\Gamma}$ [d]	$6,93\,^{\circ}C$	$1,14\,^{\circ}C$	$15,4\%$	$5,12\,^{\circ}C$	$0,88\,^{\circ}C$	$16,9\%$
$\alpha_{\partial\Omega\setminus\Gamma} = 0,25\bar{\alpha}_{\partial\Omega\setminus\Gamma}$	$6,79\,^{\circ}C$	$1,84\,^{\circ}C$	$25,0\%$	$5,16\,^{\circ}C$	$1,52\,^{\circ}C$	$29,1\%$

[a] cf. figure 6.8(a)
[b] cf. figure 6.8(b)
[c] cf. figure 6.9(a)
[d] cf. figure 6.9(b)

TAB. 6.4 – Qualité de la reconstruction en fonction des variations des coefficients d'échange.

capteurs placés à des profondeurs différentes. Pour un champ de température donné, une incertitude de $\pm 0,01m$ sur la position des capteurs peut induire une différence allant jusqu'à $2^{\circ}C$ pour des valeurs de champ mesurées d'environ $10^{\circ}C$ degrés, soit une erreur relative de mesure de 20% (c'est le cas du capteur C1 par exemple). L'erreur relative moyenne sur l'ensemble des capteurs est de l'ordre de 10%.

On voit donc l'importance de la précision sur la position des capteurs : il semblerait que c'est le paramètre auquel la reconstruction est le plus sensible. L'effet sur le champ reconstruit est visible sur les figures 6.11(a) et 6.11(b) pour des degrés d'incertitude différents. En ce qui concerne le champ à l'instant final, l'erreur de reconstruction relative passe de $2,7\%$ pour des positions de capteurs exactes, à $6,3\%$ si la position n'est connue qu'à un écart-type de $0,01\,m$ près.

Cas étudié	$\mathcal{C}_{\Omega}(T)$	$\mathcal{D}_{\Omega}(T)$	$\mathcal{E}_{\Omega}(T)$
Champ cible	$5,21\,^{\circ}C$		
positions x_k nominales	$5,24\,^{\circ}C$	$0,14\,^{\circ}C$	$2,7\%$
décalage aléatoire ($\sigma = 0,001$)[a]	$5,21\,^{\circ}C$	$0,16\,^{\circ}C$	$3,1\%$
décalage aléatoire ($\sigma = 0,01$)[b]	$5,01\,^{\circ}C$	$0,33\,^{\circ}C$	$6,3\%$
décalage aléatoire ($\sigma = 0,02$)	$5,37\,^{\circ}C$	$0,47\,^{\circ}C$	$9,0\%$

[a] cf. figure 6.11(a)
[b] cf. figure 6.11(b)

TAB. 6.5 – Qualité de la reconstruction en fonction des variations sur les positions x_k des capteurs.

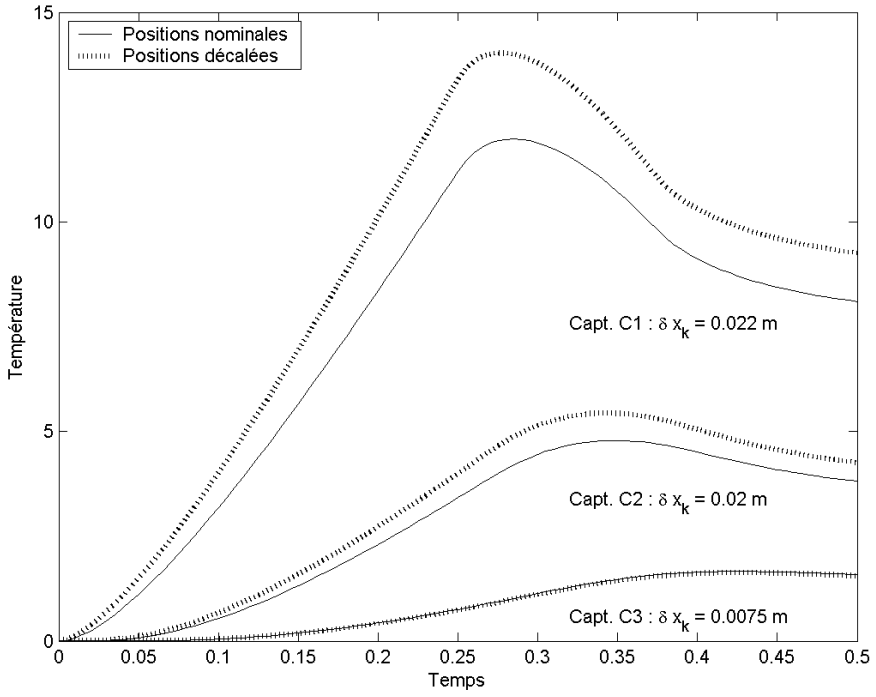
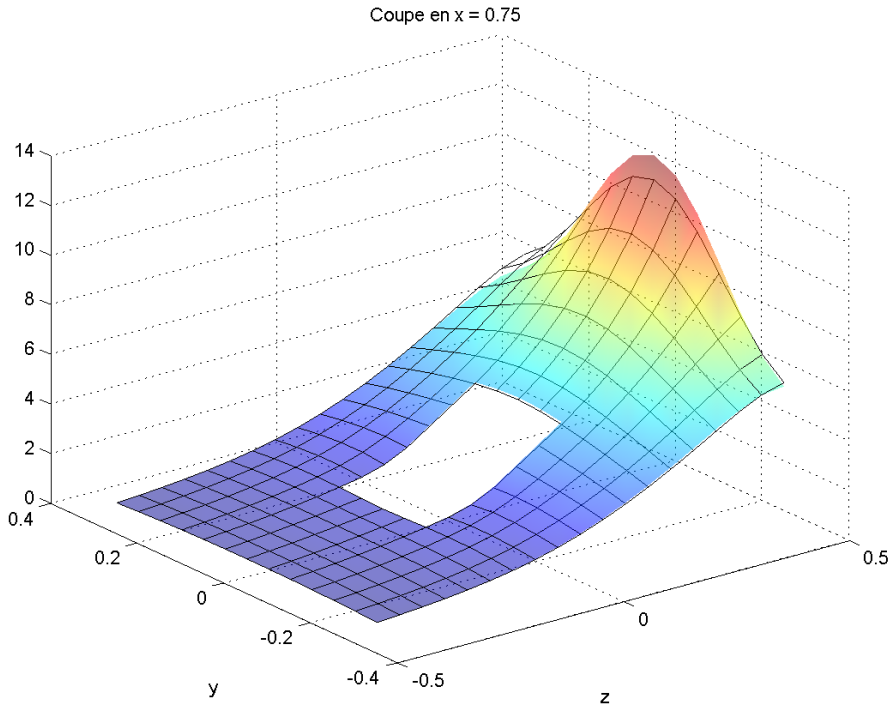
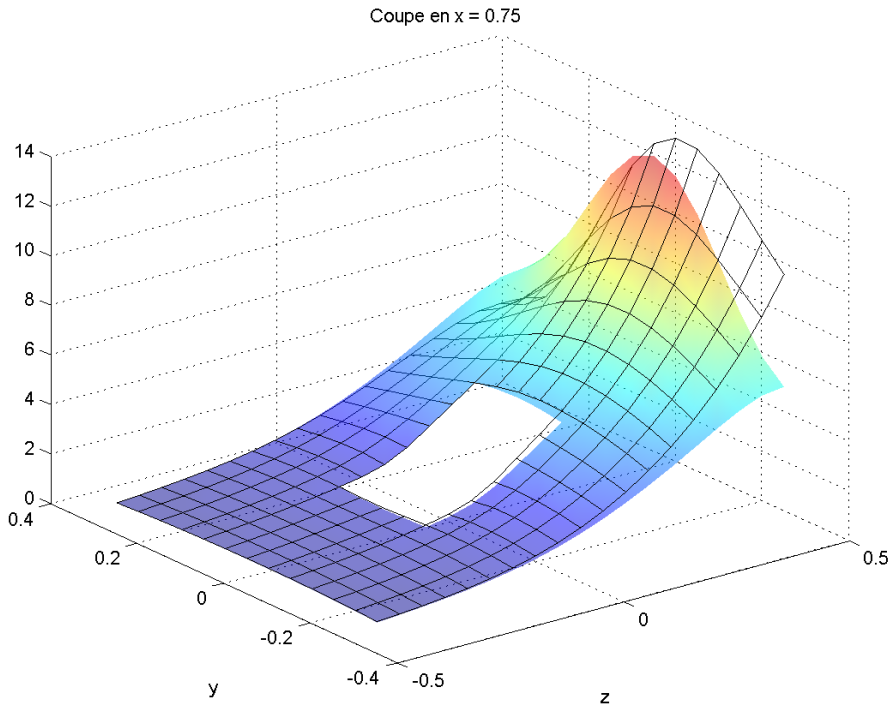


FIG. 6.10 – Comparaison entre les mesures aux positions nominales des capteurs C1, C2 et C3, et à des positions déplacées d'une distance de δx_k



(a) $\sigma = 0,001$



(b) $\sigma = 0,01$

FIG. 6.11 – Reconstruction avec capteurs aléatoirement déplacés : coupe en $x = 0,75$, $t = T$. Surface pleine : champ cible, surface quadrillée : champ reconstruit.

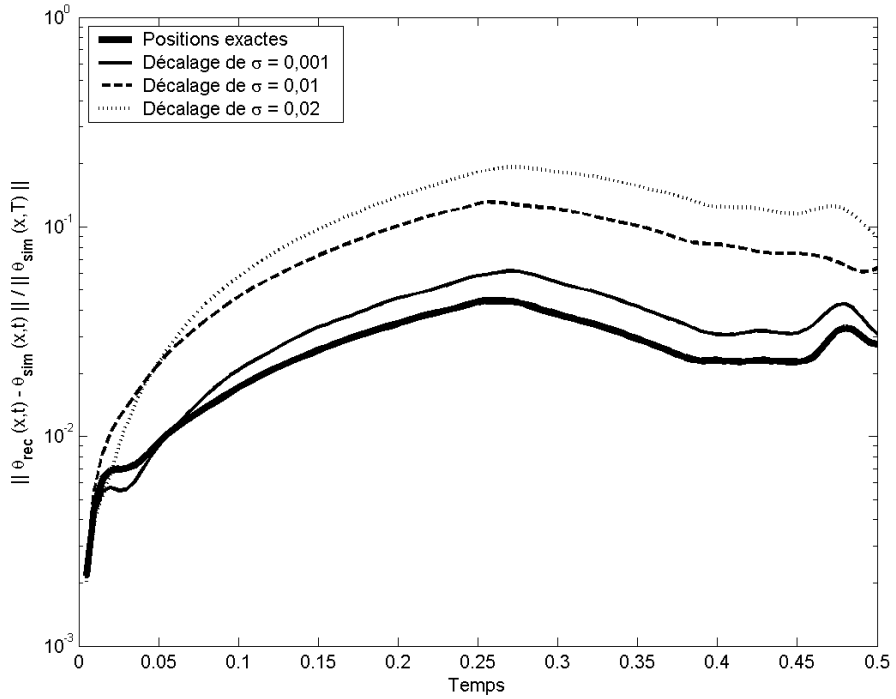


FIG. 6.12 – Reconstruction avec capteurs aléatoirement déplacés : erreur $\mathcal{E}_\Omega(t)$ dans le domaine

6.2.4 Conclusions

Nous avons vu, au travers de simulations numériques, l'influence sur la qualité de la reconstruction des incertitudes sur la modélisation. Il est indéniable que plus le modèle est proche de la réalité, plus la reconstruction sera fiable. Mais les nombreuses difficultés liées à la mesure des caractéristiques du matériau ou de la géométrie d'une structure ne permettent pas de considérer un processus de reconstruction sans prendre en compte ces incertitudes.

Nous avons vu que la technique de régularisation permet de traiter de manière intrinsèque le bruit de mesure. De ce point de vue, ce dernier, bien qu'il limite la qualité de reconstruction en éloignant de la solution exacte, ne constitue pas pour autant une limite d'utilisation de l'algorithme. L'utilisateur final n'a pas à se préoccuper du bruit qui est pris en compte dans la formulation même du problème.

Les incertitudes liées à la modélisation représentent une limitation plus importante des méthodes de reconstruction. Nous avons étudié au travers de simulations numériques l'influence de quatre paramètres : la diffusivité κ, les coefficients d'échange aux frontières de flux inconnu ou non et les positions des capteurs.

La valeur du coefficient de diffusivité a une influence relativement peu importante sur le résultat. Lorsqu'il reste dans les marges d'incertitude avec lesquelles il est habituellement connu, l'erreur induite sur le résultat reste inférieure en pourcentage à cette incertitude. Dans nos simulations, 25% d'erreur sur κ induisent une erreur de $12,7\%$ sur le champ moyen et de $7,9\%$ sur le champ final.

Concernant les paramètres des conditions aux limites, la reconstruction est plus ou moins sensible, selon qu'il s'agisse des paramètres des conditions aux limites dont le second membre est connu ou non. Dans le dernier cas, c'est-à-dire sur les parties de la surface sur lesquelles porte la reconstruction, une erreur même importante sur le coefficient d'échange n'influe que très peu sur le résultat final. Le comportement est différent lorsqu'il s'agit des coefficients d'échange attribués aux parties de la surface où les sources de chaleur sont connues. Ceci est d'autant plus gênant que les coefficients d'échange sont des caractéristiques qu'on peut très difficilement évaluer ou mesurer en pratique.

Il apparaît donc au travers de cette étude qu'il serait plus avantageux pour la robustesse de la reconstruction de considérer comme inconnues les sources sur l'ensemble de la surface d'une structure, plutôt que de se concentrer sur une partie uniquement. Bien sûr, ceci est en contradiction avec l'effort calculatoire supplémentaire qu'il faut fournir pour cela, et la perte de précision consécutive : un compromis est à faire.

Le dernier paramètre étudié dans ce chapitre est le positionnement des capteurs, auquel la reconstruction semble être très sensible. Nous avons vu que pour des dimensions de l'ordre du mètre une erreur de l'ordre du centimètre peut induire des erreurs de l'ordre de la dizaine de pourcentage.

Pour compléter cette étude qui reste très limitée, il serait nécessaire de procéder à un calcul de sensibilités en utilisant les outils théoriques du calcul différentiel (Griesse, 2004; Büskens & Griesse, 2006; Brandes & Griesse, 2007). Des résultats plus complets permettront à leur tour de définir des stratégies de minimisation de la sensibilité aux incertitudes, par un placement optimisé des capteurs par exemple. Uciński (1999) propose les bases théoriques d'une telle stratégie.

6.3 Comparaison avec les approches de type Kalman

6.3.1 Le filtre de Kalman

Considérons un système linéaire mis sous la forme d'équation d'état :

$$\left\{ \begin{array}{rcl} \dot{\mathbf{x}}(t) & = & A\mathbf{x}(t) + B\mathbf{u}(t) + M\mathbf{w}(t) \\ \mathbf{y}(t) & = & C\mathbf{x}(t) + \mathbf{v}(t) \end{array} \right. \tag{6.4}$$

où $\mathbf{x}(t)$ est le vecteur représentant l'état du système au temps t. La première équation décrit l'évolution du système : la matrice A est la matrice qui représente la dynamique du système et $\mathbf{u}$ est l'entrée du système à l'instant t. $\mathbf{w}(t)$ est l'erreur de modélisation, qui représente l'écart (toujours présent en pratique) entre l'état réel du système et l'état $\mathbf{x}(t)$ donné par le modèle. La seconde équation donne l'observation $\mathbf{y}(t)$ du système : C modélise le processus par lequel une partie uniquement de l'état est observée. Elle peut par exemple modéliser une série de capteurs ponctuels mesurant la valeur d'un champ en quelques point donnés... Là aussi, les erreurs de modélisation de ce processus ainsi que le bruit de mesure doivent être représentées : ces erreurs sont prises en compte dans le vecteur bruit $\mathbf{v}(t)$.

Lorsque ce modèle est discrétisé dans le temps avec un pas de temps δt, et si on note $t^n = n\delta t$, on obtient la forme discrète de cette équation d'état :

$$\left\{ \begin{array}{rcl} \mathbf{x}^{n+1} & = & A\mathbf{x}^n + B\mathbf{u}^n + M\mathbf{w}^n \\ \mathbf{y}^n & = & C\mathbf{x}^n + \mathbf{v}^n \end{array} \right. \tag{6.5}$$

$\mathbf{x}^n$ représente l'état du système à l'instant $t = t^n$. $\mathbf{w}^n$ et $\mathbf{v}^n$ sont supposés être des bruits blancs (décorrélés dans le temps) de matrice de covariance Q^n et R^n :

$$\begin{array}{ll} E(\mathbf{w}^n) = 0 & E(\mathbf{w}^n \mathbf{w}^{lT}) = Q^n \delta_{nl} \\ E(\mathbf{v}^n) = 0 & E(\mathbf{v}^n \mathbf{v}^{lT}) = R^n \delta_{nl} \end{array} \tag{6.6}$$

Dans le filtrage de Kalman on distingue deux étapes principales : l'étape d'analyse et l'étape de prédiction.

1. **L'étape d'analyse**

   On suppose qu'on connaît, à l'instant $t = t^n$, une prédiction $\mathbf{x}_f^{n+1}$ de l'état ainsi que sa matrice de covariance P_f^n. On connaît aussi les observations $\mathbf{y}^n$ et leur matrice de covariance R^n.

   Avec ces données, l'étape de prédiction du filtre consiste à trouver la meilleure estimation possible $\mathbf{x}_a^{n+1}$ (analyse) de l'état à l'instant $t = t^n$. Elle s'écrit

   $$\mathbf{x}_a^n = \mathbf{x}_f^n + K^n(\mathbf{y}^n - C\mathbf{x}_f^n) \tag{6.7}$$

   Pour que l'analyse soit optimale la matrice de gain K^n est choisie telle que la matrice de covariance de l'erreur d'analyse soit minimale. On montre dans ce cas que K^n s'écrit :

   $$K^n = P_f^n C^T (C P_f^n C^T + R^n)^{-1} \tag{6.8}$$

   et que la matrice de covariance de l'erreur d'analyse est donnée par

   $$P_a^n = (I - K^n C) P_f^n \tag{6.9}$$

2. **L'étape de prédiction**

   Au temps $t = t^n$, l'étape d'analyse permet d'obtenir un estimé optimal $\mathbf{x}_a^n$ de l'état à l'aide des observations $\mathbf{y}^n$ et sur la base d'une ébauche $\mathbf{x}_f^n$. L'étape de prédiction se sert de la dynamique du système pour produire une estimation de l'état à l'instant $t = t^{n+1}$. Cette estimation servira à son tour d'ébauche pour l'étape d'analyse suivante, au temps $t = t^{n+1}$: elle sera donc notée $\mathbf{x}_f^{n+1}$.

   En reprenant l'équation d'état (6.5), on voit que

$$\mathbf{x}_f^{n+1} = A\mathbf{x}_a^n + B\mathbf{u}^n \tag{6.10}$$

   L'erreur associée à cette prédiction s'écrit

$$\begin{aligned} \mathbf{e}_f^{n+1} &= \mathbf{x}_f^{n+1} - \mathbf{x}^{n+1} \\ &= A(\mathbf{x}_a^n - \mathbf{x}^n) - (\mathbf{x}^{n+1} - A\mathbf{x}^n - B\mathbf{u}^n) \\ &= A\mathbf{e}_a^n - M\mathbf{w}^n \end{aligned} \tag{6.11}$$

   d'où on déduit la matrice de covariance liée à la prédiction

$$\begin{aligned} P_f^{n+1} &= E\big(\mathbf{e}_f^{n+1}(\mathbf{e}_f^{n+1})^T\big) \\ &= AP_a^nA^T + MQ^nM \end{aligned} \tag{6.12}$$

   En reportant (6.9) et (6.8) dans (6.12), on trouve une équation algébrique de Riccati :

$$P_f^{n+1} = AP_f^n - AP_f^nC(CP_f^nC^T + R^n)^{-1}CP_f^nA^T + MQM \tag{6.13}$$

Les équations (6.7) et (6.10) d'une part et (6.8) et (6.12) d'autre part constituent le filtre de Kalman, qui peut être vu comme un système dont les entrées sont $\mathbf{y}^n$ et $\mathbf{u}^n$ et dont la sortie $\mathbf{x}_a^n$ est une estimation de l'état réel du système étudié. Sous forme d'équation d'état, le filtre de Kalman s'écrit :

$$\left\{ \begin{array}{l} \mathbf{x}_f^{n+1} = A(\mathbb{I} - K^nC)\mathbf{x}_f^n + [AK^n \quad B] \left[\begin{array}{c} \mathbf{y}^n \\ \mathbf{u}^n \end{array} \right] \\ \mathbf{x}_a^k = (\mathbb{I} - K^nC)\mathbf{x}_f^n + K^n\mathbf{y}^n \end{array} \right. \tag{6.14}$$

6.3.2 Mise sous forme d'équation d'état du problème de la chaleur

Nous avons vu dans la partie 2.1 que la modélisation de conduction de la chaleur par la méthode des éléments finis et avec un Θ-schéma pour l'intégration numérique conduit à résoudre, à chaque pas de temps t^n, $0 \leq n \leq N$ le système matriciel

$$\big(\mathbf{M} + \Theta\delta t\mathbf{K}\big)\{\theta\}^{n+1} = \{\eta\}^n + \big(\mathbf{M} + (1-\Theta)\delta t\mathbf{K}\big)\{\theta\}^n \tag{6.15}$$

où $\mathbf{M}$ est une matrice de masse, $\mathbf{K}$ une matrice de rigidité, $\{\theta\}^n$ est le vecteur des composantes nodales de la température à l'instant t^n et $\{\eta\}^n$ un terme source formé des composantes nodales du chargement (cf. (2.18) page 33).

On s'intéresse à la valeur du champ thermique aux points x_k où se trouvent des capteurs. Le vecteur des observations, qu'on notera $\{\theta\}^{d,n}$ à l'instant t^n, est donné par

$$\{\theta\}^{d,n} = C\{\theta\}^n,$$

où C représente une matrice de sélection des nœuds correspondant aux points x_k. Le système peut être mis sous forme d'équation d'état :

$$\begin{cases} \{\theta\}^{n+1} = A\{\theta\}^n + B\{\eta\}^n \\ \{\theta\}^{d,n} = C\{\theta\}^n \end{cases} \tag{6.16}$$

avec

$$A = \big(\mathbf{M} + \Theta\delta t\mathbf{K}\big)^{-1}\big(\mathbf{M} + (1-\Theta)\delta t\mathbf{K}\big),$$

$$B = \big(\mathbf{M} + \Theta\delta t\mathbf{K}\big)^{-1}\mathbf{I}.$$

La problématique de l'assimilation de données nous a poussé jusqu'ici à essayer de déterminer des sources ou conditions aux limites inconnues de l'équation de la chaleur, et éventuellement la condition initiale. Ces sources de chaleur servent à construire le terme d'entrée $\{\eta\}^n$ dans (6.16). Or, nous avons vu que dans sa version classique, le filtre de Kalman utilise l'entrée du système pour obtenir l'estimation de l'état. Dans notre cas, ceci n'est pas possible, vu que cette entrée est inconnue.

Le filtrage de Kalman est alors abordé en considérant que les sources de chaleur sont en réalité des perturbations du système, en incluant le terme $B\{\eta\}^n$ dans le terme d'erreur de modélisation $\mathbf{w}^n$ qui s'ajoute à la première équation du système d'état. Le système à identifier devient

$$\begin{cases} \{\theta\}^{n+1} = A\{\theta\}^n + \mathbf{w}^n \\ \{\theta\}^{d,n} = C\{\theta\}^n + \mathbf{v}^n \end{cases} \tag{6.17}$$

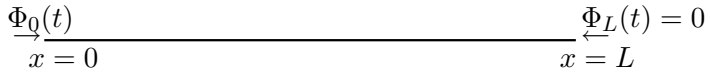
Le filtre de Kalman correspondant s'écrit

$$\begin{cases} \{\theta\}_f^{n+1} = A(\mathbf{I} - K^nC)\{\theta\}_f^n + AK^n\{\theta\}^n \\ \{\theta\}_a^k = (\mathbf{I} - K^nC)\{\theta\}_f^n + K^n\{\theta\}^{d,n} \end{cases} \tag{6.18}$$

Les objectifs de reconstruction sont ici radicalement changés : on ne cherche plus à estimer les sources inconnues. A chaque pas de temps, on cherche à estimer l'état au pas de temps précédent en utilisant les mesures fournies entre ces deux pas de temps. Tout se passe comme si, à chaque pas de temps t^{n+1}, on appliquait l'algorithme de reconstruction de la condition initiale pour reconstituer l'état au pas de temps t^n, avec une fenêtre d'assimilation de taille δt.

6.3.3 Exemple d'application

Dans ce qui suit nous présentons une application du filtre de Kalman sur l'exemple unidimensionnel de reconstruction d'un flux présenté en partie 3 (cf. schéma ci-dessous). Trois capteurs sont équirépartis dans le domaine et fournissent des données transitoires. La structure est soumise à un flux $\Phi_0(t)$ en $x = 0$. Cette fois, le flux en $x = L$ est nul.



La figure 6.13 montre l'évolution dans le temps du flux imposé en $x = 0$, ainsi que l'évolution de la température aux points de mesure (l'observation du système) notée θ_d.

Les données θ_d servent d'entrées pour le filtre de Kalman. Pour la simulation, le flux imposé est assimilé à un bruit $\mathbf{w}$, et il est donc utilisé pour calculer la matrice des covariances Q (qui ici se réduit à un scalaire vu que le système n'a qu'une seule entrée, le flux). En réalité, le flux imposé n'est pas connu : il faudra donc estimer la matrice Q de manière empirique, mais ceci est une difficulté générale dans les approches de ce type. Un bruit blanc $\mathbf{v}$ est aussi ajouté numériquement sur les données.

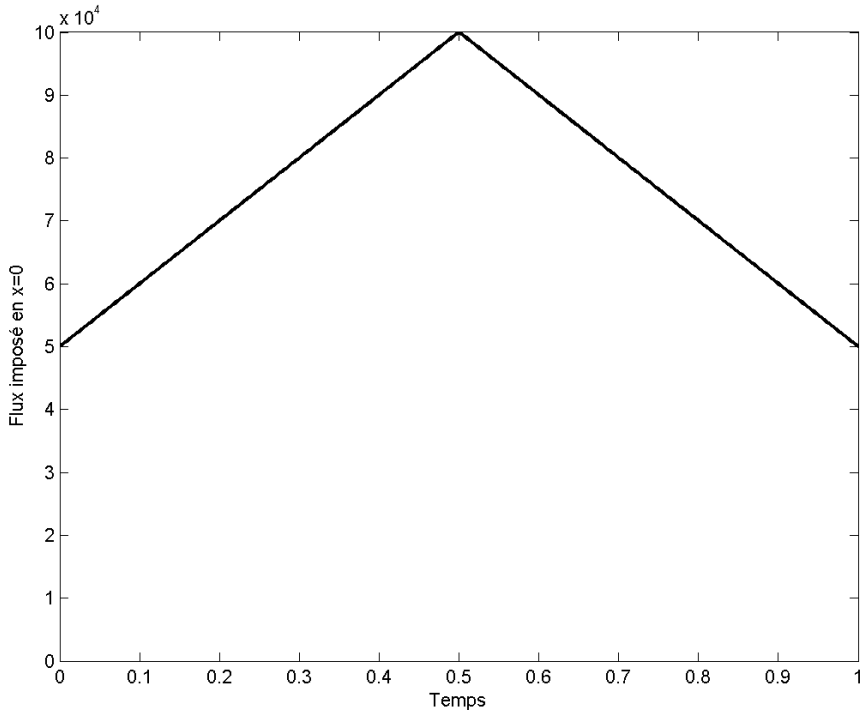
La figure 6.14 permet de comparer les mesures bruitées au résultat du filtrage de Kalman au niveau des capteurs. On remarque la suppression du bruit de mesure, et on comprend ainsi la dénomination de filtre. Sur la même figure (à droite) on peut comparer l'état exact du système à celui qui est estimé par le filtre, pour le temps initial et le temps final.

Ces figures mettent en avant les limites de l'application de filtre de Kalman à la reconstruction de la température. La température finale est bien reconstruite sur presque tout le domaine, sauf près de l'extrémité où le flux n'est pas nul.

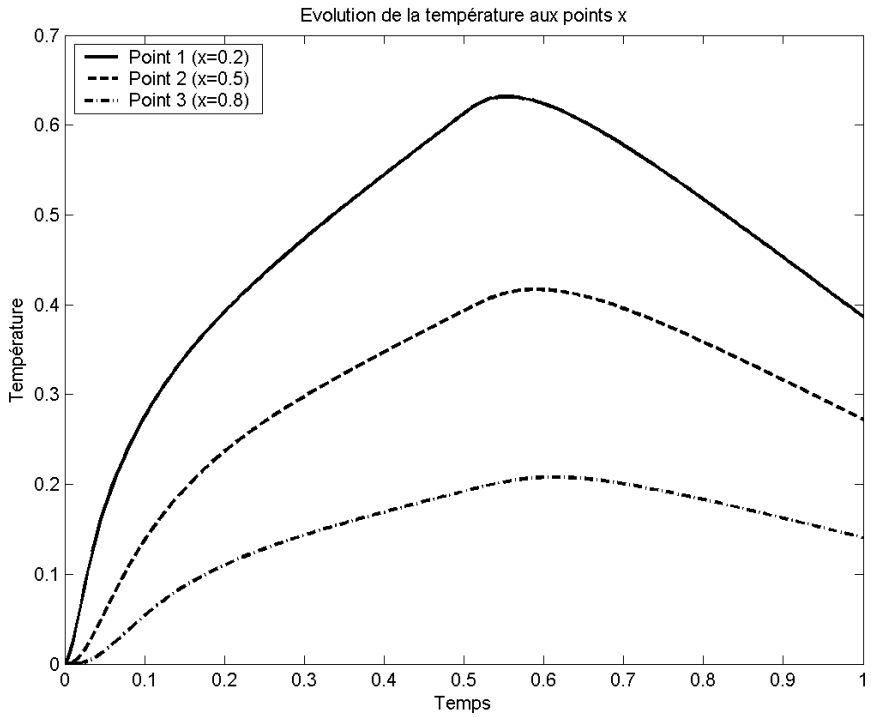
Ce comportement s'explique par le caractère dissipatif de l'équation de la chaleur. Le filtre implanté ne considère aucune source de chaleur, donc l'état tend vers zéro à chaque fois que l'opérateur de la dynamique A est appliqué, c'est-à-dire à chaque étape de prédiction. L'étape d'analyse permet de corriger le nouvel état pour le rendre conforme aux mesures là où des capteurs sont disponibles. Dans l'ensemble, l'état aura tendance à être bien reconstruit dans les zones "entourées" de capteurs. Près des bords cependant, l'état reconstruit aura tendance à être inférieur à l'état vrai parce que les apports d'énergie ne sont pas pris en compte.

L'approche par filtrage de Kalman est donc nettement moins satisfaisante que celles consistant à reconstruire les sources de chaleur. Une piste serait ouverte avec des formulations différentes du filtre qui permettraient de reconstruire les sources, par l'utilisation d'un état augmenté par exemple. A notre connaissance, les seuls travaux visant à déterminer des sources avec une approche Kalman (Tuan *et al.* , 1996; Ji *et al.* , 1997) concernent des méthodes hybrides combinant une stratégie de type observateurs et une minimisation d'un critère de coût.

Nous concluons cette discussion en rappelant que, pour des raisons de coût de calcul, le filtre de Kalman ne pourrait pas être appliqué tel quel à un problème d'assimilation sur des géométries tridimensionnelles sans réduction de modèle préalable. Des filtres d'ordre réduit de type SEEK ou SEIK seraient à considérer, mais le problème de la non prise en compte des conditions aus limites persisterait bien sûr.

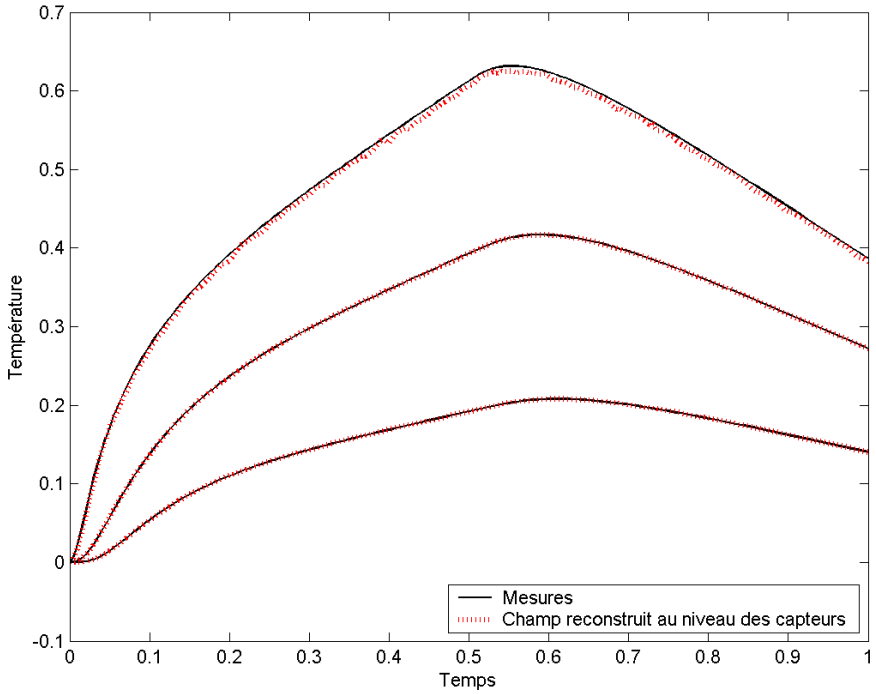


(a) Flux $\Phi_0(t)$ imposé en $x = 0$

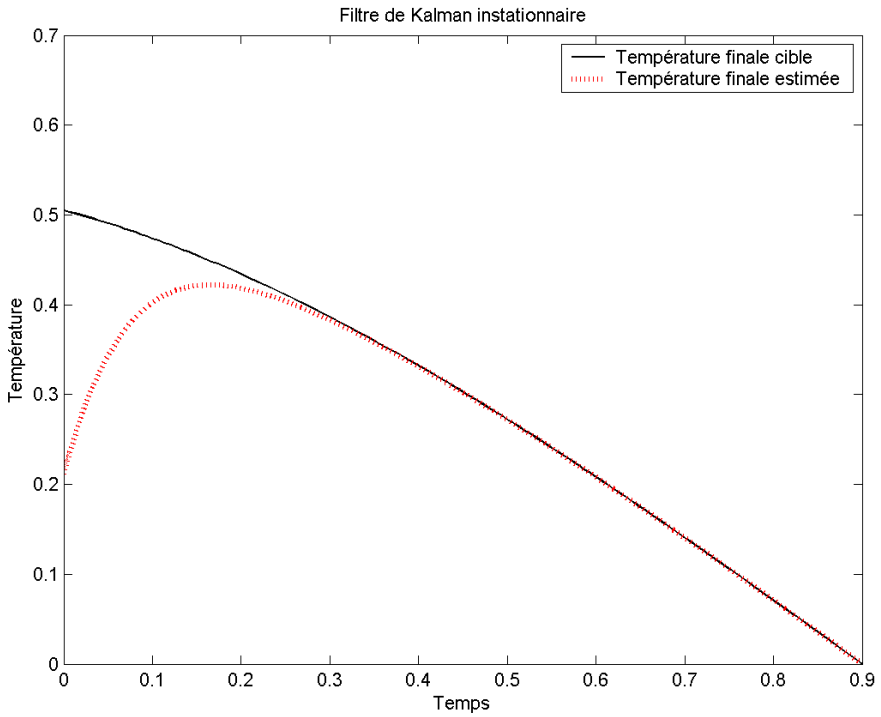


(b) θ_d : évolution de la température aux points de mesure

FIG. 6.13 – Calcul de synthèse



(a) Température au niveau des capteurs



(b) Températures initiale et finale

FIG. 6.14 – Reconstruction par le filtre de Kalman

6.4 Comparaison avec une approche de type interpolation

Pour une série de données numériques (x_i, y_i), l'interpolation consiste à trouver une fonction $f(x)$ qui minimise l'écart en un sens donné entre les données y_i et les valeurs $f(x_i)$ de la fonction. Dans le cas d'un champ de température, lorsque les données sont les mesures des capteurs $\theta_k^d(t)$, ceci se traduit par la recherche d'une fonction θ qui minimise l'écart entre les valeurs $\theta(x_k, t)$ et $\theta_k^d(t)$. Si l'écart est mesuré au sens des moindres carrés, cela revient à minimiser la fonctionnelle

$$E(\theta) = \frac{1}{2} \sum_{k=1}^{m} \int_0^T \left(\theta(x_k, t) - \theta_k^d\right)^2 dt \tag{6.19}$$

Le problème de l'interpolation consiste à chercher une fonction θ dans un espace V à définir qui minimise la fonctionnelle E.

Ceci diffère radicalement des problèmes traités jusqu'ici, où la variable de la fonctionnelle était une source de chaleur ou une condition initiale. En formulant le problème de cette manière, le modèle de diffusion de la chaleur n'est jamais pris en compte : les seules contraintes qui peuvent être prises en compte sont des hypothèses sur l'inconnue θ. Les résultats ci-dessous montrent que l'absence de modèle de diffusion dans les contraintes donne des solutions beaucoup moins satisfaisantes que dans les approches précédentes.

On choisit V comme l'espace de dimension finie généré par une famille de fonctions construites à partir d'une base de q fonctions propres de l'opérateur Laplacien dans l'espace, notées $\{y_i(x)\}_{i=1}^q$, et d'une base d'éléments finis en temps. Le problème de l'interpolation

$$E(\theta) = \min_{\tilde{\theta} \in V} E(\tilde{\theta})$$

admet alors une solution unique. Dans V, θ s'écrit

$$\theta(x, t) = \sum_{i=1}^{q} \theta_i(t) y_i(x) \tag{6.20}$$

La détermination pratique des coefficients θ^i peut se faire de manière séquentielle, en minimisant à chaque pas de temps la différence

$$\sum_{k=1}^{m} \left(\sum_{i=1}^{q} \theta_i(t^n) y_i(x) - \theta_k^d(t^n) \right)^2$$

où l'exposant n indique le pas de temps.

Les résultats ci-dessous reprennent le cas test de la partie 5.2.5 page 119. On applique au modèle le chargement donné par la figure 5.5. La reconstruction est effectuée à partir des mesures fournies par le lot 2 constitué de 8 capteurs (cf. figure 5.6 page 124), tandis que l'interpolation du champ est effectuée sur la base des mesures fournies par 20 capteurs (les capteurs 2, 4, 5 et 7 des plans A, C et D et les capteurs 1, 3, 6 et 8 des plans B et D - cf. annexes). Malgré le nombre beaucoup plus élevé de capteurs et un nombre de modes élevé ($q = 50$), l'erreur relative entre le champ cible et le champ interpolé est bien plus importante que celle obtenue avec l'algorithme de reconstruction (cf.

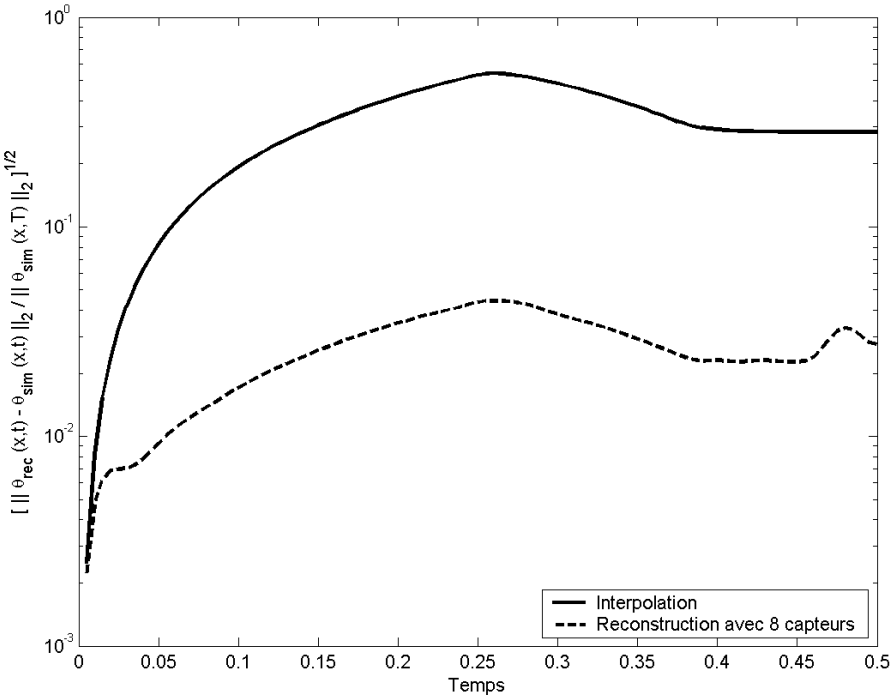


FIG. 6.15 – Erreur de reconstruction dans le domaine $\mathcal{E}_\Omega(t)$, avec la méthode d'interpolation et avec la méthode de reconstruction du flux

figure 6.15). On donne à titre indicatif les courbes comparant le champ interpolé avec les données sur les capteurs C1, C3, C6 et C8, sur la figure 6.16.

Le champ interpolé à l'instant final ($t = T$) est donné sur la figure 6.17. Les erreurs commises sont comparées aux erreurs commises avec l'algorithme de reconstruction du flux dans le tableau 6.6. Avec 20 capteurs, la méthode d'interpolation ne permet qu'une reconstitution fiable à $28,3\%$ du champ à l'instant final, et à $34,2\%$ sur l'ensemble de la fenêtre temporelle, contre $2,7\%$ et $2,8\%$ pour la méthode de reconstruction du flux qui n'utilise que 8 capteurs.

L'avantage comparatif des méthodes de reconstruction fondées sur un modèle par rapport à une simple méthode d'interpolation est évident au vu de ces résultats.

Cas étudié	$\mathcal{C}_{\Omega\times[0,T]}$	$\mathcal{D}_{\Omega\times[0,T]}$	$\mathcal{E}_{\Omega\times[0,T]}$	$\mathcal{C}_\Omega(T)$	$\mathcal{D}_\Omega(T)$	$\mathcal{E}_\Omega(T)$
Champ cible	$7,36\,^\circ C$			$5,21^\circ C$		
Reconstruction	$7,37\,^\circ C$	$0,21\,^\circ C$	$2,8\%$	$5,24\,^\circ C$	$0,14\,^\circ C$	$2,7\%$
Interpolation	$6,78\,^\circ C$	$2,51\,^\circ C$	$34,1\%$	$4,91\,^\circ C$	$1,47\,^\circ C$	$28,3\%$

TAB. 6.6 – Estimation du champ de température par interpolation et par reconstruction du flux

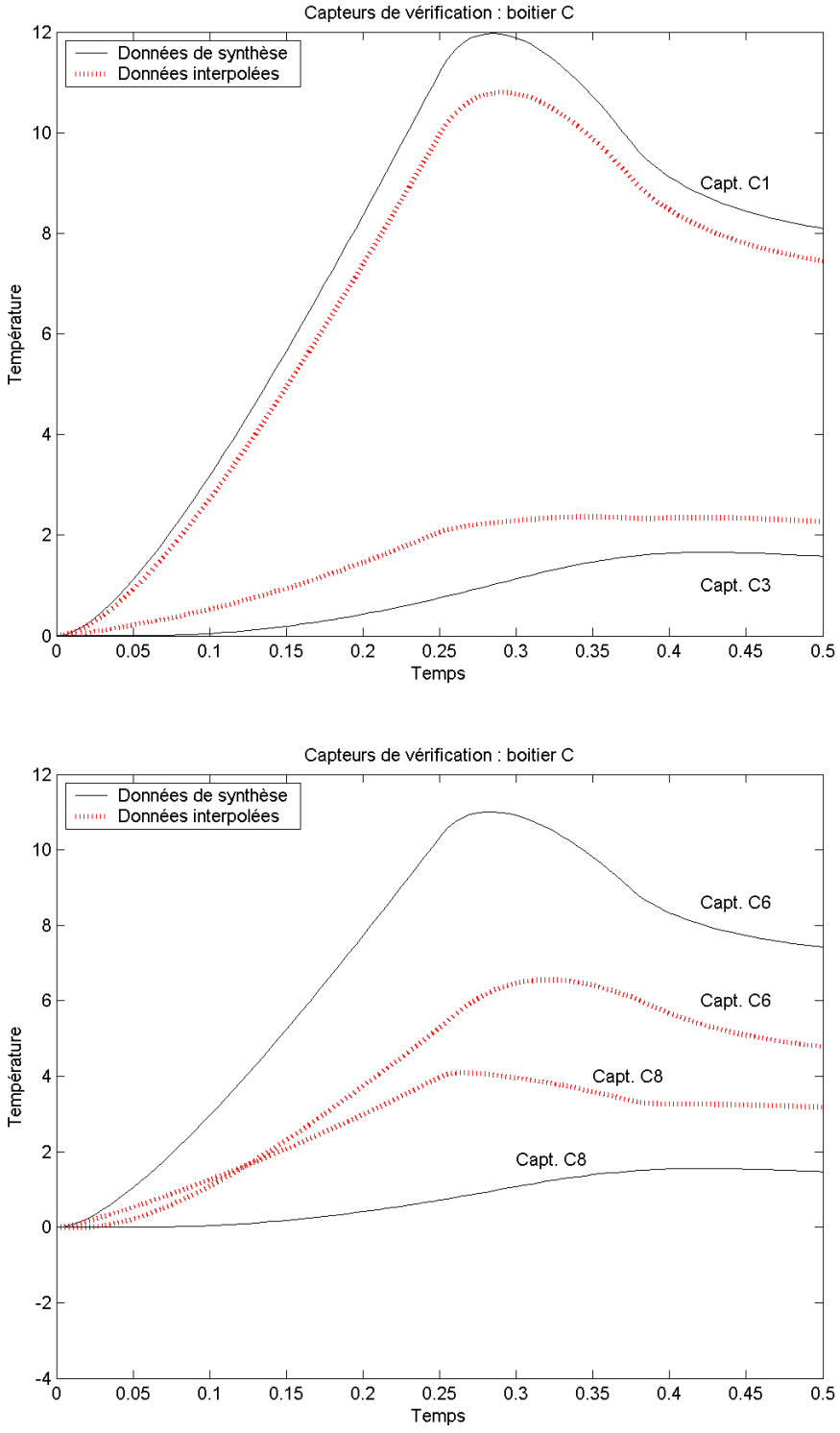
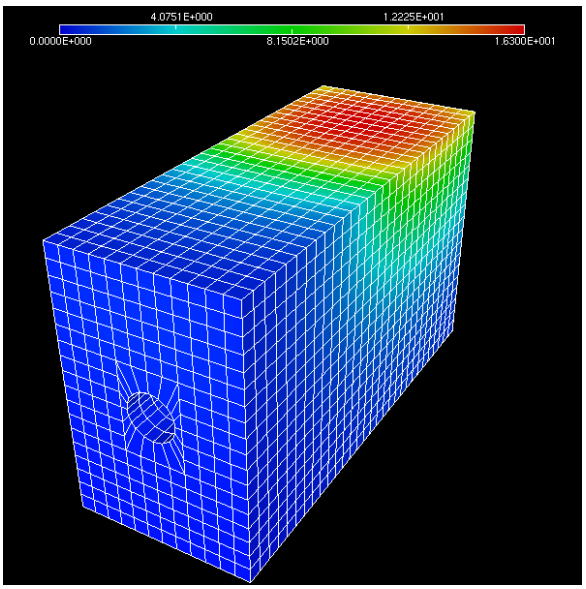
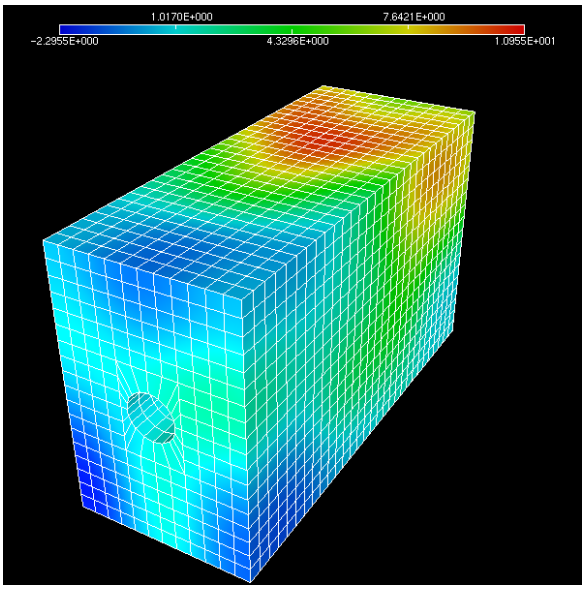


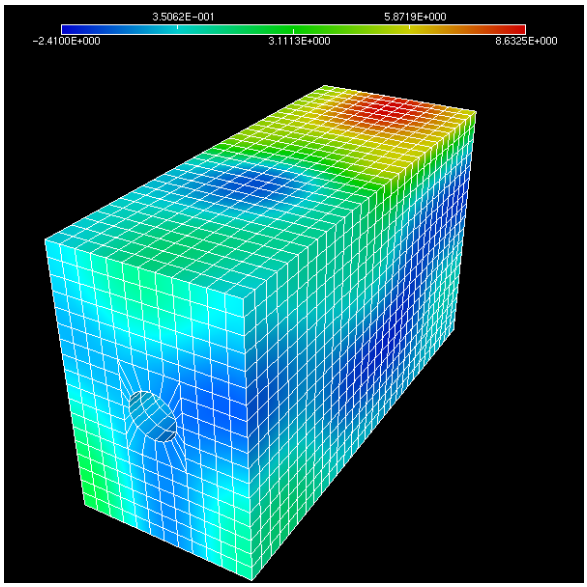
FIG. 6.16 – Champ de synthèse et champ interpolé au niveau des capteurs C1, C3, C6 et C8



(a) Champ de synthèse



(b) Champ interpolé



(c) Différence

FIG. 6.17 – Champ de synthèse et champ interpolé à $t = T$

6.5 Conclusions

Nous nous sommes intéressés dans ce chapitre aux performances des méthodes d'assimilation de données que nous avons développées dans les chapitres précédents.

Tout d'abord, nous avons cherché les sources d'erreur auxquelles le résultat est le plus sensible. Le bruit de mesure est la première qui vient à l'esprit. La régularisation dans la formulation même du problème permet de le prendre en compte de manière intrinsèque. Les erreurs de modélisation peuvent être à l'origine d'écarts importants par rapport à la solution exacte. Les simulations numériques ont montré que le résultat est très sensible à la valeur du coefficient d'échange sur les surfaces où le flux est connu ainsi qu'à la position des capteurs. Il l'est beaucoup moins à la valeur du coefficient de diffusivité ou à la modélisation des conditions aux limites sur les faces où la source est inconnue.

Nous avons vu ensuite comment se comportent nos algorithmes, fondés sur une approche de type contrôle optimal, par rapport à des méthodes fondées sur une approche de type observateurs. Nous avons pour cela effectué des simulations avec un filtre de Kalman appliqué au problème de la reconstruction de la température en une dimension. Ce qui avait été pressenti initialement est confirmé ici : dans le filtrage de Kalman, les sources d'excitation du système (ici, les flux en surface par exemple) sont soit mesurées, soit considérées comme du bruit. Dans notre application, les sources sont inconnues. Or, les effets transitoires thermiques sont relativement lents et les gradients de température dus à une source surfacique rapidement variable dans le temps peuvent être importants comparés à la valeur moyenne du champ.

Par conséquent, alors que le filtrage de Kalman permet de reconstituer l'état du système dans une zone proche des capteurs, l'erreur commise près de la surface est très importante parce qu'aucune information sur les sources n'est disponible.

Enfin, nous comparons les résultats de la reconstruction par contrôle optimal à une simple méthode d'interpolation. Cette confrontation montre clairement que seule la prise en compte de la dynamique du système permet de reconstituer des champs transitoires variables en espace avec une précision satisfaisante.

Chapitre 7

Validation expérimentale des méthodes

Ce chapitre est le fruit d'un long travail réalisé avec la section nantaise de la division Métrologie et Instrumentation du Laboratoire Central des Ponts et Chaussées. L'objectif recherché a été de vérifier la faisabilité de la méthode d'assimilation de données dans un cas réel. Il s'agit d'utiliser des données de température fournies par une maquette réelle pour évaluer les capacités de reconstruction lorsque toutes les difficultés d'ordre pratique s'accumulent : erreur et bruit de mesure, incertitudes sur le matériau, incertitudes sur le placement des capteurs...

Malgré le fait que les essais aient été réalisés en laboratoire, le désir de reproduire une situation pouvant être rencontrée dans le domaine du génie civil a orienté le choix du matériau et les dimensions de la maquette. Pour tester pleinement les capacités de l'algorithme, les essais ont été effectués sur un modèle tridimensionnel instrumenté avec des capteurs ponctuels. La maquette est en réalité celle dont le modèle a été utilisé dans les chapitres précédents pour les simulations numériques.

La démarche générale de validation de la méthode est celle qui a été suivie pour les simulations numériques présentées dans les chapitres précédents. La maquette est chauffée par une source de chaleur en surface, et l'élévation de la température est enregistrée par les capteurs noyés dans le matériau. L'algorithme de reconstruction est utilisé ensuite pour reconstruire le champ de température en utilisant un lot parmi tous les capteurs disponibles. Les capteurs qui n'ont pas servi à la reconstruction servent alors de capteurs de vérification : la valeur du champ estimé aux emplacements des capteurs de vérification doit correspondre aux températures enregistrées par ces derniers lors de l'essai. Pour contrôler au mieux les conditions aux limites sur les faces non chauffées, le bloc est placé dans une ambiance de température et hygrométrie constantes.

Avant d'aborder ces essais proprement dits, nous utilisons la méthode *sinusïdale face avant* qui permet de mesurer expérimentalement le coefficient de diffusivité dans le matériau. Nous montrons ainsi que cette méthode est bien adaptée au cas de structures massives comme celle étudiée.

7.1 Dispositif expérimental

Les essais sont réalisés sur le bloc de béton dont le modèle a servi pour les simulations numériques des chapitres précédents. Le dispositif est placé dans une enceinte régulée en température, ce qui permet d'obtenir une température ambiante constante. Une des faces du bloc est chauffée grâce à des plaques chauffantes flexibles (éléments chauffants) et la température du bloc est prélevée au niveau de 40 capteurs plongés dans le matériau. La chaîne d'acquisition assure la numérisation et le stockage des données.

7.1.1 Matériel

7.1.1.1 Description de la maquette

Pour que l'essai soit représentatif d'une situation en génie civil, les dimensions et le matériau de la maquette doivent conduire à des temps caractéristiques de diffusion du même ordre de grandeur que ceux rencontrés en général dans le domaine. Le temps caractéristique de diffusion t_{car} est défini comme le rapport entre le carré d'une longueur caractéristique et la diffusivité du matériau :

$$t_{car} = \frac{L^2}{\kappa}.$$

Avec des longueurs caractéristiques de l'ordre du mètre, ce temps caractéristique est de l'ordre de grandeur de quelques heures en génie civil.

Une autre spécificité requise pour le matériau est de permettre l'installation et le moulage d'une grille de capteurs. Pour répondre à ces critères, le choix s'est naturellement porté vers une structure en béton, dans laquelle les capteurs ont été placés avant moulage. La géométrie choisie est un parallélépipède de dimensions $1,5 \times 0,9 \times 0,6m$, avec un trou débouchant de forme cylindrique de $0,15m$ de diamètre selon la longueur, au centre de la section (cf. annexes). Compte tenu de la masse volumique du béton, la maquette ainsi réalisée pèse à peu près 2 tonnes.

Pour sa construction, un moule en bois aggloméré a été fabriqué, et le trou débouchant a été matérialisé par un tube en PVC fixé au centre du moule. Le béton, dont le temps de prise était de 28 jours, a été préparé et coulé sur place.

Les caractéristiques thermiques du béton que l'on trouve dans la littérature varient dans une plage importante de valeurs, et, à notre connaissance, il n'existe pas de méthode fiable de prédiction des propriétés thermiques à partir de la composition chimique. Ainsi on retrouve, pour le coefficient de diffusivité

$$\kappa = \frac{k}{\rho c},$$

des valeurs qui peuvent varier du simple au double. La diffusivité peut par contre être évaluée expérimentalement par plusieurs méthodes différentes (Raynaud, 1997) dont le principe de base est de mesurer le temps de réaction à une source connue. La partie 7.2 décrit l'application de la méthode du *régime sinusoïdal face avant* à cet effet.

Nous donnons à titre indicatif, les valeurs moyennes des caractéristiques thermiques du béton habituellement trouvées dans la littérature dans le tableau 7.1.

Paramètre	Symbole	Valeur	Unités
Conductivité thermique	k	de 1 à 2	$W \cdot m^{-1} \cdot K^{-1}$
Chaleur massique	c	de 600 à 1000	$J \cdot K^{-1} \cdot kg^{-1}$
Masse volumique	ρ	de 2000 à 2500	$kg \cdot m^{-3}$

TAB. 7.1 – Valeurs moyennes des caractéristiques thermiques du béton

Les coefficients d'échange en surface sont calculés à partir d'abaques empiriques (voir par exemple Taine & Petit (1998)). Ils résultent de la somme d'un coefficient d'échange convectif et d'un coefficient d'échange radiatif qui prend en compte les échanges par rayonnement non modélisés (cf. chapitre 2, partie 2.1). Le calcul du coefficient d'échange convectif prend en compte le type d'écoulement du fluide environnant, la géométrie et l'orientation de la surface. Dans notre cas, le bloc est placé dans la chambre climatique dont la ventilation crée des conditions d'écoulement turbulent rapide. Les coefficients d'échange prennent par conséquent des valeurs importantes résumées dans le tableau 7.2 ci-dessous.

Paramètre	Symbole	Valeur	Unités
Coefficient d'échange de la face supérieure	α_Γ	15 ± 5	$W \cdot m^{-2} \cdot K^{-1}$
Coefficient d'échange de la paroi latérale	$\alpha_{\partial\Omega\setminus\Gamma}$	15 ± 5	$W \cdot m^{-2} \cdot K^{-1}$
Coefficient d'échange à l'intérieur du trou débouchant	α_{int}	5 ± 2	$W \cdot m^{-2} \cdot K^{-1}$

TAB. 7.2 – Coefficients d'échange pour le bloc de béton dans la chambre climatique

7.1.1.2 Dispositif de mesure et d'acquisition

Thermocouples 40 capteurs sont noyés dans le béton. Il s'agit de thermocouples de type T (cuivre-constantan) capables de mesurer des températures allant de $-160^\circ C$ à $400^\circ C$ avec une précision de $\pm 0,5^\circ C$.

Les thermocouples ont été placés à l'intérieur du bloc avant le coulage du béton selon la disposition fournie en annexe. Ils sont placés par ensembles de 8 sur 5 plans équidistants de $25\,cm$ selon l'axe x. Chaque thermocouple a été fixé avec de la colle thermoconductrice à l'intersection de trois fils nylon tendus chacun de manière parallèle à un côté du bloc. La position exacte a été contrôlée avant le coulage du béton. On estime connaître la position après coulage à $\pm 0,5cm$.

Huit thermocouples supplémentaires permettent, selon les essais, de mesurer la température ambiante ou en surface du bloc.

Chaîne d'acquisition La chaîne d'acquisition est constituée d'un système de modules de type ADAM reliés à un ordinateur. Les modules ADAM 4018+ utilisés ici assurent la connexion de huit thermocouples et l'envoi des mesures vers une carte d'acquisition via un port série RS-232, tout en prenant en charge le conditionnement des capteurs et la conversion analogique/numérique des données (cf. tableau 7.3). Un composant électronique donne la température de référence de chaque module pour

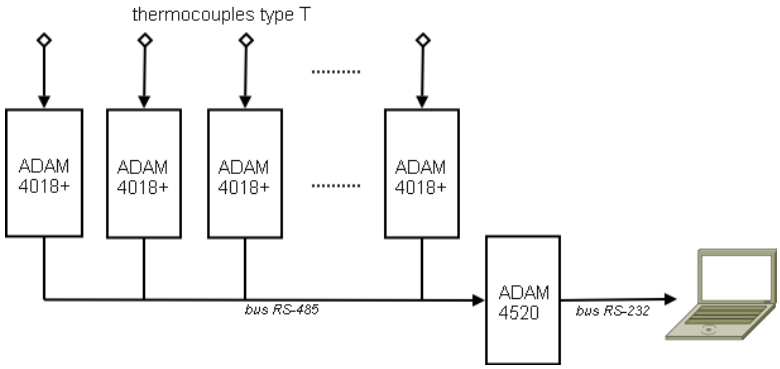


FIG. 7.1 – Schéma de montage des modules ADAM

une mesure par montage différentiel. Leurs caractéristiques techniques principales sont résumées dans le tableau ci-dessous.

Caractéristique	**Valeur**
Entrées	8 entrées différentielles
	pour thermocouples J, K, T, E, R, S ou B
Echantillonage	$10Hz$
Précision relative	supérieure à $\pm 0,1\%$
Précision absolue	$\pm 2,5^{\circ}C$
Dérive statique	$\pm 3\mu V/^{\circ}C$

TAB. 7.3 – Caractéristiques principales des boîtiers ADAM 4018+

Six modules sont utilisés, pour un total de 48 thermocouples (40 thermocouples plongés dans le bloc et 8 thermocouples extérieurs). Ils sont reliés entre eux en série via un bus RS-485. Un dernier module ADAM 4520 assure la conversion des données vers un bus RS-232 relié à une carte d'aquisition *National Instruments*© (cf. figure 7.1). Une interface graphique a été créée avec le logiciel Labview pour visualiser et enregistrer les mesures en temps réel.

7.1.1.3 Enceinte climatique

L'enceinte climatique est une pièce de $72m^3$ (dimensions $9 \times 3 \times 3.9m$) dans laquelle la température et l'hygrométrie sont programmables et régulées sur une grande plage de valeurs (cf. tableau 7.4). Les essais sur le bloc ont été réalisés à l'intérieur de cette enceinte afin de contrôler au mieux les conditions aux limites sur les différentes faces du bloc. Elle est utilisée à régime constant (température et hygrométrie régulée).

Au cours des essais nous avons vérifié que la température ambiante à proximité des faces latérales du bloc était bien celle de la consigne, et qu'elle restait constante au cours du temps.

Caractéristique	**Valeur**
Dimension	$9 \times 3 \times 3.9m$
Volume	$72m^3$
Température	comprise entre $-25^{\circ}C$ et $80^{\circ}C$
Homogénéité dans le volume	$\pm 3^{\circ}C$
Rampe de montée	$20^{\circ}C$/heure de -25 à $+55^{\circ}C$
Rampe de descente	$20^{\circ}C$/heure de $+55$ à $-25^{\circ}C$
Hygrométrie	réglable de 20 à 95 dans la plage $5 - 55^{\circ}C$
Puissance frigorifique	de $23kW$ à $-40^{\circ}C$ pour une température de condensation de $+45^{\circ}C$
Régulateur de température :	programmable PID
système de mesure associé :	24 voies

TAB. 7.4 – Caractéristiques principales de l'enceinte climatique

7.1.1.4 Eléments chauffants

Ils sont constitués de 6 réchauffeurs isolants caoutchouc en silicone qui se présentent sous forme de plaques flexibles.

- Dimensions : $127 \times 381\,mm$
- Résistance : $44,1 \pm 10\%\,ohms$
- Fils isolés téflon $0,21\,mm^2$

Ils sont montés côte à côte sur la face $z = 0,45$ du bloc comme le montre la figure 7.2. La puissance d'alimentation est contrôlée à l'aide d'un bloc de puissance pouvant fournir plusieurs kW. Elle est régulée de deux façons :

- Par un asservissement en *température*. Dans ce cas, une sonde Pt100 est reliée au boîtier de contrôle du bloc de puissance, qui agit grâce à un régulateur PID piloté en externe par un générateur de fonctions (cf. figure 7.3).
- Par un asservissement en *puissance*. Le régulateur PID est piloté par un générateur de fonctions externe (cf. figure 7.4). Pour programmer un cycle de plusieurs heures (voire jours), nous avons utilisé un générateur de fonctions (module *SigLab*©) dont la tension de sortie est programmée manuellement sous *Matlab*©.

7.1.2 Etalonnage de la chaîne de mesure

Les thermocouples nécessitent un étalonnage préalable. Pour la reconstruction thermique, la connaissance de la température absolue n'est pas nécessaire : on utilise des différences relatives de température. Cela suppose néanmoins que les élévations de température soient bien mesurées, et que tous les thermocouples entre eux aient la même référence, de sorte que si l'ensemble du bloc se trouve à l'équilibre à une température homogène donnée, tous les thermocouples affichent la même température.

L'étalonnage se fait grâce à une température de référence. Habituellement, la température de référence est obtenue grâce à un bain régulé en température, comme par exemple un mélange de glace

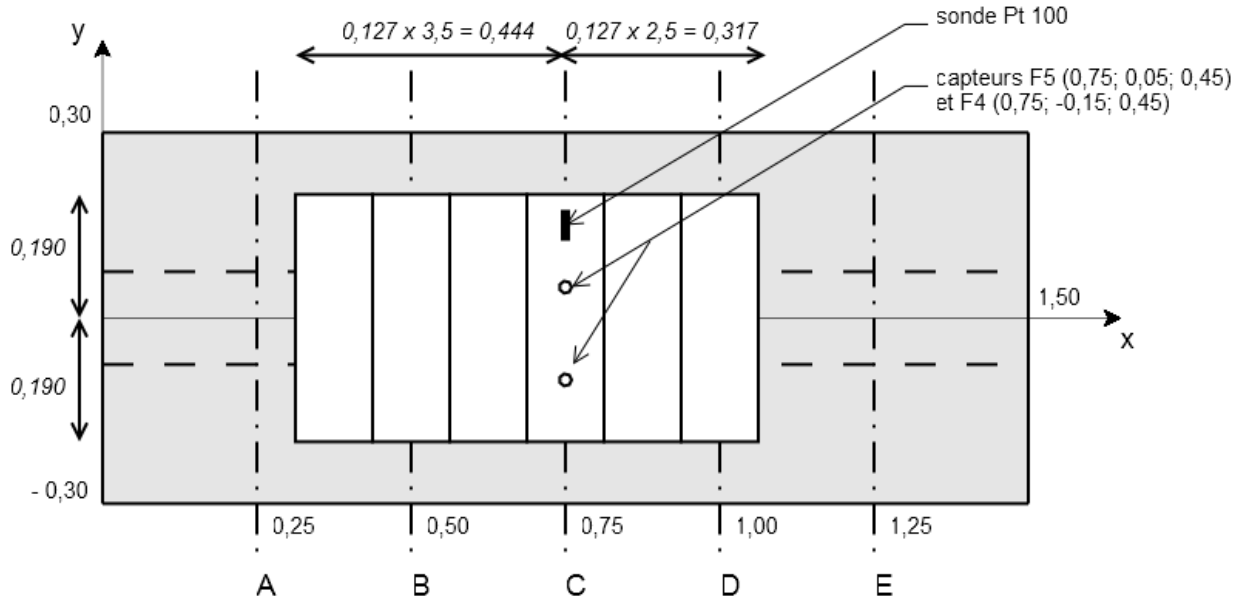


FIG. 7.2 – Agencement des plaques de chauffage sur la face $z = 0,45$ du boc

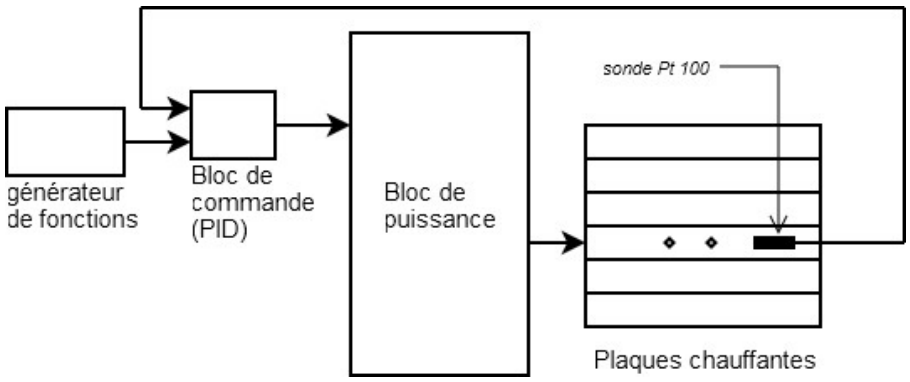


FIG. 7.3 – Schéma du montage des éléments de chauffage avec asservissement en température

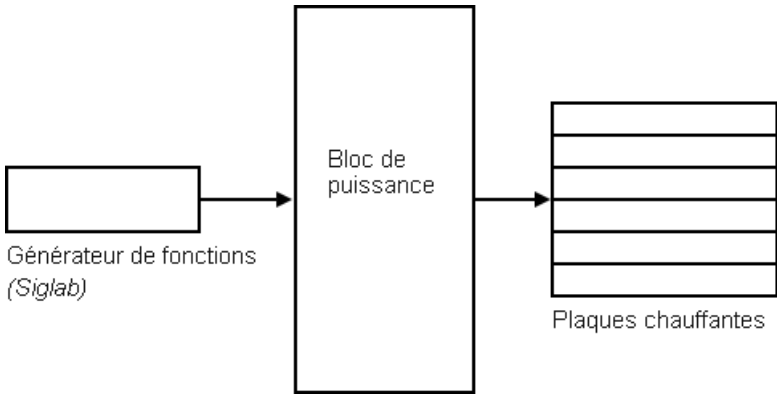


FIG. 7.4 – Schéma du montage des éléments de chauffage avec asservissement en puissance

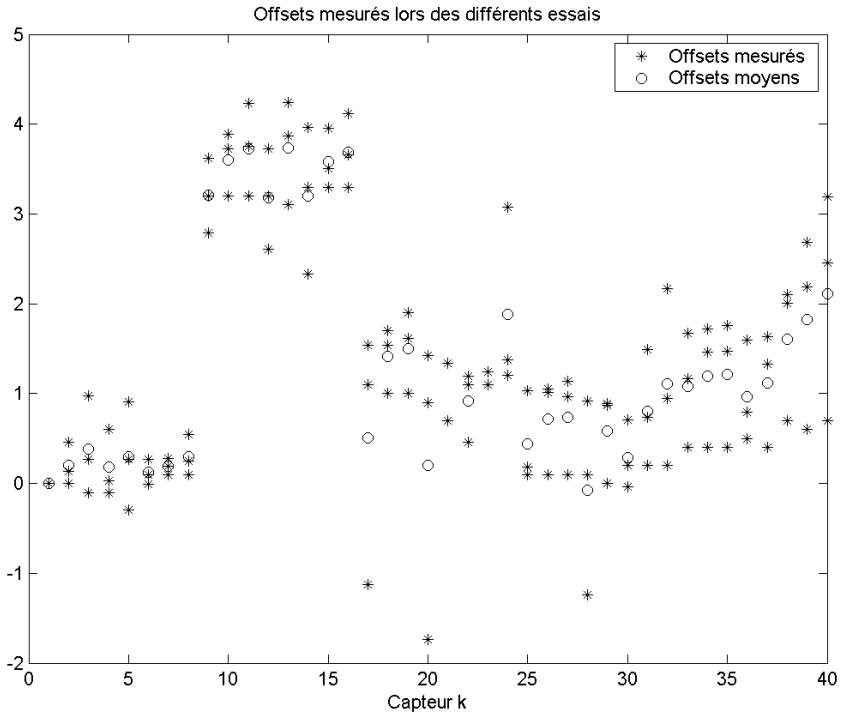


FIG. 7.5 – Offsets par capteur mesurés lors des différents essais, et offsets moyens

et eau distillée. Vue la configuration du dispositif expérimental, l'utilisation d'un tel bain n'est possible qu'uniquement avant la pose des thermocouples et avant le coulage du béton. L'autre possibilité qui s'offre ici est celle d'utiliser la chambre climatique elle-même pour mener l'ensemble du bloc et des thermocouples à une température homogène. On enregistre alors les éventuels écarts affichés par les thermocouples. Nous avons ici adopté cette méthode qui présente l'avantage de mesurer aussi d'éventuels écarts dus au montage de la chaîne de mesures dans la chambre climatique. Ces écarts sont utilisés ensuite comme offsets à retrancher des mesures lors des essais.

Vue la taille du bloc, il est nécessaire d'attendre au minimum 72 heures avant d'atteindre un état d'équilibre. Ceci a été vérifié expérimentalement et numériquement. Au bout de ce laps de temps, la moyenne des mesures de chaque thermocouple sur une fenêtre temporelle bien choisie donne la valeur de l'offset. La mesure des offsets a été effectuée à chaque début et fin d'essai, afin de repérer des éventuels écarts dus à chaque configuration différente. La figure 7.5 recense quelques unes de ces mesures.

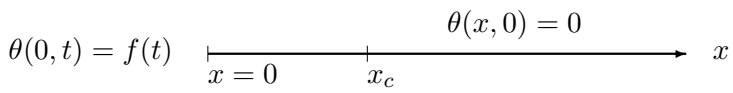
On s'aperçoit que les erreurs statiques (offsets) retrouvées sont en général regroupées par huit, ce qui fait penser que l'erreur statique la plus importante provient en réalité non pas du thermocouple mais du module d'acquisition ADAM. Les valeurs trouvées sont en cohérence avec les tolérances données par le constructeur : l'écart par thermocouple est de $\pm 0,5^{\circ}C$, alors que la tolérance sur la température de référence dans chaque boîtier est de $\pm 2,5^{\circ}C$. En mesurant l'offset au début de chaque essai et en corrigeant les mesures, on s'assure que celles-ci sont fournies avec une incertitude relative inférieure à $\pm 0,5^{\circ}C$.

7.2 Détermination expérimentale de la diffusivité thermique

Le but des essais décrits dans cette partie est de déterminer la diffusivité du matériau par la méthode du *régime sinusoïdal face avant* (Raynaud, 1997). Le principe de la méthode est le suivant : on considère un massif unidimensionnel semi-infini sur lequel une température est imposée sur la face découverte. La température varie de manière sinusoïdale. Un capteur est placé à une distance x_c de la surface : il mesure une variation de température sinusoïdale. Le déphasage entre les deux signaux permet de remonter à la diffusivité du matériau.

Le bloc de béton est placé en chambre climatique. Si une variation de température donnée est imposée sur une des faces avec un capteur à faible profondeur, le système se comporte en première approximation comme un massif semi-infini.

7.2.1 Théorie



Considérons le massif semi-infini représenté par le schéma ci-dessus. Le champ de température est régi par l'équation de la chaleur

$$\begin{cases} \rho c \dfrac{\partial \theta}{\partial t} - k\Delta\theta = 0 \\ \theta(0,t) = f(t) \\ \theta|_{x\to\infty} \text{borné} \end{cases} \tag{7.1}$$

que l'on peut mettre sous la forme

$$\begin{cases} \dfrac{\partial \theta}{\partial t} - \kappa\Delta\theta = 0 \\ \theta(0,t) = f(t) \\ \theta|_{x\to\infty} \text{borné} \end{cases} \tag{7.2}$$

en notant $\kappa = \frac{k}{\rho c}$ la diffusivité du matériau.

Si la température $f(t)$ imposée en $x = 0$ est de la forme

$$f(t) = f.\sin\omega t,$$

alors θ est donné par

$$\theta(x,t) = fe^{-\sqrt{\omega\backslash 2\kappa}x} \sin\left(\omega t - \sqrt{\omega\backslash 2\kappa}.x\right) \tag{7.3}$$

Le capteur placé en x_c mesure donc une température θ_c égale à

$$\theta_c(t) = fe^{-\sqrt{\omega\backslash 2\kappa}.x_c} \sin\left(\omega t - \sqrt{\omega\backslash 2\kappa}.x_c\right)$$

Les deux signaux enregistrés $f(t)$ et $\theta_c(t)$ sont donc déphasés de $\phi = -\sqrt{\omega\backslash 2\kappa}.x_c$ (Özisik, 1993). En mesurant ϕ, la diffusivité κ est alors donnée par :

$$\kappa = \frac{\omega}{2\left(\frac{\phi}{x_c}\right)^2}.$$

A partir de cette expression, nous pouvons évaluer les incertitudes liées à la méthode. Par différentiation de l'expression de κ, et en notant $\frac{\Delta X}{X}$ l'incertitude relative sur la valeur d'une grandeur X, nous obtenons

$$\frac{\Delta\kappa}{\kappa} = \frac{\Delta\omega}{\omega} + 2\left(\frac{\Delta\phi}{\phi} + \frac{\Delta x_c}{x_c}\right)$$

Par conséquent, si la position est connue avec une précision de 10%, alors l'incertitude sur κ sera de 20%. La dernière expression montre l'importance d'une bonne détermination du déphasage ϕ et de la connaissance précise de la position x_c.

Des simulations effectuées sur le modèle tridimensionnel représentant le bloc de béton ont montré que si on choisi un capteur suffisamment proche de la surface sur laquelle on impose une température sinusoïdale grâce à des conditions de Dirichlet, le bloc se comporte localement comme un massif semi-infini.

7.2.2 Protocole

Le capteur C4, de coordonnées $x = 0,75$, $y = 0,05$ et $z = 0,4$, ainsi que le capteur D4, de coordonnées $x = 1$, $y = -0,5$ et $z = 0,3$, sont sélectionnés (cf. annexe) : ils se trouvent dans la zone couverte par les éléments chauffants et sont suffisamment proches de la surface pour que le système puisse être considéré unidimensionnel. Un capteur est placé sous les éléments chauffants pour enregistrer la température de consigne. Le bloc est placé dans la chambre climatique avec une température ambiante de $15^{\circ}C$.

Les éléments chauffants sont alimentés avec un asservissement en température. Vu que le dispositif ne permet que de chauffer, la température imposée doit être supérieure à la température ambiante pour permettre le refroidissement lors du front de pente négative de la sinusoïde : on impose ainsi une température variant de $30^{\circ}C$ à $120^{\circ}C$. A l'équilibre stationnaire, le champ résultant est composé d'un champ statique (non homogène en espace) et d'un champ sinusoïdal dans le temps. Les mesures obtenues devront être recentrées en zéro pour déterminer le déphasage entre les courbes comme l'indique la figure 7.6. Les courbes brutes obtenues sont interpolées par des fonctions sinus afin de déterminer de manière optimale la période, l'amplitude et la phase.

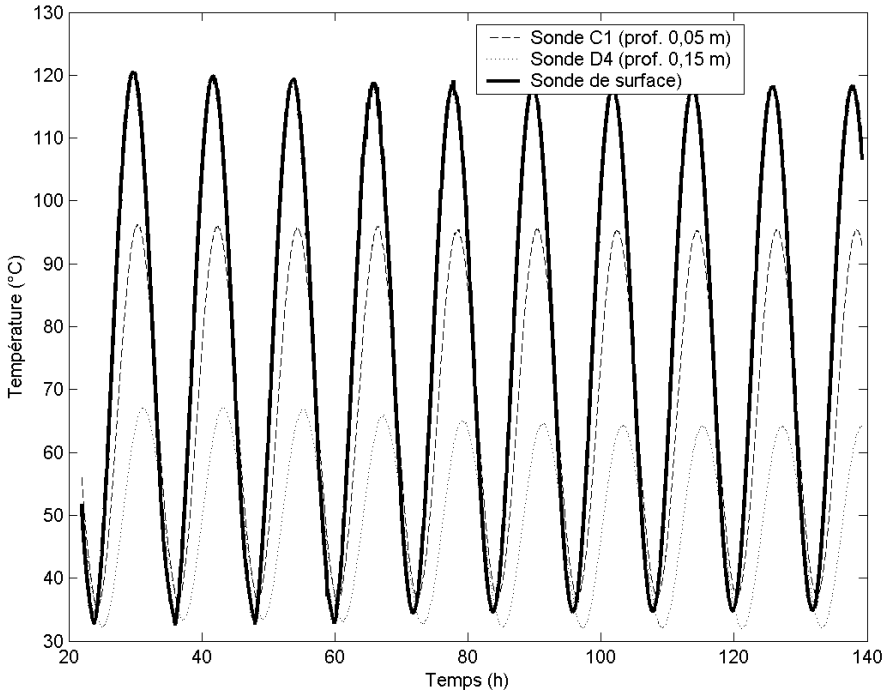
7.2.3 Résultats

Les résultats obtenus sont résumés dans le tableau 7.5. A partir de ceux-ci, nous choisissons comme valeur nominale pour le coefficient de diffusivité $\kappa = 2,6.10^{-6}\, m^2.s^{-1}$ avec une tolérance de $\pm 0,5.10^{-6}\, m^2.s^{-1}$. Cela donne une valeur pour le coefficient de conductivité de

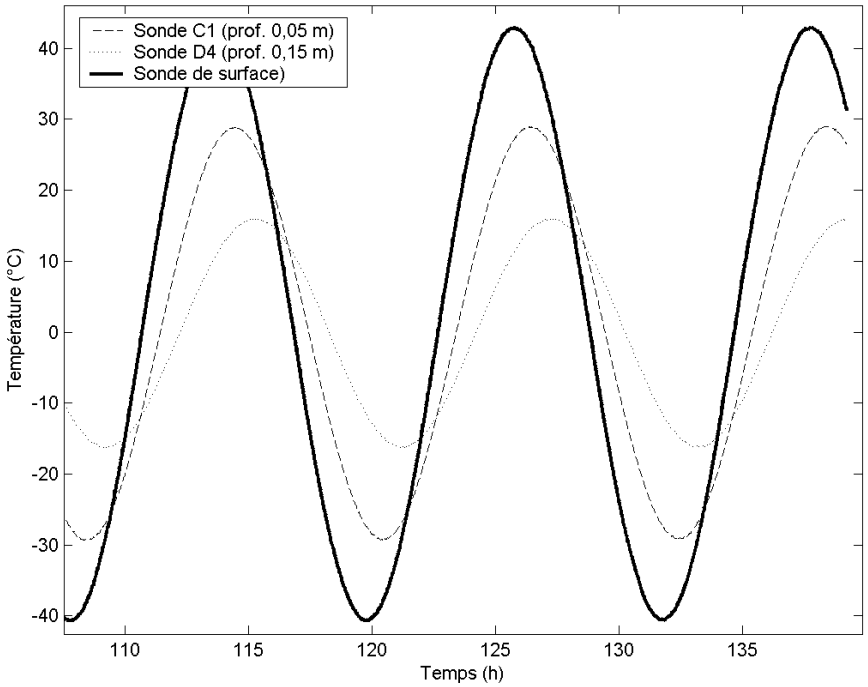
$$k = \kappa\rho c = 2,6.10^{-6} \times 2000 \times 600 = 3,1 \pm 0,6\, W \cdot m^{-1} \cdot K^{-1}.$$

Les valeurs de ρ est c sont prises égales à $2000\, kg \cdot m^{-3}$ et $600\, J \cdot K^{-1} \cdot kg^{-1}$ respectivement (cf. tableau 7.1). Ces valeurs ne sont données qu'à titre indicatif, vu que le paramètre déterminant dans le modèle de la diffusion est bien la diffusivité κ.

La valeur de la diffusivité déterminée est supérieure à celle donnée pour le béton dans les différents ouvrages de la littérature. Nous n'expliquons pas cet écart. Il pourrait être du à la formulation du béton



(a) Mesures brutes



(b) Mesures centrées autour de zéro(zoom)

FIG. 7.6 – Mesures obtenues sur les différents capteurs utilisés

	Calcul nominal	Profondeur x_c	Valeurs pour $x_c \pm 0,005m$	Valeurs pour $x_c \pm 0,01m$
Résultats sonde C4	2,85	0,05	2,31 - 3,45	1,83 - 4,11
Résultats sonde D4	2,66	0,15	2,51 - 2,87	2,34 - 3,06

TAB. 7.5 – Coefficient de diffusivité $\kappa\,(.10^{-6}\,m^2.s^{-1})$: récapitulatif des résultats obtenus par mesure du déphasage (première ligne)

utilisé, mais nous ne disposons pas de suffisamment d'éléments pour remonter aux caractéristiques thermiques à partir de celle-ci. L'hygrométrie imposée à 50% pourrait aussi jouer un rôle : la conductivité du béton varie en fonction de son humidité. Enfin, la cause la plus probable de cet écart semblerait être une erreur sur le positionnement des capteurs supérieure aux estimations.

En utilisant la valeur de la diffusivité ainsi déterminée, nous obtenons néanmoins des résultats expérimentaux encourageants qui font l'objet de la partie suivante.

7.3 Validation expérimentale de la méthode d'assimilation thermique

7.3.1 Protocole

Les éléments chauffants disposés comme indiqué sur la figure 7.2. La puissance de chauffe est contrôlée par le bloc de puissance avec une régulation en puissance (cf. figure 7.4). L'essai consiste à imposer un cycle de chauffe donné, et d'utiliser les mesures fournies par les thermocouples internes comme données pour l'algorithme de reconstruction.

7.3.1.1 Phase de stabilisation

Avant le début du cycle de chauffe, le bloc est placé dans la chambre climatique pendant un temps suffisant pour atteindre une température homogène dans son ensemble. Ceci est fait dans le souci d'avoir une température initiale nulle au début de la fenêtre de mesures utilisée pour la reconstruction, et pour vérifier le décalage statique (offset) éventuel des capteurs.

La température de la chambre est imposée à $15^{\circ}C$, avec une puissance sur les plaques nulle, et ce durant 72 heures. A la fin de ce laps de temps, l'indication de tous les capteurs est stabilisée.

7.3.1.2 Cycle de chauffe

On reprend ici le cycle imposé lors des simulations numériques du chapitre 5. Le cycle entier dure 96 heures (4 jours) :

- 48 heures de montée de la puissance, de 0 à 100%
- 24 heures de descente, de 100 à 50%
- 24 heures de palier à 50%

La température de la chambre est maintenue à $15^{\circ}C$.

7.3.2 Résultats

Dans la configuration de l'essai décrite plus haut, avec le bloc placé en chambre climatique régulée en température, le flux de chaleur sur les parois autres que celles où sont placés les éléments chauffants et a priori nul. Nous avons vérifié cette hypothèse en mesurant la température externe près de ces parois : elle reste égale à la température imposée par la chambre ($15^{\circ}C$). Il n'est donc pas nécessaire de reconstruire le flux sur les parois en question. Un flux nul est imposé sur toutes les faces $\partial\Omega \setminus \Gamma$ autres que celle où sont placés les éléments chauffants (conditions aux limites homogènes).

Remarque :

Par abus de langage, nous avons appelé flux tout au long de ce travail la quantité

$$\Phi(x,t) = \alpha\theta_{ext} - g(x,t)$$

(cf. partie 2.1). Lorsque $g = 0$ et $\theta_{ext} = 0$ (c qui est vérifié expérimentalement ici), le flux est dit nul. En toute rigueur, on appelle flux la quantité $\kappa\nabla\theta.\vec{n}$. Sur les parois où $\Phi = 0$, le flux est donc égal à $\kappa\nabla\theta.\vec{n} = -\alpha\theta$.

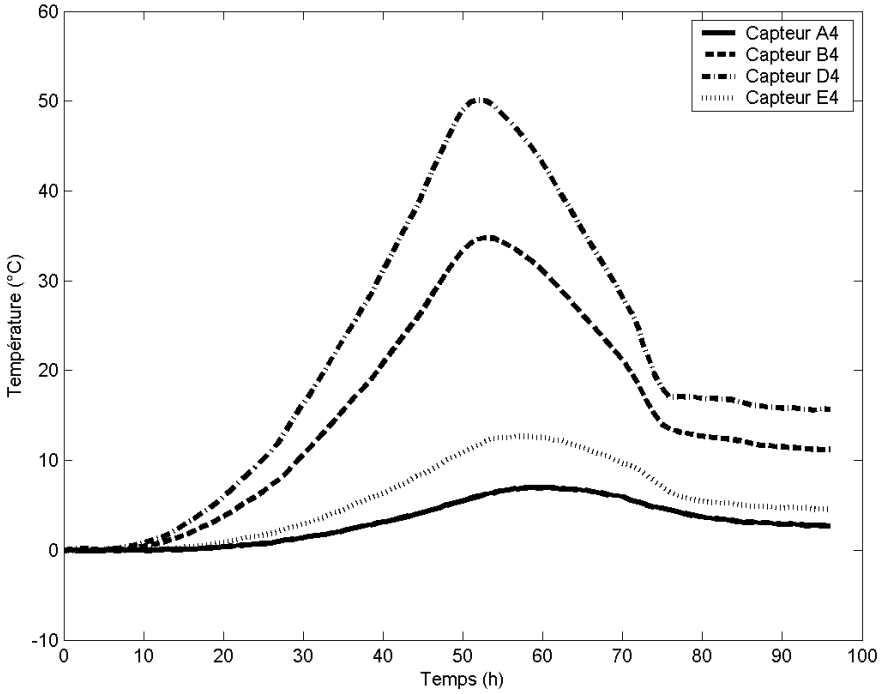


FIG. 7.7 – Mesures expérimentales : capteurs du lot 1

La figure 7.7 présente les valeurs de température mesurées au cours de l'essai au niveau des capteurs A4, B4, D4 et E4. Elles ont été ramenées à zéro par soustraction de la température de référence ambiante ($15^{\circ}C$) et corrigés de l'erreur statique (offsets des capteurs). Une sonde externe placée sur le surface du bloc, juste en dessous des éléments chauffants, a permis de constater que la réponse en température de ces éléments n'est pas proportionnelle à la puissance fournie. Le chargement réellement appliqué n'a donc pas l'allure qui avait été souhaitée initialement mais cela n'a pas d'importance pour la suite.

A partir de ces mesures, grâce à l'algorithme de reconstruction du flux RFTD, il est possible de remonter à l'apport de chaleur en surface que représentent les éléments chauffants. Les mesures fournies par un lot de capteurs sont utilisées comme données, et le champ reconstruit numériquement est ensuite comparé aux mesures du reste des capteurs : on montre ci-dessous les comparaisons des mesures sur les capteurs de la section du milieu, c'est-à-dire les capteurs C1 à C8. Quatre lots de capteurs différents sont utilisés pour la reconstruction :

- **Lot 1 :** capteurs A4, B4, D4 et E4 (cf. figure 7.7).
- **Lot 2 :** capteurs A1, A4, A6, B1, B4, B6, D1, D4, D6, E1, E4 et E6. Les capteurs des lots 1 et 2 sont placés près de la surface sur laquelle a lieu la reconstruction.
- **Lot 3 :** capteurs B2, B7, D2 et D7. Les capteurs de ce lot sont plus éloignés de la surface, au cœur du bloc.

La reconstruction avec le premier lot de capteurs, c'est-à-dire avec 4 capteurs proches de la surface, donne des résultats très satisfaisants. La figure 7.8[1] permet de comparer les mesures et le champ reconstruit au niveau des capteurs C de la section du milieu. Près de la surface (capteurs C1, C4 ou C6), l'erreur relative est respectivement de 13%, 7% et 4% (cf. tableau 7.6). Des erreurs relatives plus importantes sont constatées en profondeur, mais l'erreur moyenne ne dépasse jamais quelques dixièmes de degré. La figure 7.9 montre le champ tridimensionnel à trois instants différents de la fenêtre de reconstruction : on retrouve la zone la plus chaude sur la partie de la surface recouverte par les éléments chauffants.

Numéro de capteur	**Champ moyen**	**Lot 1**	**Lot 2**	**Lot 3**
C1 (17)	$5,12^{\circ}C$	$0,67^{\circ}C$	$0,28^{\circ}C$	$2,93^{\circ}C$
		$0,13\%$	$0,05\%$	$0,57\%$
C2 (18)	$0,54^{\circ}C$	$0,82^{\circ}C$	$0,71^{\circ}C$	$0,32^{\circ}C$
		$1,53\%$	$1,32\%$	$0,60\%$
C3 (19)	$0,14^{\circ}C$	$0,10^{\circ}C$	$0,08^{\circ}C$	$0,03^{\circ}C$
		$0,71\%$	$0,59\%$	$0,23\%$
C4 (20)	$5,59^{\circ}C$	$0,38^{\circ}C$	$1,18^{\circ}C$	$1,62^{\circ}C$
		$0,07\%$	$0,21\%$	$0,29\%$
C6 (22)	$3,29^{\circ}C$	$0,12^{\circ}C$	$0,43^{\circ}C$	$1,41^{\circ}C$
		$0,04\%$	$0,13\%$	$0,43\%$
C8 (24)	$0,13^{\circ}C$	$0,07^{\circ}C$	$0,07^{\circ}C$	$0,05^{\circ}C$
		$0,56\%$	$0,56\%$	$0,40\%$

TAB. 7.6 – Erreur de reconstruction par capteur : erreur absolue $\frac{1}{T}\Big(\int_0^T(\theta(x_k)-\theta_k^d)^2\,dt\Big)^{1/2}$ *(en degrés)* et erreur relative $\left(\frac{\int_0^T(\theta(x_k)-\theta_k^d)^2\,dt}{\int_0^T(\theta_k^d)^2\,dt}\right)^{1/2}$ *(pourcentages)*

La reconstruction avec le deuxième lot de capteurs, c'est-à-dire avec des capteurs situés à même profondeur que les premiers, mais en plus grand nombre (12 au lieu de 4) donne des résultats de qualité comparable (cf. figure 7.10). Sur le capteur C1 par exemple, l'erreur relative n'est plus que de 5%. Au niveau des capteurs C4 et C6 par contre, l'erreur commise est plus importante que pour la reconstruction avec le lot 1. Ce résultat montre que, contrairement à l'intuition, l'utilisation d'un plus grand nombre de capteurs n'améliore pas forcément les résultats : un faible nombre de capteurs a un effet régularisant. Il a été confirmé également par d'autres simulations dont les résultats sont pas donnés ici.

Ce phénomène peut être expliqué par le raisonnement suivant. Considérons deux capteurs très proches l'un de l'autre, mais dont les mesures respectives diffèrent à cause d'une erreur de mesure ou un mauvais positionnement dans le modèle par exemple. L'erreur dans le champ reconstruit tend alors à être très importante, parce que l'algorithme de reconstruction tente de satisfaire deux contraintes contradictoires. Si la distance entre les deux capteurs tend vers zéro, l'erreur tend alors vers l'infini.

[1] température et temps sans dimension, avec $\bar{\theta} = 10$ et $\bar{t} = 691\,200$ (96 heures correspondent à $t = 0,5$)

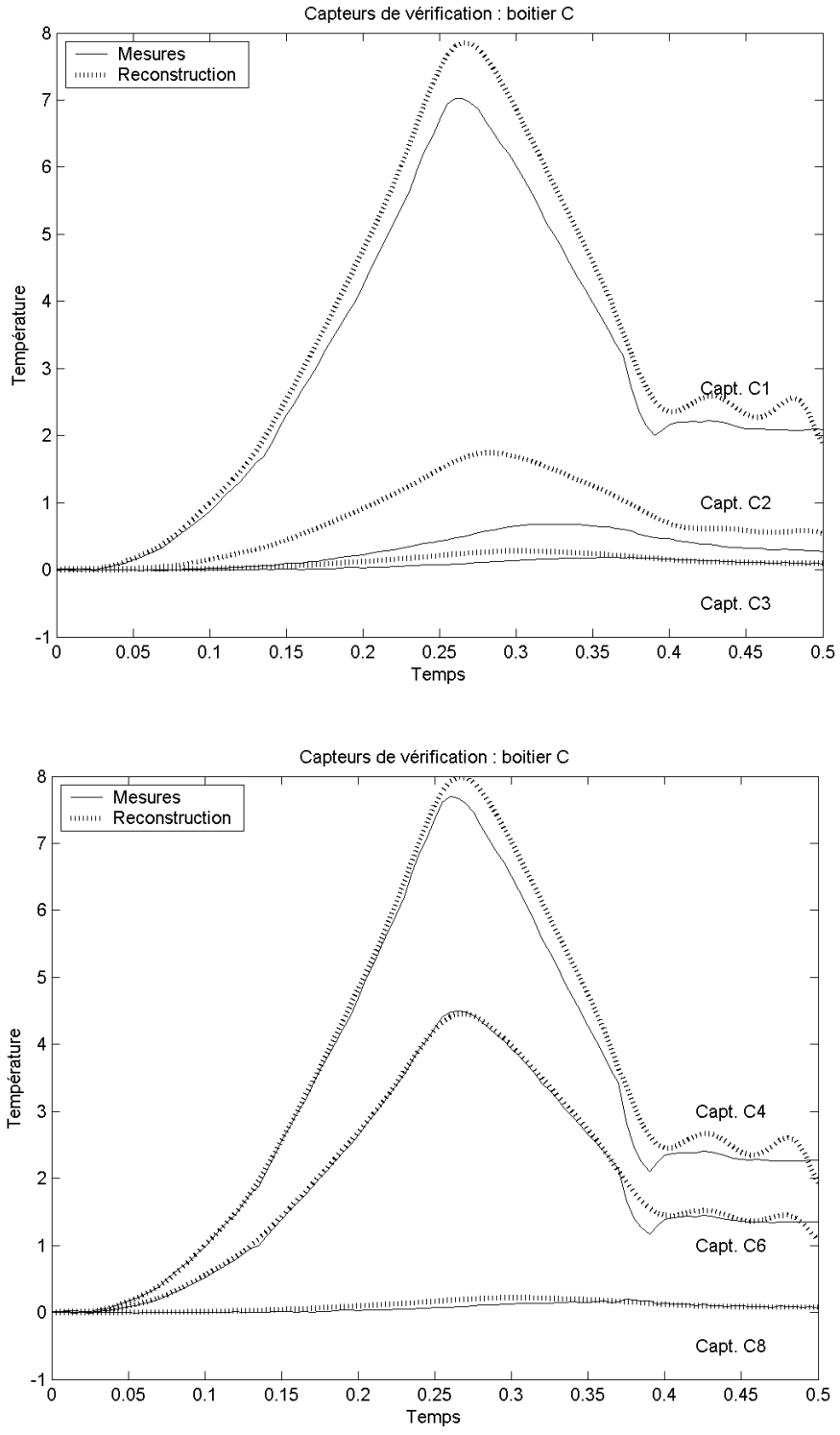
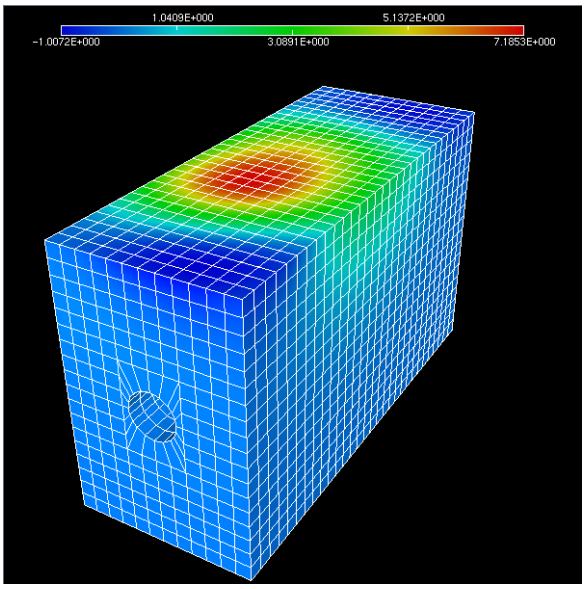
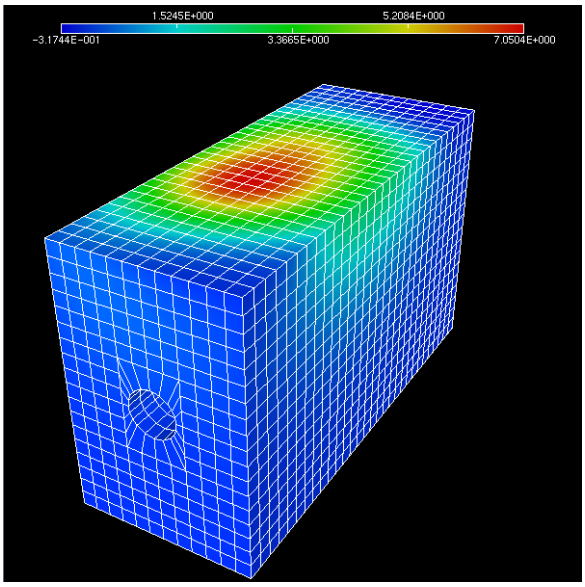


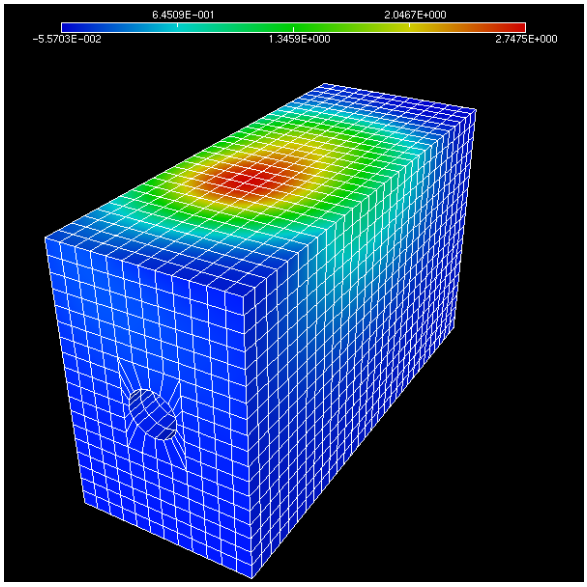
FIG. 7.8 – champ de température reconstruit au niveau des capteurs de la section C ($x = 0,75$), lot 1



(a) $t = 0,4.T$



(b) $t = 0,7.T$



(c) $t = T$

FIG. 7.9 – champ de température reconstruit (lot de capteurs 1)

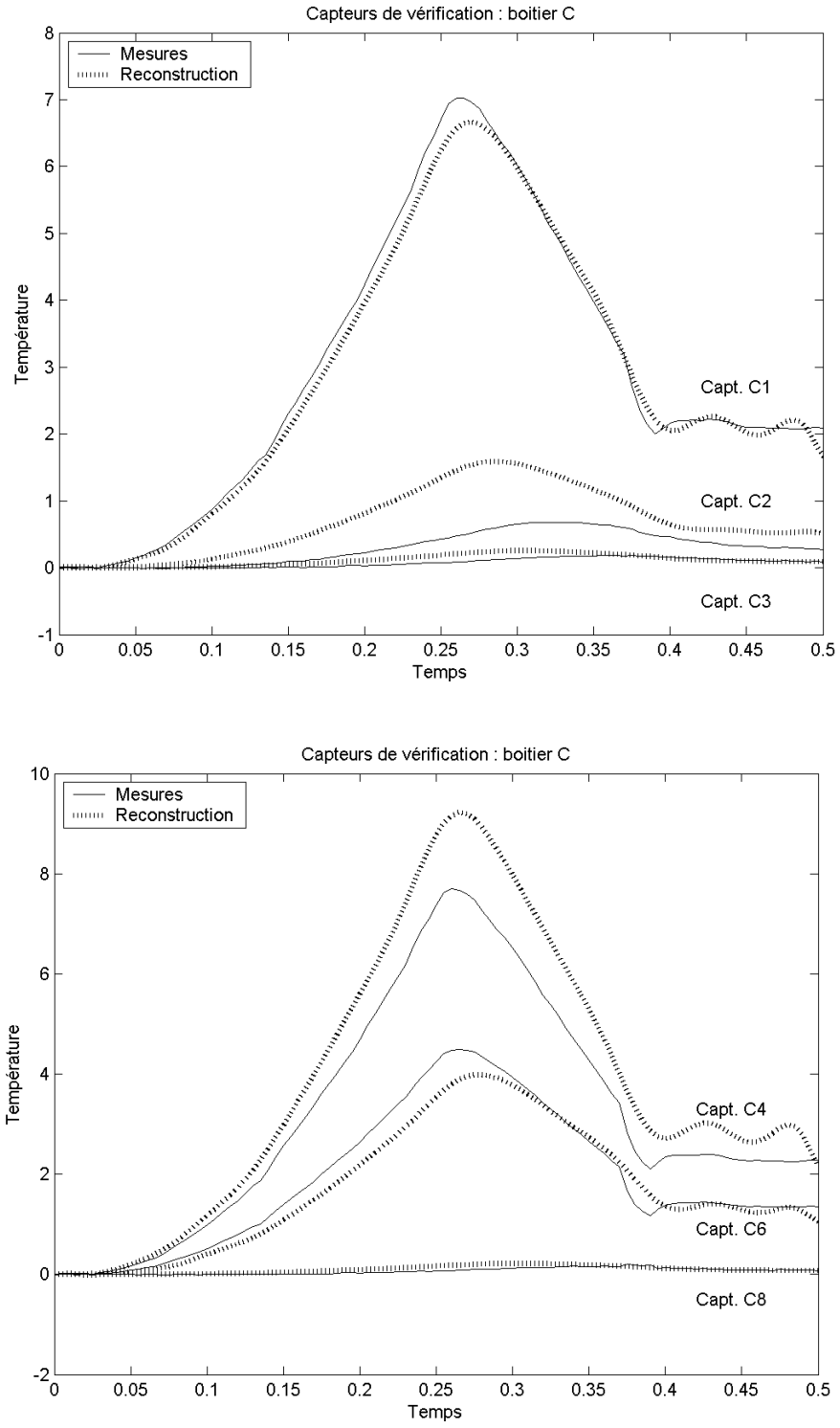
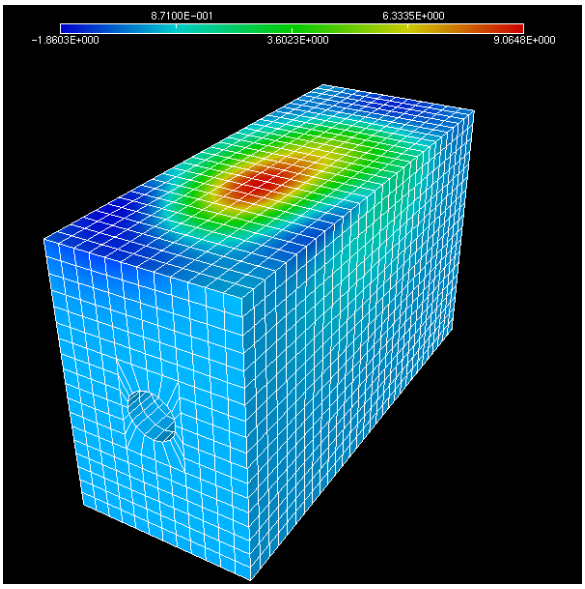
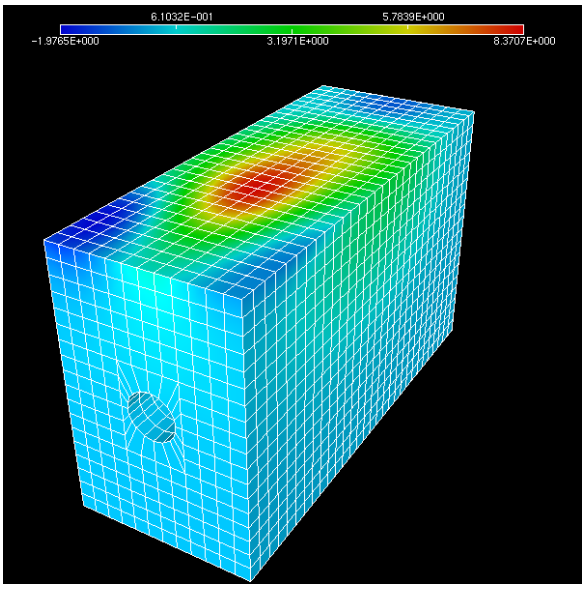


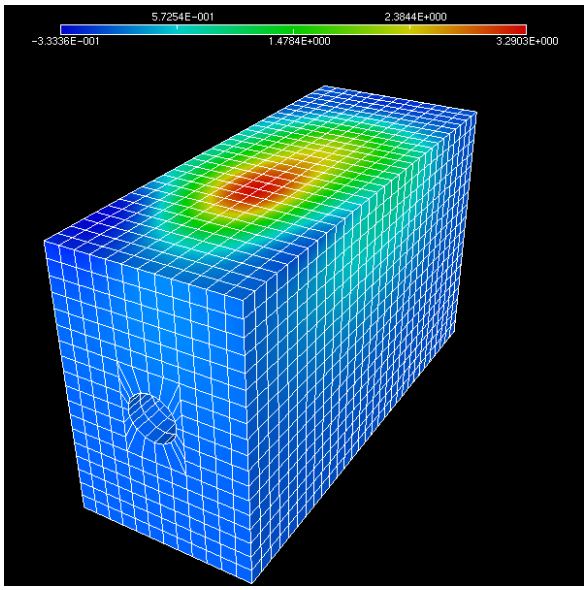
FIG. 7.10 – champ de température reconstruit au niveau des capteurs de la section C ($x = 0,75$), lot 2



(a) $t = 0,4.T$



(b) $t = 0,7.T$



(c) $t = T$

FIG. 7.11 – champ de température reconstruit (lot de capteurs 2)

La reconstruction avec le troisième lot de capteurs, placés eux beaucoup plus en profondeur que les deux autres, donne des résultats nettement mois satisfaisants (cf. figure 7.12). Si les valeurs du champ reconstruit sont loin des valeurs réelles (29% et 43% d'erreur pour les capteurs 4 et 6 respectivement selon le tableau 7.6), l'allure du champ reconstruit est néanmoins comparable à celle du champ reconstruit avec les deux autres lots de capteurs (cf. figure 7.13). La figure 7.14 permet comparer l'allure des champs résultants de chaque reconstruction au niveau de la section du milieu d'abscisse $x = 0,75$.

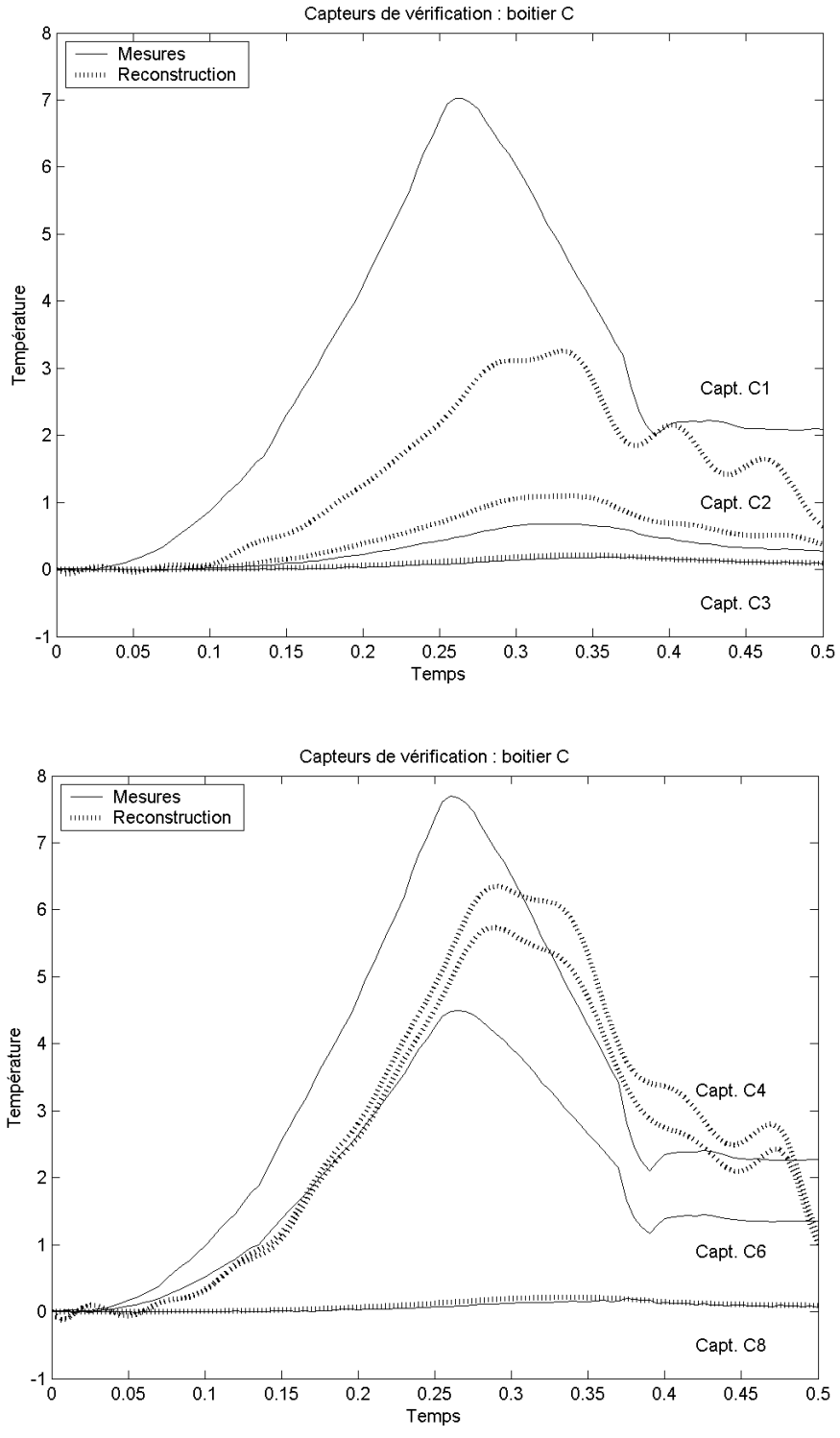
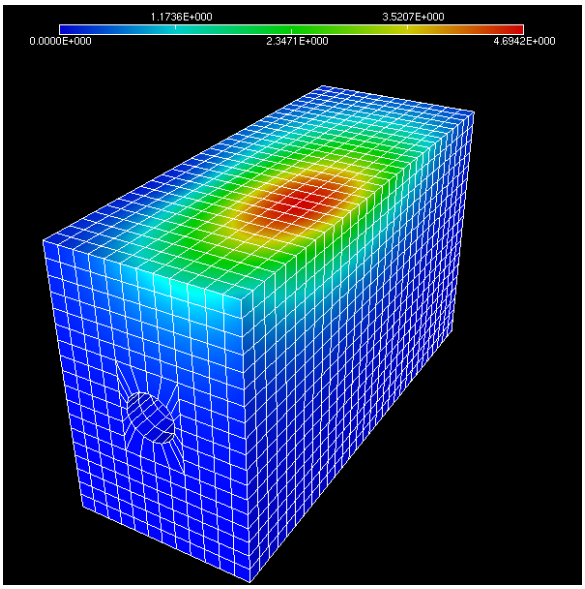
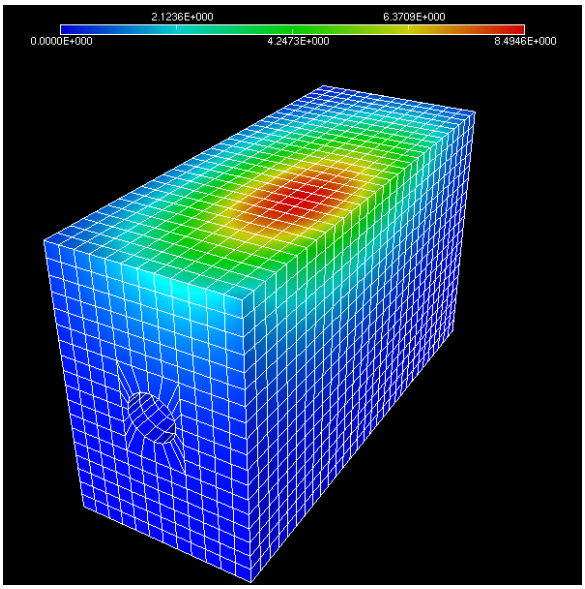


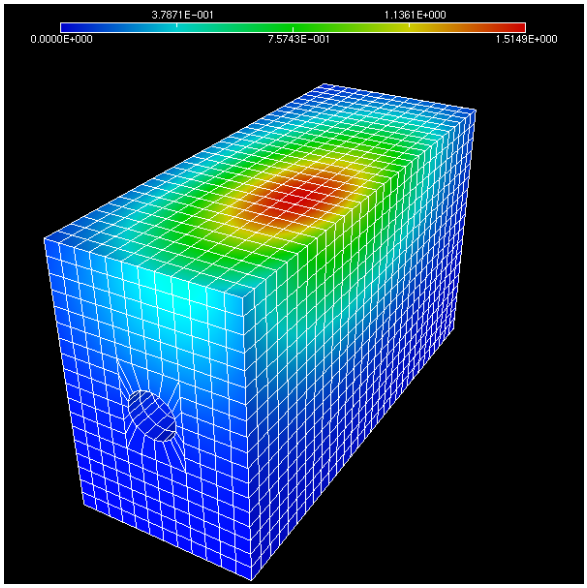
FIG. 7.12 – champ de température reconstruit au niveau des capteurs de la section C ($x = 0,75$), lot 3



(a) $t = 0,4.T$

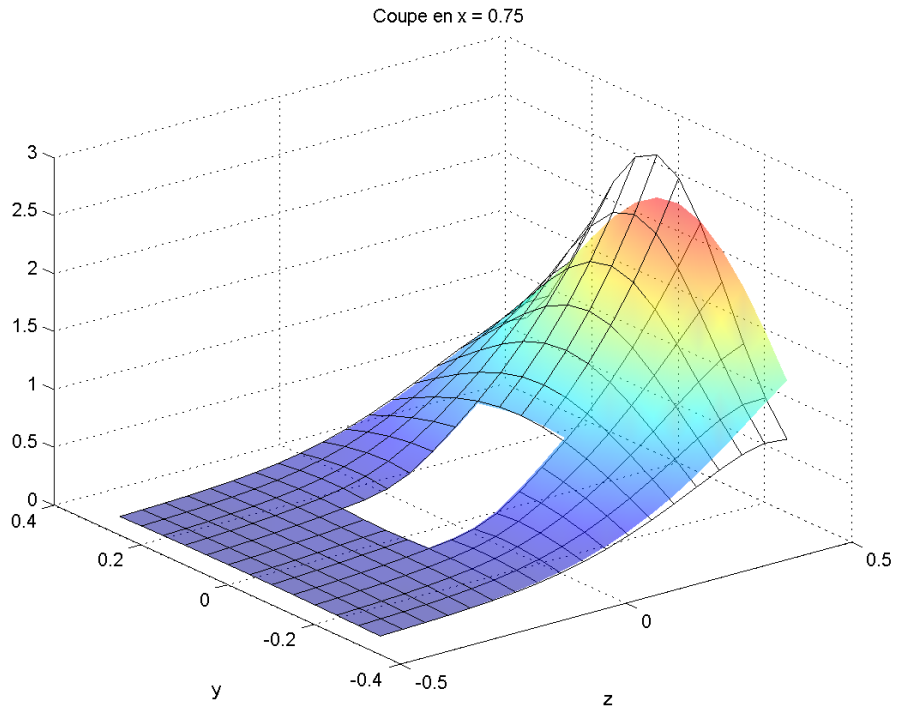


(b) $t = 0,7.T$

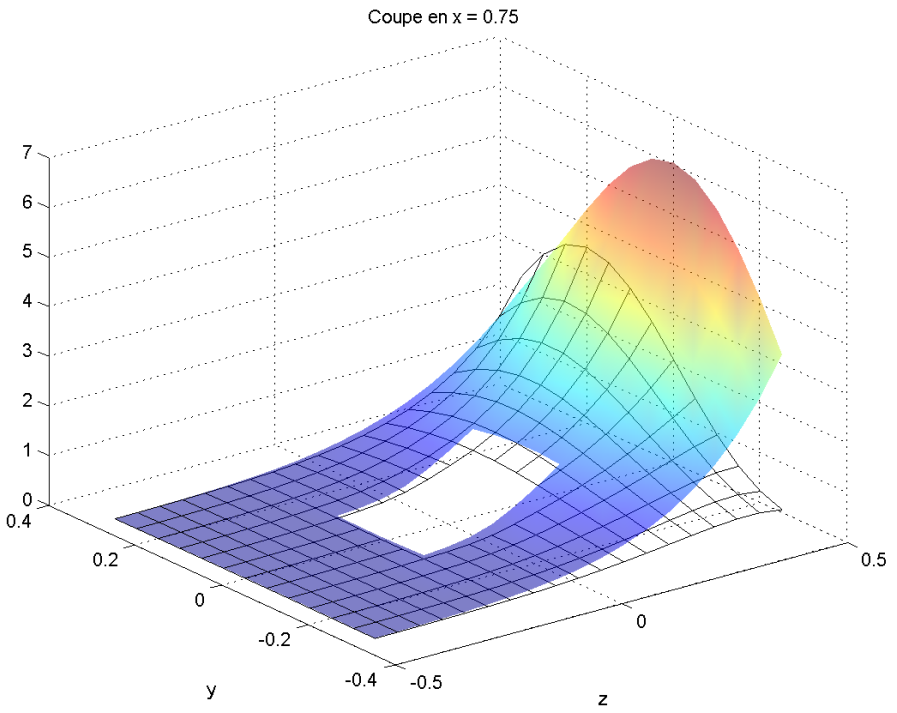


(c) $t = T$

FIG. 7.13 – champ de température reconstruit (lot de capteurs 3)



(a) Lot 1 *(surface pleine)* comparé à lot 2 *(surface quadrillée)*



(b) Lot 1 *(surface pleine)* comparé à lot 3 *(surface quadrillée)*

FIG. 7.14 – Reconstruction avec des lots de capteurs différents : coupe en $x = 0,75$

7.3.3 Conclusions

Les essais en laboratoire valident la possibilité de reconstruction d'un champ de température inconnu à partir de mesures ponctuelles. Ils confirment le fait que la démarche de reconstruction inverse ne peut pas être séparée de son contexte, dans lequel il faut prendre en compte le bruit de mesure et les erreurs de modélisation.

7.4 Bilan du chapitre

Les essais en laboratoire sur une structure réelle mettent en évidence l'ensemble des difficultés qui se présentent lors de l'utilisation des algorithmes dans des conditions réelles. La qualité du résultat est fortement dépendante des incertitudes du modèle (caractéristiques du matériau, position des capteurs, erreurs et bruits de mesure).

Dans une première partie, nous avons appliqué la méthode dite du régime sinusoïdal face avant pour la caractérisation du coefficient de diffusivité. Cette méthode s'applique facilement au cas de figure d'un solide massif avec un capteur noyé à une faible profondeur par rapport à la surface. La méthode est cependant très sensible à l'erreur relative sur la profondeur de la sonde.

La valeur de la diffusivité ainsi déterminée a été reprise dans la modélisation du bloc de béton utilisé pour les essais. Ceux-ci visaient à reconstruire un champ de température transitoire généré par une source de chaleur en surface. Le champ est reconstruit à partir d'un petit lot de capteurs, et est ensuite évalué par comparaison des valeurs estimées et des mesures fournies par le reste des capteurs, non utilisés pour la reconstruction.

La reconstruction est meilleure lorsque des capteurs proches de la surface sont choisis. Le béton est un très mauvais conducteur de la chaleur. Le champ généré par les plaques chauffantes présente de forts gradients en surface et ne pénètre que sur une faible profondeur dans le matériau. Si les capteurs les plus éloignés de la surface, qui mesurent un signal très faible, sont utilisés pour la reconstruction, le résultat est très sensible aux incertitudes de modélisation.

En présence d'erreurs de modélisation importantes, un faible nombre de capteurs peut avoir un effet régularisant. C'est ce que l'on observe lorsqu'on compare les résultats de reconstruction fournis par un lot de quatre capteurs (lot 1) à un lot de douze capteurs (lot 2) placés à une même distance de la surface.

Chapitre 8

Conclusions générales

8.1 En guise de conclusion : surveillance de l'état thermique d'un voussoir de pont

Considérons l'exemple d'un pont en béton situé au pied d'une colline, sur le flanc est. Le pont est soumis aux variations de température journalières. L'ensoleillement au cours de la journée représente une source de chaleur répartie sur la surface du pont, dont l'intensité est fonction de l'heure de la journée. Au moment d'ensoleillement maximum, le flux de chaleur moyen dû au soleil est de $200\,W.m^{-2}$ environ. A partir d'un certain moment de la journée, la colline cache progressivement le soleil, et la surface ne reçoit plus le flux de chaleur dû à l'ensoleillement direct.

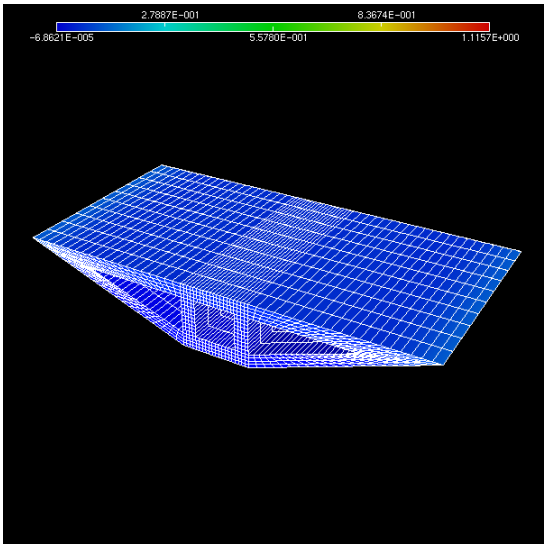
La simulation présentée ci-dessous recrée ce scénario. Un voussoir du pont est modélisé. Le chargement reçu est la somme d'une variation sinusoïdale de température (la température ambiante) et d'un flux thermique sur la surface supérieure (l'ensoleillement direct) qui est d'abord appliqué sur toute la surface puis, progressivement, sur une partie de la surface de plus en plus petite.

Un système de surveillance doit fournir à tout moment une estimation de l'état thermique du solide. A intervalles réguliers, le système de surveillance utilise les mesures enregistrées durant les dernières 24 heures et fournit une estimation de la température grâce à l'algorithme de reconstruction des flux.

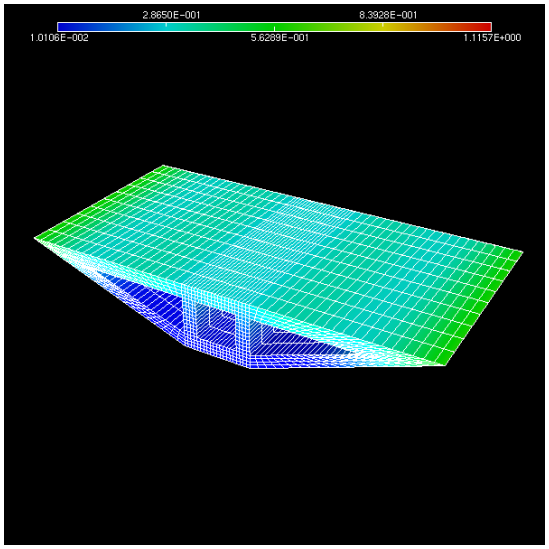
12 capteurs sont répartis dans la structure : 6 sont situés parallèlement à la chaussée à une profondeur donnée, et les 6 autres dans les parties verticales de la structure. Les figures 8.2 montrent le champ reconstruit à divers instants, en comparaison avec le champ de synthèse donné par les figures 8.1. L'erreur relative sur le champ reconstruit ne dépasse à aucun moment 3%.

Le modèle utilisé est constitué de 10 000 degrés de liberté environ. Le calcul de reconstruction en ligne dure 5 minutes sur un ordinateur *Pentium IV* à $2,8\,GHz$[1]. Les estimations de l'état peuvent donc être effectuées à des intervalles de 5 minutes minimum.

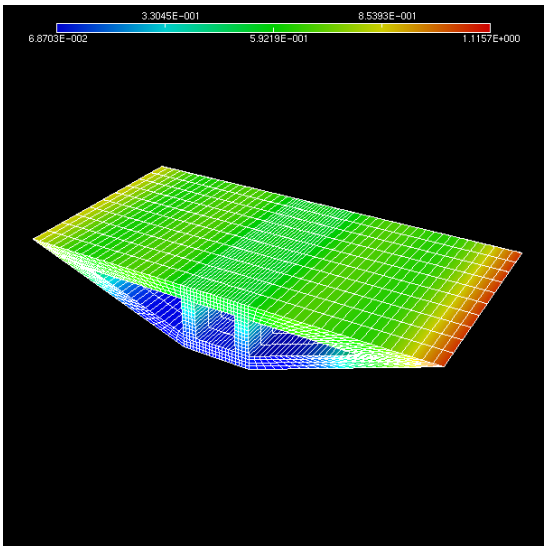
[1]Implantation sur *Matlab*© non optimisée



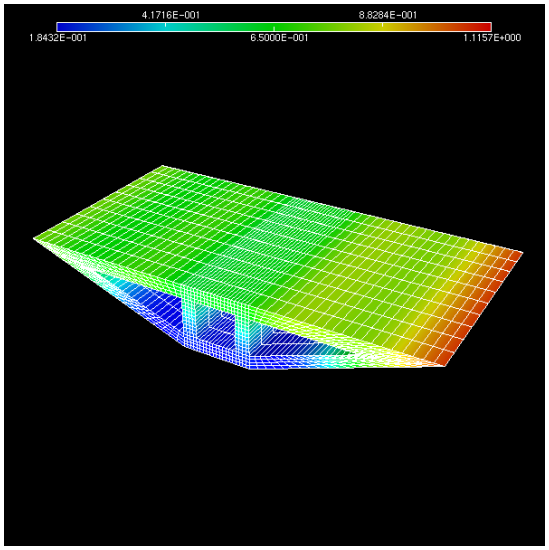
(a) $t = 2,4\,h$



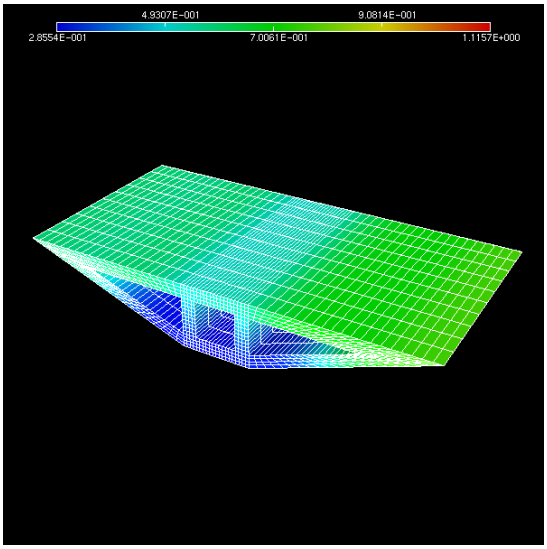
(b) $t = 4,8\,h$



(c) $t = 7,2\,h$

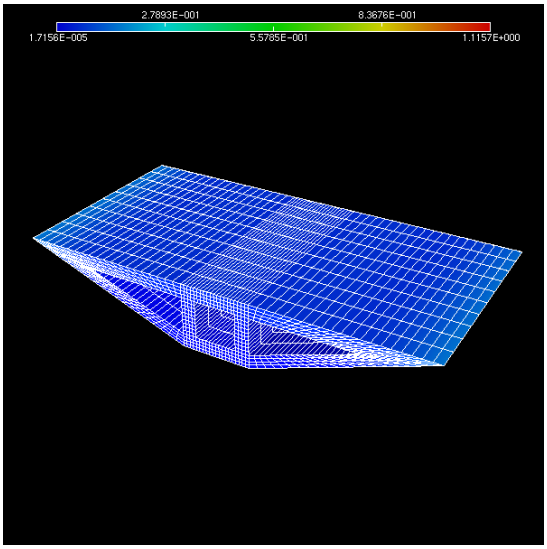


(d) $t = 9,6\,h$

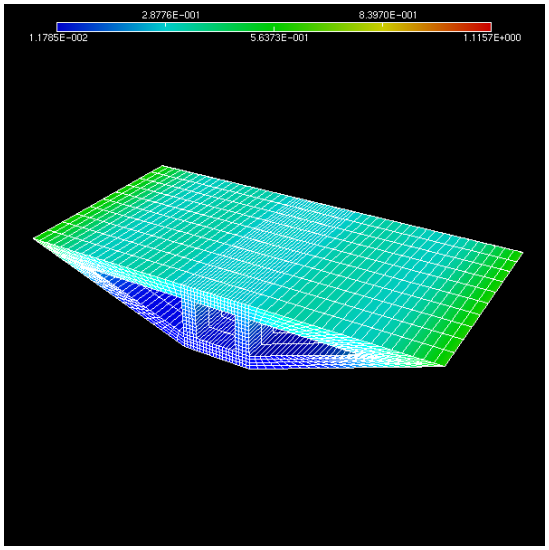


(e) $t = 12\,h$

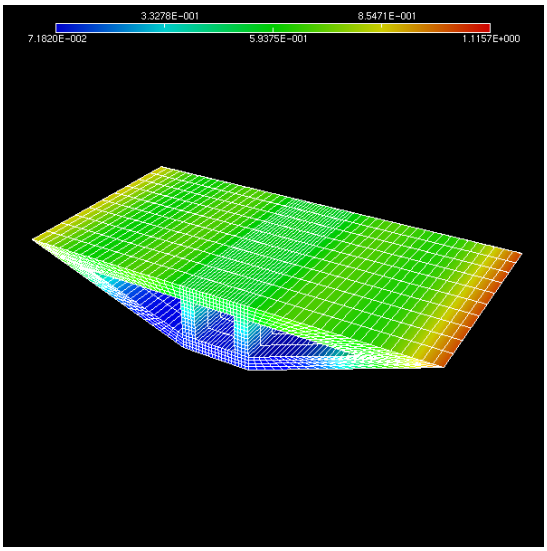
FIG. 8.1 – Champ de synthèse



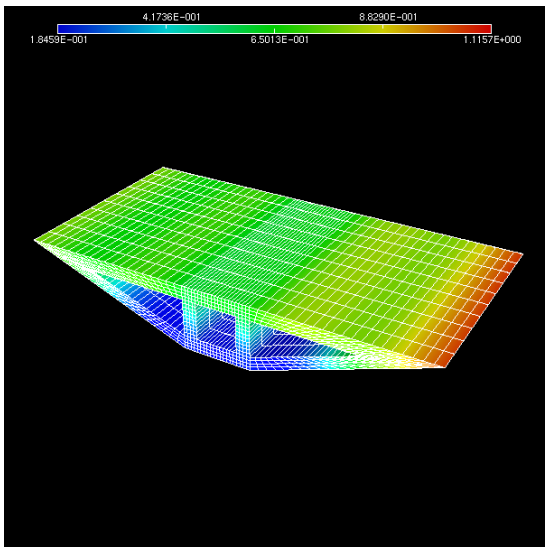
(a) $t = 2,4\,h$



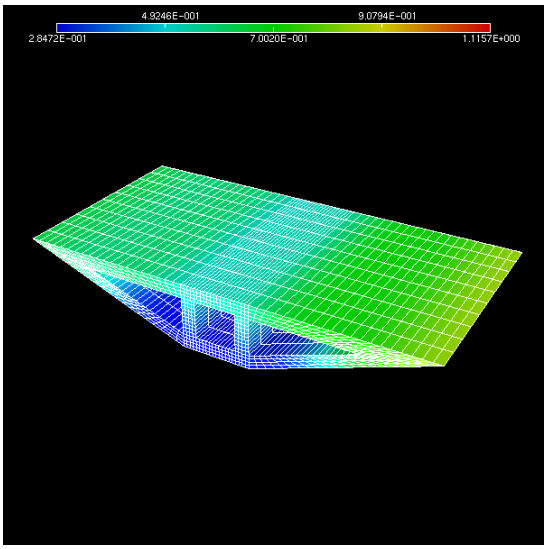
(b) $t = 4,8\,h$



(c) $t = 7,2\,h$



(d) $t = 9,6\,h$



(e) $t = 12\,h$

FIG. 8.2 – Champ reconstruit

8.2 Bilan et perspectives

8.2.1 Résultats principaux

L'approche contrôle optimal permet de répondre à la problématique de l'assimilation des données de température dans une structure tridimensionnelle. Nous l'avons appliquée ici à la détermination d'une condition initiale et de sources surfaciques ou volumiques.

Après les rappels du chapitre 2, nous présentons, dans le chapitre 3, la méthode adjointe appliquée au cas d'une structure unidimensionnelle. L'objectif ici est de reconstruire les conditions initiales et les flux aux deux extrémités du solide. On met en évidence le problème de l'instant final rencontré lorsque les flux sont supposés appartenir à un espace de fonctions de type $L^2(0,T)$. L'état adjoint satisfait une condition finale nulle qui est à l'origine d'une erreur importante sur la valeur du champ reconstruit à l'instant final de la fenêtre de reconstruction. On propose pour remédier à cette difficulté de choisir comme espace de contrôle l'espace $H^1(0,T)$. L'état adjoint vérifie alors des conditions de Neumann en temps, ce qui 'libère' la valeur finale du champ reconstruit. Le calcul du nouvel état adjoint nécessite la résolution d'un problème elliptique en temps.

Dans le cas tridimensionnel, présenté dans le chapitre 4, le choix de l'espace de contrôle est restreint par la nécessité d'une régularité suffisante pour définir la valeur du champ θ aux points x_k. L'espace de contrôle doit être l'espace H^1 en espace et en temps. L'état adjoint appartient alors à l'espace dual H^{-1}. Nous proposons une méthode de transposition pour déterminer l'image de cet état adjoint dans H^1 par isomorphisme. Dans le cas de la reconstruction d'un flux en surface, nous introduisons une norme équivalente fondée sur l'opérateur de Poincaré-Steklov. La mesure des fonctions dans cette norme est donnée par une expression simple faisant intervenir les valeurs propres de cet opérateur.

Nous obtenons ainsi une méthode rigoureuse, convergente et facilement implantable en trois dimensions malgré la difficulté liée aux observations ponctuelles.

Le problème de contrôle étudié peut être repris dans un formalisme dual. Dans le problème dual, les inconnues sont des fonctions de l'espace des observations. Les deux problèmes sont équivalents : on le montre dans le cadre abstrait en utilisant la dualité de Fenchel-Rockafellar dans le chapitre 2. Mais le problème dual permet de réduire de manière significative les temps de calcul pour deux raisons : d'abord, le nouvel espace des inconnues, c'est-à-dire l'espace des observations, est essentiellement unidimensionnel, contrairement à l'espace de contrôle primal qui, lui, est tridimensionnel. Ensuite, la formulation duale permet de faire une grande partie des calculs hors ligne, dans une étape de précalcul, en réduisant ainsi la quantité des calculs effectués en ligne. Des algorithmes directs fondés sur l'approche duale peuvent être plus performants en termes de coût de calcul que des algorithmes itératifs appliqués au problème primal, comme on l'a vu dans le chapitre 5 qui traite de l'implantation pratique des méthodes.

Les chapitres 6 et 7 ont traité des performances et des limites des algorithmes développés. Tout d'abord, nous avons étudié numériquement la sensibilité du résultat de reconstruction aux erreurs de modélisation. Celle-ci est faible par rapport à une erreur sur le coefficient de diffusivité. Elle l'est beaucoup moins par rapport à une erreur sur la position des capteurs. Les conditions aux limites doivent être correctement modélisées lorsqu'elles sont homogènes. Des essais en laboratoire ont validé

sur une structure réelle les performances des méthodes proposées.

Les algorithmes développés, s'appuyant sur un modèle, permettent une estimation du champ de température bien plus fidèle à la réalité qu'une simple interpolation. De plus, comparés à une approche de type Kalman, ils présentent l'avantage de reconstruire les sources surfaciques alors que, dans le filtrage de Kalman, celles-ci ne sont prises en compte qu'en tant que bruit. La connaissance de ces sources permet alors de détecter des variations spatiales près des bords. Celles-ci peuvent être importantes dans les structures de génie civil à cause de la faible conductivité des matériaux utilisés et des dimensions des ouvrages.

La vitesse d'exécution des algorithmes permet leur utilisation dans un contexte de surveillance en temps réel. Le temps de résolution en ligne du problème dual par l'algorithme direct est de quelques secondes auxquelles il faut ajouter le temps du post-traitement (de deux ou trois minutes), pour un modèle de 10 000 degrés de liberté environ. Dans les structures de génie civil, les effets transitoires dans le champ de température ont des temps caractéristiques beaucoup plus longs. On peut considérer que le champ de température dans l'ouvrage reste constant durant le calcul : on peut donc parler de résolution en temps réel.

Enfin, tous les algorithmes développés peuvent être implantés à l'aide d'outils simples. Ils sont construits comme une succession de problèmes facilement implantables par la méthode des éléments finis et ne font appel qu'à des routines de calcul usuelles. Le développement de ces algorithmes revient à ajouter une surcouche logicielle et ne nécessite aucune intervention dans les codes d'éléments finis utilisés. Ce travail a donné lieu à l'élaboration d'une 'boîte à outils' construite dans l'environnement de calcul *Matlab*© autour du code d'éléments finis *Openfem*[2].

8.2.2 Perspectives

Ce travail a permis de poser les bases pour le développement d'outils algorithmiques destinés à l'assimilation en temps réel de données de température ponctuelles. Nous pouvons envisager des développements ultérieurs sur les plans théorique et pratique.

Pour répondre pleinement au problème de l'élimination des effets thermiques dans les techniques de surveillance vibratoire des ouvrages, il sera nécessaire de coupler les outils d'assimilation à des outils de détermination des propriétés thermomécaniques. En partant du constat que seules certaines composantes d'un champ thermique ont une influence sur les propriétés, il serait alors possible de développer des stratégies se focalisant sur la reconstruction de ces composantes uniquement.

Une approche globale du problème de l'assimilation de données pose par ailleurs les questions suivantes : où placer les capteurs, combien en placer, quel type de capteurs utiliser pour un type donné de chargement thermique ? Ces questions ont déjà fait l'objet de nombreux travaux de recherche, mais une approche systématique répondant à tous les cas de figure reste, à notre connaissance, à trouver.

Nous avons vu par ailleurs que la mauvaise connaissance du modèle est préjudiciable à la bonne estimation du champ de température. Or les méthodes adjointes permettent aussi l'estimation de paramètres : cela fait l'objet d'une très vaste littérature. Nous pensons donc qu'il serait tout à fait

[2]L'auteur tient à remercier à cet effet M. Etienne Balmès avec qui la collaboration autour de l'outil *Openfem*© a été agréable et fructueuse.

envisageable de développer des méthodes qui associent à l'estimation de l'état du système, comme cela est fait ici, une estimation simultanée de ses paramètres.

Enfin, la modélisation adoptée ici ne permet pas la prise en compte d'éventuels phénomènes de transport par convection. La modélisation de ces phénomènes fait intervenir un terme de vitesse dans l'équation de la chaleur qui devient alors fortement non-linéaire et doit être couplée à un modèle de transport de fluides. Développer des méthodes d'assimilation pour de tels systèmes couplés permettrait de toucher des domaines d'application bien plus variés comme les domaines de la modélisation environnementale ou du confort climatique dans le bâtiment par exemple.

Nous espérons que cette contribution s'avèrera utile au déploiement de méthodes de surveillance de santé des structures, et servira à de futures avancées au profit de la sécurité et du confort des usagers.

Annexe A

A.1 Géométrie de la maquette utilisée pour les essais et disposition des capteurs

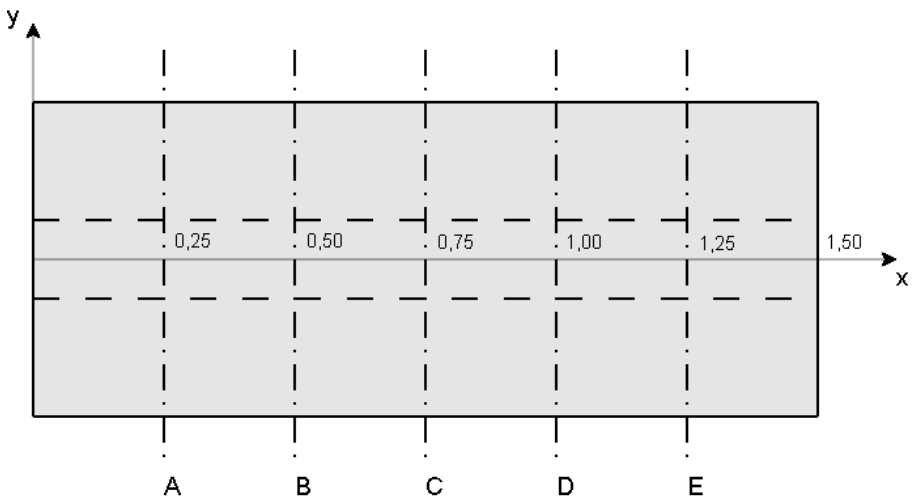
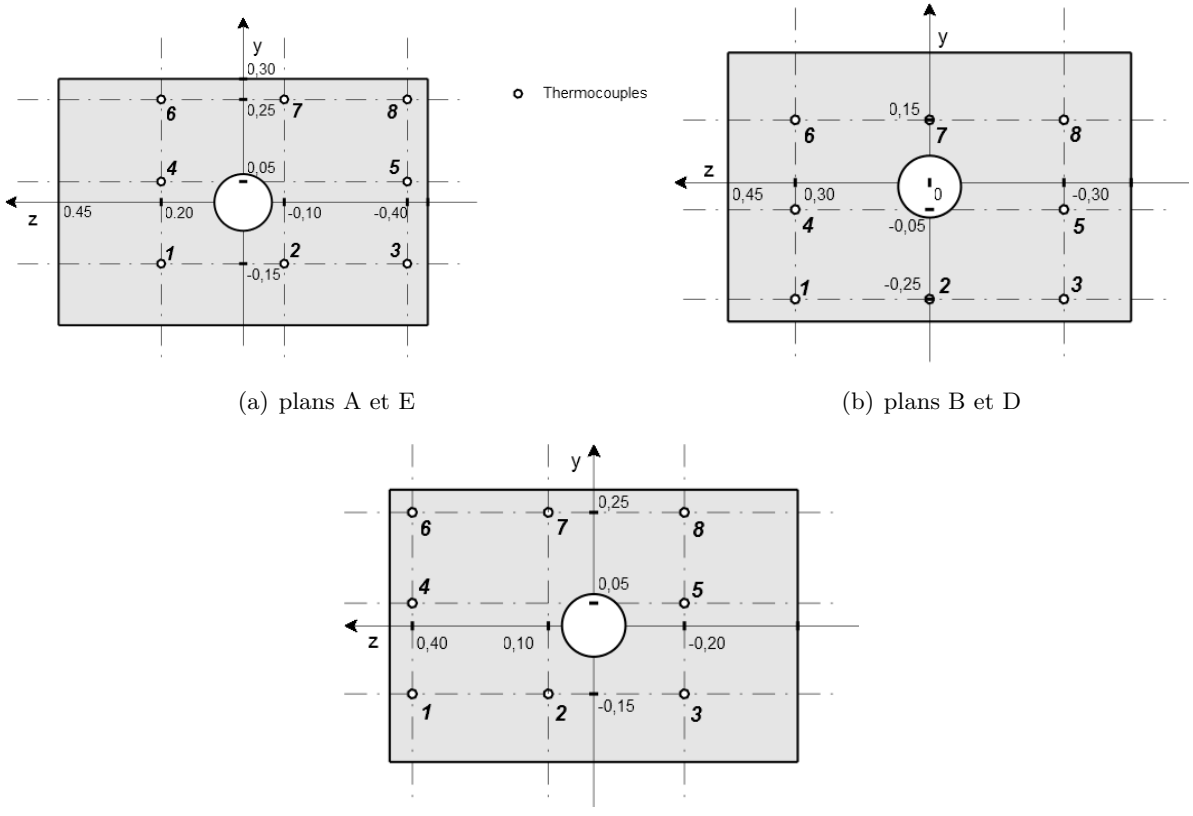


FIG. A.1 – Géométrie du bloc de béton, vue de face



(a) plans A et E

(b) plans B et D

(c) plan C

FIG. A.2 – Géométrie du bloc de béton, vue de côté

Annexe B

Assimilation thermique 1D par méthode adjointe libérée[1]

F. Bourquin, A. Nassiopoulos

B.1 Introduction

La précontrainte affecte le comportement vibratoire des structures. Ainsi, la détermination fiable et rapide de l'état de précontrainte associé à un champ de température devient une étape cruciale dans de nombreux processus comme le contrôle de santé en génie civil. La meilleure reconstruction possible du champ de température constitue alors un élément clef de cette démarche.

Il existe de nombreuses stratégies pour détecter les endommagements d'une structure de génie civil : entre autres, une classe très attrayante de techniques repose sur l'analyse vibratoire sous sollicitations ambiantes. Ces méthodes dites *output-only* consistent soit à identifier le spectre basse fréquence de la structure à l'instant courant pour en déduire si celle-ci a subi un endommagement, soit à vérifier qu'un certain vecteur appartient toujours au noyau de la matrice de Hankel des matrices de corrélation des mesures Basseville *et al.* (2004). Dans les deux cas, la structure intacte, ou de référence, est censée être connue, ce qui est le cas pour chaque nouveau pont pour lequel on dispose aujourd'hui d'un modèle mécanique plutôt précis à l'issue de la construction. L'analyse modale opérationnelle et la détection en ligne d'endommagements visent donc à détecter les évolutions du spectre de la structure. On dispose maintenant d'une expérience pratique des algorithmes et de leur comportement sur des cas réels comme par exemple le pont Z24 Peeters (2000). L'analyse modale output-only fondée sur des méthodes de sous-espace tirent profit des matrices de corrélation et débouchent sur des algorithmes en ligne puissants Basseville *et al.* (2004); Mevel & Goursat (2004) de détection d'endommagement, dont les domaines d'application incluent le génie aéronautique, le génie mécanique, et le génie civil. Il existe beaucoup d'autres méthodes (voir par exemple Sohn *et al.* (2000, 2001), Cremona (2004); Farrar *et al.* (2003)).

Or le comportement dynamique de la structure sous surveillance peut varier sous l'influence de plusieurs facteurs, y compris les variations de température Rohrmann *et al.* (2000). En fait, selon les conditions aux limites de la structure et la distribution de température, des variations thermiques éventuellement uniformes peuvent causer des variations très importantes du spectre de la structure Farrar *et al.* (2003), jusqu'à 10 %, en raison de la précontrainte additionnelle. La température peut

[1]Chapitre de l'oubrage *Problèmes inverses*, Editions du LCPC, Kluwer Academic Publishers, **2005**. *A paraître.*

même modifier les conditions de frontière et le nombre de points de contact entre les piles et le tablier du pont. En fait, la température peut engendrer une déflexion aussi importante que le poids propre du pont Inaudi *et al.* (2001). Ainsi les effets environnementaux peuvent être de plusieurs ordres de grandeur plus importants que l'effet des endommagements structuraux. Par ailleurs, les méthodes de contrôle structural fondées sur un modèle de la structure souffrent de toute modification non identifiée du comportement vibratoire de la structure qui nuit alors à la robustesse des lois de contrôle.

Par conséquent, comme mentionné dans Farrar *et al.* (2003) et dans une grande partie de la littérature sur le contrôle de santé, il est obligatoire d'éliminer les effets thermiques. Cette élimination reste un défi dans ce domaine. La plupart des tentatives dans cette direction ont favorisé des approches en boîte noire comme l'apprentissage de réseaux de neurones, en vue de corréler la température aux mesures extensométriques Farrar *et al.* (2003); Sohn *et al.* (2003). Voir Kullaa (2002, 2003, 2004) pour l'usage de l'analyse en composantes principales, fondée sur la corrélation entre les signatures observées. Mais les données d'apprentissage doivent inclure au moins un cycle complet de conditions en service avant que l'on puisse appliquer un algorithme de détection d'endommagement. Par ailleurs, la méthode proposée ne permet pas de prendre en compte de manière appropriée les événements climatiques exceptionnels.

Par ailleurs, il faut noter que le nombre de capteurs de température sur de grands ouvrages peut atteindre plusieurs centaines Wong (2004), ce qui témoigne de l'importance de cette grandeur physique et de ses variations spatiales.

En outre, la longévité des structures en béton est dictée par l'évolution de la température au jeune âge, d'où l'intérêt d'évaluer le champ de température aussi tôt que possible. Dans le même esprit, la vérification en temps réel de la bonne prise du béton ne peut que tirer parti d'une connaissance fine du champ de température et de son évolution.

Ainsi la température ne constitue pas qu'un simple paramètre de nuisance qui doit être rejeté d'un modèle qui tiendrait compte seulement de la dynamique de la structure. Au contraire, une surveillance multi-physique complète combinée à une modélisation thermomécanique inverse pourrait jouer un rôle important dans la correction statique des mesures cinématiques comme dans les méthodes de contrôle de santé fondées sur l'analyse vibratoire ainsi que dans le contrôle de chantier en vue des questions de durabilité et de productivité, sans compter le contrôle actif ou semi-actif des structures. Sur la base de mesures thermiques en un certain nombre de points, il est donc essentiel de reconstruire le champ de température réel à chaque instant afin d'en tenir compte explicitement dans les algorithmes de contrôle de santé ou de contrôle actif des structures.

Le travail présenté ici vise la reconstruction du champ de température dans une structure à partir de mesures de l'évolution de la température dans un intervalle de temps donné fournies par un certain nombre de capteurs ponctuels. Cette question est un cas particulier d'une classe de problèmes très importante citée dans la littérature sous le nom de problèmes inverses de transfert de chaleur Beck *et al.* (1985), Alifanov (1994), Özisik & Orlande (2000), et qui fait l'objet d'un nombre très important de publications. Elle se trouve aussi au cœur de l'assimilation de données en météorologie.

Parmi les techniques de résolution que l'on rencontre dans la littérature, les méthodes dites explicites tentent, après discrétisation le plus souvent par différences finies, d'inverser l'opérateur qui au contrôle associe les mesures Beck *et al.* (1996),Raynaud & Bransier (1986). D'autres méthodes

qualifiées d'implicites sont des méthodes itératives qui évitent l'inversion directe de cet opérateur Chiwiacowski & de Campos Velho (1991), Muniz *et al.* (1999), Alifanov (1994), Alifanov *et al.* (1995). Elles présentent souvent un caractère régularisant intrinsèque Alifanov *et al.* (1995), Hanke (1995a). Dans cette direction, la formulation par moindres carrés semble être un cadre très favorable pour le développement d'algorithmes rapides et robustes Jarny *et al.* (1991). La régularisation de type Tikhonov Engl *et al.* (1994) est souvent utilisée pour corriger le caractère mal posé du problème.

La démarche mise en œuvre dans cet article est celle du contrôle optimal Lions (1968) appliqué à la reconstruction des flux extérieurs et de la température initiale. On obtient en postraitement la température courante par résolution de l'équation de la chaleur. Cette méthode, parfois appelée *méthode adjointe* à cause de l'utilisation systématique de l'état adjoint pour calculer le gradient de la fonctionnelle à minimiser, présente de nombreux avantages, dont la généralité. Elle s'impose ici car on souhaite en effet traiter des situations multidimensionnelles et des géométries éventuellement complexes.

Le problème étant mal posé, on est amené à le régulariser. On montre alors que le choix d'une norme produit de type H^1 au lieu de L^2 permet d'améliorer fortement la précision de la température reconstruite par une libération de l'état adjoint à l'instant final.

B.2 Formulation générale du problème

Dans ce paragraphe, on considère un solide occupant un domaine Ω dans $\mathbb{R}^d$, $d \geq 1$, de frontière $\partial\Omega$. Par la suite, on se limitera au cas où $d = 1$.

B.2.1 L'équation de la chaleur

En l'absence de changement de phase et en négligeant la dissipation intrinsèque, la distribution de température $\theta(x,t)$ dans le solide est régie par l'équation de la chaleur

$$\rho c \frac{\partial \theta}{\partial t} - div(\mathbf{K} grad\, \theta) = f \qquad \text{dans} \quad \Omega \times [0,T] \tag{B.1}$$

où $x = (x_1, x_2, x_3) \in \Omega$ est la variable d'espace, $t \in [0,T]$ la variable de temps, $f = f(x,t)$ désigne la source de chaleur interne distribuée, $\rho = \rho(x)$ la masse volumique du matériau, $c = c(x)$ sa capacité calorifique et $\mathbf{K}$ son tenseur de conductivité. Le tenseur $\mathbf{K}$ est symétrique, défini positif et se réduit souvent à un tenseur diagonal. Si la conduction est isotrope, il s'écrit $\mathbf{K} = k(x)\mathbf{Id}$, où $k = k(x)$ désigne le coefficient scalaire de conductivité et $\mathbf{Id}$ la matrice identité.

A l'instant initial, le champ de température est donné par $\theta(x,0) = \theta^0(x)$, et à chaque instant le solide est soumis à une température extérieure $\theta_{ext}(x,t)$ et à un flux de chaleur $g(x,t)$ le long de sa frontière $\partial\Omega$. On peut résumer les interactions avec le milieu extérieur par la condition de Fourier-Robin

$$(\mathbf{K} grad\, \theta) \cdot \vec{n} + \alpha(\theta - \theta_{ext}) = g \quad \text{sur} \quad \partial\Omega \times [0,T] \tag{B.2}$$

où $\alpha = \alpha(x|_{\partial\Omega}) \geq 0$ désigne le coefficient d'échange, et $\vec{n}$ le vecteur unitaire normal à Ω le long de $\partial\Omega$.

Les conditions aux limites de type Dirichlet (respectivement Neumann) peuvent être vues comme des conditions aux limites de type Fourier-Robin avec un coefficient α qui tend vers l'infini (respectivement vers zéro).

B.2.2 Reconstruction de la température

En l'absence de source de chaleur interne, la température dans Ω est donc régie par le problème d'évolution

$$\begin{cases} \rho c \dfrac{\partial \theta}{\partial t} - div(\mathbf{K}\, grad\, \theta) = 0 & \text{dans} \quad \Omega \times [0,T] \\ (\mathbf{K}\, grad\, \theta) \cdot \vec{n} + \alpha(\theta - \theta_{ext}) = g & \text{sur} \quad \partial\Omega \times [0,T] \\ \theta(x,0) = \theta^0(x) & \text{dans} \quad \Omega \end{cases} \tag{B.3}$$

Si on pose $\Phi(x,t) = g(x,t) + \alpha\theta_{ext}$, le problème s'écrit

$$\begin{cases} \rho c \dfrac{\partial \theta}{\partial t} - div(\mathbf{K}\, grad\, \theta) = 0 & \text{dans} \quad \Omega \times [0,T] \\ (\mathbf{K}\, grad\, \theta) \cdot \vec{n} + \alpha\theta = \Phi & \text{sur} \quad \partial\Omega \times [0,T] \\ \theta(x,0) = \theta^0(x) & \text{dans} \quad \Omega \end{cases} \tag{B.4}$$

Notons que le couple $\{\theta^0, \Phi\}$ détermine de manière unique la solution $\theta(x,t)$ du problème (B.4). Par contre, il n'est pas possible d'identifier indépendamment θ_{ext} et g. Dans la perspective d'une identification seul Φ a un sens.

On suppose qu'à l'instant final T on dispose de M mesures $\{\theta_k^d(t)\}_{k=1}^M$ de la température sur tout l'intervalle de temps $[0,T]$, fournies par des capteurs ponctuels placés aux points $\{x_k\}_{k=1}^M$. A partir de ces mesures, l'objectif fixé est de reconstruire la donnée $\theta(x,T)$ ou, à défaut, la donnée $\theta(x,T-\epsilon)$, avec ϵ petit.

Parmi les méthodes possibles, on éliminera d'emblée le filtrage de Kalman en temps continu qui conduirait à la résolution d'équations de Riccati en très grande dimension ce qui est pratiquement hors d'atteinte sans réduction préalable.

Une autre manière de parvenir au champ de température à l'instant final est d'essayer de déterminer le couple $\{\theta^0, \Phi\}$ qui a donné naissance au champ de température dont on connaît la valeur aux points de mesure. Au lieu de résoudre l'équation de la chaleur dans le sens habituel, avec comme données les conditions initiale et aux limites, l'objectif fixé est de retrouver ces données à partir d'une solution (partiellement) connue. Il s'agit alors d'un problème inverse. Bien entendu, il n'est pas évident que cette approche puisse déboucher sur des algorithmes en temps réel, c'est pourquoi l'on s'intéresse à des méthodes rapides quoique généralistes.

Le problème peut être formulé comme un problème de minimisation au sens des moindres carrés d'une fonctionnelle mesurant l'écart entre les mesures et le champ de température reconstruit. Cet écart peut être par exemple mesuré par la fonction de coût quadratique J :

$$J(\{\theta^0, \Phi\}) = \frac{1}{2} \int_0^T \sum_{k=1}^M \Big(\theta(x_k,t) - \theta_k^d(t)\Big)^2 dt \tag{B.5}$$

Le problème à résoudre s'écrit alors

$$\left\{ \begin{array}{c} \text{Trouver } \{\theta^{0\,*}, \Phi^*\} \text{ tel que} \\ J(\{\theta^{0\,*}, \Phi^*\}) = \min\limits_{\{\theta^0, \Phi\}} J(\{\theta^0, \Phi\}) \end{array} \right. \tag{B.6}$$

La minimisation de cette fonction de coût par rapport au couple d'arguments $\{\theta^0, \Phi\}$ doit fournir la condition initiale $\theta^{0\,*}$ et la condition aux limites Φ^* qui donnent le champ de température $\theta(x,t)$ dont la valeur aux points $\{x_k\}_{k=1}^M$ est la plus proche possible des mesures $\{\theta(x_k)\}_{k=1}^M$. La minimisation a un sens par rapport à une norme donnée qu'il conviendra de préciser par la suite en même temps que l'espace fonctionnel dans lequel sera recherché le couple $\{\theta^0, \Phi\}$.

B.2.3 Un problème mal posé

Le problème est par nature mal posé à cause des propriétés de l'équation de la chaleur, qui 'lisse' les informations de haute fréquence. Ceci peut être illustré avec l'exemple simple ci-dessous :

Soit l'équation de la chaleur simplifiée avec conditions de Dirichlet

$$\left\{ \begin{array}{lll} \dfrac{\partial \theta}{\partial t} - \Delta\theta = 0 & \text{dans} & \Omega \times [0,T] \\ \theta = 0 & \text{sur} & \partial\Omega \times [0,T] \\ \theta(x,0) = \theta^0(x) & \text{dans} & \Omega \end{array} \right.$$

On cherche à développer $\theta(x,T) = f(x)$ en série de Fourier. A cette fin, on introduit le problème de valeurs propres

$$\left\{ \begin{array}{lll} \Delta\phi_k + \lambda_k \phi_k = 0 & \text{dans} & \Omega \\ \phi_k = 0 & \text{sur} & \partial\Omega \end{array} \right.$$

avec $\|\phi_k\| = 1$. Alors $\theta_k(x,t) = \phi_k(x) e^{-\lambda_k t} \quad (x \in \Omega, \quad t \in [0,T])$, est solution de l'équation de la chaleur. On en déduit que $\|\theta_k(\cdot,T)\| \leq e^{-\lambda_k T}$ bien que $\|\theta_k(\cdot,0)\| = 1$. Il résulte de la compacité de la résolvante du Laplacien en domaine borné que

$$\lim_{k\to\infty} \|\theta_k(\cdot,T)\| = 0.$$

La 1ère formule asymptotique de de Weyl permet d'affiner cette conclusion. En effet, $\lambda_k \sim k^{\frac{2m}{d}}$, d étant la dimension de l'espace dans lequel on se place, et $2m$ l'ordre de l'opérateur différentiel ($2m = 2$ pour le Laplacien). Cette dernière expression montre que les contributions des modes de haute fréquence (lorsque $k \to \infty$) n'ont quasiment plus d'effet à l'instant final. Ce phénomène est responsable du caractère mal posé du problème inverse, dont la résolution nécessitera des techniques particulières afin de reconstruire correctement ces contributions des modes de haute fréquence. Ce phénomène de 'lissage' signifie aussi que lors de la résolution du problème inverse, les modes de haute fréquence sont amplifiés. Un léger bruitage des mesures conduit alors à des solutions du problème inverse divergentes, et la résolution numérique est instable. En fait, si les données sont irrégulières le problème inverse n'a pas de solution car la température est très réguliere dans Ω.

On pourrait de même montrer que le flux extérieur Φ à l'instant final n'a pas d'effet sur les données de mesure issues des capteurs noyés à l'intérieur de la structure.

B.2.4 Régularisation de Tikhonov

Pour rendre bien posé le problème de la minimisation de la fonctionnelle B.5, on a recours à la stratégie de régularisation de Tikhonov (Engl *et al.* (1994)) qui consiste à rajouter un terme quadratique à la fonctionnelle qui lui confère des propriétés de stricte convexité. La nouvelle fonctionnelle s'écrit

$$J(\{\theta^0,\Phi\}) = \frac{1}{2}\int_0^T \sum_{k=1}^{M} \Big(\theta(x_k,t) - \theta_k^d(t)\Big)^2 dt + \frac{\epsilon}{2}\|\{\theta^0,\Phi\}\|^2 \tag{B.7}$$

où $\|\cdot\|$ désigne la norme de l'espace dans lequel on recherche le couple $\{\theta^0,\Phi\}$. Le choix de cet espace a une influence déterminante sur les résultats, comme on le verra plus loin.

On cherchera donc à résoudre le problème

$$\begin{cases} \text{Trouver } \{\theta^{0*},\Phi^*\} \text{ tel que} \\ J(\{\theta^{0*},\Phi^*\}) = \min\limits_{\{\theta^0,\Phi\}} J(\{\theta^0,\Phi\}) \end{cases} \tag{B.8}$$

Il conduit inévitablement à une solution approchée, mais qui tend vers la solution idéale lorsque $\epsilon \to 0$. Par contre ce problème est mathématiquement bien posé, ce qui rend sa résolution numérique stable.

La minimisation de la fonctionnelle fait appel à des méthodes itératives telles que la méthode du gradient conjugué, dont la mise en œuvre ne sera pas expliquée ici.

Il existe d'autres méthodes de régularisation, comme celle de Morozov qui consiste à minimiser $\|\{\theta^0,\Phi\}\|^2$ sous une contrainte du type $\left|\theta - \theta^d\right| \leq \delta$ où δ représente une incertitude de mesure.

B.3 Minimisation dans L^2

Dans ce qui suit, on se place dans le cas unidimensionnel : $\Omega = [0,L]$. Donc $\partial\Omega = \{0,L\}$. On notera $x_1 = 0, \quad x_2 = L$. La fonction $\Phi(x,t)$, $x \in \partial\Omega, \quad t \in [0,T]$, peut alors s'écrire comme un couple de fonctions $\{\Phi_1(t),\Phi_2(t)\}$ sur $[0,T]$ où $\Phi_1(t) = \Phi(0,t)$ et $\Phi_2(t) = \Phi(L,t)$.

L'espace L^2 constitue un choix naturel pour la minimisation car il permet de développer la méthode de manière assez simple. On cherche donc les triplets $\{\theta^0,\Phi_1,\Phi_2\}$ de températures initiales et de flux imposés à la frontière dans l'espace $V = L^2(0,L) \times \big(L^2(0,T)\big)^2$, équipé du produit scalaire $(u,v)_V = \int_0^L u_0 v_0 dx + \sum_{i=1}^{2}\left\{\int_0^T u_i v_i dt+\right\}$ où $u = \{u_0,u_1,u_2\}$ et $\quad v = \{v_0,v_1,v_2\}$. On note $\|\cdot\|_V$ la norme correspondante, *i. e.* $\|v\|_V = \sqrt{(u,v)_V}$.

On considère alors le problème

$$\begin{cases} \text{Trouver } \{\theta^{0*},\Phi_1^*,\Phi_2^*\} \in V \text{ tel que} \\ J(\{\theta^{0*},\Phi_1^*,\Phi_2^*\}) = \min\limits_{\{\theta^0,\Phi_1,\Phi_2\}\in V} J(\{\theta^0,\Phi_1,\Phi_2\}) \end{cases} \tag{B.9}$$

où

$$
\begin{aligned}
J(\{\theta^0,\Phi_1,\Phi_2\}) &= \frac{1}{2}\int_0^T \sum_{k=1}^{M}\Big(\theta(x_k,t)-\theta_k^d(t)\Big)^2 dt \\
&+\frac{\epsilon}{2}\left[\int_\Omega \big(\theta^0(x)\big)^2 dx + \sum_{i=1}^{2}\left\{\int_0^T \big(\Phi_i(t)\big)^2 dt\right\}\right]
\end{aligned}
\tag{B.10}
$$

et où θ est solution du problème d'évolution

$$
\begin{cases}
\rho c\dfrac{\partial\theta}{\partial t} - \dfrac{\partial}{\partial x}(\mathbf{K}\dfrac{\partial\theta}{\partial x}) = 0 & \text{dans} \quad \Omega\times[0,T] \\
-(\mathbf{K}\frac{\partial\theta}{\partial x}(x_1,t)) + \alpha\theta(x_1,t) = \Phi_1(t) & \text{sur} \quad [0,T] \\
(\mathbf{K}\frac{\partial\theta}{\partial x}(x_2,t)) + \alpha\theta(x_2,t) = \Phi_2(t) & \text{sur} \quad [0,T] \\
\theta(x,0) = \theta^0(x) & \text{dans} \quad \Omega
\end{cases}
\tag{B.11}
$$

Ce problème quadratique est bien posé car la fonctionnelle J est α-convexe et différentiable. En effet, il suffit de vérifier la dépendance continue de la solution θ par rapport aux données. Il est classique que, lorsque $\{\theta^0,\Phi_1,\Phi_2\}\in V$, alors la solution θ de l'équation (B.11) vérifie $\theta\in L^2\left(0,T;H^1(0,L)\right)$ et donc $\theta(x_k,t)\in L^2(0,T)$ avec dépendance continue par rapport aux données.

B.3.1 La méthode de l'état adjoint

On suit ici la méthode très classique Lions (1968) dont la mise en œuvre ne pose aucune difficulté particulière. On en rappelle les étapes afin que le lecteur puisse éventuellement reproduire les calculs.

Les méthodes de descente nécessitent le calcul du gradient de la fonctionnelle. L'état adjoint, solution d'une équation de la chaleur auxiliaire, donne immédiatement accès au gradient.

On pose $D = J(\{\theta^0+\delta\theta^0,\Phi_1+\delta\Phi_1,\Phi_2+\delta\Phi_2\}) - J(\{\theta^0,\Phi\})$. De la définition de la fonctionnelle, il s'ensuit que

$$
\begin{aligned}
D &= \int_0^T \sum_{k=1}^{M}\Big(\theta(x_k,t)-\theta_k^d(t)\Big)\delta\theta(x_k,t)dt \\
&+\epsilon\left[\int_0^L \theta^0\delta\theta^0 dx + \sum_{i=1}^{2}\left\{\int_0^T \Phi_i\delta\Phi_i dt\right\}\right] + \mathcal{O}\Big\|\{\delta\theta^0,\delta\Phi_1,\delta\Phi_2\}\Big\|_V^2
\end{aligned}
\tag{B.12}
$$

où $\delta\theta$ vérifie le système tangent :

$$
\begin{cases}
\rho c\dfrac{\partial\delta\theta}{\partial t} - \dfrac{\partial}{\partial x}(\mathbf{K}\dfrac{\partial\delta\theta}{\partial x}) = 0 & \text{dans} \quad \Omega\times[0,T] \\
-(\mathbf{K}\frac{\partial\delta\theta}{\partial x}(x_1,t)) + \alpha\delta\theta(x_1,t) = \delta\Phi_1 & \text{sur} \quad [0,T] \\
(\mathbf{K}\frac{\partial\delta\theta}{\partial x}(x_2,t)) + \alpha\delta\theta(x_2,t) = \delta\Phi_2 & \text{sur} \quad [0,T] \\
\delta\theta(x,0) = \delta\theta^0(x) & \text{dans} \quad \Omega
\end{cases}
\tag{B.13}
$$

On pose $L = \int_0^T \sum_{k=1}^{M} \Big(\theta(x_k,t) - \theta_k^d(t)\Big)\, \delta\theta(x_k,t)dt$. Pour obtenir une expression du gradient, il est nécessaire d'écrire la différence D comme une forme linéaire continue des arguments $\{\delta\theta^0, \delta\Phi_1, \delta\Phi_2\}$. Grâce à B.12, il suffit en fait d'écrire L de cette façon. Pour cela, on a recours à la théorie du contrôle optimal, et on introduit l'état adjoint $p(x,t)$ du système, donné par l'équation :

$$\begin{cases} -\rho c\dfrac{\partial p}{\partial t} - \dfrac{\partial}{\partial x}(\mathbf{K}\dfrac{\partial p}{\partial x}) = \displaystyle\sum_{k=1}^{M} \Big(\theta(x_k,t) - \theta_k^d(t)\Big)\, \delta_{x_k} & \text{dans} \quad \Omega \times [0,T] \\ -(\mathbf{K}\frac{\partial p}{\partial x}(x_1,t)) + \alpha p(x_1,t) = 0 & \text{sur} \quad [0,T] \\ (\mathbf{K}\frac{\partial p}{\partial x}(x_2,t)) + \alpha p(x_2,t) = 0 & \text{sur} \quad [0,T] \\ p(x,T) = 0 & \text{dans} \quad \Omega \end{cases} \tag{B.14}$$

dont une formulation faible en espace s'écrit :

$$\begin{cases} \forall w \in V \qquad -\displaystyle\int_0^L \rho c\frac{\partial p}{\partial t} w dx + \int_0^L \mathbf{K}\frac{\partial p}{\partial x}\frac{\partial w}{\partial x}dx + \\ \displaystyle\sum_{i=1,2} \{\alpha p(x_i,t) w(x_i,t)\} = \sum_{k=1}^{M} \Big(\theta(x_k,t) - \theta_k^d(t)\Big) w(x_k,t) \\ p(x,T) = 0 \end{cases} \tag{B.15}$$

Dans (B.15), à chaque instant t on choisit $w = \delta\theta$. Après intégration en temps sur $[0,T]$ et une intégration par parties du premier terme, on obtient

$$\begin{aligned} \int_{[0,L]\times[0,T]} \rho cp\frac{\partial \delta\theta}{\partial t}dxdt + \int_0^L \rho cp(x,0)\delta\theta(x,0)dx + \int_{[0,L]\times[0,T]} \mathbf{K}\frac{\partial p}{\partial x}\frac{\partial \delta\theta}{\partial x}dxdt \\ + \sum_{i=1}^{2} \left\{ \int_0^T \alpha p \delta\theta(x_i,t)dt \right\} = \int_0^T \sum_{k=1}^{M} (\theta(x_k,t) - \theta_k^d(t))\delta\theta(x_k,t)dt \end{aligned} \tag{B.16}$$

L'équation de la chaleur tangente peut s'écrire en formulation faible

$$\begin{cases} \displaystyle\int_0^L \rho c\frac{\partial \delta\theta}{\partial t} v dx + \int_0^L \mathbf{K}\frac{\partial \delta\theta}{\partial x}\frac{\partial v}{\partial x}dx + \sum_{i=1,2} \delta\theta(x_i,t)v(x_i,t) \\ \qquad = \displaystyle\sum_{i=1,2} \alpha\delta\Phi_i(t)v(x_i,t) \quad \forall v \in V \\ \delta\theta(x,0) = \delta\theta^0(x) \end{cases} \tag{B.17}$$

Dans (**??**), à chaque instant t on choisit $v = p$, puis on intègre en temps. On obtient

$$\int_{[0,L]\times[0,T]} \rho c \frac{\partial \delta\theta}{\partial t} p dx dt + \int_{[0,L]\times[0,T]} \mathbf{K} \frac{\partial \delta\theta}{\partial x} \frac{\partial p}{\partial x} dx dt + \sum_{i=1,2} \left\{ \int_0^T \alpha \delta\theta(x_i,t) p(x_i,t) dt \right\} = \sum_{i=1,2} \left\{ \int_0^T \delta\Phi_i(t) p(x_i,t) dt \right\} \tag{B.18}$$

En combinant les deux équations et en tenant compte du fait que $\delta\theta(x,0) = \delta\theta^0(x)$, on obtient

$$L = \int_0^L \rho c p(x,0) \delta\theta^0(x) dx + \sum_{i=1,2} \left\{ \int_0^T p(x_i,t) \delta\Phi_i(t) dt \right\} \tag{B.19}$$

$L(\{\delta\theta^0, \delta\Phi_1, \delta\Phi_2\})$ est une forme *linéaire* et *continue* de $\{\delta\theta^0, \delta\Phi_1, \delta\Phi_2\}$ dans V. On en déduit par identification que le gradient de J peut être écrit en fonction de θ^0, de $\{\Phi_1, \Phi_2\}$ et de l'état adjoint p :

$$\nabla J(\{\theta^0, \Phi_1, \Phi_2\}) = \{\rho c\, p(x,0) + \epsilon\theta^0, p(x_1,t) + \epsilon\Phi_1(t), p(x_2,t) + \epsilon\Phi_2(t)\} \tag{B.20}$$

B.3.2 Résultats

On considère une poutre de longueur $L = 1$. Pour fixer les idées, on normalise tous les paramètres physiques à l'unité : $K(x) = 1$, $\rho = 1$, $c = 1$, $\alpha = 1$. Par ailleurs, on choisit $T = 0.5$ et on discrétise par des éléments finis P1-Lagrange en espace (30 éléments) et par un schéma d'Euler rétrograde en temps (500 pas de temps). On mesure la température en trois capteurs équirépartis sur l'intervalle $\Omega = [0, L]$. On arrête l'algorithme de gradient conjugué lorsque l'écart entre les mesures et la température reconstruite aux points de mesure passe sous le seuil de 10^{-6}, c'est-à-dire après environ 20 itérations.

Les mesures aux capteurs $\theta_k^d(t)$ correspondent à des données de synthèse issues de la résolution de l'équation de la chaleur (B.4). La température initiale et le flux imposé à la frontière sont décrits sur la figure B.1. Tester un algorithme inverse sur des données de synthèse, donc atteignables, s'appelle parfois un crime inverse, traduction de *inverse crime*. Il s'agit d'une première étape de validation de l'algorithme, la stabilité devant faire l'objet de tests avec des données bruitées. Il se trouve que l'algorithme proposé présente de bonnes propriétés de stabilité par rapport aux erreurs de mesure, mais, dans un souci de concision, on omettra ici de développer cet aspect.

Quoique l'algorithme ait effectivement trouvé une température initiale et un flux tels que la température calculée coïncide presque exactement avec les mesures de synthèse (fig B.2), les premiers résultats mettent en évidence les limites pratiques de cette approche. En effet, par construction de l'algorithme, comme

$$p_n(x,T) \;=\; 0\;, \quad \forall x, \quad \forall n \in \mathbb{Z},$$

les valeurs de flux au temps final $t = T$ ne varient pas au cours des itérations (fig B.4). Dans le résultat final, même après convergence, ces valeurs seront égales à celles données lors de l'initialisation de l'algorithme, c'est à dire

$$\Phi_n(x,T) = \Phi_0(x,T) \quad \forall x, \quad \forall n \in \mathbb{Z}$$

Par conséquent, la solution sur Φ est dégradée au voisinage de l'instant final ($t \to T$) (fig B.3). Ceci entraîne (fig B.3) la dégradation partielle de la solution $\theta(x,T)$, qui est pourtant celle que l'on recherche.

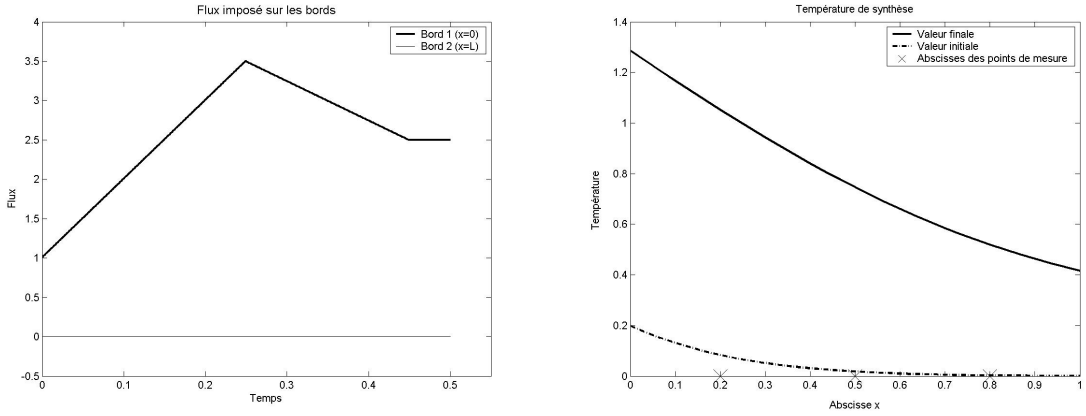


FIG. B.1 – Evolution du flux imposé sur la frontière (à gauche), température initiale et finale (au milieu) et température aux trois capteurs (à droite)

Cette difficulté est répertoriée dans la littérature Alifanov (1994) mais on ne connaît pas de traitement systématique débouchant sur des algorithmes ne nécessitant pas d'intervention manuelle. L'objet du paragraphe suivant est de proposer une stratégie de régularisation des fonctions inconnues $\theta^0(x)$ et $\Phi(x,t)$ qui **libère la valeur finale de l'état adjoint**. A cette fin, on quitte le cadre L^2.

B.4 Reconstruction dans H^1

B.4.1 Position du problème

On rappelle que $\Omega = [0, L]$. La frontière $\partial\Omega = \{0, L\}$ du domaine n'est ainsi constituée que des deux points $x_1 = 0$ et $x_2 = L$. Comme précédemment, la fonction $\Phi(x,t)$, $x \in \partial\Omega, \quad t \in [0,T]$, peut s'écrire comme un couple de fonctions $\{\Phi_1(t), \Phi_2(t)\}$ sur $[0,T]$ où $\Phi_1(t) = \Phi(0,t)$ et $\Phi_2(t) = \Phi(L,t)$. L'idée est de rechercher le triplet $\{\theta^0, \Phi_1, \Phi_2\}$ dans l'espace $W = H^1(\Omega) \times \left(H^1(0,T)\right)^2$. Ceci aura pour effet de fournir des solutions présentant plus de régularité, notamment près des bords. Comme on le verra par la suite, l'algorithme ainsi construit présentera l'avantage de ne pas figer la valeur de $\Phi(x,T)$.

On équipe l'espace W du produit scalaire

$$\begin{aligned}\left(u,v\right)_W = \bar{\alpha}\int_0^L u_0 v_0 dx + \tilde{\alpha}\int_0^L \frac{du_0}{dx}\frac{dv_0}{dx}dx + \\ \sum_{i=1}^{2}\left\{\bar{\beta}\int_0^T u_i v_i dt + \tilde{\beta}\int_0^T \frac{du_i}{dt}\frac{dv_i}{dt}dt\right\}\end{aligned} \tag{B.21}$$

où $u = \{u_0, u_1, u_2\} \in W, \quad v = \{v_0, v_1, v_2\}$ et où $\bar{\alpha}, \tilde{\alpha}, \bar{\beta}, \tilde{\beta} \in \mathbb{R}^+$ désignent des constantes positives ajustables.

On note $\left\|\{\theta^0, \Phi_1, \Phi_2\}\right\|_W = \sqrt{\left(\{\theta^0, \Phi_1, \Phi_2\}, \{\theta^0, \Phi_1, \Phi_2\}\right)_W}$

On considère le nouveau problème

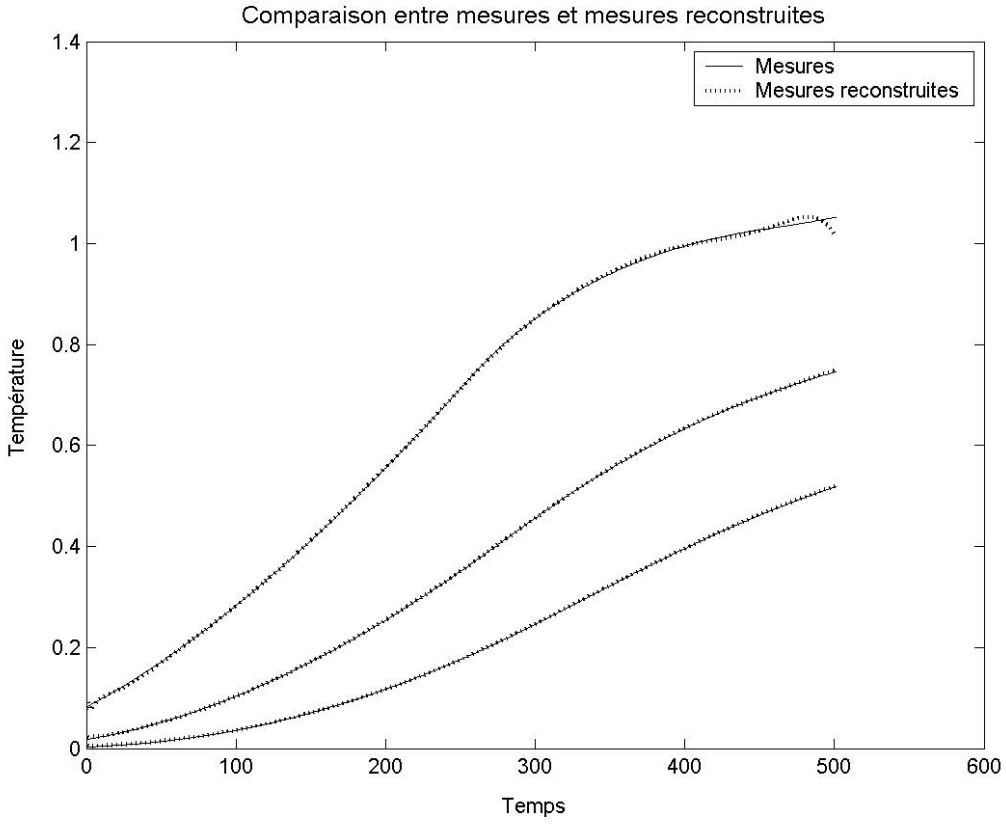


FIG. B.2 – fonctionnelle L^2 : Température cible et température reconstruite au niveau des capteurs

$$\left\{ \begin{array}{c} \text{Trouver } \{\theta^{0*}, \Phi_1^*, \Phi_2^*\} \in W \text{ tel que} \\ J(\{\theta^{0*}, \Phi_1^*, \Phi_2^*\}) = \min\limits_{\{\theta^0, \Phi_1, \Phi_2\} \in W} J(\{\theta^0, \Phi_1, \Phi_2\}) \end{array} \right. \tag{B.22}$$

où

$$J(\{\theta^0, \Phi_1, \Phi_2\}) = \frac{1}{2} \int_0^T \sum_{k=1}^{M} \Big(\theta(x_k, t) - \theta_k^d(t)\Big)^2 dt + \frac{\epsilon}{2} \Big\| \{\theta^0, \Phi_1, \Phi_2\} \Big\|_W^2 \tag{B.23}$$

et où θ est encore solution de l'équation (B.11).

B.4.2 Calcul du gradient

La fonctionnelle à minimiser s'écrit

$$\begin{array}{l} J(\{\theta^0, \Phi_1, \Phi_2\}) = \frac{1}{2} \int_0^T \sum_{k=1}^{M} (\theta(x_k, t) - \theta_k^d(t))^2 dt + \frac{\epsilon}{2} \Bigg[\bar{\alpha} \int_0^L \big(\theta^0(x)\big)^2 dx \\ + \tilde{\alpha} \int_0^L \big(\frac{\partial \theta^0(x)}{\partial x}\big)^2 dx + \sum\limits_{i=1,2} \Big(\bar{\beta} \int_0^T \big(\Phi_i(t)\big)^2 d\gamma dt + \tilde{\beta} \int_0^T \big(\frac{\partial \Phi_i(t)}{\partial t}\big)^2 dt \Big) \Bigg] \end{array} \tag{B.24}$$

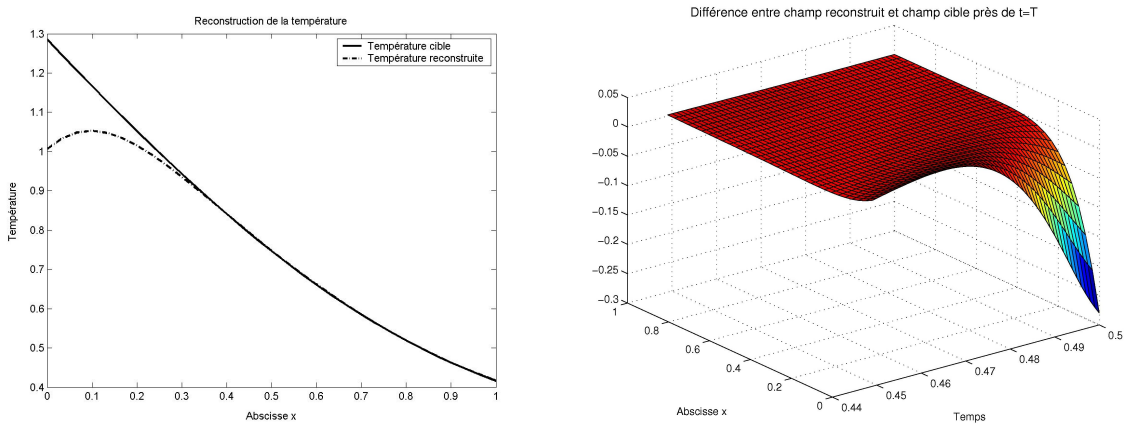


FIG. B.3 – fonctionnelle L^2 : écart entre la température cible et la température reconstruite à l'instant final (à gauche), et à tout instant (à droite)

et l'équation de la chaleur sous forme variationnelle s'écrit :

$$\left\{\begin{array}{l} \forall v \in W \qquad \displaystyle\int_0^L\int_0^T \rho c\frac{\partial\theta}{\partial t}v dxdt + \int_0^L\int_0^T K\frac{\partial\theta}{\partial x}\frac{\partial v}{\partial x}dxdt \\ \displaystyle + \sum_{i=1,2}\int_0^T \alpha\theta(x_i,t)v(x_i,t)dt = \sum_{i=1,2}\int_0^T \Phi_i(t)v(x_i,t)dt \\ \theta(x,0) = \theta^0(x) \end{array}\right. \tag{B.25}$$

où $(x_1 = 0,\, x_2 = L)$.

Le calcul du gradient de la fonctionnelle nécessite l'introduction, comme plus haut, de l'équation adjointe à l'équation de la chaleur qui s'écrit, sous une forme variationnelle,

$$\left\{\begin{array}{l} \forall w \in W \qquad -\displaystyle\int_0^L\int_0^T \rho c\frac{\partial p}{\partial t}w dxdt + \int_0^L\int_0^T K\frac{\partial p}{\partial x}\frac{\partial w}{\partial x}dxdt + \\ \displaystyle\sum_{i=1,2}\int_0^T \alpha p(x_i,t)w(x_i,t)dt = \int_0^T\sum_{k=1}^M \Big(\theta(x_k,t) - \theta_k^d(t)\Big)w(x_k,t)dxdt \\ p(x,T) = 0 \end{array}\right. \tag{B.26}$$

On pose $D = J(\{\theta^0+\delta\theta^0, \Phi_1+\delta\Phi_1, \Phi_2+\delta\Phi_2\}) - J(\{\theta^0, \Phi_1, \Phi_2\})$. Les mêmes étapes de calcul conduisent à une expression de D en fonction de $p(x,t)$:

$$\begin{array}{l} D = \displaystyle\int_0^L p(x,0)\delta\theta^0(x)\,dx + \sum_{i=1,2}\int_0^T p(x_i,t)\delta\Phi_i(t)dt \\ +\epsilon\big(\{\theta^0,\Phi_1,\Phi_2\},\{\delta\theta^0,\delta\Phi_1,\delta\Phi_2\}\big)_W + \mathcal{O}\Big\|\{\delta\theta^0,\delta\Phi_1,\delta\Phi_2\}\Big\|_W^2 \end{array} \tag{B.27}$$

où $x_1 = 0$, $x_2 = L$. Mais pour déterminer le gradient de J on cherche un triplet $Q = \{P, Q_1, Q_2\}$ tel qu'on puisse écrire D sous la forme

$$D = \Big(\{P,Q_1,Q_2\},\{\delta\theta^0,\delta\Phi_1,\delta\Phi_2\}\Big)_W + \mathcal{O}\Big\|\{\delta\theta^0,\delta\Phi_1,\delta\Phi_2\}\Big\|_W^2 \tag{B.28}$$

La recherche de $Q = \{P, Q_1, Q_2\}$ consiste alors à résoudre trois problèmes indépendants.

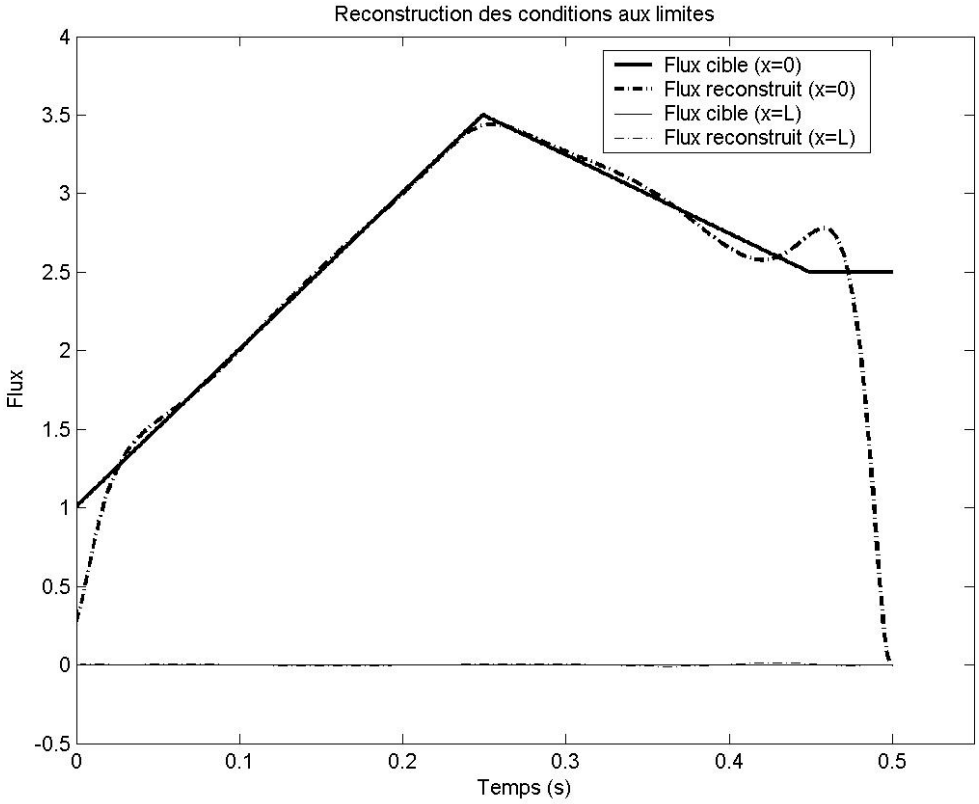


FIG. B.4 – fonctionnelle L^2 : écart entre le flux imposé et reconstruit

Tout d'abord, on résout, par approximation de Galerkin par exemple, l'équation variationnelle

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Trouver} \quad P \in H^1(0,L) \quad \text{tel que} \\ \displaystyle\int_0^L p(.,0)w = \tilde{\alpha} \int_0^L Pw + \bar{\alpha} \int_0^L \frac{dP}{dx}\frac{dw}{dx} \quad \forall w \in H^1(0,L) \end{array} \right. \tag{B.29}$$

La solution existe car $p \in L^2\left(0,T; H^1(0,L) \bigcap (C)^0(0,T; L^2(0,L)\right)$. On peut donc définir $p(x,0) \in L^2(0,L)$.

Cette équation s'écrit aussi sous la forme classique

$$\left\{ \begin{array}{l} \displaystyle -\bar{\alpha}\frac{d^2P}{dx^2} + \tilde{\alpha}P = p(.,0) \quad \text{sur} \quad [0,L] \\ \displaystyle \frac{dP}{dx}(0) = \frac{dP}{dx}(L) = 0 \end{array} \right. \tag{B.30}$$

La détermination de Q_1 et Q_2 se fait de manière analogue. Le problème à résoudre est, pour $i = 1, 2$, $x_1 = 0$, $x_2 = L$:

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Trouver} \quad Q_i \in H^1(0,T) \quad \text{tel que} \\ \displaystyle\int_0^T p(x_i,.)w = \tilde{\beta} \int_0^T Q_i w + \bar{\beta} \int_0^T \frac{dQ_i}{dt}\frac{dw}{dt} \quad \forall w \in H^1(0,T) \end{array} \right. \tag{B.31}$$

Ce problème est analogue au problème précédent, à la différence près qu'il est posé sur $[0,T]$. La régularité de l'état adjoint p suffit à établir l'existence d'une solution unique, que l'on peut calculer par la méthode des éléments finis.

Remarquer que le problème aux limites correspondant s'écrit

$$\left\{\begin{array}{l} -\bar{\beta}\dfrac{d^2Q_i}{dt^2} + \tilde{\beta}Q_i = p(x_i,t) \quad \text{sur} \quad [0,T] \\ \dfrac{dQ_i}{dt}(0) = \dfrac{dQ_i}{dt}(T) = 0 \end{array}\right. \tag{B.32}$$

On voit donc que le flux régularisé Q_i dépend de toutes les valeurs de $p(x_i,t)$ et ne s'annule pas systématiquement à l'instant $t=T$.

Ainsi, le gradient de $J(\{\theta^0,\Phi_1,\Phi_2\})$ s'écrit :

$$\nabla J(\{\theta^0,\Phi_1,\Phi_2\}) = \Big\{P(x)+\epsilon\theta^0, Q_1(t)+\epsilon\Phi_1, Q_2(t)+\epsilon\Phi_2\Big\} \tag{B.33}$$

D'après la remarque précédente, le flux à l'instant final $\Phi(x,T)$ ne reste pas constant au fil des itérations.

Par ailleurs, ni la fonctionnelle (B.23) à minimiser ni l'espace sur lequel on minimise n'impose de condition de compatibilité entre le flux $\Phi_i(x,0)$ et celui associé à la température initiale, soit $\mp K\frac{d\theta^0}{dx}(x_i)+\alpha\theta^0(x_i)$, $i=1,2$. Bien que cette dernière quantité n'ait pas de sens lorsque $\theta^0 \in H^1(0,L)$, on peut imposer cette compatibilité de façon approchée par projection sur quelques modes thermiques et pénalisation. On ne détaillera pas ici l'analyse correspondante.

B.4.3 Résultats

On étudie la même situation qu'au paragraphe B.3. Malgré l'absence de compatibilité à l'instant initial, la température finale (fig B.5) est reconstruite de façon beaucoup plus précise avec la nouvelle fonctionnelle (B.23) qu'avec celle utilisée au paragraphe B.3. On note que la température reconstruite se superpose presqu'exactement à la température cible. L'imprécision sur l'un des flux à l'instant initial se trouve gommée par le caractère régularisant de l'équation de la chaleur. Elle compense par ailleurs l'imprécision sur la température initiale au voisinage du bord.

Dans le cas où les données de synthèse se trouvent remplacées par des données bruitées, on constate une très bonne stabilité de l'algorithme. Par souci de concision, on ne présente pas ici cette étape importante de la validation.

B.5 Conclusions

Le cadre H^1 pour minimiser la fonctionnelle d'erreur permet une bien meilleure reconstruction de la température finale que le cadre L^2. La méthode proposée s'étend presque naturellement au cas multidimensionnel.

Par ailleurs, le recouvrement partiel des intervalles de temps de reconstruction successifs ainsi que la sauvegarde des directions de descente en vue d'une prise en compte ultérieure devraient accélérer nettement la reconstuction au fil du temps.

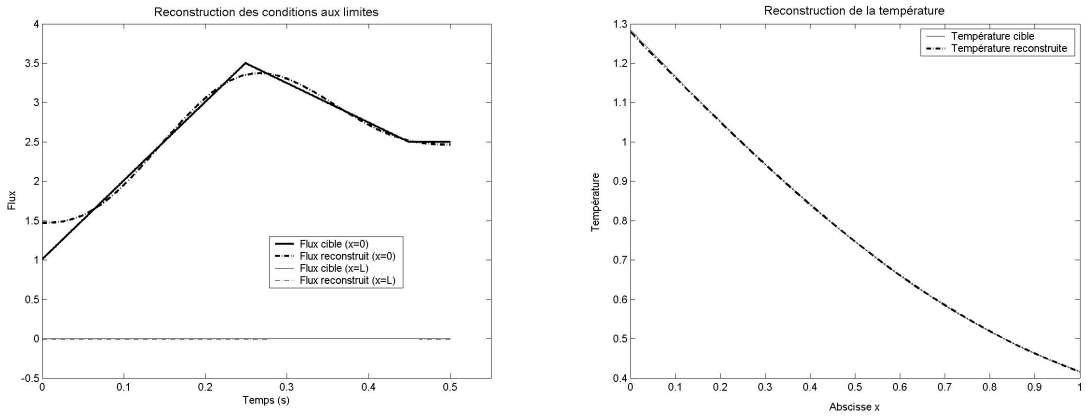


FIG. B.5 – Reconstruction dans H^1 : flux (à gauche) et température finale (à droite). Les grandeurs cibles et les grandeurs reconstruites sont quasiment superposées

Enfin, une projection sur base réduite pourrait s'avérer très utile pour traiter les structures tridimensionnelles.

La reconstruction des précontraintes d'origine thermique ne constitue qu'un post-traitement de type thermo-élastique. Il est alors essentiel de bien connaître les vraies conditions aux limites qui évoluent également avec la température. La prise en compte de la température réelle et des sensibilités des modes à la température fait l'objet d'une recherche active.

Annexe C

A step towards model-based Temperature Elimination in Structural Health Monitoring[1]

F. Bourquin, A. Nassiopoulos

C.1 Introduction

Various methods for damage detection and structural health monitoring exist. Among them, Ambient Vibration Monitoring (AVM) consists in identifying the low frequency spectrum of a given structure in order to detect modifications with respect to the non-damaged reference state (Basseville *et al.* , 2000; Wenzel & Pichler, 2005). However, in civil engineering, thermal loading due to environmental factors induces mechanical stresses on structures and can cause eigenfrequency shifts of much larger order of magnitude than those caused by structural damage (Farrar *et al.* , 2003). Thus, the exact knowledge of the thermal state in a given structure and its effects on vibrational properties is a crucial building block of a global Structural Health Monitoring approach.

A step towards this direction consists in developping a method for the reconstruction of the thermal field based on several sensor outputs. As a matter of fact, the most commonly used temperature sensors can only provide local or pointwise measurements. In addition, some parts of a structure can simply be inaccessible to direct measurements. This is the case in civil engineering structures, although the number of sensors that equip modern ones is rapidly increasing (Wong, 2004). The thermal state at any point of a given structure can only be obtained through a suitable reconstruction procedure. Among possible methods, one will eliminate Kalman filtering techniques in continuous time which would lead to the solution of Riccati equations of large dimension, and that seems inappropriate without preliminary reduction.

This paper deals with the inverse problem of temperature identification based on pointwise measurements. Such inverse problems are in general mathematically ill-posed and regularization techniques are needed to solve them. They have been studied extensively in literature during the last few decades together with many techniques for their numerical computation (Engl *et al.* , 1994). Inverse problems concerning heat conduction have been the topic of numerous works due to the wide range of applications that are concerned (Beck *et al.* , 1996; Jarny *et al.* , 1991). A review of literature can be found in Alifanov (1994), Beck *et al.* (1985) and Özisik & Orlande (2000).

[1]Proceedings of the *4th IASC World Conference on Structural Control and Monitoring*, San Diego (CA), **2006**.

The approach is that of optimal control theory (Lions, 1968). The problem is written in a least-squares setting. The adjoint technique (Jarny *et al.* , 1991; Huang & Wang, 1999) is used to determine the gradient of an error functional together with Tikhonov regularization (Engl *et al.* , 1994). When standard gradient-based algorithms are put to work, each computational step entails solving the same forward heat equation with changing data. The regularized least-squares performance index is minimized here over a space of smooth enough initial temperatures and boundary fluxes. It is proved numerically that this choice eliminates a known difficulty of the adjoint method close to the final time. Moreover, the proposed framework yields a both accurate and stable final temperature. The paper presents the method in a one-dimensional setting for the sake of simplicity. But the proposed algorithm proves nevertheless truely multidimensional and compatible with any standard finite element software.

C.2 Problem statement

Consider a solid in a multidimensional domain Ω with boundary $\partial\Omega$. Assuming absence of internal heat sources and an initial state denoted by $\theta^0(x)$, the temperature field inside the solid is given by the heat equation :

$$\left\{\begin{array}{lll} \rho c\dfrac{\partial\theta}{\partial t} - div(\mathbf{K}\, grad\,\theta) = 0 & \text{in} & \Omega\times[0,T] \\ (\mathbf{K}\, grad\,\theta)\cdot\vec{n} + \alpha\theta = \Phi & \text{on} & \partial\Omega\times[0,T] \\ \theta(x,0) = \theta^0(x) & \text{in} & \Omega \end{array}\right. \tag{C.1}$$

Here, $\Phi(x,t) = g(x,t) + \alpha\theta_{ext}$ where g denotes an inward heat flux when Fourier-Robin conditions are considered and θ_{ext} is the external temperature, $\vec{n}$ is the outwards normal vector on the boundary, $x\in\Omega$ is the space variable, $t\in[0,T]$ the time variable, ρ the mass density, c the heat capacity and $\mathbf{K}$ the conductivity tensor of the material.

Assume that m sensors are available inside the structure at locations x_k, $k = 1..m$. They deliver the data $\{\theta_k^d(t)\}_{k=1}^m, t\in[0,T]$. Based on these measurements, the aim is to reconstruct the temperature field over the time interval $[0,T]$, focusing on the accuracy of the reconstruction at the final time T. One way to achieve this is to try to determine the couple $\{\theta^0,\Phi\}$ of initial and boundary conditions responsible for the measurements.

The problem can be formulated in a least-squares framework. In this approach, an iterative procedure will be put to work to minimize the difference between the given measurements $\{\theta_k^d(t)\}_{k=1}^m$ and the value at sensor locations of a reconstructed field. The inverse problem being by itself mathematically ill-posed in the sense of Hadamard, some regularization technique is needed in order to guarantee numerical stability of the computational procedure even with noisy input data. The problem thus consists in minimizing a functional of the form

$$J(\{\theta^0,\Phi\}) \;=\; \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{m}\int_0^T \Big(\theta(x_k,t) - \theta_k^d(t)\Big)^2\,dt + \frac{\epsilon}{2}\|\{\theta^0,\Phi\}\|_X^2 \tag{C.2}$$

Here, the last term in (C.2) stands for the so-called Tikhonov regularization, ϵ being a small regularizing coefficient that provides extra convexity to the functional J.

We consider here that $\{\theta^0, \Phi\} \in X$, X being a functional space that guarantees existence of a sufficiently smooth solution to (C.1). $\|\cdot\|_X^2$ denotes a suitable norm for X. The pair $\{\theta^0, \Phi\}$ is referred to as the control variable and X as the control space. It will be seen that the choice of X has a crucial influence on the results. In what follows, two different choices will be presented to illustrate this.

C.3 Minimization in L^2

Hereafter, a one-dimensional domain $\Omega = [0, L]$ is considered for the sake of simplicity. It follows that $\partial\Omega = \{0, L\}$, and the following notations will be used : $x_1 = 0, \quad x_2 = L$. The control variable $\{\theta^0, \Phi\}$ reduces to a set of three functions $\{\theta^0(x), \Phi_1(t), \Phi_2(t)\}$ on $[0, L] \times [0, T]^2$, with $\Phi_1(t) = \Phi(0, t)$ and $\Phi_2(t) = \Phi(L, t)$.

A natural choice is to seek for $\{\theta^0(x), \Phi_1(t), \Phi_2(t)\}$ within a space of L^2 functions. Consider the space $U = L^2(\Omega) \times \Big(L^2(0,T)\Big)^2$, with the scalar product $(u, v)_U = \displaystyle\int_0^L u_0 v_0 dx + \sum_{i=1}^{2} \left\{ \int_0^T u_i v_i dt \right\}$ where $u = \{u_0, u_1, u_2\},\ v = \{v_0, v_1, v_2\} \in U$ and set $X = U$. The corresponding norm will be denoted $\|v\|_U = \sqrt{(u, v)_U}$.

Under these notations, the problem to consider is to find $\{\theta^0(x), \Phi_1(t), \Phi_2(t)\} \in U$ such that

$$J(\{\theta^0, \Phi_1, \Phi_2\}) = \min_{\{\theta^{0*}, \Phi_1^*, \Phi_2^*\} \in U} J(\{\theta^{0*}, \Phi_1^*, \Phi_2^*\}) \tag{C.3}$$

where

$$J(\{\theta^0, \Phi_1, \Phi_2\}) = \frac{1}{2} \int_0^T \sum_{k=1}^{m} \Big(\theta(x_k, t) - \theta_k^d(t)\Big)^2 dt + \frac{\epsilon}{2} \left[\int_0^L \big(\theta^0(x)\big)^2 dx + \sum_{i=1}^{2} \left\{ \int_0^T \big(\Phi_i(t)\big)^2 dt \right\} \right] \tag{C.4}$$

and θ is solution of

$$\begin{cases} \rho c \dfrac{\partial \theta}{\partial t} - \dfrac{\partial}{\partial x}(\mathbf{K} \dfrac{\partial \theta}{\partial x}) = 0 & \text{in} \quad [0, L] \times [0, T] \\ -\mathbf{K} \dfrac{\partial \theta}{\partial x}(x_1, t) + \alpha \theta(x_1, t) = \Phi_1(t) & \text{on} \quad [0, T] \\ \mathbf{K} \dfrac{\partial \theta}{\partial x}(x_2, t) + \alpha \theta(x_2, t) = \Phi_2(t) & \text{on} \quad [0, T] \\ \theta(x, 0) = \theta^0(x) & \text{in} \quad [0, L] \end{cases} \tag{C.5}$$

If $\{\theta^0(x), \Phi_1(t), \Phi_2(t)\} \in U$, then a solution $\theta \in L^2\big(0, T; H^1(0, L)\big)$ of (C.5) exists.

C.3.1 The adjoint state method

A descent method such as the conjugate gradient algorithm can be used to minimize J. To this end, the gradient of the functional has to be derived, and this is done using the so-called adjoint state method well-known in the control theory of PDEs.

As usual, we introduce the adjoint state p that verifies

$$\begin{cases} -\rho c\dfrac{\partial p}{\partial t} - \dfrac{\partial}{\partial x}(\mathbf{K}\dfrac{\partial p}{\partial x}) = \displaystyle\sum_{k=1}^{m}\Big(\theta(x_k,t)-\theta_k^d(t)\Big)\,\delta_{x_k} & \text{in} \quad [0,L]\times[0,T] \\ -\mathbf{K}\dfrac{\partial p}{\partial x}(x_1,t)+\alpha p(x_1,t)=0 & \text{on} \quad [0,T] \\ \mathbf{K}\dfrac{\partial p}{\partial x}(x_2,t)+\alpha p(x_2,t)=0 & \text{on} \quad [0,T] \\ p(x,T)=0 & \text{in} \quad [0,L] \end{cases} \tag{C.6}$$

This last expression can be written into variational form :

$$\begin{cases} -\displaystyle\int_0^L \rho c\frac{\partial p}{\partial t}w\,dx + \int_0^L \mathbf{K}\frac{\partial p}{\partial x}\frac{\partial w}{\partial x}dx + \sum_{i=1,2}\alpha p(x_i,t)w(x_i) = \\ \displaystyle\sum_{k=1}^{m}\Big(\theta(x_k,t)-\theta_k^d(t)\Big)w(x_k) \quad \forall w\in H^1(0,L) \\ p(x,T)=0 \end{cases} \tag{C.7}$$

It is a classical result that the gradient ∇J of J is directly given by the adjoint state p. Taking into account the regularization term, it writes :

$$\nabla J(\{\theta^0,\Phi_1,\Phi_2\}) = \{\rho c p(x,0)+\epsilon\theta^0(x),\ p(x_1,t)+\epsilon\Phi_1(t),\ p(x_2,t)+\epsilon\Phi_2(t)\} \tag{C.8}$$

In the descent algorithm, each iteration entails a computation of the direct heat equation and a computation of the adjoint state. After initializing the variables with an arbitrary value $\{\theta_0^0,\Phi_{1,0},\Phi_{2,0}\}$, the basic steps of the algorith are :

- Compute $\theta_n(x,t)$ solution of (C.5) with $\{\theta^0,\Phi_1,\Phi_2\}=\{\theta_n^0,\Phi_{1,n},\Phi_{2,n}\}$
- Compute $p(x,t)$ solution of (C.6) with $\theta(x_k,t)=\theta_n(x_k,t)$
- Determine the gradient $\nabla J_n(\{\theta_n^0,\Phi_{1,n},\Phi_{2,n}\}) = \{\rho c p_n(x,0)+\epsilon\theta_n^0(x),\ p_n(x_1,t)+\epsilon\Phi_{1,n}(t),\ p_n(x_2,t)+\epsilon\Phi_{2,n}(t)\}$
- Update variables.

For the gradient method for instance, the last step writes $\{\theta_{n+1}^0,\Phi_{1,n+1},\Phi_{2,n+1}\}=\{\theta_n^0,\Phi_{1n},\Phi_{2n}\}+\rho_n\nabla J_n$, where ρ_n denotes a small parameter computed in a way that it minimizes the functional in the search direction. Of course, conjugate gradient methods can be put to work as well as any other Krylov-based algorithm.

C.3.2 Results

The results on figures C.1 and C.2 show the disadvantages of the approach described so far. They concern a one-dimensional beam of length L to which a given flux is prescribed at each end. All material constants are set to 1. Some direct simulations with an arbitrary input flux give measurements on sensors located at $\frac{L}{5}$, $\frac{L}{2}$ and $\frac{4L}{5}$ respectively. These measurements are then used to simulate the reconstruction algorithm.

The model is discretized with P1 finite elements and an implicit Euler scheme is used for time integration. On figure C.1, the reconstructed flux (dotted line) is compared to the prescribed one (solid

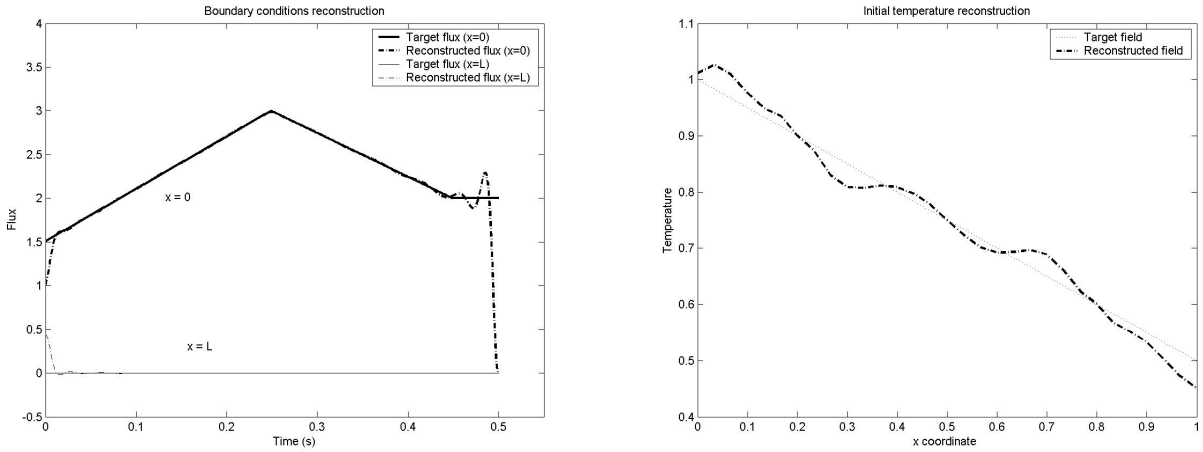


FIG. C.1 – Reconstruction in L^2 : $\mathbf{\Phi_1(t)}$ and $\mathbf{\Phi_2(t)}$ *(left)* and **initial temperature** reconstruction *(right)*

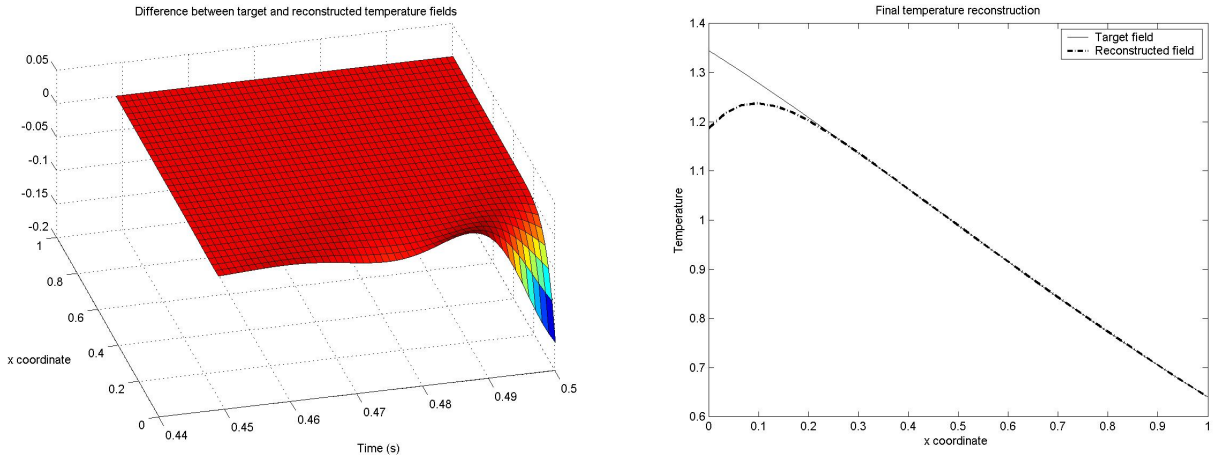


FIG. C.2 – Reconstruction in L^2 : **difference** between reconstructed and target fields near $t = T$ *(left)* and **final temperature** reconstruction *(right)*

line). The flux is well reconstructed on almost the entire time interval, but the accuracy of the results drops close to the final time : the curve exhibits some oscillations and moves away from the target curve to reach zero at $t = T$. As a consequence, the temperature field reconstruction is of acceptable accuracy far from $t = T$, while the reconstruction of $\theta(x, T)$, which is the most interesting output in view of applications, is very unsatisfactory (figure C.2). This phenomenon is due to the property assigned to the adjoint field p to be null at $t = T$ (equation (C.6)) and is well known in the literature Alifanov (1994); Huang & Wang (1999).

This final condition on $p(T) = 0$ in (C.6) has to be prescribed in order to verify relation (C.8). An alternative definition of the adjoint field can be considered, but this is enabled by a new choice of space X and associated scalar product. This is the topic of the next section.

C.4 Minimization in H^1

A change of framework for the minimization procedure overcomes this final time problem. It consists in choosing an H^1-type space instead of the L^2-type one.

Take $V = H^1(0,L) \times \left(H^1(0,T)\right)^2$ and set $X = V$. The space V can be equipped with the scalar product

$$\left(u,v\right)_V = \bar{\alpha}\int_0^L u_0 v_0\, dx + \tilde{\alpha}\int_0^L \frac{du_0}{dx}\frac{dv_0}{dx}\, dx + \sum_{i=1}^{2}\left\{\bar{\beta}\int_0^T u_i v_i dt + \tilde{\beta}\int_0^T \frac{du_i}{dt}\frac{dv_i}{dt}dt\right\} \tag{C.9}$$

where $u = \{u_0, u_1, u_2\}, v = \{v_0, v_1, v_2\} \in V$ and $\bar{\alpha}, \tilde{\alpha}, \bar{\beta}, \tilde{\beta}$are real positive tuning constants.

Under these assumptions, a solution $\theta(x,t)$ of (C.5) exists. The new problem to consider is to find $\{\theta^0, \Phi_1, \Phi_2\} \in V$ such that

$$J(\{\theta^0, \Phi_1, \Phi_2\}) = \min_{\{\theta^{0*}, \Phi_1^*, \Phi_2^*\} \in V} J(\{\theta^{0*}, \Phi_1^*, \Phi_2^*\}) \tag{C.10}$$

where

$$\begin{aligned} J(\{\theta^0, \Phi_1, \Phi_2\}) &= \frac{1}{2}\int_0^T \sum_{k=1}^{m}\left(\theta(x_k,t) - \theta_k^d(t)\right)^2 dt + \\ \frac{\epsilon}{2}&\left[\bar{\alpha}\int_0^L \left(\theta^0\right)^2 dx + \tilde{\alpha}\int_0^L \left(\frac{d\theta^0}{dx}\right)^2 dx + \sum_{i=1,2}\left\{\bar{\beta}\int_0^T \left(\Phi_i(t)\right)^2 d\gamma dt + \tilde{\beta}\int_0^T \left(\frac{d\Phi_i(t)}{dt}\right)^2 dt\right\}\right] \end{aligned} \tag{C.11}$$

and $\theta(x,t)$ still verifies (C.5).

In this context, the solution p of equation (C.6) is no more the adjoint state of equation (C.5). The new adjoint state that gives the gradient of J is now a set $Q = \{Q_0, Q_1, Q_2\}$ of functions resulting from the solution of three more independent problems.

First of all, one has to find, using Galerkin approximation for instance, a function $Q_0 \in H^1(0,L)$ such that

$$\int_0^L \rho c p(.,0) w\, dx = \bar{\alpha}\int_0^L Q_0 w\, dx + \tilde{\alpha}\int_0^L \frac{dQ_0}{dx}\frac{dw}{dx}\, dx \quad \forall w \in H^1(0,L) \tag{C.12}$$

The second step consists in finding two functions $Q_i \in H^1(0,T)$ such that :

$$\int_0^T p(x_i,.) w\, dt = \bar{\beta}\int_0^T Q_i w\, dt + \tilde{\beta}\int_0^T \frac{dQ_i}{dt}\frac{dw}{dt}\, dt \quad \forall w \in H^1(0,T) \tag{C.13}$$

for $i = 1, 2$ ($x_1 = 0$, $x_2 = L$). The regularity of the adjoint state p guarantees the existence of solutions to problems (C.12) and (C.13). These three problems have the same structure and can be easily implemented in a standard finite element software. After the computations, the gradient of J is given by

$$\nabla J(\{\theta^0, \Phi_1, \Phi_2\}) = \left\{Q_0(x) + \epsilon\theta^0(x), Q_1(t) + \epsilon\Phi_1(t), Q_2(t) + \epsilon\Phi_2(t)\right\} \tag{C.14}$$

Note that (C.13) is the variational form of the following problem :

$$\begin{cases} -\tilde{\beta}\dfrac{d^2Q_i}{dt^2} + \bar{\beta}Q_i = p(x_i,t) \quad \text{on} \quad [0,T] \\ \dfrac{dQ_i}{dt}(0) = \dfrac{dQ_i}{dt}(T) = 0 \end{cases} \tag{C.15}$$

This expression shows that the end condition on the new adjoint state $\{Q_0, Q_1, Q_2\}$ with respect to time is not a Dirichlet one anymore. As a consequence, the value of Φ_i at $t = T$ is not fixed and the accuracy of reconstruction near the final time is much better as can be seen on figure C.3 corresponding to the same case as previously. The curves of reconstructed and target final temperatures are almost identical.

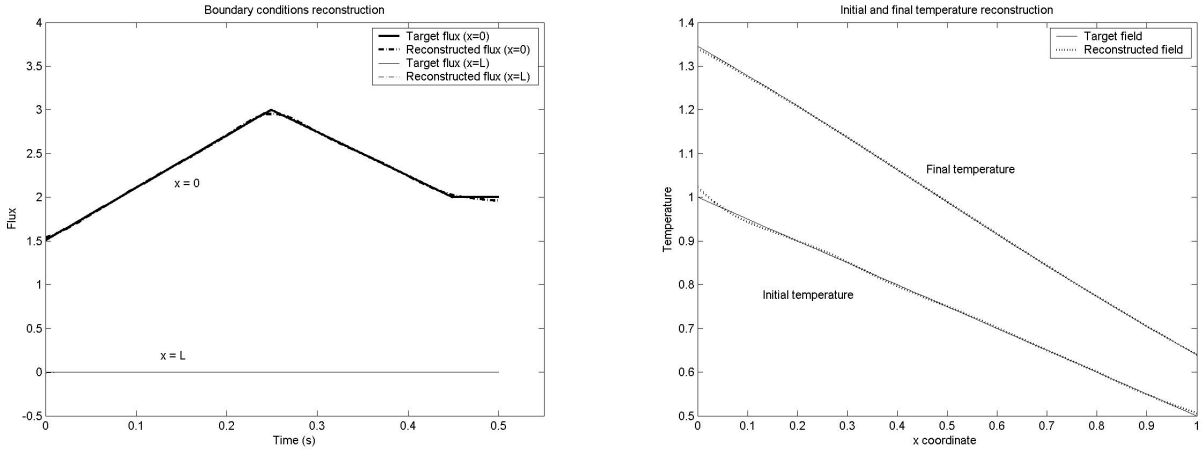


FIG. C.3 – Reconstruction in H^1 : $\mathbf{\Phi_1(t)}$ and $\mathbf{\Phi_2(t)}$ *(left)*; **intial** and **final** temperature reconstruction *(right)*

C.5 Towards temperature elimination in Ambient Vibration Monitoring

In the general case, temperature variations can be reasonably assumed to be slow compared to the dynamics of the structure. This means that temperature acts upon dynamics only through a predeformed and prestressed static state. This static state is computed at the current time under the thermal loading $\Theta(x) = \theta(x, T)$.

The relation between the thermal field and the stresses is given by the consitutive law of the material. Taking into account the boundary conditions, the general equations of elasticity lead to a static equilibrium state V_0 with some initial displacements $\mathbf{U_0}$ and some initial stresses $\mathbf{\Pi_0(U_0)}$. In order to compute the dynamics of this prestressed structure, one has to consider the dynamic equilibrium equations on a new configuration V_1 with displacements $\mathbf{U_1}$ and stresses $\mathbf{\Pi_1(U_1)}$. Many different models can be found in literature (Géradin & Rixen, 1994; Jirasek & Bažant, 2002).

Let us illustrate these steps with a simple one-dimensional example. Consider the simple case of a doubly-hinged Euler-Bernouilli beam of length L made of an isotropic material with St Venant-Kirchhoff constituve law, vibrating on the (x, z) plane and subjected to a thermal field $\Theta = f(x) - zh(x)$. The static equilibrium of the beam with respect to a zero-displacement initial state with zero

thermal loading is given by (Erlicher & Bourquin, 2006) :

$$\begin{cases} u'_{0x} = 0 \\ EJw''''_0 + \alpha EA\bar{\Theta}_x w''_0 = -\alpha EJh(x)'' \end{cases} \tag{C.16}$$

where $\mathbf{U_0} = \{u, w\} = \{u_{0x} - zw'_0(x), w_0(x)\}$ are the displacements in the cartesian coordinates of the generic point of the beam and the apex $'$ stands for the derivation with respect to x. A and J are the area and the moment of inertia of the beam section respectively, E is the Young modulus and α is the thermal dilation coefficient. $\bar{\Theta}_x = \frac{1}{L}\int_0^L f(x)dx$ is the average value on the beam axis of the axial temperature variation.

Assuming zero initial conditions, the dynamic transversal displacements are given by

$$EJw''''_1 + EA\alpha\bar{\Theta}_x w''_1 = -\rho A\ddot{w}_1 \tag{C.17}$$

In the above, the subscripts 0 and 1 denote the displacements at the static prestressed configuration V_0 and at the dynamic configuration V_1 respectively. From this equation one can derive the modal frequencies of the system which are given by :

$$w_n^2 = \left(\frac{n\pi}{L}\right)^4 \frac{EJ}{\rho A}\left(1 - \frac{A\alpha\bar{\Theta}_x}{J\left(\frac{n\pi}{L}\right)^2}\right) \tag{C.18}$$

The second term under the parentheses comes from the prestress due to thermal loading and shows how this last affects the modal frequencies. This simple example illustrates why the knowledge of temperature is needed to compute accurately the vibrational properties of a mechanical structure under changing thermal loading.

In the general case, the variation of the eigenpairs of a structure when the temperature varies can be carried out in a similar way, by just chaining three main steps :

1. Computation of the temperature field through inverse temperature reconstruction
2. Computation of the predeformed and prestressed state under thermal loading
3. Determination of the eigenpairs of the prestressed structure

C.6 Conclusions

The adjoint technique for the minimization of a least squares error functional has been successfully applied to the problem of temperature reconstruction based on pointwise measurements. The use of the H^1 space has proved to be a suitable framework for the minimization procedure, and has permitted to overcome the final time problem which is a known difficulty of the standard technique. The algorithm proves multidimensional and can be easily implemented in any standard finite element software.

By means of a dual least squares approach and suitable model reduction, further developments enable the reconstruction of temperature on three dimensional complex geometries at a very low computational cost. Combined with a suitable thermoelastic model or used as an input to statistical rejection methods (Basseville *et al.* , 2006b), the algorithm can thus represent a first building block of a global temperature elimination strategy in SHM.

Annexe D

Temperature identification based on pointwise transient measurements[1]

Alexandre Nassiopoulos, Frédéric Bourquin

D.1 Introduction

Various methods for damage detection and structural health monitoring exist. Among them, the *output-only* techniques consist in identifying the low frequency spectrum of a given structure in order to detect modifications with respect to the non-damaged reference state. However, in civil engineering, thermal loading due to environmental factors induces mechanical stress on structures and can cause eigenfrequency shifts of much larger order of magnitude than those caused by structural damage Farrar *et al.* (2003). Thus, the knowledge of the exact thermal state of a given structure and its effects on vibrational properties appears as a bottleneck in this field Kullaa (2002).

The need for temperature identification arises from the partial information on the thermal state of a structure one can get. The most commonly used temperature sensors can only provide local or pointwise measurements. In addition, some parts of a structure can simply be inaccessible to direct measurements. This is the case in civil engineering structures, although the number of sensors that equip modern ones is rapidly increasing. The thermal state at any point of a given structure can only be obtained through a suitable reconstruction procedure. Among possible methods, one will eliminate Kalman filtering techniques in continuous time which would lead to the solution of Riccati equations of great dimension, and that seems inappropriate without preliminary reduction.

The temperature identification problem can be seen as an inverse problem consisting in inverting the heat equation. This class of problems are in general mathematically ill-posed and regularization techniques are needed to solve them. They have been studied extensively in literature during the last few decades together with many techniques for their numerical computation Engl *et al.* (1994). Inverse problems concerning heat conduction have been the topic of numerous works due to the wide range of applications that are concerned Beck *et al.* (1996) Silva Neto & Özisik (1992) Videcoq & Petit (2001) Prud'homme & Nguyen (1999). A review of literature can be found in Alifanov (1994), Beck *et al.* (1985) and Özisik & Orlande (2000).

[1]Proceedings of *Heat Transfer 2006*, New Forest (UK), **2006**.

This paper deals with the inverse problem of temperature identification based on discrete measurements. In view of easy implementation in general purpose finite element software, the approach is that of optimal control theory Lions (1968). The problem is written in a least squares setting. The adjoint technique Jarny *et al.* (1991) Huang & Wang (1999) is used to determine the gradient of an error functional together with Tikhonov regularization Engl *et al.* (1994). When standard gradient-based algorithms are put to work, each computational step entails solving the same forward heat equation with changing data. A dual formulation of the problem and a model reduction technique are put to work to obtain a high speed accurate algorithm suited for real-time applications.

D.2 Problem statement

Consider a solid in a multidimensional domain Ω with boundary $\partial\Omega$. Assuming absence of internal heat sources and zero initial temperature, the temperature field inside the solid is given by the heat equation :

$$\begin{cases} \rho c \dfrac{\partial \theta}{\partial t} - div(K\, grad\, \theta) = 0 & \text{in} \quad \Omega \times [0,T] \\ (K\, grad\, \theta) \cdot \vec{n} + \alpha\theta = \Phi & \text{on} \quad \partial\Omega \times [0,T] \\ \theta(x,0) = 0 & \text{in} \quad \Omega \end{cases} \tag{D.1}$$

Here, $\Phi(x,t) = g(x,t) + \alpha\theta_{ext}$ where g denotes an inward heat flux with Fourier-Robin conditions and θ_{ext} is the external temperature, $\vec{n}$ is the outwards normal vector on the boundary, $x \in \Omega$ is the space variable, $t \in [0,T]$ the time variable, ρ the mass density, c the heat capacity and K the scalar conductivity coefficient of the material taken to be homogeneous and isotropic for the sake of simplicity.

Assume that m sensors are available inside the structure at locations x_k, $k = 1..m$. They deliver the data $\{\theta_k^d(t)\}_{k=1}^m, t \in [0,T]$. Based on these measurements, the aim is to reconstruct the temperature field over the time interval $[0,T]$, focusing on the accuracy of the temperature field reconstruction at the final instant T. One way to achieve this is to seek the boundary flux Φ responsible for the measurements.

The problem of recovering the boundary condition Φ can be viewed as an operator inversion problem. Consider operator T defined by

$$\begin{aligned} T: \quad & U \to M \\ & T\Phi = \{\theta(x_k,t)\}_{k=1}^m \end{aligned} \tag{D.2}$$

where $\theta(x,t)$ is the temperature field verifying the heat equation (D.1). In the above, U is the control space (such as $\Phi \in U$) and $M = L^2([0,T])^m$ is the measurements space (such that $\{\theta_k^d(t)\}_{k=1}^m \in M$). Note that we have not explicitly defined so far the nature of space U as this will be the object of section D.3. Under these notations, the temperature reconstruction problem consists in finding Φ such that

$$T\Phi = \{\theta_k^d\}_{k=1}^m \tag{D.3}$$

For the sake of simplicity, only the case of the boundary condition Φ reconstruction is considered in this paper. It is possible to extend all that follows to the case where one wants to reconstruct a couple of functions $\{\theta^0, \Phi\}$ with $\theta^0(x) = \theta(x,0)$ an unknown initial thermal state in (D.1).

Due to the smoothing properties of operator T, the latter is not invertible and the inverse problem (D.3) is mathematically ill-posed in the sense of Hadamard. The solution of (D.3) can only be derived in a least squares sense through a functional minimization procedure. The functional can be for instance a quadratic form of the residual term $E = \theta(x_k,t) - \theta_k^d(t),\ (k = 1..m)$, which measures the distance between the data $\theta_k^d(t)$ and the values at sensor locations of the temperature field determined by Φ.

$$\begin{aligned} J(\Phi) &= \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{m}\int_0^T \Big(\theta(x_k,t) - \theta_k^d(t)\Big)^2 dt + \frac{\epsilon}{2}\|\Phi\|_U^2 \\ &= \frac{1}{2}\|T\Phi - \{\theta_k^d\}_{k=1}^m\|_M^2 + \frac{\epsilon}{2}\|\Phi\|_U^2 \end{aligned} \tag{D.4}$$

The last term stands for the Tikhonov regularization, ϵ being a small coefficient that guarantees numerical stability even with noisy input data. $\|\cdot\|_U^2$ and $\|\cdot\|_M^2$ are suitable norms in U and M respectively.

D.3 Minimization procedures

The results of the minimization process strongly depend on the a priori assumptions on Φ that determine the choice of space U. In this section two different possibilities are considered, showing that better results are obtained within the framework of an H^1-type space.

D.3.1 Minimization in L^2

The most natural choice consists in looking for a solution Φ belonging to the space of square integrable functions, namely $L^2(\partial\Omega \times [0,T])$. This space can be equipped with the scalar product :

$$\big(u,v\big)_U = \int_0^T \int_{\partial\Omega} uv\, d\gamma\, dt, \quad \forall u,v \in U \tag{D.5}$$

The adjoint technique is employed to write J as a quadratic form. To this end, we introduce the adjoint operator T^* whenever it exists :

$$\begin{aligned} T^* :\ & M \to U \\ & T^*\{\vartheta_k(t)\}_{k=1}^m = \varphi(x,t) \end{aligned} \tag{D.6}$$

where ϕ is the restriction over $\partial\Omega$ of the so-called adjoint state p :

$$\left\{\begin{array}{lll} -\rho c p_t - div(K grad\, p) = \displaystyle\sum_{k=1}^{M} \vartheta_k(t)\delta_{x_k} & \text{in} & \Omega \times [0,T] \\ (K grad\, p)\cdot\vec{n} + \alpha p = 0 & \text{on} & \partial\Omega \times [0,T] \\ p(x,T) = 0 & \text{in} & \Omega \end{array}\right. \tag{D.7}$$
$$\varphi(x,t) = p(x|_{\partial\Omega},t)$$

Operators T and T^* verify the duality relation which writes

$$_{M'}\langle T\Phi, \{\vartheta_k\}_{k=1}^m\rangle_M = {}_U\langle \Phi, T^*\{\vartheta_k\}_{k=1}^m\rangle_{U'} \tag{D.8}$$

In the above, U' and M' are the dual spaces of U and M respectively and angle brackets stand for the duality pairing. To formally prove this relation, one has to rewrite equations (D.1) and (D.7) in variational form. After an integration by parts of the time derivative term and combination of the last two expressions, one obtains

$$\sum_{k=1}^{m} \int_0^T \theta(x_k,t)\vartheta_k(t)\,dt = \int_0^T \int_{\partial\Omega} \Phi\varphi\,d\gamma\,dt \tag{D.9}$$

which is exacly relation (D.8).

Using (D.8), the functional J can be written as a quadratic form of Φ :

$$\begin{aligned} J &= \frac{1}{2}\|T\Phi - \{\theta_k^d\}_{k=1}^m\|_M^2 + \frac{\epsilon}{2}\|\Phi\|_U^2 \\ &= \frac{1}{2}\Big[\|T\Phi\|_M^2 - 2\big(T\Phi, \{\theta_k^d\}_{k=1}^m\big)_M + \|\{\theta_k^d\}_{k=1}^m\|_M^2\Big] + \frac{\epsilon}{2}\|\Phi\|_U^2 \\ &= \frac{1}{2}\big(A\Phi,\Phi\big)_U - \big(\Phi,b\big)_U + c \end{aligned} \tag{D.10}$$

with $A = \mathcal{J}T^*T + \epsilon\mathbf{I}$, $b = \mathcal{J}T^*\{\theta_k^d\}_{k=1}^m$ and $c = \|\{\theta_k^d\}_{k=1}^m\|_M^2$. $\mathcal{J}$ is the Riesz isomorphism between U' and U while $\mathbf{I}$ stands for the identity operator. It follows directly that the gradient of J is given by :

$$\nabla J(\Phi) = \mathcal{J}T^*(T\Phi - \theta_k^d(t)) + \epsilon\Phi \tag{D.11}$$

This expression means that the gradient of the functional is the restriction on the boundary $\partial\Omega$ of the adjoint field obtained by (D.7) with a source term $\{\vartheta_k(t)\}_{k=1}^m$ equal to the residual $E = \{\theta(x_k,t) - \theta_k^d(t)\}_{k=1}^m$.

This method of obtaining the gradient allows for a gradient-type method to be used. Each iteration will consist of a computation of the direct equation (D.1), followed by a computation of the adjoint equation (D.7) with $\{\vartheta_k(t)\}_{k=1}^m = E$. The gradient will then be given by $p|_{\partial\Omega} + \epsilon\Phi$. Here, the classical conjugate gradient algorithm was used giving very satisfactory results Prud'homme & Nguyen (1999).

Note that equations (D.1) and (D.7) have the same structure, so that the same numerical procedure can be used to solve them. The whole algorithm can thus be easily implemented in any classical general purpose scientific software, this being one of the main advantages of the method.

The results below show the disadvantages of the approach described so far. They concern a one-dimensional beam of length L to which a given flux is prescribed at each end. All material constants are set to 1. Some direct simulations with an arbitrary flux input give measurements on sensors located at $\frac{L}{5}$, $\frac{L}{2}$ and $\frac{4L}{5}$ respectively. These measurements are then used to simulate the reconstruction algorithm.

The model is discretized with P1 finite elements and an implicit Euler scheme is used for time integration. In figure D.1, the reconstructed flux (dotted line) is compared to the prescribed one (solid line). The flux is well reconstructed on almost the entire time interval, but the accuracy of the results drops near the final instant : the curve exhibits some oscillations and moves away from the target curve to reach zero at $t = T$. As a consequence, the reconstruction of temperature field is of acceptable accuracy far from $t = T$, while the reconstruction of $\theta(x,T)$, which is the most interesting output in view of applications, is very unsatisfactory. This phenomenon is due to the property assigned to the adjoint field p to be null at $t = T$ (equation (D.7)) and is well known in the literature Alifanov (1994) Huang & Wang (1999).

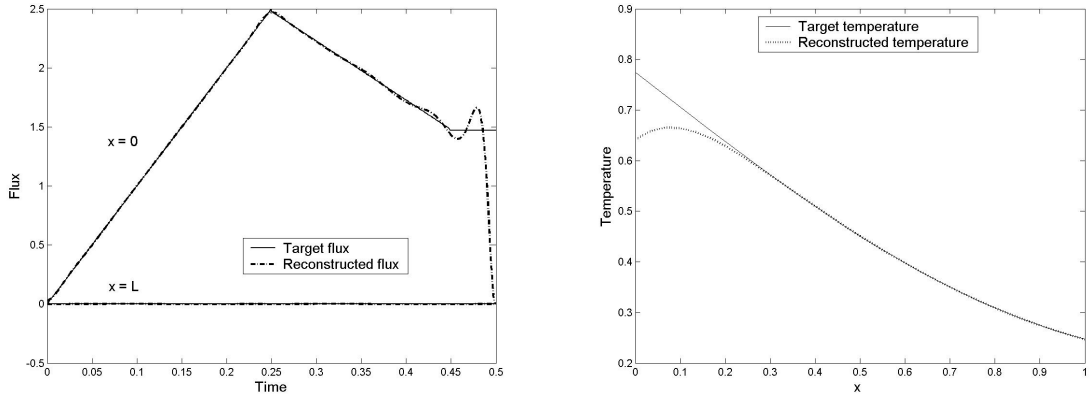


FIG. D.1 – Reconstruction in L^2 : **flux** *(left)* and **final temperature** reconstruction *(right)*

This final condition on p has to be prescribed in order to verify relation (D.8). An alternative definition of the adjoint field can be considered, but this implies that the space U has also to be modified. This is the topic of the next section.

D.3.2 Minimization in H^1

A change of framework for the minimization procedure overcomes this final instant problem. It consists in choosing an H^1-type space instead of the L^2-type one.

Take $U = H^1([0,T], L^2(\partial\Omega))$ with the scalar product

$$\big(u,v\big)_U = \int_0^T \int_{\partial\Omega} uv \, d\gamma \, dt + \int_0^T \int_{\partial\Omega} \partial_t u \partial_t v \, d\gamma \, dt, \quad \forall u, v \in U$$

In order to verify relation (D.8), the operator T^* has to be defined in a different manner. One can easily verify that if φ in (D.6) is defined by

$$\int_0^T \phi p \, dt = \int_0^T \phi\varphi \, dt + \int_0^T \partial_t\phi\partial_t\varphi \, dt, \quad \forall \phi \in H^1([0,T]\times\partial\Omega) \tag{D.12}$$

where p verifies (D.7), then operator T^* verifies again the duality relation (D.8) with the new choice of U. As can be seen, the computation of T^* needs one more step involving the solution of (D.12) with p known. This last equation is of the form $L(\phi) = a(\varphi,\phi)$, $\forall\phi$, $a(\cdot,\cdot)$ being a quadratic and $L(\cdot)$ a linear form. It can be easily implemented with the finite element method.

The great advantage of this is that the end condition on φ with respect to time is not a Dirichlet one anymore. As a consequence, the value of Φ at $t = T$ is not fixed and the accuracy of reconstruction near the final instant is much better as can be seen in figure D.2 corresponding to the same case as previously. The curves of reconstructed and target final temperatures are identical.

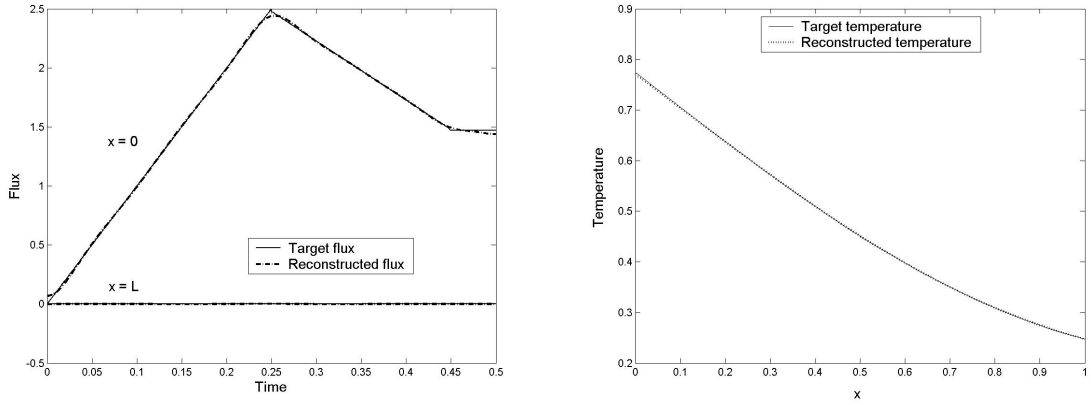


FIG. D.2 – Reconstruction in H^1 : **flux** *(left)* and **final temperature** reconstruction *(right)*

D.4 Dual formulation

Consider the self-adjoint operator TT^*. Consider next the problem of finding $\{X_k(t)\}_{k=1}^m \in M$ such that $TT^*\{X_k(t)\}_{k=1}^m = \{\theta_k^d(t)\}_{k=1}^m$. If we set $\Phi = T^*\{X_k(t)\}_{k=1}^m$, then solving (D.3) is equivalent to finding $\{X_k(t)\}_{k=1}^m \in M$ such that

$$TT^*\{X_k(t)\}_{k=1}^m = \{\theta_k^d(t)\}_{k=1}^m \tag{D.13}$$

This new problem is called the *dual* of (D.3). It exhibits an ill-posed nature and some form of regularization is needed. Applying Tikhonov regularization, one will consider the problem

$$TT^*\{X_k(t)\}_{k=1}^m + \epsilon\{X_k(t)\}_{k=1}^m = \{\theta_k^d(t)\}_{k=1}^m \tag{D.14}$$

Due to the self-adjoint nature of TT^*, the latter is equivalent to minimizing the dual functional J' :

$$J' = \frac{1}{2}\Big(A\{X_k(t)\}_{k=1}^m, \{X_k(t)\}_{k=1}^m\Big)_M - \Big(\{X_k(t)\}_{k=1}^m, b\Big)_M \tag{D.15}$$

with $A = TT^* + \epsilon\mathbf{I}$ and $b = \{\theta_k^d(t)\}_{k=1}^m$.

The dual formulation exhibits many features of interest. Firstly, the problem is set over space M which is of much smaller size than the corresponding space U. As a consequence, fewer search directions are involved in the minimization procedure and the conjugate gradient method is expected to converge much faster. Secondly, all scalar products that need to be computed are scalar products in M rather than in U so that the complexity of the algorithm depends more on the number of sensors than on the size of domain Ω. This new formulation results in dramatic reduction of computational costs and in greater adaptability to different geometries. Furthermore, it allows some parallelization of the algorithm, this issue being however beyond the scope of this paper.

D.5 Model reduction

We introduce two distinct function bases $\{\xi_i\}_{i=1}^\infty$, $\{\chi_i\}_{i=1}^\infty$ that span $H^1(\Omega)$, and a third function basis $\{\eta_i\}_{i=1}^\infty$ that spans the space $L^2(\partial\Omega)$ such that we can approximate the fields θ, p and Φ by a reduced order linear combination :

$$\begin{aligned} \theta &\sim \theta_r(x,t) = \sum_{i=1}^{\ell} \alpha_i(t)\xi_i(x) \\ p &\sim p_r(x,t) = \sum_{i=1}^{\check{\ell}} \beta_i(t)\chi_i(x) \\ \Phi &\sim \Phi_r(x,t) = \sum_{i=1}^{\tilde{\ell}} \gamma_i(t)\eta_i(x) \end{aligned} \tag{D.16}$$

These approximations result in a model reduction that enables a considerable speed-up of the computational procedure, since the size of the systems resulting of the finite element discretization of (D.1) and (D.7) only depends on the three parameters ℓ, $\check{\ell}$ and $\tilde{\ell}$. Under these notations, the objective of reconstruction is to recover the modal coefficients $\gamma_i(t)$, $i = 1..\tilde{\ell}$ of the approximate flux Φ_r. The quality of the results depends on the accurate description of the actual variables θ, p and Φ by the approximate ones. Another crucial point is the choice of the basis functions in order to ensure observability and controllability of the physical system.

D.6 Numerical test case

Hereafter is shown a numerical example on a three-dimensional case based on this model reduction. A solid of dimensions $L_x = 1$, $L_y = 0.5$ et $L_z = 0.4$ and material properties all set to 1 is subject to an unknown heat flux on the face of coordinate $x = 0$ and zero heat fluxes on all other faces. All boundary conditions are of the Fourier-Robin type. Four sensors are located at points $(0.1, 0.4, 0.1)$, $(0.1, 0.1, 0.2)$, $(0.2, 0.1, 0.3)$ and $(0.2, 0.4, 0.4)$.

Like in the previous 1D example, a direct simulation with a prescribed flux on face $x = 0$ gives measurements that are taken afterwards as input data for a simulation of the reconstruction algorithm. The prescribed flux has the form shown on figure D.3 and can be decomposed into two functions $\eta_1(x)$ and $\eta_2(x)$ with arbitrary time variation so that $\Phi = \gamma_1(t)\eta_1(x) + \gamma_2(t)\eta_2(x)$. Here, $\eta_1(x)$ and $\eta_2(x)$ are the first two eigenvalues of the Laplace operator on a rectangle with Neumann boundary conditions.

Figure D.3 shows the very accurate reconstruction of the two corresponding coefficients $\gamma_1(t)$ and $\gamma_2(t)$. A very accurate reconstruction of the different components α_i of the temperature field obtained under this flux input was also observed. Figure D.4 shows the isovalues of the final temperature on two sections on the xy-direction and the isovalues of the difference between reconstructed and target fields : there is a ratio of 10^4 between the corresponding orders of magnitude. The reconstruction took $4.4s$ CPU for 20 iterations.

D.7 Conclusions

The adjoint technique for the minimization of a least squares error functional has been applied with success to the problem of temperature reconstruction based on pointwise measurements. The use of the H^1 space has proved to be the best-suited framework for the minimization procedure, and has permitted us to overcome the final instant problem of the classical technique. The dual formulation of

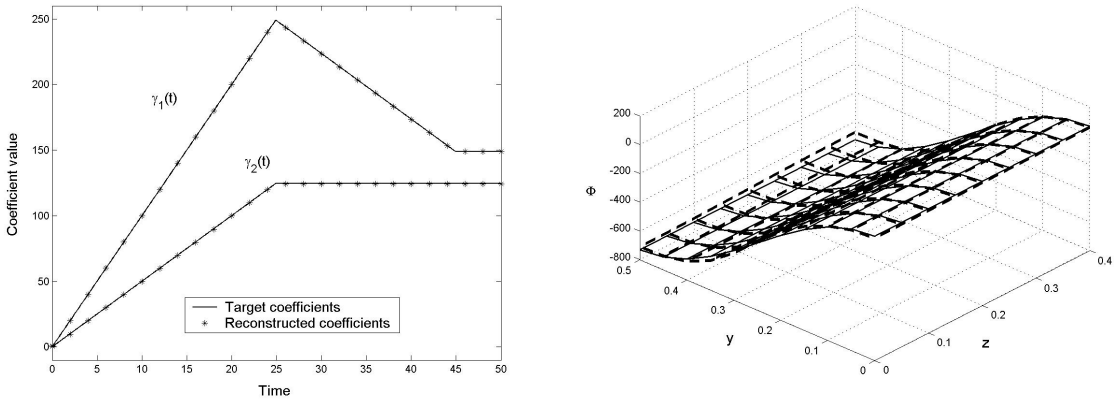


FIG. D.3 – Reconstruction of **flux coefficients** $\gamma_1(t)$ and $\gamma_2(t)$ *(on the left)*; **prescribed** (solid line) and **reconstructed** (dotted line) flux on face $x = 0$ *(on the right)*

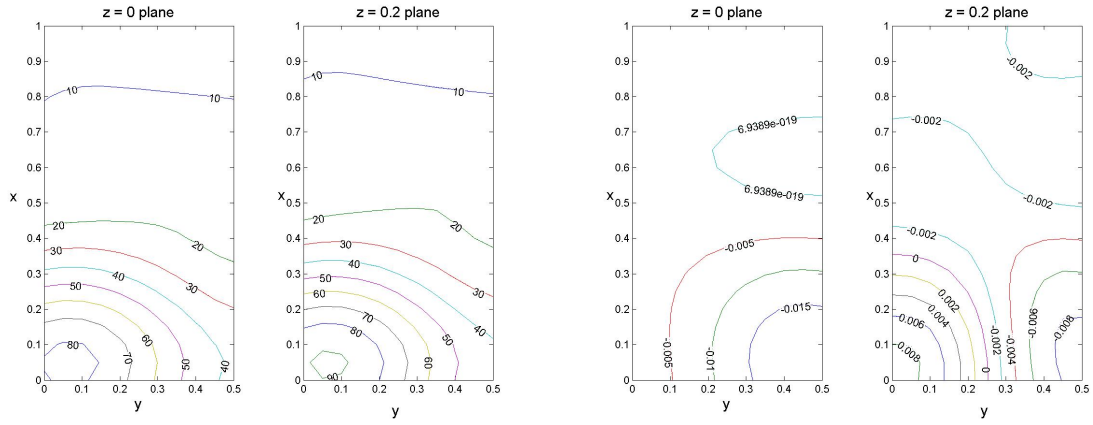


FIG. D.4 – Isovalues of the temperature field on planes $z = 0$ and $z = 0.2$, at $t = T$: **target field** *(left)*; **difference** between target and reconstructed fields *(right)*

the problem and the model reduction using well chosen basis functions enables us to carry very fast computations with great accuracy. The algorithm can thus be adapted for the real time monitoring of structures. In such a case, the reconstruction procedure can be carried out at given intervals with overlapping time domains : the initial temperature condition for each computation will be known from the previous reconstruction computation and added to the reconstructed field. The entire procedure could be compared with an observer of great efficiency and speed.

Annexe E

On the use of branch modes for the boundary control of flexible structures[1]

Frédéric Bourquin, Alexandre Nassiopoulos

E.1 Introduction

When trying to control flexible structures by means of model-based control strategies, the necessary model reduction by means of discretization schemes may completely change the behavior of the "true" or reference structure to be controlled. For example, the exact pointwise displacement control of a beam, once discretized by standard low-degree finite elements, is the solution of an ill-posed problem, resulting in wildly oscillating controls and suggesting the beam be less and less controllable when the mesh gets refined, whereas the continuous, or reference, model is exactly controllable, and although the mentioned finite elements yield a converging approximation of the statics and of the free dynamics of the structure. Moreover, the closed-loop spectrum associated with optimal control may get closer to the imaginary axis when the mesh is refined, even in cases when the reference model is uniformly exponentially stable Banks *et al.* (1991).

Now, the interest of controlling a given structure during or after the construction must be assessed at the design stage, when the structure does not exist. Therefore simulations and parametric studies help taking the right decision as to control the structure or not. Moreover, it is very important to simulate well in advance the controlled structure in order to check the absence of spill-over instabilities or to find suitable procedures to mitigate this effect.

Furthermore, modelling and simulation are key ingredients in view of optimizing the number and location of sensors and actuators.

Following J-L. Lions works on the exact controllability of Partial Differential Equations, Komornik has introduced an efficient and simple strategy to stabilize linear evolution equations including the case of flexible structures Komornik (1995a,b, 1997). His method assumes the exact controllability of the system to hold at the continuous level. This property depends on the physics of the system and of the geometry. See *e.g.* Bourquin (1995, 2001a). Whenever the exact controllability of the structure holds, just inverting a modified controllability gramian Komornik (1995a,b, 1997) leads to a control ensuring a uniform decay rate of the total energy which is larger than some parameter ω that can be

[1] A soumettre dans *J. of Mechanics*, **2007**.

arbitrarily chosen in the design of the control law. Recalling the difficulty to predict the decay rate of the energy of the closed-loop system for a given control law Komornik (1997), it is worth emphasizing that here not only you can predict it but you can even impose *a priori* that some suitable norm of the state be bounded by $C(\omega)e^{-\omega t}$ at any time t, for any value of the design parameter ω. Moreover this property holds uniformly with the modal discretization Bourquin (2000) at the semi-discrete level.

But in view of investigating the behavior of the control law numerically, we need a method of approximation both for the computation of the control and for the simulation of the controlled system. As far as simulation is concerned, it is known and proved elsewhere Bourquin (2001a); Bourquin *et al.* (2004, 2007) that the standard way of extracting the pseudo-dynamical part from the full response in order to solve a homogeneous evolution equation leads to a discrete system which is always unstable no matter the static linear control law (the existence of stabilizing dynamic feedback is proved in Bourquin *et al.* (2004)) ! This is in fact the main motivation for introducing an *ad hoc* formulation for boundary control, called very weak in space. Besides, it was proved elsewhere Bourquin (2000) that this so-called *very weak in space* formulation Bourquin (2001a) leads to a discrete system that inherits the stability of the continuous system controlled with Komornik's algorithm. It is shown in Bourquin *et al.* (2007) that the same formulation also proves useful for a general LQR strategy as well.

Therefore this paper concentrates on the control synthesis. The question of how to compute the control is of importance both for the control design and the *a priori* dynamic assessment of the controlled structure considered. This paper contributes to a general preprocessing strategy for mechanical systems in view of displacement boundary control. It extends the expositions given in Bourquin (2001c, 1998) and other specific contributions Bourquin *et al.* (1998); Bourquin (1993); Bardos *et al.* (1991).

The second section points out the role of the controllability gramian as a tool for open-loop and feedback control synthesis. Section 3 is devoted to the mechanical description of the controllability gramian in the case of thin plates. Comments on the possible numerical instabilities due to the discretization are given. Section 4 explains how to discretize the gramian by mode superposition. Section 5 is devoted to consistent methods to compute the entries of the gramian matrix, by means of non-harmonic Fourier series on the region of control. A new expansion of the modal stresses at the actuator location is proposed. It is based on the use of branch modes.

E.2 The controllability gramian as a tool for control synthesis

Let us consider the usual abstract dynamical system in state-space form

$$\dot{x} = Ax + Bu, \quad x(0) = x_0 \tag{E.1}$$

Let K denote the input to final solution map. The problem of exact controllability amounts to seek a control u such that $Ku = x^f$. Recall that if $\|K^*\psi\| \geq \alpha|\psi|$ for every state ψ and given norms $\|.\|$, and $|.|$, then the operator KK^* is invertible, therefore you may seek a state φ such that

$$KK^*\varphi = x^f \tag{E.2}$$

By just setting $u = K^*\varphi$, then $Ku = x^f$ and u is an exact control. This is also an optimal solution.

Now, a computation leads to $\|K^*\psi\|^2 = \int_0^T \left(B^* e^{A^* t}\psi dt\right)^2 dt$, and the crucial point is the positivity property of this quadratic form, which should be preserved at the discrete level. As a matter of fact, the norm of the control depends on the largest constant α such that

$$\int_0^T \left(B^* e^{A^* t}\psi dt\right)^2 dt \geq \alpha|\psi|^2 \tag{E.3}$$

for a suitable norm of the adjoint state. This norm should be as large as possible otherwise the control would be very sensitive to small perturbations of the target final state. Above scheme is nothing but the famous Hilbert Uniqueness Method (HUM) developed by J-L. Lions.

Moreover, exploring the link between observability and stabilizability, Komornik (1997) introduced a simple and efficient feedback law which is based on the modified controllability gramian

$$a_{\omega,S}(\varphi,\psi) = \int_0^S f_{\omega,S}(s)\left(B^* e^{A^* s}\varphi\right)\left(B^* e^{A^* s}\psi\right) ds \tag{E.4}$$

for some continuous and positive function $f_{\omega,S}(s)$ that looks like $e^{-\omega s}$ (see Komornik (1997) or Bourquin (2001a) for details) and where ω denotes a free parameter, and S a large enough time horizon. Whenever the strong observability inequality (2.3) holds for some T, for S large enough the operator $\Lambda_{\omega,S}$ defined by $\langle \Lambda_{\omega,S}\varphi,\psi\rangle = a_{\omega,S}(\varphi,\psi)$ for the natural duality product $\langle .,.\rangle$ is invertible. Let us define $u(t) = B^*\Lambda_{\omega,S}^{-1}x(t)$, then (Komornik (1997)) $\|x(t)\| \leq Ce^{-\omega t}\|x_0\|$.

This feedback law is a particular case of linear quadratic optimal control with a non-intuitive weighting matrix Q. Above procedure is an easy and efficient alternative to the resolution of Riccati equations.

Thus, the controllability gramian plays a central role for control synthesis and its discretization should be such that the hypotheses mentioned above still hold at the discrete level, uniformly with respect to the discretization parameters.

In the sequel, we shall concentrate on the main step of above programmes, that is to say on the resolution of equation (2.2). It writes : *for a given state z, find the state φ such that for every state ψ*

$$\int_0^T \left(B^* e^{A^* t}\varphi\right)\left(B^* e^{A^* t}\psi\right) ds = \langle z,\psi\rangle \tag{E.5}$$

It turns out that inverting $\Lambda_{\omega,S}$ is a very similar problem because of (2.4). Both gramians are equivalent to one another and the numerical difficulties and cures do not depend on the function $f_{\omega,S}(s)$.

E.3 On the mechanical nature of the controllability gramian

Let us now focuss on the displacement control of a thin plate as a relatively simple and generic situation. Following Bourquin *et al.* (1998), consider a plate Ω with a smooth boundary γ. Set

$\Sigma = \partial\Omega \times [0,T]$. Assume the stiffness and mass density are set equal to one, and that the plate is clamped everywhere with an imposed rotation and a zero transverse displacement. Then the transverse displacement $y(x,t)$ satisfies

$$\begin{cases} \frac{\partial^2}{\partial t^2} y + \Delta^2 y = 0 & \Omega \times [0,T] \\ y = 0, \quad \frac{\partial y}{\partial \nu} = v & \Sigma \\ y(x,0) = y^0(x) \ , \ \frac{\partial}{\partial t} y(x,0) = y^1(x) & \Omega \end{cases} \tag{E.6}$$

The controllability gramian reads

$$a\left(\left\{\varphi^0, \varphi^1\right\}, \left\{\hat{\varphi}^0, \hat{\varphi}^1\right\}\right) = \int_\Sigma \Delta\varphi \Delta\hat{\varphi} \tag{E.7}$$

where φ solves

$$\begin{cases} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \varphi + \Delta^2 \varphi = 0 & \Omega \times [0,T] \\ \varphi = 0, \quad \frac{\partial \varphi}{\partial \nu} = 0 & \Sigma \\ \varphi(x,0) = \varphi^0(x) \ , \frac{\partial}{\partial t} \varphi(x,0) = \varphi^1(x) & \Omega \end{cases} \tag{E.8}$$

and $\hat{\varphi}$ solves the same initial-boundary value problem starting from $\left\{\hat{\varphi}^0, \hat{\varphi}^1\right\}$. Of course, the displacement field φ depends linearly on the initial conditions $\left\{\varphi^0, \varphi^1\right\}$ therefore the form $a(.,.)$ is well-defined as a bilinear form. Then (2.5) rewrites

$$a\left(\left\{\varphi^0, \varphi^1\right\}, \left\{\hat{\varphi}^0, \hat{\varphi}^1\right\}\right) = \int_\Omega \left(z^1 \hat{\varphi}^0 - z^0 \hat{\varphi}^1\right) \quad \forall \left\{\hat{\varphi}^0, \hat{\varphi}^1\right\} \tag{E.9}$$

Here, $\left\{z^0, z^1\right\}$ stands for some final state to be reached or some initial state to be exactly controlled. It would stand for the current state of the plate in view of the feedback control of section 2.

Thus the gramian is made of the **product of bending moments along the region of control**.

The observability hypothesis (2.3) can be expressed in a concrete way :

$$a\left(\left(\varphi^0, \varphi^1\right), \left(\varphi^0, \varphi^1\right)\right) \geq \alpha E\left(\varphi^0, \varphi^1\right) \ , \tag{E.10}$$

for some positive α, and where $E\left(\varphi^0, \varphi^1\right) = \frac{1}{2}\left\{\int_\Omega \varphi^1(x)\varphi^1(x)dx + \int_\Omega \Delta\varphi^0(x)\Delta\varphi^0(x)dx\right\}$ denotes the energy of the adjoint structure.

Necessary and almost sufficient conditions for strong observability have been first obtained for the wave equation. These conditions state that all rays of geometrical optics propagating inside the structure should reach the region of control. Simpler sufficient conditions were derived in other geometrical situations.

We assume these conditions are satisfied in such a way that strong observability (E.10) holds.

Let Λ denote the Lax-Milgram operator associated with the bilinear form $a(.,.)$, and define a control u by

$$u(t) = (\Delta\varphi)_{|\gamma} \tag{E.11}$$

where φ satisfies (E.8) with $\left\{\varphi^0, \varphi^1\right\} = \Lambda^{-1}\left\{y^1, -y^0\right\}$, when $\left\{y^0, y^1\right\} \in L^2(\Omega) \times H^{-1}(\Omega)$.

Then, u achieves exact controllability, that is to say, the solution of (E.6) with $v = u$ satisfies $\{y'(T), -y(T)\} = \{0, 0\}$ over Ω.

In the same way, introduce the modified controllability Gramian

$$a_{\omega,S}\left(\left\{\varphi^0, \varphi^1\right\}, \left\{\hat{\varphi}^0, \hat{\varphi}^1\right\}\right) = \int_{\partial\Omega\times[0,S]} f_{\omega,S}(s) \triangle \varphi(x,s) \triangle \hat{\varphi}(x,s) d\gamma ds \tag{E.12}$$

where φ solves (E.8) and $\hat{\varphi}$ solves the same initial-boundary value problem starting from $\left\{\hat{\varphi}^0, \hat{\varphi}^1\right\}$. Let $\Lambda_{\omega,S}$ denote the Lax-Milgram operator of the continuous and coercive bilinear form $a_{\omega,S}(.,.)$ and $P_1 : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ denote the projection over the first component of a pair, *i.e.* $P_1(\{a, b\}) = a$. Then define

$$v(t) = (\Delta P_1 \Lambda^{-1}_{\omega,S} \left\{y'(t), -y(t)\right\})_{|\gamma} \tag{E.13}$$

when $\left\{y^0, y^1\right\} \in L^2(\Omega) \times H^{-1}(\Omega)$. Then Komornik (1997) the following decay estimate holds for the solution y of (E.6) :

$$\| \left\{y'(t), -y(t)\right\} \|_{|L^2(\Omega)\times H^{-1}(\Omega)} \leq Ce^{-\omega t} \tag{E.14}$$

The main point is that the right-hand side of (E.10) is an energy whereas the left-hand side is not homogeneous to an energy because of one extra space derivative. That the gramian is bounded from below by the energy of the adjoint system thus appears as a non-trivial property from this point of view. As a matter of fact the adjoint displacement field must satisfy the *conservation of linear momentum* exactly. But standard Galerkin approximations such as finite element methods violate this conservation. This fact underlies the lack of robustness of strong observability with respect to Galerkin aproximations Banks *et al.* (1991) and prevents from using standard techniques to approximate the gramian.

E.4 Galerkin approximation of the controllability gramian

let $(\lambda_i, \theta_i)_{i=1}^{+\infty}$ denote the family of eigenvalues and normal modes of the clamped plate. Let $V_N = Span\left\{\theta_i\right\}_{i=1}^{N}$. The modes are assumed to be normalized so as to have a unit mass.

For a given pair of fields $\left\{z^0, z^1\right\}$, define $\left\{\varphi_N^0, \varphi_N^1\right\} \in V_N \times V_N$ as the solution of the variational equation

$$a\left(\left\{\varphi_N^0, \varphi_N^1\right\}, \left\{\hat{\varphi}_N^0, \hat{\varphi}_N^1\right\}\right) = \int_\Omega \left(z^1 \hat{\varphi}_N^0 - z^0 \hat{\varphi}_N^1\right) \quad \forall \left\{\hat{\varphi}_N^0, \hat{\varphi}_N^1\right\} \in V_N \times V_N \tag{E.15}$$

Since strong observability holds, the convergence $\left\{\varphi_N^0, \varphi_N^1\right\} \longrightarrow \left\{\varphi^0, \varphi^1\right\}$ holds in a strong sense Bourquin (1993).

Remark 1 : the adjoint equation (E.8) can be solved explicitely with eigenmodes as initial conditions, therefore no approximation is needed to get the expression of the exact solution as a finite superposition of possibly unknown modes. Moreover the reverse inequality (E.10) holds uniformly with respect to the number of modes as a restriction to a subspace of a general inequality valid over

a larger space. The reduced dynamics is a restriction of the full dynamics and not a perturbation of the latter.

However the finite-dimensional problem (E.15) must be perturbed by numerical integration, since the eigenmodes are not known explicitely in general.

By just defining

$$\mathcal{M}_i = \Delta\theta_i(x) \tag{E.16}$$

The problem (E.15) can be put in an equivalent matrix form

$$Kx = b,\ K = \begin{pmatrix} K^{00} & K^{01} \\ K^{10} & K^{11} \end{pmatrix},\ K_{ij}^{\ell m} = f^{\ell m}\left(\lambda_i, \lambda_j, T\right) \int_{\partial\Omega} \mathcal{M}_i \mathcal{M}_j, \tag{E.17}$$

where $f^{\ell m}$ stands for a smooth explicit function.

E.5 Consistent stresses for active control

In the sequel, h stands for the mesh size of a finite element method that is used in particular to compute the eigenpairs of the structure. Let $\left(\lambda_i^h, \theta_i^h\right)_{i=1}^{N_h}$ denote the family of approximate eigenpairs, and $V_N^h = Span\left\{\theta_i^h\right\}_{i=1}^{N}$.

The consistent discretization of the stiffness matrix K requires an accurate approximation of the stresses $\mathcal{M}_i$ in the mean square sense along the control boundary whereas one expects the convergence of the curvatures $\Delta\theta_j^h$ in average over the plate, and not along a single line or not with the same accuracy. For a membrane, the pointwise convergence of the stresses occurs but the error is bounded by the maximum value of the second-order space derivatives and this quantity is large. Practically, conforming P1 Lagrange finite elements for a simple membrane eigenproblem yield an extremely poor approximation Bourquin (2001b). Therefore, we do want to circumvent the use of $\Delta\theta_{j|\gamma}^h$ in view of approximating the bending moment $\Delta\theta_{j|\gamma}$ along the control boundary. As explained in Bardos *et al.* (1991); Bourquin (1993); Bourquin *et al.* (1998); Bourquin (2001b), the main idea of our numerical method is to express the product of bending moments as a possibly infinite sum of products of virtual works that can easily be computed by finite elements. Then filter out the high-frequency content of the bending moments $\Delta\theta_{i|\gamma}$ at the continuous level, since these functions are supposed to be sufficiently smooth, otherwise the observability estimate cannot be proved, thus you end up with a computable and consistent expression.

E.5.1 Sloshing modes

In order to perform the low-frequency filtering in a very general way, let us first introduce an orthonormal basis $(z_\ell)_{\ell=1}^{+\infty}$ of virtual displacement fields defined along the control boundary. Thus we have

$$\mathcal{M}_j = \sum_{\ell=1}^{+\infty} (\int_\gamma \Delta\theta_j z_\ell) z_\ell \tag{E.18}$$

Parseval's identity yields

$$\int_\gamma \mathcal{M}_i \mathcal{M}_j = \sum_{\ell=1}^{+\infty} \left(\int_\gamma \Delta\theta_i z_\ell \right) \left(\int_\gamma \Delta\theta_i z_\ell \right) \tag{E.19}$$

and by just keeping the low frequency-content of the bending moments and integrating by parts we get

$$\int_\gamma \mathcal{M}_i \mathcal{M}_j \simeq (1+\lambda_i)(1+\lambda_j) \sum_{\ell=1}^{M} \left(\int_\Omega \theta_i R z_\ell \right) \left(\int_\Omega \theta_j R z_\ell \right) \tag{E.20}$$

where Rz_ℓ stands for the static deflection of the plate to the imposed displacement z_ℓ along the control boundary, that is to say, for every v, $\tilde{v} = Rv$ satisfies

$$\begin{cases} \Delta^2 \tilde{v} + \tilde{v} = 0 & \Omega \\ \tilde{v} = 0, \quad \frac{\partial \tilde{v}}{\partial \nu} = v & \gamma \end{cases} \tag{E.21}$$

But expression (E.19) can be discretized by means of standard finite elements provided the fields Rz_ℓ can be. Let us assume that for the moment. Then one may define approximate bending moments along the region of control as

$$\mathcal{M}_j^{M,h} = \left(1+\lambda_j^h\right) \sum_{\ell=1}^{M} \left(\int_\Omega \theta_j^h R z_\ell^h \right) z_\ell^h \tag{E.22}$$

and the product of stresses along the region of control (E.19) can be approximated by

$$\int_\gamma \mathcal{M}_i \mathcal{M}_j \simeq \left(1+\lambda_i^h\right) \left(1+\lambda_j^h\right) \sum_{\ell=1}^{M} \left(\int_\Omega \theta_i^h R z_\ell^h \right) \left(\int_\Omega \theta_j^h R z_\ell^h \right) \tag{E.23}$$

Therefore it suffices to use this close-form expression in (E.17). The stiffness matrix taking into account the numerical integration writes

$$K^{M,h} = \begin{pmatrix} K^{00,M,h} & K^{01,M,h} \\ K^{10,M,h} & K^{11,M,h} \end{pmatrix}$$

$$K_{ij}^{\ell m,M,h} = f^{\ell m}\left(\lambda_i^h, \lambda_j^h, T\right) \left(1+\lambda_i^h\right) \left(1+\lambda_j^h\right) \sum_{\ell=1}^{M} \left(\int_\Omega \theta_i^h R z_\ell^h \right) \left(\int_\Omega \theta_j^h R z_\ell^h \right) \tag{E.24}$$

where, again, $f^{\ell m}$ stands for a smooth explicit function.

Now $\forall \left\{\varphi^0_{N,h}, \varphi^1_{N,h}\right\} \in V^h_N \times V^h_N$ and $\left\{\hat{\varphi}^0_{N,h}, \hat{\varphi}^1_{N,h}\right\} \in V^h_N \times V^h_N$, set

$$a^{M,h}_{\omega,S}\left(\left\{\varphi^0_{N,h}, \varphi^1_{N,h}\right\}, \left\{\hat{\varphi}^0_{N,h}, \hat{\varphi}^1_{N,h}\right\}\right) = \{\hat{\alpha}\}^t K^{M,h}\{\alpha\}, \quad \{\alpha\} = \left\{ \begin{array}{c} \{\alpha^0\} \\ \{\alpha^1\} \end{array} \right\} \tag{E.25}$$

if $\varphi^0_{N,h}(x) = \sum_{i=1}^N \alpha^0_i \theta^h_i(x)$, $\varphi^1_{N,h}(x) = \sum_{i=1}^N \alpha^1_i \theta^h_i(x)$ and $\hat{\varphi}^0_{N,h}(x) = \sum_{i=1}^N \hat{\alpha}^0_i \theta^h_i(x)$, $\hat{\varphi}^1_{N,h}(x) = \sum_{i=1}^N \hat{\alpha}^1_i \theta^h_i(x)$.

For every pair of functions $\left\{z^0, z^1\right\} \in V^h_N \times V^h_N$, one can define $\left\{\varphi^0_{N,h}, \varphi^1_{N,h}\right\} \in V^h_N \times V^h_N$ as the unique solution of the variational equation

$$a^{M,h}_{\omega,S}\left(\left\{\varphi^0_{N,h}, \varphi^1_{N,h}\right\}, \left\{\hat{\varphi}^0_{N,h}, \hat{\varphi}^1_{N,h}\right\}\right) = \int_0^L \left(z^1 \hat{\varphi}^0_{N,h} - z^0 \hat{\varphi}^1_{N,h}\right) \quad \forall \left\{\hat{\varphi}^0_{N,h}, \hat{\varphi}^1_{N,h}\right\} \in V^h_N \times V^h_N \tag{E.26}$$

In the same way as in the continuous case, set $\left\{\varphi^0_{N,h}, \varphi^1_{N,h}\right\} = \mathcal{L}^{M,h}_N \left\{z^0, z^1\right\}$.

Finally, define the linear operators

$$\left\{ \begin{array}{ll} \Delta^2_h : V^h_N \longrightarrow V^h_N & \Delta^2_h \theta^h_i = \lambda^h_i \theta^h_i \\ \mathcal{M}^{M,h} : V^h_N \longrightarrow \mathbb{R} & \mathcal{M}^{M,h} \theta^h_i = \mathcal{M}^{M,h}_i \end{array} \right. \tag{E.27}$$

Then, by just using a very weak in space formulation regarding the state equation, a possible space discretization of (E.6) writes

find $\{y_{N,h}(t), \varphi_{N,h}(t)\} \in \mathcal{C}^2\left(0, T; V^h_N\right)^2$ such that

$$\left\{ \begin{array}{c} \int_\Omega y''_{N,h}(t) w_{N,h} + \int_\Omega y_{N,h} \Delta^2_h w_{N,h} = -\int_\gamma v_{N,M,h} \mathcal{M}^{M,h} w_{N,h} \quad \forall w_{N,h} \in V^h_N \\ v_{N,M,h}(t) = \mathcal{M}^{M,h} \varphi_{N,h}(t) \\ \int_\Omega \varphi''_{N,h}(t) w_{N,h} + \int_\Omega \Delta \varphi_{N,h} \Delta w_{N,h} = 0 \quad \forall w_{N,h} \in V^h_N \\ \{\varphi_{N,h}(0), \partial_t \varphi_{N,h}(1)\} = \mathcal{L}^{M,h}_N \left\{y^0_{N,h}, y^1_{N,h}\right\} \\ y^0_{N,h} = P^{N,h}_2 y^0, \quad y^1_{N,h} = P^{N,h}_0 y^1, \end{array} \right. \tag{E.28}$$

where $P^{N,h}_2$ (resp. $P^{N,h}_0$) stands for the orthogonal projection onto the space V^h_N for the H^2 (resp. L^2) scalar product.

Theorem 1 : *The control $v_{N,M,h}$ and the displacement of the controlled beam $y_{N,h}$ in (E.28) converges to the exact control u predicted by HUM and to the solution y of (3.19) when $v = u$ respectively when $h \longrightarrow 0$ first and then $M \longrightarrow +\infty$.*

Remark 2 : Convergence towards the exact gramian (E.17) occurs Bourquin *et al.* (1998) in the same conditions.

Remark 3 : any converging time discretization scheme may be used.

Remark 4 : any finite element method may be used. Actually the essential feature of expression (E.24) lies in the absence of space derivative. A second order derivative has been replaced with an integral. Moreover, measured eigenvalues can be used instead of the computed ones.

In order to construct z_ℓ many methods are possible. The simplest one is probably to consider the eigenmodes of the same structure but with a huge additional mass density lumped along the control

boundary. These modes, once restricted to the control boundary, are proved to be good candidates Bourquin *et al.* (1998). If the plate were replaced with a membrane, they would coincide with the sloshing modes of a fluid in a container with a free boundary. They are defined as the eigenfunctions of the problem

$$\left\{ \begin{array}{ll} find \quad (\lambda, u) \in \mathbb{R} \times V_\gamma \; such \; that & \\ \int_\Omega (\Delta \tilde{u} \Delta \tilde{v} + \tilde{u}\tilde{v}) dx = \lambda \int_\gamma uv & \forall v \in V_\gamma \end{array} \right. \tag{E.29}$$

where V_γ denotes the space of admissible rotations along $\gamma = \partial\Omega$. This is a standard compact selfadjoint eigenvalue problem because the imbedding $V_\gamma \subset L^2(\gamma)$ is compact, the left (respright) - hand side of () is a scalar product over V_γ (resp $L^2(\gamma)$). This problem possesses a family $(\lambda_{\gamma\ell}, u_{\gamma\ell})_{\ell=1}^{+\infty}$ of eigenpairs. It remains to define $z_\ell = u_{\gamma\ell}$.

Standard Lanczos or subspace algorithms can be put to work and implemented in the framework of general purpose finite element softwares Bourquin *et al.* (1998). The main step consists of solving

$$\left\{ \begin{array}{ll} \Delta^2 \bar{v} + \bar{v} = 0 & \Omega \\ \bar{v} = 0, \quad \Delta \bar{v} = w_n & \gamma \end{array} \right. \tag{E.30}$$

and to set $w_{n+1} = \frac{\partial \bar{v}}{\partial \nu}$. Then repeat. The only requirement of the code, in addition to standard low-frequency modes capability, is the possibility to solve *static problems with an imposed external force along the region of control*. But every finite element code can do that. Therefore *the whole method naturally builds upon any general purpose finite element software*. Convergence of the finite element approximations of the boundary modes has been proved. The resulting method proves accurate Bourquin (2001b).

E.5.2 Branch modes

If the artificial boundary mass along the region of control is of the same order of magnitude as the surface (or volume) mass density, we get the so-called *branch modes* which can also be used as a generating family of displacement fields. Let us start with some elements of spectral theory relevant to branch modes. Also they appeal to standard arguments, the authors could not find them in the litterature.

E.5.2.1 Branch modes for the Laplace operator

The so-called *branch modes* solve the Steklov eigenvalue problem

$$\left\{ \begin{array}{ll} -\Delta u + \alpha u = \lambda u & \Omega \\ \frac{\partial u}{\partial \nu} + \alpha \zeta u = \lambda \zeta u & \gamma \end{array} \right. \tag{E.31}$$

here $\gamma = \partial\Omega$, but this is no limitation on this point, and α denotes an arbitrary positive constant. Note that the eigenmodes of this problem would not depend on α that only aims at shifting the eigenvalue away from zero in order to avoid rigid body modes and shorten the discussion. The case when $\alpha = 0$ does not lead to any mathematical difficulty.

A tentative variational formulation of (E.31) would write

$$\int_\Omega \nabla u \nabla v + \alpha uv + \int_\gamma \alpha\zeta uv = \lambda(\int_\Omega uv + \int_\gamma \zeta uv) \tag{E.32}$$

let $u^\gamma = u_{|\gamma}$ and $\bar{u} = u - \mathcal{R}u^\gamma$, where $\mathcal{R}$ stands for the harmonic extension operator in the following sense : for every $u \in H^{1/2}(\gamma)$, $\mathcal{R}u \in H^1(\Omega)$ is the unique solution of

$$\left\{ \begin{array}{ll} -\Delta \mathcal{R}u + \alpha \mathcal{R}u = 0 & \Omega \\ \mathcal{R}u = u & \gamma \end{array} \right. \tag{E.33}$$

then (E.32) writes

$$\begin{array}{c} find \quad (\lambda, \bar{u}, u^\gamma) \in \mathbb{R} \times H_0^1(\Omega) \times H^{1/2}(\gamma) \quad s.t. \\ \int_\Omega \nabla\bar{u}\nabla\bar{v} + \alpha\bar{u}\bar{v} + \int_\Omega \nabla\mathcal{R}u^\gamma \nabla\mathcal{R}v^\gamma + \alpha\mathcal{R}u^\gamma\mathcal{R}v^\gamma + \int_\gamma \alpha\zeta u^\gamma v^\gamma = \lambda(\int_\Omega (\bar{u}+\mathcal{R}u^\gamma)(\bar{v}+\mathcal{R}v^\gamma) + \int_\gamma \zeta u^\gamma v^\gamma) \end{array} \tag{E.34}$$

which is proved to be of the standard form if we set

$$\begin{array}{rcl} a((\bar{u},u^\gamma),(\bar{v},v^\gamma)) & = & \int_\Omega \nabla\bar{u}\nabla\bar{v} + \alpha\bar{u}\bar{v} + \int_\Omega \nabla\mathcal{R}u^\gamma\nabla\mathcal{R}v^\gamma + \alpha\mathcal{R}u^\gamma\mathcal{R}v^\gamma + \int_\gamma \alpha\zeta u^\gamma v^\gamma \\ b((\bar{u},u^\gamma),(\bar{v},v^\gamma)) & = & \int_\Omega (\bar{u}+\mathcal{R}u^\gamma)(\bar{v}+\mathcal{R}v^\gamma) + \int_\gamma \zeta u^\gamma v^\gamma \\ V = H_0^1(\Omega)\times H^{1/2}(\gamma) & & H = L^2(\Omega)\times L^2(\gamma) \end{array} \tag{E.35}$$

Theorem 2 : *the problem (E.34) possesses a countable family of solutions* $(\lambda_k, \bar{u}_k, u_k^\gamma) \in \mathbb{R}^+ \times H_0^1(\Omega)\times H^{1/2}(\gamma)$ *such that the family* $(\bar{u}_k, u_k^\gamma)$ *forms an orthogonal basis of both spaces* $V = H_0^1(\Omega)\times H^{1/2}(\gamma)$ *and* $H = L^2(\Omega)\times L^2(\gamma)$. *The orthogonality holds with respect to the scalar products* $a(,)$ *and* $b(,)$.

Remark 5 : Branch modeshapes are the fields $\bar{u}_k + \mathcal{R}u_k^\gamma$. They do satisfy (E.32) as well as (E.31) in a weak sense.

Ellipticity and continuity follow from standard arguments, and in particular from the regularity theory of elliptic equations. For the sake of completeness, an extended proof is given below.

Let us start with the bilinear form $a(.,.)$. It is continuous over the space $V = H_0^1(\Omega)\times H^{1/2}(\gamma)$ due to the usual trace theorem. It is coercive over the space V because it is bounded from below by the usual scalar product on V. As a matter of fact, the quantity $\int_\Omega \nabla\mathcal{R}u^\gamma\nabla\mathcal{R}v^\gamma + \alpha\mathcal{R}u^\gamma\mathcal{R}v^\gamma$ is equivalent to the square of the standard norm over the space $H^{1/2}(\gamma)$.

As for the form $b(.,.)$, the right space involved is now $H = L^2(\Omega)\times L^2(\gamma)$. Its continuity over H directly follows from the trace theorem in $H^1(\Omega)$ and triangular inequality.

As for its coerciveness, we need the following lemma ensuring the continuity of the operator $\mathcal{R} : L^2(\gamma) \longrightarrow L^2(\Omega)$. Actually we have much more (compactness).

Lemma 1 : *The operator* $\mathcal{R} : L^2(\gamma) \longrightarrow L^2(\Omega)$ *is continuous whenever the solution* w *to the Dirichlet problem over* Ω

$$\begin{aligned} -\nabla^2 w &= f \quad \Omega \\ w &= 0 \quad \partial\Omega \end{aligned} \tag{E.36}$$

satisfies $w \in H^{\frac{3}{2}+\epsilon}(\Omega)$ *whenever* $f \in L^2(\Omega)$.

Proof of lemma 1 : it is standard but we recall it for the sake of completeness. Let $f \in L^2(\Omega)$ denote an arbitrary function and consider a function $v \in H^{\frac{1}{2}}$. Then $\mathcal{R}v$ is defined n the usual sense as a function of the space $H^1(\Omega)$. Moreover, a simple integration by parts shows that

$$\int_\Omega \mathcal{R}vf = -\int_\gamma v\frac{\partial w}{\partial \vec{n}} \tag{E.37}$$

if $\vec{n}$ denotes the unit outer normal vector to Ω along $\partial\Omega$.

Let

$$L(f) = -\int_\gamma v\frac{\partial w}{\partial \vec{n}} \tag{E.38}$$

This is clearly a linear form which is well defined for every $f \in L^2(\Omega)$ because of the regularity assumption. Moreover, we have

$$|L(f)| \leq C \|v\|_{L^2(\gamma)} \|w\|_{H^{\frac{3}{2}+\epsilon}(\Omega)} \tag{E.39}$$

where C denotes a generic positive constant.

Because of the variational continuity of w with respect to f and of the regularity assumption, the mapping $f \longrightarrow w$ is continuous from $L^2(\Omega)$ to $H^{\frac{3}{2}+\epsilon}(\Omega)$ due to the closed-graph theorem. Therefore, it follows from the previous estimate that

$$|L(f)| \leq C \|v\|_{L^2(\gamma)} \|f\|_{L^2(\Omega)} \tag{E.40}$$

Therefore, using $\|\mathcal{R}v\|_{L^2(\Omega)} = \sup_{f\in L^2(\Omega), \|f\|_{L^2(\Omega)}=1} \int_\Omega \mathcal{R}vf$, we get

$$\|\mathcal{R}v\|_{L^2(\Omega)} \leq C \|v\|_{L^2(\gamma)} \tag{E.41}$$

Since $H^{\frac{1}{2}}(\gamma)$ is densely embedded in $L^2(\gamma)$, the operator $\mathcal{R}$ can be extended to a continuous operator from $L^2(\gamma)$ into $L^2(\Omega)$.

QED.

We are now in a position to prove the coerciveness of $b(,)$. A simple calculus shows that

$$b((\bar{v}, v^\gamma), (\bar{v}, v^\gamma)) = \int_\Omega \bar{v}^2 + \int_\Omega (\mathcal{R}v^\gamma)^2 + \int_\gamma \zeta (v^\gamma)^2 + 2\int_\Omega \bar{v}\mathcal{R}v^\gamma \tag{E.42}$$

hence, from Schwarz inequality,

$$b((\bar{v},v^\gamma),(\bar{v},v^\gamma)) \geq \int_\Omega \bar{v}^2 + \int_\Omega (\mathcal{R}v^\gamma)^2 + \int_\gamma \zeta (v^\gamma)^2 - 2\sqrt{\int_\Omega \bar{v}^2}\sqrt{\int_\Omega (\mathcal{R}v^\gamma)^2} \tag{E.43}$$

Now let

$$a = \int_\Omega \bar{v}^2 \quad b = \int_\gamma \zeta (v^\gamma)^2 \quad d = \int_\Omega (\mathcal{R}v^\gamma)^2 \tag{E.44}$$

and let $Q = b((\bar{v},v^\gamma),(\bar{v},v^\gamma))$. What follows aims at establishing that $Q \geq C(a^2+b^2)$ for some positive constant C.

Thus E.43 writes

$$Q \geq a^2 + d^2 + b^2 - 2ad \tag{E.45}$$

First recall the continuity of the operator $\mathcal{R} : L^2(\gamma) \longrightarrow L^2(\Omega)$ if the boundary of the domain Ω is smooth enough. Hence, $d \leq \alpha b$ for some positive α. ¿From this estimate and from the obvious inequality $|ad| \leq \frac{1}{2}\left(\epsilon a^2 + \frac{d^2}{\epsilon}\right)$ for every positive ϵ, it follows that

$$Q \geq a^2(1-\epsilon) + b^2 + d^2(1-\frac{1}{\epsilon}) \tag{E.46}$$

and, for $\epsilon \leq 1$,

$$Q \geq a^2(1-\epsilon) + b^2(1+\alpha(1-\frac{1}{\epsilon})) \tag{E.47}$$

Therefore, choosing $\epsilon = \frac{\alpha}{\alpha+\frac{1}{2}}$, it follows that $1+\alpha(1-\frac{1}{\epsilon}) = \frac{1}{2}$ and $1-\epsilon = \frac{\frac{1}{2}}{\frac{1}{2}+\alpha}$, hence

$$Q \geq min(\frac{1}{2}, \frac{\frac{1}{2}}{\frac{1}{2}+\alpha})(a^2+b^2) \tag{E.48}$$

QED.

Because the space V is continuously and compactly embedded into the space H, the standard abstract theory of self-adjoint compact operators shows that problem E.34 possesses a countable family of solutions $(\lambda_k, \bar{u}_k, u_k^\gamma) \in \mathbb{R}^+ \times H_0^1(\Omega) \times H^{1/2}(\gamma)$ such that the family $(\bar{u}_k, u_k^\gamma)$ forms an orthogonal basis of both spaces $H_0^1(\Omega) \times H^{1/2}(\gamma)$ and $L^2(\Omega) \times L^2(\gamma)$. The orthogonality holds with respect to the scalar products $a(,)$ and $b(,)$.

QED

Branch modeshapes are the fields $u_k^b = \bar{u}_k + \mathcal{R}u_k^\gamma$. They do satisfy (E.32) as well as (E.31) in a weak sense.

E.5.2.2 Branch modes for the boundary control of thin plates

They solve the Steklov eigenvalue problem

$$\begin{cases} \Delta^2 u = \lambda u & \Omega \\ u = 0, \quad \Delta u = \lambda \frac{\partial u}{\partial \nu} & \gamma \end{cases} \tag{E.49}$$

which possesses a family $\left\{\lambda_k^b, u_k^b\right\}_{k=1}^{+\infty}$ of solutions by the same arguments as in the previous section.

More precisely, let $\mathcal{R}$ stand in this section for the biharmonic extension operator in the following sense : for every $u \in H^{1/2}(\gamma)$, $\mathcal{R}u \in H^2(\Omega)$ is the unique solution of

$$\left\{ \begin{array}{ll} -\Delta^2 \mathcal{R}u + \alpha \mathcal{R}u = 0 & \Omega \\ \frac{\partial \mathcal{R}}{\partial \nu} = u & \gamma \end{array} \right. \tag{E.50}$$

Let us now define the bilinear forms and spaces

$$\begin{array}{rcl} a((\bar{u}, u^\gamma), (\bar{v}, v^\gamma)) & = & \displaystyle\int_\Omega \Delta\bar{u}\Delta\bar{v} + \alpha\bar{u}\bar{v} + \int_\Omega \Delta\mathcal{R}u^\gamma \Delta\mathcal{R}v^\gamma + \alpha\mathcal{R}u^\gamma\mathcal{R}v^\gamma + \int_\gamma \alpha\zeta u^\gamma v^\gamma \\ b((\bar{u}, u^\gamma), (\bar{v}, v^\gamma)) & = & \displaystyle\int_\Omega (\bar{u} + \mathcal{R}u^\gamma)(\bar{v} + \mathcal{R}v^\gamma) + \int_\gamma \zeta u^\gamma v^\gamma \\ V = H_0^2(\Omega) \times H^{1/2}(\gamma) & & H = L^2(\Omega) \times L^2(\gamma) \end{array} \tag{E.51}$$

By just extending the approach of the previous section, we can prove the following result :

Theorem 2 : *the problem (E.49) possesses a countable family of solutions* $(\lambda_k^b, \bar{u}_k, u_k^\gamma) \in \mathbb{R}^+ \times H_0^2(\Omega) \times H^{1/2}(\gamma)$ *such that the family* $(\bar{u}_k, u_k^\gamma)$ *forms an orthogonal basis of both spaces* $V = H_0^2(\Omega) \times H^{1/2}(\gamma)$ *and* $H = L^2(\Omega) \times L^2(\gamma)$. *The orthogonality holds with respect to the scalar products* $a(,)$ *and* $b(,)$.

Remark 6 : branch modeshapes are the fields $u_k^b = \bar{u}_k + \mathcal{R}u_k^\gamma$. They do satisfy (E.49) in a weak sense.

¿From this definition, we get

$$\frac{\partial u_k^b}{\partial \nu}_{|\gamma} = u_k^\gamma \tag{E.52}$$

It turns out that $\left\{u_k^\gamma\right\}_{k=1}^{+\infty}$ forms a dense family in $H^{1/2}(\gamma)$ and $L^2(\gamma)$. The orthogonality is lost. This means that more branch modes than sloshing modes may be necessary to reconstruct boundary stresses with a given accuracy.

Nevertheless, by just setting $z_\ell = u_\ell^\gamma$, we still have the property that $P^M \Delta\theta_{j|\gamma} \longrightarrow \Delta\theta_{j|\gamma}$ when $M \longrightarrow +\infty$, where P^M stands for the orthogonal projection onto $Span\left\{z_1, ..., z_M\right\}$ for the $L^2(\gamma)$ scalar product.

Note that the scalar product used for the projection is not the scalar product for which the branch modes are orthogonal. This is on purpose since the latter does not enable suitable integrations by parts.

However, after a little computation we get $P^M \Delta\theta_j = \sum_{\ell=1}^M x_\ell z_\ell$, where $x = \{x_1, ..., x_M\}^t$ solves the small-scale symmetric positive linear system

$$\mathcal{A}x = f \tag{E.53}$$

where

$$f = \{f_1, ..., f_M\}^t \qquad f_k = \left(\lambda_k^b - \lambda_j\right) \int_\Omega \theta_j u_k^b \qquad \mathcal{A}_{k\ell} = \int_\gamma z_k z_\ell \tag{E.54}$$

Again, above modes and integral formulas can be accurately approximated by standard finite elements. Therefore, the projection $P^M \Delta\theta_j$ wil be approximated by $P^{M,h}\Delta\theta_j = \sum_{\ell=1}^M x_\ell^h z_\ell^h$, where

$$\mathcal{A}^h x^h = f^h \tag{E.55}$$

and

$$f^h = \left\{f_1^h, ..., f_M^h\right\}^t \qquad f_k^h = \left(\lambda_k^{b,h} - \lambda_j^h\right) \int_\Omega \theta_j^h u_k^{b,h} \qquad \mathcal{A}_{k\ell}^h = \int_\gamma z_k^h z_\ell^h \tag{E.56}$$

Therefore the solution x^h can be accurately computed for a given M. Then when M is chosen large enough, and h small enough, we recover the bending moment $\Delta\theta_{j|\gamma}$.

Finally, if we impose the boundary condition $\Delta u = \lambda\zeta \frac{\partial u}{\partial \nu}$ *on* γ, in E.31, and if $\zeta \longrightarrow +\infty$, then the branch modes converge to the sloshing modes.

Note that computing branch modes relies on the possibility to define an dditional artificial mass distribution along the region of control. Then a standard eigenvalue solver can be put to work. This makes a difference with exact sloshing modes that would rather appeal to a special purpose eigenvalue solver within which linear solves are replaced with a call to Neumann routines, thus requiring intruding in the eignevalue solver itself. The blind computation of sloshing modes with a standard eigenvalue solver may not be safe because in this case the mass matrix is strongly singular since the mass is lumped along the region of control only.

E.5.2.3 Numerical tests

In this section, we shall consider the branch modes associated with the wave equation on a thick beam.

The main question is to validate the quality of the approximate boundary stresses computed with a given number of boundary modes and to compare the effectiveness of sloshing modes and branch modes. To this end $\left\|P^M\mathcal{M}_j - \mathcal{M}_j\right\|_L^2(\gamma)$ will be computed for ζ very large and for $\zeta = 1$.

First a simple structure is chosen for which all modes of interest are known

E.5.3 Wave equation in a parallelepipedic domain

Let $\Omega = [0, L_x] \times [0, L_y] \times [0, L_z]$ where $L_x = 2$, $L_y = 0.5$ et $L_z = 0.4$.
Let $\Gamma_1 = \partial\Omega \bigcap x = 0$, $\Gamma_2 = \partial\Omega \bigcap x = L_x$ and Γ_3 such that $\Gamma_1 \bigcup \Gamma_2 \bigcup \Gamma_3 = \partial\Omega$.
the modes u_i under consideration here satisfy

$$\begin{cases} -\Delta u_i = \lambda_i u_i & \text{in} \quad \Omega \\ u_i = 0 & \text{on} \quad \Gamma_1 \cup \Gamma_2 \\ \frac{\partial u_i}{\partial \vec{n}} = 0 & \text{on} \quad \Gamma_3 \end{cases} \tag{E.57}$$

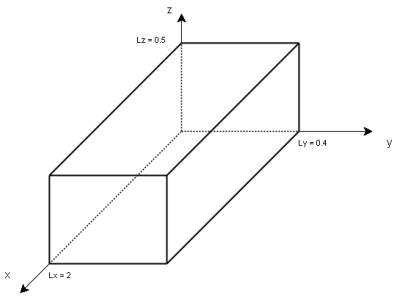


FIG. E.1 – Geometry and FE mesh

Assume we control the solid along Γ_2. Then we need an approximation of $\frac{\partial u_i}{\partial \vec{n}}\Big|_{\Gamma_2}$ in $L^2(\Gamma_2)$. To this end, let us introduce the branch modes as the solutions of

$$\begin{cases} -\Delta u^b + \alpha u^b = \lambda \alpha u^b & \text{in} \quad \Omega \\ u^b = 0 & \Gamma_1 \\ \frac{\partial u^b}{\partial \vec{n}} + \zeta u^b = \lambda \zeta u^b & \text{on} \quad \Gamma_2 \\ \frac{\partial u^b}{\partial \vec{n}} = 0 & \text{on} \quad \Gamma_3 \end{cases} \tag{E.58}$$

Set $z_\ell = u^b_\ell\Big|_{\Gamma_2}$. Let us now approximate the normal stress $\Phi = \frac{\partial u_i}{\partial \vec{n}}\Big|_{\Gamma_2}$ by its projection $P^M\Phi$ over the space spanned by the first M traces z_ℓ of the branch modes on Γ_2.

$$P^M\Phi = \sum_{l=1}^{M} \alpha_l z_l|_\Gamma \tag{E.59}$$

where the coefficient α_l, $(l = 1..M)$ satisfy

$$\|P^M\Phi - \Phi\|^2_{L^2(\Gamma_2)} = \min_{\Phi' \in V_M} \|\Phi' - \Phi\|^2_{L^2(\Gamma_2)} \tag{E.60}$$

The finite element approximation of $P^M\Phi$ is computed according to (E.55) and (E.56).

It turns out that eigenmodes u_i that solve (E.57) can be computed explicitely. They write

$$u_i = u_{\mathbf{s}} = \frac{1}{N} sin\left(\frac{s_1\pi x}{L_x}\right) cos\left(\frac{s_2\pi y}{L_y}\right) cos\left(\frac{s_3\pi z}{L_z}\right) \tag{E.61}$$

where $\mathbf{s} = \{s_1, s_2, s_3\}$ stands for a multi-index denoting the mode number and N a normalizing constant. Their normal derivative along Γ_2 write

$$\frac{\partial u_{\mathbf{s}}}{\partial \vec{n}}\Big|_{x=L_x} = \frac{1}{N}\frac{s_1\pi}{L_x} cos\left(\frac{s_1\pi L_x}{L_x}\right) cos\left(\frac{s_2\pi y}{L_y}\right) cos\left(\frac{s_3\pi z}{L_z}\right) \tag{E.62}$$

On figure (E.2) the finite element approximation of the exact modes 2, 5, 9 and 16 are displayed. They coincide with indices $\mathbf{s} = \{2, 0, 0\}$, $\mathbf{s} = \{1, 1, 0\}$, $\mathbf{s} = \{1, 0, 1\}$ and $\mathbf{s} = \{1, 1, 1\}$ respectively.

The first 4 branch modes computed by finite elements are displayed on figure (E.3).

It is then possible to compute the approximation error

$$\left\| P^{M,h}\frac{\partial u^h_i}{\partial \vec{n}}\Big|_{\Gamma_2} - \frac{\partial u^{exact}_i}{\partial \vec{n}}\Big|_{\Gamma_2} \right\|^2_{L^2(\Gamma_2)} \tag{E.63}$$

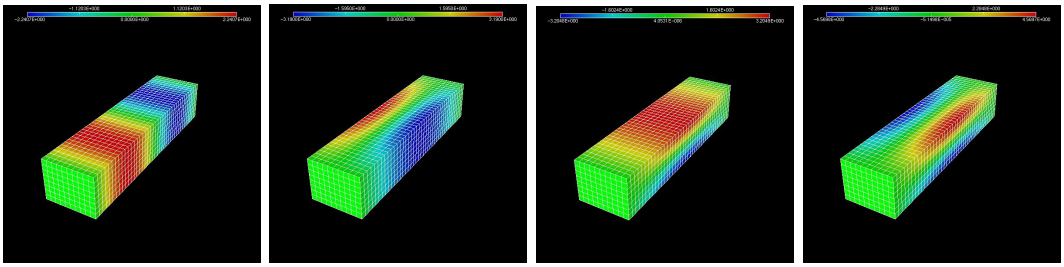


FIG. E.2 – Modeshapes 2, 5, 9 et 16

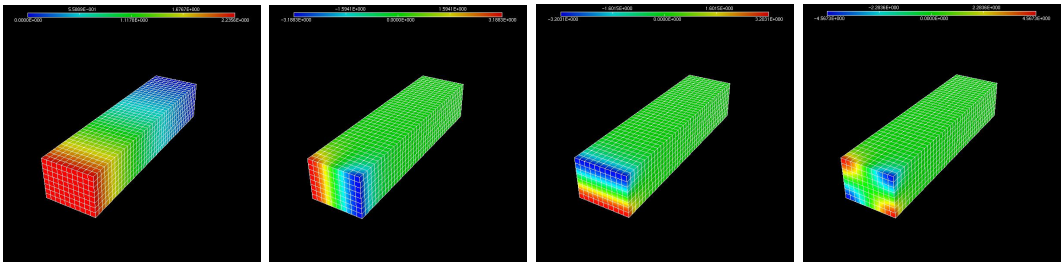


FIG. E.3 – The first 4 branch modes

where $\frac{\partial u_i^{exact}}{\partial \vec{n}}\big|_{\Gamma_2}$ is given analytically by (E.62). On figure (E.4) this error is plotted for modes 2, 5, 9 and 16 as function of the number M of branch modes retained in the projection.

Nous voyons que cette erreur tend très rapidement vers 0 avec M. Pour calculer le flux du deuxième mode ($\mathbf{s} = \{2, 0, 0\}$), un seul mode de branche suffit. Ce flux est constant sur toute la face et peut donc être approché par la trace sur Γ_2 du premier mode de branche qui est constante elle aussi. Ceci est en réalité valable pour les 4 premiers modes auxquels correspondent les indices de $\mathbf{s} = \{1, 0, 0\}$ à $\mathbf{s} = \{4, 0, 0\}$.

Le cinquième mode correspond à l'indice $\mathbf{s} = \{1, 1, 0\}$. On remarque dans ce cas que deux modes de branche suffisent à en approcher le flux sur Γ_2. Le flux approché est comparé à la solution exacte sur la figure E.5 : les deux surfaces se superposent parfaitement.

Le même raisonnement explique que le neuvième mode (indice $\mathbf{s} = \{1, 0, 1\}$) nécessite au moins 3 modes de branche pour une approximation du flux, et le seizième mode (indice $\mathbf{s} = \{1, 1, 1\}$) nécessite au moins 4 modes.

On remarque dans tous les cas que le nombre de modes de branche nécessaire croît de manière beaucoup plus lente que l'ordre du mode dont on calcule le flux. Dans le cas où, pour un champ thermique quelconque, nous sommes en mesure de calculer sa projection sur un certain nombre de modes propres, le flux de ce champ pourra quant à lui être approché sur une base de modes de branche de taille beaucoup plus réduite, d'où l'intérêt de la démarche.

E.6 Concluding remarks

This paper contributes with a general preprocessing strategy for mechanical systems in view of displacement and boundary or pointwise control. Alternative expressions for computing the boundary

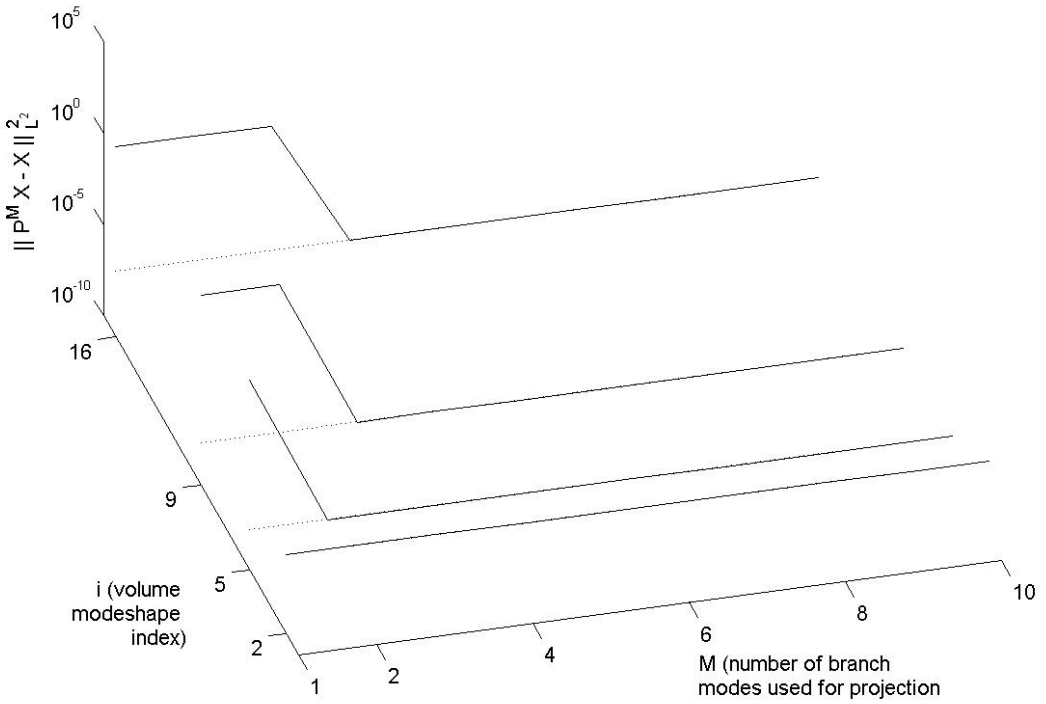


FIG. E.4 – Erreur d'approximation $\left\| P^{M,h} \frac{\partial u_i^h}{\partial \vec{n}}\Big|_{\Gamma_2} - \frac{\partial u_i^{exact}}{\partial \vec{n}}\Big|_{\Gamma_2} \right\|^2_{L^2(\Gamma_2)}$ as a function of M for $i \in \{2, 5, 9, 16\}$

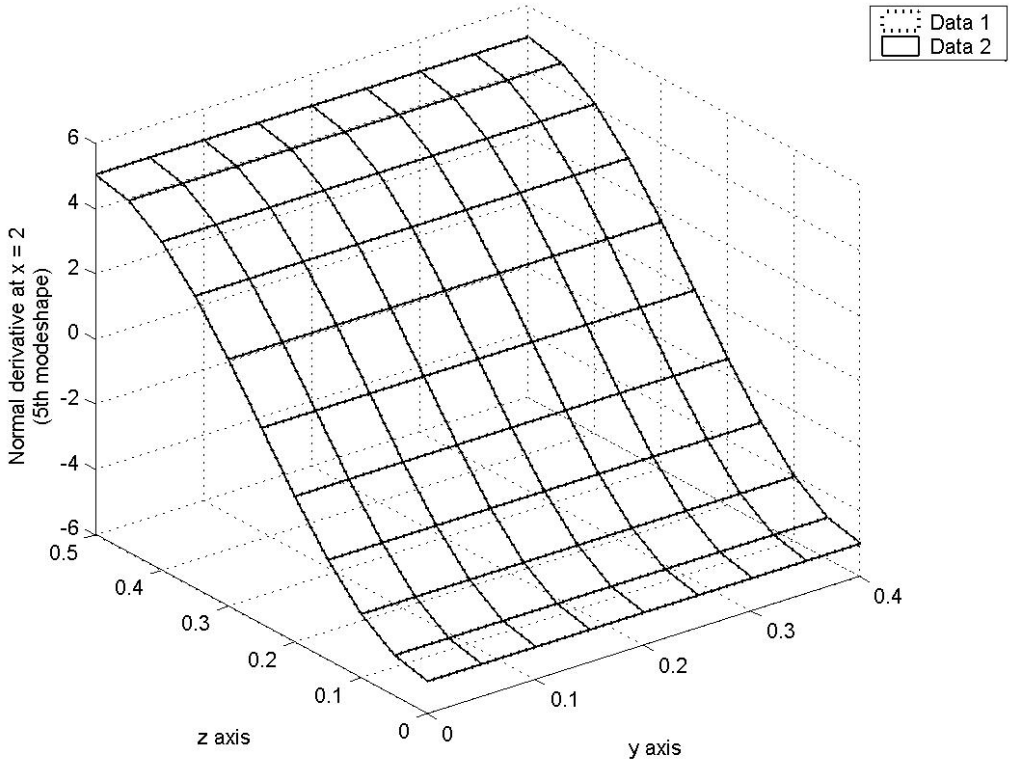


FIG. E.5 – Flux exact et flux approché sur Γ_2 du cinquième mode propre

modal stresses that are basic to the computation of boundary displacement controls have been presented or recalled. The expressions take advantage of non-harmonic Fourier series along the region of control. To this end, an orthogonal basis and a dense family have been proposed. The first method uses generalized sloshing modes, and has been successfully put to work Bourquin *et al.* (1998), whereas the new one uses branch modes. All these modes are commonly encountered in dynamics of structures and can be computed efficiently in various ways, also branch modes surpass sloshing modes in this respct. The first method turns out to be the limit case of the second one.

The resulting numerical method for computing the controllability gramian proves very general. They can be relatively easily implemented in, or interfaced with, existing general purpose finite element softwares. They are also fully compatible with real-time implementation.

Bibliographie

Al-Khalidy, N. 1998. A general space marching algorithm for the solution of two-dimensional boundary inverse heat conduction problems. *Numerical Heat Transfer,part B*, **34**, 339–360.

Alifanov, O. M. 1994. *Inverse Heat Transfer Problems*. Springer-Verlag, New York.

Alifanov, O. M., & Egerov, Y. V. 1985. Algorithm and results of solving inverse heat-conduction boundary problems in a two-dimensional formulation. *J. Engng. Phys.*, **48**, 489–496.

Alifanov, O. M., & Rumyantsev, S. V. 1988. Application of iterative regularization for the solution of incorrect inverse problems. 1335–1342.

Alifanov, O. M., Artyukhin, E. A., & Rumyantsev, S. V. 1995. *Extreme methods for solving ill-posed problems with applications to inverse heat transfer problems*. Begell house, inc.

Auroux, D. 2002. Assimilation variationnelle de données océanographiques : approches primale et duale. *Annales mathématiques Blaise Pascal*, **9**(2), 147–159.

Banks, H.T., Ito, K., & Wang, Y. 1991. Exponentially stable approximations of weakly damped wave equations. *Pages 1–33 of : Proc. Int. Conf. on Estimation and control of distributed parameter systems, Vorau, Austria*.

Baratta, A., Bourquin, F., Corbi, O., Hochrainer, M., Luo, N., Magonette, G., Marazzi, F., & Rodellar, J. 2004. Methods for structural control. *European Earthquake Engineering*, **1**, 20–26.

Bardos, C., Bourquin, F., & Lebeau, G. 1991. Calcul de dérivées normales et méthode de Galerkin appliquée au problème de la contrôlabilité exacte. *C.R. Acad. Sci., série 1*, **313**, 757–760.

Basseville, M., Abdelghani, M., & Benveniste, A. 2000. Subspace-based fault detection algorithms for vibration monitoring. *Automatica*, **36**(1), 101–109.

Basseville, M., Mevel, L., & Goursat, M. 2004. Statistical model-based damage detection and localization : subspace-based residuals and damage-to-noise sensitivity ratios. *Journal of Sound and Vibration*, **275**, 769–794.

Basseville, M., Bourquin, F., Mevel, L., Nasser, H., & Treyssède, F. 2006a. Handling the temperature effect in SHM : combining a subspace-based statistical test and a temperature-adjusted null space. *In : Proceedings of the 3rd European Workshop on Structural Health Monitoring*. To appear.

Basseville, M., Bourquin, F., Mevel, L., Nasser, H., & Treyssède, F. 2006b. A statistical nuisance rejection approach to handling the temperature effect for monitoring civil structures. *In : Proceedings of the 4th IASC World Conference on Structural Control and Monitoring*. To appear.

Battaglia, J. L. 2002. A modal approach to solve inverse heat conduction problems. *Inverse Problems in Engng*, **10**(1), 41–63.

Beck, J. V. 1970. Nonlinear estimation applied to the nonlinear inverse heat conduction problem. *Int. J. Heat Mass Transfer*, **13**(4), 703–716.

Beck, J. V., Blackwell, B., & Clair, C. ST. 1985. *Inverse heat conduction, ill-posed problems*. Wiley interscience, New York.

Beck, J. V., Blackwell, B., & Hajisheikh, A. 1996. Comparison of some inverse heat conduction methods using experimental data. *Int. J. Heat Mass Transfer*, **39**(17), 3649–3657.

Berntsson, F. 1998. *Numerical solution of an inverse heat conduction problem*. Ph.D. thesis, Linköpings universitet, Sweden, LiU-TEK-LIC-1998 :67.

Blum, J., & Marquardt, W. 1997. An optimal solution to inverse heat conduction problems based on frequency-domain interpretation and observers. *Numerical Heat Transfer,part B*, **32**, 453–478.

Bocquet, M. 2005a. Reconstruction of an atmospheric tracer source using the principle of maximum entropy. I : Theory. *Quart. J. Roy. Meteor. Soc., part B*, **610**, 2191.

Bocquet, M. 2005b. Reconstruction of an atmospheric tracer source using the principle of maximum entropy. II : Applications. *Quart. J. Roy. Meteor. Soc., part B*, **610**, 2209.

Bourquin, F. 1993. Approximation Theory for the problem of exact controllability of the wave equation with boundary control. *Pages 103–112 of :* Kleinman, Ralph et al. (ed), *Mathematical and numerical aspects of wave propagation. Proceedings of the 2nd international conference held in Newark, DE, USA, June 7-10, 1993*. Paris : SIAM.

Bourquin, F. 1995. A numerical controllability test for distributed systems. *J. of Structural Control*, **2**, 5–23.

Bourquin, F. 1998. *Control of flexible structures : control theory and approximation issues*. CIMNE, Barcelona.

Bourquin, F. 2000. Approximation for the fast stabilization of the wave equation from the boundary. *In : Proceedings of MMAR2000, Poland, 08-2000*.

Bourquin, F. 2001a. Numerical methods for the control of flexible structures : extended abstract of Briffaut's thesis. *Journal of Structural Control*, **8**(1), 83–103.

Bourquin, F. 2001b. On the computation of B^*. *In : Proceedings of the European meeting on intelligent systems, EMIS2001, Ischia, Italy, 09-2001*.

Bourquin, F. 2001c. On the computation of B^*. *In : Proceedings of the European meeting on intelligent systems, EMIS2001.*

Bourquin, F. 2002. Approximate normal stresses for the boundary control of flexible structures. *In : European workshop on smart structures in engineering and technology, Giens, France.*

Bourquin, F., & Nassiopoulos, A. 2006a. Assimilation thermique 1D par méthode adjointe libérée. *In : Problèmes inverses.* Collection Recherche du LCPC, à paraître.

Bourquin, F., & Nassiopoulos, A. 2006b. A step towards model-based temperature elimination in Structural Health Monitoring. *In : Proceedings of the 4th IASC World Conference on Structural Control and Monitoring.*

Bourquin, F., & Nassiopoulos, A. 2007. On the use of branch modes in optimal control. *J. of Mechanics.* à soumettre.

Bourquin, F., Namar, R., & Urquiza, J. 1998. Discretization of the controllability gramian in view of the exact boundary control : the case of thin plates. *Proceedings of the IFIP WG 7.2 Conference on Optimal Control of Partial Differential Equations, Chemnitz (Allemagne).*

Bourquin, F., Branchet, B., & Collet, M. 2004. Variational crime for the boundary control of structures. *In : Proceedings of the 3rd European Conference on Structural Control, Vienna, Austria, 13-15 July 2004.*

Bourquin, F., Branchet, B., & Collet, M. 2007. Computational methods for the fast boundary stabilization of flexible structures. Part 1 : The case of beams. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, **196**(4-6), 988–1005.

Brandes, K., & Griesse, R. 2007. Quantitative Stability Analysis of Optimal Solutions in PDE-Constrained Optimization. *J. Comp. Appl. Math.*, **206**(2), 809–826.

Brézis, H. 1999. *Analyse fonctionnelle : théorie et application.* Dunod.

Büskens, C., & Griesse, R. 2006. Parametric Sensitivity Analysis of Perturbed PDE Optimal Control Problems with State and Control Constraints. *Journal of Optimization Theory and Applications*, **131**(1), 17–35.

Burggraf, O. R. 1964. An exact solution of the inverse problem in heat conduction theory and applications. *ASME J. Heat Transfer*, **86**, 373–382.

Carme, S., Pham, D.T., & Verron, J. 2001. Improving the singular evolutive extended Kalman filter for strongly nonlinear models for use in ocean data assimilation. *Inverse Problems*, **17**, 1535–1559.

Carthel, C., Glowinski, R., & Lions, J.-L. 1994. On exact and approximate boundary controllabilities for the heat equation : a numerical approach. *Journal of Optimization Theory and Applications*, **82**, 429–484.

Chang, C.-W., Liu, C.-S., & Chang, J.-R. 2005. A group preserving scheme for inverse heat conduction problems. *Computer Modeling in Engineering and Sciences*, **1**, 13–38.

Chantasiriwan, S. 2001. An algorithm for solving mutlidimensional inverse heat conduction problem. *Int. J. Heat Mass Transfer*, **44**, 1455–1463.

Chapko, R., & Kügler, P. 2004. A comparison of the Landweber method and Gauss-Newton method for an inverse parabolic boundary value problem. *J. Comp. Appl. Math.*, **169**, 183–196.

Chapko, R., Kress, R., & Yoon, J.-R. 1998. On the numerical solution of an inverse boundary value problem for the heat equation. *Inverse Problems*, **14**, 853–867.

Chen, H.-T., & Wu, X.-Y. 2006. Estimation of heat transfer coefficient in two-dimensional inverse heat conduction problems. *Numerical Heat Transfer,part B*, **50**, 375–394.

Chen, H.-T., Lin, S.-Y., Wang, H.-R., & Fang, L.-C. 2002. Estimation of the two-sided boundary conditions for two-dimensional inverse heat conduction problems. *Int. J. Heat Mass Transfer*, **45**, 15–23.

Chenais, D. 1994. Discrete gradient and discretized continuum gradient methods for shape optimization of shells. *Mechanics of Structures and Machines*, **22**(1), 73–114.

Chiwiacowski, L. D., & de Campos Velho, H. F. 1991. Different approaches for the solution of a backward heat conduction problem. *Inverse Problems in Engng*, **11**(6), 471–494.

Ciarlet, P.G. 1978. *The Finite Element Method for Elliptic Problems*. North Holland, Amsterdam.

Ciarlet, P.G. 2000. *Introduction à l'analyse numérique matricielle et à l'optimisation*. Dunod.

Colaço, M. J., Orlande, H. R. B., & Dulikravich, G. S. 2006. Inverse and optimization problems in heat transfer. *J. of the Braz. Soc. of Mech. Sci. and Eng.*, **28**(1), 1–24.

Constantinescu, A., Ivaldi, D., & Stolz, C. 2004. Identification du chargement thermique transitoire par contrôle optimal. à paraître.

Courtier, P. 1997. Dual formulation of four-dimensional variational assimilation. *Quart. J. Roy. Meteor. Soc.*, **123**, 2449–2461.

Cremona, Ch. 2004. Dynamic monitoring applied to the detection of structural modifications : A high speed railway bridge study. *Pages 147–161 of : Progress in Structural Engineering and Materials*, vol. 3. Wiley.

Del Barrio, E. P. 2003. Multidimensional inverse heat conduction problems solution via Lagrange theory and model size reduction techniques. *Inverse Problems in Engng*, **11**, 515–539.

Delattre, B., Ivaldi, D., & Stolz, C. 2001. Application du contrôle optimal à l'identification d'un chargement thermique. *Pages 393–404 of : REEF, Giens '01*.

D'Souza, N. 1975. Numerical solution of one-dimensional inverse transient heat conduction by finite difference method. *ASME paper75-WA/HT-81*.

Ekeland, I., & Temam, R. 1974. *Analyse convexe et problèmes variationnels*. Dunod : Gauthier-Villars.

El Bagdouri, M., & Jarny, Y. 1986. Optimal boundary control of a thermal system : inverse conduction problem. *In : IFAC control of distributed parameter systems*. Los Angeles, California, USA.

Eldén, L. 1997. Solving an inverse heat-conduction problem by a "method of lines". *Journal of Heat Transfer Transactions, ASME*, **119**, 406–412.

Engl, H. W., Hanke, M., & Neubauer, A. 1994. *Regularization of Inverse Problems*. Kluwer Academic Publishers.

Erlicher, S., & Bourquin, F. 2006. Thin prestressed structures revisited. *European Journal of Mechanics*, **to appear**.

Farrar, C. R., & Jauregui, D. V. 1996. Damage detection algorithms applied to experimental and numerical model data from the I-40 bridge. *Los Alamos National Laboratory Internal Reports*.

Farrar, C. R., Hemez, F., Shunk, D., Stinemates, D., & Nadler, B. 2003. A review of SHM literature : 1996-2001. *Los Alamos National Laboratory Internal Reports*.

Flament, B., Bourquin, F., & Neveu, A. 1993. Synthèse modale : une méthode de sous-structuration dynamique pour la modélisation des systèmes thermiques linéaires. *International Journal of Heat and Mass Transfer*, **36**(6), 1649–1662.

Géradin, M., & Rixen, D. 1994. *Mechanical vibrations : theory and applications to structural dynamics*. Wiley.

Giering, R., & Kaminski, T. 1998. Recipes for adjoint code construction. *ACM Trans. Math. Soft.*, **24**(4), 437–474.

Girault, M., Petit, D., & Videcoq, E. 2003. The use of model reduction and function decomposition for identifying boundary conditions of a linear thermal system. *Inverse Problems in Engng*, **11**, 425–455.

Glowinski, R., & Lions, J.-L. 1994. Exact and approximate controllability for distributed parameter systems. *Acta Numerica*, 269–378.

Glowinski, R., & Lions, J.-L. 1996. Exact and approximate controllability for distributed parameter systems. *Acta Numerica*, 159–333.

Gove, J. H., & Hollinger, D. Y. 2006. Application of a dual unscented Kalman filter for simultaneous state and parameter estimation in problems of surface-atmosphere exchange. *Journal of Geophysical Research*, **111**, 1–21.

Griesse, R. 2004. Parametric Sensitivity Analysis in Optimal Control of a Reaction Diffusion System - Part I : Solution Differentiability. *Num. Funct. Anal. Optim.*, **25**(1-2), 93–117.

Han, H., Ingham, D.B., & Yuan, Y. 1995. The boundary element method for the solution of the backward heat conduction equation. *J. of Comput. Physics*, **116**, 292–299.

Hanke, M. 1995a. *Conjugate gradient type methods for ill-posed problems.* Longman Scientific & Technical.

Hanke, M. 1995b. The minimal error conjugate gradient method is a regularization method. *Proceedings of the AMS*, **123**(11), 3487–3497.

Hascoët, L., & Pascual, V. 2004. *TAPENADE 2.1 user's guide.* INRIA.

Hoteit, I., Pham, D.T., & Blum, J. 2000. Efficient reduced Kalman filtering and application to altimetric data assimilation in Tropical Pacific. *INRIA Internal reports*, **3937**, 1–41.

Hoteit, I., Pham, D.T., & Blum, J. 2002. A simplified reduced order Kalman filtering and application to altimetric data assimilation in Tropical Pacific. *Journal of Marine Systems*, **36**, 101–127.

Hsu, P.-T. 2006. Estimating the boundary condition in a 3D inverse hyperbolic heat conduction problem. *Applied Mathematics and Computation*, **177**, 453–464.

Huang, C.-H., & Lo, H.-C. 2005. A three-dimensional inverse problem in predicting the heat fluxes distribution in the cutting tools. *Numerical Heat Transfer,part A*, **48**, 1009–1034.

Huang, C.-H., & Özisik, M. N. 1992. Inverse problem of determining unknown wall heat flux in laminar flow through a parallel plate duct. *Numerical Heat Transfer,part A*, **21**, 55–70.

Huang, C.-H., & Tsai, Y.-L. 2005. A transient 3-D inverse problem in imaging the time-dependent local heat transfer coefficients for plate fin. *Applied Thermal Engineering*, **25**, 2478–2495.

Huang, C.-H., & Wang, S.-P. 1999. A three-dimensional inverse heat conduction problem in estimating surface heat flux by conjugate gradient method. *Int. J. Heat Mass Transfer*, **42**(18), 3387–3403.

Huang, C.-H., & Wu, H.-H. 2006. An inverse hyperbolic heat conduction problem in estimating surface heat flux by the conjugate gradient method. *J. of Phys. D : Appl. Phys.*, **39**, 4087–4096.

Huang, C.-H., & Yan, J.-Y. 1995. An inverse problem in simultaneously measuring tmperature-dependent thermal conductivity and heat capacity. *Int. J. Heat Mass Transfer*, **38**(18), 3433–3441.

Huang, C.-H., Tsai, Y.-L., & Chen, H.-M. 2005. A 3D inverse problem in setimating the time-dependent heat transfer coefficients for plate fins. *In : Proceedings of the 5th International Conference on Inverse Problems in Engineering : Theory and Practice.*

Hunt, B.R., adn E.J. Kostelich, E. Kalnay, Ott, E., Patil, D.J., Sauer, T., Szunyogh, I., Yorke, J.A., & Zimin, A.V. 2004. Four-dimensional ensemble Kalman filtering. *TELLUS, series A*, **56**(4), 273–277.

Inaudi, D., Rufenacht, A., von Arx, B., Vurpillot, S., Noher, H.P., & Glisic. 2001. Monitoring a concrete arch bridge during construction. *In : 3rd International conference on arch bridges, 2001, Paris, France.*

Jarny, Y., Özisik, M. N., & Bardon, J. P. 1991. A general optimization method using adjoint equation for solving multidimensional inverse heat conduction. *Int. J. Heat Mass Transfer*, **34**(11), 2911–2919.

Ji, C.-C., Tuan, P.-C., & Jang, H.-Y. 1997. A recursive least-squares algorithm for on-line 1-D inverse heat conduction estimation. *Int. J. Heat Mass Transfer*, **40**(9), 2081–2096.

Jirasek, M., & Bažant, Z.P. 2002. *Inelastic analysis of structures.* Wiley, Chichester.

Johansson, T. 2005. An iterative method for reconstruction of temperature. *In : Proceedings of the 5th international conference on inverse problems in engineering : Theory and Practice, Cambridge, UK.*

Johansson, T. 2006. An iterative method for reconstruction of temperature. *J. Inv. Ill-posed Problems*, **14**, 267–278.

Kalman, R. E. 1960. A New Approach to Linear Filtering and Prediction Problems. *Transactions of the ASME - Journal of Basic Engineering*, **82**, 35–45.

Kalnay, E. 2003. *Atmospheric Modeling, Data Assimilation and Predictability.* Cambridge University Press.

Kügler, P. 2003. Identification of a temperature dependent heat conductivity from single boundary measurements. *SIAM J. Numer. Anal.*, **41**(4), 1543–1563.

Kim, Y., & Nelson, P.A. 2000. Optimal regularization for acoustic source reconstruction by inverse methods. *In : Inter Noise 2000, Nice France.*

Kim, Y., & Nelson, P.A. 2004. Optimal regularization for acoustic source reconstruction by inverse methods. *J. Sound Vibr.*, **275**, 463–487.

King, J. T. 1989. A minimal error conjugate gradient method for ill-posed problems. *Journal of Optimization Theory and Applications*, **60**, 297–304.

Klinker, E., Rabier, F., Kelly, G., & Mahfouf, J.-F. 2000. The ECMWF operational implmentation of four dimensional variational assimilation. Part III : Experimental results and diagnostics with operational configuration. *Quart. J. Roy. Meteor. Soc.*, **126**, 1191–1215.

Komornik, V. 1995a. Stabilisation frontière rapide de systèmes distribués linéaires. *C.R.Acad. Sci. Paris, Série 1*, **321**, 433–437.

Komornik, V. 1995b. Stabilisation rapide de problèmes d'évolution linéaires. *C.R.Acad. Sci. Paris, Série 1*, **321**, 581–586.

Komornik, V. 1997. Rapid boundary stabilization of linear distributed systems. *Siam J. Control and Optimization*, **35**(5), 1591–1613.

Kullaa, J. 2002. Elimination of environmental influences from damage-sensitive features in a structural health monitoring system. *Pages 742–749 of : Proceedings of the First European Workshop on Structural Health Monitoring, Paris, July 10-12, 2002, Onera. DEStech Publications.*

Kullaa, J. 2003. Is temperature measurement essential in structural health monitoring ? *Pages 717–724 of : Proceedings of the 4th International Workshop on Structural Health Monitoring, Stanford, CA. September 15-17, 2003. Stanford University. DEStech.*

Kullaa, J. 2004. Latent variable models to eliminate the environmental effects in structural health monitoring. *Pages S5–55–S5–58 of : Proceedings of the Third European Conference on Structural Control. Volume II. R. Flesch, H. Irschik and M. Krommer (eds.). Vienna, Austria, July 12-15, 2004. Vienna University of Technology.*

Lanticq, V., Merliot, E., & Delepine-Lesoille, S. 2006. Brillouin distributed sensor embedded into concrete : Sensor design and experimental validation. *In : Proceedings of the International conference on optical fiber sensors -OFS18.*

Larrouturou, B., & Lions, P.-L. 1996. *Méthodes mathématiques pour les sciences de l'ingénieur : optimisation et analyse numérique.* Editions de l'école Polytechnique.

Lattès, R., & Lions, J-L. 1967. *Méthode de quasi-réversibilité et applications.* Dunod.

Le Dimet, F.-X., & Blum, J. 2002. Assimilation de données pour les fluides géophysiques. *Matapli*, **67**, 33–55.

Le Dimet, F.-X., & Talagrand, O. 1986. Variational algorithms for analysis and assimilation of meteorological observations : theoretical aspects. *Tellus*, **38A**, 97–110.

Lebeau, G., & Robbiano, L. 1994. Contrôle exact de l'équation de la chaleur. *Papier université Paris-Sud, classification AMS : 35B37*, **94-37**.

Lecampion, B., & Constantinescu, A. 2005. Sensitivity analysis for parameter identification in quasi-static poroelasticity. *Int. J. Numer. Anal. Meth. Geomech.*, **29**, 163–185.

Lecampion, B., Constantinescu, A., & Nguyen Minh, D. 2002. Parameter identification for lined tunnels in a viscoplastic medium. *Int. J. Numer. Anal. Meth. Geomech.*, **26**, 1191–1211.

Lin, S.-M., Chen, C.-K., & Yang, Y.-T. 2004. A modified sequential approach for solving inverse heat conduction problems. *Int. J. Heat Mass Transfer*, **47**, 2669–2680.

Ling, X., & Atluri, S. N. 2006. Stability analysis for inverse heat conduction problems. *Computer Modeling in Engineering and Sciences*, **13**(3), 219–228.

Ling, X., Keanini, R. G., & Cherukuri, H. P. 2003. A non-iterative finite element method for inverse heat conduction problems. *Int. J. Numer. Meth. Engng*, **36**, 1315–1334.

Ling, X., Cherukuri, H. P., & Keanini, R. G. 2005. A modified sequential function specification finite element-based method for parabolic inverse heat conduction problems. *Comput. Mech.*, **36**, 117–128.

Ling, X., Cherukuri, H. P., & Horstemeyer, M. F. 2006. A hybrid regularization method for inverse heat conduction problems. *Int. J. Numer. Meth. Engng*, **65**, 2246–2264.

Lions, J-L. 1968. *Optimal control of systems gouverned by PDEs.* Dunod.

Lions, J-L., & Magenes, E. 1968. *Problèmes aux limites non homogènes et applications,* **1,2,3**. Dunod.

Lions, J.L. 1988. Exact controllability, stabilizability and perturbations for distributed systems. *SIAM Review*, **30**, 1–68.

Liu, J. 2002. Numerical solution of forward and backward problem for 2D heat conduction problem. *J. Comp. Appl. Math.*, **145**, 459–482.

Loulou, T., & Artioukhine, E. 2006. Numerical solution of 3D unsteady nonlinear inverse problem of estimating surface heat flux for cylindrical geometry. *Inverse Problems in Science and Engng*, **14**(1), 39–52.

Lü, X.-Q., Wu, Z.-K., Gu, Y., & Tian, J.-W. 2004. Study on the adjoint method in data assimilation and the related problems. *Applied Mathematics and Mechanics*, **25**(6), 636–646.

Luong, B., Blum, J., & Verron, J. 1998. A variational method for the resolution of a data assimilation problem in oceanography. *Inverse Problems*, **14**, 979–997.

Mahfouf, J.-F., & Rabier, F. 2000. The ECMWF operational implmentation of four dimensional variational assimilation. Part II : Experimental results with improved physics. *Quart. J. Roy. Meteor. Soc.*, **126**, 1171–1190.

Maierhofer, C., Arndt, R., R ollig, M., Rieck, C., Walther, A., & ans B. Hillemeier, H. Scheel. 2006. Application of impulse-thermography for non destructive assessment of concrete structures. *Cement and Concrete Comp.*, **28**, 393–401.

Mariani, S., & Ghisi, A. 2007. Unscented Kalman filtering for nonlinear structural dynamics. *Nonlinear Dyn.*, **49**, 131–150.

Marquardt, W., & Auracher, H. 1990. An observer-based solution of inverse heat conduction problems. *Int. J. Heat Mass Transfer*, **33**(7), 1545–1562.

Masood, K. 2005. Investigation and regularization of the initial inverse problem in the two dimensional heat equation. *Heat and Technology*, **23**(2), 37–42.

Mera, N. S., Elliot, L., Ingham, D.B., & Lesnic, D. 2001. An iterative boundary element method for solving the one-dimensional backward heat conduction problem. *Int. J. Heat Mass Transfer*, **44**, 1937–1946.

Mera, N. S., Elliot, L., Ingham, D.B., & Lesnic, D. 2003. A comparison of different regularization methods for a Cauchy problem in anisotropic heat conduction. *Int. J. Numer. Meth. for Heat and Fluid Flow*, **13**(5), 528–546.

Mera, N. S., Elliot, L., Ingham, D. B., & Lesnic, D. 2005. Comparison of a genetic algorithm and a gradient based optimisation technique for a three-dimensional boundary detection problem. *In : Proceedings of the 5th International Conference on Inverse Problems in Engineering : Theory and Practice.*

Mevel, L., & Goursat, M. 2004. A complete Scilab toolbox for output-only identification. *In : Proceedings of International Modal Analysis Conference, Dearborn, Mi, Jan. 26-29, 2004.*

Moireau, P., Chapelle, D., & Tallec, P. Le. 2007. Joint state and parameter estimation for distributed mechanical systems. *Comput. Methods Appl. Mech. Engrg.* to appear.

Momose, K., Abe, K., & Kimoto, H. 2005. Inverse measurement of thermal boundary conditions using a transient temperature history. *In : Proceedings of the 5th International Conference on Inverse Problems in Engineering : Theory and Practice.*

Monde, M. 2000. Analytical method in inverse heat transfer problem using Laplace transform technique. *Int. J. Heat Mass Transfer*, **43**, 3965–3975.

Monde, M., & Mitsutake, Y. 2001. A new estimation method of thermal diffusivity using analytical inverse solution for one-dimensional heat conduction. *Int. J. Heat Mass Transfer*, **44**, 3169–3177.

Monde, M., Arima, H., Liu, W., Mitsutake, Y., & Hammad, J. A. 2003. An analytical solution for two-dimensional inverse heat conduction problems using Laplace transform. *Int. J. Heat Mass Transfer*, **46**, 2135–2148.

Morozov, V. A. 1993. *Regularization methods for ill-posed problems.* CRC Press, Boca Raton.

Muniz, W. B., Ramos, F. M., & de Campos Velho, H. F. 1999. A comparison of some inverse methods for estimating the initial condition equation of the heat. *J. Comp. Appl. Math.*, **103**, 145–163.

Muniz, W. B., Ramos, F. M., & de Campos Velho, H. F. 2000. Entropy- and Tikhonov-based regularization techniques applied to the bakwards heat equation. *Computers Math. Applic.*, **40**, 1071–1084.

Murio, D. A. 1989. The mollification method and the numerical solution of the inverse heat conduction problem by finite differences. *Computers Math. Applic.*, **10**, 1385–1396.

Nasser, H. 2006. *Surveillance vibratoire de structures mécaniques sous contraintes thermiques.* Ph.D. thesis, Université de Rennes I.

Nassiopoulos, A., & Bourquin, F. 2006. Temperature identification based on pointwise transient measurements. *In : Heat Transfer 2006.*

Nemirovskii, A. S. 1986. The regularization properties of the adjoint gradient method in ill-posed problems. *USSR Comput. Math. and Math. Phys.*, **26**(2), 7–16.

Nodet, M. 2006. Variational assimilation of Lagrangian data in oceanography. *Inverse Problems*, **22**, 245–263.

Openfem. *OpenFEM : a finite element toolbox for Matlab and Scilab.*

Özisik, M. N. 1993. *Heat Conduction.* John Wiley and sons, Wiley interscience.

Özisik, M. N., & Orlande, H. R. B. 2000. *Inverse Heat Transfer.* Taylor and Francis.

Parisse, M., Curti, F., & de Rosa, D. 2005. Dynamic response of a system driven by thermal actuation. *Advances in the Astronautical Sciences - Space Flight Mechanics 2004*, **119**(1), 821–832.

Peeters, B. 2000. *System identification and damage detection in civil engineering.* Ph.D. thesis.

Pham, D.T., Verron, J., & Roubaud, M.C. 1998a. Filtres de Kalman singuliers évolutifs pour l'assimilation de données en océanographie. *C. R. Acad. Sci. Paris, Sciences de la Terre et des Planètes*, **326**, 255–260.

Pham, D.T., Verron, J., & Roubaud, M.C. 1998b. A singular evolutive extended Kalman filter for data assimilation in oceanography. *Journal of Marine Systems*, **16**, 323–340.

Plana, V., Reulet, P., & Millan, P. 2006. Experimental characterization of the thermophysical properties of composite materials by an inverse heat conduction method. *J. of Composite Materials*, **40**(14), 1247–1258.

Prud'homme, M., & Nguyen, T. H. 1999. Fourier analysis of conjugate gradient method applied to inverse heat conduction problems. *Int. J. Heat Mass Transfer*, **42**, 4447–4460.

Puel, J.-P. 2007. Une approche non classique d'un problème d'assimilation de données. *J. Engng. Phys.* à paraître.

Rabier, F., rvinen, H. Jä, Klinker, E., Mahfouf, J.-F., & Simmons, A. 2000. The ECMWF operational implementation of four dimensional variational assimilation. Part I : Experimental results with simplified physics. *Quart. J. Roy. Meteor. Soc.*, **126**, 1143–1170.

Ramos, F. M., de Campos Velho, H. F., Muniz, W. B., Carvalho, J. C., & Ferreira, N. J. 2001. Temperature reconstruction using an entropy-based regularization method. *In : CHT'01, Advances in computational heat transfer.*

Raviart, P.-A., & Thomas, J.-M. 1998. *Introduction à l'analyse numérique des équations aux dérivées partielles.* Dunod.

Raynaud, M. 1997. Le problème inverse de conduction de la chaleur. *Techniques de l'ingénieur*, **BE-8 265**, 1–17.

Raynaud, M., & Beck, J. V. 1988. Methodology for comparison of inverse heat conduction methods. *Transactions of the ASME*, **110**, 30–37.

Raynaud, M., & Bransier, J. 1986. A new finite-difference method for the nonlinear heat conduction problem. *Numerical Heat Transfer*, **9**(1), 27–42.

Robert, C., Blayo, E., & Verron, J. 2006. Comparison of reduced-order, sequential and variational data assimilation methods in the tropical Pacific Ocean. *Ocean Dynamics*, **56**, 624–633.

Rohrmann, R.G., Baessler, M., Said, S., Schmid, Z., & Ruecker, W.F. 2000. Structural causes of temerature affected modal data of civil structures obtained by long time monitoring. *In : 18th Int. Modal Anal. Conf.*

Rytter, A. 1993. *Vibrational based inspection of civil engineering structures*. Ph.D. thesis, Department of Building Technology and Structural Engineering.

Sassi, M., & Raynaud, M. 1998. New space-marching method for solving inverse boundary problems. *Numerical Heat Transfer,part B*, **34**, 21–38.

Shen, S.-Y. 1999. A numerical study of inverse heat conduction poblems. *Computers Math. Applic.*, **38**, 173–188.

Shenefelt, J. R., Luck, R., Taylor, R. P., & Berry, J. T. 2002. Solution to inverse heat conduction problems employing singular value decomposition and model reduction. *Int. J. Heat Mass Transfer*, **45**, 67–74.

Shidfar, A., & Zakeri, A. 2005. A numerical technique for backward inverse heat conduction problems in one-dimensional space. *Applied Mathematics and Computation*, **171**, 1016–1024.

Silva Neto, A. J., & Özisik, M. N. 1992. Two-dimensional heat conduction problem of estimating the time-varying strength of a line heat source. *J. Appl. Phys.*, **71**(11), 5357–5362.

Sirkes, Z. 1997. Finite difference of the adjoint or adjoint of the finite difference ? *Mon. Wea. Rev.*, **125**(12), 3373–3378.

Sohn, H., Czarnecki, J.A., & Farrar, C.R. 2000. Structural heath monitoring using statistical process control. *Journal of Structural Engineering*, **126**(11), 1356–1363.

Sohn, H., Farrar, C.R., Hunter, N.F., & Worden, K. 2001. Structural health monitoring using statistical pattern recognition techniques. *Journal of dynamic systems, measurement, and control*, **123**, 706–711.

Sohn, H., Worden, K., & Farrar, C.R. 2003. Statistical damage classification under changing environmental and operational conditions. *Journal of Intelligent Material Systems and Structures*, **13**(9), 561–574.

Sparrow, E. M., Haji-Sheikh, A., & Lundgren, T. S. 1964. The inverse problem in transient heat conduction. *ASME J. Appl. Mech.*, **13**, 369–375.

Stengel, R. F. 1986. *Optimal control and estimation*. Dover publications, Inc., New York.

Stolz, Jr G. 1960. Numerical solutions to an inverse problem of heat conduction for simple shapes. *Journal of Heat Transfer, ASME*, **82**, 20–26.

Taine, J., & Petit, J.-P. 1998. *Transferts thermiques*. Dunod.

Talagrand, O., & Courtier, P. 1987. Variational assimilation of meteorological observations with the adjoint vorticity equation - Part I : theory. *Quart. J. Roy. Meteor. Soc.*, **113**(478), 1311–1328.

Tautenhahn, U., & Jin, Q.-N. 2003. Tikhonov regularization and a posteriori rules for solving nonlinear ill posed problems. *Inverse Problems*, **19**, 1–21.

Thomée, V. 1984. *Galerkin Finite Element Methods for Parabolic Problems*. Springer-Verlag, Berlin, New York.

Tikhonov, A. N., & Arsenin, V. Y. 1977. *Solution of ill-posed problems*. Winston and Sons, New York.

Treyssède, F. 2006. Prebending effects upon vibrational modes of prestressed planar beams : a numerical and experimental study. *J. Sound Vibr.*, **to appear**.

Trémolet, Y. 2006. Accounting for an imperfect model in 4D-Var. *Quart. J. Roy. Meteor. Soc.*, **132**(621), 22483–2504.

Tuan, P., Li, C., Fong, L., & Huang, W. 1996. An input estimation approach to on-line two-dimensional inverse heat conduction problems. *Numerical Heat Transfer,part B*, **29**, 345–363.

Tuan, P., Lee, S., & Hou, W. 1997. An efficient on-line thermal input estimation method using Kalman filter and recursive least square algorithm. *Inverse Problems in Engng*, **5**, 309–333.

Uciński, D. 1999. *Measurement optimization for parameter estimation in distributed system*. Technical university press Zielona Góra.

Urquiza, J. M. 2000. *Contrôle d'équations des ondes linéaires et quasilinéaires*. Ph.D. thesis, Université Paris VI.

Videcoq, E., & Petit, D. 2001. Model reduction for the resolution of multidimensional inverse heat conduction problems. *Int. J. Heat Mass Transfer*, **44**, 1899–1911.

Vogel, C. R. 2002. *Computational methods for inverse problems*. SIAM Frontiers in Applied mathematics.

Weaver, A. T., Vialard, J., & Anderson, D. L. T. 2003a. Three- and Four-dimensional variational assimilation with a general circulation model of the tropical pacific ocean. Part I : formulation, internal diagnostics and consistency checks. *Mon. Wea. Rev.*, **131**, 1360–1378.

Weaver, A. T., Vialard, J., & Anderson, D. L. T. 2003b. Three- and Four-dimensional variational assimilation with a general circulation model of the tropical pacific ocean. Part II : physical validation. *Mon. Wea. Rev.*, **131**, 1379–1395.

Weber, C. F. 1981. Analysis and solution of the ill-posed inverse heat conduction problem. *Int. J. Heat Mass Transfer*, **24**(11), 1783–1792.

Wenzel, H., & Pichler, D. 2005. *Ambient Vibration Monitoring.* E-Book, ISBN ; 0-470-02431-3.

Wong, K.-Y. 2004. Instrumentation and health monitoring of cable-supported bridges. *Structural Control and Health Monitoring*, **11**, 91–124.

Wood, M. G. 1992. *Damage analysis of bridge structures using vibrational techniques.* Ph.D. thesis, Aston University, UK.

Woodfield, P.L., Monde, M., & Mitsutake, Y. 2006a. Implementation of an analytical two-dimensional inverse heat conduction technique to practical problems. *Int. J. Heat Mass Transfer*, **49**(1-2), 187–197.

Woodfield, P.L., Monde, M., & Mitsutake, Y. 2006b. Implementation of an analytical two-dimensional inverse heat conduction technique to practical problems. *Int. J. Heat Mass Transfer*, **49**, 2864–2876.

Wu, M., & Smyth, A. W. 2007. Application of the unscented Kalman filter for real-time nonlinear structural system identification. *Structural Control and Health Monitoring*, **14**(7), 971–990.

Xie, J.-L., & Zou, J. 2005. Numerical reconstruction of heat fluxes. *SIAM J. Numer. Anal.*, **43**(4), 1504–1535.

Yahia, A. A., & del Barrio, E. Palomo. 1999. Thermal systems modelling via singular value decomposition : direct and modular approach. *Applied Mathematical Modelling*, **23**, 447–468.

Yang, C.-Y. 1999. Estimation of the temperature-dependent thermal conductivity in inverse heat conduction problems. *Applied Mathematical Modelling*, **23**, 469–478.

Yelva, R., & Bocquet, M. 2006. Inverse modelling for mercury over Europe. *Atmos. Chem. Phys.*, **6**, 1–14.

Zueco, J., Alhama, F., & González Fernández, C.F. 2006. Inverse determination of heat generation sources in two-dimensional homogeneous solids : Application to orthotropic medium. *Int. J. Heat Mass Transfer*, **33**, 49–55.