



ÉCOLE NATIONALE DES PONTS ET CHAUSSÉES

THÈSE

présentée et soutenue le 9 mars 2004 par

Yue XU

pour l'obtention du grade de

DOCTEUR DE L'ÉCOLE NATIONALE
DES PONTS ET CHAUSSÉES

Spécialité : Structures et Matériaux

Titre :

Approche multi-échelle pour l'étude du comportement
des systèmes polyphasiques
- Application aux milieux poreux non saturés

Composition du jury :

J. M. Fleureau	Président
J. F. Shao	Rapporteur
A. Girault	Rapporteur
A. Feraille	Examineur
L. Dormieux	Directeur de thèse
X. Chateau	Conseil d'étude

Remerciement

Je souhaite remercier Monsieur Jean-Marie Fleureau, qui accepte de présider le jury de ma soutenance ainsi que Monsieur Albert Giraud et Professeur Jian-Fu Shao, qui ont accepté d'être rapporteurs de ce mémoire. Je tiens également à rendre ma gratitude à Madame Adélaïde Feraille d'avoir participé à l'évaluation de ce travail.

Je voudrais rendre ma reconnaissance à Professeur Luc Dormieux, mon directeur de thèse, qui a suivi mes travaux tout au long de cette thèse. Mes plus profonds remerciements s'adressent à Monsieur Xavier Chateau, mon conseil d'étude. Grâce à sa disponibilité et patience, je peux surmonter de nombreuses difficultés scientifiques et linguistiques durant le déroulement de thèse et la terminer dans le meilleur délai.

Mes gratitudes sont également destinées à ceux qui m'aident pendant la thèse : à Jean-Noël pour la sympathique collaboration de travail, à Teddy pour sa gentillesse illimitée, à Gabriel, Nabila, Sébastien, Fabien et Laurent pour les nombreux services m'ayant rendus. Je profite de cette occasion pour remercier tout personnel du Laboratoire des Matériaux et des Structures du Génie Civil où j'ai profité d'une ambiance de travail agréable.

A la fin de cette liste se trouvent mes proches, en particulier mon époux Kefei, qui a beaucoup donné pour mon travail.

Résumé

Le travail présenté dans ce mémoire est consacré à l'application des méthodes de changement d'échelle pour la modélisation du comportement des milieux poreux non saturés dont la phase solide est constituée d'un matériau élastique linéaire.

Pour cela, on commence par rappeler quelques résultats maintenant classiques concernant l'homogénéisation des matériaux hétérogènes à comportement élastiques linéaires (chapitre 1). Dans cette partie essentiellement bibliographique sont également présentées des applications des outils de la micromécanique aux matériaux poreux sec et saturé.

Pour aborder le cas non saturé, il est essentiel de connaître la répartition des phases fluides au sein de l'espace poreux. Les outils permettant de déterminer les positions d'équilibre d'une interface capillaire au sein d'un milieu poreux et d'étudier leur stabilité sont présentés dans le second chapitre du mémoire en particulier dans le cas où il existe des échanges de matière entre les phases fluides.

On utilise ensuite (chapitre 3) les outils de l'homogénéisation linéaire «classique» pour aborder le comportement mécanique d'un milieu poreux saturé par deux phases fluides. Les résultats obtenus sont appliqués pour estimer les déformations de séchage à contrainte imposée constante en condition isotherme en tenant compte de l'influence des caractéristiques morphologiques de l'espace poreux et des domaines occupés par les phases fluides.

Dans le quatrième chapitre, on propose une modélisation du comportement d'un milieu mésofissuré non saturés prenant en compte le couplage entre les efforts capillaires et les changements de géométrie des fissures. On montre sur l'exemple du séchage que dans le cas où les fissures sont très aplaties, la prise en compte de cette non-linéarité modifie radicalement le comportement par rapport à celui prévu par un modèle linéaire.

Le mémoire s'achève avec l'examen du comportement d'un matériau granulaire non saturé. On utilise pour cela une approche numérique reposant

sur l'hypothèse de périodicité du milieu étudié.

L'ensemble des résultats obtenus au cours de ce travail démontre clairement l'intérêt qu'il y a à se référer aux phénomènes se déroulant à l'échelle des pores ainsi qu'aux propriétés morphologiques des domaines occupés par chacune des phases pour construire des modèles de comportement pertinents pour les milieux poreux non saturés.

Mots clés

Homogénéisation, Milieux poreux non saturé, Micromécanique, Capillarité, Stabilité, Morphologie, Séchage, Non linéarité, Fissure, Granulaire

Abstract

In this thesis, the modeling of the behaviour of the unsaturated porous media, whose solid phase is composed of elastic linear material, is studied in the framework of micromechanics. Firstly, we recall some classical results on the homogenization of the homogeneous materials in the case where the macroscopic behaviour of the materials is elastic linear (chaptre 1). This part concerning essentially the bibliography, we present also the applications of the micromechanical approach to the drying porous media and the saturated ones.

In order to study the unsaturated case, it is necessary to know the distribution of the fluids in the porous space. The methods permitting to determine the equilibrium positions of a capillary interface inside of a porous medium and to study their stability are presented in the second chapter of this thesis, particularly in the case where there is no material exchange between the fluid phases.

Then we use the «classical »linear homogenization approach to study the mechanic behaviour for a porous medium saturated by two fluid phases (chapter 3). The results obtained are applied to estimate the drying strains, in the case where the subjected stress and the temprature remain constant, with taking into account the influence of the morphology characters of the porous space and the domains occupied by the fluid phases.

In the fourth chapter, the modeling of the behaviour of a medium containing unsaturated mesocracks is studied by considering the coupling between the capillary forces and the geometric changes of the cracks. By an example of drying, we show that, in the case where the cracks are very flat, the macroscopique behaviour accounting for the non-linearity differs significantly from the results of the linear approach.

The thesis is finished by an examination of a granular material behaviour. To this end, we use a numerical approach based on the periodic hypothesis of the materials studied.

All results obtained in this thesis show clearly the importance to take into account the phenomena existing in the pore scale and the morphologic properties of the domains occupied by each phase in order to modelize the behaviour of the unsaturated porous media.

Key words

Homogenization, Unsaturated porous media, Micromechanic, Capillarity, Stability, Morphology, Drying, Nonlinearity, Crack, Granular

Table des matières

Introduction	22
1 Homogénéisation des milieux élastiques linéaires	24
1.1 Comportement élastique homogénéisé à état initial naturel . . .	26
1.1.1 Sollicitation homogène en déformation	26
1.1.1.1 Problème traité	26
1.1.1.2 Représentation	26
1.1.1.3 Localisation	27
1.1.1.4 Lemme de Hill	28
1.1.1.5 Homogénéisation	29
1.1.2 Sollicitation homogène en contrainte	30
1.1.2.1 Localisation	30
1.1.2.2 Lemme de Hill	31
1.1.2.3 Homogénéisation	31
1.1.2.4 Relation entre \mathbb{C}_E^{hom} et \mathbb{S}_Σ^{hom}	32
1.1.3 Cas périodique	32
1.1.3.1 Représentation	32
1.1.3.2 Localisation	32
1.1.3.3 Homogénéisation	34
1.1.4 Matériau poreux sec	35
1.2 Comportement élastique homogénéisé à état initial non-naturel	
36	
1.2.1 Théorème de Levin	36

1.2.2	Matériau poreux saturé [31]	39
1.3	Méthodes d'estimation classiques pour les solides hétérogènes .	42
1.3.1	Problème d'Eshelby	43
1.3.2	Schéma dilué	46
1.3.3	Schéma de Mori-Tanaka	47
1.3.4	Schéma autocohérent	49
1.4	Application aux milieux poreux saturés	50
1.4.1	Pore ellipsoïdal ou sphérique	50
1.4.2	Pores d'autre forme	54
1.4.3	Mise en œuvre numérique	56
1.4.3.1	Approximation numérique	57
1.4.3.2	Exemples d'application à des pores d'autre forme	60
1.5	Annexe : Coefficients du tenseur d'Eshelby	62
2	Capillarité dans un milieu poreux	64
2.1	Stabilité d'une interface capillaire	65
2.1.1	Equation du problème	65
2.1.1.1	Equation de Young-Laplace	65
2.1.1.2	Equation de Young Dupré	67
2.1.2	Problème à volume imposé	69
2.1.2.1	Formulation du problème d'équilibre	69
2.1.2.2	Stabilité dynamique	72
2.1.3	Problème à pression donnée	74
2.1.3.1	Formulation du problème d'équilibre	75
2.1.3.2	Stabilité dynamique	76
2.1.3.3	Critère de variation seconde	78
2.2	Le cas axisymétrique	79
2.3	Approximation toroïdale	83
2.3.1	Pore ellipsoïdal	86
2.3.1.1	Calcul de la pression capillaire	86

2.3.1.2	Calcul de la saturation en liquide	88
2.3.1.3	Calcul de la contrainte équivalente	88
2.3.2	Pore de profil $z = H \left(1 - \frac{r}{L}\right)^n$	89
2.3.2.1	Calcul de la pression capillaire	89
2.3.2.2	Calcul de la saturation en liquide	90
2.3.2.3	Calcul de la contrainte équivalente	91
2.4	Procédure numérique de détermination du profil du ménisque dans un pore	92
2.5	Annexe	94
2.5.1	Gradient d'un champ vectoriel le long d'une surface	94
2.5.2	Calcul de la courbure moyenne de la surface du pore de révolution	95
2.5.2.1	Surface ellipsoïdale	95
2.5.2.2	Surface de profil d'équation $z = H \left(1 - \frac{r}{L}\right)^n$	97
3	Homogénéisation des milieux poreux non saturés	100
3.1	Micromécanique des milieux poreux non saturés	101
3.1.1	Description des efforts intérieurs à l'échelle microscopique	101
3.1.2	Homogénéisation	105
3.2	Isomorphologie des phases fluides	107
3.2.1	Modèle simplifié	108
3.2.1.1	Principe du modèle simplifié	108
3.2.1.2	Application au problème du séchage	109
3.2.2	Modèle avec prise en compte des interfaces	111
3.2.2.1	Principe du modèle avec prise en compte des interfaces	111
3.2.2.2	Application au problème du séchage	114
3.3	Hétéromorphologie des phases fluides	115
3.3.1	Estimation de la précontrainte macroscopique en utili- sant la solution d'Eshelby	117
3.3.1.1	σ^p uniforme par phase	117

3.3.1.2	σ^p non uniforme par phase	118
3.3.2	Estimation de précontraintes macroscopiques en utilisant les motifs morphologiques représentatifs (M. M. R.)	119
3.3.2.1	σ^p uniforme par phase	120
3.3.2.2	σ^p non uniforme par phase	120
3.3.3	Application au problème du séchage	122
3.4	Matériau périodique	125
3.4.1	Homogénéisation périodique en élasticité	125
3.4.2	Calcul de la précontrainte macroscopique	126
3.4.2.1	σ^p uniforme par phase	126
3.4.2.2	σ^p non uniforme par phase	127
3.4.3	Condition de symétrie	127
3.4.4	Application au problème du séchage	129
3.5	Conclusion	131
4	Homogénéisation des milieux mésolfissurés non saturés	132
4.1	Estimation du comportement du matériau fissuré sec	133
4.2	Matériau fissuré non saturé - Cas linéaire [23]	137
4.2.1	Effets capillaires dans un pore ellipsoïdal aplati	138
4.2.2	Cas des fissures	144
4.2.3	Déformation de séchage du matériau fissuré isotrope	146
4.3	Prise en compte des non linéarités géométriques [23]	148
4.3.1	Changement géométrique des fissures	149
4.3.2	Déformation de séchage du matériau fissuré isotrope	151
4.4	Conclusion	153
5	Homogénéisation périodique des matériaux granulaires non saturés	155
5.1	Matériau granulaire sec	156
5.1.1	Représentation	156
5.1.2	Localisation	156

5.1.3	Homogénéisation	159
5.2	Matériau granulaire saturé	160
5.3	Matériau granulaire non saturé	162
5.3.1	Description des efforts intérieurs à l'échelle microscopique	162
5.3.2	Homogénéisation	164
5.4	Modélisation d'un empilement granulaire périodique non saturé en faibles saturations	168
5.4.1	Modèle pour un empilement régulier	169
5.4.1.1	Modèle pour deux grains déformables en contact	169
5.4.1.2	Application à l'empilement cubique	174
5.4.2	Simulation numérique pour un empilement de grains monodisperses désordonnés	175
5.5	Conclusion	178
	Conclusions générales	179
	Bibliographie	184

Table des figures

1.1	Décomposition du problème complet (P) en deux problèmes élémentaires (P') et (P'')	37
1.2	Coefficient de Biot - Pore sphérique ($E = 1, \nu = 0.4$)	53
1.3	Module de Biot - Pore sphérique ($E = 1, \nu = 0.4$)	53
1.4	Vecteur normal au solide	55
1.5	Maillage du problème de pore sphérique (maillage grossier : 40 éléments-147 nœuds ; maillage fin : 160 éléments-533 nœuds)	58
1.6	Influence de l'extension du milieu infini - Pore sphérique ($E = 1, \nu = 0.2, f_p = 0.1$)	59
1.7	Profil du pore	60
1.8	Maillage du problème auxiliaire	60
1.9	Modules de cisaillement longitudinal et transversal	61
2.1	Interface capillaire	66
2.2	Système des trois phases : fluides Ω' et Ω'' ; solide Ω_s	68
2.3	Système d'une interface capillaire	71
2.4	Surface capillaire symétrique de révolution	80
2.5	Profil du ménisque	81
2.6	Ménisque dans un pore axisymétrique	82
2.7	Ménisque symétrique dans un pore axisymétrique	82
2.8	Profils de ménisques dans un pore ellipsoïdal (de gauche à droite les angles des points d'accrochage correspondant aux valeurs $\varphi = 15^\circ, 30^\circ$ et 45°)	83
2.9	Les deux familles de ménisques	84
2.10	Ménisque de la <i>famille a</i>	84

2.11	Ménisque de la <i>famille b</i>	85
2.12	Energie potentielle des deux familles de pores ($H/L = 0.1$)	86
2.13	Morphologie du pore	87
2.14	Calcul du volume du liquide	88
2.15	Calcul du volume de liquide	90
2.16	Pore ellipsoïdal	92
2.17	Pore conique ($n = 1$)	93
3.1	Milieu poreux non saturé	102
3.2	Equilibre de la ligne triple - cas régulier	103
3.3	Equilibre de la ligne triple - cas singulier	104
3.4	Le modèle simplifié	110
3.5	Deux phénomènes couplés du modèle simplifié	111
3.6	Modèle morphologique pour l'hystérésis capillaire	113
3.7	Hystérésis capillaire	114
3.8	Morphologies de phases fluides dans des pores ellipsoïdaux	118
3.9	Morphologies de milieux poreux non saturés	120
3.10	Morphologie du pore	122
3.11	Maillage du problème auxiliaire (pore ellipsoïdal)	122
3.12	Forces des phases fluides	123
3.13	Déformation du pore ellipsoïdal	123
3.14	Courbes de pression capillaire	124
3.15	Courbes de variation de volume	124
3.16	Morphologie des milieux poreux périodiques non saturé	126
3.17	Huitième de la cellule de base	128
3.18	Profil des cellules de base	129
3.19	Maillage de la cellule de base (pore ellipsoïdal)	129
3.20	Variation de volume dans le cas périodique	130
4.1	Fissure ellipsoïdale	134
4.2	Fissure non saturée	139

4.3 Courbes capillaires pour trois rapports d'aspect différents . . . 140

4.4 Courbes capillaires avec et sans hystérésis 141

4.5 Saut d'énergie potentielle à franchir pour passer de l'état saturé (A') à l'état correspondant au point le plus bas (C) de la courbe $p_c(S_r)$ par unité de volume poreux (aire grisée) 142

4.6 Morphologies des phases fluides correspondant aux états A' , A , B et C 142

4.7 Comparaison des résultats du premier ordre et des solutions de l'approximation toroïdale (pression capillaire) 145

4.8 Comparaison des résultats du premier ordre et des solutions de l'approximation toroïdale (saturation en liquide et contrainte équivalente) 145

4.9 Séchage du milieu fissuré - cas linéaire 147

4.10 Séchage d'un milieu fissuré - modèle avec couplage géométrique 151

4.11 Séchage d'un milieu fissuré - cas général 152

5.1 Exemple de matériau granulaire périodique 156

5.2 Chargement périodique sur la frontière de la cellule de base . . 158

5.3 Décomposition du problème complet (P) en deux problèmes élémentaires (P') et (P'') d'un milieu granulaire saturé 161

5.4 Un matériau granulaire périodique non saturé 163

5.5 Tensions superficielles pour un matériau granulaire non saturé 163

5.6 Un système dans le cas des faibles saturations 166

5.7 Décomposition du problème complet (P) en deux problèmes élémentaires (P') et (P'') d'un milieu granulaire non saturé . 167

5.8 Modèle pour deux grains déformables 169

5.9 Calcul du volume du liquide 170

5.10 Force capillaire et ses deux contributions pour deux grains . . 171

5.11 Déformation des grains due à la force capillaire 173

5.12 Influence de la déformation des grains sur la force capillaire . . 173

5.13 Cellule de base d'un empilement cubique 174

5.14 Variation du volume pour un empilement cubique lors du séchage 175

5.15 Coupe d'un échantillon de 4000 particules pour un empilement périodique monodisperse (partie grise)	176
5.16 Variation de volume pour les empilements granulaires désordonnés	177

Liste des tableaux

3.1 Composantes du tenseur d'élasticité macroscopique	123
3.2 Composantes du tenseur d'élasticité macroscopique dans le cas périodique	130

Introduction

A l'échelle macroscopique, un milieu poreux est considéré comme la superposition de plusieurs particules (une par phase) confondues géométriquement et interagissant entre elles. Ce point de vue a fait la preuve de son efficacité dans de nombreux domaines (mécanique des sols, géotechnique, exploitation pétrolière, biomécanique,...) pour lesquels les structures étudiées sont trop complexes pour qu'il soit possible d'utiliser des théories basées sur une description complète des domaines occupés par les différents constituants du milieu étudié.

A titre d'exemple, la théorie de la consolidation unidimensionnelle des sols proposée par Terzaghi [68], de même que la théorie de Biot [6, 7, 8] marquent des avancées importantes dans la modélisation à l'échelle macroscopique du comportement des milieux poreux saturés.

Il n'en reste pas moins vrai que les difficultés inhérentes à ce type d'approche restent importantes. Ces difficultés s'expliquent en grande partie par le fait qu'il est nécessaire de rendre compte du comportement de plusieurs phases (au moins trois dans le cas non saturé) interagissant entre elles, les comportements observés étant de plus non linéaires dans de nombreuses situations [28, 59]. Ceci entraîne que même en recourant à de nombreux essais, des questions importantes restent encore en attente de réponses pleinement satisfaisantes.

Afin de donner des réponses à ces questions, une alternative à la méthode expérimentale est d'utiliser les techniques de changement d'échelle afin d'étudier la structure et les propriétés des lois de comportement macroscopique à partir d'une modélisation du matériau à l'échelle microscopique [2, 3, 17, 18].

En utilisant cette approche, on vise dans cette thèse à étudier le comportement macroscopique d'un milieu poreux constitué d'une matrice solide élastique saturé par deux fluides immiscibles. L'accent est mis sur le rôle déterminant joué par les effets capillaires, phénomène se déroulant à l'échelle microscopique, sur la forme du comportement obtenu à l'échelle macroscopique.

Ce mémoire se compose de cinq chapitres. Au cours du premier chapitre, on présentera la méthodologie et les caractères généraux de l'approche d'homogénéisation pour un matériau élastique linéaire à état initial naturel et à état initial non-naturel et les méthodes d'estimation classiques. On les mettra ensuite en œuvre pour les milieux poreux saturés.

Bien qu'une littérature volumineuse ait été consacrée au problème de la forme et de la stabilité d'un ménisque pour des milieux granulaires, ce problème est rarement évoqué pour des milieux poreux. Avant d'aborder le problème sur les milieux poreux non saturés, on étudiera alors dans le deuxième chapitre la forme et la position ainsi que la stabilité d'une interface capillaire à l'intérieur d'un pore à l'état d'équilibre.

Le troisième chapitre de ce mémoire sera consacré aux applications de l'approche micromécanique et de l'approche périodique aux milieux poreux non saturés. L'accent de ce chapitre sera mis sur l'influence des propriétés morphologiques des phases fluides sur le comportement macroscopique des milieux.

Dans le quatrième chapitre, on s'intéressera au comportement d'un matériau mésos fissuré dans le cas non saturé. L'idée consistera à interpréter la non linéarité du comportement du matériau non saturé étudié ici par les variations du champ de précontrainte dans les fissures ou par le couplage entre les efforts capillaires et les changements de géométrie des fissures.

Pour compléter nos études, dans le dernier chapitre, on abordera le problème d'homogénéisation périodique des matériaux granulaires non saturés. Comme dans les chapitres 3 et 4, on s'intéressera dans ce chapitre en particulier à la modélisation des déformations volumiques occasionnées par la désaturation des matériaux soumis à une contrainte constante nulle en condition isotherme.

Chapitre 1

Homogénéisation des milieux élastiques linéaires

La méthode d'homogénéisation permet de déterminer le comportement homogénéisé d'un matériau élastique linéaire hétérogène à partir de la description de ses constituants à l'échelle microscopique. Dans ce cadre, on distingue classiquement deux approches : l'approche aléatoire et l'approche périodique (méthode de développement asymptotique en particulier). La première méthode permet d'obtenir des estimations des coefficients même lorsque le matériau n'est pas complètement connu à l'échelle microscopique (voir par exemple [9, 67, 71]) tandis que la deuxième méthode s'avère particulièrement efficace pour identifier la forme des lois de comportement macroscopique ainsi que leur domaine de validité (voir [2, 3, 10] par exemple).

Dans le cas aléatoire, on différencie trois longueurs caractéristiques : L de la taille caractéristique de la structure, ℓ de la taille du volume élémentaire représentatif (v.e.r) et d de la taille caractéristique des hétérogénéités du matériau. Pour que l'on puisse recourir aux méthodes de l'homogénéisation, ces trois longueurs caractéristiques doivent vérifier les deux conditions suivantes [71] :

- $\ell \ll L$: condition nécessaire pour pouvoir traiter la structure comme un milieu continu.
- $d \ll \ell$: condition nécessaire pour pouvoir caractériser le comportement du v.e.r par une loi homogène équivalente.

Dans la suite de ce document, L définit l'échelle macroscopique tandis que ℓ définit l'échelle microscopique.

Quand les conditions de séparation d'échelle sont vérifiées, on peut remplacer un matériau hétérogène par un matériau homogène équivalent en ap-

pliquant une méthodologie proposée par Zaoui [71]. On distingue alors les trois étapes suivantes : l'étape de représentation qui permet de décrire le matériau à l'échelle microscopique, l'étape de localisation qui permet d'établir les relations reliant les grandeurs définies à l'échelle microscopique aux grandeurs définies à l'échelle macroscopique, enfin l'étape d'homogénéisation qui permet de calculer des caractéristiques macroscopiques et d'identifier le comportement macroscopique à partir des résultats des étapes précédentes, en recourant à une opération de moyenne.

Dans le cas périodique, l'usage pour l'approche qualitative consiste à choisir une cellule de base de la taille de d . Il n'y a pas, dans ce cas, de volume élémentaire. La condition de séparation d'échelles se réduit simplement en $d \ll L$.

Pour les deux approches, les relations de localisation sont obtenues à partir de la résolution d'un problème posé soit sur le v.e.r (approche micro-mécanique), soit sur la cellule de base (structure périodique), qui sont alors considérés comme des structures.

Le premier chapitre de ce mémoire est essentiellement bibliographique. Dans un premier temps, on présente la méthodologie et les caractères généraux de l'approche d'homogénéisation pour un matériau élastique linéaire à état initial naturel et à état initial non-naturel. L'accent est mis sur les matériaux à microstructure aléatoire mais la méthode aux structures périodiques est également rappelée. On applique ces résultats généraux à un milieu poreux dans le cas sec et dans le cas saturé. On présente ensuite les méthodes d'estimation classiques permettant de remplacer les informations manquantes dans les situations où le matériau n'est pas complètement connu (pour plupart de matériaux). Puis on les étend au cas d'un milieu poreux.

Dans la suite de ce mémoire, on applique les conventions de notation suivantes :

- \underline{x} tenseur d'ordre un
- \mathbf{x} tenseur d'ordre deux
- \mathbb{X} tenseur d'ordre quatre

1.1 Comportement élastique homogénéisé à état initial naturel

1.1.1 Sollicitation homogène en déformation

On commence par présenter l'approche micromécanique dans le cas d'un état initial naturel : contraintes et déformations sont nulles en tout point du matériau hétérogène en l'absence de chargement extérieur.

1.1.1.1 Problème traité

On considère ici une structure constituée d'un matériau élastique linéaire hétérogène à état initial naturel. Le comportement de ce matériau s'écrit :

$$\begin{cases} \boldsymbol{\sigma}(\underline{x}) = \mathbb{C}(\underline{x}) : \boldsymbol{\varepsilon}(\underline{x}) \\ \boldsymbol{\varepsilon}(\underline{x}) = \mathbb{S}(\underline{x}) : \boldsymbol{\sigma}(\underline{x}) \end{cases} \quad (1.1)$$

avec $\mathbb{C}(\underline{x}) : \mathbb{S}(\underline{x}) = \mathbb{I}$, où $\boldsymbol{\sigma}$ désigne le tenseur des contraintes de Cauchy, $\boldsymbol{\varepsilon}$ le tenseur des déformations linéarisé et \mathbb{I} le tenseur identité du quatrième ordre. Supposant les conditions de séparation des échelles satisfaites, on détaille maintenant les opérations successives permettant de caractériser le comportement du matériau à l'échelle macroscopique.

1.1.1.2 Représentation

Pour définir le problème auxiliaire, il convient tout d'abord de décrire le v.e.r complètement. Pour cela il est nécessaire d'identifier les différentes phases du v.e.r, les caractéristiques mécaniques de chacune de ces phases ainsi que leur comportement. Il est en général impossible d'obtenir une description aussi complète du matériau (mis à part peut-être pour le cas particulier des structures périodiques). On ne peut donc pas dans la plupart des situations déterminer complètement et précisément le comportement homogène équivalent. Ce constat explique que l'on ait développé des méthodes d'estimation applicables dans les situations où le matériau n'est pas complètement connu. Dans le cadre de ce travail, on ne s'intéressera pas à cette étape d'identification du matériau sans en sous-estimer néanmoins la difficulté.

Dans la suite, on suppose donc que l'on dispose de toutes les informations nécessaires pour mener la démarche jusqu'à son terme.

1.1.1.3 Localisation

On se place dans la situation où le v.e.r est constitué de diverses phases parfaitement accolées. Pour établir le lien entre comportement à l'échelle microscopique et caractérisation du comportement à l'échelle macroscopique, on définit le chargement appliqué au v.e.r à partir des grandeurs macroscopiques. Pour cela, on impose par exemple une condition de déplacement imposé : $\underline{\xi}(\underline{x}) = \mathbf{E} \cdot \underline{x}$ sur le bord $\partial\Omega$ du domaine Ω occupé par le v.e.r, avec \mathbf{E} la déformation macroscopique et $\underline{\xi}$ le champ de déplacement à l'échelle microscopique, les forces de volumes étant nulles. La sollicitation appliquée sur Ω s'écrit dans ce cas :

$$\begin{cases} \underline{\xi}(\underline{x}) = \mathbf{E} \cdot \underline{x} & (\partial\Omega) \\ \operatorname{div} \boldsymbol{\sigma}(\underline{x}) = 0 & (\Omega) \end{cases} \quad (1.2)$$

Compte tenu de la relation entre déplacement et déformation

$$\boldsymbol{\varepsilon} = \frac{1}{2}(\nabla \underline{\xi} + {}^T \nabla \underline{\xi}) \quad (1.3)$$

où ∇ désigne l'opérateur de gradient et T l'opérateur de transposition, on montre aisément la relation entre les déformations à l'échelle macroscopique et déformations à l'échelle microscopique :

$$\mathbf{E} = \langle \boldsymbol{\varepsilon} \rangle = \frac{1}{|\Omega|} \int_{\Omega} \boldsymbol{\varepsilon}(\underline{x}) d\Omega \quad (1.4)$$

où $\langle \cdot \rangle$ désigne l'opérateur de moyenne. Pour un v.e.r occupant le domaine géométrique Ω , la moyenne d'une variable sur Ω est définie par :

$$\langle v \rangle = \frac{1}{\Omega} \int_{\Omega} v(\underline{x}) d\Omega \quad (1.5)$$

Le problème de structure à résoudre à l'échelle microscopique s'écrit :

$$\begin{cases} \boldsymbol{\sigma}(\underline{x}) = \mathbb{C}(\underline{x}) : \boldsymbol{\varepsilon}(\underline{x}) & (\Omega) \\ \operatorname{div} \boldsymbol{\sigma}(\underline{x}) = 0 & (\Omega) \\ \underline{\xi}(\underline{x}) = \mathbf{E} \cdot \underline{x} & (\partial\Omega) \end{cases} \quad (1.6)$$

Ce problème est linéaire et admet une unique solution. Le champ de déformation $\boldsymbol{\varepsilon}$ associé au champ de déplacement dépend donc linéairement de la déformation macroscopique \boldsymbol{E} appliquée. On a donc :

$$\boldsymbol{\varepsilon}(\underline{x}) = \mathbb{A}(\underline{x}) : \boldsymbol{E} \quad (1.7)$$

où \mathbb{A} est un tenseur du quatrième ordre, appelé tenseur de localisation en déformation. On montre facilement en reportant (1.7) dans la relation (1.4) que ce tenseur vérifie :

$$\langle \mathbb{A} \rangle = \mathbb{I} \quad (1.8)$$

\mathbb{A} possède les propriétés de symétrie $A_{ijkl} = A_{jikl} = A_{ijlk}$, mais la symétrie d'indices (ij) et (kl) n'est en général pas satisfaite.

1.1.1.4 Lemme de Hill

Avant de passer à l'étape d'homogénéisation proprement dite, il n'est sans doute pas inutile de revenir sur le mode de chargement particulier adopté pour définir le problème de localisation (1.6).

Pour cela, considérons un champ de contrainte $\boldsymbol{\sigma}$ statiquement admissible (s.a.) dans le mode de chargement (c'est à dire vérifiant $\text{div } \boldsymbol{\sigma} = 0$ dans Ω) et un champ de déformation $\boldsymbol{\varepsilon}$ cinématiquement admissible (c.a.) avec \boldsymbol{E} (c'est à dire tel qu'il existe $\underline{\xi}$ vérifiant $\underline{\xi} = \boldsymbol{E} \cdot \underline{x}$ sur $\partial\Omega$ et $\boldsymbol{\varepsilon} = \frac{1}{2}(\nabla \underline{\xi} + {}^T\nabla \underline{\xi})$ sur Ω). On montre facilement que pour un tel couple $(\boldsymbol{\sigma}, \boldsymbol{\varepsilon})$, le théorème des travaux virtuels s'écrit :

$$\langle \boldsymbol{\sigma} : \boldsymbol{\varepsilon} \rangle = \langle \boldsymbol{\sigma} \rangle : \boldsymbol{E} = \langle \boldsymbol{\sigma} \rangle : \langle \boldsymbol{\varepsilon} \rangle \quad (1.9)$$

On définit alors la contrainte macroscopique $\boldsymbol{\Sigma}$ par la relation

$$\boldsymbol{\Sigma} = \langle \boldsymbol{\sigma} \rangle \quad (1.10)$$

En reportant l'équation (1.10) dans (1.9), on obtient la relation suivante :

$$\begin{aligned} \forall \boldsymbol{\varepsilon} \text{ c. a. avec } \boldsymbol{E} \\ \forall \boldsymbol{\sigma} \text{ s. a. avec } \boldsymbol{\Sigma} \end{aligned} \quad \langle \boldsymbol{\sigma} : \boldsymbol{\varepsilon} \rangle = \boldsymbol{\Sigma} : \boldsymbol{E} \quad (1.11)$$

qui assure l'égalité du travail des efforts intérieurs calculé à l'échelle macroscopique et de la même grandeur calculée à l'échelle microscopique. Ce résultat, qui constitue le lemme de Hill, assure la cohérence énergétique du processus de changement d'échelle.

1.1.1.5 Homogénéisation

La définition de la procédure d'homogénéisation repose sur la connaissance des tenseurs de localisation \mathbb{A} . Dans le cas de la sollicitation en déformation homogène envisagée ici, on peut obtenir le comportement élastique homogène en utilisant les relations (1.7), (1.10) ainsi que la loi de comportement (1.1) :

$$\begin{aligned}\Sigma &= \langle \boldsymbol{\sigma} \rangle = \langle \mathbb{C} : \boldsymbol{\varepsilon} \rangle = \langle \mathbb{C} : \mathbb{A} : \mathbf{E} \rangle \\ &= \langle \mathbb{C} : \mathbb{A} \rangle : \mathbf{E}\end{aligned}\quad (1.12)$$

ce qui s'écrit aussi :

$$\Sigma = \mathbb{C}_{\mathbf{E}}^{hom} : \mathbf{E} \quad \text{avec} \quad \mathbb{C}_{\mathbf{E}}^{hom} = \langle \mathbb{C} : \mathbb{A} \rangle \quad (1.13)$$

On a donc une loi de comportement homogénéisée élastique linéaire caractérisée par le tenseur des modules macroscopique $\mathbb{C}_{\mathbf{E}}^{hom}$.

On peut également utiliser une approche énergétique pour résoudre le problème d'élasticité posé sur le v.e.r. défini par les équations (1.6). En utilisant de nouveau le fait que la solution du problème (1.6) s'écrit sous la forme (1.7), on montre que l'on a :

$$\begin{aligned}\Psi(\mathbf{E}) &= \frac{1}{2} \langle \boldsymbol{\varepsilon} : \mathbb{C} : \boldsymbol{\varepsilon} \rangle = \frac{1}{2} \langle \mathbf{E} : {}^T\mathbb{A} : \mathbb{C} : \mathbb{A} : \mathbf{E} \rangle = \frac{1}{2} \mathbf{E} : \langle {}^T\mathbb{A} : \mathbb{C} : \mathbb{A} \rangle : \mathbf{E} \\ &= \frac{1}{2} \mathbf{E} : \mathbb{C}_{\mathbf{E}}^{hom} : \mathbf{E}\end{aligned}\quad (1.14)$$

avec :

$$\mathbb{C}_{\mathbf{E}}^{hom} = \langle {}^T\mathbb{A} : \mathbb{C} : \mathbb{A} \rangle \quad (1.15)$$

L'identité des modules $\mathbb{C}_{\mathbf{E}}^{hom}$ et $\mathbb{C}_{\mathbf{E}}^{hom}$ s'obtient immédiatement en utilisant le lemme de Hill. Cette identité permet notamment de montrer la symétrie par rapport aux couples d'indice (ij) et (kl) du tenseur $\mathbb{C}_{\mathbf{E}}^{hom}$.

1.1.2 Sollicitation homogène en contrainte

On reprend le problème d'homogénéisation précédent en utilisant un mode de chargement sur le v.e.r défini à partir du tenseur des contraintes macroscopiques. Puisque l'étape de représentation ne dépend pas du mode de chargement appliqué sur le v.e.r, on reprend la présentation directement à l'étape de localisation.

1.1.2.1 Localisation

On impose ici la condition à la limite en effort : $\underline{T}^d = \underline{\Sigma} \cdot \underline{n}$ sur $\partial\Omega$, avec $\underline{\Sigma}$ représentant le tenseur des contraintes de Cauchy macroscopique. Dans ce cas la sollicitation appliquée sur Ω s'écrit :

$$\begin{cases} \underline{\sigma}(\underline{x}) \cdot \underline{n}(\underline{x}) = \underline{\Sigma} \cdot \underline{n}(\underline{x}) & (\partial\Omega) \\ \operatorname{div} \underline{\sigma}(\underline{x}) = 0 & (\Omega) \end{cases} \quad (1.16)$$

En utilisant le théorème de Gauss et le fait que le champ des contraintes $\underline{\sigma}$ est autoéquilibré, on établit la relation entre les contraintes à l'échelle macroscopique et celles à l'échelle microscopique :

$$\underline{\Sigma} = \langle \underline{\sigma} \rangle = \frac{1}{|\Omega|} \int_{\Omega} \underline{\sigma}(\underline{x}) d\Omega \quad (1.17)$$

En procédant comme pour le cas du chargement en déformation homogène, le problème d'élasticité posé sur le v.e.r s'écrit maintenant :

$$\begin{cases} \underline{\sigma}(\underline{x}) = \mathbb{C}(\underline{x}) : \underline{\varepsilon}(\underline{x}) & (\Omega) \\ \operatorname{div} \underline{\sigma}(\underline{x}) = 0 & (\Omega) \\ \underline{\sigma}(\underline{x}) \cdot \underline{n}(\underline{x}) = \underline{\Sigma} \cdot \underline{n}(\underline{x}) & (\partial\Omega) \end{cases} \quad (1.18)$$

On a alors une relation analogue à celle obtenue pour le chargement en déformation homogène :

$$\underline{\sigma}(\underline{x}) = \mathbb{B}(\underline{x}) : \underline{\Sigma} \quad (1.19)$$

où \mathbb{B} est appelé tenseur de localisation en contrainte. Il possède les propriétés suivantes, analogues à celles de \mathbb{A} :

$$\langle \mathbb{B} \rangle = \mathbb{I} \quad B_{ijkl} = B_{jikl} = B_{ijlk} \quad (1.20)$$

1.1.2.2 Lemme de Hill

En procédant exactement comme pour le cas du mode de chargement en déformation homogène, on montre que pour conserver le même énoncé du lemme de Hill que celui donné en (1.11), il est nécessaire de définir le tenseur des déformations macroscopiques à partir de son équivalent microscopique par la relation de moyenne :

$$\mathbf{E} = \langle \boldsymbol{\varepsilon} \rangle \quad (1.21)$$

1.1.2.3 Homogénéisation

De manière analogue, dans le cas où le chargement est du type contrainte homogène, compte tenu de (1.19), (1.21) et de la loi de comportement (1.1), on a :

$$\begin{aligned} \mathbf{E} = \langle \boldsymbol{\varepsilon} \rangle &= \langle \mathbb{S} : \boldsymbol{\sigma} \rangle = \langle \mathbb{S} : \mathbb{B} : \boldsymbol{\Sigma} \rangle \\ &= \langle \mathbb{S} : \mathbb{B} \rangle : \boldsymbol{\Sigma} \end{aligned} \quad (1.22)$$

ce qui s'écrit encore :

$$\mathbf{E} = \mathbb{S}_{\boldsymbol{\Sigma}}^{hom} : \boldsymbol{\Sigma} \quad \text{avec} \quad \mathbb{S}_{\boldsymbol{\Sigma}}^{hom} = \langle \mathbb{S} : \mathbb{B} \rangle \quad (1.23)$$

où $\mathbb{S}_{\boldsymbol{\Sigma}}^{hom}$ est le tenseur des complaisances macroscopique.

En utilisant le principe du minimum de l'énergie complémentaire pour le problème défini par (1.18) et l'écriture (1.19) pour la solution en contrainte de ce problème, on obtient :

$$\begin{aligned} \Psi^*(\boldsymbol{\Sigma}) &= \frac{1}{2} \langle \boldsymbol{\sigma} : \mathbb{S} : \boldsymbol{\sigma} \rangle = \frac{1}{2} \langle \boldsymbol{\Sigma} : {}^T\mathbb{B} : \mathbb{S} : \mathbb{B} : \boldsymbol{\Sigma} \rangle = \frac{1}{2} \boldsymbol{\Sigma} : \langle {}^T\mathbb{B} : \mathbb{S} : \mathbb{B} \rangle : \boldsymbol{\Sigma} \\ &= \frac{1}{2} \boldsymbol{\Sigma} : \mathbb{S}_{\boldsymbol{\Sigma}}^{thom} : \boldsymbol{\Sigma} \end{aligned} \quad (1.24)$$

avec :

$$\mathbb{S}_{\boldsymbol{\Sigma}}^{thom} = \langle {}^T\mathbb{B} : \mathbb{S} : \mathbb{B} \rangle \quad (1.25)$$

On démontre également l'identité des modules $\mathbb{S}_{\Sigma}^{hom}$ et $\mathbb{S}_{\Sigma}^{thom}$ définis par (1.23) et (1.25) ainsi que la relation de symétrie :

$$\mathbb{S}_{\Sigma}^{hom} (ijkl) = \mathbb{S}_{\Sigma}^{hom} (klij) \quad (1.26)$$

1.1.2.4 Relation entre $\mathbb{C}_{\mathbf{E}}^{hom}$ et $\mathbb{S}_{\Sigma}^{hom}$

$\mathbb{C}_{\mathbf{E}}^{hom}$ (chargement en déformation homogène) et $\mathbb{S}_{\Sigma}^{hom}$ (chargement en contrainte homogène) ne sont pas rigoureusement inverses l'un de l'autre. Si la condition de séparation des échelles $d \ll \ell$ est satisfaite, on admet que les deux types de conditions aux limites sont équivalentes. Dans toute la suite on suppose que cette condition est toujours valable. On simplifie donc les écritures de $\mathbb{C}_{\mathbf{E}}^{hom}$ et $\mathbb{S}_{\Sigma}^{hom}$ en \mathbb{C}^{hom} et \mathbb{S}^{hom} avec $\mathbb{C}^{hom} : \mathbb{S}^{hom} = \mathbb{I}$ [44, 53].

1.1.3 Cas périodique

1.1.3.1 Représentation

On considère une structure occupant le domaine géométrique Ω de frontière $\partial\Omega$. Les propriétés mécaniques du milieu constitutif (ici les propriétés élastiques) évoluent de manière périodique. La structure Ω peut donc être construite à partir de la donnée d'une cellule de base C se répétant périodiquement. On conçoit aisément qu'il est suffisant de décrire cette cellule de base, tant du point de vue géométrique que du point de vue mécanique pour complètement définir le matériau constitutif de la structure.

1.1.3.2 Localisation

Dans cette situation, le problème de localisation ne se pose pas sur le v.e.r (constitué d'un grand nombre de cellules de base) mais sur la cellule de base elle-même [2].

A une déformation macroscopique imposée \mathbf{E} , on associe la sollicitation appliquée sur la cellule de base C suivante :

$$\left\{ \begin{array}{ll} \underline{\xi} = \mathbf{E} \cdot \underline{x} + \underline{\xi}' & \underline{\xi}' \text{ périodique} & (\partial C) \\ \operatorname{div} \boldsymbol{\sigma} = 0 & & (C) \\ \boldsymbol{\sigma} \cdot \underline{n} \text{ anti-périodique} & & (\partial C) \end{array} \right. \quad (1.27)$$

On rappelle qu'une grandeur définie sur ∂C est dite anti-périodique si elle prend des valeurs de signe opposé aux points se correspondant par périodicité.

A un champ de déplacement $\underline{\xi}$ c.a. avec \mathbf{E} , c'est à dire vérifiant la première relation (1.27), on associe le champ de déformation linéarisé :

$$\boldsymbol{\varepsilon} = \mathbf{E} + \boldsymbol{\varepsilon}' \quad (1.28)$$

avec $\boldsymbol{\varepsilon} = \frac{1}{2}(\nabla \underline{\xi} + {}^T \nabla \underline{\xi})$ et $\boldsymbol{\varepsilon}' = \frac{1}{2}(\nabla \underline{\xi}' + {}^T \nabla \underline{\xi}')$.

En utilisant la périodicité de $\underline{\xi}'$, on montre que le champ de déformation sur C vérifie la relation :

$$\langle \boldsymbol{\varepsilon} \rangle = \mathbf{E} + \langle \boldsymbol{\varepsilon}' \rangle = \mathbf{E} \quad (1.29)$$

puisque $\langle \boldsymbol{\varepsilon}' \rangle = \frac{1}{|C|} \int_{\partial C} \underline{\xi}' \otimes \underline{n} dS = 0$, les valeurs de $\underline{\xi}'$ (respectivement \underline{n}) étant égales (respectivement de signe contraire) aux points de ∂C se correspondant par périodicité.

De même un champ de contrainte microscopique $\boldsymbol{\sigma}$ défini sur C est dit statiquement admissible, s'il vérifie l'équation d'équilibre sans force de volume dans C et la condition d'anti-périodicité du vecteur contrainte sur ∂C (seconde et troisième relation (1.27)). A un tel champ de contrainte, on associe le tenseur des contraintes macroscopiques $\boldsymbol{\Sigma}$ par la relation de moyenne :

$$\boldsymbol{\Sigma} = \langle \boldsymbol{\sigma} \rangle = \frac{1}{|\Omega|} \int_{\Omega} \boldsymbol{\sigma}(\underline{x}) d\Omega \quad (1.30)$$

Pour ce mode de chargement, le lemme de Hill est également valable [67]. En effet, pour tout le champ de déplacement cinématiquement admissible et pour tout champ de contrainte statiquement admissible, on a :

$$\langle \boldsymbol{\sigma} : \boldsymbol{\varepsilon} \rangle = \langle \boldsymbol{\sigma} \rangle : \mathbf{E} + \langle \boldsymbol{\sigma} : \boldsymbol{\varepsilon}' \rangle = \boldsymbol{\Sigma} : \mathbf{E} \quad (1.31)$$

avec

$$\langle \boldsymbol{\sigma} : \boldsymbol{\varepsilon}' \rangle = \frac{1}{|C|} \int_{\partial C} \underline{\xi}' \cdot \boldsymbol{\sigma} \cdot \underline{n} dS = 0 \quad (1.32)$$

car les valeurs de $\underline{\xi}'$ sont identiques aux points de ∂C se correspondant par périodicité tandis que les valeurs de $\boldsymbol{\sigma} \cdot \underline{n}$ sont opposées en ces mêmes points.

Le problème auxiliaire posé sur la cellule de base d'un matériau périodique est défini par les équations suivantes :

$$\left\{ \begin{array}{ll} \boldsymbol{\sigma}(\underline{x}) = \mathbb{C}(\underline{x}) : (\mathbf{E} + \boldsymbol{\varepsilon}'(\underline{x})) & (C) \\ \operatorname{div} \boldsymbol{\sigma}(\underline{x}) = 0 & (C) \\ \underline{\xi} = \mathbf{E} \cdot \underline{x} + \underline{\xi}' & (C) \\ \underline{\xi}' \text{ périodique} & (\partial C) \\ \boldsymbol{\sigma} \cdot \underline{n} \text{ anti-périodique} & (\partial C) \end{array} \right. \quad (1.33)$$

Comme pour l'approche micromécanique, la cellule de base étant constituée d'un matériau élastique linéaire, le problème auxiliaire (1.33) est linéaire à état initial naturel et on peut définir un tenseur \mathbb{L} du quatrième ordre tel que :

$$\boldsymbol{\varepsilon}(\underline{x}) = \mathbb{L}(\underline{x}) : \mathbf{E} \quad (1.34)$$

\mathbb{L} désigne le tenseur de localisation pour le cas périodique. Il possède les mêmes propriétés que le tenseur de localisation \mathbb{A} présenté précédemment.

1.1.3.3 Homogénéisation

En introduisant (1.34) dans la relation (1.31), on obtient une loi de comportement macroscopique du même type que celle obtenue dans les situations précédentes :

$$\boldsymbol{\Sigma} = \mathbb{C}^{hom} : \mathbf{E} \quad \text{avec} \quad \mathbb{C}^{hom} = \langle \mathbb{C} : \mathbb{L} \rangle \quad (1.35)$$

L'approche énergétique peut aussi être mise en œuvre pour résoudre le problème auxiliaire (1.33). On obtient alors la définition du tenseur des modules macroscopiques suivante :

$$\mathbb{C}^{hom} = \langle {}^T \mathbb{L} : \mathbb{C} : \mathbb{L} \rangle \quad (1.36)$$

Cette définition permet encore une fois de démontrer la symétrie par rapport au couple d'indice (ij) et (kl) du tenseur \mathbb{C}^{hom} .

1.1.4 Matériau poreux sec

On s'intéresse ici à la caractérisation du comportement d'un matériau poreux sec par une méthode d'homogénéisation. Compte tenu de ce qui vient d'être présenté, seul le cas d'une sollicitation homogène en déformation est envisagé, les résultats correspondant aux autres situations se déduisant immédiatement de ce qui suit¹.

Le matériau poreux sec est constitué d'une phase solide et de pores occupant respectivement les domaines Ω_α ($\alpha = s, p$). La phase solide est supposée constituée d'un matériau élastique linéaire homogène. Pour des raisons de simplicité, la frontière du v.e.r. est supposée n'être constituée que de la phase solide². Le problème d'élasticité posé sur la phase solide s'écrit :

$$\begin{cases} \boldsymbol{\sigma}(\underline{x}) = \mathbb{C}_s : \boldsymbol{\varepsilon}(\underline{x}) & (\Omega_s) \\ \operatorname{div} \boldsymbol{\sigma}(\underline{x}) = 0 & (\Omega_s) \\ \underline{\xi}(\underline{x}) = \mathbf{E} \cdot \underline{x} & (\partial\Omega) \\ \boldsymbol{\sigma} \cdot \underline{n} = 0 & (\omega_{sp}) \end{cases} \quad (1.37)$$

où ω_{sp} désigne l'interface entre la phase solide et les pores et \underline{n} le vecteur unitaire normal extérieur au domaine Ω_s le long de ω_{sp} .

Au lieu de résoudre (1.37) directement, on remplace ce problème par un problème d'homogénéisation défini sur le v.e.r par les équations suivantes :

$$\begin{cases} \boldsymbol{\sigma}(\underline{x}) = \mathbb{C}_\alpha : \boldsymbol{\varepsilon}(\underline{x}) & (\Omega_\alpha, \alpha = s, p) \\ \operatorname{div} \boldsymbol{\sigma}(\underline{x}) = 0 & (\Omega) \\ \underline{\xi}(\underline{x}) = \mathbf{E} \cdot \underline{x} & (\partial\Omega) \\ \llbracket \boldsymbol{\sigma} \rrbracket \cdot \underline{n} = 0 \quad \llbracket \underline{\xi} \rrbracket = 0 & (\omega_{sp}) \end{cases} \quad (1.38)$$

où $\llbracket f \rrbracket$ désigne le saut de la grandeur f sur l'interface solide-pores. Il est

¹En fait, on ne peut pas mettre en œuvre le mode de chargement en contrainte dans le cas général. En effet, si un pore intersecte la frontière $\partial\Omega$, il n'est pas possible d'imposer la condition $\boldsymbol{\sigma} \cdot \underline{n} = \boldsymbol{\Sigma} \cdot \underline{n}$ en ces points.

²Dans le cas général où la frontière du v.e.r. n'est pas constituée uniquement de la phase solide, on peut utiliser des prolongements continus des champs de déplacement pour généraliser les résultats énoncés ici.

clair qu'il suffit de prendre $\mathbb{C}_p \rightarrow 0$ dans le problème (1.38) pour retrouver le problème (1.37).

En procédant ainsi, on obtient la loi du comportement macroscopique pour le matériau poreux sec considéré, qui s'écrit :

$$\Sigma = \mathbb{C}^{hom} : \mathbf{E} \quad (1.39)$$

avec

$$\mathbb{C}^{hom} = \sum_{\alpha=s,p} f_\alpha \mathbb{C}_\alpha : \langle \mathbb{A} \rangle_\alpha = (1-n) \mathbb{C}_s : \langle \mathbb{A} \rangle_s \quad (1.40)$$

où f_α désigne la fraction volumique du domaine occupé par la phase α , $\langle \cdot \rangle_\alpha$ l'opérateur de moyenne sur le domaine occupé par la phase α et $f_p = n$ la porosité.

1.2 Comportement élastique homogénéisé à état initial non-naturel

Dans la présentation précédente nous avons considéré des comportements élastiques linéaires à état initial naturel. On va maintenant aborder le cas plus général du matériau élastique linéaire à état initial non-naturel.

1.2.1 Théorème de Levin

On se place ici dans la situation où il existe un champ de déformation initiale en absence de chargement mécanique (champ de déformation d'origine thermique par exemple) ou un champ de précontrainte en l'absence de déformation (contraintes résiduelles en plasticité par exemple). Le comportement à l'échelle microscopique s'écrit dans ce cas :

$$\begin{cases} (a) & \boldsymbol{\sigma}(\underline{x}) = \mathbb{C}(\underline{x}) : \boldsymbol{\varepsilon}(\underline{x}) + \boldsymbol{\sigma}^p(\underline{x}) \\ (b) & \boldsymbol{\varepsilon}(\underline{x}) = \mathbb{S}(\underline{x}) : \boldsymbol{\sigma}(\underline{x}) + \boldsymbol{\varepsilon}^L(\underline{x}) \end{cases} \quad (1.41)$$

Compte tenu de la relation $\mathbb{C}(\underline{x}) : \mathbb{S}(\underline{x}) = \mathbb{S}(\underline{x}) : \mathbb{C}(\underline{x}) = \mathbb{I}$, on obtient les relations entre les champs de précontrainte et de déformation initiale suivantes :

$$\boldsymbol{\sigma}^p(\underline{x}) = -\mathbb{C}(\underline{x}) : \boldsymbol{\varepsilon}^L(\underline{x}) \quad \text{et} \quad \boldsymbol{\varepsilon}^L(\underline{x}) = -\mathbb{S}(\underline{x}) : \boldsymbol{\sigma}^p(\underline{x}) \quad (1.42)$$

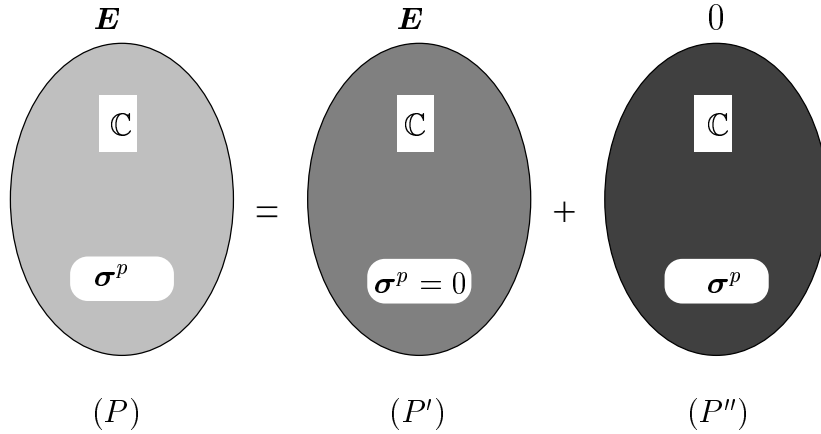


FIG. 1.1 – Décomposition du problème complet (P) en deux problèmes élémentaires (P') et (P'')

On s'intéresse au cas d'un v.e.r constitué d'un matériau élastique linéaire à précontrainte non nulle (1.41.a). Pour trouver le comportement macroscopique pertinent dans ce cas, on utilise le mode de chargement en déformation homogène. Le problème de localisation à résoudre dans ce cas est alors défini par les conditions (1.2) et la loi de comportement (1.41.a). On décompose ce problème noté (P) en deux problèmes plus simples notés respectivement (P') et (P''). Le premier problème (P') correspond au problème élastique sans précontrainte. Ce problème est du type de ceux étudiés au paragraphe précédent. Le deuxième problème (P'') correspond au problème avec précontraintes à déformation macroscopique imposée nulle. Nous avons pour ces trois problèmes les relations suivantes :

$$\left\{ \begin{array}{l} \boldsymbol{\sigma}(\underline{x}) = \boldsymbol{\sigma}'(\underline{x}) + \boldsymbol{\sigma}''(\underline{x}) \quad (\forall \underline{x} \in \Omega) \\ \operatorname{div} \boldsymbol{\sigma}(\underline{x}) = \operatorname{div} \boldsymbol{\sigma}'(\underline{x}) = \operatorname{div} \boldsymbol{\sigma}''(\underline{x}) = 0 \quad (\forall \underline{x} \in \Omega) \\ \underline{\xi} = \underline{\xi}' = \mathbf{E} \cdot \underline{x} \quad \underline{\xi}'' = \underline{0} \quad (\forall \underline{x} \in \partial\Omega) \\ \langle \boldsymbol{\varepsilon} \rangle = \langle \boldsymbol{\varepsilon}' \rangle = \mathbf{E} \quad \langle \boldsymbol{\varepsilon}'' \rangle = \mathbf{0} \end{array} \right. \quad (1.43)$$

où $\boldsymbol{\sigma}$, $\boldsymbol{\varepsilon}$, $\underline{\xi}$ désignent respectivement les contraintes, les déformations et les déplacements pour le problème (P); $\boldsymbol{\sigma}'$, $\boldsymbol{\varepsilon}'$, $\underline{\xi}'$ les mêmes grandeurs pour le problème (P') et $\boldsymbol{\sigma}''$, $\boldsymbol{\varepsilon}''$, $\underline{\xi}''$ celles pour le problème (P'').

Compte tenu des résultats du paragraphe précédent, on a pour le problème (P')

$$\Sigma' = \langle \sigma' \rangle = \langle \mathbb{C} : \varepsilon' \rangle = \langle \mathbb{C} : \mathbb{A} : \mathbf{E} \rangle = \langle \mathbb{C} : \mathbb{A} \rangle : \mathbf{E} = \mathbb{C}^{hom} : \mathbf{E} \quad (1.44)$$

On a donc :

$$\Sigma = \Sigma' + \Sigma'' = \mathbb{C}^{hom} : \mathbf{E} + \Sigma'' \quad (1.45)$$

La détermination complète de la loi de comportement à l'échelle macroscopique se ramène donc au calcul de $\Sigma'' = \langle \sigma'' \rangle$.

D'après (1.41.a), la solution en contrainte du problème (P'') s'écrit :

$$\sigma'' = \mathbb{C} : \varepsilon'' + \sigma^p \quad (1.46)$$

Par ailleurs, on sait que le tenseur des déformations ε' du problème (P') est cinématiquement admissible avec le tenseur des déformations macroscopique \mathbf{E} tandis que le tenseur des contraintes σ'' solution du problème (P'') est statiquement admissible avec Σ'' . Le lemme de Hill pour ce couple de tenseurs s'écrit :

$$\langle \sigma'' : \varepsilon' \rangle = \langle \sigma'' \rangle : \langle \varepsilon' \rangle = \Sigma'' : \mathbf{E} \quad (1.47)$$

D'après la relation (1.46), la relation (1.47) s'écrit aussi :

$$\langle \sigma'' : \varepsilon' \rangle = \langle \sigma^p : \varepsilon' \rangle + \langle \varepsilon'' : \mathbb{C} : \varepsilon' \rangle = \langle \sigma^p : \mathbb{A} \rangle : \mathbf{E} + \langle \varepsilon'' : \sigma' \rangle \quad (1.48)$$

Le champ ε'' est cinématiquement admissible avec $\mathbf{E}'' = 0$ et le champ σ' est statiquement admissible. On applique le lemme de Hill sur le deuxième terme de la relation (1.48). On obtient immédiatement :

$$\langle \varepsilon'' : \sigma' \rangle = \langle \varepsilon'' \rangle : \langle \sigma' \rangle = 0 \quad (1.49)$$

En comparant les relations (1.47) et (1.48), on montre que la contrainte macroscopique pour le problème (P'') s'écrit :

$$\Sigma'' = \langle \sigma^p : \mathbb{A} \rangle = \langle {}^T\mathbb{A} : \sigma^p \rangle \quad (1.50)$$

Compte tenu des relations (1.44) et (1.50), on obtient la relation à l'échelle macroscopique pour le problème initial (P) :

$$\Sigma = \Sigma' + \Sigma'' = \mathbb{C}^{hom} : \mathbf{E} + \langle {}^T\mathbb{A} : \sigma^p \rangle \quad (1.51)$$

Ce résultat montre que dans la situation à état initial non-naturel le comportement homogène s'obtient en utilisant directement les résultats obtenus dans la situation à état initial naturel. En particulier, le tenseur de localisation en déformation joue un rôle fondamental puisqu'il permet d'établir la relation entre le précontrainte macroscopique et le champ des précontraintes microscopiques.

Bien évidemment, pour un matériau à microstructure périodique à état initial non-naturel, on montre exactement de la même façon que l'on a la loi de comportement macroscopique :

$$\Sigma = \mathbb{C}^{hom} : \mathbf{E} + \langle {}^T\mathbb{L} : \sigma^p \rangle \quad (1.52)$$

De manière analogue, pour la situation où il existe un champ de déformation initiale $\boldsymbol{\varepsilon}^L$ en l'absence de chargement mécanique, on démontre que le comportement à l'échelle macroscopique s'écrit :

$$\mathbf{E} = \mathbb{S}^{hom} : \Sigma + \mathbf{E}^L \quad (1.53)$$

avec :

$$\mathbf{E}^L = \langle {}^T\mathbb{B} : \boldsymbol{\varepsilon}^L \rangle \quad (1.54)$$

1.2.2 Matériau poreux saturé [31]

On considère un v.e.r. de milieu poreux dont la matrice est constituée d'un matériau solide élastique linéaire homogène occupant le domaine Ω_s et dont l'espace poreux est saturé par un seul liquide occupant le domaine Ω_ℓ . Pour simplifier, on suppose toujours que la frontière du v.e.r. est constituée seulement de particules solides.

Comme on ne s'intéresse ici qu'à la part du comportement liée aux déformations du squelette solide, et non pas aux phénomènes de transport de la phase liquide par rapport au squelette, les efforts intérieurs à l'échelle microscopique dans le fluide sont représentés par un champ de pression dans les

situations homogénéisables [2]. Les forces de volume doivent de plus être négligeables à cette échelle. Les efforts intérieurs dans la phase solide et la phase liquide sont décrits respectivement par un champ de contrainte de Cauchy $\boldsymbol{\sigma}(\underline{x})$ dans Ω_s et un champ de pression uniforme p_ℓ . Le problème d'élasticité posé sur la phase solide s'écrit dans ce cas :

$$\begin{cases} \boldsymbol{\sigma}(\underline{x}) = \mathbb{C}^s : \boldsymbol{\varepsilon}(\underline{x}) & (\Omega_s) \\ \operatorname{div} \boldsymbol{\sigma}(\underline{x}) = 0 & (\Omega_s) \\ \underline{\xi}(\underline{x}) = \mathbf{E} \cdot \underline{x} & (\partial\Omega) \\ \boldsymbol{\sigma} \cdot \underline{n} = -p_\ell \underline{n} & (\omega_{s\ell}) \end{cases} \quad (1.55)$$

où $\omega_{s\ell}$ désigne l'interface entre la phase solide et la phase liquide.

De nouveau, on remplace (1.55) par un problème d'homogénéisation pour un milieu biphasique avec précontrainte :

$$\begin{cases} \boldsymbol{\sigma} = \mathbb{C}_\alpha : \boldsymbol{\varepsilon} + \boldsymbol{\sigma}_\alpha & (\Omega_\alpha, \alpha = s, \ell) \\ \operatorname{div} \boldsymbol{\sigma}(\underline{x}) = 0 & (\Omega) \\ \underline{\xi}(\underline{x}) = \mathbf{E} \cdot \underline{x} & (\partial\Omega) \\ \llbracket \boldsymbol{\sigma} \rrbracket \cdot \underline{n} = 0 \quad \llbracket \underline{\xi} \rrbracket = 0 & (\omega_{s\ell}) \end{cases} \quad (1.56)$$

et on se ramène au problème initial en faisant :

$$\mathbb{C}_\alpha = \begin{cases} \mathbb{C}^s & (\Omega_s) \\ 0 & (\Omega_\ell) \end{cases} \quad \boldsymbol{\sigma}_\alpha = \begin{cases} \mathbf{0} & (\Omega_s) \\ -p_\ell \boldsymbol{\delta} & (\Omega_\ell) \end{cases} \quad (1.57)$$

où $\boldsymbol{\delta}$ désigne le tenseur identité du second ordre.

En utilisant le résultat (1.51) présenté précédemment, compte tenu de (1.57), on montre qu'à l'échelle macroscopique le comportement du matériau poreux saturé considéré ici s'écrit :

$$\boldsymbol{\Sigma} = \mathbb{C}^{hom} : \mathbf{E} - np_\ell \langle \mathbb{A} \rangle_\ell : \boldsymbol{\delta} = \mathbb{C}^{hom} : \mathbf{E} - \mathbf{B}p_\ell \quad (1.58)$$

avec :

$$\mathbf{B} = n \langle \mathbb{A} \rangle_\ell : \boldsymbol{\delta} \quad (1.59)$$

où \mathbb{C}^{hom} , le tenseur des modules d'élasticité macroscopique du milieu poreux dans le cas sec, se calcule par la relation (1.40). \mathbf{B} désigne le tenseur de Biot.

Pour déterminer les valeurs du \mathbf{B} , compte tenu de (1.40) et de la propriété $(1-n) \langle \mathbb{A} \rangle_s + n \langle \mathbb{A} \rangle_\ell = \mathbb{I}$, on peut réécrire (1.59) sous la forme suivante :

$$\mathbf{B} = (\mathbb{I} - \mathbb{C}^{hom} : \mathbb{S}^s) : \boldsymbol{\delta} \quad (1.60)$$

où \mathbb{S}^s désigne le tenseur des complaisances élastiques de la phase solide.

Dans le cas d'un matériau poreux constitué d'une phase solide incompressible ($\mathbb{S}^s : \boldsymbol{\delta} = \mathbf{0}$), le tenseur de Biot est donc égal à l'identité du second ordre. La loi de comportement du matériau s'écrit alors en fonction de la contrainte effective de Terzaghi [68] :

$$\boldsymbol{\Sigma} = \boldsymbol{\Sigma}' - p_\ell \boldsymbol{\delta} = \mathbb{C}^{hom} : \mathbf{E} \quad (1.61)$$

où $\boldsymbol{\Sigma}'$ désigne la contrainte effective.

Par ailleurs, on montre que la variation de porosité de l'espace poreux à l'échelle macroscopique pour un milieu poreux saturé s'écrit [51] :

$$\delta n = \mathbf{B} : \mathbf{E} + \frac{1}{M} p_\ell \quad (1.62)$$

avec :

$$\frac{1}{M} = \boldsymbol{\delta} : \mathbb{S}^s : (\mathbf{B} - n \boldsymbol{\delta}) \quad (1.63)$$

Dans le cas particulier où les comportements du milieu homogénéisé et de la phase solide sont isotropes (modules de compression et cisaillement macroscopiques k^{hom} et μ^{hom} , modules de compression et cisaillement du solide k^s et μ^s), (1.58) et (1.62) s'écrivent :

$$\begin{cases} \boldsymbol{\Sigma} = 2\mu^{hom} \mathbf{E}_d + k^{hom} \text{tr} \mathbf{E} \boldsymbol{\delta} - b p_\ell \boldsymbol{\delta} \\ \delta n = b \text{tr} \mathbf{E} + \left(\frac{b-n}{k^s} \right) p_\ell \end{cases} \quad (1.64)$$

où b , le coefficient de Biot est égal à :

$$b = 1 - \frac{k^{hom}}{k^s} \quad (1.65)$$

et \mathbf{E}_d désigne la partie déviatorique de \mathbf{E} .

On justifie ainsi la forme des équations de comportement obtenues par une approche complètement macroscopique dans [6, 26].

1.3 Méthodes d'estimation classiques pour les solides hétérogènes

On considère un matériau solide hétérogène non poreux à N phases (homogène par phase). Supposant que les valeurs des tenseurs des modules d'élasticité microscopiques dans chacune des phases sont connues, on peut réécrire l'équation (1.13) sous la forme suivante :

$$\mathbb{C}^{hom} = \sum_{i=1}^N f_i \mathbb{C}_i : \mathbb{A}_i \quad (1.66)$$

avec :

$$\mathbb{A}_i = \frac{1}{|\Omega_i|} \int_{\Omega_i} \mathbb{A}(\underline{x}) d\Omega \quad (1.67)$$

où \mathbb{C}_i désigne le tenseur des modules d'élasticité pour la phase numéro i , \mathbb{A}_i la moyenne du champ des tenseurs de localisation des déformations sur le domaine occupé par la phase numéro i . La détermination des caractéristiques élastiques à l'échelle macroscopique se ramène donc aux calculs des \mathbb{A}_i . Dans le cas particulier du matériau biphasique dont les deux phases élastiques linéaires homogènes occupent des domaines géométriquement distincts parfaitement accolés, il suffit de connaître la valeur du tenseur de localisation pour une seule des phases puis d'utiliser la propriété $\langle \mathbb{A} \rangle = \mathbb{I}$ pour calculer la même valeur pour la seconde phase. De la même façon, dans le cas général, la connaissance de $N - 1$ valeurs des \mathbb{A}_i permet le calcul de \mathbb{C}^{hom} .

Comme nous l'avons mentionné dans le paragraphe consacré à l'étape de représentation, il est rare de disposer de toutes les informations nécessaires pour obtenir précisément le comportement homogène équivalent à partir des résultats qui viennent d'être exposés. On a cependant cherché à obtenir des estimations des caractéristiques effectives en formulant des hypothèses supplémentaires visant à remplacer les informations manquantes [56, 43]. C'est

l'objet des méthodes d'estimation classiques présentées dans la suite. Ces méthodes faisant un large usage de la solution du problème d'Eshelby, nous présentons tout d'abord rapidement les principaux résultats de ce problème qui donnent la clé de la résolution des problèmes de matériaux hétérogènes et composites. Les détails sont décrits dans [33, 34].

1.3.1 Problème d'Eshelby

La situation initialement considérée par Eshelby est celle d'un milieu infini (Ω) élastique homogène de module \mathbb{C}_0 , dont un domaine borné (I), l'« inclusion », subit d'une « déformation libre homogène $\boldsymbol{\varepsilon}_L$ ». Le déplacement tend vers zéro à l'infini. Les équations de ce problème sont les suivantes :

$$\left\{ \begin{array}{ll} \boldsymbol{\sigma}(\underline{x}) = \mathbb{C}_0 : \boldsymbol{\varepsilon}(\underline{x}) & (\Omega) - (I) \\ \boldsymbol{\sigma} = \mathbb{C}_0 : (\boldsymbol{\varepsilon}(\underline{x}) - \boldsymbol{\varepsilon}_L) & (I) \\ \operatorname{div} \boldsymbol{\sigma}(\underline{x}) = 0 & (\Omega) \\ \underline{\xi}(\underline{x}) \rightarrow 0 & (\|\underline{x}\| \rightarrow \infty) \\ \llbracket \boldsymbol{\sigma} \rrbracket \cdot \underline{n} = 0 \quad \llbracket \underline{\xi} \rrbracket = 0 & (\partial I) \end{array} \right. \quad (1.68)$$

Eshelby a montré que, si l'inclusion est de forme ellipsoïdale, la déformation à l'intérieur de l'inclusion est homogène et vaut :

$$\boldsymbol{\varepsilon}_I = \mathbb{S}_E : \boldsymbol{\varepsilon}_L \quad (1.69)$$

où \mathbb{S}_E est un tenseur d'ordre quatre, appelé tenseur d'Eshelby (voir annexe I), qui dépend de la forme de l'ellipsoïde (I), de son orientation et du tenseur des modules d'élasticité \mathbb{C}_0 .

L'équation de comportement dans l'inclusion $\boldsymbol{\sigma} = \mathbb{C}_0 : (\boldsymbol{\varepsilon} - \boldsymbol{\varepsilon}_L)$ peut être réécrite sous la forme :

$$\boldsymbol{\sigma} = \mathbb{C}_0 : \boldsymbol{\varepsilon} + \boldsymbol{\tau} \quad \text{avec} \quad \boldsymbol{\tau} = -\mathbb{C}_0 : \boldsymbol{\varepsilon}_L \quad (1.70)$$

où $\boldsymbol{\tau}$, appelé tenseur de polarisation, est dû à la précontrainte dans l'inclusion. Grâce à cette transformation, on peut réécrire la solution d'Eshelby (1.69) sous la forme suivante :

$$\boldsymbol{\varepsilon}_I = -\mathbb{P} : \boldsymbol{\tau} \quad \text{avec} \quad \mathbb{P} = \mathbb{S}_E : \mathbb{C}_0^{-1} = \mathbb{S}_E : \mathbb{S}_0 \quad (1.71)$$

où \mathbb{S}_0 désigne le tenseur de souplesse du milieu et \mathbb{P} le tenseur de Hill.

Ces résultats permettent d'aborder maintenant le problème de l'inhomogénéité d'Eshelby. Dans ce cas l'inclusion, constituée d'un matériau élastique de caractéristiques \mathbb{C}_I , occupe un domaine ellipsoïdal borné à l'intérieur d'un milieu infini constitué d'un matériau élastique linéaire de caractéristiques \mathbb{C}_0 . Les autres conditions sont les mêmes que pour le problème (1.68). Les équations de ce problème s'écrivent alors :

$$\left\{ \begin{array}{ll} \boldsymbol{\sigma}(\underline{x}) = \mathbb{C}_0 : \boldsymbol{\varepsilon}(\underline{x}) & (\Omega) - (I) \\ \boldsymbol{\sigma}(\underline{x}) = \mathbb{C}_I : \boldsymbol{\varepsilon}(\underline{x}) + \boldsymbol{\tau} & (I) \\ \operatorname{div} \boldsymbol{\sigma}(\underline{x}) = 0 & (\Omega) \\ \underline{\xi}(\underline{x}) \rightarrow 0 & (\|\underline{x}\| \rightarrow \infty) \\ \llbracket \boldsymbol{\sigma} \rrbracket \cdot \underline{n} = 0 \quad \llbracket \underline{\xi} \rrbracket = 0 & (\partial I) \end{array} \right. \quad (1.72)$$

On peut réécrire la relation du comportement de l'inclusion $\boldsymbol{\sigma} = \mathbb{C}_I : \boldsymbol{\varepsilon} + \boldsymbol{\tau}$ sous la forme :

$$\boldsymbol{\sigma} = \mathbb{C}_0 : \boldsymbol{\varepsilon} + \boldsymbol{\tau}' \quad \text{avec} \quad \boldsymbol{\tau}' = \boldsymbol{\tau} + (\mathbb{C}_I - \mathbb{C}_0) : \boldsymbol{\varepsilon} \quad (1.73)$$

A condition que la polarisation $\boldsymbol{\tau}'$ soit homogène dans l'inclusion, la solution (1.71) associée à $\boldsymbol{\tau}'$ est bien la solution du problème (1.72). La déformation dans l'inclusion s'écrit dans ce cas :

$$\boldsymbol{\varepsilon}_I = [\mathbb{I} + \mathbb{P} : (\mathbb{C}_I - \mathbb{C}_0)]^{-1} : (-\mathbb{P} : \boldsymbol{\tau}) \quad (1.74)$$

On impose maintenant une déformation homogène à l'infini ($\underline{\xi} = \mathbf{E} \cdot \underline{x}$ quand $\|\underline{x}\| \rightarrow \infty$). Les autres conditions sont les mêmes que pour le problème (1.72). Le problème s'écrit dans ce cas :

$$\left\{ \begin{array}{ll} \boldsymbol{\sigma}(\underline{x}) = \mathbb{C}_0 : \boldsymbol{\varepsilon}(\underline{x}) & (\Omega) - (\text{I}) \\ \boldsymbol{\sigma}(\underline{x}) = \mathbb{C}_I : \boldsymbol{\varepsilon}(\underline{x}) + \boldsymbol{\tau} & (\text{I}) \\ \operatorname{div} \boldsymbol{\sigma}(\underline{x}) = 0 & (\Omega) \\ \underline{\xi}(\underline{x}) \rightarrow \mathbf{E} \cdot \underline{x} & (\|\underline{x}\| \rightarrow \infty) \\ \llbracket \boldsymbol{\sigma} \rrbracket \cdot \underline{n} = 0 \quad \llbracket \underline{\xi} \rrbracket = 0 & (\partial\text{I}) \end{array} \right. \quad (1.75)$$

Pour résoudre (1.75), il faut juste superposer à la solution du problème (1.72) un champ de déformation homogène en tout point. On montre que dans ce cas la déformation dans l'inclusion est encore homogène et vaut :

$$\boldsymbol{\varepsilon}_I = [\mathbb{I} + \mathbb{P} : (\mathbb{C}_I - \mathbb{C}_0)]^{-1} : (\mathbf{E} - \mathbb{P} : \boldsymbol{\tau}) \quad (1.76)$$

Dans la situation particulière où aucune déformation initiale ou précontrainte n'apparaît dans l'inclusion et où le milieu est soumis à une déformation homogène à l'infini, on obtient alors la déformation homogène dans l'inclusion en faisant $\boldsymbol{\tau} = \mathbf{0}$ dans (1.76) :

$$\boldsymbol{\varepsilon}_I = [\mathbb{I} + \mathbb{P} : (\mathbb{C}_I - \mathbb{C}_0)]^{-1} : \mathbf{E} \quad (1.77)$$

Dans le cas particulier d'un matériau constitué d'une matrice dont le comportement est élastique linéaire isotrope (de caractéristiques μ_0, κ_0) et une inclusion sphérique dont le comportement est également élastique linéaire isotrope (de caractéristiques μ_I, κ_I), la solution (1.77) du problème de l'inhomogénéité d'Eshelby s'écrit :

$$\mathbf{e}_I = \frac{1}{1 + \frac{\beta_0(\mu_I - \mu_0)}{\mu_0}} \mathbf{E}_d \quad \theta_I = \frac{1}{1 + \frac{\alpha_0(\kappa_I - \kappa_0)}{\kappa_0}} \Theta \quad (1.78)$$

avec :

$$\alpha_0 = \frac{3\kappa_0}{3\kappa_0 + 4\mu_0} \quad \beta_0 = \frac{6(\kappa_0 + 2\mu_0)}{5(3\kappa_0 + 4\mu_0)} \quad (1.79)$$

où \mathbf{e}_I et θ_I désignent respectivement les parties déviatorique et sphérique du champ de déformation dans l'inclusion sphérique, \mathbf{E}_d et Θ désignant respectivement les parties déviatorique et sphérique du champ de déformation

homogène appliqué à *l'infini*. On remarque que la taille de la sphère n'intervient pas dans le résultat.

La solution du problème de l'inhomogénéité d'Eshelby fournit un outil très efficace permettant de construire différentes estimations des modules homogénéisés. Il reste cependant à choisir un bon schéma d'estimation permettant de rendre compte du mieux possible des caractéristiques morphologiques du v.e.r. On présente maintenant trois schémas classiques.

1.3.2 Schéma dilué

On considère un matériau constitué d'une matrice (phase $i = 1$) entourant des hétérogénéités (phase $i = 2, N$) de formes et orientations différentes (toutes les phases ont un comportement élastique linéaire homogène). On suppose que la concentration en hétérogénéités est suffisamment faible pour qu'il soit légitime de négliger les interactions entre hétérogénéités. On propose alors d'estimer la moyenne de la déformation dans chaque inclusion par celle qui s'établit dans une inhomogénéité de matériau (i) incluses dans une matrice de matériau (1) soumise à l'infini à la déformation macroscopique \mathbf{E} . En utilisant (1.77), on écrit alors :

$$\langle \boldsymbol{\varepsilon} \rangle_{(i)}^{est} = [\mathbb{I} + \mathbb{P}_i : (\mathbb{C}_i - \mathbb{C}_1)]^{-1} : \mathbf{E} \quad (1.80)$$

La moyenne du tenseur de localisation de la phase i est alors donnée par :

$$\mathbb{A}_i = [\mathbb{I} + \mathbb{P}_i : (\mathbb{C}_i - \mathbb{C}_1)]^{-1} \quad (1.81)$$

D'après la relation (1.8), la moyenne du tenseur de localisation dans la phase 1 s'écrit directement :

$$\mathbb{A}_1 = \frac{1}{f_1} \left(\mathbb{I} - \sum_{i=2}^N f_i [\mathbb{I} + \mathbb{P}_i : (\mathbb{C}_i - \mathbb{C}_1)]^{-1} \right) \quad (1.82)$$

où f_i désigne la fraction volumique de la phase i .

On obtient l'estimation des modules d'élasticité \mathbb{C}^{hom} en reportant (1.81) et (1.82) dans la relation (1.13) :

$$\mathbb{C}_{DIL}^{hom} = \mathbb{C}_1 + \sum_{i=2}^N f_i (\mathbb{C}_i - \mathbb{C}_1) : [\mathbb{I} + \mathbb{P}_i : (\mathbb{C}_i - \mathbb{C}_1)]^{-1} \quad (1.83)$$

Dans le cas particulier où les matériaux de la matrice et des hétérogénéités sont isotropes et où les hétérogénéités sont sphériques, on obtient une estimation des caractéristiques macroscopiques du matériau également isotrope. Si de plus les hétérogénéités sont toutes constituées du même matériau (isotrope de caractéristique k_2, μ_2), on obtient les estimations suivantes pour les deux coefficients d'élasticité macroscopiques :

$$\begin{aligned} k^{hom} &= k_1 \left(1 + f_2 \frac{k_2 - k_1}{k_1 + \alpha_1(k_2 - k_1)} \right) \\ \mu^{hom} &= \mu_1 \left(1 + f_2 \frac{\mu_2 - \mu_1}{\mu_1 + \beta_1(\mu_2 - \mu_1)} \right) \end{aligned} \quad (1.84)$$

avec :

$$\alpha_1 = \frac{3k_1}{3k_1 + 4\mu_1} \quad \beta_1 = \frac{6(k_1 + 2\mu_1)}{5(3k_1 + 4\mu_1)} \quad (1.85)$$

Le schéma dilué donne de bonnes estimations si la concentration ne dépasse pas la dizaine de pour cent [66]. On montre d'autre part que le tenseur de modules d'élasticité macroscopique estimé vérifie les propriétés classiques d'un module d'élasticité dans toutes les situations [4].

1.3.3 Schéma de Mori-Tanaka

On considère de nouveau un matériau constitué d'inclusions homogènes (phase $i = 2, N$) noyées dans une matrice continue homogène (phase $i = 1$). Afin de rendre compte des interactions entre particules, on estime maintenant la moyenne de la déformation dans les hétérogénéités par celle qui s'établit dans une inclusion de même forme et de mêmes caractéristiques élastiques incluse dans une matrice de matériau (1) soumise à l'infini à la moyenne de la déformation dans la matrice (\mathbf{E}_0).

En utilisant (1.77) la déformation moyenne dans la phase (i) s'écrit maintenant :

$$\langle \boldsymbol{\varepsilon} \rangle_{(i)}^{est} = [\mathbb{I} + \mathbb{P}_i : (\mathbb{C}_i - \mathbb{C}_1)]^{-1} : \mathbf{E}_0 \quad (1.86)$$

Celle de la matrice s'écrit évidemment :

$$\langle \boldsymbol{\varepsilon} \rangle_{(1)}^{est} = \mathbf{E}_0 \quad (1.87)$$

\mathbf{E}_0 est déterminé par la condition $\langle \boldsymbol{\varepsilon} \rangle = \mathbf{E}$.

Les moyennes du tenseur de localisation de la phase (1) et de la phase (i) s'écrivent respectivement :

$$\mathbb{A}_1 = \left(f_1 \mathbb{I} + \sum_{i=2}^N f_i [\mathbb{I} + \mathbb{P}_i : (\mathbb{C}_i - \mathbb{C}_1)]^{-1} \right)^{-1} \quad (1.88)$$

$$\mathbb{A}_i = [\mathbb{I} + \mathbb{P}_i : (\mathbb{C}_i - \mathbb{C}_1)]^{-1} : \mathbb{A}_1$$

Dans le cas d'un matériau biphasé, reportant (1.88) dans la relation (1.13), on obtient l'estimation de Mori-Tanaka du tenseur des modules d'élasticité homogénéisés :

$$\mathbb{C}_{MT}^{hom} = \mathbb{C}_2 - (1 - f_2)(\mathbb{C}_2 - \mathbb{C}_1) : \left((1 - f_2)\mathbb{I} + f_2[\mathbb{I} + \mathbb{P}_1 : (\mathbb{C}_2 - \mathbb{C}_1)]^{-1} \right)^{-1} \quad (1.89)$$

En développant la relation (1.89) en f_2 quand f_2 tend vers zéro, on retrouve la relation (1.83) du schéma dilué au premier ordre en f_2 .

Considérant de nouveau le cas particulier d'un milieu constitué d'une matrice isotrope et d'inclusions sphériques également isotropes, on obtient les estimations suivantes des coefficients homogénéisés (le matériau est encore isotrope à l'échelle macroscopique) :

$$\begin{aligned} k^{hom} &= k_1 \left(1 + f_2 \frac{k_2 - k_1}{k_1 + \alpha_1(1 - f_2)(k_2 - k_1)} \right) \\ \mu^{hom} &= \mu_1 \left(1 + f_2 \frac{\mu_2 - \mu_1}{\mu_1 + \beta_1(1 - f_2)(\mu_2 - \mu_1)} \right) \end{aligned} \quad (1.90)$$

Le schéma de Mori-Tanaka permet de rendre compte de l'existence de phases inclusionnaires sur une large gamme de fraction volumique facilement et de façon cohérente. Néanmoins il est convient de garder à l'esprit que les résultats obtenus dans ce cadre peuvent poser des problèmes. Par exemple, les estimations de \mathbb{C}^{hom} obtenues dans le cadre du schéma de Mori-Tanaka ne vérifient pas les relations de symétrie classiques dans tous les cas [66]. Cependant si toutes les inclusions sont de même forme et de même orientation, la relation $\mathbb{C}_{ijkl}^{hom} = \mathbb{C}_{klij}^{hom}$ est vérifiée.

1.3.4 Schéma autocohérent

Les deux schémas présentés précédemment sont bien adaptés pour des matériaux constitués d'une matrice continue et d'hétérogénéités. Le schéma autocohérent permet d'aborder les situations où aucune phase continue ne peut être identifiée. Le matériau est constitué dans ce cas de grains ou d'hétérogénéités accolés les uns aux autres. Dans ce cas, on suppose que chaque grain est entouré par toutes les autres phases et donc par le milieu moyen homogénéisé. La déformation dans le milieu moyen loin du grain est notée \mathbf{E}_0 . La déformation moyenne dans le grain i s'écrit alors :

$$\langle \boldsymbol{\varepsilon} \rangle_{(i)}^{est} = [\mathbb{I} + \mathbb{P}_h^i : (\mathbb{C}_i - \mathbb{C}^{hom})]^{-1} : \mathbf{E}_0 \quad (1.91)$$

Comme pour le schéma de Mori-Tanaka, la valeur de la déformation \mathbf{E}_0 est déterminé par la condition $\langle \boldsymbol{\varepsilon} \rangle = \mathbf{E}$.

Dans le cas particulier où tous les inhomogénéités ellipsoïdales sont de même forme et de même orientation, on trouve $\mathbf{E} = \mathbf{E}_0$ et $\mathbb{P}_h^i = \mathbb{P}_h$ [71]. L'estimation des tenseurs de localisation, déduite de (1.91), s'écrit :

$$\mathbb{A}_i = [\mathbb{I} + \mathbb{P}_h : (\mathbb{C}_i - \mathbb{C}^{hom})]^{-1} \quad (1.92)$$

Supposons de plus que le matériau hétérogène est de nouveau constitué seulement de deux phases ($i=1,2$). En reportant (1.92) dans la relation (1.13), l'estimation de \mathbb{C}^{hom} dans ce cas s'obtient en résolvant l'équation suivante :

$$\mathbb{C}_{AC}^{hom} = f_1 \mathbb{C}_1 : [\mathbb{I} + \mathbb{P}_h : (\mathbb{C}_1 - \mathbb{C}_{AC}^{hom})]^{-1} + f_2 \mathbb{C}_2 : [\mathbb{I} + \mathbb{P}_h : (\mathbb{C}_2 - \mathbb{C}_{AC}^{hom})]^{-1} \quad (1.93)$$

Pour un matériau constitué des grains sphériques dont chaque matériau est homogène isotrope, l'équation tensorielle (1.93) se simplifie en deux équations scalaires :

$$\begin{aligned} f_1 \frac{k_1 - k^{hom}}{1 + \alpha_h \frac{k_1 - k^{hom}}{k^{hom}}} + f_2 \frac{k_2 - k^{hom}}{1 + \alpha_h \frac{k_2 - k^{hom}}{k^{hom}}} &= 0 \\ f_1 \frac{\mu_1 - \mu^{hom}}{1 + \beta_h \frac{\mu_1 - \mu^{hom}}{\mu^{hom}}} + f_2 \frac{\mu_2 - \mu^{hom}}{1 + \beta_h \frac{\mu_2 - \mu^{hom}}{\mu^{hom}}} &= 0 \end{aligned} \quad (1.94)$$

avec :

$$\alpha_h = \frac{3k^{hom}}{3k^{hom} + 4\mu^{hom}} \quad \beta_h = \frac{6(k^{hom} + 2\mu^{hom})}{5(3k^{hom} + 4\mu^{hom})} \quad (1.95)$$

1.4 Application aux milieux poreux saturés

Afin d'identifier le comportement macroscopique d'un milieu poreux saturé, il est nécessaire de déterminer \mathbb{C}^{hom} qui caractérise en fait le comportement élastique du milieu poreux sec, le tenseur de Biot \mathbf{B} ainsi que le module de Biot M . Compte tenu des relations (1.60) et (1.63), la détermination du tenseur de Biot \mathbf{B} et le module de Biot M se résume au calcul de \mathbb{C}^{hom} . Pour cela, on peut utiliser les méthodes d'estimations classique présentées ci-dessus en les étendant au cas d'un milieu poreux.

On considère un milieu dont les pores sont classés en N classes, les pores appartenant à chacune de ces classes étant caractérisés par une forme et une orientation. La fraction volumique du domaine occupé par chaque type de pores est notée f_i ($i = 1, N$). Pour un tel milieu, en utilisant la propriété $\langle \mathbb{A} \rangle = \mathbb{I}$, \mathbb{C}^{hom} défini par la relation (1.40) s'écrit alors :

$$\mathbb{C}^{hom} = \mathbb{C}^s : \left(\mathbb{I} - \sum_{i=1}^N f_i \mathbb{A}_i \right) \quad (1.96)$$

Afin de déterminer le tenseur \mathbb{C}^{hom} , on cherche à estimer la moyenne du tenseur de localisation \mathbb{A}_i de chaque classe de pores qui dépend du tenseur des modules d'élasticité du solide \mathbb{C}^s ainsi que de la forme et de l'orientation des pores.

1.4.1 Pore ellipsoïdal ou sphérique

Revenant au procédé de calcul indiqué plus haut, on voit que la valeur des tenseurs de localisation \mathbb{A}_i pour le milieu poreux s'obtient par passage à la limite à partir d'un problème d'homogénéisation pour un matériau solide hétérogène.

Si on se réfère aux méthodes « classiques » d'homogénéisation [71] où la moyenne du tenseur de localisation par phase est estimée en utilisant la déformation uniforme qui s'établit dans une hétérogénéité ellipsoïdale noyée dans un milieu infini lorsqu'une sollicitation en déformation homogène est

appliquée à l'infini, cette façon de procéder ne pose pas de problème particulier.

En effet, la déformation homogène s'établissant dans l'hétérogénéité est connue dans un certain nombre de situation de façon analytique. Il suffit donc de calculer la limite de l'estimation du tenseur de localisation utilisée dans la situation du matériau solide hétérogène pour produire des résultats adaptés à la situation du matériau poreux dont les pores sont ellipsoïdaux ou sphériques. De ce fait en faisant $\mathbb{C}_I = 0$ dans la relation (1.77), on obtient :

$$\boldsymbol{\varepsilon}_I = (\mathbb{I} - \mathbb{P} : \mathbb{C}_0)^{-1} : \mathbf{E} = (\mathbb{I} - \mathbb{S}_E)^{-1} : \mathbf{E} \quad (1.97)$$

Pour le schéma dilué la déformation à l'infini pour le problème auxiliaire étant la même que celle du v.e.r à l'échelle macroscopique, compte tenu de (1.81) le tenseur de localisation du pore (phase i) est donné par :

$$\mathbb{A}_i = (\mathbb{I} - \mathbb{S}_E^i)^{-1} \quad (1.98)$$

Le tenseur d'élasticité macroscopique s'écrit donc :

$$\mathbb{C}^{hom} = \mathbb{C}^s : \left(\mathbb{I} - \sum_{i=1}^N f_i (\mathbb{I} - \mathbb{S}_E^i)^{-1} \right) \quad (1.99)$$

Dans le cas particulier où l'espace poreux est constitué de pores sphériques noyés dans une matrice homogène isotrope, en faisant $k_2 = 0$ et $\mu_2 = 0$ dans la relation (1.84), on obtient :

$$k^{hom} = k_1 \left(1 - f_2 \frac{3k_1 + 4\mu_1}{4\mu_1} \right) \quad \mu^{hom} = \mu_1 \left(1 - f_2 \frac{15k_1 + 20\mu_1}{9k_1 + 8\mu_1} \right) \quad (1.100)$$

Pour le schéma de Mori-Tanaka, compte tenu de la relation (1.88), la moyenne du tenseur de localisation de la phase i s'écrit :

$$\mathbb{A}_i = (\mathbb{I} - \mathbb{S}_E^i)^{-1} : \left((1 - n)\mathbb{I} + \sum_{i=1}^N f_i (\mathbb{I} - \mathbb{S}_E^i)^{-1} \right)^{-1} \quad (1.101)$$

Le tenseur d'élasticité macroscopique s'écrit alors :

$$\mathbb{C}^{hom} = \mathbb{C}^s : \left(\mathbb{I} - \sum_{i=1}^N f_i (\mathbb{I} - \mathbb{S}_E^i)^{-1} : \left((1-n)\mathbb{I} + \sum_{i=1}^N f_i (\mathbb{I} - \mathbb{S}_E^i)^{-1} \right)^{-1} \right) \quad (1.102)$$

En appliquant le schéma de Mori-Tanaka au cas particulier ci-dessus, compte tenu de la relation (1.90) avec $k_2 = 0$ et $\mu_2 = 0$, on a immédiatement les deux coefficients d'élasticité isotrope macroscopique :

$$k^{hom} = k_1 \left(1 - f_2 \frac{3k_1 + 4\mu_1}{3f_2 k_1 + 4\mu_1} \right) \quad (1.103)$$

$$\mu^{hom} = \mu_1 \left(1 - f_2 \frac{15k_1 + 20\mu_1}{(9 + 6f_2)k_1 + (8 + 12f_2)\mu_1} \right)$$

Enfin, pour le schéma autocohérent et dans le cas où il n'existe qu'une classe de pores ellipsoïdaux ($i = 1$), en faisant $\mathbb{C}_i = 0$ dans la relation (1.92), on obtient l'estimation de la moyenne du tenseur de localisation pour la phase poreuse suivante :

$$\mathbb{A}_i = [\mathbb{I} - \mathbb{P}_h : \mathbb{C}^{hom}]^{-1} \quad (1.104)$$

Pour un matériau poreux à pores sphériques et à matrice homogène isotrope, en faisant $k_2 = 0$ et $\mu_2 = 0$ dans les deux équations (1.94), on obtient pour le module de compressibilité macroscopique :

$$k^{hom} = \frac{4(1-f_2)k_1\mu^{hom}}{3f_2k_1 + 4\mu^{hom}} \quad (1.105)$$

où μ^{hom} est la solution de l'équation du second degré suivante :

$$8(\mu^{hom})^2 - ((8 - 20f_2)\mu_1 - (9 - 3f_2)k_1)\mu^{hom} - (9 - 18f_2)k_1\mu_1 = 0 \quad (1.106)$$

A titre d'application, en utilisant les trois schémas présentés ci-dessus, on calcule les estimations du coefficient de Biot b et du module de Biot M pour un matériau poreux à pores sphériques et à matrice solide homogène isotrope ($E = 1, \nu = 0.4$). Les résultats sont représentés sur [Fig.1.2] et [Fig.1.3].

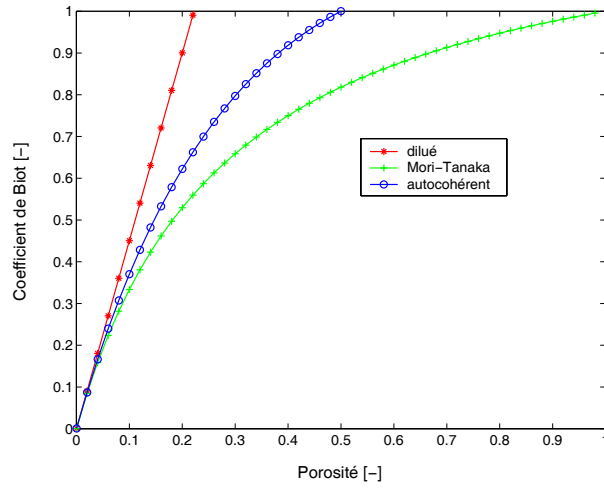


FIG. 1.2 – Coefficient de Biot - Pore sphérique ($E = 1, \nu = 0.4$)

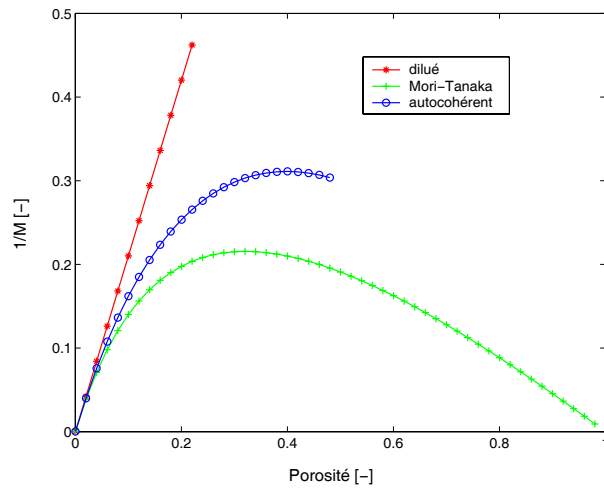


FIG. 1.3 – Module de Biot - Pore sphérique ($E = 1, \nu = 0.4$)

On remarque que les solutions de ces trois schémas sont très proches pour les faibles porosités. Pour le schéma autocohérent, l'estimation des modules macroscopiques k^{hom} et μ^{hom} s'annule (coefficient de Biot $b = 1$) pour une porosité égale à 50%. Cet état correspond au seuil de percolation. Dans ce cas, le milieu poreux n'a aucune résistance lorsque l'on le déforme.

1.4.2 Pores d'autre forme

Dans le cas général l'estimation de la moyenne du tenseur de localisation par phase est plus difficile. Tout d'abord la déformation s'établissant dans l'hétérogénéité n'est pas uniforme. On ne peut pas estimer $\langle \boldsymbol{\varepsilon} \rangle_I$ en utilisant la valeur de la déformation homogène du cas précédent [33, 34]. En outre, faute de solution analytique on ne peut pas calculer \mathbb{A}_i par passage à la limite. Dans ce cas on peut avoir recours à une méthode numérique pour estimer ces deux grandeurs.

Pour cela, on pose un problème auxiliaire en considérant une structure constituée d'un pore (classe i) immergé dans un milieu solide élastique homogène soumis à un chargement en déformation homogène \mathbf{E}^* à l'infini. On utilise un prolongement continu du champ de déplacement dans le pore pour calculer la moyenne de la déformation dans celui-ci. Compte tenu de la linéarité du problème considéré, le champ de déformation dans le pore dépend linéairement du tenseur des déformations \mathbf{E}^* appliqué. On a donc :

$$\boldsymbol{\varepsilon}_i(\underline{x}) = \mathbb{A}_i^*(\underline{x}) : \mathbf{E}^* \quad (\forall \underline{x} \in \Omega_i) \quad (1.107)$$

où \mathbb{A}_i^* désigne un tenseur du quatrième ordre, possédant la propriété de symétrie :

$$(A_i^*)_{ijkl} = (A_i^*)_{jikl} = (A_i^*)_{ijlk} \quad (1.108)$$

En prenant la moyenne de la relation (1.107), on obtient :

$$\langle \boldsymbol{\varepsilon} \rangle_i = \mathbb{A}_i^* : \mathbf{E}^* \quad (1.109)$$

Pour estimer \mathbb{C}^{hom} , on a besoin uniquement des \mathbb{A}_i^* pour chaque classe de pores dont la valeur peut être calculée grâce à la relation (1.109). Il suffit donc de connaître la moyenne de la déformation dans le pore pour calculer

en pratique le tenseur \mathbb{A}_i^* en considérant les différents chargements en déformation homogène. Par ailleurs, en utilisant la définition de la déformation et le théorème de Gauss on montre la relation suivante :

$$\langle \boldsymbol{\varepsilon} \rangle_i = -\frac{1}{2|\Omega|_i} \int_{\partial\Omega_i} (\underline{\xi} \otimes \underline{n} + \underline{\xi} \otimes \underline{n}) dS \quad (1.110)$$

où la présence du signe moins s'explique par le fait que l'on a considéré ici que \underline{n} est le vecteur normal unitaire extérieur au domaine occupé par le solide.

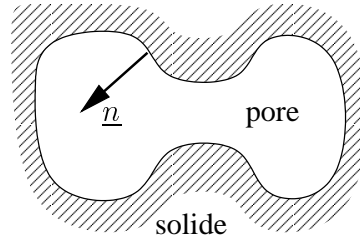


FIG. 1.4 – Vecteur normal au solide

On remarque que dans la relation (1.110) la déformation moyenne dans le pore ne dépend que des déplacements au bord du pore. Le choix particulier du prolongement du champ de déplacement à l'intérieur du pore n'intervient donc pas dans le calcul effectif de (1.109). La définition de $\langle \boldsymbol{\varepsilon} \rangle_i$ a bien un sens.

On dispose alors d'un outil pour étendre les résultats pour les milieux solides hétérogènes aux milieux poreux secs. Le calcul de la déformation moyenne dans le pore se ramène donc au calcul de la relation (1.110), qui ne fait intervenir que le champ de déplacement à la frontière du pore. Le calcul de cette grandeur par une méthode numérique se pose aucun problème dans le cas général.

Grâce à la propriété de linéarité, supposant connu le tenseur \mathbb{A}_i^* , on peut maintenant utiliser les schémas d'estimation classiques (schéma dilué, schéma de Mori-Tanaka, schéma autocohérent, etc.) en fonction de la morphologie du milieu (porosité, forme et orientation des pores) pour déterminer \mathbb{C}^{hom} .

On retrouve le schéma dilué dans le cas où la déformation appliquée à l'infini (\mathbf{E}^*) pour le problème auxiliaire est prise égale à la déformation macroscopique du v.e.r (\mathbf{E}). Dans ce cas, pour chacune des classes de pores l'estimation de la moyenne du tenseur de localisation est directement donnée par \mathbb{A}_i^* .

Par contre, pour le schéma de Mori-Tanaka la déformation appliquée à l'infini (\mathbf{E}^*) pour le problème auxiliaire est différente de la déformation macroscopique du v.e.r (\mathbf{E}). Dans le cas où il y a une seule classe de pores ($i = 1$), en remplaçant \mathbf{E}^* par \mathbf{E} , on obtient la moyenne du tenseur de localisation \mathbb{A}_i :

$$\mathbb{A}_i = \mathbb{A}_i^* : [(1 - f_i)\mathbb{I} + f_i\mathbb{A}_i^*]^{-1} \quad (1.111)$$

Enfin, pour le schéma autocohérent, on s'intéresse ici à un milieu poreux simple biphasique. Par rapport au schéma dilué et au schéma de Mori-Tanaka, les calculs numériques pour le schéma autocohérent sont plus compliqués, puisque dans ce cas un pore est immergé dans un milieu moyen inconnu a priori. Pour cela, il est indispensable d'utiliser des algorithmes itératifs lors des calculs numériques pour obtenir l'estimation autocohérente de \mathbb{C}^{hom} [9].

On utilise l'algorithme du point fixe dans nos études. Le principe de de cette approche consiste à construire des approximations successives $\mathbb{C}_{(n)}^{hom}$ d'une solution à partir d'une valeur initiale $\mathbb{C}_{(0)}^{hom}$ par application de la relation de récurrence $\mathbb{C}_{(n+1)}^{hom} = \mathbb{C}^{hom*}(\mathbb{C}_{(n)}^{hom})$. Le critère d'arrêt du processus itératif porte sur la norme de l'écart de deux valeurs successives. Afin de limiter le nombre d'itérations, il convient de prendre une valeur initiale proche de la solution, par exemple la demi-somme des bornes de Voigt et Reuss classique.

1.4.3 Mise en œuvre numérique

Les calculs présentés ici ont été effectués avec le code d'élément finis *CASTEM 2000*. Ce logiciel permet en particulier de calculer les moyennes des contraintes $\langle \boldsymbol{\sigma} \rangle$ et des déformations $\langle \boldsymbol{\varepsilon} \rangle$ du problème auxiliaire posé. A partir de la moyenne de la déformation $\langle \boldsymbol{\varepsilon} \rangle$, on peut déterminer la moyenne du tenseur de localisation \mathbb{A} par phase, puis le tenseur des modules d'élasticité macroscopique \mathbb{C}^{hom} par la méthode d'estimation.

Dans le cas général le tenseur \mathbb{A}_p^* s'exprime à l'aide de 36 coefficients indépendants d'après les propriétés de symétrie indiquées. Pour déterminer ses coefficients on peut considérer successivement les six chargements en déformation homogène suivants :

$$\left\{ \begin{array}{l} \mathbf{E}_1^* = \underline{e}_x \otimes \underline{e}_x \\ \mathbf{E}_2^* = \underline{e}_y \otimes \underline{e}_y \\ \mathbf{E}_3^* = \underline{e}_z \otimes \underline{e}_z \end{array} \right. \quad \left\{ \begin{array}{l} \mathbf{E}_4^* = \underline{e}_y \otimes \underline{e}_z + \underline{e}_z \otimes \underline{e}_y \\ \mathbf{E}_5^* = \underline{e}_z \otimes \underline{e}_x + \underline{e}_x \otimes \underline{e}_z \\ \mathbf{E}_6^* = \underline{e}_x \otimes \underline{e}_y + \underline{e}_y \otimes \underline{e}_x \end{array} \right.$$

Chacun de ces chargements permet d'obtenir six coefficients du tenseur \mathbb{A}_p^* en calculant les composantes de la déformation moyenne $\langle \epsilon_{xx} \rangle_p$, $\langle \epsilon_{yy} \rangle_p$, $\langle \epsilon_{zz} \rangle_p$, $\langle \epsilon_{xy} \rangle_p$, $\langle \epsilon_{yz} \rangle_p$ et $\langle \epsilon_{xz} \rangle_p$ dans le pore.

On étudie dans la suite tout d'abord l'influence des paramètres de maillage et l'extension du milieu infini du problème auxiliaire sur la précision des solutions numériques. Ensuite les schémas d'estimations sont mis en œuvre numériquement pour des formes de pores sphérique et ellipsoïdale. On peut ainsi vérifier la précision des solutions numériques par rapport aux solutions analytiques.

1.4.3.1 Approximation numérique

Il est bien connu que les solutions numériques s'accompagnent toujours d'approximations. La première source d'erreurs est due à la discrétisation du problème, contrôlée par les paramètres du maillage (finesse du maillage, type d'éléments utilisés, etc.). La seconde source d'erreurs provient ici du fait que l'on ne peut pas complètement tenir compte de l'extension infinie du domaine considéré pour les problèmes auxiliaires lorsque l'on utilise les schémas d'estimation pour évaluer les caractéristiques des matériaux hétérogènes à l'échelle macroscopique. Dans [9], ces deux sources d'approximation numérique ont été examinées pour des matériaux hétérogènes inclusionnaires. Ici on s'intéresse à des matériaux poreux pour lesquels le champ de déplacement dans le pore n'est pas défini. Ici on utilise la relation (1.110) pour calculer la déformation moyenne dans le pore associée à un champ de déplacement défini uniquement sur le domaine occupé par la phase solide.

Influence des paramètres de maillage

Pour maîtriser la précision des résultats numériques, on examine tout d'abord l'effet des paramètres de maillage. En effet, s'il est possible d'utiliser des maillages très raffinés dans le cas de problèmes bidimensionnels, les calculs deviennent très rapidement très lourds lorsque l'on s'intéresse à des situations tridimensionnelles. Il est donc souhaitable d'utiliser une finesse de maillages juste suffisante pour assurer simultanément une précision des calculs satisfaisante et des temps des calculs raisonnables.

L'étude a été réalisée sur une structure dont la phase solide est constituée d'un matériau élastique isotrope linéaire (de caractéristiques $E = 1, \nu = 0.2$) de pores de forme sphérique. Évidemment pour le matériau homogénéisé dans ce cas le comportement est élastique linéaire isotrope. Pour chercher la

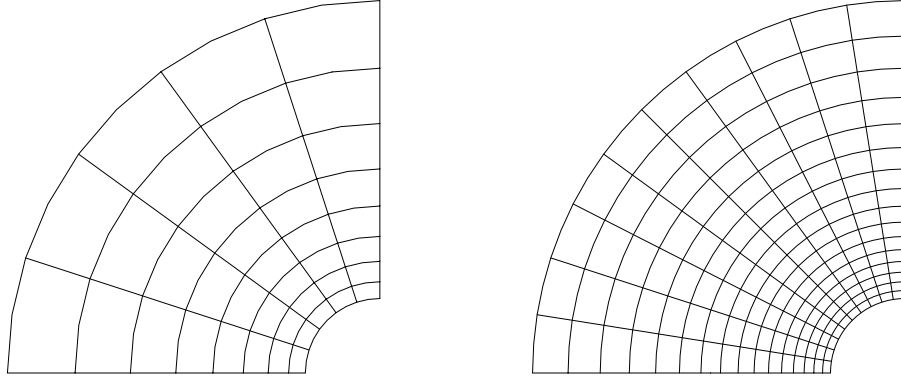


FIG. 1.5 – Maillage du problème de pore sphérique (maillage grossier : 40 éléments-147 nœuds ; maillage fin : 160 éléments-533 nœuds)

solution approchée du problème auxiliaire, on assimile le domaine infini à une sphère de rayon important vis à vis de la taille de l'hétérogénéité. Le choix de cette géométrie permet de se ramener à des problèmes bidimensionnels axisymétriques si les chargements appliqués présentent les mêmes propriétés de symétrie. Les calculs sont réalisés à l'aide d'éléments quadratiques à huit nœuds.

Sur la figure [Fig.1.5], on a représenté deux maillages différents correspondant à deux finesses différentes. Le nombre de nœuds ainsi que le nombre d'éléments sont précisés pour les deux cas. La porosité du matériau est prise égale à 10%. Pour calculer le module de compressibilité macroscopique k^{hom} , le chargement en déformation homogène $\mathbf{E}^* = \underline{e}_r \otimes \underline{e}_r + \underline{e}_\theta \otimes \underline{e}_\theta + \underline{e}_z \otimes \underline{e}_z$ est imposé à l'infini. Afin de déterminer le module de cisaillement macroscopique, on applique le chargement en déformation homogène $\mathbf{E}^* = -\underline{e}_r \otimes \underline{e}_r - \underline{e}_\theta \otimes \underline{e}_\theta + 2\underline{e}_z \otimes \underline{e}_z$, pour lequel la partie sphérique du tenseur des déformations homogènes est nulle. Ces deux types de chargement vérifient la condition d'axisymétrie.

Ici on ne s'intéresse qu'au comportement en cisaillement. Comme indiqué ci-dessus, en utilisant un prolongement continu des déplacements dans le pore, compte tenu des relations (1.109) et (1.110), on montre que la composante du tenseur \mathbb{A}_p^* concernant le module de cisaillement, notée A_μ^* , dans ce cas s'écrit :

$$A_\mu^* = \frac{1}{2} \langle \epsilon_{zz} \rangle_p = -\frac{1}{2|\Omega|_p} \int_{\partial\Omega_p} \underline{\xi}_z \cdot \underline{n}_z dS \quad (1.112)$$

Par souci de simplicité, on ne présente que les résultats du schéma di-

lué ici. En utilisant la relation (1.96), on obtient l'estimation numérique du module de cisaillement macroscopique dans ce cas :

$$\mu_N^{hom} = \mu_s(1 - f_p A_\mu^*) \quad (1.113)$$

La solution analytique et les résultats numériques d'estimation du module de cisaillement macroscopique sont les suivants : $\mu_T^{hom} = 0.3333$, $\mu_N^{hom} = 0.33467$ (maillage grossier) et $\mu_N^{hom} = 0.33463$ (maillage fin). Les résultats montrent que l'influence de la finesse de maillage sur la précision des calculs est peu importante. Il est donc inutile d'utiliser des maillages très fins pour obtenir une solution précise, du moins tant que la valeur du coefficient de Poisson n'approche pas 0.5. Dans ce cas, il convient d'utiliser des éléments spécifiques.

Extension du milieu infini

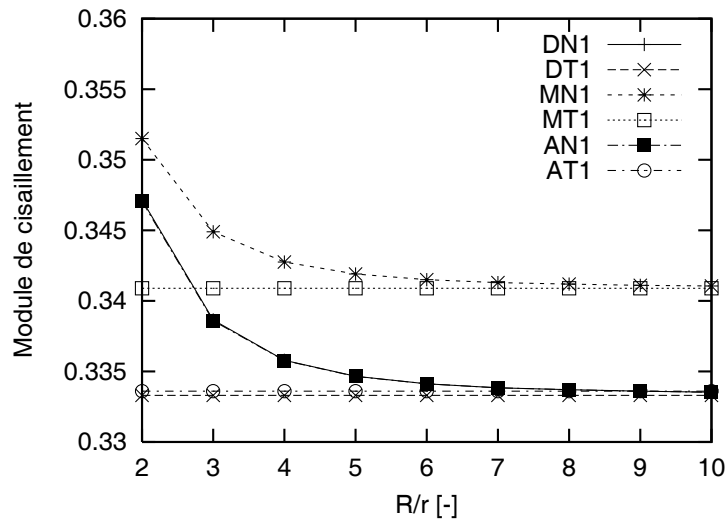


FIG. 1.6 – Influence de l'extension du milieu infini - Pore sphérique ($E = 1$, $\nu = 0.2$, $f_p = 0.1$)

La deuxième source d'erreur pouvant affecter la précision des résultats numériques est l'approximation du domaine illimité à considérer pour le problème auxiliaire par un domaine fini. En effet, les méthodes d'estimation classiques utilisent la solution d'un problème auxiliaire considérant une hétérogénéité incluse dans un milieu d'extension infinie. On impose le chargement

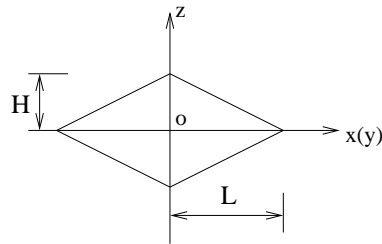


FIG. 1.7 – Profil du pore

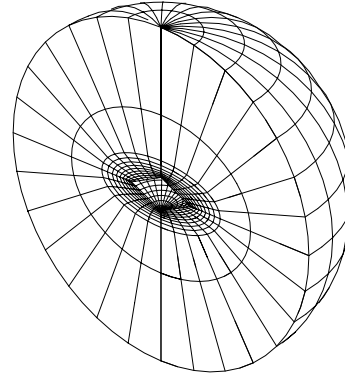


FIG. 1.8 – Maillage du problème auxiliaire

à l'infini soit en déformation homogène soit en contrainte homogène. Mais en ayant recours à une méthode du type éléments finis, on peut seulement prendre en compte une partie du milieu au lieu d'un milieu d'extension infinie. Pour cette raison il est nécessaire de chercher une extension minimale permettant d'obtenir une approximation satisfaisante.

On utilise le même exemple que précédemment. Sur la [Fig.1.6], on a représenté l'évolution du module de cisaillement homogénéisé en fonction de l'extension du domaine maillé pour le problème auxiliaire. Au travers des courbes obtenues, on note que les résultats numériques d'estimation sont très proches des solutions analytiques lorsque la taille du domaine maillé atteint cinq fois le rayon du pore. Il n'est donc pas nécessaire de considérer un domaine d'extension très grande pour rendre compte correctement des interactions entre le milieu infini et le pore. Pour obtenir les résultats présentés dans la suite, on a considéré des domaines dont la taille caractéristique était cinq fois plus grande que celle du pore.

1.4.3.2 Exemples d'application à des pores d'autre forme

On étudie maintenant un milieu poreux dont le profil des pores de révolution d'axe Oz est un losange (rapport de forme $H/L = 0.3$) [Fig.1.7]. Pour simplifier le problème, on suppose que tous les pores sont de même forme et de même orientation. Les valeurs des caractéristiques de la matrice solide élastique isotrope sont : $E = 1, \nu = 0.2$. Sous ces hypothèses le comportement du matériau homogénéisé est élastique linéaire isotrope transverse. Il est dans ce cas impossible d'obtenir toutes les caractéristiques d'estimation à partir de calculs bidimensionnels. On recourt donc à des calculs tridimensionnels.

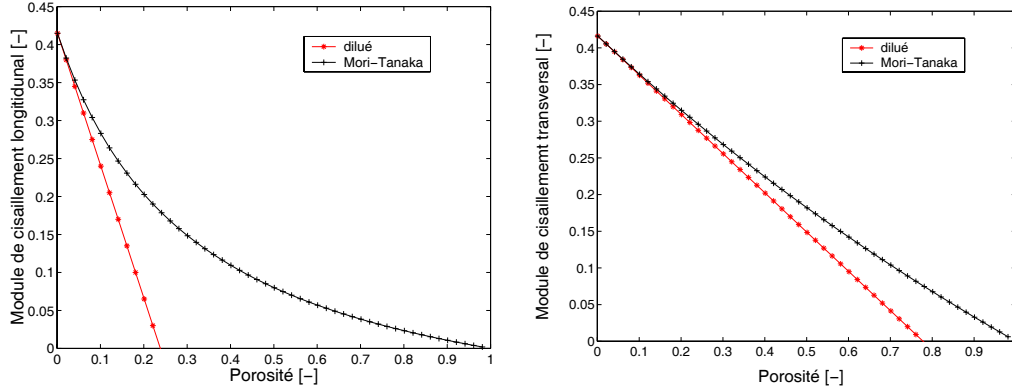


FIG. 1.9 – Modules de cisaillement longitudinal et transversal

La [Fig.1.8] représente le maillage de la structure du problème auxiliaire. Des éléments cubiques à 20 nœuds sont utilisés ici. On ne s'intéresse ici qu'aux valeurs du module de cisaillement longitudinal et du module de cisaillement transversal. Pour cela, deux chargements en déformation homogène sont imposés, respectivement : $\mathbf{E}_1^* = \underline{e}_z \otimes \underline{e}_x + \underline{e}_x \otimes \underline{e}_z$ et $\mathbf{E}_2^* = \underline{e}_x \otimes \underline{e}_y + \underline{e}_y \otimes \underline{e}_x$.

Les résultats d'estimation numériques pour le schéma dilué et le schéma de Mori-Tanaka sont présentés sur la [Fig.1.9]. Dans cette étude on n'a pas mis en œuvre le schéma autocohérent, les calculs tridimensionnels devenant trop lourds lorsque l'on met en œuvre les algorithmes itératifs.

On remarque que les deux estimations admettent le même tangente pour les faibles porosités et que le domaine de validité de l'estimation obtenue par le schéma dilué est très limité. En fait, lorsque la porosité est supérieure à 23%, le schéma dilué n'est plus valable dans ce cas.

1.5 Annexe : Coefficients du tenseur d'Eshelby

La situation initialement considérée par Eshelby est celle d'un milieu infini (Ω) élastique homogène de module \mathbb{C}_0 , dont un domaine borné (I), l'« inclusion », subit d'une « déformation libre homogène $\boldsymbol{\varepsilon}_L$ ». Le déplacement tend vers zéro à l'infini. Eshelby a montré que, si l'inclusion est de forme ellipsoïdale, la déformation à l'intérieur de l'inclusion est homogène et vaut :

$$\boldsymbol{\varepsilon}_I = \mathbb{S}_E : \boldsymbol{\varepsilon}_L \quad (1.114)$$

où \mathbb{S}_E est un tenseur d'ordre quatre, appelé tenseur d'Eshelby, qui dépend de la forme de l'ellipsoïde (I), de son orientation et du tenseur des modules d'élasticité \mathbb{C}_0 .

Considérons une inclusion ellipsoïdale des rayons a, b et c suivant les axes x, y et z . Compte tenu de la symétrie de l'ellipsoïde, le tenseur d'Eshelby a les propriétés suivantes :

- $S_{ilmn}^E = S_{limn}^E = S_{ilnm}^E$
- $S_{ilmn}^E \neq S_{mnil}^E$
- $S_{1112}^E, S_{1123}^E, S_{2311}^E, S_{1223}^E \dots$ sont égaux à zéro (il n'y a pas de couplage entre extension et cisaillement).

Dans le cas où le comportement de la phase solide est isotrope, les coefficients du tenseur d'Eshelby s'écrivent :

$$\begin{aligned} S_{1111}^E &= Qa^2 I_{aa} + RI_a \\ S_{1122}^E &= Qb^2 I_{ab} - RI_a \\ S_{1212}^E &= \frac{1}{2}Q(a^2 + b^2)I_{ab} + \frac{1}{2}R(I_a + I_b) \end{aligned} \quad (1.115)$$

où $Q = \frac{3}{8\pi(1-\nu)}$, $R = \frac{1-2\nu}{8\pi(1-\nu)}$. I_i et I_{ij} sont les intégrales elliptiques qui ont des expressions simples pour des formes particulières.

Pour un cas particulier où l'inclusion est sphéroïde ($a = b > c$), les coefficients du tenseur d'Eshelby se calculent en utilisant les relations suivantes :

$$I_a = I_b = \frac{2\pi a^2 c}{(a^2 - c^2)^{\frac{3}{2}}} \left\{ \cos^{-1} \frac{c}{a} - \frac{c}{a} \left(1 - \frac{c^2}{a^2} \right)^{\frac{1}{2}} \right\}$$

$$I_c = 4\pi - 2I_a$$

$$I_{aa} = I_{bb} = 3I_{ab} = \frac{\pi}{a^2} - \frac{3}{4}I_{ac} \quad (1.116)$$

$$I_{ac} = I_{bc} = \frac{I_c - I_a}{3(a^2 - c^2)}$$

$$I_{cc} = \frac{4\pi}{3c^2} - 2I_{ac}$$

Chapitre 2

Capillarité dans un milieu poreux

Il est bien connu que lorsque l'on introduit un petit volume de liquide mouillant entre deux surfaces solides proches l'une de l'autre, le liquide forme un ménisque capillaire autour du point de contact ou de la ligne de plus petite distance entre les deux surfaces. De nombreuses études ont été consacrées aux caractéristiques géométriques et mécaniques de ces systèmes, en particulier dans le cas bidimensionnel et dans le cas axisymétrique. Ainsi, les configurations d'équilibre d'un ménisque localisé au point de contact entre deux sphères ainsi que la stabilité de ces configurations ont été étudiées dans [27, 63]. Le même problème a été traité dans le cas de deux cylindres en contact [11, 62], ou de deux surfaces planes, parallèles ou non [24, 39, 48].

Ces travaux ont permis de montrer que la forme et la position du domaine géométrique occupé par la phase mouillante étaient régies par la loi de Laplace et par les phénomènes de mouillage le long de la ligne de contact entre l'interface séparant les domaines occupés par les fluides et les surfaces solides. De la même façon, la distribution de deux fluides immiscibles au sein d'un espace poreux est pilotée par les deux mêmes phénomènes.

On s'intéresse donc ici au problème de la détermination de la forme et de la position d'une interface capillaire au sein d'un espace poreux indéformable. Pour cela, on rappelle tout d'abord les équations du problème (équation de Laplace et équation de Dupré). On donne ensuite les résultats permettant d'étudier la stabilité des solutions dans le cas où l'on introduit un volume donné de liquide non volatile au sein du milieu poreux (on travaille alors à volume imposé) puis dans le cas où la pression est imposée.

On s'intéresse ensuite à la résolution de ce problème dans le cas axisymétrique. Il a été notamment montré que sous cette hypothèse, le profil radial du domaine occupé par le pont liquide reliant deux surfaces solides pouvait

être approximé par un arc de cercle, en particulier dans les situations où les forces de pesanteur sont négligeables par rapport aux forces capillaires (approximation toroïdale) [37, 52]. En utilisant les résultats obtenus en résolvant numériquement les équations exactes du problème, on montre que l'approximation toroïdale est encore valable dans le cas de pore possédant la symétrie de révolution.

2.1 Stabilité d'une interface capillaire

On s'intéresse ici au problème général de la stabilité des configurations d'équilibre d'une interface capillaire séparant deux fluides immiscibles au repos à l'intérieur d'un milieu poreux indéformable.

2.1.1 Equation du problème

2.1.1.1 Equation de Young-Laplace

On considère une interface capillaire occupant la surface ω de frontière $\partial\omega$. Il est bien connu que la forme de la surface ω séparant des fluides au repos obéit à la loi de Young-Laplace [49, 70], qui relie la différence des pressions régnant dans les deux fluides, à la valeur de la tension de surface dans l'interface et à la courbure locale de cette interface.

On montre que l'équation de Young-Laplace correspond à l'équation d'équilibre de l'interface capillaire considérée comme une membrane dont les efforts intérieurs sont de la forme [17] :

$$\mathbf{n}(\underline{x}) = \gamma \boldsymbol{\delta}_{T_\omega(\underline{x})} \quad (\forall \underline{x} \in \omega) \quad (2.1)$$

où $\mathbf{n}(\underline{x})$ désigne le tenseur des contraintes de membrane dans ω , γ la valeur de la tension de surface, fonction uniquement de la nature des fluides séparés par l'interface et de la température et $\boldsymbol{\delta}_{T_\omega(\underline{x})}$ le tenseur unité du plan tangent $T_\omega(\underline{x})$ à la surface ω au point \underline{x} .

Comme on s'intéresse ici aux configurations d'équilibre du système fluides-interface capillaire, les efforts intérieurs dans chacun des fluides se trouvant de part et d'autre de l'interface sont décrits par un champ de pression uniforme. On a alors en chaque point de la membrane les équations d'équilibre

$$\gamma \delta_{T_\omega(\underline{x})} : \mathbf{b} - \llbracket p \rrbracket = 0 \quad (\forall \underline{x} \in \omega) \quad (2.2)$$

$$\gamma \underline{\nu} = \underline{R} \quad (\forall \underline{x} \in \partial\omega) \quad (2.3)$$

où $\llbracket p \rrbracket = p^+ - p^-$ désigne le saut de pression à la traversée de l'interface ω orientée par le vecteur unitaire normal \underline{n} à ω [Fig. 2.1], $\underline{\nu}$ le vecteur unitaire appartenant au plan tangent à ω le long de $\partial\omega$, normal à la ligne $\partial\omega$ et pointant vers l'extérieur de la surface ω et \mathbf{b} le tenseur de courbure de la surface ω au point considéré (voir annexe 2.5.2).

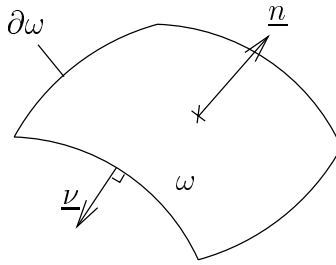


FIG. 2.1 – Interface capillaire

On notera que le choix particulier de l'orientation de la surface ω n'a aucune influence sur la validité de l'équation (2.2) puisque le passage d'une orientation à l'autre provoque un changement de signe des grandeurs $\llbracket p \rrbracket$ et \mathbf{b} .

Comme il est classique, on montre que les équations d'équilibre locales (2.2) et (2.3) admettent la formulation variationnelle équivalente suivante :

$\forall \delta \underline{u}$ défini sur ω , continu, différentiable par morceaux, on a :

$$\int_{\omega} \gamma \delta_{T_\omega(\underline{x})} : \delta \mathbf{e}(\underline{x}) dS = \int_{\partial\omega} \gamma \underline{\nu} \cdot \delta \underline{u} ds - \int_{\omega} \llbracket p \rrbracket \delta \underline{u} \cdot \underline{n} dS \quad (2.4)$$

où $\delta \mathbf{e}$ désigne le tenseur des déformations virtuelles de membrane, associé au champ de déplacement virtuel $\delta \underline{u}$ par la relation :

$$\delta \mathbf{e} = \{ \delta_{T_\omega(\underline{x})} \cdot \mathbf{grad}_{\omega} \delta \underline{u}_t \}_S - \delta u_n \mathbf{b} \quad (2.5)$$

Dans la relation (2.5), $\{\mathbf{x}\}_S$ désigne la partie symétrique du tenseur $\{\mathbf{x}\}$, δu_n la composante normale du déplacement virtuel $\delta \underline{u}$ et $\delta \underline{u}_t = \delta \underline{u} - \delta u_n \underline{n}$, le déplacement virtuel tangent à la surface ω au point considéré.

En utilisant les notions de l'annexe 2.5.1, l'équation (2.5) s'écrit également :

$$\delta \mathbf{e} = \frac{1}{2}(\delta u_{\alpha|\beta} + \delta u_{\beta|\alpha}) \underline{a}^\alpha \otimes \underline{a}^\beta - \delta u_n b_{\alpha\beta} \underline{a}^\alpha \otimes \underline{a}^\beta \quad (2.6)$$

2.1.1.2 Equation de Young Dupré

Quand une interface capillaire se trouve à l'intérieur d'un milieu poreux, il faut ajouter aux équations d'équilibre (2.2) et (2.3) les équations décrivant les interactions entre d'une part les phases fluides et la phase solide et d'autre part les interactions entre l'interface capillaire et la surface solide. Dans la mesure où l'on suppose ici que le matériau constitutif de la phase solide est indéformable, les interactions entre les phases fluides et la surface solide sont décrites par la donnée de condition aux limites classiques du type vitesse imposée nulle (fluide visqueux) le long de la surface solide pour les fluides.

Quand la phase solide est déformable, il convient de tenir compte de l'existence d'une tension de surface à l'interface solide-fluide pour décrire correctement les interactions entre phases. Cette situation est traitée au chapitre 3 consacré à l'homogénéisation des milieux poreux non saturés.

Le raccord entre l'interface capillaire séparant les deux phases fluides et la surface solide est géré par les propriétés de mouillabilité relative des fluides vis à vis de la surface solide [32]. On se limite ici aux situations où les propriétés de mouillabilité de la surface solide par rapport aux deux fluides sont caractérisées par un angle de valeur fixe. Il est clair que ce faisant, on exclut du cadre de l'étude tous les phénomènes liés aux phénomènes d'hystérésis d'angle de mouillage (situation où l'angle de mouillage d'une phase par rapport à la surface solide est différent lorsque cette phase avance ou recule sur la surface solide) [1, 32].

Pour fixer le cadre de l'étude on examine la situation où deux fluides occupant respectivement les domaines Ω' et Ω'' occupent l'espace poreux limité par la phase solide occupant le domaine Ω_s [Fig. 2.2]. Pour fixer les idées on suppose que le fluide occupant le domaine Ω' est un liquide tandis que le domaine Ω'' est occupé par un gaz.

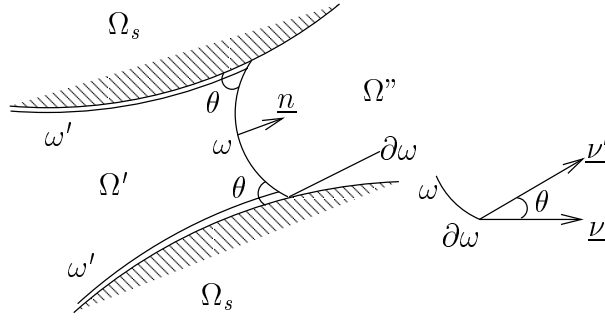


FIG. 2.2 – Système des trois phases : fluides Ω' et Ω'' ; solide Ω_s

On note ω la surface séparant les deux domaines Ω' et Ω'' tandis que ω' désigne la surface séparant le domaine Ω' du domaine Ω_s . On suppose que la surface solide est homogène, ce qui implique notamment que l'angle de mouillage de la phase Ω' vis à vis de la phase solide est partout le même, égal à θ [Fig. 2.2]. De façon similaire à ce qui a été fait pour la surface ω , $\underline{\nu}'$ désigne le vecteur unitaire du plan tangent à ω' , normal à la ligne $\partial\omega'$ et orienté vers l'extérieur de la surface ω' . On notera que par construction ce vecteur appartient également au plan tangent à la surface solide au point considéré. Par ailleurs, il est clair que, par définition, l'angle θ appartient nécessairement au segment $[0, \pi]$.

Dans cette situation, la position de l'interface capillaire ω est déterminée par les équations suivantes :

$$\partial\omega \in \partial\Omega_s \tag{2.7}$$

$$\underline{\nu} \cdot \underline{\nu}' = \cos \theta \quad (\forall \underline{x} \in \partial\omega) \tag{2.8}$$

$$\gamma \delta_{T_\omega(\underline{x})} : \mathbf{b}(\underline{x}) - [p] = 0 \quad (\forall \underline{x} \in \omega) \tag{2.9}$$

Il est clair que l'équation (2.7) n'a de sens que si la phase solide est mouillée par les deux fluides Ω' et Ω'' , ce qui exclut les configurations du type bulles ou gouttes. Dans la mesure où la spécificité des effets capillaires dans un milieu poreux est en grande partie due aux interactions de l'interface capillaire avec la phase solide, cette restriction n'apparaît pas gênante dans le cadre de cette étude.

Dans la suite, on utilise les équations (2.7), (2.8) et (2.9) pour traiter deux problèmes différents dont les caractéristiques principales correspondent

à deux types de situations couramment rencontrées dans les milieux poreux non saturés.

Dans un premier temps, on s'intéresse aux configurations d'équilibre d'une interface capillaire séparant un volume donné de fluide incompressible d'un fluide parfait ou règne une pression constante. Dans ce cas, aucun échange de masse n'a lieu entre les deux fluides. Ce type de problème se pose par exemple quand on introduit de l'huile dans un milieu poreux ou au contact entre deux corps solides en présence d'air à pression donnée.

Ensuite, on cherche les configurations d'équilibre de l'interface capillaire séparant un domaine occupé par un liquide incompressible à pression donnée d'un domaine occupé par un gaz à pression donnée également. Dans ce cas, aucune condition n'étant imposée sur le volume du domaine occupé par le liquide, il peut y avoir des échanges de matière entre les deux fluides. Ce type de problème se rencontre quand les deux fluides saturant l'espace poreux sont d'une part une phase liquide et d'autre part une phase gazeuse constituée d'air et de la vapeur correspondant au liquide. Dans le cas isotherme et si l'humidité relative est imposée dans la phase gazeuse, l'équation de Kelvin [32] relie la valeur de l'humidité relative à la pression capillaire égale dans ce cas à la différence des pressions à la traversée de l'interface capillaire. Dans les deux cas, on ne prendra pas en compte les efforts de pesanteur.

2.1.2 Problème à volume imposé

On s'intéresse ici à la caractérisation des configurations d'équilibre d'une interface capillaire obtenue en introduisant un volume donné de liquide incompressible à l'intérieur d'un espace poreux initialement saturé par un gaz dont la pression est imposée. On ne traite ici que le cas où le liquide occupe un domaine connexe. Pour le cas où cette hypothèse ne serait pas vérifiée (régime pendulaire), il convient d'adapter les résultats présentés en tenant compte du fait que la pression dans la phase liquide est alors uniforme par morceau.

2.1.2.1 Formulation du problème d'équilibre

Si θ désigne l'angle de mouillage liquide-solide, la forme de l'interface capillaire est déterminée par les équations (2.7), (2.8) et (2.9) complétées par la condition portant sur le volume du domaine liquide

$$|\Omega'| = V^d \tag{2.10}$$

où V^d désigne le volume de liquide introduit dans l'espace poreux. Il est important de noter pour la suite que la quantité $[[p]]$ intervenant dans l'équation (2.9) est une inconnue du problème.

On peut bien sur écrire les équations d'équilibre sous forme du théorème des travaux virtuels. En utilisant le fait que les pressions sont uniformes dans chacun des domaines fluides et en ne considérant que des mouvements virtuels de ω compatible avec la condition d'adhérence (2.7), on obtient à partir de l'équation (2.4) la formulation variationnelle du problème d'équilibre

$$\forall \delta \underline{u} \quad \text{défini sur } \omega \text{ vérifiant } \delta \underline{u} \cdot \underline{n}^s = 0 \quad \text{sur } \partial\omega$$

$$\int_{\omega} \gamma \delta_{T_{\omega}(\underline{x})} : \delta \mathbf{e}(\underline{x}) dS = \int_{\partial\omega} \gamma \underline{\nu} \cdot \delta \underline{u} ds - [[p]] \int_{\omega} \delta \underline{u} \cdot \underline{n} dS \quad (2.11)$$

où \underline{n}^s désigne le vecteur normal extérieur au domaine Ω_s le long de l'interface solide.

Il est commode pour la suite de l'étude d'introduire le Lagrangien L défini par :

$$L = \gamma|\omega| - \gamma \cos \theta |\omega'| + \lambda(|\Omega'| - V^d) \quad (2.12)$$

où $|\omega|$, $|\omega'|$ désignent respectivement l'aire de l'interface ω et de l'interface ω' , tandis que $|\Omega'|$ représente le volume du domaine Ω' .

L'équation (2.11) s'interprète alors comme une condition de stationnarité du Lagrangien sur l'espace des configurations de ω telles que $\partial\omega \subset \partial\Omega_s$. Pour montrer ce résultat, il suffit de calculer la variation de L dans un déplacement virtuel vérifiant la condition $\delta \underline{u} \cdot \underline{n}^s = 0$ sur $\partial\omega$.

D'une part, on a

$$\delta|\omega| = \int_{\omega} (div_{\omega} \delta \underline{u}_t - \delta \underline{u} \cdot \underline{n} tr \mathbf{b}) dS = \int_{\omega} -\delta u_n tr \mathbf{b} dS + \int_{\partial\omega} \delta \underline{u} \cdot \underline{\nu} ds \quad (2.13)$$

Par ailleurs, comme la surface ω' appartient forcément à la surface solide, la variation de $|\omega'|$ est uniquement due au mouvement virtuel de la ligne $\partial\omega$. On a donc :

$$\delta|\omega'| = \int_{\partial\omega} \delta\underline{u} \cdot \underline{\nu}' ds \quad (2.14)$$

Pour simplifier la suite des calculs, on suppose que l'interface ω est orientée de façon à ce que le vecteur unitaire \underline{n} soit normal extérieur au domaine Ω' . En utilisant la relation

$$\begin{aligned} \forall \delta\underline{u} \text{ vérifiant } \delta\underline{u} \cdot \underline{n}^s = 0 \text{ sur } \partial\omega \\ \delta|\Omega'| = \int_{\partial\Omega'} \delta\underline{u} \cdot \underline{n} dS = \int_{\omega} \delta\underline{u} \cdot \underline{n} dS \end{aligned} \quad (2.15)$$

En même temps que les relations (2.13) et (2.14), on obtient pour tout $\delta\underline{u}$ vérifiant $\delta\underline{u} \cdot \underline{n}^s = 0$ sur $\partial\omega$

$$L_{,\delta\underline{u}} \cdot \delta\underline{u} = \int_{\omega} (\lambda - \gamma \text{tr} \mathbf{b}) \delta u_n dS + \int_{\partial\omega} (\gamma \underline{\nu} - \gamma \cos \theta \underline{\nu}') \delta \underline{u} ds \quad (2.16)$$

Par ailleurs, la variation de L par rapport à λ s'écrit :

$$L_{,\lambda} \delta\lambda = (|\Omega'| - V^d) \delta\lambda \quad (2.17)$$

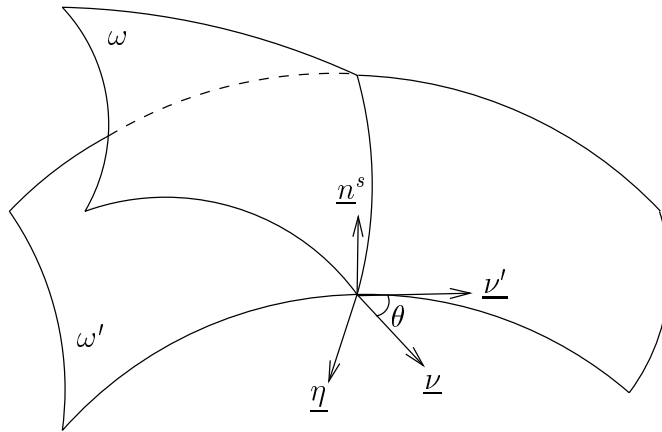


FIG. 2.3 – Système d'une interface capillaire

Cette dernière condition permet de retrouver la condition d'incompressibilité globale (2.10). En identifiant le multiplicateur de Lagrange λ au saut de pression $\llbracket p \rrbracket$ à la traversée de l'interface, on voit que l'équation (2.9) impose la nullité du premier terme de (2.16). Pour montrer la nullité du second terme, on considère le repère orthonormé direct $(\underline{\nu}', \underline{n}^s, \underline{\eta})$ où $\underline{\eta}$ est un vecteur tangent unitaire à $\partial\omega$ [Fig. 2.3].

On considère des champs de déplacements virtuels vérifiant $\delta\underline{u} \cdot \underline{n}^s = 0$ sur $\partial\omega$, on a

$$\delta\underline{u} = \delta u' \underline{\nu}' + \delta u_\eta \underline{\eta} \quad (\forall \underline{x} \in \partial\omega) \quad (2.18)$$

On a donc $\delta\underline{u} \cdot \underline{\nu} = \underline{\nu} \cdot \underline{\nu}' \delta u'$ et $\delta\underline{u} \cdot \underline{\nu}' = \delta u'$. En reportant ces relations dans l'intégralité du second membre de (2.16), on obtient

$$\gamma(\underline{\nu} - \underline{\nu}' \cos \theta) \cdot \delta\underline{u} = \gamma(\underline{\nu} \cdot \underline{\nu}' - \cos \theta) \delta u' \quad (\forall \underline{x} \in \partial\omega) \quad (2.19)$$

Comme sur la configuration d'équilibre on a $\underline{\nu}, \underline{\nu}'$ ($\underline{\nu} \cdot \underline{\nu}' = \cos \theta$), le second terme de (2.17) est également nul pour toute configuration d'équilibre de ω satisfaisant les équations (2.7), (2.8), (2.9) et (2.10).

2.1.2.2 Stabilité dynamique

Les équations caractérisant les configurations d'équilibre du système établies, on s'intéresse maintenant à la stabilité de celle-ci.

Pour étudier la stabilité d'une configuration d'équilibre, définie ici par la position de l'interface ω , on étudie le comportement du système lorsqu'une perturbation lui est appliquée [36]. Pour les systèmes considérés ici, la perturbation peut être définie par la donnée d'un champ de vitesse appliqué aux particules fluides comprises dans Ω' , par la donnée d'un champ de déplacement défini sur l'interface ω ou par une combinaison des deux. Par contre, ces perturbations doivent laisser inchangé le paramètre de chargement du problème, à savoir le volume de liquide introduit. Comme il est classique, la configuration d'équilibre étudiée ici sera dite stable si le système reste suffisamment «proche» de la configuration occupée avant perturbation lorsque l'amplitude de ces dernières reste «modérée».

Pour obtenir une caractérisation de la stabilité d'une configuration d'équilibre du système étudié, on commence par écrire le théorème de l'énergie cinétique pour le liquide :

$$\dot{K} = \int_{\Omega'} -\boldsymbol{\sigma} : \mathbf{d} d\Omega + \int_{\partial\Omega'} \underline{\mathbf{u}} \cdot \boldsymbol{\sigma} \cdot \underline{\mathbf{n}} dS \quad (2.20)$$

où K désigne l'énergie cinétique du système, $\underline{\mathbf{u}}$ le champ de vitesse réel dans Ω' , \mathbf{d} le champ de tenseur taux de déformation eulérien associé à $\underline{\mathbf{u}}$ et $\boldsymbol{\sigma}$ le champ de tenseur de Cauchy dans le fluide.

La frontière $\partial\Omega'$ est composée de l'interface liquide-solide ω' , où la densité de puissance des efforts extérieurs est nulle et de l'interface capillaire ω où l'équation de Laplace s'écrit maintenant

$$\boldsymbol{\sigma} \cdot \underline{\mathbf{n}} = -p'' \underline{\mathbf{n}} + \gamma \text{tr} \mathbf{b} \underline{\mathbf{n}} \quad (2.21)$$

où p'' désigne la pression dans le domaine Ω'' .

Par ailleurs, les formules (2.13) et (2.14) sont encore valables quand on remplace les champs de déplacement virtuel $\delta \underline{\mathbf{u}}$ par le champ de vitesse réel $\underline{\mathbf{u}}$ sur ω . On a donc

$$\gamma \dot{|\omega|} = \int_{\omega} -\gamma \text{tr} \mathbf{b} u_n dS + \int_{\partial\omega} \gamma \underline{\boldsymbol{\nu}} \cdot \underline{\mathbf{u}} ds \quad (2.22)$$

et

$$\gamma \dot{|\omega'|} \cos \theta = \int_{\partial\omega} \gamma \cos \theta \underline{\boldsymbol{\nu}}' \cdot \underline{\mathbf{u}} ds \quad (2.23)$$

En combinant (2.22) et (2.23), compte tenu du fait que l'angle de mouillage liquide-solide reste égale à θ dans toutes les évolutions réelles du système, on a

$$\int_{\omega} \gamma \text{tr} \mathbf{b} \underline{\mathbf{u}} \cdot \underline{\mathbf{n}} dS = -\gamma \dot{|\omega|} + \gamma \dot{|\omega'|} \cos \theta \quad (2.24)$$

En reportant l'équation (2.21) dans (2.20), puis en utilisant (2.24), on établit que pour toute évolution réelle du système, on a

$$\dot{K} = \int_{\Omega'} -\boldsymbol{\sigma} : \mathbf{d} d\Omega - \gamma \dot{|\omega|} + \gamma \dot{|\omega'|} \cos \theta - p'' \int_{\omega} \underline{\mathbf{u}} \cdot \underline{\mathbf{n}} dS \quad (2.25)$$

Comme on a supposé que le liquide était incompressible, le dernier terme de (2.25) est nul. Le premier terme du second membre de (2.25) représente

au signe près la puissance dissipée. Il est donc forcément négatif ou nul. On a donc

$$\dot{K} + \gamma \dot{|\omega|} - \gamma \dot{|\omega'|} \cos \theta \leq 0 \quad (2.26)$$

En admettant que l'énergie de surface du système, définie par

$$\zeta(\omega) = \gamma|\omega| + \gamma \cos \theta |\omega'| \quad (2.27)$$

permettait de mesurer, au moins localement, l'écart entre deux configurations du système, on établit ainsi que les systèmes étudiés vérifient les hypothèses du théorème de Lejeune-Dirichlet tel qu'il est utilisé pour les structures [58].

On peut donc énoncer **le critère de stabilité** :

Une configuration d'équilibre d'un liquide visqueux incompressible non volatile en présence d'une interface solide sans hystérésis de mouillage est dynamiquement stable si elle réalise un minimum de l'énergie de surface $\zeta(\omega)$ sur l'espace des configurations de ω vérifiant les conditions (2.7) et (2.10).

Dans le cas où la phase liquide occupe plusieurs domaines disjoints, la formulation du problème d'équilibre se trouve compliquée pour le fait que l'on doit alors tenir compte de la contrainte imposée en sommant les volumes de chacun des domaines liquides. Par ailleurs, il convient également de déterminer autant de valeur de pression qu'il y a de domaines disjoints, ce qui complique encore la résolution du problème d'équilibre.

Par contre, l'application du critère de stabilité ne pose pas de problème particulier à condition de ne considérer que des perturbations qui ne connectent pas deux domaines liquides entre eux, ce qui est raisonnable si ceux-ci sont suffisamment éloignés l'un de l'autre. Si l'on accepte cette restriction, il suffit d'appliquer le critère énoncé ci-dessus à chacun des domaines pris séparément pour vérifier la stabilité de la configuration étudiée.

Compte tenu des applications traitées dans la suite, on ne développe pas plus cette approche dans le cadre de ce mémoire.

2.1.3 Problème à pression donnée

Comme on l'a déjà dit plus haut, dans le cas où la pression de la phase liquide est imposée à pression de gaz donnée, ou, ce qui revient au même, quand la valeur de $[[p]]$ est imposée, il faut tenir compte du fait que des échanges de matière peuvent se produire au travers de l'interface capillaire ω .

On traitera ici ces échanges comme des changements de phase. Comme pour le cas du problème à volume imposé, on commence par traiter le problème d'équilibre.

2.1.3.1 Formulation du problème d'équilibre

Par rapport à la situation traitée au paragraphe 2.1.2.1, on remplace la condition de volume imposé (2.10) par la condition portant sur le saut de pression à la traversée de l'interface

$$[[p]] = p_c \quad (2.28)$$

Les conditions (2.7), (2.8) et (2.9) restent valables. Comme pour le cas précédent, on ne s'intéressera qu'à des solutions de (2.7), (2.8), (2.9) et (2.28) telle que le domaine Ω' associé à la configuration de l'interface capillaire soit connexe.

Il convient néanmoins de noter que dans la mesure où les échanges de masse au travers de l'interface capillaire se font par changement de phase, la portée de cette hypothèse est moins restrictive que dans les cas précédent. En effet, si l'on doit traiter d'une situation où la phase liquide occupe plusieurs domaines disjoints au sein de l'espace poreux, il suffit de traiter chaque domaine séparément pour résoudre le problème, aucune condition ne reliant les solutions de chacun des sous problèmes entre elles.

En procédant exactement de la même façon que pour le cas à volume imposé, on montre qu'une configuration d'équilibre (ω) solution de (2.7), (2.8), (2.9) et (2.28) réalise un point stationnaire de la fonctionnelle

$$\mathfrak{E}(\omega, p_c) = \zeta(\omega) + p_c |\Omega'| \quad (2.29)$$

sur l'ensemble des configurations qui vérifient $\partial\omega \subset \partial\Omega_s$, ce qui s'écrit

$$\begin{aligned} \forall \delta \underline{w} \quad \text{vérifiant} \quad \delta \underline{w} \cdot \underline{n}^s = 0 \quad \text{sur } \partial\omega \\ \mathfrak{E}_{, \underline{w}} \cdot \delta \underline{w} = 0 \end{aligned} \quad (2.30)$$

Ayant établi ce résultat, on passe maintenant à l'étude de stabilité.

2.1.3.2 Stabilité dynamique

Il est assez intuitif qu'une configuration d'équilibre (ω) qui réalise un minimum local de l'énergie potentielle $\mathfrak{E}(\omega, p^e)$ définie par (2.29) est une configuration stable. Pour montrer ce résultat toute la difficulté réside dans le fait que l'on doit traiter ici d'un système à masse variable et qu'il faut donc tenir compte des phénomènes de changement de phase se produisant à l'interface capillaire. Compte tenu de ces difficultés, on adopte un modèle de fluide parfait incompressible pour décrire le comportement mécanique de la phase liquide.

On se limite aux situations où les changements de phase liquide-vapeur se produisent suffisamment lentement pour que l'on puisse en négliger les effets dans toutes les équations du type bilan appliquées à la phase liquide. Dans ce cadre, les changements de phase liquide-vapeur sont uniquement pris en compte par le fait que l'interface capillaire se propage à une vitesse \underline{w} différente de la vitesse des particules matérielles liquides se trouvant au même point à l'instant considéré.

Le théorème de l'énergie cinétique pour les particules liquides s'écrit alors :

$$\dot{K} = - \int_{\partial\Omega'} p_\ell \underline{u} \cdot \underline{n} dS = - \int_{\omega} p_\ell \underline{u} \cdot \underline{n} dS \quad (2.31)$$

où p_ℓ désigne la pression régnant dans la phase liquide au point considéré.

De façon cohérente avec les hypothèses ci-dessus, les échanges de matière se produisant au travers de l'interface capillaire ω n'entraînent que de très faible transfert de quantité de mouvement au travers de ω . Les équations d'équilibre (2.8) et (2.9) pour la membrane capillaire sont donc encore valables. En écrivant le théorème des travaux virtuels (2.11) pour l'interface dans le champ de vitesse de propagation \underline{w} , puis en utilisant les relations (2.13) et (2.14), on obtient la relation

$$\gamma \dot{|\omega|} - \gamma \dot{|\omega'|} \cos \theta + \int_{\omega} (p_g - p_\ell) \underline{w} \cdot \underline{n} dS = 0 \quad (2.32)$$

où p_g désigne la pression régnant dans la phase gazeuse à l'instant considéré.

En utilisant le fait que la variation du domaine réellement occupé par la phase liquide est contrôlée par la propagation de l'interface capillaire ω , on établit immédiatement la relation

$$p_c \dot{|\Omega'|} = \int_{\omega} p_c \underline{w} \cdot \underline{n} dS \quad (2.33)$$

Enfin, le liquide étant considéré comme incompressible, on a donc $\text{div } \underline{u} = 0$ partout dans Ω' , ce qui implique

$$\int_{\partial\Omega'} \underline{u} \cdot \underline{n} dS = \int_{\omega} \underline{u} \cdot \underline{n} dS = 0 \quad (2.34)$$

En sommant les équations (2.31), (2.32) et (2.33) et en ajoutant au résultat la dernière égalité de (2.34) multiplié par $p_c - p_g$, on obtient que pour toute évolution réelle du système, on a :

$$\dot{K} + \dot{\mathfrak{E}} = \int_{\omega} (p_c - p_g + p_\ell)(\underline{w} - \underline{u}) \cdot \underline{n} dS \quad (2.35)$$

On rappelle que le cadre d'hypothèses utilisé ici, seule p_ℓ est une grandeur variant le long de ω , p_g et p_c étant en fait deux paramètres de chargement du problème.

Pour montrer le résultat souhaité, il reste à examiner le signe du second membre de (2.35). Pour cela, on utilise le fait que la dissipation associée au changement de phase liquide-vapeur est non négative, ce qui s'écrit [26] :

$$(g_m^\ell - g_m^{va}) \cdot \dot{m}_{\ell \rightarrow va} \geq 0 \quad (2.36)$$

où g_m^ℓ (respectivement g_m^{va}) désigne l'enthalpie libre massique du liquide (respectivement de la vapeur) et $\dot{m}_{\ell \rightarrow va}$ la densité surfacique de quantité de liquide qui se transforme en vapeur, égale à

$$\dot{m}_{\ell \rightarrow va} = \rho^\ell (\underline{u} - \underline{w}) \cdot \underline{n} \quad (2.37)$$

où ρ^ℓ désigne la masse volumique du liquide.

Compte tenu des hypothèses utilisées pour formuler le problème, on montre [32, 50] que l'on a

$$g_m^\ell = \frac{p_\ell}{\rho^\ell} \quad (2.38)$$

et

$$g_m^{va} = \frac{p_g - p_c}{\rho^\ell} \quad (2.39)$$

En reportant ces deux équations dans (2.36), on établit la relation :

$$(p_\ell - p_g + p_c)(\underline{u} - \underline{w}) \cdot \underline{n} \geq 0 \quad \forall \underline{x} \in \omega \quad (2.40)$$

En reportant (2.40) dans (2.35), on établit que dans toute évolution réelle du système considéré, on a :

$$\dot{K} + \dot{\mathfrak{E}} \leq 0 \quad (2.41)$$

Ce qui justifie de la même façon que pour le cas à volume imposé, l'énoncé du théorème de stabilité donné en début de paragraphe.

2.1.3.3 Critère de variation seconde

Pour énoncer un critère de variation seconde à partir du critère de stabilité dynamique obtenu ci-dessus, on considère un trajet de propagation continu défini sur l'interface ω à partir de la configuration d'équilibre étudiée. On représente alors les configurations voisines de la configuration d'équilibre par une courbe paramétrée par τ :

$$\underline{w}(\tau) = \delta \underline{w} \tau + \frac{1}{2} \underline{w}_2 \tau^2 + \dots \quad (2.42)$$

En reportant ce développement dans l'expression du potentiel $\mathfrak{E}(\omega, p_c)$, on obtient

$$\mathfrak{E}(\omega, p_c) = \mathfrak{E}(\omega^{eq}, p_c) + \mathfrak{E}_{, \underline{w}} \cdot \delta \underline{w} \tau + \frac{1}{2} (\delta \underline{w} \cdot \mathfrak{E}_{, \underline{w} \underline{w}} \cdot \delta \underline{w} + \mathfrak{E}_{, \underline{w}} \cdot \underline{w}_2) \tau^2 + \dots \quad (2.43)$$

Pour que les configurations définies par le trajet $\underline{w}(\tau)$ soient licites, il faut que l'on ait :

$$\delta \underline{w} \in V^0 = \{ \delta \underline{w}, \delta \underline{w} \cdot \underline{n}^s = 0 \quad \text{sur } \partial \omega^{eq} \} \quad (2.44)$$

En utilisant la relation (2.30), on en déduit que le terme du premier ordre en τ du développement (2.43) est nul pour tout trajet de propagation licite.

On s'intéresse maintenant au terme du second ordre. En écrivant le théorème des travaux virtuels dans le champ de déplacement virtuel \underline{w}_2 , on montre que l'on a :

$$\mathfrak{E}_{,\underline{w}} \cdot \underline{w}_2 = - \int_{\partial\omega} \gamma \sin \theta \underline{w}_2 \cdot \underline{n}^s ds \quad (2.45)$$

Pour que le trajet de propagation défini par $\underline{w}(\tau)$ vérifie la condition d'adhérence $\partial\omega \in \partial\Omega_s$, il faut que l'on ait :

$$\underline{w}_2 \cdot \underline{n}^s - \delta\underline{w} \cdot \mathbf{b}^s \cdot \delta\underline{w} = 0 \quad (\forall \underline{x} \in \partial\omega^{eq}) \quad (2.46)$$

où \mathbf{b}^s désigne le tenseur de courbure de l'interface solide $\partial\Omega_s$ orientée par le vecteur \underline{n}^s .

En reportant (2.46) dans (2.45), on montre que l'on a

$$\mathfrak{E}_{,\underline{w}} \cdot \underline{w}_2 = -\gamma \sin \theta \int_{\partial\omega} \delta\underline{w} \cdot \mathbf{b}^s \cdot \delta\underline{w} ds \quad (2.47)$$

En reportant ce résultat dans le terme du second ordre, on obtient **le critère de variation seconde** suivante :

La configuration d'équilibre ω étudiée est stable si :

$$\begin{aligned} \forall \delta\underline{w} \text{ vérifiant } \delta\underline{w} \cdot \underline{n}^s = 0 \text{ sur } \partial\omega \\ \delta\underline{w} \cdot \mathfrak{E}_{,\underline{w}\underline{w}} \cdot \delta\underline{w} - \gamma \sin \theta \int_{\partial\omega} \delta\underline{w} \cdot \mathbf{b}^s \cdot \delta\underline{w} ds > 0 \end{aligned} \quad (2.48)$$

Sous cette forme, on voit que la courbure de l'interface solide le long de la ligne triple influe sur la stabilité de la configuration d'équilibre étudiée.

2.2 Le cas axisymétrique

On s'intéresse maintenant au problème de la détermination de la forme et de la position d'une interface capillaire (ω) au sein d'un espace poreux indéformable dans la cas axisymétrique.

Sur la [Fig. 2.4], on a représenté une interface capillaire ω symétrique de révolution autour de l'axe z . r et z désignent les coordonnées d'un point de

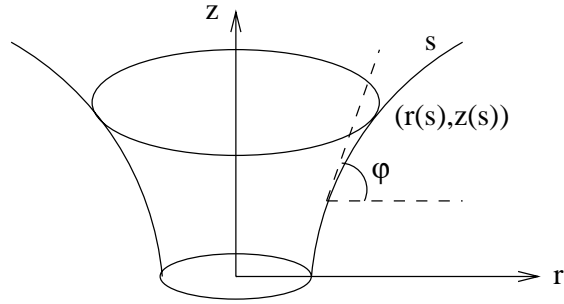


FIG. 2.4 – Surface capillaire symétrique de révolution

ω dans le repère cylindrique (o, r, z) , s l'abscisse curviligne le long du profil radial de la surface ω . Les deux rayons (notés par r_1 et r_2) de la courbure locale de cette interface ω se calculent grâce à la relation

$$\frac{1}{r_1} + \frac{1}{r_2} = \frac{z'}{r(z'^2 + r'^2)^{\frac{1}{2}}} - \frac{r''z' - rz''}{(z'^2 + r'^2)^{\frac{3}{2}}} \quad (2.49)$$

avec : $z' = \frac{dz}{ds}$, $r' = \frac{dr}{ds}$, $z'' = \frac{d^2z}{ds^2}$ et $r'' = \frac{d^2r}{ds^2}$.

L'équation de Young-Laplace s'écrit alors dans ce cas :

$$p_c = \gamma \left(\frac{1}{r_1} + \frac{1}{r_2} \right) = \gamma \left(\frac{z'}{r(z'^2 + r'^2)^{\frac{1}{2}}} - \frac{r''z' - rz''}{(z'^2 + r'^2)^{\frac{3}{2}}} \right) \quad (2.50)$$

Pour écrire sous forme adimensionnée la relation (2.50), on pose

$$r = LR, \quad z = LZ, \quad s = LS \quad (2.51)$$

où L désigne une longueur caractéristique du pore, R et Z les coordonnées cylindriques adimensionnées et S l'abscisse curviligne adimensionnée.

En reportant (2.51) dans (2.50), on obtient :

$$2X = \frac{Z'}{R(Z'^2 + R'^2)^{\frac{1}{2}}} - \frac{R''Z' - RZ''}{(Z'^2 + R'^2)^{\frac{3}{2}}} \quad (2.52)$$

où

$$X = \frac{p_c L}{2\gamma}, \quad Z' = \frac{dZ}{dS}, \quad R' = \frac{dR}{dS}, \quad Z'' = \frac{d^2Z}{dS^2}, \quad R'' = \frac{d^2R}{dS^2}$$

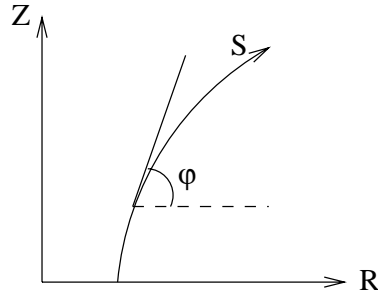


FIG. 2.5 – Profil du ménisque

Afin de résoudre l'équation différentielle (2.52), il est commode de procéder au changement de variables suivant :

$$\begin{cases} dR = \cos \varphi dS \\ dZ = \sin \varphi dS \end{cases} \quad (2.53)$$

où φ est l'angle entre l'axe positif des R et la tangente au profil radial du ménisque [Fig. 2.5].

L'équation (2.52) s'écrit alors :

$$\begin{cases} \varphi' = 2X - \frac{\sin \varphi}{R} \\ R' = \cos \varphi \\ Z' = \sin \varphi \end{cases} \quad (2.54)$$

avec $\varphi' = \frac{d\varphi}{dS}$. Pour déterminer la forme d'une interface capillaire à l'intérieur d'un pore axisymétrique, il est nécessaire de compléter l'équation (2.54) par les conditions aux limites décrivant le raccord entre l'interface capillaire et la surface solide. Dans la situation générique [Fig. 2.6], on a

$$\begin{cases} (R(S_i), Z(S_i)) \in \partial\omega^p \\ \varphi(S_i) = \varphi_i(R(S_i), Z(S_i), \theta_i) \end{cases} \quad \begin{cases} (R(S_j), Z(S_j)) \in \partial\omega^p \\ \varphi(S_j) = \varphi_j(R(S_j), Z(S_j), \theta_j) \end{cases} \quad (2.55)$$

où $\partial\omega^p$ désigne le profil radial du pore et θ_i, θ_j la valeur des angles de

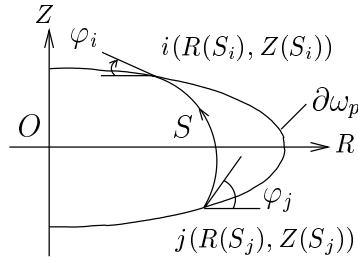


FIG. 2.6 – Ménisque dans un pore axisymétrique

mouillage liquide solide aux points de raccord entre l'interface capillaire et l'interface solide $\partial\omega^p$.

Dans la suite de l'étude, on se restreint aux situations où l'axe OR est un axe de symétrie pour le problème. Dans ce cas, on cherche des solutions des équations (2.54) et (2.55) qui possèdent également cette propriété, et qui sont donc solutions de l'équation (2.54) complétée par les conditions aux limites [Fig. 2.7] :

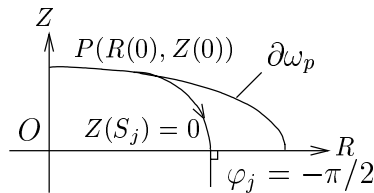


FIG. 2.7 – Ménisque symétrique dans un pore axisymétrique

$$\begin{cases} (R(0), Z(0)) \in \partial\omega^p \\ \varphi(0) = \varphi_0(R(0), Z(0), \theta_i) \end{cases} \quad \begin{cases} Z(S_j) = 0 \\ \varphi(S_j) = -\frac{\pi}{2} \end{cases} \quad (2.56)$$

Ces équations ne possèdent pas de solution analytique simple dans le cas général. On a donc utilisé une méthode numérique pour résoudre les équations (2.54) et (2.56). En pratique, un point de raccord entre l'interface solide et le ménisque capillaire étant choisi, l'équation (2.54) est résolue à partir du point $(R(0), Z(0), \varphi(0))$ pour une valeur arbitraire de la pression capillaire. On calcule alors la valeur de S_j en résolvant l'équation $Z(S_j) = 0$ pour le profil qui vient d'être déterminé et on détermine la valeur de $\varphi(S_j)$. On compare la valeur obtenue à la valeur désirée, et, le cas échéant, on reprend cette séquence en modifiant la valeur de la pression capillaire jusqu'à ce que la condition $\varphi(S_j) = -\pi/2$ soit satisfaite.

Cette procédure a été implémentée dans le système *MATLAB*, en utilisant un schéma de Runge-Kutta explicite pour résoudre (2.54) (solveur *ode45*). A

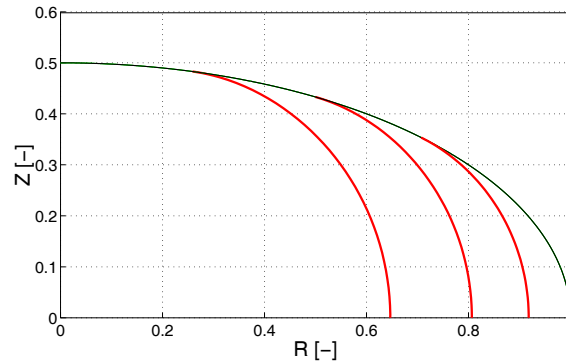


FIG. 2.8 – Profils de ménisques dans un pore ellipsoïdal (de gauche à droite les angles des points d'accrochage correspondant aux valeurs $\varphi = 15^\circ, 30^\circ$ et 45°)

titre d'exemple on a représenté sur la [Fig. 2.8] les profils radiaux obtenus en résolvant numériquement l'équation de Young-Laplace dans le cas d'un pore ellipsoïdal de rapport d'aspect 0.5 pour un angle de mouillage θ nul.

2.3 Approximation toroïdale

Comme il a été dit en introduction, dans le cas d'un pont capillaire entre deux surfaces symétriques de révolution, il a été montré que dans un large domaine d'étude, on obtenait de très bons résultats en assimilant le profil radial du ménisque à un cercle [60]. De la même façon, pour un pore axisymétrique saturé par deux fluides immiscibles, on approxime le profil radial du ménisque par un arc de cercle. Compte tenu du fait que le volume du domaine occupé par les phases fluides est fini dans cette situation, il convient de distinguer ici les situations où le domaine occupé par la phase liquide mouillante est loin de l'axe de symétrie des situations où au contraire la phase liquide mouillante occupe un domaine proche de l'axe de symétrie. Les configurations correspondantes à chacune de ces deux situations sont respectivement dénommées *famille a* et *famille b* dans la suite [Fig.2.9].

Pour un ménisque de la *famille a* [Fig. 2.10], dans le repère cylindrique *ORZ*, l'équation du profil radial de l'interface liquide-gaz s'écrit

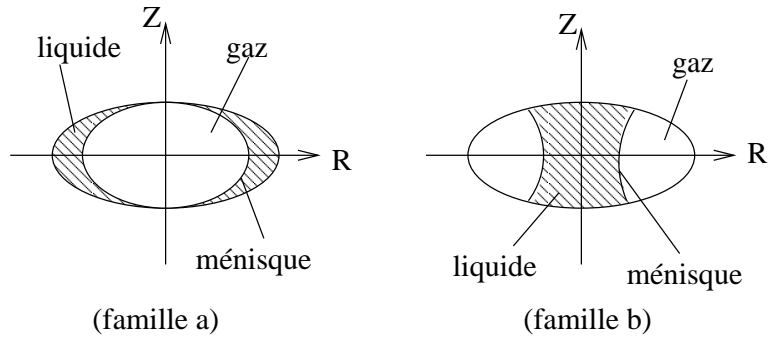


FIG. 2.9 – Les deux familles de ménisques

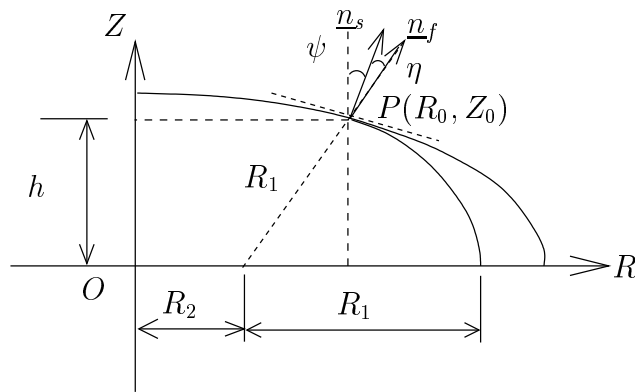


FIG. 2.10 – Ménisque de la *famille a*

$$(R - R_2)^2 + Z^2 = R_1^2 \quad (2.57)$$

avec $R_1 = \frac{Z_0}{\cos(\psi + \eta)}$, $R_2 = R_0 - R_1 \sin(\psi + \eta)$, où R_0, Z_0 désignent les coordonnées cylindriques du point d'intersection du ménisque (P) avec l'interface solide ; ψ l'angle entre le vecteur normal du solide \underline{n}_s et l'axe positif Z ; η l'angle de mouillage (l'angle entre le vecteur normal de l'interface gaz-liquide \underline{n}_f et le vecteur normal du solide \underline{n}_s), satisfaisant

$$\underline{n}_s \cdot \underline{n}_f = \cos \eta \quad \text{au point } (R_0, Z_0)$$

L'approximation de la courbure moyenne est donnée par :

$$tr \mathbf{b} = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_1 + R_2} \quad (2.58)$$

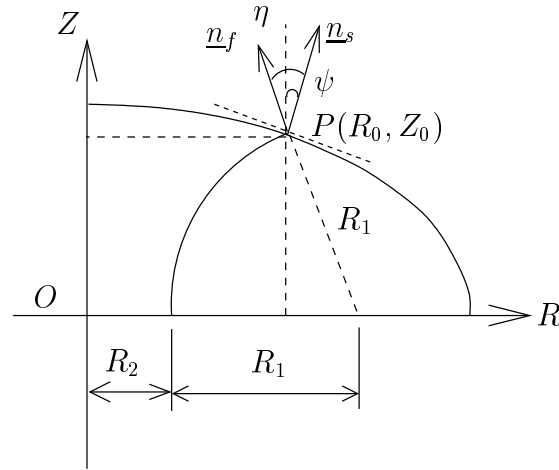


FIG. 2.11 – Ménisque de la *famille b*

Pour un ménisque de la *famille b* [Fig. 2.11], dans le repère cylindrique ORZ , l'équation du profil radial de l'interface liquide-gaz s'écrit

$$(R - R_1 - R_2)^2 + Z^2 = R_1^2 \quad (2.59)$$

avec $R_1 = \frac{Z_0}{\cos(\eta - \psi)}$, $R_2 = R_0 + R_1 \sin(\eta - \psi)$, où R_0, Z_0, ψ, η désignent

les mêmes quantités que précédemment.

L'approximation de courbure moyenne $tr\mathbf{b}$ est égale à :

$$tr\mathbf{b} \simeq \frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2 - R_1} \quad (2.60)$$

D'un point de vue pratique, les pores étudiés occupant tous des domaines convexes, on étudiera uniquement les configurations appartenant à la *famille a*, les configurations appartenant à la *famille b* étant instables dans ce cas. En effet, sur la [Fig. 2.12], on montre que pour la même valeur de la pression capillaire, l'énergie potentielle dans un pore de la *famille b* est supérieure à celle dans un pore de la *famille a*.

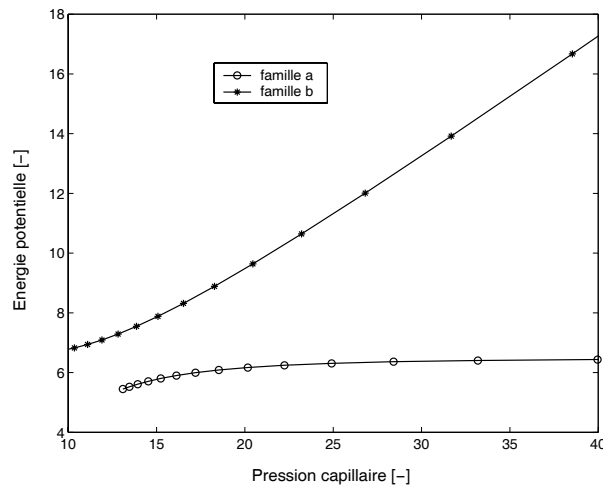


FIG. 2.12 – Energie potentielle des deux familles de pores ($H/L = 0.1$)

On détaille maintenant les solutions obtenues pour les deux formes de pores considérés dans le mémoire. Dans la suite de cette présentation, on écrit toutes les équations sous forme dimensionnée.

2.3.1 Pore ellipsoïdal

2.3.1.1 Calcul de la pression capillaire

La géométrie de l'ellipsoïde de révolution étudié ici est caractérisée par son rayon L , sa hauteur H et son rapport d'aspect $\epsilon = \frac{H}{L}$ [Fig.2.13]. L'équation paramétrique de l'ellipsoïde s'écrit :

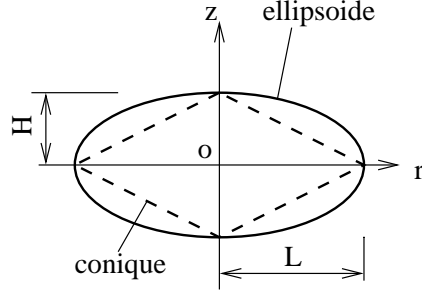


FIG. 2.13 – Morphologie du pore

$$x = L \sin \varphi \cos \theta, \quad y = L \sin \varphi \sin \theta, \quad z = H \cos \varphi \quad (2.61)$$

avec $0 \leq \varphi \leq \pi/2$ et $0 \leq \theta \leq 2\pi$.

Les coordonnées cylindriques du point d'accrochage du ménisque sont :

$$r_0 = L \sin \varphi_0 \quad z_0 = H \cos \varphi_0 \quad (2.62)$$

Dans ce cas, on peut calculer l'approximation de la courbure moyenne du ménisque par (2.58) et r_1, r_2 sont respectivement donnés par :

$$r_1 = \frac{H \cos \varphi_0}{\cos(\psi + \eta)}, \quad r_2 = L \sin \varphi_0 - r_1 \sin(\psi + \eta) \quad (2.63)$$

Pour que le calcul soit valable dans cette situation, la valeur de la courbure r_1 doit être positive. De plus, on a $\tan \psi = \epsilon \tan \varphi_0$. On obtient alors le domaine de validité du calcul défini par la condition sur φ_0 :

$$0 \leq \varphi_0 \leq \text{Arc tan} \left(\frac{\tan(\pi/2 - \eta)}{\epsilon} \right) \quad (2.64)$$

La pression capillaire se calcule alors grâce à l'équation suivante :

$$p_c = \gamma \text{tr} \mathbf{b} = \gamma \left(\frac{1}{r_1} + \frac{1}{r_1 + r_2} \right) \quad (2.65)$$

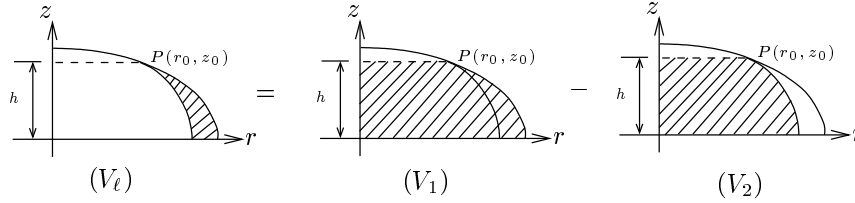


FIG. 2.14 – Calcul du volume du liquide

2.3.1.2 Calcul de la saturation en liquide

Le volume du liquide est calculé par différence entre le volume du domaine V_1 et le volume du domaine V_2 [Fig.2.14] qui sont respectivement :

$$V_1 = \frac{\pi}{3} L^2 H \cos \varphi_0 (3 - \cos^2 \varphi_0) \quad (2.66)$$

$$V_2 = \pi \left[r_1^2 h + r_2^2 h + r_2 h (r_1^2 - h^2)^{\frac{1}{2}} - \frac{1}{3} h^3 + r_2 r_1^2 \text{Arc sin } \frac{h}{r_1} \right]$$

où $h = H \cos \varphi_0$.

Le volume de la phase liquide est alors :

$$V_\ell = 2(V_1 - V_2) \quad (2.67)$$

On a donc la saturation en liquide :

$$S_r = \frac{2(V_1 - V_2)}{4/3\pi H L^2} \quad (2.68)$$

2.3.1.3 Calcul de la contrainte équivalente

En utilisant la relation (3.10), la moyenne du tenseur de contrainte dans un pore s'écrit :

$$\langle \boldsymbol{\sigma} \rangle = -S_r p_\ell \boldsymbol{\delta} - (1 - S_r) p_g \boldsymbol{\delta} + \frac{1}{|\Omega|_p} \int_\omega \gamma \boldsymbol{\delta}_{T_\omega(\underline{x})} dS \quad (2.69)$$

On suppose que le liquide mouille parfaitement le solide et que la pression du gaz est uniforme, égale à zéro. La relation précédente s'écrit alors :

$$\langle \boldsymbol{\sigma} \rangle = S_r p_c \boldsymbol{\delta} + \frac{1}{|\Omega|_p} \int_{\omega} \gamma \boldsymbol{\delta}_{T_{\omega}(\underline{x})} dS \quad (2.70)$$

Le premier terme de l'équation (2.70) se calcule aisément en combinant les équations (2.63), (2.65) et (2.68). Le terme surfacique se calcule en considérant successivement :

1) la contribution de l'interface liquide-gaz (ω_{lg}) :

$$\sigma_{xx}^{lg} = \sigma_{yy}^{lg} = \frac{3\gamma r_1}{4\epsilon L^3} \left(r_2 (3\varphi_0 - \sin\varphi_0 \cos\varphi_0) + \frac{2}{3} r_1 \sin\varphi_0 (\sin^2\varphi_0 + 3) \right) \quad (2.71)$$

$$\sigma_{zz}^{lg} = \frac{3\gamma r_1}{2\epsilon L^3} \left(r_2 (\varphi_0 + \sin\varphi_0 \cos\varphi_0) + \frac{2}{3} r_1 \sin\varphi_0 (\cos^2\varphi_0 + 2) \right) \quad (2.72)$$

2) la contribution de l'interface solide-gaz (ω_{sg}) :

$$\sigma_{xx}^{sg} = \sigma_{yy}^{sg} = \frac{3\gamma}{4\epsilon L} \left(\frac{(1-k^2)^2}{k^3} \log \frac{k \cos\varphi_0 + \Delta_\epsilon(\varphi_0)}{1+k} - \frac{1+k^2}{k^2} (\cos\varphi_0 \Delta_\epsilon(\varphi_0) - 1) \right) \quad (2.73)$$

$$\sigma_{zz}^{sg} = \frac{3\gamma\epsilon}{2Lk^2} \left(\cos\varphi_0 \Delta_\epsilon(\varphi_0) - \frac{1+k^2}{k} \log \frac{k \cos\varphi_0 + \Delta_\epsilon(\varphi_0)}{1+k} - 1 \right) \quad (2.74)$$

avec :

$$k = (1 - \epsilon^2)^{\frac{1}{2}}, \quad \Delta_\epsilon(\varphi_0) = (\cos^2\varphi_0 + \epsilon^2 \sin^2\varphi_0)^{\frac{1}{2}} \quad (2.75)$$

2.3.2 Pore de profil $z = H \left(1 - \frac{r}{L}\right)^n$

2.3.2.1 Calcul de la pression capillaire

L'équation paramétrique du pore de révolution considéré s'écrit :

$$x = r \cos \theta \quad y = r \sin \theta \quad z = H \left(1 - \frac{r}{L}\right)^n \quad (2.76)$$

Les coordonnées cylindriques du point d'accrochage de ménisque sont (r_0, z_0) . L'approximation de la courbure moyenne du ménisque est toujours donnée par (2.58). En utilisant le même raisonnement que celui utilisé pour traiter des pores ellipsoïdaux, on obtient que le domaine de validité de calcul est défini par les inégalités :

$$0 \leq \psi + \eta \leq \frac{\pi}{2}$$

Quand le ménisque se trouve dans ce domaine, la pression capillaire s'écrit :

$$p_c = \gamma \left(\frac{1}{r_1} + \frac{1}{r_1 + r_2} \right) \quad (2.77)$$

2.3.2.2 Calcul de la saturation en liquide

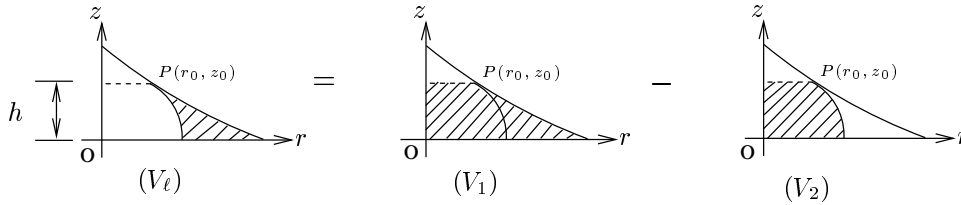


FIG. 2.15 – Calcul du volume de liquide

Le volume du liquide est calculé par différence entre le volume V_1 et le volume V_2 [Fig. 2.15] qui sont égaux respectivement à :

$$V_1 = \pi L^2 \left(h - nh \left(\frac{h}{H} \right)^{\frac{1}{n}} \left(\frac{2}{n+1} - \frac{1}{n+2} \left(\frac{h}{H} \right)^{\frac{1}{n}} \right) \right) \quad (2.78)$$

$$V_2 = \pi \left(r_1^2 h + r_2^2 h + r_2 h (r_1^2 - h^2)^{\frac{1}{2}} - \frac{1}{3} h^3 + r_2 r_1^2 \text{Arc sin } \frac{h}{r_1} \right)$$

Le volume du pore est obtenu en prenant $h = H$ dans la relation de V_1 :

$$V_p = 2\pi L^2 H \left(1 - \frac{2n}{n+1} + \frac{n}{n+2} \right) \quad (2.79)$$

La saturation en liquide s'écrit :

$$S_r = \frac{2(V_1 - V_2)}{V_p} \quad (2.80)$$

Dans un cas particulier où la forme de la surface du ménisque est conique ($n = 1$) [Fig.2.13], V_1 et V_p sont égaux à

$$V_1 = \frac{\pi}{3} (r_1^2 + r_1 r_2 + r_2^2) \quad (2.81)$$

$$V_p = \frac{2\pi}{3} L^2 H \quad (2.82)$$

2.3.2.3 Calcul de la contrainte équivalente

Le calcul de contrainte moyenne ici est analogue à celui effectué pour le pore ellipsoïdal. En particulier, les formules permettant de calculer le terme volumique et le terme surfacique sur l'interface liquide-gaz sont identiques à celles obtenues dans le cas du pore ellipsoïdal. En utilisant la même méthode, on a les composantes σ_{xx} , σ_{yy} et σ_{zz} du tenseur des contraintes sur l'interface solide-gaz suivantes :

$$\sigma_{xx}^{sg} = \sigma_{yy}^{sg} = \frac{\gamma(n+1)(n+2)}{L^2 H} \int_0^{r_0} r \left(\frac{\Delta(r)}{L} + \frac{L}{\Delta(r)} \right) dr \quad (2.83)$$

$$\sigma_{zz}^{sg} = \frac{2\gamma(n+1)(n+2)}{L^2 H} \int_0^{r_0} r \left(\frac{\Delta(r)}{L} - \frac{L}{\Delta(r)} \right) dr \quad (2.84)$$

avec :

$$\Delta(r) = \left(L^2 + H^2 n^2 \left(1 - \frac{r}{L} \right)^{2(n-1)} \right)^{\frac{1}{2}} \quad (2.85)$$

Pour un pore de forme conique ($n = 1$), les équations (2.83) et (2.84) se simplifient en

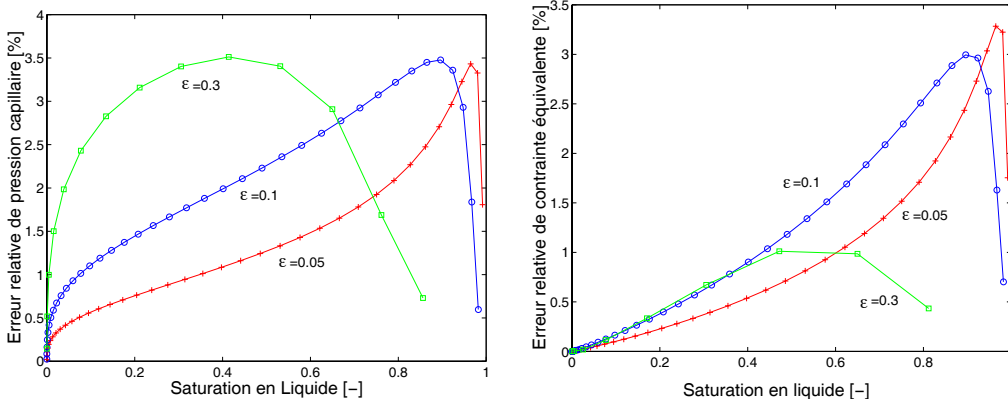


FIG. 2.16 – Pore ellipsoïdal

$$\sigma_{xx}^{sg} = \sigma_{yy}^{sg} = \frac{3}{2} \gamma \frac{(2L^2 + H^2)}{L^3 H \sqrt{L^2 + H^2}} r_0^2 \quad (2.86)$$

$$\sigma_{zz}^{sg} = 3\gamma \frac{H}{L^3 \sqrt{L^2 + H^2}} r_0^2 \quad (2.87)$$

Pour un pore de forme parabolique ($n = 2$), il existe également des solutions analytiques. On ne donne pas leurs expressions dans ce mémoire pour ne pas alourdir le texte.

2.4 Procédure numérique de détermination du profil du ménisque dans un pore

Les résultats numériques obtenus et les solutions correspondant à l'approximation toroïdale pour les pores de forme ellipsoïdale et conique ($n = 1$) pour différentes valeurs du rapport d'aspect sont représentés sur les [Fig. 2.16] et [Fig. 2.17]. La contrainte équivalente calculée ici désigne la partie sphérique de la moyenne du tenseur de contrainte dans le pore (2.70). Tous les résultats présentés sont adimensionnés.

On constate que l'approximation toroïdale fournit globalement une bonne précision pour la pression capillaire et la contrainte équivalente dans les deux cas, les erreurs maximales ne dépassant pas 3.5%. En particulier, pour les faibles valeurs de la saturation, on observe que lorsque les rapports d'aspect

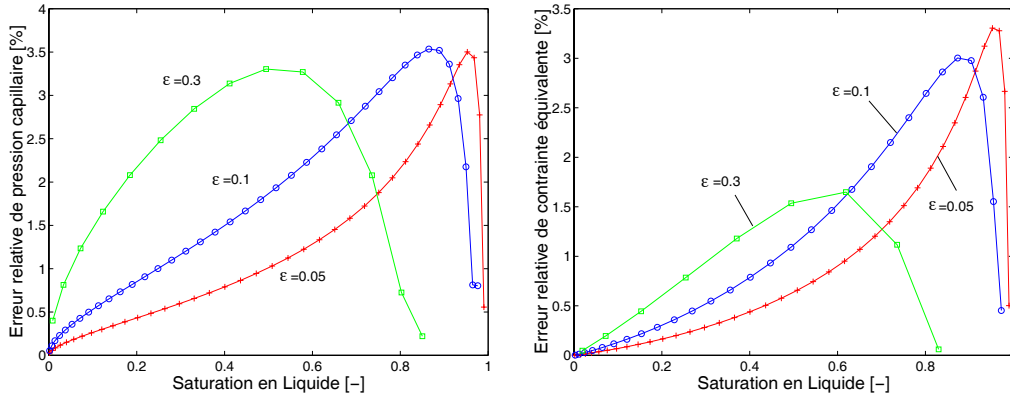


FIG. 2.17 – Pore conique ($n = 1$)

des pores diminuent, les erreurs relatives pour la pression capillaire et la contrainte équivalente diminuent. On remarque également que les évolutions des courbes tracées sont similaires et sont constituées d'une partie croissante suivie d'une partie décroissante en fonction de la saturation en liquide.

2.5 Annexe

On présente dans cette annexe le gradient d'un champ vectoriel et les résultats des courbures moyennes de la surface du pore de révolution. Pour un exposé plus détaillé, on trouvera dans la référence [40].

2.5.1 Gradient d'un champ vectoriel le long d'une surface

On considère une surface ω de l'espace euclidien R^3 qui est définie par la donnée d'une fonction vectorielle $\varphi(s^1, s^2)$ de classe C^1 . Chaque point de la surface ω est repéré par ses coordonnées curvilignes (s^1, s^2) . En un point \underline{x} de ω , on note $\underline{a}_\alpha = \varphi_{,\alpha}$ ($\alpha = 1, 2$), la base naturelle ou covariante du plan tangent $T_\omega(\underline{x})$ en \underline{x} à ω , \underline{n} le vecteur unitaire normal à $T_\omega(\underline{x})$, \mathbf{b} le tenseur de courbure de la surface ω et $\delta_{T_\omega(\underline{x})}$ l'identité du plan tangent $T_\omega(\underline{x})$. On définit également la base duale ou contravariante de $T_\omega(\underline{x})$:

$$\underline{a}^\alpha \quad \text{tel que} \quad \underline{a}^\alpha \cdot \underline{a}_\beta = \delta_\beta^\alpha \quad (\alpha = 1, 2) \quad (2.88)$$

Etant donné un champ de vecteurs \underline{u} différentiable sur ω , son gradient en un point de ω est défini par la relation différentielle :

$$d\underline{u} = \mathbf{grad}_\omega \underline{u} \cdot d\underline{x}_\omega \quad (\forall d\underline{x}_\omega \in T_\omega(\underline{x})) \quad (2.89)$$

Si on se donne \underline{u} par ses composantes covariantes u^i et contravariantes u_i , $\underline{u} = u^\alpha \underline{a}_\alpha + u^n \underline{n} = u_\alpha \underline{a}^\alpha + u_n \underline{n}$, on rappelle que la dérivée de \underline{u} par rapport aux coordonnées curvilignes (s^1, s^2) s'écrit

$$\begin{aligned} \underline{u}_{,\alpha} &= (u_\lambda|_\alpha - b_{\alpha\lambda}u^n) \underline{a}^\lambda + (u^n_{,\alpha} + u_\lambda b_\alpha^\lambda) \underline{n} \\ &= (u^\lambda|_\alpha - b_\alpha^\lambda u^n) \underline{a}_\lambda + (u^n_{,\alpha} + u^\lambda b_{\alpha\lambda}) \underline{n} \end{aligned} \quad (2.90)$$

En utilisant la relation (2.90), on explicite le calcul du gradient d'un champ de vecteur :

$$\begin{aligned} \mathbf{grad}_\omega \underline{u} &= (u_\alpha|_\beta - b_{\alpha\beta}u^n) \underline{a}^\alpha \otimes \underline{a}^\beta + (u^n_{,\alpha} + u_\lambda b_\alpha^\lambda) \underline{n} \otimes \underline{a}^\alpha \\ &= (u^\alpha|_\beta - b_\beta^\alpha u^n) \underline{a}_\alpha \otimes \underline{a}^\beta + (u^n_{,\alpha} + u^\lambda b_{\alpha\lambda}) \underline{n} \otimes \underline{a}^\alpha \end{aligned} \quad (2.91)$$

Cette formule s'écrit également sous la forme :

$$\mathbf{grad}_\omega \underline{u} = \mathbf{grad}_\omega \underline{u}_t + \underline{n} \otimes \underline{\mathbf{grad}}_\omega u^n - u^n \mathbf{b} \quad (2.92)$$

2.5.2 Calcul de la courbure moyenne de la surface du pore de révolution

2.5.2.1 Surface ellipsoïdale

Grâce à la symétrie, on considère seulement une moitié du pore ellipsoïdal. L'équation paramétrique du profil ellipsoïdal dans le système de coordonnées cartésiennes s'écrit :

$$\begin{cases} x = L \sin \varphi \cos \theta \\ y = L \sin \varphi \sin \theta \\ z = H \cos \varphi \end{cases} \quad (2.93)$$

où $\varphi \in [0, \frac{\pi}{2}]$, $\theta \in [0, 2\pi]$

En prenant φ et θ comme coordonnées, on a la base naturelle de l'espace tangent à la surface ellipsoïdale au point \underline{x} :

$$\begin{cases} \underline{a}_\varphi = L \cos \varphi \underline{e}_r - H \sin \varphi \underline{e}_z \\ \underline{a}_\theta = L \sin \varphi \underline{e}_\theta \end{cases} \quad (2.94)$$

Les composantes dans la base duale du tenseur métrique \mathbf{a} sont données par :

$$\begin{cases} a_{\varphi\varphi} = L^2 \cos^2 \varphi + H^2 \sin^2 \varphi \\ a_{\theta\theta} = L^2 \sin^2 \varphi \\ a_{\varphi\theta} = 0 \end{cases} \quad (2.95)$$

On a alors l'élément d'aire pour la surface ellipsoïdale :

$$dS = \sqrt{|a_{\varphi\varphi} \cdot a_{\theta\theta}|} d\varphi d\theta = \Delta_\varepsilon(\varphi) L^2 \sin \varphi d\varphi d\theta \quad (2.96)$$

avec $\Delta_\varepsilon(\varphi) = \sqrt{\cos^2 \varphi + \varepsilon^2 \sin^2 \varphi}$, où $\varepsilon = \frac{H}{L}$.

Le vecteur unitaire normal à la surface ellipsoïdale est :

$$\underline{n} = \frac{\underline{a}_\varphi \wedge \underline{a}_\theta}{|\underline{a}_\varphi \wedge \underline{a}_\theta|} = \frac{1}{\Delta_\varepsilon(\varphi)} (\varepsilon \sin \varphi \underline{e}_r + \cos \varphi \underline{e}_z) \quad (2.97)$$

Les composantes dans la base duale du tenseur de courbure \mathbf{b} de la surface ellipsoïdale se calculent au moyen de la formule suivante :

$$b_{\alpha\beta} = \underline{n} \cdot \underline{a}_{\alpha,\beta} \quad (\alpha, \beta = \varphi, \theta) \quad (2.98)$$

On a donc :

$$\begin{cases} b_{\varphi\varphi} = \underline{n} \cdot \underline{a}_{\varphi,\varphi} = -\frac{H}{\Delta_\varepsilon(\varphi)} \\ b_{\theta\theta} = \underline{n} \cdot \underline{a}_{\theta,\theta} = -\frac{H \sin^2 \varphi}{\Delta_\varepsilon(\varphi)} \\ b_{\varphi\theta} = b_{\theta\varphi} = \underline{n} \cdot \underline{a}_{\varphi,\theta} = \underline{n} \cdot \underline{a}_{\theta,\varphi} = 0 \end{cases} \quad (2.99)$$

La courbure moyenne de la surface ellipsoïdale est calculée par :

$$tr \mathbf{b} = \mathbf{b} : \mathbf{a} = b_{\alpha\beta} a^{\alpha\beta} = b_{\alpha\beta} \cdot \frac{1}{a_{\alpha\beta}} \quad (2.100)$$

où $a^{\alpha\beta}$ désignent les composantes du tenseur métrique dans la base naturelle. On a alors :

$$tr \mathbf{b} = -\frac{\varepsilon}{L} \left(\frac{1}{\Delta_\varepsilon(\varphi)} + \frac{1}{\Delta_\varepsilon^3(\varphi)} \right) \quad (2.101)$$

2.5.2.2 Surface de profil d'équation $z = H \left(1 - \frac{r}{L}\right)^n$

Pour calculer la courbure moyenne de la surface de révolution dont le profil $z = H \left(1 - \frac{r}{L}\right)^n$, on procède comme dans le cas précédent. Ici l'équation paramétrique du profil dans le système cartésien s'écrit :

$$\begin{cases} x = r \cos \theta \\ y = r \sin \theta \\ z = H \left(1 - \frac{r}{L}\right)^n \end{cases} \quad (2.102)$$

où $r \in [0, L], \theta \in [0, 2\pi]$.

La base naturelle du plan tangent à la surface au point \underline{x} :

$$\begin{cases} \underline{a}_r = \underline{e}_r - \varepsilon n \left(1 - \frac{r}{L}\right)^{n-1} \underline{e}_z \\ \underline{a}_\theta = r \underline{e}_\theta \end{cases} \quad (2.103)$$

avec toujours $\varepsilon = \frac{H}{L}$.

Les composantes dans la base duale du tenseur métrique \mathbf{a} sont alors égales à :

$$\begin{cases} a_{rr} = 1 + \varepsilon^2 n^2 \left(1 - \frac{r}{L}\right)^{2(n-1)} \\ a_{\theta\theta} = r^2 \\ a_{r\theta} = 0 \end{cases} \quad (2.104)$$

Tandis que l'élément d'aire de la surface vaut :

$$dS = r \sqrt{1 + \varepsilon^2 n^2 \left(1 - \frac{r}{L}\right)^{2(n-1)}} dr d\theta = r \Delta_\varepsilon(r) dr d\theta \quad (2.105)$$

où $\Delta_\varepsilon(r) = \sqrt{1 + \varepsilon^2 n^2 \left(1 - \frac{r}{L}\right)^{2(n-1)}}$.

Le vecteur unitaire normal à la surface s'écrit :

$$\underline{n} = \frac{\varepsilon n \left(1 - \frac{r}{L}\right)^{n-1}}{\Delta_\varepsilon(r)} \underline{e}_r + \frac{1}{\Delta_\varepsilon(r)} \underline{e}_z \quad (2.106)$$

Les composantes dans la base duale du tenseur de courbure \mathbf{b} de la surface sont données par :

$$\begin{cases} b_{rr} = \frac{\varepsilon}{L \Delta_\varepsilon(r)} n(n-1) \left(1 - \frac{r}{L}\right)^{n-2} \\ b_{\theta\theta} = -\frac{\varepsilon r}{\Delta_\varepsilon(r)} n \left(1 - \frac{r}{L}\right)^{n-1} \\ b_{\varphi\theta} = b_{\theta\varphi} = 0 \end{cases} \quad (2.107)$$

La courbure moyenne de la surface s'écrit :

$$tr \mathbf{b} = \frac{\varepsilon}{\Delta_\varepsilon(r)} n \left(1 - \frac{r}{L}\right)^{n-2} \left[\frac{1}{L \Delta_\varepsilon^2(r)} (n-1) - \frac{1}{r} \left(1 - \frac{r}{L}\right) \right] \quad (2.108)$$

En utilisant ce dernier résultat, on peut calculer la courbure moyenne de quelques géométries particulières :

- surface plane ($\varepsilon \rightarrow 0$) :

$$tr \mathbf{b} = 0 \quad (2.109)$$

- surface cylindrique de révolution ($\varepsilon \rightarrow \infty$) :

$$tr \mathbf{b} = -\frac{1}{R} \quad (2.110)$$

où R désigne le rayon du cylindre.

- surface conique ($n = 1$) :

$$tr\mathbf{b} = -\frac{\varepsilon}{r\sqrt{1+\varepsilon^2}} \quad (2.111)$$

- surface parabolique ($n = 2$) :

$$tr\mathbf{b} = \frac{2L\varepsilon}{\Delta_\varepsilon(r)} \left[\frac{L}{\Delta_\varepsilon^2(r)} + \frac{1}{L} - \frac{1}{r} \right] \quad (2.112)$$

$$\text{où } \Delta_\varepsilon(r) = L\sqrt{1 + 4\varepsilon^2 \left(1 - \frac{r}{L}\right)^2}$$

Chapitre 3

Homogénéisation des milieux poreux non saturés

Par rapport aux milieux poreux saturés, les milieux poreux non saturés présentent certaines spécificités que l'on doit considérer au plan de la modélisation. En effet, en plus des efforts intérieurs dans les phases volumiques représentés par des tenseurs de contrainte de Cauchy, il convient de rendre compte de l'existence d'efforts intérieurs localisés dans les interfaces entre les phases volumiques (tension de surface).

Comme pour le milieu poreux saturé, il est possible d'étudier un milieu poreux non saturé en se plaçant à deux échelles d'espace distinctes : l'échelle macroscopique et l'échelle microscopique. A l'échelle macroscopique, le v.e.r. d'un milieu poreux peut être considéré comme un élément de matière constitué de plusieurs particules macroscopiques superposées : la matrice solide et les phases fluides. Géométriquement ces particules sont indiscernables à cette échelle. On utilise classiquement la méthode thermodynamique en se plaçant directement à l'échelle macroscopique pour modéliser le comportement mécanique des matériaux poreux [6, 26]. Bien que les résultats obtenus en mettant en œuvre ce type d'approche soient très nombreux, on ne peut pas expliquer complètement certains phénomènes physiques en adoptant un point de vue purement macroscopique. Par conséquent, on propose ici d'utiliser les outils de la micromécanique pour aborder certaines questions liées à la modélisation du comportement de ces matériaux.

Comme il a été dit, à l'échelle microscopique le même v.e.r. est traité comme une structure hétérogène dans laquelle le solide et l'espace poreux saturé par les phases fluides occupent des volumes disjoints. La description des interactions entre la phase solide et les phases fluides à cette échelle doit

prendre en compte les effets capillaires pour être complète.

Dans ce chapitre, on commence par rappeler quelques résultats généraux concernant la modélisation d'un milieu poreux non saturé [17, 18, 19]. Ensuite, on applique ces résultats généraux pour les milieux poreux non saturés dans deux situations différentes : le cas où les phases fluides occupent au sein de l'espace poreux des domaines possédant les mêmes propriétés morphologiques (isomorphologie des phases fluides) puis un cas où cette propriété n'est pas vérifiée (hétéromorphologie des phases fluides). Pour conclure cette étude, on s'intéresse en particulier à la modélisation des déformations occasionnées par la désaturation d'un milieu poreux soumis à une contrainte constante nulle en condition isotherme. En fait, il est généralement admis que la désaturation d'un milieu poreux soumis à une contrainte macroscopique constante provoque toujours un retrait du matériau. La prise en compte des phénomènes se déroulant à l'échelle microscopique au cours des variations de saturation d'un matériau poreux met en question le caractère évident de ce comportement, du moins pour les situations où le comportement de la matrice solide est élastique linéaire.

3.1 Micromécanique des milieux poreux non saturés

3.1.1 Description des efforts intérieurs à l'échelle microscopique

On s'intéresse ici au cas d'un v.e.r. de milieu poreux occupant le domaine Ω , dont la matrice est constituée d'un solide élastique occupant le domaine Ω_s et dont l'espace poreux est saturé par deux fluides immiscibles : un liquide et un gaz, occupant respectivement les domaines Ω_ℓ et Ω_g (voir Fig.3.1). La frontière entre ces trois domaines notée ω , comprend trois parties :

$$\omega_{\ell g} = \partial\Omega_\ell \cap \partial\Omega_g, \omega_{sg} = \partial\Omega_s \cap \partial\Omega_g, \omega_{s\ell} = \partial\Omega_s \cap \partial\Omega_\ell$$

Ces trois surfaces s'intersectent éventuellement le long d'une courbe gauche notée $\partial\omega_{s\ell g}$. Elles constituent l'interface considérée comme une phase constitutive du milieu poreux non saturé au même titre que les trois autres phases volumiques.

Les efforts intérieurs dans chacune des phases sont décrits soit par un champ de contrainte de Cauchy σ_α dans les domaines Ω_α ($\alpha = s, \ell, g$), soit

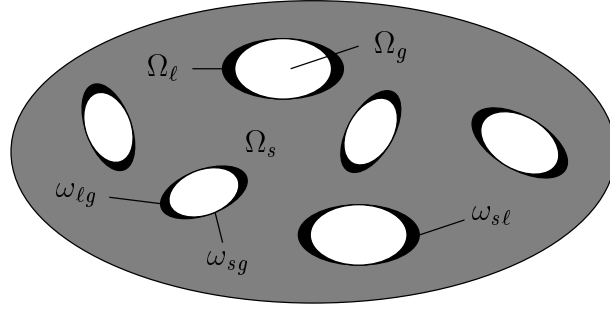


FIG. 3.1 – Milieu poreux non saturé

par un champ d'effort de membrane $\gamma(\underline{x}) \delta_{T_\omega(\underline{x})}$ défini sur ω , $\delta_{T_\omega(\underline{x})}$ désignant le tenseur unité du second ordre du plan tangent $T_\omega(\underline{x})$ à ω au point \underline{x} et $\gamma(\underline{x})$ la valeur de la tension superficielle au point \underline{x} de l'interface ω , fonction de la nature des constituants du v.e.r. et de la température.

Dans la situation homogénéisable, les forces de volume sont négligeables à l'échelle microscopique. On a donc les équations d'équilibre dans les domaines volumiques :

$$\operatorname{div} \boldsymbol{\sigma}_\alpha = 0 \quad (\Omega_\alpha), (\alpha = s, \ell, g) \quad (3.1)$$

Par ailleurs, comme on étudie la part du comportement lié aux déformations du squelette, une description des efforts intérieurs dans les phases fluides par un champ de pression

$$\boldsymbol{\sigma}_\alpha = -p_\alpha \boldsymbol{\delta} \quad (\Omega_\alpha), (\alpha = \ell, g) \quad (3.2)$$

est suffisante.

Les équations d'équilibre pour les interfaces entre les trois phases s'écrivent respectivement :

$$p_c = p_g - p_\ell = \gamma_{\ell g} \operatorname{tr} \mathbf{b} \quad (\omega_{\ell g}) \quad (3.3)$$

$$\boldsymbol{\sigma}_s \cdot \underline{\mathbf{n}} = -p_g \cdot \underline{\mathbf{n}} + \gamma_{sg} \operatorname{tr} \mathbf{b} \cdot \underline{\mathbf{n}} \quad (\omega_{sg}) \quad (3.4)$$

$$\boldsymbol{\sigma}_s \cdot \underline{\mathbf{n}} = -p_\ell \cdot \underline{\mathbf{n}} + \gamma_{s\ell} \operatorname{tr} \mathbf{b} \cdot \underline{\mathbf{n}} \quad (\omega_{s\ell}) \quad (3.5)$$

où \underline{n} désigne le vecteur unitaire normal extérieur à Ω_s le long des interfaces ω_{sl} et ω_{sg} ; \mathbf{b} le tenseur de courbure des surfaces ω_{lg} et ω_{sg} , $\text{tr } \mathbf{b} = \delta_{T_\omega(\underline{x})} : \mathbf{b}$ la courbure gaussienne de l'interface.

Il nous reste à écrire les équations d'équilibre sur la ligne $\partial\omega_{slg}$. Pour cela, on utilise la relation de Young Dupré. On peut distinguer deux situations.

Cas régulier

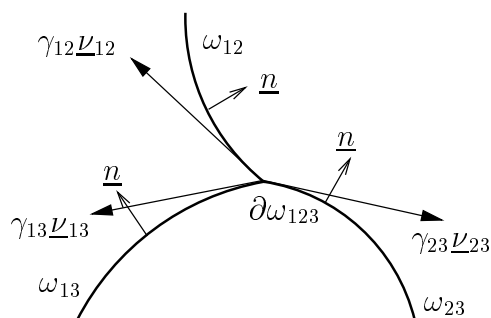


FIG. 3.2 – Equilibre de la ligne triple - cas régulier

Quand les interfaces capillaires séparent trois phases fluides immiscibles, aucune contrainte géométrique ne vient contraindre la configuration adoptée par le système le long de la ligne triple. Dans ce cas le système "s'adapte" de façon à ce que les tensions de surface assurent l'équilibre local de la ligne $\partial\omega_{123}$ (voir Fig.3.2). On a alors

$$\gamma_{12}\underline{L}_{12} + \gamma_{13}\underline{L}_{13} + \gamma_{23}\underline{L}_{23} = 0 \quad (\forall \underline{x} \in \partial\omega_{123}) \quad (3.6)$$

où $\underline{L}_{\alpha\beta}$ ($\alpha\beta = 12, 13, 23$) désigne la normale unitaire extérieure du plan tangent à la surface $\omega_{\alpha\beta}$ le long de $\partial\omega_{123}$. Dans ce cas, il n'y a pas de singularité du tenseur des contraintes le long de la ligne $\partial\omega_{123}$. Pour les systèmes qui nous intéressent, on rencontre cette situation quand l'une des phases fluides mouille parfaitement la phase solide.

Cas singulier

Quand l'une des phases volumiques constituant le système est indéformable ou très peu déformable, le système matériel ne peut plus adopter des

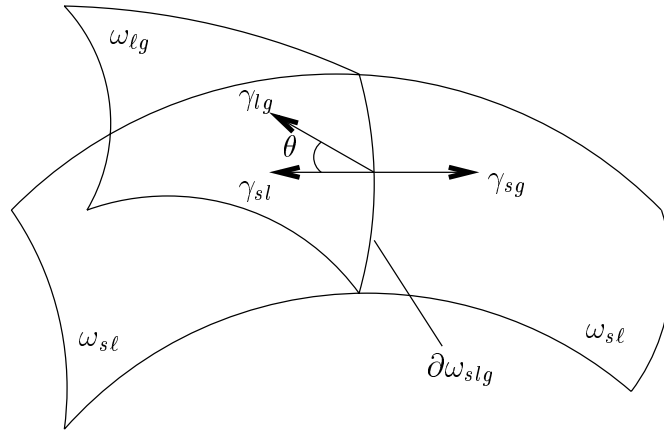


FIG. 3.3 – Equilibre de la ligne triple - cas singulier

configurations qui permettent d'obtenir l'équation (3.6) le long de $\partial\omega_{slg}$. Il existe alors une singularité du tenseur des contraintes dans la phase solide le long de $\partial\omega_{slg}$.

A titre d'illustration, on considère le cas où les plans tangents à l'interface ω_{sl} et ω_{sg} sont identiques le long de $\partial\omega_{slg}$ (voir Fig.3.3). Dans la direction du plan tangent à la surface extérieure au solide perpendiculaire à $\partial\omega_{slg}$, on a la relation

$$\gamma_{sg} = \gamma_{sl} + \gamma_{lg} \cos \theta \quad (\forall \underline{x} \in \partial\omega_{slg}) \quad (3.7)$$

où θ désigne l'angle de mouillage entre le plan tangent à l'interface ω_{lg} et le plan tangent à la frontière entre la phase solide et la phase liquide. Dans la direction normale à la surface extérieure au solide perpendiculaire à $\partial\omega_{slg}$, une force de densité linéique $\gamma_{lg} \sin \theta$ est appliquée sur le solide :

$$\underline{F}_{\partial\omega_{slg}}(\underline{x}) = \gamma_{lg} \sin \theta \cdot \underline{n} \quad (3.8)$$

Dans ce cas, les efforts intérieurs dans la phase solide sont singuliers le long de $\partial\omega_{slg}$. On écrit alors l'équilibre de la ligne $\partial\omega_{slg}$ en utilisant le théorème des puissances virtuelles comme dans [17].

3.1.2 Homogénéisation

On considère ici de nouveau le système multiphasique décrit à la section précédente. Pour simplifier, on suppose que la frontière extérieure du v.e.r. est constituée uniquement de particules solides. En étendant le lemme de Hill à ce système, on peut transcrire les efforts intérieurs à l'échelle microscopique vérifiant les équations (3.2), (3.1), (3.3), (3.4) et (3.5) à l'échelle macroscopique. On montre le résultat suivant [17] :

$$(\forall \underline{\xi} \text{ vérifiant } \underline{\xi} = \mathbf{E} \cdot \underline{x} \text{ sur } \partial\Omega)$$

$$\boldsymbol{\Sigma} : \mathbf{E} = \frac{1}{|\Omega|} \left(\int_{\Omega} \boldsymbol{\sigma} : \boldsymbol{\varepsilon} d\Omega + \int_{\omega} \gamma(\underline{x}) \boldsymbol{\delta}_{T_{\omega}(\underline{x})} : \boldsymbol{\varepsilon} dS \right) \quad (3.9)$$

où $\boldsymbol{\Sigma}$ représente la contrainte macroscopique définie par :

$$\boldsymbol{\Sigma} = (1 - n) \langle \boldsymbol{\sigma} \rangle_s - n S_r p_\ell \boldsymbol{\delta} - n(1 - S_r) p_g \boldsymbol{\delta} + \frac{1}{|\Omega|} \int_{\omega} \gamma(\underline{x}) \boldsymbol{\delta}_{T_{\omega}(\underline{x})} dS \quad (3.10)$$

avec $\langle \cdot \rangle_\alpha$, l'opérateur de moyenne sur le volume Ω_α , n la porosité du milieu et S_r la saturation en liquide.

On cherche ensuite à identifier le comportement à l'échelle macroscopique pour ce milieu à partir de la résolution d'un problème aux limites posé sur le v.e.r. On suppose de nouveau que le matériau est constitué d'un matériau élastique linéaire homogène. Le comportement de ce matériau s'écrit donc :

$$\begin{cases} \boldsymbol{\sigma}(\underline{x}) = \mathbb{C} : \boldsymbol{\varepsilon}(\underline{x}) & (\forall \underline{x} \in \Omega_s) \\ \boldsymbol{\varepsilon}(\underline{x}) = \mathbb{S} : \boldsymbol{\sigma}(\underline{x}) & (\forall \underline{x} \in \Omega_s) \end{cases} \quad (3.11)$$

En outre, pour simplifier on suppose que la phase liquide mouille parfaitement le solide et que la valeur de la tension superficielle à l'interface $\omega_{s\ell}$ est nulle. D'après la relation (3.7), on a donc $\gamma_{\ell g} = \gamma_{sg} = \gamma$ tandis que la force imposée au solide le long de $\partial\omega_{s\ell g}$ est nulle. La matrice solide est alors soumise à un chargement caractérisé par la pression du liquide p_ℓ le long de $\omega_{s\ell}$ et celle du gaz p_g le long de ω_{sg} , la tension superficielle $\gamma \text{tr} \mathbf{b}$ appliquée sur l'interface ω_{sg} , ainsi qu'un chargement en déformation homogène \mathbf{E} imposé sur le bord du v.e.r. Le problème d'élasticité défini sur la phase solide s'écrit :

$$\left\{ \begin{array}{ll} \boldsymbol{\sigma}(\underline{x}) = \mathbb{C} : \boldsymbol{\varepsilon}(\underline{x}) & (\Omega_s) \\ \operatorname{div} \boldsymbol{\sigma}(\underline{x}) = 0 & (\Omega_s) \\ \underline{\xi}(\underline{x}) = \mathbf{E} \cdot \underline{x} & (\partial\Omega) \\ \boldsymbol{\sigma}_s \cdot \underline{n} = -p_g \underline{n} + \gamma \operatorname{tr} \mathbf{b} \underline{n} & (\omega_{sg}) \\ \boldsymbol{\sigma}_s \cdot \underline{n} = -p_\ell \underline{n} & (\omega_{s\ell}) \end{array} \right. \quad (3.12)$$

De nouveau, on remplace le problème défini par les équations (3.12) par un problème d'élasticité avec précontrainte posé sur le v.e.r. constitué d'un milieu hétérogène à quatre phases (les phases solide, liquide, gazeuse ainsi que l'interface $\omega = \omega_{sg} \cup \omega_{\ell g}$) :

$$\left\{ \begin{array}{ll} \boldsymbol{\sigma} = \mathbb{C}_\alpha : \boldsymbol{\varepsilon} + \boldsymbol{\sigma}_\alpha^p & (\Omega_\alpha \cup \omega), (\alpha = s, \ell, g) \\ \operatorname{div} \boldsymbol{\sigma}(\underline{x}) = 0 & (\Omega) \\ \underline{\xi}(\underline{x}) = \mathbf{E} \cdot \underline{x} & (\partial\Omega) \\ \llbracket \boldsymbol{\sigma} \rrbracket \cdot \underline{n} = 0 \quad \llbracket \underline{\xi} \rrbracket = 0 & (\omega) \end{array} \right. \quad (3.13)$$

$$\text{avec : } \mathbb{C}_\alpha = \begin{cases} \mathbb{C} & (\Omega_s) \\ \rightarrow 0 & (\Omega_\alpha), (\alpha = \ell, g) \\ \rightarrow 0 & (\omega) \end{cases} \quad \boldsymbol{\sigma}_\alpha^p = \begin{cases} \mathbf{0} & (\Omega_s) \\ -p_\alpha \boldsymbol{\delta} & (\Omega_\alpha), (\alpha = \ell, g) \\ \gamma \boldsymbol{\delta}_{T_\omega(\underline{x})} & (\omega) \end{cases}$$

En utilisant le théorème de Levin valable pour l'homogénéisation des milieux hétérogènes élastiques à état initial non-naturel, on montre immédiatement qu'à l'échelle macroscopique le comportement du matériau poreux non saturé considéré ici s'écrit :

$$\boldsymbol{\Sigma} = \mathbb{C}^{hom} : \mathbf{E} + \boldsymbol{\Sigma}^p \quad (3.14)$$

avec :

$$\mathbb{C}^{hom} = (1 - n)\mathbb{C}^s : \langle \mathbb{A} \rangle_s \quad \boldsymbol{\Sigma}^p = \langle {}^T \mathbb{A} : \boldsymbol{\sigma}^p \rangle_\Omega \quad (3.15)$$

où n désigne la porosité et Σ^p le tenseur de précontrainte macroscopique qui peut aussi s'écrire sous la forme suivante :

$$\begin{aligned} \Sigma^p = & -nS_r p_\ell \boldsymbol{\delta} : \langle \mathbb{A} \rangle_\ell - n(1 - S_r) p_g \boldsymbol{\delta} : \langle \mathbb{A} \rangle_g \\ & + \frac{1}{|\Omega|} \int_\omega \gamma \boldsymbol{\delta}_{T_\omega(\underline{x})} : \mathbb{A}(\underline{x}) dS \end{aligned} \quad (3.16)$$

Pour le cas où les pressions des phases fluides p_ℓ et p_g sont données et où l'on connaît les domaines occupés par chacune des phases fluides ainsi que la valeur de la tension de surface γ , on voit à la lecture de la relation (3.16) que la détermination de la précontrainte macroscopique Σ^p se ramène à la détermination des tenseurs de localisation dans les phases fluides et dans les interfaces. Pour cela, il faut notamment déterminer les domaines occupés par les phases fluides. En fait, cette question peut être résolue en trouvant l'interface liquide-gaz $\omega_{\ell g}$ se raccordant au solide avec l'angle de mouillage θ et vérifiant en tout point l'équation d'équilibre (3.3). La résolution de ce problème a été discutée au chapitre 2.

Dans la suite de ce chapitre, on présente diverses mises en œuvre des résultats généraux qui viennent d'être exposés.

3.2 Isomorphologie des phases fluides

Dans ce paragraphe, on applique les résultats énoncés ci-dessus à deux situations particulières où les domaines occupés par les phases liquide et gazeuse présentent les mêmes propriétés morphologiques. Plus précisément on s'intéresse à des matériaux dont les pores sont tous de forme similaire et chacun d'entre eux est rempli soit par la phase liquide soit par la phase gazeuse, comme suggéré sur la (Fig.3.4.a). On n'a donc pas besoin de déterminer l'interface liquide-gaz $\omega_{\ell g}$. Dans ce type d'approche, on ne rend pas compte dans l'approche mécanique de l'existence d'un réseau poreux connectant les différents pores entre eux, bien que l'existence de ce réseau soit essentielle pour permettre la circulation des phases fluides au travers du milieu poreux.

3.2.1 Modèle simplifié

3.2.1.1 Principe du modèle simplifié

On considère d'abord le cas où il est possible de négliger les termes faisant intervenir la tension de surface γ dans les équations (3.4), (3.5) et (3.10). En faisant $\gamma = 0$ dans la relation (3.10), on montre alors que la contrainte macroscopique s'écrit dans cette situation :

$$\boldsymbol{\Sigma} = (1 - n) \langle \boldsymbol{\sigma} \rangle_s - n S_r p_\ell \boldsymbol{\delta} - n(1 - S_r) p_g \boldsymbol{\delta} \quad (3.17)$$

Comme on l'a déjà dit, on se place dans la situation où il y a isomorphologie des domaines occupés par les phases fluides. Dans le cadre des méthodes d'estimation du comportement des matériaux élastiques linéaires, cette hypothèse implique la propriété

$$\langle \mathbb{A} \rangle_\ell = \langle \mathbb{A} \rangle_g . \quad (3.18)$$

Compte tenu de la propriété $\langle \mathbb{A} \rangle = \mathbb{I}$ et de la relation (3.15), on a alors :

$$\langle \mathbb{A} \rangle_\ell = \langle \mathbb{A} \rangle_g = \frac{1}{n} (\mathbb{I} - \mathbb{C}^{hom} : \mathbb{S}) \quad (3.19)$$

où \mathbb{S} désigne le tenseur des complaisances élastiques de la phase solide.

En introduisant la relation (3.19) dans (3.17), on obtient la précontrainte macroscopique sous la forme suivante :

$$\boldsymbol{\Sigma}^p = -\mathbf{B} (p_g - S_r p_c) \quad \text{avec} \quad \mathbf{B} = (\mathbb{I} - \mathbb{C}^{hom} : \mathbb{S}) : \boldsymbol{\delta} \quad (3.20)$$

où \mathbf{B} désigne de nouveau le tenseur de Biot dans la situation saturé. Cette relation permet de définir une contrainte effective pour formuler le comportement du squelette. On a en effet :

$$\boldsymbol{\Sigma}' = \mathbb{C}^{hom} : \mathbf{E} = \boldsymbol{\Sigma} + \mathbf{B} (p_g - S_r p_c) \quad (3.21)$$

Lorsque la matrice est constituée d'un matériau incompressible, on a $\mathbf{B} = \boldsymbol{\delta}$. Cela nous conduit à retrouver la définition de contrainte effective de Bishop

dans le cas $\chi = S_r$ [65]. Par ailleurs, en faisant $S_r = 1$ dans la relation (3.21), on retrouve le comportement du milieu poreux saturé présenté dans le premier chapitre de ce mémoire :

$$\Sigma' = \mathbb{C}^{hom} : \mathbf{E} = \Sigma + p_\ell \mathbf{B} \quad (3.22)$$

3.2.1.2 Application au problème du séchage

On s'intéresse ici aux déformations volumiques prédites par ce modèle dans le cas où le matériau considéré est soumis à une expérience de séchage à contrainte macroscopique nulle ($Cauchy = 0$), la pression régnant dans la phase gazeuse supposée égale à la pression atmosphérique, étant de plus prise comme pression de référence ($p_g = 0$). En combinant les relations (3.20) et (3.21), on montre que dans ce cas la déformation volumique à l'échelle macroscopique s'écrit :

$$\text{tr } \mathbf{E} = \left(\frac{1}{K} - \frac{1}{K^h} \right) (S_r p_c) \quad (3.23)$$

avec K^h et K les modules de compressibilité macroscopique et microscopique. Compte tenu du caractère poreux du matériau étudié, on a forcément $K > K^h$. Comme le signe du terme $S_r p_c$ est positif, en prenant l'état saturé à $p_c = 0$ comme configuration de référence pour mesurer les déformations, on note que durant tout le processus de séchage la déformation volumique macroscopique est négative ($\text{tr } \mathbf{E} < 0$). Autrement dit, le séchage occasionne toujours un retrait de l'échantillon par rapport à l'état saturé pris comme référence. Cependant, le sens de variation de la déformation volumique au cours du processus peut changer. En effet, la dérivation de l'équation (3.23) donne

$$d(\text{tr } \mathbf{E}) = \left(\frac{1}{K} - \frac{1}{K^h} \right) d(S_r p_c) \quad (3.24)$$

On en déduit que le signe de variation de la déformation volumique est piloté dans ce cas par la courbe capillaire. Comme indiqué sur la (Fig.3.4.b) lorsque la tangente à la courbe capillaire est au dessous de la courbe de référence $S_r p_c = \text{cste}$ passant par le point considéré, le séchage provoque un gonflement du milieu. En revanche, on observe un retrait de l'échantillon lors du séchage dans le cas où la tangente à la courbe capillaire se trouve au dessus de la courbe de référence.

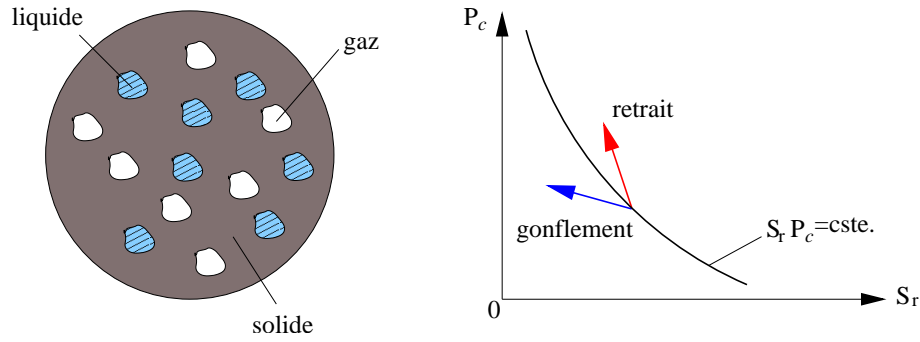


FIG. 3.4 – Le modèle simplifié

Ce résultat, qui peut paraître surprenant au premier abord, s'explique aisément lorsque l'on examine plus en détail les phénomènes se déroulant à l'échelle des pores lors de la désaturation de l'échantillon. D'une part, la désaturation d'un milieu poreux s'accompagne d'une augmentation de la pression capillaire p_c qui mesure la différence entre la pression régnant dans la phase gazeuse et la pression régnant dans la phase liquide. En supposant que la pression de gaz et la pression du liquide soient uniformes dans l'échantillon et que la pression du gaz soit égale à zéro (valeur de référence de la pression atmosphérique), l'augmentation de la pression capillaire est donc égale (au signe près) à la diminution de la pression de la phase liquide qui s'applique sur la matrice solide le long de sa frontière avec le domaine liquide. A cette diminution de pression, on associe naturellement une tendance au retrait du squelette solide, et donc de l'échantillon (de l'état A à l'état B sur Fig.3.5). D'autre part, la désaturation de l'échantillon entraîne une diminution du volume occupé par le liquide, ce qui tend dans la plupart des situations à diminuer l'aire de la surface de la phase solide mouillée par le liquide. Ce processus entraîne le remplacement des efforts de traction appliqués par le liquide sur la matrice solide par des efforts nuls (ou en tout cas beaucoup plus faibles dans la majorité des situations). Ce mécanisme tend en général à accroître le volume de l'échantillon (de l'état B à l'état C sur Fig.3.5). En chaque point du diagramme $S_r - p_c$, la courbe de référence ($p_c S_r = \text{cste}$) sépare donc les domaines d'expression prépondérante de ces deux phénomènes contradictoires pour les matériaux dont les caractéristiques correspondent aux hypothèses du modèle.

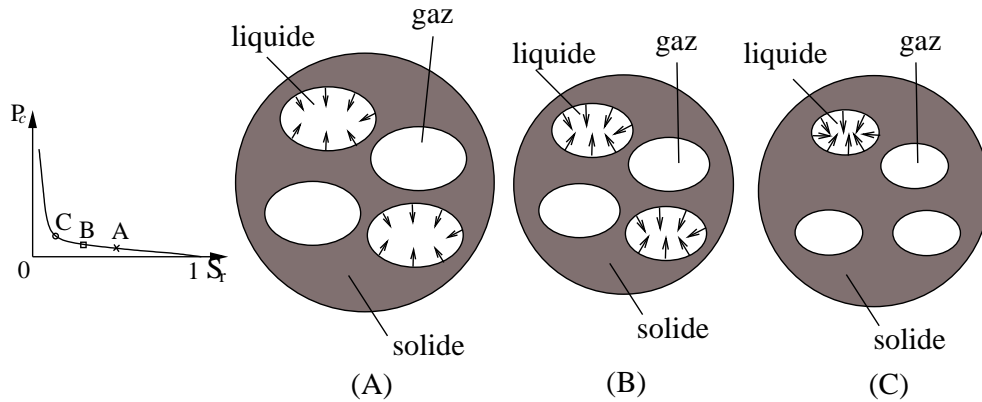


FIG. 3.5 – Deux phénomènes couplés du modèle simplifié

3.2.2 Modèle avec prise en compte des interfaces

On peut évidemment se poser la question de la pertinence des résultats obtenus à la section précédente compte tenu des hypothèses formulées pour les obtenir. On présente donc maintenant un autre modèle permettant de prendre en compte l'influence des tensions de surface négligée dans le modèle précédent. Par contre, on se place toujours dans la situation où phase liquide et phase gazeuse occupent des domaines possédant les mêmes propriétés morphologiques vis à vis de l'homogénéisation du comportement du milieu.

3.2.2.1 Principe du modèle avec prise en compte des interfaces

Ici on suppose que l'espace poreux est constitué de pores sphériques répartis en classes caractérisées chacune par un rayon de pore, tous les pores appartenant à une classe étant soit remplis de liquide soit remplis de gaz. On notera qu'il est possible d'avoir deux classes caractérisées par le même rayon de pore, l'une étant saturée par la phase liquide, l'autre étant saturée par la phase gazeuse.

Pour un pore de rayon R_β rempli de gaz, la courbure gaussienne de l'interface sphérique vaut $\frac{2}{R_\beta}$. La matrice solide est alors soumise au chargement mécanique défini par :

$$\begin{cases} (\forall \underline{x} \in \omega_{sg}) & \underline{\sigma}_s \cdot \underline{n} = -(p_g - p_\beta) \cdot \underline{n} \\ (\forall \underline{x} \in \omega_{sl}) & \underline{\sigma}_s \cdot \underline{n} = -p_\ell \cdot \underline{n} \\ (\forall \underline{x} \in \partial\Omega) & \underline{\xi}(\underline{x}) = \mathbf{E} \cdot \underline{x} \end{cases} \quad (3.25)$$

avec : $p_\beta = \frac{2\gamma}{R_\beta}$.

Par ailleurs, la contribution d'un pore de rayon R_β rempli de gaz au dernier terme de la relation (3.10) se calcule facilement. On a

$$\int_\omega \gamma(\underline{x}) \delta_{T_\omega(\underline{x})} dS = p_\beta V_\beta \delta \quad (3.26)$$

où $V_\beta = \frac{4}{3}\pi R_\beta^3$ désigne le volume du pore. Cette relation montre qu'il est possible de rendre compte de l'effet de la tension de surface à l'interface ω_{sg} pour ce pore en considérant que ce pore est rempli par un fluide à la pression p_β qui s'ajoute alors à la valeur de la pression de gaz.

En introduisant l'équation (3.26) dans (3.10) et en négligeant de nouveau l'effet mécanique d'un éventuel réseau liant les pores sphériques entre eux, on calcule alors la contrainte macroscopique pour ce modèle :

$$\underline{\Sigma} = (1 - n) \langle \underline{\sigma} \rangle_s - n S_r p_\ell \delta - n(1 - S_r) p_g \delta + \sum_{\beta \in \Omega_g} f_\beta p_\beta \delta \quad (3.27)$$

où f_β désigne la fraction volumique de la classe de pores de rayon R_β rempli de gaz.

De façon similaire aux résultats obtenus pour le modèle simplifié, le comportement macroscopique dans ce cas s'écrit :

$$\mathbb{C}^{hom} : \mathbf{E} = \underline{\Sigma} + \mathbf{B} (p_g - S_r p_c) - \underline{\Sigma}_\beta \quad (3.28)$$

avec :

$$\underline{\Sigma}_\beta = \frac{1}{n} \sum_{\beta \in \Omega_g} f_\beta p_\beta \mathbf{B} \quad (3.29)$$

Par rapport au modèle simplifié, on note qu'il apparaît ici un terme supplémentaire $\underline{\Sigma}_\beta$ qui s'explique par la prise en compte des effets capillaires. En différenciant (3.28) et (3.29), on a

$$\mathbb{C}^{hom} : d\mathbf{E} = d\boldsymbol{\Sigma} + \mathbf{B} (dp_g - dS_r p_c - p_c dS_r) - d\boldsymbol{\Sigma}_\beta \quad (3.30)$$

La relation ci-dessus montre que le terme $d\boldsymbol{\Sigma}_\beta$, associé aux variations de S_r , joue un rôle important dans le comportement macroscopique du matériau lors du remplissage ou du drainage. Pour pouvoir l'estimer, il est nécessaire d'introduire un autre modèle permettant de compléter le modèle mécanique présenté ci-dessus afin de rendre compte des effets capillaires. Pour cela on présente dans la suite les résultats d'un modèle capillaire du type de ceux présentés par Dullien [18, 32].

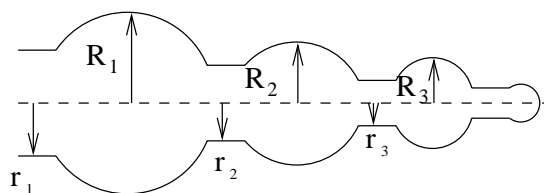


FIG. 3.6 – Modèle morphologique pour l'hystérésis capillaire

Sur la base du modèle mécanique, on suppose que le réseau poreux est constitué d'une succession de pores de rayon R_β décroissant reliés entre eux par des canaux de rayon r_β décroissant (voir Fig. 3.6). Si β^* représente la classe de pore se remplissant soit de liquide soit de gaz en fonction des variations de la saturation en liquide, on a

$$dS_r = -\frac{1}{n} \sum_{\beta^* \in \Omega_g} df_{\beta^*} \quad (3.31)$$

Le principe du modèle de Dullien est que lors du remplissage c'est le rayon du pore R_{β^*} qui détermine la valeur de la pression capillaire alors que lors du drainage c'est le rayon d'accès à ce pore r_{β^*} qui fixe la valeur de la pression capillaire (voir Fig. 3.7). On a donc

$$\text{Si } dS_r > 0 \quad : \quad p_c = \frac{2\gamma}{R_{\beta^*}}, \quad p_{\beta^*} = \frac{2\gamma}{R_{\beta^*}} \quad (3.32)$$

$$\text{Si } dS_r < 0 \quad : \quad p_c = \frac{2\gamma}{r_{\beta^*}}, \quad p_{\beta^*} = \frac{2\gamma}{R_{\beta^*}} \quad (3.33)$$

Compte tenu des relations (3.29) et (3.31), on obtient

$$d\Sigma_\beta = -\mathbf{B}p_{\beta^*}dS_r \quad (3.34)$$

En combinant les relations (3.30), (3.32), (3.33) et (3.34), on obtient la loi macroscopique suivante :

$$\begin{aligned} \text{Si } dS_r > 0 & : \delta\Sigma^* = \mathbb{C}^{hom} : d\mathbf{E} \\ \text{Si } dS_r < 0 & : \delta\Sigma^* - \mathbf{B}\Delta p_c(S_r)dS_r = \mathbb{C}^{hom} : d\mathbf{E} \end{aligned} \quad (3.35)$$

où l'on a posé :

$$\delta\Sigma^* = d\Sigma + (dp_g - S_r dp_c) \mathbf{B} \quad (3.36)$$

et où $\Delta p_c(S_r) = p_c(S_r, dS_r < 0) - p_c(S_r, S_r > 0)$ mesure l'hystérésis capillaire.

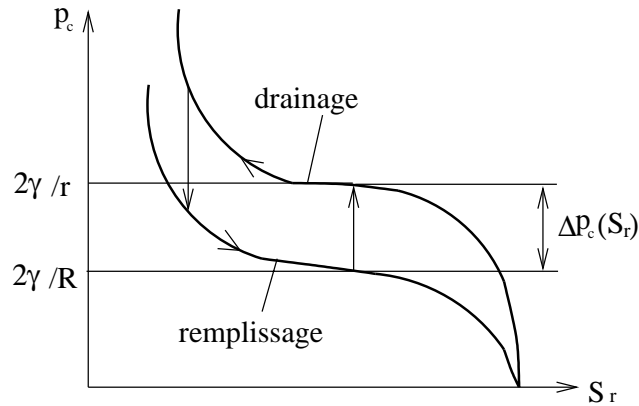


FIG. 3.7 – Hystérésis capillaire

3.2.2.2 Application au problème du séchage

Les résultats obtenus précédemment nous permettent de revenir à la modélisation des déformations induites par la désaturation du milieu poreux en prenant maintenant en compte les phénomènes d'hystérésis capillaire. En faisant $\Sigma = 0$, $p_g = 0$ dans (3.35) pour $dS_r < 0$, on obtient :

$$d(\text{tr } \mathbf{E}) = \left(\frac{1}{K} - \frac{1}{K^h} \right) (\Delta p_c(S_r) dS_r + S_r dp_c) \quad (3.37)$$

Dans le cas sans hystérésis ($\Delta p_c = 0$), la variation de volume est contrôlée par le signe de dp_c qui est généralement positif au séchage. Dans ce cas, le modèle prévoit un retrait lors du séchage du matériau et cela quelquesoit la forme de la courbe capillaire. On met ainsi en évidence que pour le cas où l'espace poreux est représenté par un ensemble de pores sphériques, le fait de négliger les effets de la tension superficielle peut conduire à des incohérences importantes par rapport à un calcul complet dans certains cas. Cette conclusion reste valable tant que les phénomènes hystérétiques restent faibles ($\Delta p_c < -S_r(dp_c/dS_r)$). Par contre si l'hystérésis devient important ($\Delta p_c > -S_r(dp_c/dS_r)$), le modèle prévoit alors un gonflement.

Comme dans le modèle précédent, c'est la courbe capillaire qui détermine le caractère gonflant ou au contraire contractant dans une expérience de séchage. Le chargement appliqué à la matrice solide lors d'une variation de la teneur en liquide de l'échantillon est dans ce cas légèrement différent de celui du modèle simplifié en raison des effets de la tension superficielle prise maintenant en compte dans les interfaces solide-fluide.

Il convient également de noter que pour ce modèle, la resaturation de l'échantillon à contrainte macroscopique nulle s'accompagne toujours d'un gonflement macroscopique.

3.3 Hétéromorphologie des phases fluides

Dans la suite de ce chapitre, on s'intéresse aux situations où les hypothèses formulées pour construire les deux modèles des sections 3.1 et 3.2 ne sont pas vérifiées. On distingue deux grandes classes de morphologie pour lesquelles il n'est pas possible de supposer que les domaines occupés par les phases fluides présentent les mêmes caractéristiques vis à vis de l'homogénéisation du comportement du milieu poreux non saturé.

Dans la première classe on regroupe les situations où il est encore possible de considérer que chacun des pores constituant l'espace poreux est occupé par une seule phase fluide, mais il n'est plus possible de négliger les différences morphologiques entre les pores (situation *a* sur la Fig. 3.9).

On range dans la seconde classe les configurations de milieux poreux non saturé où l'interface capillaire se trouve à l'intérieur des pores (situation *b* sur

la Fig. 3.9). A notre avis, cette situation est plus particulièrement pertinente pour les faibles valeurs de la saturation en liquide.

Il est bien clair que cette séparation des problèmes en deux classes parfaitement distinctes est tout à fait arbitraire et que pour pouvoir rendre compte du comportement d'un milieu poreux particulier dans toutes les situations, il est nécessaire de traiter des configurations où les deux situations sont présentes simultanément. On utilise néanmoins cette configuration pour exposer les résultats permettant de traiter chaque situation.

Il est clair que les modèles présentés dans les sections 3.1 et 3.2 appartiennent de fait à la première classe de configuration. Comme on l'a déjà montré, on peut rendre compte des phénomènes d'hystérésis non liés aux variations de l'angle de mouillage. Pour ce qui concerne la seconde classe de situation et dans la mesure où l'on néglige les phénomènes d'hystérésis de l'angle de mouillage, on se restreindra aux situations où les évolutions du système à l'échelle microscopique, et notamment celle des interfaces sont régulières. Dans ce cas, le comportement macroscopique du matériau poreux non saturé est réversible et aucun phénomène d'hystérésis capillaire ne peut être observé.

Une autre différence entre les deux classes porte sur les problèmes à résoudre pour identifier par homogénéisation le comportement macroscopique du matériau. Pour les problèmes appartenant à la première classe et dans la mesure où l'on néglige l'impact mécanique du réseau assurant la connectivité hydraulique du milieu poreux, l'interface capillaire est constituée uniquement de l'interface solide-liquide et de l'interface solide-gaz. Dans la mesure où chacune de ces deux interfaces est constituée des frontières des pores remplis respectivement par le liquide et le gaz, ces deux interfaces sont complètement définies dès que l'on connaît la répartition des phases fluides au sein de l'espace poreux.

Pour les problèmes relevant de la seconde classe, les pores sont remplis à la fois de liquide et de gaz. Au contraire du cas précédent, il est nécessaire dans ce cas de déterminer la forme de l'interface liquide-gaz pour pouvoir résoudre le problème. Ce problème particulier a été discuté dans le chapitre 2 de ce mémoire, chapitre au cours duquel on a également donné les solutions pour certaines formes particulières.

On donne maintenant les résultats généraux permettant de traiter les situations relevant de chacune des deux classes décrites plus haut.

3.3.1 Estimation de la précontrainte macroscopique en utilisant la solution d'Eshelby

Pour un milieu poreux non saturé, si l'on sépare l'espace poreux en N classes distinctes, la précontrainte macroscopique se calcule en fonction de la moyenne des contraintes microscopiques pondérées par les tenseurs de localisation dans chaque classe de pore :

$$\Sigma^p = \sum_{i=1}^N f_i \langle {}^T\mathbb{A} : \boldsymbol{\sigma}^p \rangle_i \quad (3.38)$$

Prenons ici un milieu poreux particulier dont tous les pores sont de forme ellipsoïdale. De plus, la porosité est supposée assez faible pour que le champ de déformation qui s'établit dans l'inclusion de forme ellipsoïdale soit uniforme lorsqu'une sollicitation en déformation homogène est imposée à l'infini [33, 34]. On en déduit alors l'uniformité du tenseur de localisation sur le domaine occupé par chaque pore ellipsoïdal. La relation permettant le calcul de la précontrainte macroscopique (3.38) se simplifie donc en

$$\Sigma^p = \sum_{i=1}^N f_i {}^T\mathbb{A}_i : \langle \boldsymbol{\sigma}^p \rangle_i \quad (3.39)$$

Compte tenu du fait que la formule (3.39) a été obtenue à condition que la porosité soit suffisamment faible pour que les pores ellipsoïdaux restent ellipsoïdaux, on utilisera le schéma dilué pour calculer les grandeurs \mathbb{A}_i intervenant dans (3.39). Dans ce cadre, l'estimation de la valeur du tenseur de localisation pour les pores ellipsoïdaux ayant déjà été présentée dans le chapitre précédent, il reste juste à déterminer la moyenne de la précontrainte à l'échelle microscopique dans chacun des pores.

3.3.1.1 $\boldsymbol{\sigma}^p$ uniforme par phase

Pour un milieu poreux non saturé du type (a) dans lequel chacune des phases fluides occupe complètement un pore (voir Fig.3.9.a), le champ de précontrainte à l'intérieur de chacun des pores est uniforme à condition de négliger la contribution des termes de membrane. La relation (3.39) s'écrit dans ce cas :

$$\Sigma^p = \sum_{i=1}^N f_i {}^T\mathbb{A}_i : \boldsymbol{\sigma}^p \quad (3.40)$$

En utilisant le fait que le tenseur de précontrainte est égale à p_ℓ dans les pores occupés par la phase liquide est égale à p_g dans les pores occupés par la phase gazeuse, on obtient à partir de (3.46) la relation

$$\Sigma^p = -\mathbf{B}p_g + \sum_{i=1}^N f_i^T \mathbf{A}_i : \delta p_c \quad (3.41)$$

où \mathbf{B} se calcule grâce à la relation (1.60). On généralise ainsi le modèle de la section 3.1 à des situations où il n'y a pas isomorphologie des domaines fluides. Dans ce cas on peut directement déterminer Σ^p sans aucun problème.

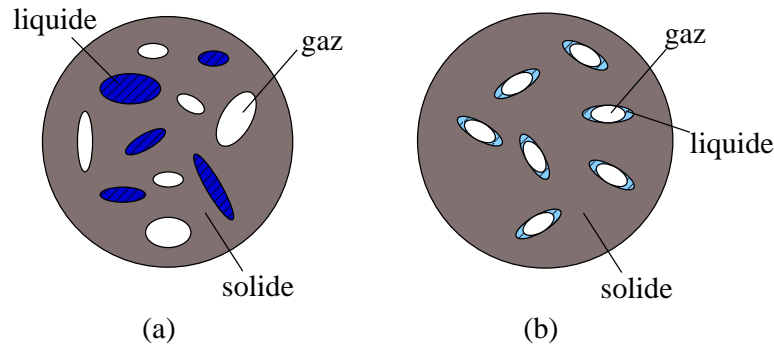


FIG. 3.8 – Morphologies de phases fluides dans des pores ellipsoïdaux

3.3.1.2 σ^p non uniforme par phase

Pour un milieu poreux non saturé du type (b) pour lequel l'interface entre la phase liquide et la phase gazeuse se trouve à l'intérieur des pores (voir Fig.3.9.b), le champ σ^p n'est pas uniforme sur le domaine occupé par chaque pore. On peut utiliser deux approches pour calculer la moyenne de la précontrainte dans les pores : la méthode analytique et la méthode numérique.

La première a été présentée dans le chapitre 2. On peut calculer la moyenne de précontrainte dans un pore ellipsoïdal par les équations (2.70), (2.71), (2.72), (2.73) et (2.74) dans le cadre de l'approximation toroïdale.

Pour l'approche numérique, en utilisant les résultats donnés dans [17] concernant la modélisation mécanique des systèmes mixtes membrane-milieu continu, et comme les efforts à l'intérieur de chacun des pores vérifient en chaque point les équations d'équilibre sans force de volume, on montre le résultat suivant :

($\forall \hat{u}$ vérifiant $\hat{u} = \hat{\mathbf{E}}_p \cdot \underline{x}$ sur $\partial\Omega_i^p$)

$$|\Omega_i^p| \langle \boldsymbol{\sigma}^p \rangle_i : \hat{\mathbf{E}}_p = \int_{\Omega_i} \boldsymbol{\sigma}^p : \hat{\boldsymbol{\varepsilon}} d\Omega = \int_{\partial\Omega_i} (\boldsymbol{\sigma}^p \cdot \underline{n}) \cdot \underline{\hat{\xi}}(\hat{\mathbf{E}}_p) dS \quad (3.42)$$

avec :

$$\langle \boldsymbol{\sigma}^p \rangle_i = -f_i^\ell p_\ell \boldsymbol{\delta} - f_i^g p_g \boldsymbol{\delta} + \frac{1}{|\Omega_i^p|} \int_{\omega_i} \gamma \boldsymbol{\delta}_{T_\omega(\underline{x})} dS \quad (3.43)$$

En utilisant la relation (3.42), on peut calculer $\langle \boldsymbol{\sigma}^p \rangle_i$ et puis $\boldsymbol{\Sigma}^p$ grâce à (3.39) valorisant la connaissance des efforts appliqués par les phases fluides et interfaces sur la frontière solide du pore.

Dans le cas particulier où la moyenne de la précontrainte à l'échelle microscopique est la même dans chacun des pores constituant l'espace poreux, en utilisant la propriété $\langle \mathbb{A} \rangle = \mathbb{I}$ et la relation (3.15), on montre que la relation (3.39) s'écrit alors :

$$\boldsymbol{\Sigma}^p = (\mathbb{I} - \mathbb{C}^{hom} : \mathbb{S}^s) : \langle \boldsymbol{\sigma}^p \rangle \quad (3.44)$$

Enfin, on notera que si l'on souhaite prendre en compte les termes de membrane dans le calcul de $\boldsymbol{\Sigma}^p$ pour un matériau du type représenté sur la Fig. 3.9, il suffit d'appliquer les relations (3.42), (3.43) et (3.44).

3.3.2 Estimation de précontraintes macroscopiques en utilisant les motifs morphologiques représentatifs (M. M. R.)

On vient de présenter la méthode d'estimation des précontraintes macroscopiques pour des pores ellipsoïdaux dans le cas des faibles porosités. Dans la suite on considère le cas plus général où la forme des pores ainsi que la valeur de la porosité ne vérifient aucune propriété particulière. Dans ce cas, la précontrainte macroscopique d'un milieu poreux peut se calculer en fonction des contraintes microscopiques en utilisant la relation :

$$\boldsymbol{\Sigma}^p = \sum_{i=1}^N f_i \langle {}^T\mathbb{A} : \boldsymbol{\sigma}^p \rangle_i \quad (3.45)$$

3.3.2.1 σ^p uniforme par phase

Pour un milieu poreux saturé ou un milieu poreux non saturé du type (a) pour lequel chacun des pores (de forme quelconque) constituant l'espace poreux est saturé par une unique phase fluide (voir Fig.3.9.b), et si l'on néglige de nouveau les termes de membrane, le champ de précontrainte à l'intérieur de chacun des pores est uniforme. La relation (3.45) s'écrit alors :

$$\Sigma^p = \sum_{i=1}^N f_i \langle T_{\mathbb{A}} \rangle_i : \sigma^p \quad (3.46)$$

Dans ce cas on peut directement déterminer Σ^p en utilisant les résultats présentés dans la section 1.4 consacrée à l'estimation de \mathbb{C}^{hom} , car on a seulement besoin de la valeur estimée de $\langle T_{\mathbb{A}} \rangle_i$ qui peut être obtenue soit par voie analytique pour les pores sphériques ou ellipsoïdaux soit par voie numérique pour les pores d'autres formes.

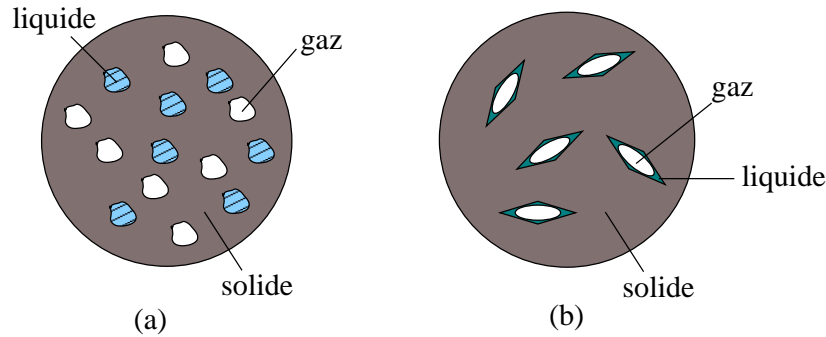


FIG. 3.9 – Morphologies de milieux poreux non saturés

3.3.2.2 σ^p non uniforme par phase

Pour un milieu poreux non saturé du type (b) où l'interface entre la phase liquide et la phase gazeuse se trouve à l'intérieur des pores (voir Fig.3.9.b), ou un matériau du type (a) avec prise en compte des termes de membrane dans le calcul de Σ^p , le champ σ^p n'est pas uniforme sur le domaine occupé par chaque pore. Toutefois il est autoéquilibré à l'intérieur de chaque pore. On a donc (au sens des distributions)

$$\operatorname{div} \sigma^p = 0 \quad (3.47)$$

Pour calculer les précontraintes macroscopiques dans cette situation, on utilise de nouveau les deux problèmes (P') et (P'') considérés pour démontrer le théorème de Levin présentés dans la section 1.2. Compte tenu des relations (1.47), (1.48) ainsi que (1.49), on a :

$$\Sigma^p : \mathbf{E} = \langle \boldsymbol{\sigma}^p : \boldsymbol{\varepsilon}' \rangle \quad (3.48)$$

avec $\Sigma^p = \langle {}^T \mathbb{A} : \boldsymbol{\sigma}^p \rangle$. On rappelle que $\boldsymbol{\varepsilon}'$ désigne le champ de déformation microscopique associé à \mathbf{E} dans le cas sans précontrainte.

L'équation (3.48) peut se réécrire :

$$\forall \underline{\xi}', \quad \langle \boldsymbol{\sigma}^p : \boldsymbol{\varepsilon}' \rangle = \frac{1}{|\Omega|} \int_{\Omega} \boldsymbol{\sigma}^p : \boldsymbol{\varepsilon}' d\Omega = \frac{1}{|\Omega|} \int_{\Omega} \boldsymbol{\sigma}^p : \frac{\partial \underline{\xi}'}{\partial \underline{x}} d\Omega \quad (3.49)$$

Partant de l'équation (3.49), en utilisant le théorème de Gauss et l'équation (3.47), on obtient :

$$\Sigma^p : \mathbf{E} = \frac{1}{|\Omega|} \int_{\partial\Omega^p} (\boldsymbol{\sigma}^p \cdot \underline{n}) \cdot \underline{\xi}' dS \quad (3.50)$$

où \underline{n} désigne la normale intérieure au domaine solide unitaire à $\partial\Omega^p$, $\underline{\xi}'$ le champ de déplacement à la frontière du pore associé à \mathbf{E} dans le cas sans précontrainte. En vertu de (3.50), il faut donc calculer $\int_{\partial\Omega^p} (\boldsymbol{\sigma}^p \cdot \underline{n}) \cdot \underline{\xi}' dS$ pour estimer Σ^p . Afin d'estimer ce terme, on propose d'utiliser de nouveau le problème auxiliaire défini pour estimer \mathbb{C}^{hom} .

En procédant comme pour calculer \mathbb{C}^{hom} , on applique un chargement en déformation homogène \mathbf{E}^* à la frontière de la structure considérée pour poser le problème auxiliaire. Dans le cas des faibles porosités, si l'on utilise le schéma dilué, la déformation appliquée \mathbf{E}^* étant prise égale à la déformation macroscopique du v.e.r. (\mathbf{E}), le champ de déplacement à la frontière du pore occasionné par le chargement \mathbf{E}^* est donc égal à $\underline{\xi}'$. Le calcul du terme $\int_{\partial\Omega^p} (\boldsymbol{\sigma}^p \cdot \underline{n}) \cdot \underline{\xi}' dS$ par une méthode numérique se pose aucun problème dans ce cas. En revanche, pour un schéma de Mori-Tanaka et un schéma auto-cohérent, la déformation appliquée \mathbf{E}^* étant différente de la déformation macroscopique du v.e.r. (\mathbf{E}), le champ de déplacement à la frontière du pore associé au chargement \mathbf{E}^* n'est donc pas égal à $\underline{\xi}'$. En conséquence, le calcul du terme $\int_{\partial\Omega^p} (\boldsymbol{\sigma}^p \cdot \underline{n}) \cdot \underline{\xi}' dS$ ne peut donc pas être mené directement à partir de la solution du problème auxiliaire. On ne cherche pas dans ce travail à proposer des extensions permettant de traiter ces situations. Dans la suite, on présente l'application de ces résultats à quelques situations particulières.

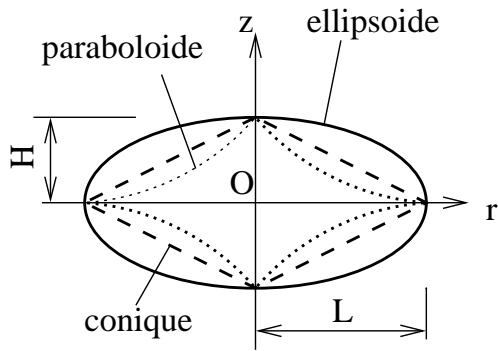


FIG. 3.10 – Morphologie du pore

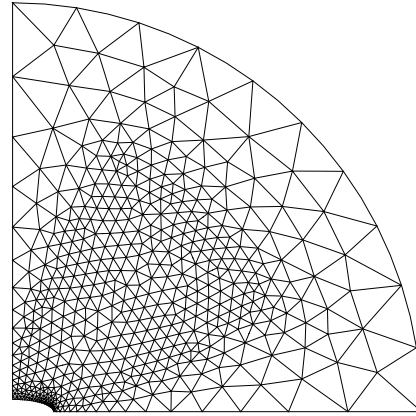


FIG. 3.11 – Maillage du problème auxiliaire (pore ellipsoïdal)

3.3.3 Application au problème du séchage

On choisit de nouveau d'illustrer les résultats théoriques présentés ci-dessus en calculant les déformations volumiques provoquées par le séchage à contrainte nulle prévues pour différents matériaux. Comme dans la première partie de ce chapitre, on suppose que la température est constante et que la contrainte macroscopique est nulle. En faisant $\Sigma = 0$ dans la relation (3.14), on montre que la variation de la déformation volumique est égale à

$$\text{tr } \mathbf{E} = -\text{tr} [(\mathbb{C}^{hom})^{-1} : \Sigma^p] \quad (3.51)$$

Pour déterminer \mathbb{C}^{hom} et Σ^p , on utilise les résultats du chapitre 1, relations (1.96), (1.110) pour un schéma dilué ainsi que la relation (3.50).

On considère ici trois matériaux dont la phase solide est constituée d'un matériau élastique linéaire isotrope et dont l'espace poreux est constitué de pores symétriques de révolution dont le profil radial est respectivement ellipsoïdal, conique et parabolique [Fig.3.10]. Pour simplifier le problème on admet que pour chaque matériau, les pores ont tous les mêmes caractéristiques géométriques (taille) et sont orientés de la même façon. Sous ces hypothèses le comportement macroscopique de ces trois matériaux est élastique linéaire isotrope transverse.

Les paramètres utilisés dans les calculs sont les suivants : porosité $n = 5\%$; hauteur des pores $H = 0.03mm$; rayon des pores $L = 0.1mm$; module d'Young $E = 1Gpas$; coefficient de Poisson $\nu = 0.2$; tension superficielle $\gamma = 0.072N/m$.

Comme pour l'estimation des caractéristiques élastiques drainées de ces matériaux, s'il est possible de traiter analytiquement le cas où les pores sont des ellipsoïdes de révolution, la méthode des éléments finis est utilisée pour estimer les grandeurs nécessaires dans les deux autres situations. Pour résoudre le problème auxiliaire, on considère un domaine constitué d'un unique pore inclus dans un milieu solide dont la frontière à *l'infini* est sphérique. Compte tenu du fait que l'on ne s'intéresse ici qu'à la déformation volumique des matériaux, il suffit de résoudre un problème bidimensionnel axisymétrique pour calculer toutes les composantes du tenseur d'élasticité macroscopique \mathbb{C}^{hom} et celles de la précontrainte macroscopique Σ^p influant sur la déformation volumique. Des éléments du type triangle à 6 nœuds ont été utilisés dans les approches par éléments finis. La [Fig.3.11] représente le maillage du problème auxiliaire pour le pore ellipsoïdal. Les deux chargements du type axisymétrique en déformation homogène à considérer pour calculer \mathbb{C}^{hom} et Σ^p sont : $\mathbf{E}_1 = \underline{e}_r \otimes \underline{e}_r$ et $\mathbf{E}_2 = \underline{e}_z \otimes \underline{e}_z$.

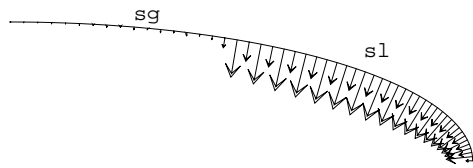


FIG. 3.12 – Forces des phases fluides

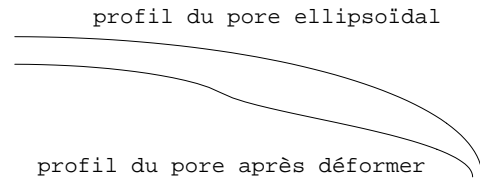


FIG. 3.13 – Déformation du pore ellipsoïdal

Les résultats d'estimation des composantes du tenseur d'élasticité macroscopique pour les matériaux considérés sont présentés dans le tableau (3.1).

matériau	$C_{xxx}^{hom} + C_{xyy}^{hom} (Gpas)$	$C_{zzz}^{hom} (Gpas)$	$C_{xxz}^{hom} = C_{zzx}^{hom} (Gpas)$
ellipsoïde	1.278	0.835	0.224
conique	1.261	0.599	0.173
paraboloïde	1.200	0.097	0.051

TAB. 3.1 – Composantes du tenseur d'élasticité macroscopique

Pour le calcul des précontraintes macroscopiques, on connaît déjà les courbes moyennes pour ces trois types des pores (voir annexe II). Par ailleurs, il est légitime ici d'utiliser l'approximation toroïdale dont la validité est démontrée dans le deuxième chapitre de ce mémoire. Il est alors facile de déterminer les sollicitations imposées au solide par la phase liquide et par la phase gazeuse. Sur la figure [Fig.3.12], on a représenté les forces imposées sur le bord

du pore ellipsoïdal par les phases fluides¹. La déformée du pore correspondant à ce chargement est représentée sur la figure [Fig.3.13]. On observe que le profil du pore n'est plus ellipsoïdal sous la sollicitation des phases fluides.

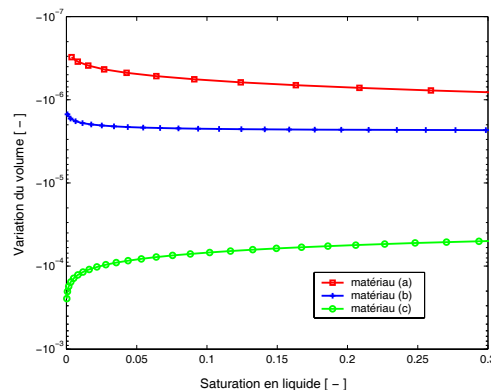
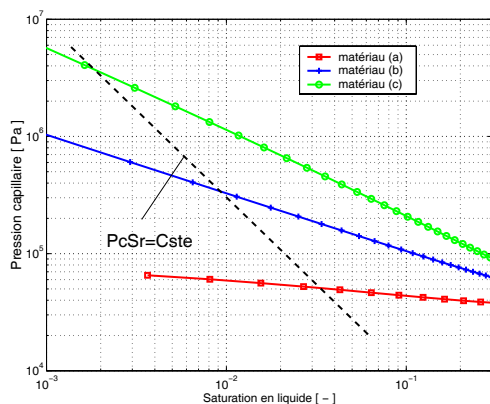


FIG. 3.14 – Courbes de pression capillaire
FIG. 3.15 – Courbes de variation de volume

Les résultats obtenus sont présentés sur la [Fig.3.14] et sur la [Fig.3.15]. On peut observer deux tendances différentes : un gonflement pour les deux premiers matériaux tandis que le dernier matériau se rétracte lorsqu'il est soumis à une désaturation. Ces résultats peuvent s'expliquer en invoquant les deux phénomènes couplés décrits pour le modèle simplifié. Comme pour les deux modèles construits en s'appuyant sur l'hypothèse d'isomorphologie des domaines occupés par les phases fluides, c'est la courbe de la pression capillaire qui pilote le sens des variations de volume lors du séchage. On constate ainsi que les augmentations de la pression capillaire pour le dernier matériau sont beaucoup plus fortes que pour les deux premiers. Comme dans les cas précédents, l'accroissement de la pente de la courbe capillaire d'un milieu à l'autre accompagne bien sur le passage d'un comportement dilatation au séchage à un comportement contractant. Il convient également de noter que la transition d'un comportement à l'autre ne se produit manifestement pas par référence aux courbes d'équation $p_c S_r = Cste$ (voir Fig. 3.14).

¹On a représenté sur la Fig. 3.12 les forces nodales associées à la pression répartie appliquée le long de la frontière du pore. Comme on utilise ici des éléments quadratiques, on obtient une alternance de petites forces et de grandes forces bien que la pression appliquée varie de façon monotone.

3.4 Matériau périodique

Pour conclure ce chapitre consacré à l'homogénéisation des milieux poreux non saturé à matrice solide élastique linéaire, on s'intéresse au cas des matériaux périodiques. On souhaite ainsi vérifier la pertinence des tendances observées dans les pages précédentes. En effet, les résultats exposés jusqu'à présent ont été obtenus en utilisant des méthodes d'estimation du comportement développées au départ pour traiter les comportements de matériaux solides hétérogènes. Il est normal de s'interroger sur la pertinence des développements proposés pour traiter des milieux non saturés.

Pour des matériaux possédant une propriété de périodicité spatiale, on dispose de méthodes permettant de déterminer exactement le comportement macroscopique du matériau dès lors que les hypothèses classiques de convergence sont vérifiées (rapport taille de la cellule de base sur taille du v.e.r. tendant vers zéro). Au prix d'une hypothèse forte sur les propriétés mécaniques du matériau étudié, on peut donc disposer d'informations certaines pour le comportement macroscopique du matériau et cela pour une large gamme de comportement [2, 3].

En résolvant les mêmes problèmes que ceux traités dans le cas désordonné pour des situations périodiques et en comparant les résultats obtenus pour ces deux situations (du moins en tendance), on souhaite donc démontrer la pertinence des approches développées ici.

3.4.1 Homogénéisation périodique en élasticité

On considère une structure constituée d'un matériau élastique poreux périodique. Partant des éléments donnés dans le chapitre consacré à l'homogénéisation des milieux hétérogènes linéaires élastiques périodiques (1.1.3), et en procédant exactement de la même façon que pour le cas désordonné, on montre que le comportement de ce matériau dans le cas non saturé s'écrit sous la forme :

$$\Sigma = \mathbb{C}^{hom} : \mathbf{E} + \Sigma^p \quad (3.52)$$

où \mathbb{C}^{hom} , le module d'élasticité drainé se calcule en fonction du tenseur de localisation pour les déformations \mathbb{L} :

$$\mathbb{C}^{hom} = (1 - n)\mathbb{C}^s : \langle \mathbb{L} \rangle_s \quad (3.53)$$

et où Σ^p se calcule grâce à l'énoncé (1.52) du théorème de Levin, qui s'écrit dans ce cas particulier

$$\Sigma^p = n \langle {}^T\mathbb{L} : \sigma^p \rangle_p \quad (3.54)$$

où σ^p désigne toujours le champ des tenseurs de précontrainte permettant de rendre compte des efforts intérieurs dans les phases fluides et dans les surfaces capillaires. Il convient de garder à l'esprit que pour que la formule (3.54) soit valable, il est nécessaire que le champ σ^p soit lui aussi périodique. On aborde ensuite le calcul de la précontrainte macroscopique pour un milieu poreux non saturé dans le cas périodique.

3.4.2 Calcul de la précontrainte macroscopique

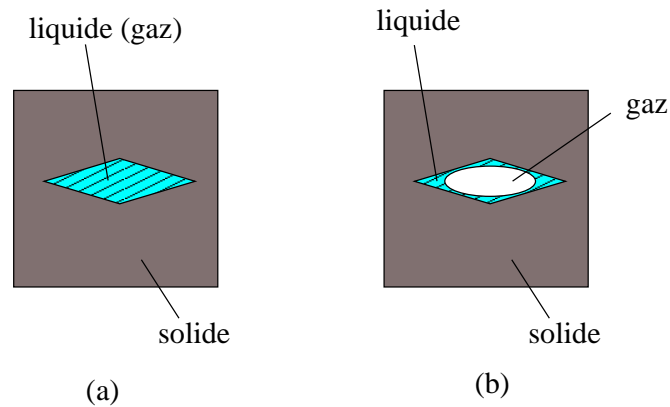


FIG. 3.16 – Morphologie des milieux poreux périodiques non saturé

3.4.2.1 σ^p uniforme par phase

Pour un milieu poreux périodique saturé ou non saturé du type (a) (Fig. 3.16), le champ de précontrainte σ^p à l'intérieur de chacun des pores est uniforme à condition de négliger les termes de membrane. La relation (3.54) s'écrit alors :

$$\Sigma^p = n \langle {}^T\mathbb{L} \rangle : \sigma_p^p \quad (3.55)$$

Dans ce cas, pour calculer Σ^p il suffit de connaître la moyenne du tenseur de localisation $\langle \underline{T} \rangle$ du pore qui peut être obtenue en résolvant numériquement le problème posé sur la cellule de base. Cela ne pose aucune difficulté.

3.4.2.2 σ^p non uniforme par phase

Pour un milieu poreux périodique non saturé du type (b) (Fig. 3.16), le champ de précontrainte σ^p à l'intérieur de chacun des pores n'est pas uniforme. En procédant exactement de la même manière que pour le cas désordonné présenté dans 3.3.2.2, on montre que la précontrainte macroscopique d'un milieu poreux périodique dans le cas non saturé se calcule par la formule suivante :

$$\Sigma^p : \mathbf{E} = \frac{1}{|C|} \int_{\partial C^p} (\sigma^p \cdot \underline{n}) \cdot \underline{\xi}' dS \quad (3.56)$$

Le terme $\int_{\partial C^p} (\sigma^p \cdot \underline{n}) \cdot \underline{\xi}' dS$ peut être obtenu numériquement en résolvant le problème posé sur la cellule de base.

Avant d'aborder le problème de séchage, on rappelle dans la suite brièvement comment résoudre le problème de localisation en pratique. En effet, lorsque la géométrie de la cellule de base et le chargement imposé présentent un nombre suffisant de symétries, il est possible de poser le problème de localisation sur une partie de la cellule de base au lieu de la cellule de base entière. Cela permet de diminuer significativement le temps de résolution du problème par la méthode des éléments finis.

3.4.3 Condition de symétrie

On traite le cas où la cellule de base possède trois plans de symétrie orthogonaux. En utilisant les conditions de symétrie, on peut poser le problème sur le huitième de la cellule de base au lieu de la cellule de base entière [10].

La cellule de base occupe le parallélépipède rectangle défini par :

$$\Omega = \prod_{i=1}^3 \left[-\frac{L_i}{2}, +\frac{L_i}{2} \right] \quad (3.57)$$

Le huitième de cette cellule de base occupe donc le domaine :

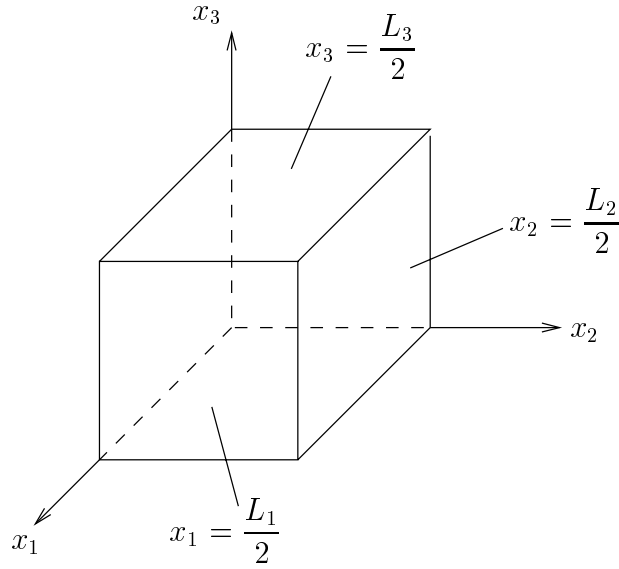


FIG. 3.17 – Huitième de la cellule de base

$$\tilde{\Omega} = \prod_{i=1}^3 \left] 0, +\frac{L_i}{2} \right[\quad (3.58)$$

Le champ de déplacement périodique $\underline{\xi}'$ et le champ de contrainte $\underline{\sigma}$ des solutions du problème possèdent les propriétés suivantes [10] :

- si $\mathbf{E} = E_{11} \underline{e}_1 \otimes \underline{e}_1 + E_{22} \underline{e}_2 \otimes \underline{e}_2 + E_{33} \underline{e}_3 \otimes \underline{e}_3$, alors :

$$\underline{\xi}'_N = 0, \underline{\sigma}_T = 0 \quad \text{sur } \partial\tilde{\Omega} \quad (3.59)$$

où $\underline{\xi}'_N$ désigne la composante normale de $\underline{\xi}'$, $\underline{\sigma}_T$ la contrainte tangentielle, $\partial\tilde{\Omega}$ la frontière du domaine occupé par le huitième de la cellule de base.

- si $\mathbf{E} = E_{ij} (\underline{e}_i \otimes \underline{e}_j + \underline{e}_j \otimes \underline{e}_i)$, pour $i \neq j$, alors :

$$\begin{cases} \underline{\xi}'_T = 0, \underline{\sigma}_N = 0 & \text{sur les plans } x_i = 0, x_i = \frac{L_i}{2} \text{ et } x_j = 0, x_j = \frac{L_j}{2} \\ \underline{\xi}'_N = 0, \underline{\sigma}_T = 0 & \text{sur le plan } x_k = 0, x_i = \frac{L_k}{2} \text{ pour } k \neq i, j \end{cases} \quad (3.60)$$

où $\underline{\xi}'_T$ désigne la composante tangentielle de $\underline{\xi}'$.

3.4.4 Application au problème du séchage

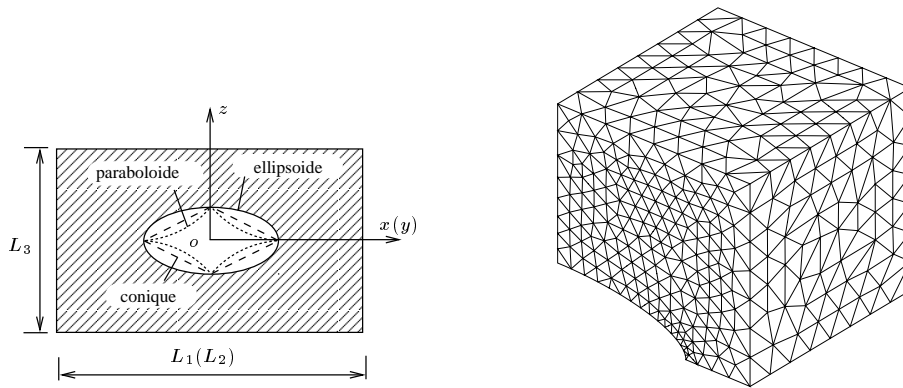


FIG. 3.18 – Profil des cellules de base

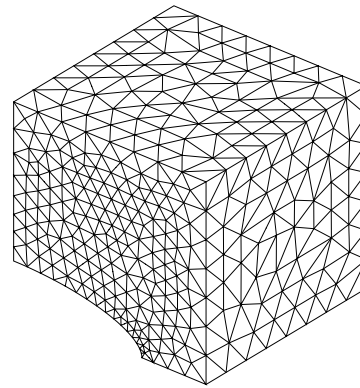


FIG. 3.19 – Maillage de la cellule de base (pore ellipsoïdal)

On considère maintenant trois types de matériaux à microstructure périodique dont les cellules de base sont des parallélépipèdes rectangles. Au centre de celles-ci, les profils des pores sont respectivement ellipsoïdal, conique et parabolique [Fig.3.18]. Les valeurs de la porosité, les profils radiaux des pores ainsi que les caractéristiques de la phase solide sont identiques à celles prises pour les calculs précédents. Les longueurs, hauteurs et largeurs des trois cellules de base ont été choisies de façon à obtenir une même valeur de la porosité pour les trois matériaux. Les valeurs sont les suivantes : pour le matériau à pores ellipsoïdaux $L_1 = L_2 = 0.3\text{mm}$, $L_3 = 0.28\text{mm}$; pour le matériau à pores coniques $L_1 = L_2 = 0.3\text{mm}$, $L_3 = 0.14\text{mm}$; pour le matériau à pores paraboliques $L_1 = L_2 = 0.26\text{mm}$, $L_3 = 0.092\text{mm}$.

D'après les conditions de symétrie présentées ci-dessus, on maille seulement un huitième des cellules de base. Le maillage tridimensionnel (en éléments tétraédriques à 10 nœuds) de la cellule de base du pore ellipsoïdal est

représenté sur la [Fig. 3.19]. Les trois chargements imposés en déformation macroscopique sont : $\mathbf{E}_1 = \underline{e}_x \otimes \underline{e}_x$, $\mathbf{E}_2 = \underline{e}_y \otimes \underline{e}_y$ et $\mathbf{E}_3 = \underline{e}_z \otimes \underline{e}_z$.

Les résultats numériques des composantes du tenseur d'élasticité macroscopique sont représentés sur le tableau (3.2) (unité en *Gpas*). Ils sont symétriques par rapport aux couples d'indices (*ij*) et (*kl*). Comparant ces résultats avec ceux obtenus par l'approche micromécanique, on constate qu'ils sont du même ordre de grandeur.

matériau	$C_{xxxx}^{hom} = C_{yyyy}^{hom}$	C_{zzzz}^{hom}	C_{xxyy}^{hom}	$C_{xxzz}^{hom} = C_{yyzz}^{hom}$
ellipsoïde	1.032	0.880	0.252	0.228
conique	1.028	0.807	0.246	0.206
paraboïde	1.013	0.067	0.023	0.016

TAB. 3.2 – Composantes du tenseur d'élasticité macroscopique dans le cas périodique

Pour calculer la précontrainte macroscopique, on utilise la relation (3.56).

Les courbes de variation de volume des trois matériaux lors du séchage à contrainte macroscopique nulle sont présentées sur la [Fig. 3.20]. On constate de nouveau les mêmes tendances que pour les résultats obtenues par la méthode d'estimation. C'est à dire un gonflement au séchage pour les deux premiers matériaux et un retrait au séchage pour le dernier. Cela démontre encore une fois non seulement la validité de la méthode d'estimation, mais aussi l'influence des caractéristiques morphologiques de l'espace poreux sur le signe des déformations volumiques de séchage.

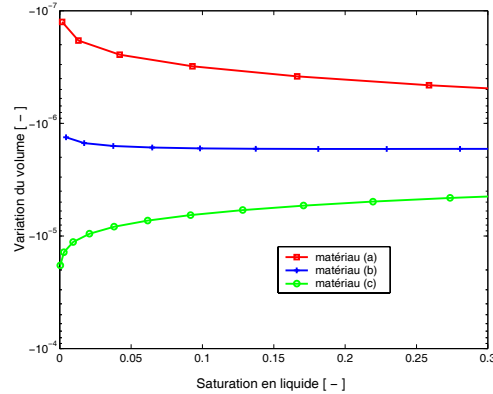


FIG. 3.20 – Variation de volume dans le cas périodique

3.5 Conclusion

Dans ce chapitre, on a présenté la modélisation d'un milieu poreux non saturé dans le cas d'isomorphologie des phases fluides et celui d'hétéromorphologie des phases fluides. On a démontré que les morphologies des phases fluides jouent un rôle important au plan de la modélisation d'un milieu poreux non saturé. En particulier, on a démontré que le signe de la déformation volumique d'un milieu poreux non saturé occasionnée par le séchage à l'échelle macroscopique est déterminée par la corbe de la pression capillaire lorsque le milieu soumis à une contrainte nulle en condition isotherme.

Chapitre 4

Homogénéisation des milieux mésofissurés non saturés

On s'intéresse ici à des milieux poreux dont la phase solide est encore constituée d'un matériau élastique linéaire mais dont la porosité est formée de microfissures, c'est à dire de pores dont l'une dimension est très faible comparée aux deux autres. Pour aborder cette situation particulière, il est nécessaire de s'interroger sur la validité des hypothèses formulées pour construire la méthode d'homogénéisation linéaire "classique" utilisée dans les chapitres 1 et 3. Ainsi, il est maintenant bien connu que l'hypothèse des petits déplacements n'est pas valable dans ce cas et qu'il est nécessaire de procéder à une approche incrémentale prenant l'état actuel comme configuration de référence pour résoudre le problème de changement d'échelle [45]. Dans ce cadre, il a été notamment montré que dans le cas où les fissures ne se propageaient pas et ne se refermaient pas, le comportement à l'échelle macroscopique est encore linéaire quand on prend en compte les non linéarités géométriques à l'échelle microscopique. Ce résultat a également été établi dans le cas saturé, où l'on obtient alors un comportement macroscopique poroélastique linéaire [59]. Une analyse micromécanique du comportement non linéaire d'un milieu poreux fissuré dans le cas sec et dans le cas saturé est proposée dans [28, 29, 30]. Il a été montré que le comportement non linéaire observé lors d'une expérience de compression isotrope drainée pouvait être relié à une fermeture progressive des fissures en fonction de l'accroissement de la pression de confinement.

Dans ce chapitre, on s'intéresse au comportement d'un matériau mésofissuré dans le cas non saturé. Comme dans les deux chapitres précédents, on s'intéresse aux spécificités du comportement liés à la présence simultanée de

plusieurs fluides au sein de l'espace poreux ainsi qu'à l'existence des membranes capillaires. Dans ce cadre, on suppose donc que les fissures restent toujours ouvertes et ne se propagent pas. Comme on l'a déjà mentionné, le tenseur d'élasticité macroscopique du matériau n'est pas modifié lors que l'on prend en compte les changements de géométrie des fissures. La non linéarité du comportement du matériau non saturé étudié ici sera donc occasionnée le cas échéant par les variations du champ de précontrainte dans les fissures ou par le couplage entre ces efforts capillaires et les changements de géométrie des fissures.

Pour mener à bien cette étude, on rappelle tout d'abord brièvement comment estimer le tenseur d'élasticité homogénéisé d'un solide fissuré à partir des caractéristiques élastiques du matériau constitutif de la matrice solide et des propriétés morphologiques de l'espace poreux constitué des fissures.

On donne ensuite les éléments permettant d'étendre la démarche aux cas où les fissures sont saturées par deux fluides immiscibles. Pour cela on utilise les éléments de modélisation permettant de rendre compte des efforts liés à la présence des fluides dans les fissures exposés au chapitre 2, puis on généralise la démarche développée pour la situation saturée dans le cas linéaire dans [59] au cas non saturé.

Pour finir, on propose une modélisation visant à prendre en compte les couplages entre déformations de la matrice solide et répartition des phases fluides au sein des fissures.

Les résultats de cette approche peuvent être appliqués pour traiter du comportement de différents matériaux comme les bétons [35] et les roches réservoirs [28].

4.1 Estimation du comportement du matériau fissuré sec

On considère un volume élémentaire représentatif de matériau solide fissuré occupant le domaine Ω de frontière $\partial\Omega$. La phase solide constituée d'un matériau élastique linéaire, occupe le domaine Ω_s tandis que les fissures occupent le domaine Ω_p , complémentaire de Ω_s dans Ω . Pour simplifier, on suppose que la frontière du domaine Ω est uniquement constituée de particules solides et que le matériau constitutif de la phase solide est homogène de tenseur d'élasticité \mathbb{C}_s . Toutes ces hypothèses nous permettent de reprendre de nouveau les résultats présentés dans la section 1.1.4 pour un matériau po-

reux sec. La loi de comportement à l'échelle macroscopique pour le matériau fissuré considéré ici s'écrit alors

$$\Sigma = \langle \sigma \rangle = \mathbb{C}^{hom} : \mathbf{E} \quad (4.1)$$

avec

$$\mathbb{C}^{hom} = (1 - n)\mathbb{C}_s : \mathbb{A}_s = \mathbb{C}_s : (\mathbb{I} - n\mathbb{A}_p) \quad (4.2)$$

Dans la suite de ce travail, on assimile les fissures à des cavités ellipsoïdales symétriques de révolution autour de leur petit axe comme dans [30, 57] (voir Fig. 4.1). Elles sont classées en N classes.

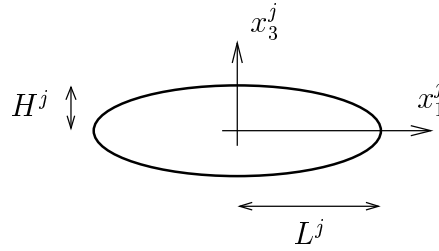


FIG. 4.1 – Fissure ellipsoïdale

On adopte ici un schéma dilué, pertinent pour les situations où la densité de fissure est suffisamment faible et les fissures sont assez éloignées [16] les unes des autres pour que les interactions entre elles soient négligeables. La contribution de chaque classe de fissures au tenseur de localisation \mathbb{A}_p est estimée en utilisant la solution d'Eshelby [33] pour une fissure immergée dans un milieu élastique infini homogène d'élasticité \mathbb{C}_s soumis à l'infini à la déformation macroscopique \mathbf{E} . Dans ce cas, la déformation $\boldsymbol{\varepsilon}^j$ qui s'établit dans chaque fissure de la classe j est uniforme sur le domaine occupé par la fissure et dépend linéairement de la déformation imposée à l'infini. On a donc

$$\boldsymbol{\varepsilon}^j = (\mathbb{I} - \mathbb{P}^j : \mathbb{C}_s)^{-1} : \mathbf{E} \quad (4.3)$$

où \mathbb{P}^j est un tenseur du quatrième ordre dépendant de la forme et de l'orientation de la fissure ainsi que de la valeur du tenseur \mathbb{C}_s . Le tenseur de localisation pour les fissures de la classe j s'écrit alors

$$\mathbb{A}_p^j = \mathbb{I} - \mathbb{P}^j : \mathbb{C}_s \quad (4.4)$$

En reportant 4.4 dans 4.2, on obtient l'estimation du tenseur d'élasticité homogénéisé suivante

$$\mathbb{C}^{hom} = \mathbb{C}_s : \left(\mathbb{I} - \sum_{j=1}^N f^j (\mathbb{I} - \mathbb{P}^j : \mathbb{C}_s)^{-1} \right) \quad (4.5)$$

où f^j désigne la fraction volumique occupée par chaque classe de fissures.

Chaque famille de fissures est caractérisée par son rayon L^j , sa hauteur H^j ainsi que son orientation. La fraction volumique correspondant à chaque famille de fissures est égale à :

$$f^j = \frac{4}{3} \pi L^j{}^2 H^j D^j \quad (4.6)$$

où D^j désigne la densité volumique de fissures d'une même famille.

En introduisant le paramètre de densité de fissures $\varepsilon^j = D^j L^j{}^3$, la fraction volumique f^j peut s'écrire aussi :

$$f^j = \frac{4}{3} \pi X^j \varepsilon^j \quad (4.7)$$

avec $X^j = \frac{H^j}{L^j}$, désignant le facteur d'aspect des fissures.

En reportant (4.7) dans (4.5), la relation (4.5) s'écrit maintenant

$$\mathbb{C}^{hom} = \mathbb{C}_s : \left(\mathbb{I} - \sum_{j=1}^N \frac{4}{3} \pi X^j \varepsilon^j (\mathbb{I} - \mathbb{P}^j : \mathbb{C}_s)^{-1} \right) \quad (4.8)$$

Le facteur d'aspect X^j étant très petit devant 1, on peut utiliser le fait que le groupement $X^j (\mathbb{I} - \mathbb{P}^j : \mathbb{C}_s)^{-1}$ admet une limite, notée \mathbb{T}^j , quand X^j tend vers zéro [28, 57]. Cette limite ne dépend que de l'orientation des fissures et des modules d'élasticité de la phase solide. Dans le repère local $(\underline{e}_1, \underline{e}_2, \underline{e}_3)$ attaché à chacune des fissures où \underline{e}_3 désigne la direction de la normale à la fissure, les coefficients du tenseur \mathbb{T} sont :

$$\begin{aligned}
 T_{1111} &= T_{2222} = 0 \\
 T_{3333} &= \frac{4(1-\nu)^2}{\pi(1-2\nu)} \\
 T_{1122} &= T_{2211} = T_{1133} = T_{2233} = 0 \\
 T_{3311} &= T_{3322} = \frac{4(1-\nu)\nu}{\pi(1-2\nu)} \\
 T_{1212} &= T_{1221} = T_{2121} = T_{2112} = 0 \\
 T_{2323} &= T_{2332} = T_{3223} = T_{3232} = \frac{2(1-\nu)}{\pi(2-\nu)} \\
 T_{1313} &= T_{1331} = T_{3113} = T_{3131} = \frac{2(1-\nu)}{\pi(2-\nu)}
 \end{aligned} \tag{4.9}$$

où ν désigne le coefficient de Poisson de la matrice solide. Du fait qu'il n'y a pas de couplage entre une extension et un cisaillement ou entre deux cisaillements de couplages de directions différents, les autres coefficients (T_{1112} , T_{1123} , T_{2311} , T_{1223} etc.) sont nuls.

La relation (4.8) s'écrit alors

$$\mathbb{C}^{hom} = \mathbb{C}_s : \left(\mathbb{I} - \sum_{j=1}^N \frac{4}{3} \pi \epsilon^j \mathbb{T}^j \right) \tag{4.10}$$

écriture qui montre qu'au premier ordre, le tenseur d'élasticité \mathbb{C}^{hom} ne dépend pas du rapport d'aspect des fissures, mais uniquement de leur orientation. Les propriétés de la relation (4.3) assurent que sous l'action de la déformation \mathbf{E} appliquée à l'infini, les fissures restent des ellipsoïdes de révolution. La prise en compte du couplage entre l'ouverture des fissures et la déformation macroscopique ne modifie donc pas la perception macroscopique du comportement du solide fissuré qui reste linéaire tant que les fissures restent ouvertes et ne se propagent pas.

On considère le cas où les fissures ont toutes le même rapport d'aspect et sont distribuées de façon isotrope à l'intérieur du v.e.r. De plus, la matrice solide est elle-même constituée d'un matériau isotrope. Dans cette situation, le comportement macroscopique du matériau est alors élastique linéaire isotrope, caractérisé par le module de cisaillement μ^{hom} et le coefficient de compressibilité k^{hom} . La somme dans la relation (4.10) peut s'écrire :

$$\sum_{j=1}^N \frac{4}{3} \pi \epsilon^j \mathbb{T}^j = \epsilon \mathbb{Q} \tag{4.11}$$

où ε désigne le paramètre de densité de fissures du milieu considéré, défini par $n = 4/3\pi X\varepsilon$, \mathbb{Q} un tenseur du quatrième ordre, fonction uniquement du coefficient de Poisson de la matrice solide. Dans le repère global $(\underline{E}_1, \underline{E}_2, \underline{E}_3)$, les composantes du tenseur \mathbb{Q} sont [28] :

$$\begin{aligned} Q_{iiii} &= A * D \quad \text{avec } i = 1, 2, 3 \\ Q_{iijj} &= B * D \quad \text{avec } i = 1, 2, 3 \quad \text{et } i \neq j \\ Q_{ijij} &= C * D \quad \text{avec } i = 1, 2, 3 \quad \text{et } i \neq j \end{aligned} \quad (4.12)$$

avec :

$$\begin{aligned} A &= \nu^2 - 13\nu + 10 & B &= 3\nu(3 - \nu) \\ C &= 2\nu^2 - 11\nu + 5 & D &= \frac{16(1 - \nu)}{45(2 - \nu)(1 - 2\nu)} \end{aligned} \quad (4.13)$$

Les autres composantes du tenseur \mathbb{Q} sont toutes nulles.

En introduisant (4.11) dans (4.10) et en utilisant la relation (4.12), on obtient les deux coefficients caractéristiques

$$\mu^{hom} = \mu(1 - \beta) \quad \text{avec} \quad \beta = \frac{32}{45}\varepsilon \frac{(5 - \nu)(1 - \nu)}{2 - \nu} \quad (4.14)$$

et

$$k^{hom} = k(1 - b) \quad \text{avec} \quad b = \frac{16}{9}\varepsilon \frac{1 - \nu^2}{1 - 2\nu} \quad (4.15)$$

où μ et k désignent respectivement le module de cisaillement et le module de compressibilité du matériau constituant la matrice solide.

4.2 Matériau fissuré non saturé - Cas linéaire [23]

On s'intéresse maintenant aux situations où l'espace poreux à l'intérieur des fissures est occupé par deux fluides immiscibles, un liquide et un gaz. On fait l'hypothèse que les fissures sont interconnectées entre elles, sans que cette propriété ne modifie la pertinence de la méthode d'estimation qui vient d'être présentée.

Comme pour le cas du milieu poreux non saturé étudié dans la section 3.1, les efforts à l'intérieur des fissures sont constitués d'une part des champs de pression au sein de chacun des fluides et d'autre part des champs d'effort de membrane définis sur les surfaces séparant deux à deux les domaines occupés par chacune des trois phases solide, liquide et gazeuse.

Par ailleurs, la description de ces efforts est exactement identique à celle présentée dans la section 3.1. Dans le cas où la phase solide est constituée d'un matériau solide élastique linéaire et où les couplages géométriques peuvent être négligés, en utilisant de nouveau les résultats de la section 3.1, on peut montrer que la loi de comportement macroscopique pour un matériau fissuré dans le cas non saturé s'écrit

$$\Sigma = \mathbb{C}^{hom} : \mathbf{E} + \Sigma^p \quad (4.16)$$

avec

$$\Sigma^p = \langle \sigma^p : \mathbb{A} \rangle = \sum_{j=1}^N \langle \sigma^p : \mathbb{A} \rangle^j \quad (4.17)$$

où $\langle \cdot \rangle^j$ désigne l'opérateur de moyenne sur le domaine occupé par les fissures de la classe numéro j .

Dans la situation diluée traitée ici, les interactions entre fissures étant négligeables, le tenseur de localisation est uniforme pour chacune des fissures. En procédant de la même façon que pour obtenir l'estimation de \mathbb{C}^{hom} ci-dessus, en introduisant (4.4) et (4.7) dans (4.17) et en utilisant le fait que $X^j (\mathbb{I} - \mathbb{P}^j : \mathbb{C}_s)^{-1}$ tend vers \mathbb{T}^j quand $X^j \rightarrow 0$, on obtient l'estimation de la précontrainte macroscopique dans le cas dilué :

$$\Sigma^p = \sum_j \frac{4}{3} \pi \varepsilon^j \langle \sigma^p \rangle^j : \mathbb{T}^j \quad (4.18)$$

Il reste donc à calculer la moyenne du champ de précontrainte dans chacune des classes de fissures pour identifier complètement la loi de comportement macroscopique. Pour cela, on peut utiliser les relations (2.69), (2.71), (2.72), (2.73) et (2.74).

4.2.1 Effets capillaires dans un pore ellipsoïdal aplati

On s'intéresse ici au cas où l'influence des déformations de l'interface pore-solide sur la moyenne des efforts de précontrainte dans la fissure est négligée. Par souci de simplicité, on se restreint aux situations où la phase

liquide mouille parfaitement le solide ($\eta = 0$) et où la tension superficielle dans l'interface solide-liquide est nulle. Pour éviter d'alourdir les notations, on étudie ici le cas générique d'une fissure occupant un ellipsoïde de révolution de rayon L et de hauteur $H = XL$.

On suppose naturellement que la répartition des phases fluides au sein de chacune des fissures vérifie la propriétés de symétrie cylindrique autour du petit axe des fissures. La résolution de ce problème s'effectue dans le cadre de l'approximation toroïdale présentée dans la section 2.3, qui consiste à assimiler l'intersection de l'interface liquide-gaz avec un plan radial contenant le petit axe de l'ellipsoïde par un cercle de rayon r_1 et dont le centre se trouve dans le plan Ox_1x_3 à une distance r_2 de l'axe Ox_3 [Fig. 4.2].

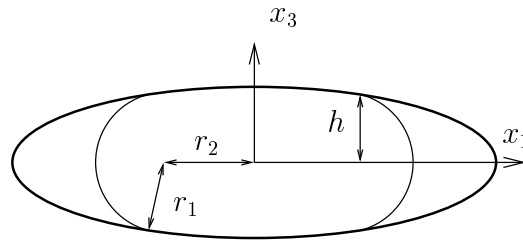


FIG. 4.2 – Fissure non saturée

En utilisant la relation (2.65), on peut calculer la pression capillaire. La saturation en liquide peut être calculée par les relations (2.66) et (2.68).

Les courbes capillaires donnant p_c en fonction de S_r pour différentes valeurs du rapport d'aspect X sont tracées sur la [Fig. 4.3]. Pour toutes les valeurs du rapport d'aspect, on montre que la pression capillaire est une fonction décroissante puis croissante de la saturation. Il convient donc d'étudier plus en détail les propriétés mécaniques de ce système avant de se prononcer sur son comportement réel. Comme on néglige les déformations de la phase solide, le système constitué des phases fluides et des interfaces capillaires à pression capillaire imposée est un système conservatif pour lequel une analyse classique de stabilité peut être mise en œuvre [36]. On montre alors que dans des expériences d'imbibition-drainage à pression capillaire imposée, la branche croissante de la courbe $p_c(S_r)$ est instable.

En toute rigueur, il convient donc de prendre en compte la partie croissante de la courbe $p_c(S_r)$ dans une analyse distinguant chemin de drainage (obtenu en augmentant régulièrement la pression capillaire à partir de l'état saturé à pression capillaire nulle) et chemin d'imbibition (correspondant à l'application d'une pression capillaire décroissante jusqu'à la valeur nulle).

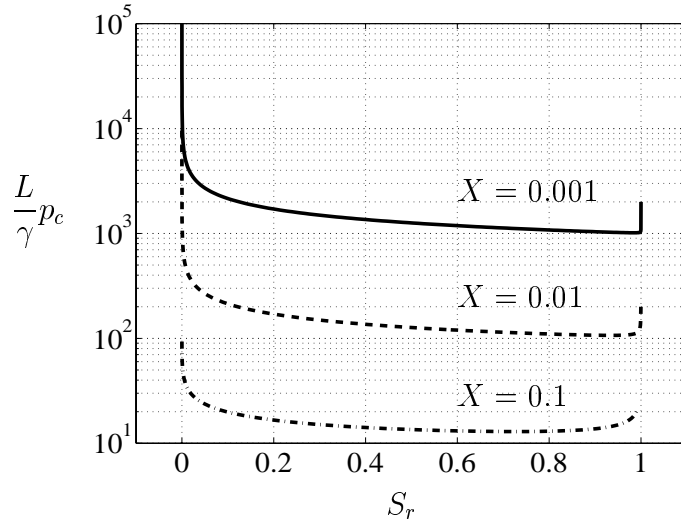


FIG. 4.3 – Courbes capillaires pour trois rapports d’aspect différents

On obtient alors pour chaque pore une courbe de pression capillaire présentant un hystérésis.

Dans une expérience de drainage à partir de l’état saturé, il est nécessaire d’augmenter la pression capillaire jusqu’à la pression d’entrée d’air notée p_c^{ea} pour qu’une interface capillaire puisse se former à l’intérieur du pore. La valeur de la pression d’entrée d’air est déterminée par les rayons des canaux reliant les pores. Ici, pour fixer les idées, on suppose que les rayons des canaux sont du même ordre de grandeur que la hauteur H de la fissure. La valeur de p_c^{ea} est alors égale $2\gamma/XL$. Une fois cette valeur de la pression capillaire atteinte, on observe un « saut » de la saturation de la valeur $S_r = 1$ jusqu’à la valeur S_r' telle $p_c(S_r') = p_c^{ea} = 2\gamma/XL$ (courbe de gauche sur la Fig. 4.4).

De la même façon, dans une expérience d’imbibition, il est nécessaire de diminuer la pression capillaire jusqu’à la valeur p_c^{min} correspondant au point le plus bas de la courbe capillaire pour pouvoir revenir à l’état complètement saturé. Ce retour à l’état saturé donne également lieu à un « saut » de la saturation de la valeur S_r^{min} jusqu’à $S_r = 1$. Evidemment, on observera un comportement beaucoup moins marqué dans le cas d’un matériau tel qu’il existe plusieurs hauteurs de fissures ou mieux une répartition continue des hauteurs de fissures.

Si cette analyse paraît pertinente pour des situations où la partie croissante de la courbe capillaire est bien séparée de la droite d’équation $S_r = 1$ (cas des rapports d’aspect proches de l’unité), l’observation d’état saturé

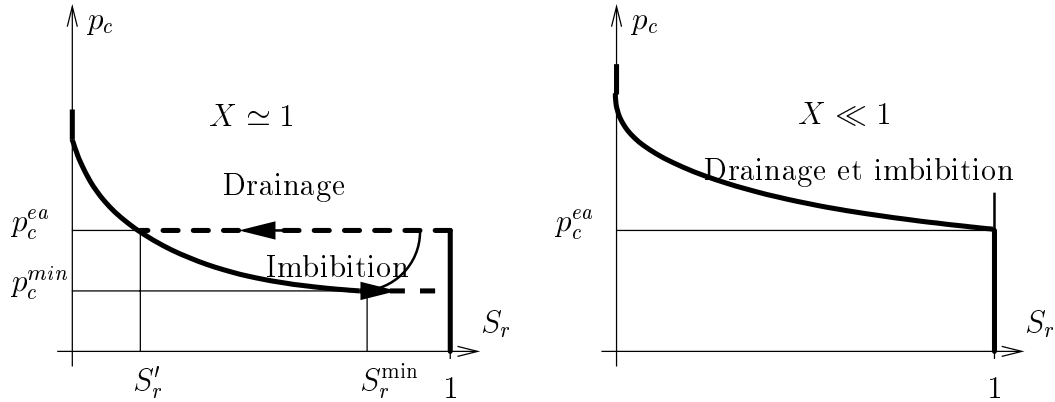


FIG. 4.4 – Courbes capillaires avec et sans hystérésis

pour des valeurs de la pression capillaire strictement supérieures à la valeur correspondante au point le plus bas de la courbe $p_c(S_r)$ devient beaucoup moins probable quand la branche instable se rapproche de la courbe $S_r = 1$ (cas des faibles valeurs du rapport d'aspect : S_r^{\min} tend vers 1 quand X tend vers zéro).

Pour justifier cette affirmation, on admet comme dans que la formation d'une bulle de gaz à l'intérieur de la fissure est un processus thermiquement activé [61, 69]. Dans ce cas, la probabilité w de former une interface capillaire à l'intérieur du pore lors du drainage est calculée par [47]

$$w \sim \exp(-R_{\min}/T) \quad (4.19)$$

où R_{\min} désigne le saut d'énergie qui doit être franchi pour former une interface capillaire à l'intérieur du pore et T la température. Comme la température est supposée constante, ce saut d'énergie est donc égal à la variation d'énergie potentielle (notée ΔE) à franchir pour passer de l'état saturé (état A') à l'état correspondant au point le plus bas (état C) de la courbe $p_c(S_r)$.

Cette barrière d'énergie ΔE est égale à l'aire grisée représentée sur la courbe de la Fig. 4.5. Pour la calculer, on distingue deux contribution E_1 et E_2 telle que $\Delta E = V_p E_1 + V_p E_2$ avec V_p le volume du pore. E_1 désigne l'aire sous la courbe d'équation paramétrique $p_c = 2\gamma/r$, $S_r = r^3/XL^3$, avec r compris entre 0 et H et au dessus de la droite d'équation $p_c = p_c^{\min}$. E_2 désigne l'aire sous la courbe $p_c(S_r)$ entre le point B et le point C et au dessus de la droite d'équation $p_c = p_c^{\min}$. Les morphologies des phases fluides dans un pore pour les quatre états (A' , A , B , C) sont représentées sur la [Fig. 4.6].

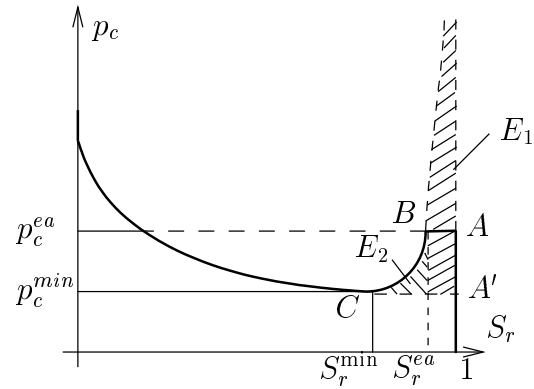


FIG. 4.5 – Saut d'énergie potentielle à franchir pour passer de l'état saturé (A') à l'état correspondant au point le plus bas (C) de la courbe $p_c(S_r)$ par unité de volume poreux (aire grisée)

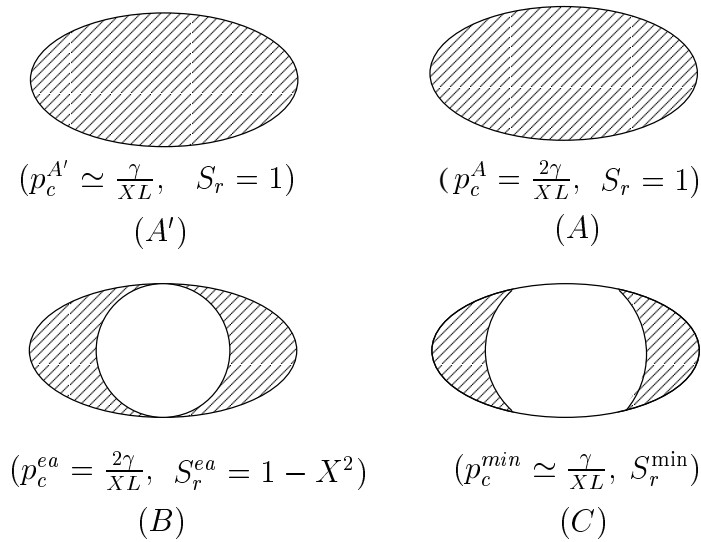


FIG. 4.6 – Morphologies des phases fluides correspondant aux états A' , A , B et C

Pour construire la courbe en pointillé permettant de relier le point B à la droite d'équation $S_r = 1$, on a considéré le cas d'une bulle de gaz sphérique pour des rayons compris entre 0 (point appartenant à la courbe $S_r = 1$ atteint quand p_c tend vers l'infini) et XL (on retrouve alors le point B sur la courbe capillaire). Quand X tend vers zéro, la valeur p_c^{min} correspondant au point le plus bas de la courbe capillaire est approximativement égale à $p_c^{min} = \gamma/XL$. E_1 est alors calculée par

$$E_1 = (p_c^{ea} - p_c^{min})(1 - S_r^{ea}) + \int_{S_r^{ea}}^1 (p_c - p_c^{ea})dS_r = 2\gamma X/L \quad (4.20)$$

De l'état B à l'état C , le calcul de la pression capillaire s'effectue dans le cadre de l'approximation toroïdale, avec

$$p_c = \frac{\gamma}{L}\bar{p}_c = \frac{\gamma}{L}f(X) \quad (4.21)$$

E_2 est calculée alors par

$$E_2 = \int_{S_r^{min}}^{S_r^{ea}} (p_c - p_c^{min})dS_r = \gamma F(X)/L \quad (4.22)$$

La variation d'énergie ΔE est alors :

$$\Delta E = \frac{4}{3}\pi\gamma L^2(2X^2 + XF(X)) \quad (4.23)$$

D'après les résultats numérique (par exemple $X = 0.01$, $XF(X) = 2.0e - 3$; $X = 0.001$, $XF(X) = 1.1e - 4$; $X = 0.0001$, $XF(X) = 5.2e - 6$), on montre que le terme $XF(X)$ dans (4.23) est une fonction croissante du rapport d'aspect X qui tend vers zéro quand X tend vers zéro.

On peut donc conclure que le saut d'énergie potentielle à franchir pour passer de l'état saturé (état A') à l'état correspondant au point B est une fonction croissante du rapport d'aspect. Lors que les autres paramètres sont fixés, ΔE tend vers zéro quand X tend vers zéro.

Compte tenu de l'équation (4.19), la probabilité de former une interface capillaire étant une fonction décroissante du saut d'énergie à franchir pour former cette interface, il en résulte que la probabilité que cette barrière soit franchie pour une pression égale à la pression p_c^{min} tend vers 1 quand X tend

vers 0. On ne retient donc que la partie décroissante de la courbe $p_c(S_r)$ dans ce cas. La courbe capillaire ne présente pas d'hystérésis et la valeur de la pression p_c^{ea} pour laquelle se forme l'interface capillaire correspond au point le plus bas de cette courbe (courbe de droite sur la Fig. 4.4).

Dans la mesure où on ne s'intéresse ici qu'au comportement des milieux fissurés, c'est cette dernière interprétation de la courbe $p_c(S_r)$ que l'on retient.

4.2.2 Cas des fissures

En reportant dans les formules (2.65) et (2.68) l'approximation $X \ll 1$, on obtient les relations suivantes pour la courbe capillaire

$$p_c = \frac{\gamma}{LX} \frac{1}{\cos \varphi_0} \quad S_r = \cos^3 \varphi_0 \quad (4.24)$$

Dans le repère local attaché à chacune des fissures, en reportant $X \ll 1$ dans la relation (2.68) et en supposant toujours que la pression dans la phase gazeuse est nulle, on obtient la moyenne des efforts de précontrainte dans le pore, égale au premier ordre à

$$\langle \sigma^p \rangle = \frac{\gamma}{LX} \left(\frac{3 - \cos^2 \varphi_0}{2} (\underline{e}_1 \otimes \underline{e}_1 + \underline{e}_2 \otimes \underline{e}_2) + \cos^2 \varphi_0 \underline{e}_3 \otimes \underline{e}_3 \right) \quad (4.25)$$

Sur les figures [Fig. 4.7] et [Fig. 4.8], on représente les erreurs relatives entre les solutions de l'approximation toroïdale et les résultats obtenus par les relations (4.24) et (4.25). La contrainte équivalente calculée ici représente la partie sphérique de la moyenne du tenseur de contrainte dans le pore. On constate que les résultats obtenus par les relations (4.24) et (4.25) fournissent une très bonne précision pour la pression capillaire, la saturation en liquide ainsi que la contrainte équivalente lorsque le rapport d'aspect X tend vers zéro.

En toute rigueur, les formules (4.24) et (4.25) issues d'un développement limité en $1/X$ ne sont pas valables pour les valeurs de φ_0 tendant vers zéro. Néanmoins, sur les figures [Fig. 4.7] et [Fig. 4.8], on montre qu'elles donnent une excellente approximation du comportement le long de la branche stable du diagramme de pression capillaire $p_c(S_r)$, y compris au voisinage de l'état saturé, obtenu en $\varphi_0 = 0$.

En combinant les relations (4.24) et (4.25), on obtient la composante σ_p de $\langle \sigma^p \rangle$ selon $\underline{e}_3 \otimes \underline{e}_3$

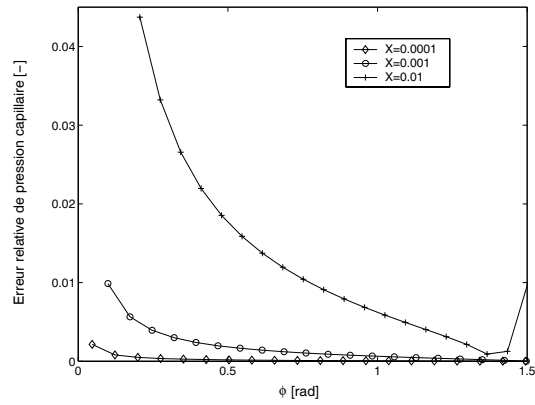


FIG. 4.7 – Comparaison des résultats du premier ordre et des solutions de l'approximation toroïdale (pression capillaire)

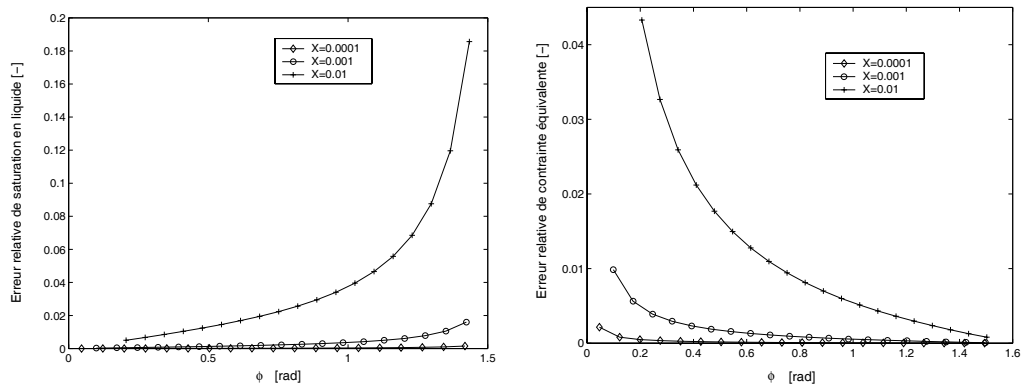


FIG. 4.8 – Comparaison des résultats du premier ordre et des solutions de l'approximation toroïdale (saturation en liquide et contrainte équivalente)

$$\sigma_p = \frac{\gamma \cos^2 \varphi_0}{LX} = \frac{\gamma^3}{L^3 X^3} \frac{1}{p_c^2} \quad (4.26)$$

4.2.3 Déformation de séchage du matériau fissuré isotrope

On revient ici au problème d'homogénéisation pour le solide fissuré. Dans le cas où les fissures ont toutes le même rayon L , le même rapport d'aspect, admettent une répartition d'orientation isotrope et où la phase solide est elle-même isotrope, en étendant la méthode utilisée dans [28] on introduit les deux angles d'Euler $\theta = [0, \pi]$ et $\phi = [0, 2\pi]$ définissant l'orientation de la normale unitaire à la fissure \underline{e}_3 . On montre que la relation (4.18) s'écrit dans le repère global $(\underline{E}_1, \underline{E}_2, \underline{E}_3)$ attaché au v.e.r. sous la forme :

$$\Sigma^p = \frac{1}{3} X \int_{\theta=0}^{\theta=\pi} \int_{\phi=0}^{\phi=2\pi} \sin \theta \langle \sigma^p \rangle (\theta, \phi) : \mathbb{T}(\theta, \phi) d\theta d\phi \quad (4.27)$$

Pour déterminer Σ^p , il faut procéder au changement de base classique du repère local $(\underline{e}_1, \underline{e}_2, \underline{e}_3)$ vers le repère global $(\underline{E}_1, \underline{E}_2, \underline{E}_3)$, qui s'écrit

$$\begin{cases} \underline{e}_1 = \sin \phi \underline{E}_1 - \cos \phi \underline{E}_2 \\ \underline{e}_2 = -\cos \theta \cos \phi \underline{E}_1 - \cos \theta \sin \phi \underline{E}_2 + \sin \theta \underline{E}_3 \\ \underline{e}_3 = \sin \theta \cos \phi \underline{E}_1 + \sin \theta \sin \phi \underline{E}_2 + \cos \theta \underline{E}_3 \end{cases} \quad (4.28)$$

Après intégration on montre que la précontrainte macroscopique est égale à :

$$\Sigma^p = \sigma_p b \delta \quad (4.29)$$

où b est encore défini par (4.14).

Dans une expérience de séchage sous contrainte macroscopique nulle, la pression dans la phase gazeuse est nulle. La déformation prévue selon (4.16) par ce modèle est sphérique et s'écrit $\mathbf{E} = E \delta$ avec :

$$E = -\frac{b}{3k^{hom}} \sigma_p = -\frac{b}{3k(1-b)} \frac{\gamma^3}{L^3 X^3} \frac{1}{p_c^2} \quad (4.30)$$

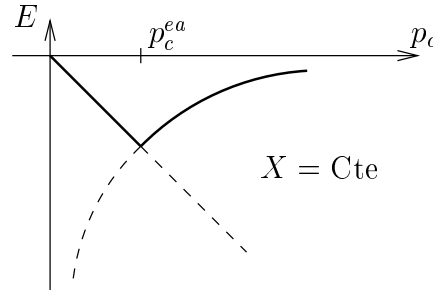


FIG. 4.9 – Séchage du milieu fissuré - cas linéaire

Cette expression n'est valable que dans les situations où les phases gazeuse et liquide se trouvent simultanément à l'intérieur des fissures. En se reportant aux conclusions de l'analyse qui a été menée à la section 4.2.1 et donc à la relation (4.24) il apparaît qu'une interface capillaire ne peut se former à l'intérieur des fissures pour des valeurs de la pression capillaire inférieures à $p_c^{ea} = \gamma/LX$. La quantité p_c^{ea} définit donc la valeur de la pression d'entrée de la phase gazeuse dans les fissures.

Pour mener une expérience de séchage à contrainte macroscopique nulle à partir de l'état de référence saturé, on soumet le matériau à une augmentation de la pression capillaire à partir de la valeur zéro. Tant que la pression capillaire reste inférieure à la pression d'entrée de la phase gazeuse dans les fissures, celles-ci restent saturées par la phase liquide à la pression $-p_c$ et la moyenne du tenseur des précontraintes dans les fissures est égale à $p_c\delta$. En reportant ce résultat dans la première égalité de (4.30), on établit que durant cette phase, E est une fonction linéaire décroissante de la pression capillaire p_c . Un comportement contractant au séchage est donc observé. Pour les valeurs de la pression capillaire supérieures à p_c^{ea} , la déformation du v.e.r. est maintenant contrôlée par la seconde équation (4.30). Durant cette seconde phase, le séchage du matériau sous contrainte macroscopique nulle s'accompagne d'une dilatation qui ramène le v.e.r. dans sa configuration initiale, les fissures étant finalement saturées par la phase gazeuse. Par rapport à l'état de référence (état naturel sans précontrainte capillaire), on note que durant tout le processus de séchage la déformation macroscopique est négative (retrait).

La courbe de la [Fig. 4.9] résume les résultats qui viennent d'être décrits. Cependant, la section suivante va démontrer que l'existence d'une phase dilatante au cours du séchage prévue par le présent modèle peut être remise en cause par la prise en compte des variations du rapport d'aspect X .

4.3 Prise en compte des non linéarités géométriques [23]

A la différence de la section précédente, on s'intéresse à présent à l'effet des variations du rapport d'aspect des fissures sur le comportement macroscopique du matériau tout en écartant l'éventualité d'une refermeture totale des fissures. La prise en compte de ce changement de géométrie impose de travailler de façon incrémentale. La loi de comportement à l'échelle microscopique s'écrit maintenant

$$(\forall \underline{x} \in \Omega) \quad d\boldsymbol{\sigma} = \mathbb{C}(\underline{x}) : d\boldsymbol{\varepsilon}(\underline{x}) + d\boldsymbol{\sigma}^p(\underline{x}) \quad (4.31)$$

En reproduisant exactement le même raisonnement qu'à la section 4.2, on montre qu'à l'échelle macroscopique, on a la loi de comportement incrémentale

$$d\boldsymbol{\Sigma} = \mathbb{C}^{hom} : d\mathbf{E} + d\boldsymbol{\Sigma}^p \text{ avec } d\boldsymbol{\Sigma}^p = \sum_j \frac{4}{3} \pi \varepsilon^j \langle d\boldsymbol{\sigma}^p \rangle^j : \mathbb{T}^j \quad (4.32)$$

où \mathbb{C}^{hom} est toujours donné par (4.10). On rappelle que l'état de référence est l'état naturel dans lequel $\boldsymbol{\Sigma} = \boldsymbol{\Sigma}^p = 0$. A la condition que les fissures restent des ellipsoïdes, l'intégration de la relation (4.32) à partir de l'état de référence fournit immédiatement l'équation de comportement macroscopique sous la forme

$$\boldsymbol{\Sigma} = \mathbb{C}^{hom} : \mathbf{E} + \boldsymbol{\Sigma}^p \text{ avec } \boldsymbol{\Sigma}^p = \sum_j \frac{4}{3} \pi \varepsilon^j \langle \boldsymbol{\sigma}^p \rangle^j : \mathbb{T}^j \quad (4.33)$$

La validité de la démarche conduisant à (4.33) repose sur la possibilité d'approcher à chaque instant la forme de la fissure par un modèle ellipsoïdal. Cette propriété est classiquement vérifiée en l'absence d'efforts capillaires. Cependant, en présence d'un chargement capillaire considéré ici, il s'agit d'une première approche de la prise en compte de l'évolution de la géométrie des fissures. De la même façon, on admet que les conclusions de l'analyse présentée à la section 4.2.1 restent pertinentes même si la déformabilité de la phase solide n'est plus négligée ici.

On note que les expressions (4.18) et (4.33) de $\boldsymbol{\Sigma}^p$ sont identiques. Par ailleurs, on a déjà noté que l'estimation de \mathbb{C}^{hom} n'est pas modifiée si l'on

prend en compte les variations du rapport d'aspect. Ces résultats s'expliquent par le fait que le calcul de \mathbb{C}^{hom} et celui de Σ^p font intervenir le groupement $X(\mathbb{I} - \mathbb{P}^j : \mathbb{C}_s)^{-1}$ qui est indépendant de X^j dans le domaine $X^j \ll 1$.

La différence essentielle avec la section 4.2 réside dans le fait que l'on prend désormais en compte les variations du rapport d'aspect X^j dans le calcul de $\langle \sigma^p \rangle^j$.

4.3.1 Changement géométrique des fissures

Le calcul des variations du rapport d'aspect passe par celui des déformations locales dans les fissures associée à la déformation macroscopique et à la précontrainte locale. Ce dernier peut être obtenue à partir de la solution d'Eshelby (1.76), même si la précontrainte dans ce cas n'est pas homogène dans la fissure. Supposons tout de même dans la suite que l'effet de la précontrainte sur la forme du pore puisse être raisonnablement estimé en remplaçant le champ de précontrainte par sa moyenne $\langle \sigma_p \rangle$, ce qui constitue une première approximation de ce problème. En faisant $\mathbb{C}_I = 0$, $\mathbb{P} = \mathbb{S}_E^j : \mathbb{C}_s^{-1}$ et en prenant pour le tenseur de polarisation $\tau = \langle \sigma_p \rangle^j$ dans (1.76), on obtient alors l'estimation de la déformation dans la fissure :

$$\epsilon^j = (\mathbb{I} - \mathbb{S}_E^j)^{-1} : (\mathbf{E} - \mathbb{S}_E^j : \mathbb{C}_s^{-1} : \langle \sigma_p \rangle^j) \quad (4.34)$$

La forme incrémentale de (4.34) s'écrit alors

$$d\epsilon^j = (\mathbb{I} - \mathbb{S}_E^j)^{-1} : (d\mathbf{E} - \mathbb{S}_E^j : \mathbb{C}_s^{-1} : d\langle \sigma_p \rangle^j) \quad (4.35)$$

S'agissant du rapport d'aspect, on obtient donc :

$$dX^j = X^j (\underline{e}_3^j \otimes \underline{e}_3^j) : (\mathbb{I} - \mathbb{S}_E^j)^{-1} : (d\mathbf{E} - \mathbb{S}_E^j : \mathbb{C}_s^{-1} : d\langle \sigma_p \rangle^j) \quad (4.36)$$

En utilisant de nouveau $X^j(\mathbb{I} - \mathbb{P}^j : \mathbb{C}_s)^{-1} \rightarrow \mathbb{T}^j$ quand $X^j \rightarrow 0$, on montre que l'intégration de (4.36) à partir de l'état de référence ($\mathbf{E}=0$, $\sigma^p = 0$) se met sous la forme

$$X^j - X_0^j = (\underline{e}_3^j \otimes \underline{e}_3^j) : \mathbb{T}^j : (\mathbf{E} - \mathbb{S}_E^j : \mathbb{C}_s^{-1} : \langle \sigma^p \rangle^j) \quad (4.37)$$

où X_0^j désigne le rapport d'aspect des fissures dans la configuration initiale. L'équation (4.37) peut s'écrire aussi

$$X^j - X_0^j = (\underline{e}_3^j \otimes \underline{e}_3^j) : (\mathbb{T}^j : \mathbf{E} - \mathbb{T}^j : \mathbb{S}_E^j : \mathbb{C}_s^{-1} : \langle \boldsymbol{\sigma}^p \rangle^j) \quad (4.38)$$

En utilisant $X^j (\mathbb{I} - \mathbb{S}_E^j)^{-1} \rightarrow \mathbb{T}^j$ quand $X^j \rightarrow 0$, on peut réécrire le dernier terme de la relation (4.38) sous la forme :

$$\begin{aligned} \mathbb{T}^j : \mathbb{S}_E^j : \mathbb{C}_s^{-1} : \langle \boldsymbol{\sigma}^p \rangle^j &= X^j (\mathbb{I} - \mathbb{S}_E^j)^{-1} : \mathbb{S}_E^j : \mathbb{C}_s^{-1} : \langle \boldsymbol{\sigma}^p \rangle^j \\ &= -X^j \mathbb{I} : \mathbb{C}_s^{-1} : \langle \boldsymbol{\sigma}^p \rangle^j + \mathbb{T}^j : \mathbb{I} : \mathbb{C}_s^{-1} : \langle \boldsymbol{\sigma}^p \rangle^j \end{aligned} \quad (4.39)$$

Le premier terme de la deuxième égalité de (4.39) étant négligeable quand $X^j \rightarrow 0$, la relation (4.37) s'écrit enfin

$$X^j - X_0^j = (\underline{e}_3^j \otimes \underline{e}_3^j) : \mathbb{T}^j : (\mathbf{E} - \mathbb{C}_s^{-1} : \langle \boldsymbol{\sigma}^p \rangle^j) \quad (4.40)$$

A titre d'illustration, on considère de nouveau le cas d'un matériau constitué d'une phase solide élastique linéaire isotrope dont les fissures ont toutes le même rapport d'aspect et présentent une répartition d'orientation isotrope. En utilisant la relation (4.40), on montre la loi de couplage géométrique liant le rapport d'aspect des fissures à la déformation macroscopique du v.e.r. et à la précontrainte capillaire σ_p prend la forme

$$\Delta X = X - X_0 = \frac{9b}{4\pi\varepsilon} \left(E - \frac{\sigma_p}{3k} \right) \quad (4.41)$$

En incorporant la première égalité de (4.30) dans (4.41), on obtient encore :

$$\Delta X = X - X_0 = X_0 \frac{E}{E_{cr}} \quad \text{avec} \quad E_{cr} = \frac{4\pi\varepsilon}{9} X_0 \quad (4.42)$$

Observant que $4\pi\varepsilon\Delta X/3$ représente la variation de volume des fissures, on note que l'égalité ci-dessus signifie que la déformation volumique macroscopique $3E$ est égale à la variation du volume des fissures. $-E_{cr}\delta$ s'interprète

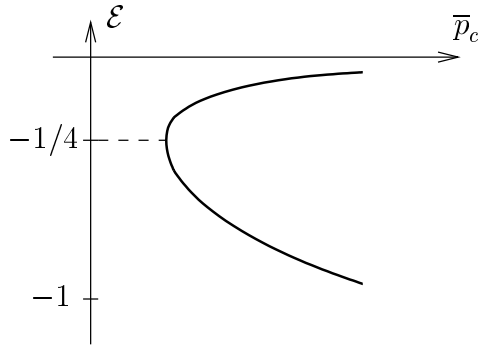


FIG. 4.10 – Séchage d'un milieu fissuré - modèle avec couplage géométrique

comme la déformation macroscopique pour laquelle les fissures sont entièrement refermées par séchage.

En reportant (4.42) dans (4.30) on obtient la relation suivante

$$\bar{p}_c = p_c \sqrt{\frac{3k^{hom}E_{cr}}{b(\gamma/LX_o)^3}} = \left(\frac{1}{-\mathcal{E}(1+\mathcal{E})^3} \right)^{\frac{1}{2}} \quad \text{avec} \quad \mathcal{E} = \frac{E}{E_{cr}} \quad (4.43)$$

La courbe représentant la relation (4.43) liant \bar{p}_c et \mathcal{E} est tracée sur la [Fig. 4.10]. On note que la prise en compte des variations du rapport d'aspect des fissures modifie l'allure de la courbe p_c fonction de E pour les « fortes » déformations de retrait ($E < -E_{cr}/4$) avec une nouvelle branche correspondant à un comportement contractant au séchage. Pour les « faibles » déformations de retrait ($E > -E_{cr}/4$) on retrouve une branche correspondant à un comportement dilatant au séchage comme pour le modèle sans couplage géométrique.

4.3.2 Déformation de séchage du matériau fissuré isotrope

On s'intéresse de nouveau au comportement du matériau lors d'une expérience de séchage sous contrainte macroscopique nulle conduite à partir de l'état de référence saturé à pression capillaire nulle. Comme pour le cas sans couplage, l'augmentation à partir de la valeur nulle de la pression capillaire ne provoque pas immédiatement la désaturation des fissures. On observe donc de nouveau une phase où les fissures restent saturées par la phase liquide à

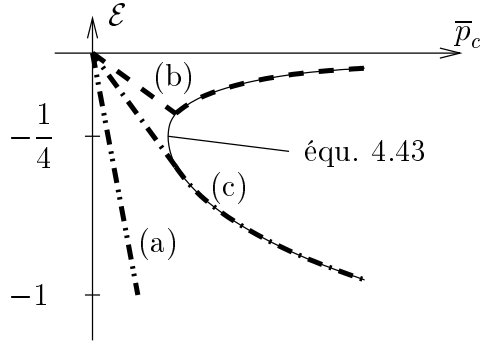


FIG. 4.11 – Séchage d'un milieu fissuré - cas général

la pression $-p_c$, la déformation macroscopique du v.e.r. se calculant encore en reportant l'égalité $\sigma_p = p_c$ dans la première équation de (4.30).

Pour déterminer le moment où la phase gazeuse pénètre dans les fissures, il faut maintenant tenir compte du fait que les fissures se referment au fur et à mesure que la pression capillaire augmente. En combinant la première équation de (4.30) pour $\sigma_p = p_c^{ea} = \gamma/(LX^{ea})$ avec les équations (4.42), on montre que valeur du rapport d'aspect des fissures au moment où le gaz pénètre dans les fissures, notée X^{ea} , est solution de l'équation

$$\frac{\gamma}{LX^{ea}} = -\frac{4\pi k^{hom}\varepsilon}{3b}(X^{ea} - X_0) \quad (4.44)$$

équation qui admet comme solution :

$$X^{ea} = \frac{1}{2} \left(X_0 \pm \sqrt{X_0^2 - \frac{3b\gamma}{\pi\varepsilon Lk^{hom}}} \right) \quad (4.45)$$

On note que l'équation (4.44) n'admet de solution que si $X_0 \geq X_0^{ea}$ avec

$$X_0^{ea} = \left(\frac{3b\gamma}{\pi\varepsilon Lk^{hom}} \right)^{\frac{1}{2}} \quad (4.46)$$

Si X_0 est plus grand que X_0^{ea} , la phase gazeuse pénètre dans les fissures et la courbe de comportement linéaire observée dans la première phase coupe la courbe décrite par l'équation 4.43 au point (p_c^{ea}, E^{ea}) .

Deux situations peuvent alors se présenter. Si $E^{ea} < -E_{cr}/4$, en utilisant l'équation (4.43) on obtient $X_0^{ea} < X_0 < 2X_0^{ea}/\sqrt{3}$. Dans cette situation la

désaturation du matériau provoque la fermeture des fissures et un retrait de séchage est observé (trajet (c) sur la Fig. 4.11). Si on a $E^{ea} > -E_{cr}/4$, situation observée quand $2X_0^{ea}/\sqrt{3} < X_0$, la désaturation des fissures s'accompagne d'une réouverture de ces dernières. Une phase de dilatation est observée et on retrouve un comportement similaire à celui obtenu sans prise en compte des variations de rapport d'aspect des fissures (trajet (b) sur la Fig. 4.11).

Enfin si X_0 est inférieur à X_0^{ea} , il n'y a pas d'intersection entre la courbe décrite par l'équation (4.43) et la droite rendant compte du comportement du matériau au cours de la première phase dans le plan p_c, E . L'augmentation de la pression capillaire s'accompagne donc d'une déformation volumique de retrait du matériau mais sans désaturation des fissures. (trajet (a) sur la Fig. 4.11)

4.4 Conclusion

Les éléments d'une modélisation par changement d'échelle du comportement des matériaux mésolfissurés à matrice élastique dans la situation non saturé ont été présentés. Les lois de comportement macroscopiques obtenues par cette approche intègrent de façon quantitative les spécificités du matériau liées à ses caractéristiques morphologiques et matérielles à l'échelle microscopique. Ces résultats ont ensuite été utilisés pour modéliser une expérience de séchage d'un matériau dont l'espace poreux est constitué de fissures possédant toutes les mêmes caractéristiques géométriques et distribuées de façon isotrope à l'intérieur du volume élémentaire représentatif. Dans le cas linéaire, dans une expérience où l'échantillon est soumis à une pression capillaire croissante à contrainte macroscopique nulle à partir de l'état saturé, le matériau se rétracte avant de revenir à son état de déformation initiale, le passage d'un comportement à l'autre se faisant au moment où la phase gazeuse non mouillante entre dans les fissures. La prise en compte du couplage entre déformations des fissures et effets capillaire modifie radicalement ces prévisions dans le cas des fissures très aplaties. On a en effet montré que pour les valeurs les plus faibles du rapport d'aspect, les fissures se ferment en restant constamment saturées, le matériau se contractant régulièrement au fur et à mesure que la pression capillaire augmente. Pour les valeurs intermédiaires du rapport d'aspect, la phase gazeuse finit par pénétrer dans les fissures mais on obtient cependant un comportement contractant pour toutes les valeurs de la pression capillaire. Enfin pour les valeurs les plus importantes du rapport d'aspect, on retrouve un comportement du type de

celui obtenu sans prise en compte des couplages géométriques.

Chapitre 5

Homogénéisation périodique des matériaux granulaires non saturés

Dans le cadre de la méthode d'homogénéisation, de nombreuses études ont été consacrées aux milieux granulaires dans le cas sec [13, 14]. Par rapport aux milieux granulaires secs, les milieux granulaires non saturés présentent certaines spécificités dont il convient de rendre compte au plan de la modélisation. En effet, le comportement mécanique d'un matériau granulaire est déterminé par les forces de contact entre grains. Dans le cas non saturé, les forces capillaires dues à la présence de ménisques entre grains modifient non seulement les forces de contact, mais aussi la rigidité et la capacité de résistance des matériaux granulaires [38, 54]. Il apparaît donc impératif de prendre en compte l'influence des ménisques pour modéliser le comportement macroscopique d'un matériau granulaire non saturé.

Par souci de simplicité, on s'intéresse ici qu'aux matériaux granulaires qui possèdent la propriété de périodicité. Dans la première partie de ce chapitre, on présente successivement l'application de la méthode d'homogénéisation pour des matériaux granulaires secs, saturés et non saturés. On aborde ensuite la modélisation du comportement mécanique de deux grains sphériques déformables en contact l'un avec l'autre dans le cas non saturé. En utilisant ce modèle, on étudie les déformations volumiques dues au séchage pour un empilement cubique libre de contrainte et en condition isotherme. Enfin, on aborde l'étude d'empilements de grains monodisperses désordonnés dans le cas non saturé en utilisant un outil de simulation numérique tridimensionnelle développé par J. N. Roux (LMSGC).

5.1 Matériau granulaire sec

5.1.1 Représentation

On considère une structure granulaire occupant le domaine Ω de frontière $\partial\Omega$. La structure est constituée par la répétition spatiale périodique d'une cellule de base C , comme sur la [Fig. 5.1]. La périodicité de la structure permet toujours de choisir une cellule de base dont la frontière n'intersecte pas l'intérieur des grains [12]. Il est couramment admis que dans cette situation le comportement macroscopique du matériau constitutif de la structure s'obtient en résolvant un problème posé sur la cellule de base considérée comme une structure. On présente donc dans la suite la démarche d'homogénéisation adaptée pour traiter de cette situation particulière (périodicité et système discret).

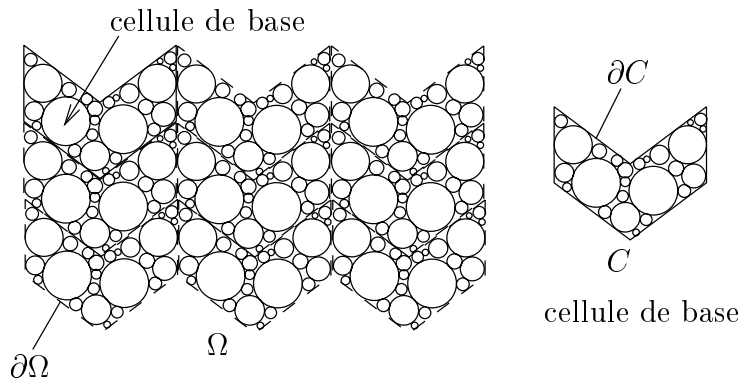


FIG. 5.1 – Exemple de matériau granulaire périodique

généisation adaptée pour traiter de cette situation particulière (périodicité et système discret).

5.1.2 Localisation

Prenons une cellule de base (C) constituée de N_g grains. Les grains n'interagissent que par des actions de contact. On utilise le modèle discret simplifié de [12] pour décrire les efforts intérieurs dans le milieu granulaire. Dans ce cadre, l'interface de contact entre grains est réduite à un point et les efforts transmis par les contacts entre grains sont représentés par des vecteurs forces. On note (k_1^c, k_2^c) les couples de grains au contact numéro c et \underline{F}_c la force de contact imposée par le grain k_2^c sur le grain k_1^c . N_c désigne le cardinal de l'ensemble de tous les contacts dans la cellule de base. Cet ensemble est séparé

en deux sous-ensembles : un premier contenant tous les points appartenant à l'intérieur de la cellule de base et un second contenant les points situés sur la frontière ∂C . N_i désigne le nombre de contacts du premier sous-ensemble et N_b désigne celui du second. Pour les contacts à la frontière, \underline{F}_c désigne la force appliquée par les grains extérieurs.

La position du grain k ($k = 1, N_g$) dans l'espace est repérée par un vecteur \underline{x}_k reliant un point O de l'espace choisi comme origine à un des points du grain O_k arbitrairement choisi comme référence. On note $\underline{x}_k = \underline{OO}^k$. La position du point de contact c est notée \underline{x}_c .

Comme pour l'homogénéisation des matériaux dont le comportement à l'échelle microscopique est décrit par un modèle continu (situation traitée au chapitre 1), il convient tout d'abord de définir un mode de chargement sur la cellule de base permettant de relier les grandeurs statiques et cinématiques à l'échelle microscopique à leurs homologues à l'échelle macroscopique. Pour un milieu granulaire périodique dont les efforts intérieurs sont décrits par un modèle discret, on définit le mode de chargement de la façon suivante :

un champ d'efforts $(\underline{F}_c)_{c=1, N_c}$ est dit statiquement admissible si et seulement si :

$$\underline{F}_c \text{ vérifie les conditions : } \begin{cases} \text{équilibre de chaque grain (en résultante} \\ \text{et en moment)} \\ \text{antipériodicité sur } \partial C \end{cases} \quad (5.1)$$

De façon duale, un champ de déplacements $\underline{\xi}$ défini sur les grains, rigidifiant par grain, est dit cinématiquement admissible avec le tenseur des déformations macroscopique linéarisé \underline{E} si et seulement s'il s'écrit :

$$\forall \underline{x}, \quad \underline{\xi} = \underline{E} \cdot \underline{x} + \underline{\xi}'(\underline{x}) \quad \text{avec } \underline{\xi}' \text{ périodique} \quad (5.2)$$

Pour associer à un champ d'efforts intérieurs statiquement admissible une valeur du tenseur des contraintes macroscopique, on calcule le travail virtuel des efforts intérieurs dans tout champ de déplacements cinématiquement admissible. On montre que pour que le lemme de Hill soit vérifié, ce qui assure la cohérence énergétique du changement d'échelle, le tenseur des contraintes macroscopique $\underline{\Sigma}$ doit être égal à

$$\underline{\Sigma} = \frac{1}{|C|} \left(\sum_{c=1}^{N_b} \underline{x}_c \otimes \underline{F}_c \right) = \frac{1}{|C|} \left(\sum_{c=1}^{N_c} l_c \otimes \underline{F}_c \right) \quad (\forall \underline{F}_c \text{ s. a.}) \quad (5.3)$$

avec :

$$\begin{cases} l_c = \underline{x}_{k_2^c} - \underline{x}_{k_1^c} & c \in [1, N_i] \\ l_c = \underline{x}_{k_2^c} - \underline{x}_{k_1^c} - \underline{a} & c \in [N_i + 1, N_c] \end{cases} \quad (5.4)$$

où \underline{a} désigne le vecteur joignant les deux points de contact situés sur le bord de la cellule et se correspondant par périodicité, avec $\underline{a} = \underline{x}_A - \underline{x}_B$.

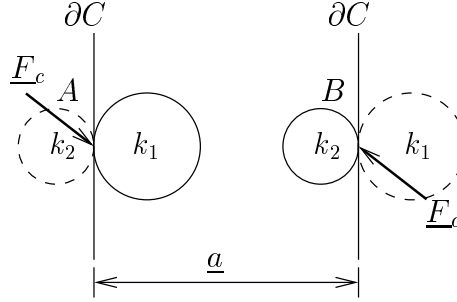


FIG. 5.2 – Chargement périodique sur la frontière de la cellule de base

Pour tout champ d'efforts intérieurs \underline{F}_c s.a. avec $\underline{\Sigma}$ et pour tout champ de déplacements $\underline{\xi}$ c.a. avec \underline{E} , le lemme de Hill s'énonce sous la forme suivante :

$$\sum_{c=1}^{N^{con}} \underline{F}_c \cdot \llbracket \underline{\xi}_c \rrbracket = |C| \underline{\Sigma} : \underline{E} \quad \text{avec} \quad N^{con} = N_i + 1/2 N_b \quad (5.5)$$

où $\llbracket \underline{\xi}_c \rrbracket$ désigne la discontinuité de vitesse intergranulaire au point de contact c , avec :

$$\llbracket \underline{\xi}_c \rrbracket = \underline{\xi}(\underline{x}_c \in \Omega_{k_2^c}) - \underline{\xi}(\underline{x}_c \in \Omega_{k_1^c}) \quad (5.6)$$

où $\underline{\xi}(\underline{x}_c \in \Omega_{k_1^c})$ et $\underline{\xi}(\underline{x}_c \in \Omega_{k_2^c})$ désignent respectivement le déplacement du point \underline{x}_c en tant que point des grains k_1^c et k_2^c , $\Omega_{k_1^c}$ et $\Omega_{k_2^c}$ désignant les domaines occupés respectivement par les grains k_1^c et k_2^c .

D'après la relation (5.5), on note que seulement la moitié des points de contact situés sur la frontière est prise en compte en raison de la périodicité de la cellule de base.

5.1.3 Homogénéisation

Avec le modèle discret simplifié, on décrit le mouvement de grains en adoptant une cinématique de corps rigides. Les grains sont également supposés rigides. Les déformations en chaque point de contact sont alors provoquées par les déplacements des grains les uns par rapport aux autres. La déformation au contact c entre deux grains k_1^c et k_2^c est désignée par $\underline{\underline{\varepsilon}}_c$. On a alors

$$\underline{\underline{\varepsilon}}_c = \underline{\underline{\xi}}(\underline{\underline{x}}_c \in \Omega_{k_2^c}) - \underline{\underline{\xi}}(\underline{\underline{x}}_c \in \Omega_{k_1^c}) \quad (5.7)$$

Dans le cadre des petites perturbations, on adopte une loi d'élasticité au contact linéaire. Elle s'écrit donc [55]

$$\underline{\underline{F}}_c = \underline{\underline{K}}_c \cdot \underline{\underline{\varepsilon}}_c \quad (5.8)$$

où $\underline{\underline{K}}_c$ désigne la matrice de rigidité de contact possédant la propriété [14]

$$(\underline{\underline{K}}_c)_{ij} = (\underline{\underline{K}}_c)_{ji} \quad (5.9)$$

Comme pour un milieu élastique linéaire continu, avant de procéder à l'étape d'homogénéisation pour un milieu granulaire, il est nécessaire de définir un opérateur de localisation. Différentes méthodes sont proposées dans la littérature pour effectuer ce calcul [13, 15]. Ici, on propose une présentation directement inspirée de la présentation classiquement adoptée pour traiter des milieux continus élastiques. On introduit donc un tenseur de localisation $\underline{\underline{\underline{A}}}_c$ du troisième ordre qui associe la déformation au contact $\underline{\underline{\varepsilon}}_c$ à la déformation macroscopique $\underline{\underline{E}}$ dans le milieu homogénéisé équivalent. On a alors

$$\underline{\underline{\varepsilon}}_c = \underline{\underline{\underline{A}}}_c : \underline{\underline{E}} \quad (5.10)$$

Il est clair que l'on a la propriété :

$$(\underline{\underline{A}}_c)_{ijk} = (\underline{\underline{A}}_c)_{ikj} \quad (5.11)$$

En combinant les relations (5.3), (5.8) et (5.10), on obtient une loi de comportement macroscopique du même type que celle d'un milieu élastique linéaire hétérogène continu :

$$\boldsymbol{\Sigma} = \mathbb{C}^{hom} : \mathbf{E} \quad (5.12)$$

avec

$$\mathbb{C}^{hom} = \frac{1}{|C|} \left(\sum_{c=1}^{N_c} \underline{l}_c \otimes (\mathbf{K}_c \cdot \underline{\underline{A}}_c) \right) \quad (5.13)$$

où \mathbb{C}^{hom} désigne le tenseur des modules d'élasticité macroscopique, qui possède les propriétés de symétrie $C_{ijkl}^{hom} = C_{jikl}^{hom} = C_{ijlk}^{hom}$. Pour démontrer la symétrie d'indices (ij) et (kl) , on peut utiliser l'approche énergétique pour laquelle l'énergie potentielle de la cellule de base s'écrit [12]

$$\Psi = \sum_{c=1}^{N_c} \frac{1}{2} \underline{\varepsilon}_c \cdot \mathbf{K}_c \cdot \underline{\varepsilon}_c - |C| \boldsymbol{\Sigma} : \mathbf{E} \quad (5.14)$$

Dans le cas où la déformation macroscopique \mathbf{E} est imposée, le dernier terme de la relation (5.14) est nul. En introduisant (5.10) dans la relation (5.14), on obtient alors le tenseur des modules d'élasticité macroscopique

$$C_{ijkl}^{hom} = A_{mij} K_{mn} A_{nkl} \quad (5.15)$$

La relation (5.15) combiné avec les relations (5.9) et (5.11) permet de montrer la symétrie par rapport aux couples d'indices (ij) et (kl) du tenseur \mathbb{C}^{hom} .

5.2 Matériau granulaire saturé

On considère maintenant une cellule de base (C) d'un milieu granulaire saturé dont l'espace vide est saturé par un seul liquide. Comme dans le cas du milieu poreux saturé, pour les situations homogénéisables les efforts intérieurs à l'échelle microscopique dans le liquide sont représentés par un champ de pression uniforme p_ℓ .

Du fait que l'interface de contact entre grains est réduite à un point, la résultante et le moment appliqués sur chaque grain par le liquide sont nuls. En procédant comme pour un milieu granulaire sec, les efforts intérieurs à l'échelle microscopique sont dits s.a. s'ils vérifient l'équilibre de chaque grain en résultante et en moment et satisfont la condition d'antipériodicité à la frontière de la cellule de base.

Le tenseur des contraintes macroscopique Σ associé aux forces de contact et à la pression uniforme du liquide est obtenu en calculant la moyenne des efforts intérieurs dans la cellule de base. On a alors

$$\Sigma = \frac{1}{|C|} \left(\sum_{c=1}^{N_c} l_c \otimes \underline{F}_c \right) - p_\ell \delta \quad (5.16)$$

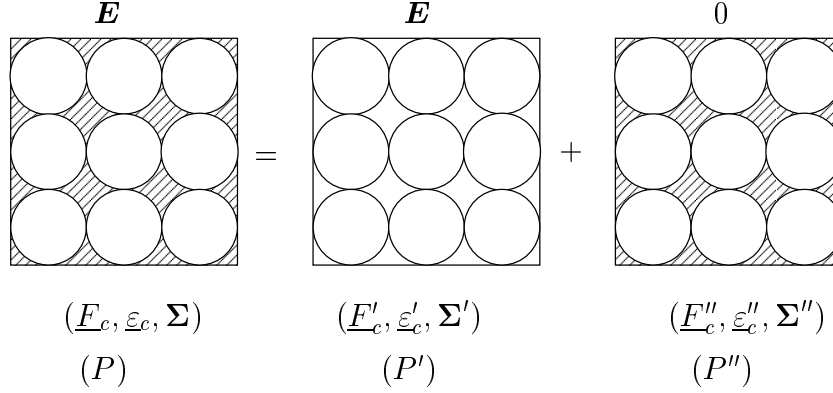


FIG. 5.3 – Décomposition du problème complet (P) en deux problèmes élémentaires (P') et (P'') d'un milieu granulaire saturé

On cherche maintenant à déterminer la loi du comportement macroscopique d'un milieu granulaire saturé. On décompose le problème complet (P) en deux problèmes notés respectivement (P') et (P'') [Fig. 5.3]. Le problème (P') correspond au problème au cas sec à déformation macroscopique \mathbf{E} présenté précédemment. Le deuxième problème (P'') correspond au problème avec précontrainte à déformation macroscopique nulle. Les relations pour ces trois problèmes s'écrivent

$$\begin{cases} \Sigma = \Sigma' + \Sigma'', & \Sigma'' = -p_\ell \delta \\ \underline{F}_c = \underline{F}'_c + \underline{F}''_c, & \underline{F}''_c = 0 \\ \underline{\varepsilon}_c = \underline{\varepsilon}'_c = \underline{\underline{A}}_c : \mathbf{E}, & \underline{\varepsilon}''_c = 0 \end{cases} \quad (5.17)$$

où Σ , \underline{F}_c , $\underline{\varepsilon}_c$ désignent respectivement la contrainte macroscopique, les forces de contact et les déformations au contact pour le problème (P); Σ' , \underline{F}'_c , $\underline{\varepsilon}'_c$ les mêmes grandeurs pour le problème (P') et Σ'' , \underline{F}''_c , $\underline{\varepsilon}''_c$ celles pour le problème (P'').

Compte tenu des résultats dans le cas sec, pour le problème (P) on a

$$\boldsymbol{\Sigma}' = \frac{1}{|C|} \left(\sum_{c=1}^{N_c} L_c \otimes \underline{F}'_c \right) = \mathbb{C}^{hom} : \mathbf{E} \quad (5.18)$$

où \mathbb{C}^{hom} , le tenseur de module d'élasticité macroscopique du milieu granulaire dans le cas sec, se calcule par la relation (5.13).

La loi du comportement macroscopique pour un milieu granulaire saturé s'écrit alors

$$\boldsymbol{\Sigma} = \boldsymbol{\Sigma}' + \boldsymbol{\Sigma}'' = \mathbb{C}^{hom} : \mathbf{E} - p_\ell \boldsymbol{\delta} \quad (5.19)$$

On retrouve la formulation du comportement en contrainte effective de Terzaghi.

5.3 Matériau granulaire non saturé

5.3.1 Description des efforts intérieurs à l'échelle microscopique

On s'intéresse maintenant à un milieu granulaire dans la situation non saturée où l'espace interstitiel est saturé par deux fluides immiscibles : un liquide et un gaz, occupant respectivement les domaines Ω_ℓ et Ω_g [Fig. 5.4]. On note $\omega_{\alpha\beta}$ ($\alpha\beta = sg, \ell g, s\ell$) l'interface entre les phases solide, liquide et gazeuse. La morphologie de l'interface $\omega_{\alpha\beta}$ satisfait également la propriété de périodicité.

Dans la situation homogénéisable, les forces de volume sont négligées à l'échelle microscopique et le champ de pression dans chacune des fluides est uniforme. Les efforts intérieurs dans les phases fluides sont alors décrits par un champ de pression

$$\boldsymbol{\sigma}_\alpha = -p_\alpha \boldsymbol{\delta} \quad (\Omega_\alpha), (\alpha = \ell, g) \quad (5.20)$$

Les efforts intérieurs sur l'interface $\omega_{\alpha\beta}$ sont encore décrits par un champ d'effort de membrane $\gamma(\underline{x}) \boldsymbol{\delta}_{T_\omega(\underline{x})}$ en utilisant les notations introduites à la section 3.1.

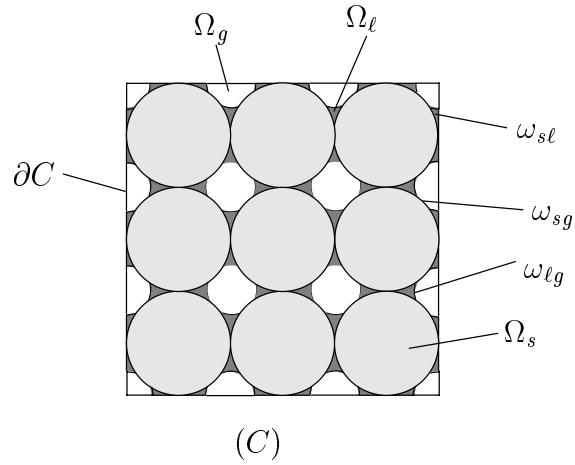


FIG. 5.4 – Un matériau granulaire périodique non saturé

Les équations d'équilibre pour les interfaces s'écrivent toujours

$$p_c = p_g - p_l = \gamma_{lg} \text{tr } \mathbf{b} \quad (\omega_{lg}) \quad (5.21)$$

$$\boldsymbol{\sigma}_s \cdot \underline{\mathbf{n}} = -p_g \underline{\mathbf{n}} + \gamma_{sg} \text{tr } \mathbf{b} \underline{\mathbf{n}} \quad (\omega_{sg}) \quad (5.22)$$

$$\boldsymbol{\sigma}_s \cdot \underline{\mathbf{n}} = -p_l \underline{\mathbf{n}} + \gamma_{sl} \text{tr } \mathbf{b} \underline{\mathbf{n}} \quad (\omega_{sl}) \quad (5.23)$$

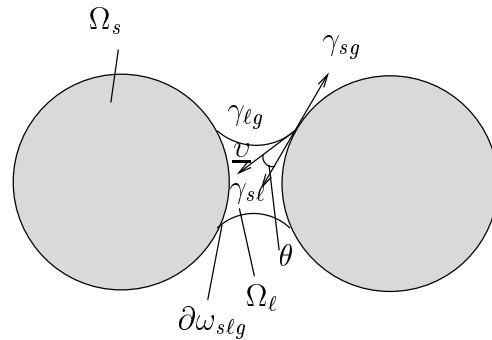


FIG. 5.5 – Tensions superficielles pour un matériau granulaire non saturé

Les équations d'équilibre en résultante et en moment pour chaque grain s'écrivent maintenant :

$$\left\{ \begin{array}{l} \sum_{c=1}^{N_c^k} \underline{F}_c^k + \underline{F}_{un}^k = 0 \\ \sum_{c=1}^{N_c^k} \underline{x}_c^k \wedge \underline{F}_c^k + \underline{M}_{un}^k = 0 \end{array} \right. \quad (5.24)$$

où N_c^k désigne le nombre de points de contact pour le grain numéro k , \underline{F}_c^k la force de contact appliquée sur le grain k au point \underline{x}_c^k , \underline{F}_{un}^k (respectivement \underline{M}_{un}^k) la somme des forces imposées par les phases fluides et les interfaces sur le grain numéro k . On considère ici uniquement la situation où les plans tangents à l'interface ω_{sl} et ω_{sg} sont identiques le long de $\partial\omega_{slg}$ [Fig. 5.5]. Dans cette situation, compte tenu de la relation de Young Dupré, on a

$$\gamma_{sg} = \gamma_{sl} + \gamma_{lg} \cos \theta \quad (\forall \underline{x} \in \partial\omega_{slg}) \quad (5.25)$$

Le long de $\partial\omega_{slg}$, une force de densité linéique γ_{lg} est appliquée sur le solide :

$$\underline{F}_{\partial\omega_{slg}} = \gamma_{lg} \underline{\nu} \quad (5.26)$$

Ici $\underline{\nu}$ désigne le vecteur unitaire normal intérieur du plan tangent à la surface ω_{lg} .

\underline{F}_{un}^k et \underline{M}_{un}^k s'écrivent alors

$$\left\{ \begin{array}{l} \underline{F}_{un}^k = \sum_{\alpha=l,g} \int_{\omega_{s\alpha}^k} (-p_\alpha + \gamma_{\omega_{s\alpha}} \delta_{T_\omega(\underline{x})} : \mathbf{b}) \underline{n} dS + \int_{\partial\omega_{slg}^k} \gamma_{lg} \underline{\nu} ds \\ \underline{M}_{un}^k = \sum_{\alpha=l,g} \int_{\omega_{s\alpha}^k} \underline{x}_c^k \wedge (-p_\alpha + \gamma_{\omega_{s\alpha}} \delta_{T_\omega(\underline{x})} : \mathbf{b}) \underline{n} dS + \int_{\partial\omega_{slg}^k} \underline{x}_c^k \wedge \gamma_{lg} \underline{\nu} ds \end{array} \right. \quad (5.27)$$

avec $\omega_{s\alpha}^k = \partial\Omega^k \cap \omega_{s\alpha}$ et $\partial\omega_{slg} = \omega_{sl}^k \cap \omega_{sg}^k$.

5.3.2 Homogénéisation

On considère maintenant une cellule de base d'un milieu granulaire périodique non saturé. Les efforts intérieurs à l'échelle microscopique sont s.a. s'ils

vérifient l'équation d'équilibre (5.24) de chaque grain en résultante et en moment et l'équation d'équilibre de l'interface $\omega_{\ell g}$ (5.21) ainsi que la condition d'antipériodicité à la frontière de la cellule de base.

Comme pour les milieux granulaires saturés, en calculant la moyenne des efforts intérieurs dans la cellule de base, on montre que le tenseur des contraintes macroscopique Σ d'un milieu granulaire non saturé dans le cas général s'écrit [22]

$$\Sigma = \frac{1}{|C|} \left[\sum_{c=1}^{N_c} l_c \otimes \underline{F}_c + \sum_{k=1}^{N_g} \left(\int_{\omega_{s\ell}^k} \tilde{\underline{x}}^k \otimes p_c \underline{n} dS + \int_{\partial\omega_{s\ell g}^k} \tilde{\underline{x}}^k \otimes \gamma_{\ell g} \underline{\nu} ds \right) + \int_{\omega_{\ell g}} \gamma_{\ell g} \delta_{T_\omega(\underline{x})} dS \right] + n S_r p_c \delta - p_g \delta \quad (5.28)$$

où $\tilde{\underline{x}}^k$ désigne le repère local attaché au grain k , défini par $\tilde{\underline{x}}^k = \underline{x} - \underline{x}^k$.

On ne s'intéresse dans la suite qu'au cas des faibles saturations en liquide où la phase liquide discontinue forme des ponts liquides aux points de contact ou entre des grains rapprochés. Pour simplifier le problème, on suppose que le milieu granulaire est constitué des grains sphériques de rayon uniforme. On introduit la force capillaire \underline{F}_{cap}^k exercée par le ménisque autour de contact c sur le grain k

$$\underline{F}_{cap} = \int_{\omega_{s\ell}^k} p_c \underline{n} dS + \int_{\partial\omega_{s\ell g}^k} \gamma_{\ell g} \underline{\nu} ds \quad (5.29)$$

La résultante des forces appliquées sur le grain k au contact c , notée \underline{T}_c , s'écrit

$$\underline{T}_c = \underline{F}_c + \underline{F}_{cap} \quad \text{avec} \quad \underline{F}_c = \mathbf{K}_c \cdot \underline{\varepsilon}_c \quad (5.30)$$

Pour chacun des grains, l'équation d'équilibre en résultante s'écrit alors

$$\sum_{c=1}^{N_c^k} \underline{T}_c = 0 \quad (5.31)$$

Par ailleurs, étant donné que le liquide occupe un domaine axisymétrique, le moment des actions exercées par le ménisque sur le grain calculé au point de contact est nul.

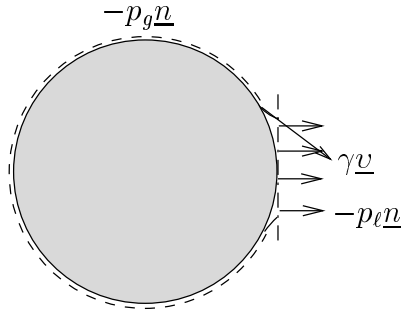


FIG. 5.6 – Un système dans le cas des faibles saturations

Pour poser le problème de localisation dans cette situation, il est commode de considérer un système constitué d'un grain, de l'interface solide-gaz ω_{sg} et des demi-ménisques autour des points de contact du grain [Fig. 5.6] [22]. Compte tenu de la relation (5.29) et de la relation $p_\ell = p_g - p_c$, on montre que pour tout champ de déplacements $\underline{\xi}$ c.a. avec \mathbf{E} , rigidifiant par grain et pour tout champ d'efforts de contact \underline{F}_c tel que le champ $\underline{T}_c = \underline{F}_c + \underline{F}_{cap}$ soit s.a. avec $\underline{\Sigma}''' = \underline{\Sigma} + p_g \underline{\delta}$, on a

$$\underline{\Sigma}''' : \mathbf{E} = \frac{1}{|C|} \sum_c (\underline{F}_c + \underline{F}_{cap}) \cdot \llbracket \underline{\xi}_c \rrbracket \quad (5.32)$$

avec :

$$\underline{\Sigma}''' = \frac{1}{|C|} \sum_{c=1}^{N_c} l_c \otimes (\underline{F}_c + \underline{F}_{cap}) \quad (5.33)$$

La contrainte macroscopique appliquée sur le v.e.r. de milieu granulaire considéré s'écrit donc

$$\underline{\Sigma} = \frac{1}{|C|} \sum_{c=1}^{N_c} l_c \otimes (\underline{F}_c + \underline{F}_{cap}) - p_g \underline{\delta} \quad (5.34)$$

Il apparaît donc que pour la situation considérée, on a un problème d'homogénéisation discret pour un matériau dont le comportement est élastique linéaire avec précontrainte.

A partir des relations (5.30), (5.31) et (5.34), on peut identifier la loi du comportement macroscopique du milieu considéré. Pour cela, on utilise de nouveau le théorème de Levin.

En procédant exactement comme pour le cas saturé, on peut écrire les relations suivantes pour les trois problèmes (P) , (P') et (P'') [Fig. 5.7] :

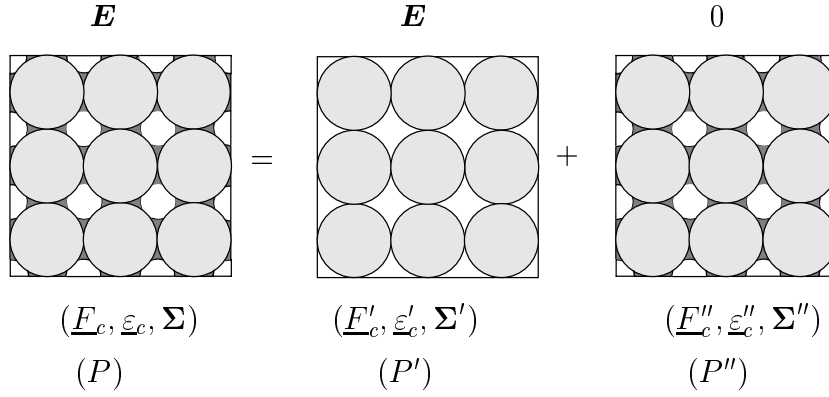


FIG. 5.7 – Décomposition du problème complet (P) en deux problèmes élémentaires (P') et (P'') d'un milieu granulaire non saturé

$$\begin{cases} \Sigma = \Sigma' + \Sigma'' \\ \underline{F}'_c = \mathbf{K} \cdot \underline{\varepsilon}'_c, \quad \underline{T}_c = \underline{F}''_c + \underline{F}_{cap} = \mathbf{K} \cdot \underline{\varepsilon}''_c + \underline{F}_{cap} \\ \underline{\varepsilon}_c = \underline{\varepsilon}'_c + \underline{\varepsilon}''_c, \quad \underline{\varepsilon}'_c = \underline{\underline{A}}_c : \mathbf{E} \end{cases} \quad (5.35)$$

La solution du problème (P') est identique à celle du cas sec. On a

$$\Sigma' = \mathbb{C}^{hom} : \mathbf{E} \quad (5.36)$$

Par ailleurs, on sait que le champ des déformations au contact $\underline{\varepsilon}'_c$ du problème (P') est c.a. avec le tenseur des déformations macroscopique \mathbf{E} tandis que le champ des forces \underline{T}_c du problème (P'') est s.a. avec $\Sigma''' = \Sigma'' + p_g \delta$. Le lemme de Hill permet d'écrire

$$|C| \Sigma''' : \mathbf{E} = \sum_{c=1}^{N_c} \underline{T}_c \cdot \underline{\varepsilon}'_c \quad (5.37)$$

D'après (5.35), la relation (5.37) s'écrit aussi

$$\sum_{c=1}^{N_c} \underline{T}_c \cdot \underline{\varepsilon}'_c = \sum_{c=1}^{N_c} \underline{\varepsilon}''_c \cdot \mathbf{K} \cdot \underline{\varepsilon}'_c + \sum_{c=1}^{N_c} \underline{F}_{cap} \cdot \left(\underline{\underline{A}}_c : \mathbf{E} \right) \quad (5.38)$$

On applique de nouveau le lemme de Hill sur le premier terme de la relation (5.38), on obtient

$$\sum_{c=1}^{N_c} \underline{\varepsilon}''_c \cdot \mathbf{K} \cdot \underline{\varepsilon}'_c = \sum_{c=1}^{N_c} \underline{\varepsilon}''_c \cdot \underline{F}'_c = 0 \quad (5.39)$$

En comparant les relations (5.37) et (5.38), on montre que la contrainte macroscopique pour le problème (P'') s'écrit

$$\underline{\Sigma}'' = \underline{\Sigma}''' - p_g \boldsymbol{\delta} = \frac{1}{|C|} \left(\sum_{c=1}^{N_c} \underline{F}_{cap} \cdot \underline{\underline{A}}_c \right) - p_g \boldsymbol{\delta} \quad (5.40)$$

La loi du comportement macroscopique pour un matériau granulaire non saturé s'écrit donc

$$\underline{\Sigma} = \underline{\Sigma}' + \underline{\Sigma}'' = \mathbb{C}^{hom} : \mathbf{E} + \frac{1}{|C|} \left(\sum_{c=1}^{N_c} \underline{F}_{cap} \cdot \underline{\underline{A}}_c \right) - p_g \boldsymbol{\delta} \quad (5.41)$$

relation qui généralise le théorème de Levin à la situation discrète considérée ici.

5.4 Modélisation d'un empilement granulaire périodique non saturé en faibles saturations

Dans l'approche présentée ci dessus, on a supposé que le comportement de deux grains en contact pouvait être décrit par une loi linéaire caractérisée par la matrice de rigidité de contact \mathbf{K}_c . Par ailleurs, les couplages entre déformation des grains et valeur de la force capillaire ont été négligés. On revient ici sur ces hypothèses en examinant la situation où la loi de Hertz est adoptée pour décrire le comportement de deux grains au contact [42].

le ménisque dans la direction normale au contact, notée F_{cap}^N , est constituée de deux contributions : l'action due à la pression capillaire et l'action de la tension de surface le long de la ligne triple liquide-gaz-solide [37]. Elle s'écrit :

$$F_{cap}^N = p_c \pi (r_2^2 - a^2) + \gamma (2\pi r_2) \quad (5.44)$$

où a désigne le rayon de la surface de contact.

D'après la loi de Hertz, on a

$$a = \left(\frac{3(1-\nu^2)R}{\sqrt{2}E} F_H \right)^{1/3}, \quad \delta = \left(\frac{3(1-\nu^2)}{\sqrt{2}RE} F_H \right)^{2/3} \quad (5.45)$$

où F_H représente la composante dans la direction normale de la force de Hertz, E le module d'élasticité du matériau constituant les grains et ν le coefficient de Poisson.

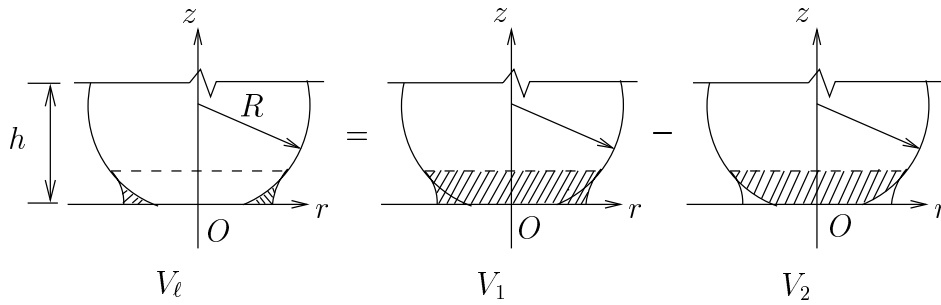


FIG. 5.9 – Calcul du volume du liquide

Le volume du liquide est calculé par différence entre le volume du domaine V_1 et le volume du domaine V_2 [Fig. 5.9] avec

$$V_1 = \pi \left[h \left((r_1 + r_2)^2 + r_1^2 \right) - \frac{1}{3} h^3 - (r_1 + r_2) \left(h \sqrt{r_1^2 - h^2} + r_1^2 \text{Arc sin } \frac{h}{r_1} \right) \right]$$

$$V_2 = \frac{\pi}{6} (h^3 + 3h(a^2 + R^2 \sin^2 \phi)) \quad (5.46)$$

et $h = R(1 - \cos \phi) - \delta$.

Le volume du ménisque est alors :

$$V_\ell = 2(V_1 - V_2) \quad (5.47)$$

Le deuxième terme de la relation (5.44) due à la tension de surface le long du périmètre a été négligé par certains auteurs [5, 41]. Néanmoins, son influence devient très importante avec l'augmentation de la saturation en liquide. A titre d'exemple, la [Fig. 5.10] représente la force capillaire F_{cap}^N et les deux contributions dues respectivement à la pression capillaire et à la tension de surface en fonction du volume de liquide. Ici, le rayon de grains R est égal à $20\mu m$. La distance de rapprochement des deux grains δ est nulle. La tension superficielle γ est égale à $0.072 N/m$. La non prise en compte du second terme de l'équation (5.44) entraîne une erreur de 57.5% pour un volume du ménisque de $V_\ell = 0.6 \cdot 10^{-15} m^3$ et de 74.1% quand $V_\ell = 0.17 \cdot 10^{-14} m^3$.

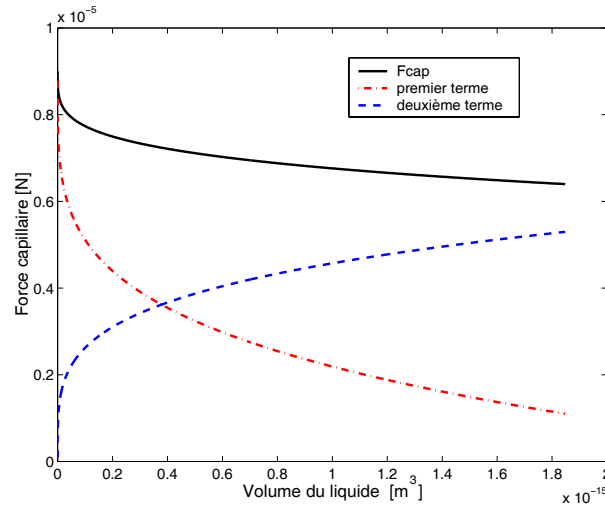


FIG. 5.10 – Force capillaire et ses deux contributions pour deux grains

En combinant les équations (5.42) à (5.45), on fait clairement apparaître qu'il existe un couplage entre la valeur de la pression capillaire, la déformation au contact entre les sphères et la valeur de la force capillaire. Ce couplage n'a pas été pris en compte dans l'approche linéaire mise en œuvre dans la première partie de ce chapitre. On évalue donc maintenant l'importance de ce couplage, et donc la nécessité de le prendre en compte dans le cas où la loi de Hertz est adoptée pour décrire le comportement de deux grains en contact. Pour cela, on considère une situation où il n'y a pas de forces extérieures

appliquées si bien que la force capillaire est en équilibre avec la force de Hertz normale au contact :

$$F_{cap}^N = F_H \quad (5.48)$$

Quand on diminue le volume du liquide, la pression capillaire et la force capillaire augmentent. Ceci entraîne le rapprochement des deux grains et donc l'augmentation de la force de contact. Les deux grains atteignent un nouveau état d'équilibre. Pour un angle de remplissage donné, l'état d'équilibre entre la pression capillaire et la déformation des grains est obtenu en résolvant l'équation (5.48). Cette équation ne possédant pas de solution exacte, un algorithme itératif a donc été utilisé pour trouver une solution approchée de (5.48). En pratique, une valeur arbitraire de la force capillaire est choisie comme valeur initiale. En utilisant (5.48), on a $F_{cap}^{N(0)} = F_H^{(0)}$. Ensuite les paramètres a et δ de la surface de contact sont calculés en utilisant l'équation (5.45). Puis en utilisant les équations (5.43) et (5.44) on peut obtenir une nouvelle valeur de la force capillaire. En utilisant la relation $F_{cap}^{N(n+1)} = F_{cap}^{N(n)}$, on répète le processus itératif jusqu'à ce que l'écart de deux valeurs successives de la force capillaire satisfasse un critère d'arrêt du processus itératif. Pour limiter le nombre d'itérations, il convient de prendre une valeur initiale proche de la solution. Dans nos études, pour un angle de remplissage donné, la valeur initiale a été obtenue en calculant la force capillaire dans le cas où la distance de rapprochement δ est nulle.

Les courbes de déformation des grains ($\varepsilon = \frac{\delta}{R} \delta$) en fonction de volume du liquide pour deux rayons des grains ($R = 10\mu m$ et $20\mu m$) sont présentées sur la [Fig. 5.11]. Les paramètres utilisés dans les calculs sont les suivants : module d'Young $E = 65000 MPa$; coefficient de Poisson $\nu = 0.25$; tension superficielle $\gamma = 0.072 N/m$. On constate que la déformation des grains due à la présence du pont capillaire est très faible (de l'ordre de 10^{-5}) et que plus le rayon des grains est petit, plus les grains se déforment.

Par ailleurs, on a étudié également l'influence de la déformation des grains sur la force capillaire. Le rayon des grains est égal à $20\mu m$ et les paramètres pris dans le calcul sont les mêmes que ceux indiqués ci dessus. Les résultats sont présentés sur la [Fig. 5.12].

On constate que la prise en compte de la déformation des grains pour le calcul des forces capillaires modifie très peu les résultats obtenus en négligeant ce couplage. Ce résultat justifie le recours à une modélisation simplifiée pour la modélisation des milieux granulaires non saturés en petite déformation.

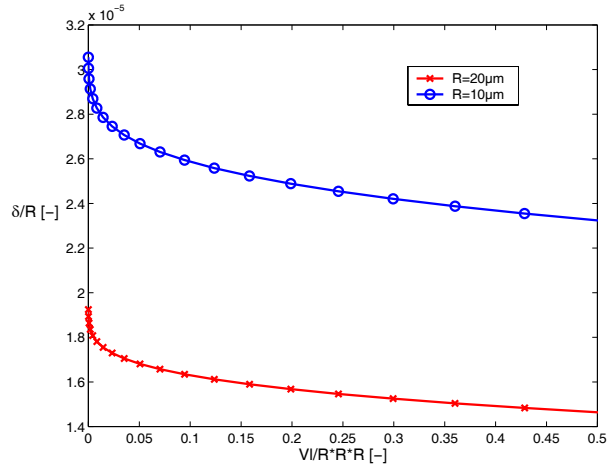


FIG. 5.11 – Déformation des grains due à la force capillaire

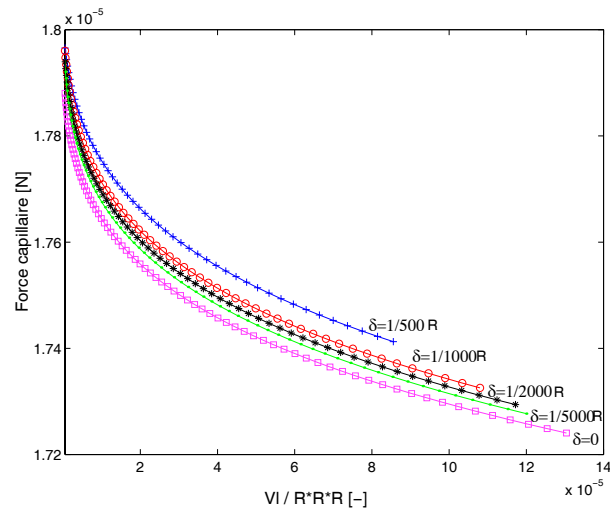


FIG. 5.12 – Influence de la déformation des grains sur la force capillaire

5.4.1.2 Application à l'empilement cubique

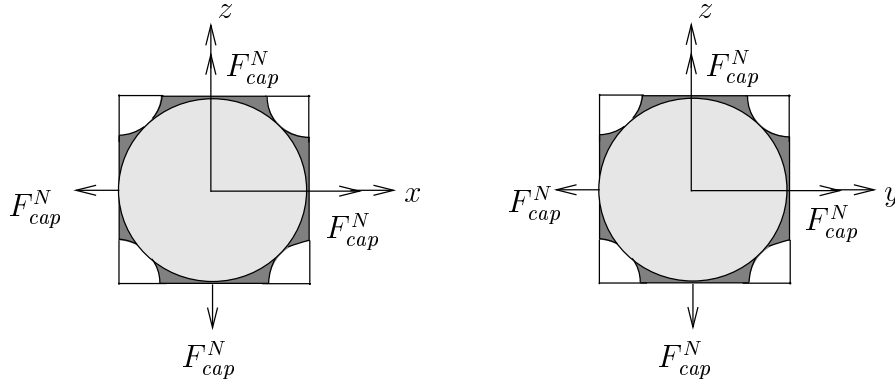


FIG. 5.13 – Cellule de base d'un empilement cubique

On considère un empilement cubique (six points de contact par grain, indice des vides égal à 0.91) de grains déformables dans la situation non saturée où le liquide forme des ponts liquides entre les grains. La cellule de base est représentée sur la [Fig. 5.13]. On montre que lorsque les grains sont soumis uniquement à l'action des forces de contact, non seulement les équations d'équilibre en résultante et en moment, mais aussi les conditions d'antipériodicité sur la frontière ∂C sont vérifiées. Elles sont donc s.a. En utilisant la relation (5.3), on obtient la contrainte macroscopique dans ce cas due uniquement aux forces capillaires :

$$\Sigma = \frac{1}{4R^2} F_{cap}^N \delta \quad (5.49)$$

où F_{cap}^N est calculée par la relation (5.44).

On s'intéresse de nouveau au problème du séchage. L'empilement est supposé libre de contraintes. La déformation macroscopique de l'empilement est calculée en utilisant les relations

$$\varepsilon = \frac{\delta}{R} \delta, \quad \text{avec} \quad \delta = \left(\frac{3(1-\nu^2)}{\sqrt{2RE}} F_H \right)^{2/3} \quad (5.50)$$

Les caractéristiques du matériau des grains et la tension superficielle sont identiques à celles prises pour le calcul de deux grains déformables au paragraphe (5.4.1.1). La courbe de la variation du volume de l'empilement cubique

en fonction de la saturation en liquide est présentée sur la [Fig. 5.14]. Les résultats montrent que le séchage s'accompagne d'un retrait dans le cas des faibles saturations en liquide pour un matériau granulaire de ce type.

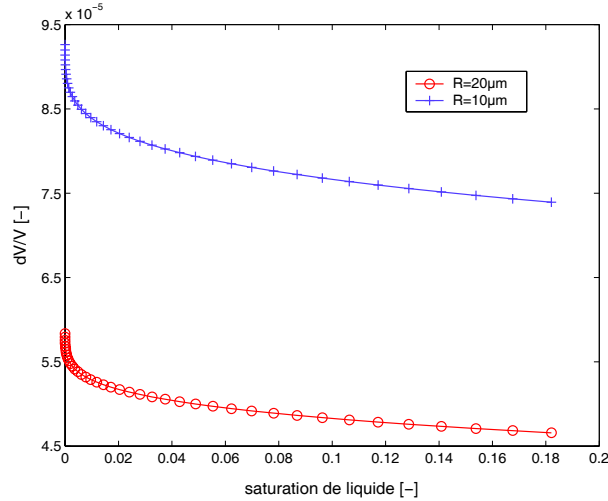


FIG. 5.14 – Variation du volume pour un empilement cubique lors du séchage

5.4.2 Simulation numérique pour un empilement de grains monodisperses désordonnés

Pour compléter nos études, on s'est intéressé à un empilement de grains sphériques monodisperses désordonnés tridimensionnel dans le cas non saturé. Cette étude a été réalisée à partir du programme développé par J. N. Roux (LMSGC). La méthode de simulation numérique utilisée dans le programme est la dynamique moléculaire dans le cadre de l'hypothèse des petites perturbations [14].

La préparation des échantillons est réalisée par compactage des assemblages sous une pression isotrope pour qu'ils soient homogènes à l'échelle macroscopique. Afin de mettre en relief l'effet des forces capillaires dans le cas non saturé, on a choisit une pression égale à $p = 10 \text{ Kpa}$. La condition aux limites utilisée ici est du type périodique. Sur la [Fig. 5.15], on a représenté une coupe d'un échantillon de 4000 particules pour un empilement désordonné périodique. Les grains sont constitués d'un matériau déformable homogène dont le comportement est élastique linéaire isotrope.

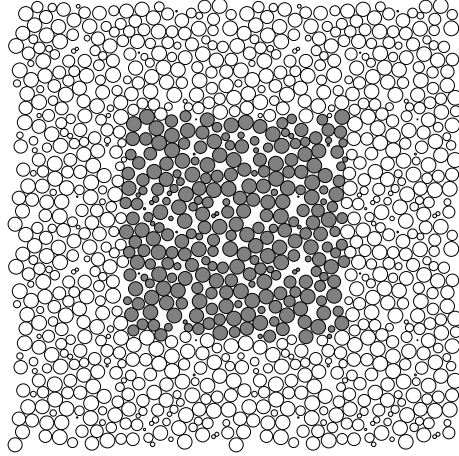


FIG. 5.15 – Coupe d'un échantillon de 4000 particules pour un empilement périodique monodisperse (partie grise)

Les interactions entre les grains sont décrites par la loi de Hertz. La rigidité normale k_n s'obtient par un calcul de la dérivée de l'expression de la force normale de contact F_H par rapport à la distance de rapprochement δ . Elle s'écrit

$$k_n = \frac{dF_H}{d\delta} = \frac{E\sqrt{2R}}{2(1-\nu^2)}\delta^{\frac{1}{2}} \quad (5.51)$$

La rigidité tangentielle k_t se calcule par [46]

$$k_t = \frac{2(1-\nu)}{2-\nu}k_n \quad (5.52)$$

Pour simplifier le problème, la matrice de rigidité est calculée sur la configuration initiale de l'empilement.

En utilisant ce programme, on a cherché à modéliser l'expérience suivante : un empilement de particules compacté sec est exposé à une ambiance humide dont on contrôle la pression capillaire. Il se produit donc une condensation capillaire autour des points de contact ou des points suffisamment proches entre grains. En fait, il a été montré dans [61] que le phénomène de condensation capillaire ne pouvait se produire entre surfaces solides que pour de très faibles distances de séparation (de l'ordre de 10 nm pour des particules millimétriques dans l'expérience rapportée dans [61]). On admet donc pour notre simulation qu'un ménisque ne peut se former qu'entre deux grains

réellement en contact. Ce point fixé, il reste à calculer en chaque point de contact les caractéristiques du pont capillaire. On utilise de nouveau l'approximation toroïdale. Pour chaque point de contact, les caractéristiques du ménisque (contrôlées par la valeur de l'angle de remplissage) sont ajoutées par un processus itératif de la façon à ce que la pression capillaire du ménisque soit égale à la pression capillaire prescrite.

Une fois la force capillaire calculées, on utilise le programme de simulation pour déterminer la nouvelle configuration d'équilibre. On peut alors en faisant varier la pression capillaire, et donc les caractéristiques des ménisques au contact, simuler le processus de séchage du milieu.

A titre d'exemple, on a représenté sur la [Fig. 5.16] les variations de volume pour quatre échantillons (4000 particules de rayon $R = 20\mu m$, compacité de 0.64) soumis à un séchage à contrainte macroscopique nulle. Les caractéristiques du matériau des grains et la tension superficielle utilisées ici sont identiques à celles prises pour le calcul de deux grains déformables. La portée de la force capillaire notée D_{cap} est prise égale à zéro dans ce calcul. C'est à dire qu'il n'y a pas de ménisque entre deux grains si la distance entre les grains D est positive.

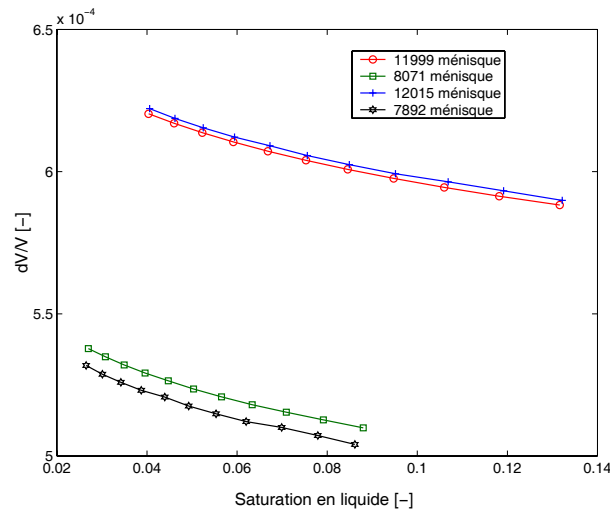


FIG. 5.16 – Variation de volume pour les empilements granulaires désordonnés

On constate de nouveau un retrait des échantillons au séchage. De plus, on remarque que la variation de volume des échantillons est proportionnelle aux nombres de ménisques pour des compacités d'échantillons identiques.

5.5 Conclusion

Dans ce chapitre, en utilisant la méthode d'homogénéisation et le théorème de Levin, on a obtenu la forme du comportement macroscopique pour un matériau granulaire sec, saturé et non saturé dans les situations où il est possible d'adopter une loi linéaire pour décrire le comportement aux contacts entre grains. Dans le cas de faibles saturations où la phase liquide forme des ponts liquides entre grains, on a démontré que la contribution de la tension de surface le long du périmètre de mouillage des grains à la force intergranulaire occasionnée par des ménisques n'est pas négligeable. En ce qui concerne la déformation volumique des matériaux granulaires considérés ici lors du séchage, on a toujours obtenu un retrait du matériau. Par ailleurs, on a montré que le couplage entre déformation des grains et force capillaire est négligeable dans le cas des faibles saturations.

Conclusions générales

Au cours de ce travail, nous nous sommes attachés à construire des modèles de comportement macroscopique pour divers milieux poreux non saturés en partant d'une description de la composition du milieu et du comportement de ces constituants à l'échelle des pores. Ce travail trouve sa justification dans les difficultés rencontrées lorsque la modélisation du comportement de ce type de matériaux est abordée en se plaçant uniquement à l'échelle macroscopique.

La première question abordée dans ce travail concerne la détermination des configurations d'équilibre et la stabilité d'une interface capillaire au sein d'un milieu poreux. La résolution de cette question permet en effet de déterminer les domaines occupés par les différentes phases fluides au sein de l'espace poreux, information nécessaire pour pouvoir mettre en œuvre une méthode de changement d'échelle.

Pour simplifier, on a supposé que le milieu poreux était indéformable et qu'il n'y avait pas d'hystérésis de mouillage des phases fluides sur le solide. Dans ce cas, les configurations d'équilibre du ménisque sont définies localement par l'équation de Laplace et l'équation de Young-Dupré.

Deux situations différentes ont été étudiées.

On a tout d'abord étudié le cas où un volume donné de fluide visqueux incompressible non volatile est introduit dans un milieu poreux initialement saturé par un gaz, les deux fluides étant immiscibles. Dans ce cas, le paramètre de chargement est le volume de liquide introduit. On s'est ensuite intéressé à la situation où des échanges de matière par changement de phase liquide-vapeur se produisaient au travers de l'interface, la phase liquide étant toujours constituée d'un fluide visqueux incompressible. La pression capillaire définie comme la différence entre la pression régnant dans le gaz et la pression régnant dans le liquide constitue alors le paramètre de chargement.

Dans les deux cas, on a montré que les configurations d'équilibre stable de l'interface réalisaient un minimum d'une énergie potentielle sur l'espace des

configurations de l'interface capillaire vérifiant les conditions de mouillage au raccord avec la surface solide, avec prise en compte d'une contrainte sur le volume occupé par la phase liquide dans le premier cas.

Ces résultats théoriques acquis, on s'est attaché à déterminer explicitement la forme de l'interface capillaire dans le cas d'une interface solide axisymétrique. Dans ce cas, le critère de stabilité est nécessaire pour choisir la configuration des phases au sein du pore en fonction des propriétés géométrique de sa frontière solide (phase mouillante au « centre » ou phase mouillante à « l'extérieur »). A cette occasion, on a également montré que l'approximation toroïdale, classiquement utilisée pour approcher le profil radial de l'interface capillaire dans le cas où la phase mouillante se trouve autour de l'axe de symétrie, était encore valable dans les situation où la phase mouillante se trouve rejetée loin de l'axe de symétrie. Les résultats pour différentes formes de pores sont présentés dans le mémoire.

La seconde question abordée dans ce travail concerne l'influence des morphologies de la phase solide des domaines occupés par les phases fluides au sein de l'espace poreux sur le comportement mécanique macroscopique du milieu poreux non saturé. Pour répondre à cette question, on s'est tout d'abord attaché à modéliser les déformations occasionnées par la désaturation d'un milieu poreux soumis à une contrainte constante nulle en condition isotherme dans le cadre des petites déformations dans le cadre d'une approche complètement linéaire. Comme on pouvait s'en douter, les résultats obtenus montrent que la morphologie des domaines occupés par les phases fluides et la phase solide influe notablement le comportement du milieu poreux dans la situation non saturée. En considérant des milieux idéalisés on a en particulier montré que le signe de l'incrément de déformation volumique du milieu poreux non saturé occasionné par un incrément de pression capillaire dépendait de la forme des pores. Par ailleurs, quand on compare les résultats obtenus pour différents milieux idéaux, il apparaît que le signe et l'intensité des déformations induites par le séchage sont corrélés à la valeur pente de la courbe capillaire dans le diagramme pression capillaire fonction de la saturation.

Pour approfondir cette question, on s'est ensuite attaché à construire un modèle permettant de prendre en compte le couplage entre la déformation des pores et les effets capillaires induits par la désaturation du milieu. Pour cela, on a étudié un milieu mésolfissuré dont l'espace poreux est constitué de fissures interconnectées entre elles et on a tenu compte dans l'approche du fait que les fissures s'ouvraient ou se refermaient lorsque le milieu se déformait à l'échelle macroscopique. Lorsque l'on examine le comportement de ce matériau lors d'une expérience de séchage sous contrainte macroscopique nulle conduite

à partir de l'état de référence saturé à pression capillaire nulle, on observe différents régimes en fonction de l'ouverture des fissures dans la configuration de référence.

Quand les fissures sont suffisamment ouvertes, le couplage ne joue aucun rôle et on observe le même comportement que celui prédit par le modèle linéaire : une phase de retrait suivie d'une phase de dilatation qui ramène le milieu dans sa configuration initiale à l'état sec. Pour des fissures plus fermées, on observe un retrait croissant en fonction de la pression capillaire, l'état sec étant obtenu lors de la fermeture complète des fissures. Enfin dans le cas des fissures les plus étroites, l'augmentation de la pression capillaire s'accompagne d'une déformation volumique de retrait du matériau mais sans désaturation des fissures. La prise en compte du couplage entre déformations des fissures et effets capillaire modifie donc radicalement les prévisions dans le cas des fissures très aplaties.

Pour conclure ce travail, on s'est brièvement intéressé à la situation particulière du milieu granulaire non saturé. En effet, les caractéristiques morphologiques de ce type de milieu sont complètement différentes de celles envisagées dans les deux chapitres précédents. Après avoir redonné les éléments permettant d'obtenir le comportement homogénéisé à partir d'un modèle discret de milieu granulaire, on a montré qu'il était légitime dans les situations courantes de négliger le couplage entre la déformation des grains et les effets capillaires. Ce résultat acquis, on a mis en œuvre un programme de simulation permettant de calculer les déformations liées au séchage de milieux granulaires denses dans le régime pendulaire. Comme on pouvait s'y attendre, il apparaît que pour tous les échantillons testés, le séchage du matériau s'accompagne de déformations de retrait.

Pour ce qui concerne les perspectives ouvertes par ce travail, il nous semble possible de valoriser les résultats généraux concernant l'équilibre et la stabilité des interfaces capillaires au sein d'un milieu poreux pour compléter les résultats et analyses déjà disponibles dans la littérature portant sur le lien entre la courbe capillaire et les propriétés microstructurales de l'espace poreux. La prise en compte de l'hystérésis de mouillage ou de la déformabilité de la phase solide constituent également des directions de recherche tout à fait intéressantes.

Pour ce qui concerne les milieux constitués de pores suffisamment arrondis (situation traitée au chapitre 3), il semble nécessaire d'étendre les résultats obtenus en prenant en compte maintenant des comportements de la phase solide plus complexes que l'élasticité linéaire. Ce travail semble absolument nécessaire pour pouvoir se rapprocher de la situation des matériaux réels.

En ce qui concerne les matériaux mesofissurés, la question de la propagation des fissures liées aux déformations du milieu lors d'une sollicitation quelconque constitue la prochaine étape à aborder. Ce travail permettra d'aborder des questions relevant directement de la durabilité des matériaux (béton en particulier). Enfin, l'application de l'approche développée dans le cinquième chapitre à des empilements lâches de matériaux granulaires est un travail qui peut permettre d'apporter des éclairages intéressants pour la modélisation du comportement des sols effondrables.

Bibliographie

- [1] A. W. Adamson, *Physical Chemistry of Surfaces*, John Wiley, New York 1967.
- [2] J. L. Auriault, E. Sanchez Palencia, Etude du comportement macroscopique d'un milieu poreux saturé déformable, *Journal de mécanique*, 16, (4), 575-603, 1977.
- [3] J. L. Auriault, Nonsaturated deformable porous media : quasistatics, *Transport in Porous media*, 2 : 45-64, 1987.
- [4] Y. Benveniste et al., On diagonal and elastic symmetry of the approximate effective stiffness tensor of heterogeneous media, *J. Mech. Phy. Solids*, 7 : 927-946, 1991.
- [5] J. Biarez, J. M. Fleureau and S. Taibi, Constitutive model for unsaturated granular media, *Powders and grains*, 51-58, 1993, Balkema.
- [6] M.A. Biot, General theory of three-dimensional consolidation, *J. Appl. Phys.*, 12 : 154-164, 1941.
- [7] M.A. Biot, Theory of elasticity and consolidation for a porous anisotropic solid, *J. Appl. Phys.*, 26 : 128-185, 1955.
- [8] M.A. Biot, Mechanics of deformation and acoustic propagation porous media, *J. Appl. Phys.*, 27 : 1482-1498, 1962.
- [9] M. Bornert, *Morphologie microstructurale et comportement mécanique ; caractérisations expérimentales, approches par bornes et estimations autocohérentes généralisées*, Thèse de Doctorat, E.N.P.C., Marne la Vallée, 1996.
- [10] M. Bornert, T. Bretheau and P. Gilormini, *Homogénéisation en mécanique des matériaux*, Hermes Science, France, 2001.
- [11] E. A. Boucher and T. G. J. Jones, Equilibrium and stability characteristics of zero-gravity fluid bridges constrained between equal solid rods, *Journal of Colloid and Interface Science*, vol. 126, 469-481, 1988.

- [12] N. Bourada-Benyamina, *Etude du comportement des milieux granulaires par homogénéisation périodique*, Thèse de Doctorat, E.N.P.C., Marne la Vallée, 1999.
- [13] B. Cambou, P. Dubujet, F. Emeriault, F. Sidoroff, Homogenization for granular materials, *European Journal of Mechanics, A/solids*, **14** : 225-276, 1995.
- [14] B. Cambou, M. Jean, (sous la direction de), *Micromécanique des matériaux granulaires*, Hermes Science publications, New Paris 2001.
- [15] C.S. Chang and C.L. Liao, Estimates of elastic modulus for media of randomly packed granules, *Applied Mechanics Review*, **47** : 197-206, 1994.
- [16] B. Budiansky and R. J. O'Connell, Elastic moduli of a cracked solid, *Int. J. Solids Structures*, **12** : 81-97, 1976.
- [17] X.Chateau, L.Dormieux, Homogénéisation d'un milieux poreux non saturé : lemme de Hill et applications, *C. R. Acad. Sci., Série II b*, **320** : 627-634, 1995.
- [18] X.Chateau, L.Dormieux, Approche micromécanique du comportement d'un milieu poreux non saturé, *C. R. Acad. Sci., Série II b*, **326** : 533-538, 1998.
- [19] X.Chateau, L.Dormieux, Comportement élastique d'un milieu poreux non saturé par homogénéisation, In *Ouvrages, Géomatériaux et Interactions - Modélisations multi-échelles*, Pijaudier-Cabot G. et al., Hermes, 1998.
- [20] X. Chateau et L. Dormieux, Micromechanics of saturated and unsaturated porous media, *Int. J. Numer. Meth. Geomech.*, **26** :831-844, 2002.
- [21] X. Chateau et L. Dormieux, *Mécanique des milieux poreux non saturés sous la direction de O. Coussy et J. M. Fleureau*, chapitre Homogénéisation pour les milieux poreux non saturés, 175-230. Hermès, Paris, 2002.
- [22] X. Chateau, P. Moucheront, and O. Pitois, Micromechanics of unsaturated granular media, *Journal of Engineering Mechanics*, **128** : 856-863, 2002.
- [23] X.Chateau, L.Dormieux and Y. XU, Approche micromécanique du comportement d'un milieu mésolfissuré non saturé, *Mécanique & Industries*, Vol. 4, No. 4, 435-442, 2003.
- [24] T. Y. Chen, J. A. Tsamopoulos, R. J. Good, Capillary bridges between parallel and non-parallel surfaces and their stability, *Journal of Colloid and Interface Science*, vol. **151**, No. **1**, 49-69, 1992.

- [25] G. C. Cho, J. Carlos Santamarina, Unsaturated particulate materials – particle-level studies, *Journal of geotechnical and geoenvironmental engineering*, vol. **127**, No. **1**, 84-96, 2001.
- [26] O. Coussy, *Mechanics of porous continua*, John Wiley, New York 1995.
- [27] Frank R. E. De Bisschop and Wilfried J. L. Rigole, A physical model for liquid capillary bridges between adsorptive solid spheres : the nodoid of plateau, *Journal of colloid and interface*, vol. bf 88, No. **1**, 117-128, 1982.
- [28] V. Deudé, *Non linéarités géométriques et physiques dans les milieux poreux : apport des méthodes de changement d'échelle*, Thèse de Doctorat, E.N.P.C., Marne la Vallée, 2002.
- [29] V. Deudé, L. Dormieux, D. Kondo and S. Maghous, Micromechanical approach to the non linear poroelasticity - Application to cracked rocks, *Journal of Engineering Mechanics*, Volume 128, No. 8, 848–855, 2002.
- [30] V. Deudé, L. Dormieux, D. Kondo, et V. Pensée, Propriétés élastiques non linéaires d'un milieu mésolfissuré, *C. R. Mécanique*, t. 330, 587–592, 2002.
- [31] L. Dormieux, A. Molinari and D. Kondo, Micromechanical approach to the behavior of poroelastic materials, *J. Mech. Phys. Solids*, Volume 50, Issue 10, 2203-2231, 2002.
- [32] F.A.L. Dullien, *Fluid transport and pore structure*, Academic Press, Porous media, San diego, 1992.
- [33] J. D. Eshelby, The determination of the elastic field of an ellipsoidal inclusion, and related problem, *Proc. Royal Society London, A*, **241**, 376-396, 1957.
- [34] J. D. Eshelby, Elastic inclusions and inhomogeneities, in *I. N. Sneddon and R. Hill, editors, Progress in Solides Mechanics*, volume ?, Amsterdam, north Holland, 87-140, 1961.
- [35] A. Feraille-Fresnet. *Le role de l'eau dans le comportement à haute température des bétons*, Thèse de doctorat, E.N.P.C., Marne la Vallée, 2000.
- [36] R. Finn, *Equilibrium Capillary Surfaces*, Springer-verlag, Wien New York, 1986.
- [37] L. R. Fisher, J. N. Israelachvili Direct measurement of the effect of meniscus forces on adhesion : a study of the applicability of macroscopic thermodynamics to microscopic liquid interfaces, *Colloids and Surfaces*, 3, 303-319, 1981.
- [38] Fredlund, D. G. and Rahardjo, H., *Soil mechanics for unsaturated soils*, John Wiley, U. K, 1993.

- [39] R. D. Gillette and D. C. Dyson, Stability of fluid interface of revolution between equal solid circular plates, *The chemical Engineering Journal*, volume2, Issue 1, 44-54, 1971.
- [40] Green, A. E. and Zerna, W., *Theoretical Elasticity*, Dover publications, New York, 2nd edition, 1992.
- [41] W. B. Haines, A note on the cohesion developed by capillary forces in an ideal soil, *J. Agric. Sci.*, 15, 529-543, 1925.
- [42] H. Hertz, On the contact of elastic bodies, *Journal of Die Reine und Angewandte Mathematic*, 92 : 156-171, 1881.
- [43] R. Hill, A self-consistent mechanics of composite materials, *J. Mech. Phys. Solids*, 13, 213-222, 1965.
- [44] R. Hill, The essential structure of constitutive laws for metal composites and polycrystals, *J. Mech. Phys. Solids*, 15, 79-95, 1967.
- [45] H. Horii and S. Nemat-Nasser, Overall moduli of solids with micro-cracks : load induced anisotropy, *J. Mech. Phys. Solids*, 31(2) : 155-171, 1983.
- [46] K. L. Johnson, *Contact Mechanics*, Cambridge University Press, 1985.
- [47] L. D. Landau et E. M. Lifshitz, *Statistical Physics, Part 1*, vol. 5 of *Course of Theoretical Physics*, Pergamon Press, 3ème edition, 1987.
- [48] D. Langbein, Stability of liquid bridges between parallel plates, vol. 5, *Micrograv. Sci. Technol.*, 2-11, 1992.
- [49] P. S. Laplace, *Traité de mécanique Céleste*, 1805, Suppl. au Xe Livre, Paris, Coureier. Transl. and annotated by N. Bowditch (1839). Vol. 4, pp. 685-1018. Boston : Little, Brown reprinted by Chelsea Publ. Co., NY (1966).
- [50] T. Lassabatère, *Couplages hydromécaniques en milieu poreux non saturé avec changement de phase - Application au retrait de dessiccation*, Thèse de Doctorat, E.N.P.C., Marne la Vallée, 1994.
- [51] E. Lemarchand, *Contribution de la micromécanique à l'étude des phénomènes de transport et de couplage poromécanique dans les géomatériaux : Application aux phénomènes de gonflement*, Thèse de Doctorat, E.N.P.C., Marne la Vallée, 2001.
- [52] G. Lian, C. Thornton, et M.J. Adams, A theoretical study of the liquid bridge forces between two rigid spherical bodies, *J. Colloid Int. Sci.*, 161 :138-147, 1993.
- [53] J. Mandel, *Plasticite classique et viscoplasticite*, CISM Lecture Notes n° 97, Springer Verlag, Wein, 1972.

- [54] Marshall, T. and Holmes, J., *Soil physics*, Cambridge University Press, U.K, 1988, 2nd edition.
- [55] R. D. Mindlin and H. Deresiewicz, Elastic spheres in contact under varying oblique forces, *J. Appl. Mech.*, vol. **20**(3), 327-344, 1953.
- [56] T. Mori, K. Tanaka, Average stress in matrix and average elastic energy of materials with misfitting inclusions, *Acta Metall. Mater.*, vol. **21**, 597-629, 1973.
- [57] S. Nemat-Nasser, M. Hori, *Micromechanics : overall properties of heterogeneous materials*, North-Holland series in applied mathematics and mechanics, North-Holland, 1993.
- [58] Quoc-Son Nguyen, *Stabilité et mécanique non linéaire*, Hermès Science Publications, Paris, 2000.
- [59] V. Pensée, L. Dormieux, D. Kondo, et V. Deudé, Poroélasticité d'un milieu mésolfissuré : analyse micromécanique. *C. R. Mécanique*, t. 330, 147-152, 2002.
- [60] O. Pitois, *Assemblée de grains lubrifiés : Elaboration d'un système modèle expérimental et étude de la loi de contact*, Thèse de Doctorat, E.N.P.C., Marne la Vallée, 1999.
- [61] F. Restagno, L. Bocquet, J. Crassous, E. Charlaix, Slow kinetics of capillary condensation in confined geometry : experiment and theory, *Colloids and Surfaces A : Physicochemical and Engineering Aspects*, vol. **206**, No. 69-77, 2002.
- [62] A. E. Sáez, R. G. Carbonell, The equilibrium shape and stability of menisci formed between two touching cylinders, *J. Fluid Mech.*, vol. **176**, 357-378, 1987.
- [63] A. E. Sáez, R. G. Carbonell, The equilibrium and stability of menisci between touching spheres, *Journal of Colloid and Interface Science*, vol. **140**, No. **2**, 408-418, 1990.
- [64] J. Salençon, *Mécanique des milieux continus*. Ellipses, Paris, 1988.
- [65] B. A Scherfler, Recent advances in numerical modelling of geomaterials, key note lecture, in *III EPMESC CONT.*, Meccanica, Macau, 1990.
- [66] N. Schmitt, *Homogénéisation des matériaux hétérogènes. Revue de quelques méthodes pour les milieux élastiques à phases parfaitement dispersées*, Rapport interne 130. Laboratoire de Mécanique et Technologie, Cachan, 1992.
- [67] P. Suquet, Elements of homogenization for inelastic solid mechanics, *Homogenization Techniques for Composite Media*, vol. **272**, 193-278, Springer, Berlin, 1987.

- [68] K. von Terzaghi, *Theoretical Soil Mechanics*, John Wiley & Sons Inc., Chichester, 1942.
- [69] Oriol T. Valls, Gene F. Mazenko, Nucleation in a time-dependent Ginzburg-Landau model : A numerical study, *Physical Review B*, vol. **42**, No. **10**, 6614-6622, 1990.
- [70] T. Young, An essay on the cohesion of fluids, *Philos. Trans. R. Soc. London Ser.*, A95 : 65-87, 1805.
- [71] A. Zaoui, *Matériaux hétérogènes et composites*, Cours de l'Ecole Polytechnique, Palaiseau, 1997.