Algèbres de réalisabilité : un programme pour bien ordonner $\mathbb{R}$

Jean-Louis Krivine
krivine@pps.jussieu.fr

23 mars 2010

Introduction

Le principal problème, pour transformer les preuves mathématiques en programmes, est naturellement posé par les *axiomes* : en effet, on sait depuis longtemps comment traiter une preuve en logique intuitionniste pure (i.e. sans axiome), y compris au second ordre [2, 7, 4].
Le premier de ces axiomes est le *tiers exclu*, et il paraissait insurmontable. La solution, tout à fait surprenante, a été donnée par T. Griffin [5] en 1990 et c'est là une découverte essentielle pour la logique. Dès ce moment, il était clair que tous les autres axiomes allaient suivre, en se plaçant dans un cadre adéquat.

La *théorie de la réalisabilité classique* constitue un tel cadre : elle est développée dans [11, 12], où on traite les axiomes de l'*Analyse* (arithmétique du second ordre avec choix dépendant).
Dans [14], on commence à s'occuper de l'axiome du choix général, avec l'existence d'un ultrafiltre sur $\mathbb{N}$; l'outil principal est la notion de *structure de réalisabilité*, dans laquelle les programmes sont écrits en λ-calcul.
On la remplace ici par celle d'*algèbre de réalisabilité*, plus simple, et beaucoup plus utilisable du point de vue informatique. Il s'agit d'une variante de la notion usuelle d'*algèbre combinatoire*.
Le langage de programmation n'est donc plus le λ-calcul, mais un système convenable de combinateurs ; les λ-termes ne sont considérés que comme des notations ou abréviations, fort utiles au demeurant : un λ-terme est infiniment plus lisible que sa compilation en combinateurs.

On montre ici comment transformer en programmes les preuves utilisant l'axiome du choix dépendant et :
i) l'existence d'un ultrafiltre non trival sur $\mathbb{N}$;
ii) l'existence d'un bon ordre sur $\mathbb{R}$.
Bien entendu, (ii) implique (i) mais, la méthode utilisée pour (i) est intéressante, car elle donne des programmes plus simples. Ce point est important, parce qu'un nouveau problème apparaît maintenant, capital et fort difficile : interpréter les programmes obtenus, c'est-à-dire expliquer leur comportement. Un travail passionnant et de longue haleine.

Le cadre logique est donné par la *logique classique du second ordre*, autrement dit, le schéma de compréhension. Toutefois, comme on utilise une relation d'appartenance sur les individus, il s'agit, en fait, d'une logique d'ordre 3 au moins. C'est d'ailleurs indispensable puisque, si l'axiome du choix dépendant sur $\mathbb{R}$ est exprimable comme un schéma au second ordre, les axiomes (i) et (ii) ne le sont pas.
En utilisant la méthode exposée dans [10], on peut obtenir les mêmes résultats dans ZF.

Il me paraît clair que la technique utilisée ici permettra de traiter tous les axiomes "naturels" introduits en théorie des ensembles. C'est déjà fait pour l'*hypothèse du continu*, qui fera l'objet d'un prochain article. L'axiome du choix et l'hypothèse généralisée du continu dans ZF ne me semblent pas soulever de problème sérieux, à part celui-ci : il faudra se servir du *forcing avec classes propres* d'Easton [3] à l'intérieur du modèle de réalisabilité, ce qui menace d'être très lourd.
Un problème ouvert fort intéressant est posé par les axiomes de grand cardinaux, comme l'existence d'un cardinal mesurable, ou par l'axiome de détermination.

Mais le problème ouvert essentiel reste de comprendre ce que font les programmes obtenus, et ainsi d'arriver à *les exécuter*. Je crois que bien des surprises nous attendent là.
En effet, au fur et à mesure qu'on réalise les axiomes usuels des mathématiques, on est amené à introduire des outils tout à fait standard et indispensables en programmation système : pour la loi de Peirce, ce sont les continuations (particulièrement utilisées pour les exceptions) ; pour l'axiome du choix dépendant, c'est l'horloge et la numérotation des processus ; pour l'axiome de l'ultrafiltre et le bon ordre sur $\mathbb{R}$, ça n'est rien de moins que la lecture et l'écriture dans une mémoire globale, autrement dit *l'affectation*.
On peut raisonnablement conjecturer que ces outils ne sont pas mobilisés pour rien, et donc que les programmes fort complexes qu'on obtient par ce travail de formalisation accomplissent des tâches intéressantes. Lesquelles ?

Remarque.
Le problème de transformer en programmes les preuves utilisant certains axiomes doit être posé correctement du point de vue informatique. Prenons comme exemple une preuve d'un théorème d'arithmétique, utilisant un bon ordre de $\mathcal{P}(\mathbb{N})$: en restreignant cette preuve à la classe des ensembles constructibles, on la transforme aisément en une preuve du même théorème n'utilisant plus ce bon ordre. Il suffirait donc, ensuite, de transformer cette nouvelle preuve en programme.
Mais l'extraction du programme aura été effectuée sur une preuve *profondément différente de la preuve originale*. De plus, avec ce procédé, il est impossible d'associer un programme à l'axiome du bon ordre lui-même. Du point de vue informatique, il y a là un grave défaut de *modularité* : au lieu d'avoir mis l'axiome du bon ordre dans une *bibliothèque de programmes*, on est obligé de recommencer le travail de programmation à chaque nouvelle preuve.
La méthode exposée ici utilise seulement le λ-terme *extrait de la preuve originale*, qui contient donc une instruction pour l'axiome du bon ordre sur $\mathcal{P}(\mathbb{N})$, qui n'est pas encore implantée. Par une compilation convenable, elle le transforme en un programme qui réalise le théorème considéré.
Comme corollaire de cette technique, on obtient un programme associé à l'axiome du bon ordre, que l'on peut mettre en bibliothèque pour le réutiliser.

Algèbres de réalisabilité

Une *algèbre de réalisabilité* est constituée par trois ensembles : $\mathbf{\Lambda}$ (ensemble des *termes*), $\mathbf{\Pi}$ (ensemble des *piles*), $\mathbf{\Lambda}\star\mathbf{\Pi}$ (ensemble des *processus*) avec les opérations suivantes :
$(\xi,\eta)\mapsto(\xi)\eta$ de $\mathbf{\Lambda}^2$ dans $\mathbf{\Lambda}$ (*application*) ;
$(\xi,\pi)\mapsto\xi\,.\,\pi$ de $\mathbf{\Lambda}\times\mathbf{\Pi}$ dans $\mathbf{\Pi}$ (*empiler*) ;
$(\xi,\pi)\mapsto\xi\star\pi$ de $\mathbf{\Lambda}\times\mathbf{\Pi}$ dans $\mathbf{\Lambda}\star\mathbf{\Pi}$ (*processus*) ;
$\pi\mapsto\mathsf{k}_\pi$ de $\mathbf{\Pi}$ dans $\mathbf{\Lambda}$ (*continuation*).

On a, dans $\mathbf{\Lambda}$, des éléments distingués B,C,E,I,K,W,cc, appelés *combinateurs élémentaires* ou *instructions*.

Notation. Le terme $(\ldots(((\xi)\eta_1)\eta_2)\ldots)\eta_n$ sera aussi noté $(\xi)\eta_1\eta_2\ldots\eta_n$ ou $\xi\eta_1\eta_2\ldots\eta_n$.
Par exemple : $\xi\eta\zeta = (\xi)\eta\zeta = (\xi\eta)\zeta = ((\xi)\eta)\zeta$.

On définit une relation de préordre, notée $\succ$, sur $\mathbf{\Lambda}\star\mathbf{\Pi}$. C'est la plus petite relation réflexive et transitive telle que, quels que soient $\xi,\eta,\zeta \in \mathbf{\Lambda}$ et $\pi,\varpi \in \mathbf{\Pi}$, on ait :

$(\xi)\eta\star\pi \succ \xi\star\eta\,.\,\pi$.
$I\star\xi\,.\,\pi \succ \xi\star\pi$.
$K\star\xi\,.\,\eta\,.\,\pi \succ \xi\star\pi$.
$E\star\xi\,.\,\eta\,.\,\pi \succ (\xi)\eta\star\pi$.
$W\star\xi\,.\,\eta\,.\,\pi \succ \xi\star\eta\,.\,\eta\,.\,\pi$.
$C\star\xi\,.\,\eta\,.\,\zeta\,.\,\pi \succ \xi\star\zeta\,.\,\eta\,.\,\pi$.
$B\star\xi\,.\,\eta\,.\,\zeta\,.\,\pi \succ (\xi)(\eta)\zeta\star\pi$.
$\mathsf{cc}\star\xi\,.\,\pi \succ \xi\star\mathsf{k}_\pi\,.\,\pi$.
$\mathsf{k}_\pi\star\xi\,.\,\varpi \succ \xi\star\pi$.

On se donne enfin une partie $\perp\!\!\!\perp$ de $\mathbf{\Lambda}\star\mathbf{\Pi}$ qui est un segment terminal pour ce préordre, c'est-à-dire que : $\mathsf{p}\in\perp\!\!\!\perp,\ \mathsf{p}'\succ\mathsf{p} \Rightarrow \mathsf{p}'\in\perp\!\!\!\perp$.
Autrement dit, on demande que $\perp\!\!\!\perp$ ait les propriétés suivantes :

$(\xi)\eta\star\pi\notin\perp\!\!\!\perp \Rightarrow \xi\star\eta\,.\,\pi\notin\perp\!\!\!\perp$.
$I\star\xi\,.\,\pi\notin\perp\!\!\!\perp \Rightarrow \xi\star\pi\notin\perp\!\!\!\perp$.
$K\star\xi\,.\,\eta\,.\,\pi\notin\perp\!\!\!\perp \Rightarrow \xi\star\pi\notin\perp\!\!\!\perp$.
$E\star\xi\,.\,\eta\,.\,\pi\notin\perp\!\!\!\perp \Rightarrow (\xi)\eta\star\pi\notin\perp\!\!\!\perp$.
$W\star\xi\,.\,\eta\,.\,\pi\notin\perp\!\!\!\perp \Rightarrow \xi\star\eta\,.\,\eta\,.\,\pi\notin\perp\!\!\!\perp$.
$C\star\xi\,.\,\eta\,.\,\zeta\,.\,\pi\notin\perp\!\!\!\perp \Rightarrow \xi\star\zeta\,.\,\eta\,.\,\pi\notin\perp\!\!\!\perp$.
$B\star\xi\,.\,\eta\,.\,\zeta\,.\,\pi\notin\perp\!\!\!\perp \Rightarrow (\xi)(\eta)\zeta\star\pi\notin\perp\!\!\!\perp$.
$\mathsf{cc}\star\xi\,.\,\pi\notin\perp\!\!\!\perp \Rightarrow \xi\star\mathsf{k}_\pi\,.\,\pi\notin\perp\!\!\!\perp$.
$\mathsf{k}_\pi\star\xi\,.\,\varpi\notin\perp\!\!\!\perp \Rightarrow \xi\star\pi\notin\perp\!\!\!\perp$.

c-termes et λ-termes

On appelle c-*terme* un terme construit avec des variables, les combinateurs élémentaires B,C,E,I,K,W,cc et l'application (fonction binaire). Un c-terme est dit *clos* s'il est sans variable ; il est alors aussi appelé *quasi-preuve* et a une valeur dans $\mathbf{\Lambda}$.

Etant donné un c-terme t et une variable x, on définit le c-terme $\lambda x\,t$ par récurrence sur t ; pour cela, on utilise le premier cas applicable dans la liste suivante :

1. $\lambda x\,t = (K)t$ si t ne contient pas x.
2. $\lambda x\,x = I$.
3. $\lambda x\,tu = (C\lambda x(E)t)u$ si u ne contient pas x.
4. $\lambda x\,tx = (E)t$ si t ne contient pas x.
5. $\lambda x\,tx = (W)\lambda x(E)t$ (si t contient x).
6. $\lambda x(t)(u)v = \lambda x(B)tuv$ (si uv contient x).

On voit facilement que cette réécriture se termine : en effet, les règles 1 à 5 diminuent le nombre d'atomes *du terme initial* présents sous λx, et la règle 6 ne peut être appliquée consécutivement qu'un nombre fini de fois.

Les λ-*termes* sont définis de la façon habituelle.

Tout λ-terme P, comportant éventuellement B,C,E,I,K,W,cc, définit donc un c-terme que nous notons $|P|$. Si P est un λ-terme clos, il a donc une valeur dans $\mathbf{\Lambda}$.

Remarque. La notation λx est donc utilisée dans deux sens différents : dans les λ-termes, c'est un constituant de la syntaxe ; dans les c-termes, c'est une abréviation. Dans cet article, sauf pour le théorème 1, c'est dans ce dernier sens que nous l'utiliserons exclusivement.

Théorème 1. *Si $t = |P|$ et $u = |Q|$, alors $t[u/x] = |P[Q/x]|$.*

Preuve par récurrence sur la longueur de P. C'est immédiat si P est un atome, ou si $P = P_0P_1$. Si $P = \lambda y\, P'$, alors $t = \lambda y\, t'$ avec $t = |P|, t' = |P'|$. On a $t'[u/x] = |P'[Q/x]|$ par hypothèse de récurrence. Donc $|P[Q/x]| = |\lambda y\, P'[Q/x]| = \lambda y|P'[Q/x]| = \lambda y\, t'[u/x]$. Comme $t = \lambda y\, t'$, il reste à montrer $\lambda y\, t'[u/x] = (\lambda y\, t')[u/x]$, ce qui est le lemme 2.

C.Q.F.D.

Lemme 2. *Si t, u sont des c-termes, on a $\lambda y\, t[u/x] = (\lambda y\, t)[u/x]$.*

Preuve par récurrence sur le nombre de règles utilisées pour traduire $\lambda y\, t$. On considère la première règle utilisée.
Si c'est la règle 1, t ne contient pas y et $\lambda y\, t = Kt$. Or, u ne contient pas y par hypothèse, donc $t[u/x]$ ne le contient pas non plus. On a donc $\lambda y\, t[u/x] = Kt[u/x]$, d'où le résultat.
Si c'est l'une des autres règles, c'est trivial.

C.Q.F.D.

Remarque. Le théorème 1 n'est pas utilisé dans la suite.

Théorème 3. *Si t est un c-terme ne comportant que les variables $x_1, \ldots, x_n$, et si $\xi_1, \ldots, \xi_n \in \mathbf{\Lambda}$, alors $\lambda x_1 \ldots \lambda x_n\, t \star \xi_1 \,.\, \ldots \,.\, \xi_n \,.\, \pi \succ t[\xi_1/x_1, \ldots, \xi_n/x_n] \star \pi$.*

En raisonnant par récurrence sur n, on est ramené au cas où $n = 1$, qui est donné par le lemme 4.

Lemme 4. *Si t est un c-terme ne comportant que la variable x, et si $\xi \in \mathbf{\Lambda}$, alors :*
$\lambda x\, t \star \xi \,.\, \pi \succ t[\xi/x] \star \pi$.

Preuve par récurrence sur le nombre de règles 1 à 6 utilisées pour traduire le terme $\lambda x\, t$. On considère la première règle utilisée .
Si c'est la règle 1, on a $\lambda x\, t \star \xi \,.\, \pi \equiv (K)t \star \xi \,.\, \pi \succ t \star \pi \equiv t[\xi/x] \star \pi$ puisque x n'est pas dans t.
Si c'est la règle 2, on a $t = x$ et $\lambda x\, t \star \xi \,.\, \pi \equiv I \star \xi \,.\, \pi \succ \xi \star \pi \equiv t[\xi/x] \star \pi$.
Si c'est la règle 3, on a $t = uv$ et $\lambda x\, t \star \xi \,.\, \pi \equiv (C\lambda x(E)u)v \star \xi \,.\, \pi \succ C \star \lambda x(E)u \,.\, v \,.\, \xi \,.\, \pi$
$\succ \lambda x(E)u \star \xi \,.\, v \,.\, \pi \succ (E)u[\xi/x] \star v \,.\, \pi$ (par hypothèse de récurrence) $\succ E \star u[\xi/x] \,.\, v \,.\, \pi$
$\succ (u[\xi/x])v \star \pi \equiv t[\xi/x] \star \pi$ puisque x n'est pas dans v.
Si c'est la règle 4, on a $t = ux$ et $\lambda x\, t \star \xi \,.\, \pi \equiv (E)u \star \xi \,.\, \pi \succ E \star u \,.\, \xi \,.\, \pi \succ u\xi \star \pi \equiv t[\xi/x] \star \pi$ puisque u ne contient pas x.
Si c'est la règle 5, on a $t = ux$ et $\lambda x\, t \star \xi \,.\, \pi \equiv (W)\lambda x(E)u \star \xi \,.\, \pi \succ W \star \lambda x(E)u \,.\, \xi \,.\, \pi$
$\succ \lambda x(E)u \star \xi \,.\, \xi \,.\, \pi \succ (E)u[\xi/x] \star \xi \,.\, \pi$ (par hypothèse de récurrence) $\succ E \star u[\xi/x] \,.\, \xi \,.\, \pi$
$\succ (u[\xi/x])\xi \star \pi \equiv t[\xi/x] \star \pi$.
Si c'est la règle 6, on a $t = (u)(v)w$ et $\lambda x\, t \star \xi \,.\, \pi \equiv \lambda x(B)uvw \star \xi \,.\, \pi \succ$
$\succ (B)u[\xi/x]v[\xi/x]w[\xi/x] \star \pi$ (par hypothèse de récurrence)
$\succ B \star u[\xi/x] \,.\, v[\xi/x] \,.\, w[\xi/x] \,.\, \pi \succ (u[\xi/x])(v[\xi/x])w[\xi/x] \star \pi \equiv t[\xi/x] \star \pi$.

C.Q.F.D.

Déduction naturelle

Avant d'expliciter le langage formel que nous allons utiliser, il est bon de décrire informellement les structures (modèles) que nous avons en vue. Ce sont des structures du second ordre, à deux

types d'objets : les *individus* appelés aussi *conditions* et les prédicats (d'arité diverses). Comme il s'agit d'une description intuitive, on se limite aux modèles dits *pleins*.
Un tel modèle est constitué de :
• un ensemble infini P (ensemble des individus ou conditions).
• l'ensemble des prédicats d'arité k est $\mathcal{P}(P^k)$ (modèle plein).
• des fonctions de P^k dans P.
En particulier, on a un individu 0 et une fonction bijective $s : P \to (P \setminus \{0\})$. Cela permet de définir l'ensemble des entiers $\mathbb{N}$ comme le plus petit ensemble contenant 0 et clos par s.
On a aussi une condition notée **1** et une application notée $\wedge$ de P^2 dans P.
• des relations (prédicats fixés) sur P. En particulier, on a la relation d'égalité sur les individus et le sous-ensemble C des *conditions non triviales.*
$\mathsf{C}[p{\wedge}q]$ se lit : "p et q sont deux conditions *compatibles*".

On passe maintenant au langage formel, pour écrire des formules et des preuves concernant ces structures. Il est constitué par :

• des *variables d'individu* ou *variables de conditions* notées $x, y, \ldots$ ou $p, q, \ldots$
• des *variables de prédicat* ou *variables du second ordre* $X, Y, \ldots$; chaque variable de prédicat a une arité qui est dans $\mathbb{N}$.
• des *symboles de fonction sur les individus* $f, g, \ldots$; chacun d'eux a une arité qui est dans $\mathbb{N}$.
On a, en particulier, un symbole de fonction d'arité k pour chaque fonction récursive $f : \mathbb{N}^k \to \mathbb{N}$. Ce symbole sera noté aussi f.
On a aussi un symbole de constante **1** (qui représente la plus grande condition) et un symbole de fonction binaire $\wedge$ (qui représente la fonction inf sur les conditions).

Les *termes* sont formés à la façon habituelle avec les variables et les symboles de fonction.

Les *formules atomiques* sont de la forme $X(t_1, \ldots, t_n)$, où X est une variable de prédicat d'arité n, et $t_1, \ldots, t_n$ sont des termes.

Les formules sont construites comme d'habitude, à partir des formules atomiques, à l'aide des seuls symboles logiques $\to, \forall$:
• chaque formule atomique est une formule ;
• si A, B sont des formules, alors $A \to B$ est une formule ;
• si A est une formule, alors $\forall x\, A$ et $\forall X\, A$ sont des formules.

Notations. La formule $A_1 \to (A_2 \to (\ldots (A_n \to B) \ldots)$ sera notée $A_1, A_2, \ldots, A_n \to B$.
Les symboles logiques usuels sont définis comme suit :
(X est une variable de prédicat d'arité 0, appelée aussi *variable propositionnelle*)
$\bot \equiv \forall X\, X$; $\neg A \equiv A \to \bot$; $A \vee B \equiv (A \to \bot), (B \to \bot) \to \bot$; $A \wedge B \equiv (A, B \to \bot) \to \bot$;
$\exists\, \mathbf{y} F \equiv (\forall \mathbf{y}(F \to \bot) \to \bot$ (où $\mathbf{y}$ est une variable d'individu ou de prédicat).
Plus généralement, on écrira $\exists\, \mathbf{y}\{F_1, \ldots, F_k\}$ pour $\forall\, \mathbf{y}(F_1, \ldots, F_k \to \bot) \to \bot$.
On pourra noter $\vec{F}$ une suite finie de formules $F_1, \ldots, F_k$;
on écrira alors $\exists\, \mathbf{y}\{\vec{F}\}$ et $\forall\, \mathbf{y}(\vec{F} \to \bot) \to \bot$.

$x = y$ est la formule $\forall Z(Zx \to Zy)$, où Z est une variable de prédicat unaire.

Les règles de la déduction naturelle sont les suivantes (les A_i sont des formules, les x_i sont des variables de c-terme, t, u sont des c-termes) :

1. $x_1 : A_1, \ldots, x_n : A_n \vdash x_i : A_i$.
2. $x_1 : A_1, \ldots, x_n : A_n \vdash t : A \to B, \quad x_1 : A_1, \ldots, x_n : A_n \vdash u : A \quad \Rightarrow$
$x_1 : A_1, \ldots, x_n : A_n \vdash tu : B$.
3. $x_1 : A_1, \ldots, x_n : A_n, x : A \vdash t : B \quad \Rightarrow \quad x_1 : A_1, \ldots, x_n : A_n \vdash \lambda x\, t : A \to B$.
4. $x_1 : A_1, \ldots, x_n : A_n \vdash t : A \quad \Rightarrow \quad x_1 : A_1, \ldots, x_n : A_n \vdash t : \forall \mathbf{x}\, A$ quelle que soit la variable $\mathbf{x}$

(individu ou prédicat) qui n'apparaît pas dans $A_1, \ldots, A_n$.
5. $x_1 : A_1, \ldots, x_n : A_n \vdash t : \forall x\, A \quad \Rightarrow \quad x_1 : A_1, \ldots, x_n : A_n \vdash t : A[\tau/x]$ où x est une variable d'individu et τ un terme.
6. $x_1 : A_1, \ldots, x_n : A_n \vdash t : \forall X\, A \quad \Rightarrow \quad x_1 : A_1, \ldots, x_n : A_n \vdash t : A[F/Xy_1 \ldots y_k]$ où X est une variable de prédicat d'arité k et F une formule quelconque.

Remarque.
Dans la notation $A[F/Xy_1 \ldots y_k]$, les variables $y_1, \ldots, y_k$ sont liées. Une notation plus usuelle est $A[\lambda y_1 \ldots \lambda y_k\, F/X]$. Je ne l'emploie pas, car cela introduit un troisième usage de λ.

Réalisabilité

Etant donnée une algèbre de réalisabilité $\mathcal{A} = (\mathbf{\Lambda}, \mathbf{\Pi}, \mathbf{\Lambda} \star \mathbf{\Pi})$, un $\mathcal{A}$-*modèle* $\mathcal{M}$ est l'ensemble des données suivantes :
- Un ensemble infini P qui est le domaine de variation des variables d'individu.
- Le domaine de variation des variables de prédicat d'arité k est $\mathcal{P}(\mathbf{\Pi})^{P^k}$.
- A chaque symbole de fonction f d'arité k, on associe une fonction de P^k dans P, notée $\overline{f}$ ou même f s'il n'y a pas d'ambigüité.

En particulier, on a donc un élément distingué 0 de P et une fonction $s : P \to P$ (interprétation du symbole s). On suppose que s est une bijection de P sur $P \setminus \{0\}$. On peut alors confondre $s^n 0 \in P$ avec l'entier n. On a donc $\mathbb{N} \subset P$.
Chaque fonction récursive $f : \mathbb{N}^k \to \mathbb{N}$ est, par hypothèse, un symbole de fonction. Bien entendu, on suppose que son interprétation $\overline{f} : P^k \to P$ prend les mêmesvaleurs que f sur $\mathbb{N}^k$.
Enfin, on a aussi une condition $\mathbf{1} \in P$ et une fonction binaire $\wedge$ de P^2 dans P.

Un *terme clos* (resp. une *formule close*) *à paramètres dans le modèle* $\mathcal{M}$ est, par définition, un terme (resp. une formule) où on a remplacé les occurrences libres de chaque variable par un *paramètre*, c'est-à-dire un objet du même type du modèle $\mathcal{M}$: une condition pour une variable d'individu, une application de P^k dans $\mathcal{P}(\mathbf{\Pi})$ pour une variable de prédicat k-aire.
Chaque terme clos t, à paramètres dans $\mathcal{M}$ a une valeur $\overline{t} \in P$.

Une *interprétation* $\mathcal{I}$ est une application qui associe un individu (condition) à chaque variable d'individu et un paramètre d'arité k à chaque variable du second ordre d'arité k.
$\mathcal{I}[x \leftarrow p]$ (resp. $\mathcal{I}[X \leftarrow \mathcal{X}]$) est l'interprétation obtenue en changeant, dans $\mathcal{I}$ la valeur de la variable x (resp. X) et en lui donnant la valeur $p \in P$ (resp. $\mathcal{X} \in \mathcal{P}(\mathbf{\Pi})^{P^k}$).
Pour toute formule F (resp. terme t), on désigne par $F^{\mathcal{I}}$ (resp. $t^{\mathcal{I}}$) la formule close (resp. le terme clos) avec paramètres obtenue en remplaçant chaque variable libre par la valeur donnée par $\mathcal{I}$.

Pour chaque formule close $F^{\mathcal{I}}$ à paramètres dans $\mathcal{M}$, on définit deux valeurs de vérité :
$\|F^{\mathcal{I}}\| \subset \mathbf{\Pi}$ et $|F^{\mathcal{I}}| \subset \mathbf{\Lambda}$.
$|F^{\mathcal{I}}|$ est défini par : $\xi \in |F^{\mathcal{I}}| \;\Leftrightarrow\; (\forall \pi \in \|F^{\mathcal{I}}\|)\, \xi \star \pi \in \perp\!\!\!\perp$.
$\|F^{\mathcal{I}}\|$ est définie par récurrence sur F :
- F est atomique : alors $F^{\mathcal{I}}$ est de la forme $\mathcal{X}(t_1, \ldots, t_k)$ où $\mathcal{X} : P^k \to \mathcal{P}(\mathbf{\Pi})$ et les t_i sont des termes clos à paramètres dans $\mathcal{M}$. On pose $\|\mathcal{X}(t_1, \ldots, t_k)\| = \mathcal{X}(\overline{t}_1, \ldots, \overline{t}_k)$.
- $F \equiv A \to B$: on pose $\|F^{\mathcal{I}}\| = \{\xi \,\raisebox{0.3ex}{$\scriptscriptstyle\bullet$}\, \pi \;;\; \xi \in |A^{\mathcal{I}}|, \pi \in \|B^{\mathcal{I}}\|\}$.
- $F \equiv \forall x\, A$: on pose $\|F^{\mathcal{I}}\| = \bigcup\{\|A^{\mathcal{I}[x \leftarrow p]}\| \;;\; p \in P\}$.
- $F \equiv \forall X\, A$: on pose $\|F^{\mathcal{I}}\| = \bigcup\{\|A^{\mathcal{I}[X \leftarrow \mathcal{X}]}\| \;;\; \mathcal{X} \in \mathcal{P}(\mathbf{\Pi})^{P^k}\}$ si X est une variable de prédicat k-aire.

Notation. On écrira $\xi \Vdash F$ pour $\xi \in |F|$.

Théorème 5 (Lemme d'adéquation).
Si $x_1 : A_1, \ldots, x_k : A_k \vdash t : A$ *et si* $\xi_1 \Vdash A_1^{\mathcal{I}}, \ldots, \xi_k \Vdash A_k^{\mathcal{I}}$, *où* $\mathcal{I}$ *est une interprétation, alors* $t[\xi_1/x_1, \ldots, \xi_k/x_k] \Vdash A^{\mathcal{I}}$.
En particulier, si A *est close et si* $\vdash t : A$, *alors* $t \Vdash A$.

Preuve par récurrence sur la longueur de la démonstration de $x_1 : A_1, \ldots, x_n : A_n \vdash t : A$.
On considère la dernière règle utilisée.

1. On a $t = x_i, A \equiv A_i$. Or, on a supposé $\xi_i \Vdash A_i^{\mathcal{I}}$ et c'est le résultat cherché.

2. On a $t = uv$ et on a déjà obtenu $x_1 : A_1, \ldots, x_k : A_k \vdash u : B \to A$ et $x_1 : A_1, \ldots, x_k : A_k \vdash v : B$. Etant donnée $\pi \in \|A^{\mathcal{I}}\|$, on doit montrer $(uv)[\xi_1/x_1, \ldots, \xi_k/x_k] \star \pi \in \perp\!\!\!\perp$.
Par hypothèse sur $\perp\!\!\!\perp$, il suffit de montrer $u[\xi_1/x_1, \ldots, \xi_k/x_k] \star v[\xi_1/x_1, \ldots, \xi_k/x_k] \cdot \pi \in \perp\!\!\!\perp$.
Par hypothèse de récurrence, on a $v[\xi_1/x_1, \ldots, \xi_k/x_k] \Vdash B^{\mathcal{I}}$ et par suite :
$v[\xi_1/x_1, \ldots, \xi_k/x_k] \cdot \pi \in \|B^{\mathcal{I}} \to A^{\mathcal{I}}\|$.
Or, par hypothèse de récurrence, on a aussi $u[\xi_1/x_1, \ldots, \xi_k/x_k] \Vdash B^{\mathcal{I}} \to A^{\mathcal{I}}$, d'où le résultat.

3. On a $A = B \to C$, $t = \lambda x\, u$. On doit montrer :
$\lambda x\, u[\xi_1/x_1, \ldots, \xi_k/x_k] \Vdash B^{\mathcal{I}} \to C^{\mathcal{I}}$ et on considère donc $\xi \Vdash B^{\mathcal{I}}$, $\pi \in \|C^{\mathcal{I}}\|$. On est ramené à montrer $\lambda x\, u[\xi_1/x_1, \ldots, \xi_k/x_k] \star \xi \cdot \pi \in \perp\!\!\!\perp$. Pour cela, par hypothèse sur $\perp\!\!\!\perp$ et d'après le lemme 4, il suffit de montrer $u[\xi/x, \xi_1/x_1, \ldots, \xi_k/x_k] \star \pi \in \perp\!\!\!\perp$.
Cela résulte de l'hypothèse de récurrence appliquée à $x_1 : A_1, \ldots, x_n : A_n, x : B \vdash u : C$.

4. On a $A \equiv \forall X\, B$, X n'étant pas libre dans $A_1, \ldots, A_n$. On doit montrer :
$t[\xi_1/x_1, \ldots, \xi_k/x_k] \Vdash (\forall X\, B)^{\mathcal{I}}$, c'est-à-dire $t[\xi_1/x_1, \ldots, \xi_k/x_k] \Vdash B^{\mathcal{J}}$ avec $\mathcal{J} = \mathcal{I}[X \leftarrow \mathcal{X}]$. Or on a, par hypothèse, $\xi_i \Vdash A_i^{\mathcal{I}}$ donc $\xi_i \Vdash A_i^{\mathcal{J}}$: en effet, comme X n'est pas libre dans A_i, on a $\|A_i^{\mathcal{I}}\| = \|A_i^{\mathcal{J}}\|$. L 'hypothèse de récurrence donne alors le résultat.

6. On a $A = B[F/Xy_1 \ldots y_n]$ et on doit montrer :
$t[\xi_1/x_1, \ldots, \xi_k/x_k] \Vdash B[F/Xy_1 \ldots y_n]^{\mathcal{I}}$ avec l'hypothèse $t[\xi_1/x_1, \ldots, \xi_k/x_k] \Vdash (\forall X\, B)^{\mathcal{I}}$.
Cela découle du lemme 6.

C.Q.F.D.

Lemme 6. $\|B[F/Xy_1 \ldots y_n]^{\mathcal{I}}\| = \|B^{\mathcal{I}[X \leftarrow \mathcal{X}]}\|$ *où* $\mathcal{X} : P^n \to \mathcal{P}(\mathbf{\Pi})$ *est défini par :*
$\mathcal{X}(p_1, \ldots, p_n) = \|F^{\mathcal{I}[y_1 \leftarrow p_1, \ldots, y_n \leftarrow p_n]}\|$.

Preuve par récurrence sur B. C'est trivial si X n'est pas libre dans B. Le seul cas intéressant de la récurrence est $B = \forall Y\, C$, et on a donc $Y \neq X$. On a alors :
$\|B[F/Xy_1 \ldots y_n]^{\mathcal{I}}\| = \|(\forall Y\, C[F/Xy_1 \ldots y_n])^{\mathcal{I}}\| = \bigcup_{\mathcal{Y}} \|C[F/Xy_1 \ldots y_n]^{\mathcal{I}[Y \leftarrow \mathcal{Y}]}\|$.
Par hypothèse de récurrence, cela donne $\bigcup_{\mathcal{Y}} \|C^{\mathcal{I}[Y \leftarrow \mathcal{Y}][X \leftarrow \mathcal{X}]}\|$, soit $\bigcup_{\mathcal{Y}} \|C^{\mathcal{I}[X \leftarrow \mathcal{X}][Y \leftarrow \mathcal{Y}]}\|$ c'est-à-dire $\|(\forall Y\, C)^{\mathcal{I}[X \leftarrow \mathcal{X}]}\|$.

C.Q.F.D.

Lemme 7. *Soient* $\mathcal{X}, \mathcal{Y} \subset \mathbf{\Pi}$ *des valeurs de vérité. Si* $\pi \in \mathcal{X}$, *alors* $\mathsf{k}_\pi \Vdash \mathcal{X} \to \mathcal{Y}$.

Soient $\xi \Vdash \mathcal{X}$ et $\rho \in \mathcal{Y}$; on doit montrer $\mathsf{k}_\pi \star \xi \cdot \rho \in \perp\!\!\!\perp$, soit $\xi \star \pi \in \perp\!\!\!\perp$, ce qui est clair.

C.Q.F.D.

Proposition 8 (Loi de Peirce). $\mathsf{cc} \Vdash \forall X \forall Y (((X \to Y) \to X) \to X)$.

On doit montrer que $\mathsf{cc} \Vdash ((\mathcal{X} \to \mathcal{Y}) \to \mathcal{X}) \to \mathcal{X}$. Soient donc $\xi \Vdash (\mathcal{X} \to \mathcal{Y}) \to \mathcal{X}$ et $\pi \in \|\mathcal{X}\|$; on doit montrer que $\mathsf{cc} \star \xi \cdot \pi \in \perp\!\!\!\perp$, ou encore $\xi \star \mathsf{k}_\pi \cdot \pi \in \perp\!\!\!\perp$. D'après l'hypothèse sur ξ et π, il suffit de montrer que $\mathsf{k}_\pi \Vdash \mathcal{X} \to \mathcal{Y}$, ce qui résulte du lemme 7.

C.Q.F.D.

Proposition 9. *i) Si* $t \Vdash A \to B$, *alors* $\forall u(u \Vdash A \Rightarrow tu \Vdash B)$.
ii) Si $\forall u(u \Vdash A \Rightarrow tu \Vdash B)$, *alors* $(E)t \Vdash A \to B$.

i) D'après $tu \star \pi \succ t \star u \centerdot \pi$.
ii) D'après $(E)t \star u \centerdot \pi \succ tu \star \pi$.
C.Q.F.D.

Symboles de prédicat

On utilisera dans la suite des *formules étendues* utilisant des *symboles (ou constantes) de prédicat sur les individus* $\mathsf{R},\mathsf{S},\ldots$ Chacun d'eux a une arité, qui est dans $\mathbb{N}$.
On a, en particulier, un symbole de prédicat unaire C (pour représenter l'ensemble des conditions non triviales).
On ajoute aux règles de construction des formules, les règles :
• Si F est une formule, R une constante de prédicat n-aire et $t_1, \ldots, t_n$ sont des termes, alors $\mathsf{R}(t_1, \ldots, t_n) \to F$ et $\mathsf{R}(t_1, \ldots, t_n) \mapsto F$ sont des formules.
• $\top$ est une formule atomique.
Dans la définition d'un $\mathcal{A}$-modèle $\mathcal{M}$, on ajoute la clause :
• A chaque symbole de relation R d'arité n, on associe une application, notée $\overline{\mathsf{R}}_{\mathcal{M}}$ ou $\overline{\mathsf{R}}$, de P^n dans $\mathcal{P}(\mathbf{\Lambda})$. On écrira aussi $|\mathsf{R}(p_1, \ldots, p_n)|$, au lieu de $\overline{\mathsf{R}}(p_1, \ldots, p_n)$, pour $p_1, \ldots, p_n \in P$.
En particulier, on a une application $\overline{\mathsf{C}} : P \to \mathcal{P}(\mathbf{\Lambda})$, que l'on notera $|\mathsf{C}[p]|$.
On définit comme suit la valeur de vérité dans $\mathcal{M}$ d'une formule étendue :
$\|\top\| = \emptyset$.
$\|(\mathsf{R}(t_1, \ldots, t_n) \to F)^{\mathcal{I}}\| = \{t \centerdot \pi;\ t \in |\mathsf{R}(t_1^{\mathcal{I}}, \ldots, t_n^{\mathcal{I}})|, \pi \in \|F^{\mathcal{I}}\|\}$.
$\|(\mathsf{R}(t_1, \ldots, t_n) \mapsto F)^{\mathcal{I}}\| = \|F^{\mathcal{I}}\|$ si $I \in |\mathsf{R}(t_1^{\mathcal{I}}, \ldots, t_n^{\mathcal{I}})|$;
$\|(\mathsf{R}(t_1, \ldots, t_n) \mapsto F)^{\mathcal{I}}\| = \emptyset$ sinon.

Proposition 10.
i) $\lambda x(x)I \Vdash \forall X \forall x_1 \ldots \forall x_n[(\mathsf{R}(x_1, \ldots, x_n) \to X) \to (\mathsf{R}(x_1, \ldots, x_n) \mapsto X)]$.
ii) Si on a $|\mathsf{R}(p_1, \ldots, p_n)| \neq \emptyset \Rightarrow I \in |\mathsf{R}(p_1, \ldots, p_n)|$ *quels que soient* $p_1, \ldots, p_n \in P$, *alors :*
$K \Vdash \forall X \forall x_1 \ldots \forall x_n[(\mathsf{R}(x_1, \ldots, x_n) \mapsto X) \to (\mathsf{R}(x_1, \ldots, x_n) \to X)]$.

Trivial.
C.Q.F.D.

Remarque. D'après la proposition 10, on voit que, si l'application $\overline{\mathsf{R}} : P^n \to \mathcal{P}(\mathbf{\Lambda})$ ne prend que les valeurs $\{I\}$ et $\emptyset$, on peut remplacer $\mathsf{R}(t_1, \ldots, t_n) \to F$ par $\mathsf{R}(t_1, \ldots, t_n) \mapsto F$.

On définit le prédicat binaire $\simeq$ en posant $|p \simeq q| = \{I\}$ si $p = q$ et $|p \simeq q| = \emptyset$ si $p \neq q$.
D'après la remarque ci-dessus, on peut remplacer $p \simeq q \to F$ par $p \simeq q \mapsto F$. La proposition 11 montre qu'on peut aussi remplacer $p = q \to F$ par $p \simeq q \mapsto F$.

Notations. On écrira $p = q \mapsto F$ au lieu de $p \simeq q \mapsto F$. On a donc :
$\|p = q \mapsto F\| = \|F\|$ si $p = q$; $\|p = q \mapsto F\| = \emptyset$ si $p \neq q$.
On écrira $p \neq q$ pour $p = q \mapsto \bot$. On a donc :
$\|p \neq q\| = \mathbf{\Pi}$ si $p = q$ et $\|p \neq q\| = \emptyset$ si $p \neq q$.
L'utilisation de $p = q \mapsto F$ au lieu de $p = q \to F$, et de $p \neq q$ au lieu de $p = q \to \bot$, simplifie beaucoup le calcul de la valeur de vérité d'une formule comportant le symbole $=$.

Proposition 11.
i) $\lambda x\, xI \Vdash \forall X \forall x \forall y((x = y \to X) \to (x = y \mapsto X))$;
ii) $\lambda x \lambda y\, yx \Vdash \forall X \forall x \forall y((x = y \mapsto X), x = y \to X)$.

i) Soient $a, b \in P$, $\mathcal{X} \subset \mathbf{\Pi}, \xi \Vdash a = b \to \mathcal{X}$ et $\pi \in \|a = b \mapsto \mathcal{X}\|$.
On a donc $a = b$, d'où $I \Vdash a = b$, donc $\xi \star I \cdot \pi \in \perp\!\!\!\perp$, d'où $\lambda x\, xI \star \xi \cdot \pi \in \perp\!\!\!\perp$.
ii) Soient maintenant $\eta \Vdash (a = b \mapsto \mathcal{X})$, $\zeta \Vdash a = b$ et $\rho \in \|\mathcal{X}\|$.
On montre que $\lambda x \lambda y\, yx \star \eta \cdot \zeta \cdot \rho \in \perp\!\!\!\perp$ autrement dit $\zeta \star \eta \cdot \rho \in \perp\!\!\!\perp$.
Si $a = b$, alors $\eta \Vdash \mathcal{X}$, $\zeta \Vdash \forall Y(Y \to Y)$. On a $\eta \cdot \rho \in \|\mathcal{X} \to \mathcal{X}\|$, donc $\zeta \star \eta \cdot \rho \in \perp\!\!\!\perp$.
Si $a \neq b$, alors $\zeta \Vdash \top \to \perp$, donc $\zeta \star \eta \cdot \rho \in \perp\!\!\!\perp$.
Dans les deux cas, on a le résultat voulu.

C.Q.F.D.

Remarque.
Soient R une partie de P^k et $1_R : P^k \to \{0, 1\}$ sa fonction caractéristique, définie par :
$1_R(p_1, \ldots, p_n) = 1$ (resp. $= 0$) si $(p_1, \ldots, p_n) \in R$ (resp. $(p_1, \ldots, p_n) \notin R$).
On étend le prédicat R au modèle $\mathcal{M}$ en posant :
$|R(p_1, \ldots, p_n)| = \{I\}$ (resp. $= \emptyset$) si $(p_1, \ldots, p_n) \in R$ (resp. $(p_1, \ldots, p_n) \notin R$).
D'après les propositions 10 et 11, on voit que $R(x_1, \ldots, x_n)$ et $1_R(x_1, \ldots, x_n) = 1$ sont interchangeables.
Plus précisément, on a :
$I \Vdash \forall X \forall x_1 \ldots \forall x_n((R(x_1, \ldots, x_n) \mapsto X) \leftrightarrow (1_R(x_1, \ldots, x_n) = 1 \mapsto X))$.

Pour chaque formule $A[x_1, \ldots, x_k]$, on peut définir le symbole de prédicat k-aire N_A, en posant $|N_A(p_1, \ldots, p_k)| = \{\mathsf{k}_\pi;\ \pi \in \|A[p_1, \ldots, p_k]\|\}$. La proposition 12 montre que N_A et $\neg A$ sont interchangeables ; cela peut simplifier les calculs de valeurs de vérité.

Proposition 12.
i) $I \Vdash \forall x_1 \ldots \forall x_k(N_A(x_1, \ldots, x_k) \to \neg A(x_1, \ldots, x_k))$ *;*
ii) $\mathsf{cc} \Vdash \forall x_1 \ldots \forall x_k((N_A(x_1, \ldots, x_k) \to \perp) \to A(x_1, \ldots, x_k))$.

i) Soient $p_1, \ldots, p_k \in P$, $\pi \in \|A(p_1, \ldots, p_k)\|$, $\xi \Vdash A(p_1, \ldots, p_k)$ et $\rho \in \mathbf{\Pi}$. On doit montrer : $I \star \mathsf{k}_\pi \cdot \xi \cdot \rho \in \perp\!\!\!\perp$, soit $\xi \star \pi \in \perp\!\!\!\perp$, ce qui est évident.
ii) Soient $\eta \Vdash N_A(p_1, \ldots, p_k) \to \perp$ et $\pi \in \|A(p_1, \ldots, p_k)\|$. On doit montrer :
$\mathsf{cc} \star \eta \cdot \pi \in \perp\!\!\!\perp$, soit $\eta \star \mathsf{k}_\pi \cdot \pi \in \perp\!\!\!\perp$, ce qui est clair, puisque $\mathsf{k}_\pi \in |N_A(p_1, \ldots, p_k)|$.

C.Q.F.D.

Combinateur de point fixe

Théorème 13. *On pose* $\mathsf{Y} = AA$ *avec* $A = \lambda a \lambda f(f)(a)af$. *On a alors* $\mathsf{Y} \star \xi \cdot \pi \succ \xi \star \mathsf{Y}\xi \cdot \pi$.
Soit $f : P^2 \to P$ *telle que* $f(x, y) = 1$ *soit une relation bien fondée sur* P. *On alors :*
i) $\mathsf{Y} \Vdash \forall X\{\forall x[\forall y(f(y, x) = 1 \mapsto Xy) \to Xx] \to \forall x\, Xx\}$.
ii) $\mathsf{Y} \Vdash \forall X_1 \ldots \forall X_k$
$$\{\forall x[\forall y(X_1 y, \ldots, X_k y \to f(y, x) \neq 1), X_1 x, \ldots, X_k x \to \perp] \to \forall x(X_1 x, \ldots, X_k x \to \perp)\}.$$

La propriété $\mathsf{Y} \star \xi \cdot \pi \succ \xi \star \mathsf{Y}\xi \cdot \pi$ est immédiate, d'après le théorème 3.
i) On fixe $\mathcal{X} : P \to \mathcal{P}(\mathbf{\Pi})$, $p \in P$ et $\xi \Vdash \forall x[\forall y(f(y, x) = 1 \mapsto \mathcal{X}y) \to \mathcal{X}x]$. On montre, par induction sur la relation bien fondée $f(x, y) = 1$, que $\mathsf{Y} \star \xi \cdot \pi \in \perp\!\!\!\perp$ pour tout $\pi \in \mathcal{X}p$.
Soit donc $\pi \in \mathcal{X}p$; d'après (i), on a $\mathsf{Y} \star \xi \cdot \pi \succ \xi \star \mathsf{Y}\xi \cdot \pi$ et il suffit donc de montrer que $\xi \star \mathsf{Y}\xi \cdot \pi \in \perp\!\!\!\perp$. Par hypothèse, on a $\xi \Vdash \forall y(f(y, p) = 1 \mapsto \mathcal{X}y) \to \mathcal{X}p$; il suffit donc de montrer que $\mathsf{Y}\xi \Vdash f(q, p) = 1 \mapsto \mathcal{X}q$ pour tout $q \in P$. C'est évident si $f(q, p) \neq 1$, par définition de $\mapsto$.
Si $f(q, p) = 1$, on doit montrer $\mathsf{Y}\xi \Vdash \mathcal{X}q$, soit $\mathsf{Y} \star \xi \cdot \rho \in \perp\!\!\!\perp$ pour tout $\rho \in \mathcal{X}q$. Or, cela découle de l'hypothèse d'induction.

ii) La preuve est presque identique : on fixe $\mathcal{X}_1, \ldots, \mathcal{X}_k : P \to \mathcal{P}(\mathbf{\Pi})$, $p \in P$ et
$\xi \Vdash \forall x[\forall y(\mathcal{X}_1 y, \ldots, \mathcal{X}_k y \to f(y, x) \neq 1), \mathcal{X}_1 x, \ldots, \mathcal{X}_k x \to \perp]$. On montre, par induction sur la

relation bien fondée $f(x,y)=1$, que $\mathsf{Y}\star\xi\,.\,\pi\in\perp\!\!\!\perp$ pour tout $\pi\in\|\mathcal{X}_1 p,\ldots,\mathcal{X}_k p\to\perp\|$.
Comme précédemment, on est ramené à montrer que :
$\mathsf{Y}\xi\Vdash\mathcal{X}_1 q,\ldots,\mathcal{X}_k q\to f(q,p)\neq 1$ pour tout $q\in P$; c'est évident si $f(q,p)\neq 1$.
Si $f(q,p)=1$, on doit montrer $\mathsf{Y}\xi\Vdash\mathcal{X}_1 q,\ldots,\mathcal{X}_k q\to\perp$, ou encore :
$\mathsf{Y}\star\xi\,.\,\rho\in\perp\!\!\!\perp$ pour tout $\rho\in\|\mathcal{X}_1 q,\ldots,\mathcal{X}_k q\to\perp\|$. Or, cela découle de l'hypothèse d'induction.
C.Q.F.D.

Entiers, mise en mémoire et fonctions récursives

On a un symbole de constante 0 et un symbole de fonction unaire s qui est interprété, dans le modèle $\mathcal{M}$ par une fonction bijective $s : P\to(P\setminus\{0\})$.
Rappelons que nous avons identifié $s^n 0$ avec l'entier n et qu'on suppose donc que $\mathbb{N}\subset P$.

On désigne par $\mathrm{int}(x)$ la formule $\forall X(\forall y(Xy\to Xsy),X0\to Xx)$.

Soit $u=(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite d'éléments de $\mathbf{\Lambda}$. On définit le symbole de prédicat unaire e_u en posant : $|e_u(s^n 0)|=\{u_n\}$; $|e_u(p)|=\emptyset$ si $p\notin\mathbb{N}$.

Théorème 14. *Soient $T_u,S_u\in\mathbf{\Lambda}$ tels que l'on ait $S_u\Vdash(\top\to\perp),\top\to\perp$ et :*
$T_u\star\phi\,.\,\nu\,.\,\pi\succ\nu\star S_u\,.\,\phi\,.\,u_0\,.\,\pi$; $S_u\star\psi\,.\,u_n\,.\,\pi\succ\psi\star u_{n+1}\,.\,\pi$
quels que soient $\nu,\phi,\psi\in\mathbf{\Lambda}$ et $\pi\in\mathbf{\Pi}$. Alors :
$T_u\Vdash\forall X\forall x[(e_u(x)\to X),\ \mathit{int}(x)\to X]$.
T_u est appelé opérateur de mise en mémoire.

Soient $p\in P$, $\phi\Vdash e_u(p)\to X$, $\nu\Vdash\mathrm{int}(p)$ et $\pi\in\|X\|$. On doit montrer $T_u\star\phi\,.\,\nu\,.\,\pi\in\perp\!\!\!\perp$ autrement dit $\nu\star S_u\,.\,\phi\,.\,u_0\,.\,\pi\in\perp\!\!\!\perp$.

- Si $p\notin\mathbb{N}$, on définit le prédicat unaire Y en posant :
$Y(q)\equiv\top$ si $q\in\mathbb{N}$; $Y(q)\equiv\top\to\perp$ si $q\notin\mathbb{N}$.
On a donc, évidemment, $\phi\Vdash Y(0)$ et $u_0\,.\,\pi\in\|Y(p)\|$.
Or, par hypothèse sur ν, on a $\nu\Vdash\forall y(Yy\to Ysy),Y0\to Yp$. Il suffit donc de montrer que :
$S_u\Vdash\forall y(Yy\to Ysy)$, soit $S_u\Vdash Y(q)\to Y(sq)$ pour tout $q\in P$.
C'est évident si $q\in\mathbb{N}$, puisqu'alors $\|Y(sq)\|=\emptyset$.
Si $q\notin\mathbb{N}$, on doit montrer $S_u\Vdash(\top\to\perp),\top\to\perp$, ce qui résulte de l'hypothèse.
- Si $p\in\mathbb{N}$, on a $p=s^p 0$; on définit le prédicat unaire Y en posant :
$\|Ys^i 0\|=\{u_{p-i}\,.\,\pi\}$ pour $0\le i\le p$ et $\|Yq\|=\emptyset$ si $q\notin\{s^i 0;\ 0\le i\le p\}$.
Par hypothèse sur ν,ϕ,π, on a :
$\nu\Vdash\forall y(Yy\to Ysy),Y0\to Ys^p 0$; $\phi\Vdash Y0$; $u_0\,.\,\pi\in\|Ys^p 0\|$.
Il suffit donc de montrer que $S_u\Vdash\forall y(Yy\to Ysy)$, soit $S_u\Vdash Yq\to Ysq$ pour tout $q\in P$.
C'est évident si $q\notin\{s^i 0;\ 0\le i<p\}$, car alors $\|Ysq\|=\emptyset$. Si $q=s^i 0$ avec $i<p$, soit $\xi\Vdash Yq$; on doit montrer $S_u\star\xi\,.\,u_{p-i-1}\,.\,\pi\in\perp\!\!\!\perp$. Or, on a $S_u\star\xi\,.\,u_{p-i-1}\,.\,\pi\succ\xi\star u_{p-i}\,.\,\pi$ qui est dans $\perp\!\!\!\perp$, par hypothèse sur ξ.

C.Q.F.D.

Notation. On définit les c-termes clos $\underline{0}=\lambda x\lambda y\,y$; $\sigma=\lambda n\lambda f\lambda x(f)(n)fx$; et, pour chaque $n\in\mathbb{N}$, on pose $\underline{n}=(\sigma)^n\underline{0}$. On définit le symbole de prédicat unaire ent(x) en posant :
$|\mathrm{ent}(n)|=\{\underline{n}\}$ si $n\in\mathbb{N}$;
$|\mathrm{ent}(p)|=\emptyset$ si $p\notin\mathbb{N}$.
Autrement dit, ent(x) est le prédicat $e_u(x)$ lorsque la suite u est $(\underline{n})_{n\in\mathbb{N}}$.

Théorème 15.
On pose $T=\lambda f\lambda n(n)Sf\underline{0}$, avec $S=\lambda g\lambda x(g)(\sigma)x$. On a alors :

i) $T \Vdash \forall X \forall x((\mathit{ent}(x) \to X),\ \mathit{int}(x) \to X)$.
ii) $I \Vdash \forall x((\mathit{ent}(x) \to \mathit{int}(x))$.

T est donc un opérateur de mise en mémoire.

i) On a immédiatement, d'après le théorème 3 :
$T \star \phi \,.\, \nu \,.\, \pi \succ \nu \star S \,.\, \phi \,.\, \underline{0} \,.\, \pi\,;\ \ S \star \psi \,.\, (\sigma)^n \underline{0} \,.\, \pi \succ \psi \star (\sigma)^{n+1} \underline{0} \,.\, \pi$
quels que soient $\nu, \phi, \psi \in \mathbf{\Lambda}$ et $\pi \in \mathbf{\Pi}$.
On vérifie que $S \Vdash (\top \to \bot), \top \to \bot$: en effet, si $\xi \Vdash \top \to \bot$, alors $S \star \xi \,.\, \eta \,.\, \pi \succ \xi \star \sigma\eta \,.\, \pi \in \perp\!\!\!\perp$ quels que soient $\eta \in \mathbf{\Lambda}$ et $\pi \in \mathbf{\Pi}$ (d'après le théorème 3).
Le résultat est alors immédiat, d'après le théorème 14.

ii) On doit montrer $I \Vdash \mathrm{ent}(p) \to \mathrm{int}(p)$ pour tout $p \in P$. On peut supposer $p \in \mathbb{N}$ (sinon $\mathrm{ent}(p) = \emptyset$ et le résultat est trivial). On doit alors montrer :
$I \star \sigma^p \underline{0} \,.\, \rho \in \perp\!\!\!\perp$ sachant que $\rho \in \|\mathrm{int}(s^p 0)\|$.
Il existe donc un prédicat unaire $X : P \to \mathcal{P}(\mathbf{\Pi})$, $\phi \Vdash \forall y(Xy \to Xsy)$, $\omega \Vdash X0$ et $\pi \in \|Xs^p 0\|$ tels que $\rho = \phi \,.\, \omega \,.\, \pi$. On doit montrer $(\sigma)^p \underline{0} \star \phi \,.\, \omega \,.\, \pi \in \perp\!\!\!\perp$. On montre, en fait, par récurrence sur p, que $(\sigma)^p \underline{0} \star \phi \,.\, \omega \,.\, \pi \in \perp\!\!\!\perp$ *pour tout* $\pi \in \|Xs^p 0\|$.
Pour $p = 0$, soit $\pi \in \|X0\|$; on doit montrer $\underline{0} \star \phi \,.\, \omega \,.\, \pi \in \perp\!\!\!\perp$, soit $\omega \star \pi \in \perp\!\!\!\perp$, ce qui est évident puisque $\omega \Vdash X0$.
Pour passer de p à $p+1$, soit $\pi \in \|Xs^{p+1}0\|$. On a :
$\sigma^{p+1}\underline{0} \star \phi \,.\, \omega \,.\, \pi \equiv (\sigma)(\sigma)^p \underline{0} \star \phi \,.\, \omega \,.\, \pi \succ \sigma \star \sigma^p \underline{0} \,.\, \phi \,.\, \omega \,.\, \pi \succ \phi \star (\sigma^p \underline{0})\phi\omega \,.\, \pi$.
Or, par hypothèse de récurrence, on a $\sigma^p \underline{0} \star \phi \,.\, \omega \,.\, \rho \in \perp\!\!\!\perp$ pout tout $\rho \in \|Xs^p 0\|$. Il en résulte que $(\sigma^p \underline{0})\phi\omega \Vdash Xs^p 0$. Comme $\phi \Vdash Xs^p 0 \to Xs^{p+1} 0$, on a bien $\phi \star (\sigma^p \underline{0})\phi\omega \,.\, \pi \in \perp\!\!\!\perp$.

C.Q.F.D.

Le théorème 15 montre qu'on peut utiliser le prédicat $\mathrm{ent}(x)$ au lieu de $\mathrm{int}(x)$, ce qui simplifie beaucoup les calculs. En particulier, on définit le *quantificateur universel restreint aux entiers* $\forall x^{\mathrm{int}}$ en posant $\forall x^{\mathrm{int}} F \equiv \forall x(\mathrm{int}(x) \to F)$.
On peut donc le remplacer par *le quantificateur universel restreint à ent*(x) défini par :
$\forall x^{\mathrm{ent}} F \equiv \forall x(\mathrm{ent}(x) \to F)$. On a alors $\|\forall x^{\mathrm{ent}} F\| = \{\underline{n} \,.\, \pi;\ n \in \mathbb{N}, \pi \in \|F[s^n 0/x]\|\}$.
La valeur de vérité de la formule $\forall x^{\mathrm{ent}} F$ est donc beaucoup plus simple que celle de la formule $\forall x^{\mathrm{int}} F$.

Théorème 16. *Soit $\phi : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ une fonction récursive. Il existe un λ-terme clos θ tel que, si $m \in \mathbb{N}$, $n = \phi(m)$ et f est une λ-variable, alors $\theta \underline{m} f$ se réduit à $f \underline{n}$ par réduction de tête faible.*

Il s'agit d'une variante du théorème de représentation des fonctions récursives par des λ-termes. Elle est démontrée dans [12].

C.Q.F.D.

Théorème 17. *Soit $\phi : \mathbb{N}^k \to \mathbb{N}$ une fonction récursive. On définit, dans $\mathcal{M}$, un symbole de fonction f en posant $f(s^{m_1}0, \ldots, s^{m_k}0) = s^n 0$ avec $n = \phi(m_1, \ldots, m_k)$; on prolonge f de façon arbitraire sur $P^k \setminus \mathbb{N}^k$. Alors, il existe une quasi-preuve θ telle que :*
$\theta \Vdash \forall x_1 \ldots \forall x_k[\mathit{int}(x_1), \ldots, \mathit{int}(x_k) \to \mathit{int}(f(x_1, \ldots, x_k))]$.

Pour simplifier, on suppose $k = 1$. D'après le théorème 15, il suffit de trouver une quasi-preuve θ telle que $\theta \Vdash \forall x[e(x), (e(f(x)) \to \bot) \to \bot]$. Autrement dit :
$\theta \Vdash e(p), (e(f(p)) \to \bot) \to \bot$ pour tout $p \in P$.
On peut supposer que $p = s^m 0$ (sinon, $e(p) = \emptyset$ et le résultat est trivial).
On a donc $e(p) = \{\underline{m}\}$; on doit donc avoir $\theta \star \underline{m} \,.\, \xi \,.\, \pi \in \perp\!\!\!\perp$ pour tout $\pi \in \mathbf{\Pi}$ et $\xi \Vdash e(s^n 0) \to \bot$, avec $n = \phi(m)$.

On prend le λ-terme θ donné par le théorème 16. D'après ce théorème, on a :
$\theta \star \underline{m} \cdot \xi \cdot \pi \succ \xi \star \underline{n} \cdot \pi$, qui est dans $\perp\!\!\!\perp$, par hypothèse sur ξ.

C.Q.F.D.

Remarque. On a ainsi réalisé par des quasi-preuves, tous les axiomes de l'arithmétique du second ordre, avec un symbole de fonction pour chaque fonction récursive.

Algèbres standard

Une algèbre de réalisabilité $\mathcal{A}$ est dite *standard* si son ensemble de termes Λ et son ensemble de piles Π sont définis comme suit :
On a un ensemble dénombrable Π_0 qui est l'ensemble des *constantes de pile*.
Les termes et les piles de $\mathcal{A}$ sont les suites finies d'éléments de l'ensemble :

$$\Pi_0 \cup \{B, C, E, I, K, W, \mathsf{cc}, \varsigma, \chi, \chi', \mathsf{k}, (,), [,], \cdot\}$$

qui sont obtenus par les règles suivantes :

- $B, C, E, I, K, W, \mathsf{cc}, \varsigma, \chi, \chi'$ sont des termes ;
- chaque élément de Π_0 est une pile ;
- si ξ, η sont des termes, alors $(\xi)\eta$ est un terme ;
- si ξ est un terme et π une pile, alors $\xi \cdot \pi$ est une pile ;
- si π est une pile, alors $\mathsf{k}[\pi]$ est un terme.

Un terme de la forme $\mathsf{k}[\pi]$ est appelé *continuation*. Il sera noté aussi k_π.

L'ensemble des processus de l'algèbre $\mathcal{A}$ est $\Lambda \times \Pi$.
Si $\xi \in \Lambda$ et $\pi \in \Pi$, le couple (ξ, π) est noté $\xi \star \pi$.

Une pile est donc de la forme $\pi = \xi_1 \cdot \ldots \cdot \xi_n \cdot \pi_0$, où $\xi_1, \ldots, \xi_n \in \Lambda$ et $\pi_0 \in \Pi_0$ (π_0 est une constante de pile). Etant donné un terme τ, on pose $\pi^\tau = \xi_1 \cdot \ldots \cdot \xi_n \cdot \tau \cdot \pi_0$.

On fixe une bijection récursive de Π sur $\mathbb{N}$, notée $\pi \mapsto \mathsf{n}_\pi$.

On définit une relation de préordre, notée $\succ$, sur $\Lambda \star \Pi$. C'est la plus petite relation réflexive et transitive telle que, quels que soient $\xi, \eta, \zeta \in \Lambda$ et $\pi, \varpi \in \Pi$, on ait :

$(\xi)\eta \star \pi \succ \xi \star \eta \cdot \pi$.
$I \star \xi \cdot \pi \succ \xi \star \pi$.
$K \star \xi \cdot \eta \cdot \pi \succ \xi \star \pi$.
$E \star \xi \cdot \eta \cdot \pi \succ (\xi)\eta \star \pi$.
$W \star \xi \cdot \eta \cdot \pi \succ \xi \star \eta \cdot \eta \cdot \pi$.
$C \star \xi \cdot \eta \cdot \zeta \cdot \pi \succ \xi \star \zeta \cdot \eta \cdot \pi$.
$B \star \xi \cdot \eta \cdot \zeta \cdot \pi \succ (\xi)(\eta)\zeta \star \pi$.
$\mathsf{cc} \star \xi \cdot \pi \succ \xi \star \mathsf{k}_\pi \cdot \pi$.
$\mathsf{k}_\pi \star \xi \cdot \varpi \succ \xi \star \pi$.
$\varsigma \star \xi \cdot \pi \succ \xi \star \underline{\mathsf{n}}_\pi \cdot \pi$.
$\chi \star \xi \cdot \pi^\tau \succ \xi \star \tau \cdot \pi$.
$\chi' \star \xi \cdot \tau \cdot \pi \succ \xi \star \pi^\tau$.

On se donne enfin une partie $\perp\!\!\!\perp$ de $\Lambda \star \Pi$ qui est un segment terminal pour ce préordre, c'est-à-dire que : $\mathsf{p} \in \perp\!\!\!\perp$, $\mathsf{p}' \succ \mathsf{p} \Rightarrow \mathsf{p}' \in \perp\!\!\!\perp$.
Autrement dit, on demande que $\perp\!\!\!\perp$ ait les propriétés suivantes :

$(\xi)\eta \star \pi \notin \perp\!\!\!\perp \Rightarrow \xi \star \eta \cdot \pi \notin \perp\!\!\!\perp$.
$I \star \xi \cdot \pi \notin \perp\!\!\!\perp \Rightarrow \xi \star \pi \notin \perp\!\!\!\perp$.
$K \star \xi \cdot \eta \cdot \pi \notin \perp\!\!\!\perp \Rightarrow \xi \star \pi \notin \perp\!\!\!\perp$.
$E \star \xi \cdot \eta \cdot \pi \notin \perp\!\!\!\perp \Rightarrow (\xi)\eta \star \pi \notin \perp\!\!\!\perp$.

$W \star \xi \cdot \eta \cdot \pi \notin \bot\!\!\!\bot \Rightarrow \xi \star \eta \cdot \eta \cdot \pi \notin \bot\!\!\!\bot$.
$C \star \xi \cdot \eta \cdot \zeta \cdot \pi \notin \bot\!\!\!\bot \Rightarrow \xi \star \zeta \cdot \eta \cdot \pi \notin \bot\!\!\!\bot$.
$B \star \xi \cdot \eta \cdot \zeta \cdot \pi \notin \bot\!\!\!\bot \Rightarrow (\xi)(\eta)\zeta \star \pi \notin \bot\!\!\!\bot$.
$\mathsf{cc} \star \xi \cdot \pi \notin \bot\!\!\!\bot \Rightarrow \xi \star \mathsf{k}_\pi \cdot \pi \notin \bot\!\!\!\bot$.
$\mathsf{k}_\pi \star \xi \cdot \varpi \notin \bot\!\!\!\bot \Rightarrow \xi \star \pi \notin \bot\!\!\!\bot$.
$\varsigma \star \xi \cdot \pi \notin \bot\!\!\!\bot \Rightarrow \xi \star \underline{\mathsf{n}}_\pi \cdot \pi \notin \bot\!\!\!\bot$.
$\chi \star \xi \cdot \pi^\tau \notin \bot\!\!\!\bot \Rightarrow \xi \star \tau \cdot \pi \notin \bot\!\!\!\bot$.
$\chi' \star \xi \cdot \tau \cdot \pi \notin \bot\!\!\!\bot \Rightarrow \xi \star \pi^\tau \notin \bot\!\!\!\bot$.

Remarque. Le seul élément non fixé dans une algèbre de réalisabilité standard est donc l'ensemble de processus $\bot\!\!\!\bot$.

L'axiome du choix sur les individus (ACI)

Soient $\mathcal{A}$ une algèbre de réalisabilité standard et $\mathcal{M}$ un $\mathcal{A}$-modèle, dont l'ensemble d'individus est noté P. On a alors :

Théorème 18 (ACI). *Pour chaque formule close* $\forall x_1 \dots \forall x_m \forall y\, F$ *avec paramètres, il existe une fonction* $f : P^{m+1} \to P$ *telle que l'on ait :*
i) $\varsigma \Vdash \forall x_1 \dots \forall x_m (\forall x(\mathit{int}(x) \to F[f(x_1, \dots, x_m, x)/y]) \to \forall y\, F)$.
ii) $\varsigma \Vdash \forall x_1 \dots \forall x_m (\forall x(\mathit{ent}(x) \to F[f(x_1, \dots, x_m, x)/y]) \to \forall y\, F)$.

Pour $p_1, \dots, p_m, k \in P$, on définit $f(p_1, \dots, p_m, k)$ de façon arbitraire si $k \notin \mathbb{N}$.
Si $k \in \mathbb{N}$, on a $k = \mathsf{n}_{\pi_k}$ pour une pile $\pi_k \in \Pi$ et une seule. On définit la fonction $f(p_1, \dots, p_m, k)$ au moyen de l'axiome du choix, de façon que, s'il existe $q \in P$ tel que $\pi_k \in \|F[p_1, \dots, p_m, q]\|$, on ait $\pi_k \in \|F[p_1, \dots, p_m, f(p_1, \dots, p_m, k)]\|$.
i) On doit montrer $\varsigma \Vdash \forall x(\mathrm{int}(x) \to F[p_1, \dots, p_m, f(p_1, \dots, p_m, x)]) \to F[p_1, \dots, p_m, q]$, quels que soient $p_1, \dots, p_m, q \in P$.
Soient donc $\xi \Vdash \forall x(\mathrm{int}(x) \to F[p_1, \dots, p_n, f(p_1, \dots, p_n, x)])$ et $\pi \in \|F[p_1, \dots, p_m, q]\|$; on doit montrer $\varsigma \star \xi \cdot \pi \in \bot\!\!\!\bot$, soit $\xi \star \underline{\mathsf{n}}_\pi \cdot \pi \in \bot\!\!\!\bot$. Or, on a :
$\xi \Vdash \mathrm{int}(\mathsf{n}_\pi) \to F[p_1, \dots, p_m, f(p_1, \dots, p_m, \mathsf{n}_\pi)]$ par hypothèse sur ξ ;
$\underline{\mathsf{n}}_\pi \Vdash \mathrm{int}(\mathsf{n}_\pi)$ d'après le théorème 5 ;
$\pi \in \|F[p_1, \dots, p_m, f(p_1, \dots, p_m, \mathsf{n}_\pi)]\|$ par hypothèse sur π et par définition de f.
ii) La preuve est la même ; on observe simplement que $\underline{\mathsf{n}}_\pi \in |\mathrm{ent}(\mathsf{n}_\pi)|$.
C.Q.F.D.

Modèles génériques

A partir d'une algèbre de réalisabilité *standard* $\mathcal{A}$ et d'un $\mathcal{A}$-modèle $\mathcal{M}$, on construit une nouvelle algèbre de réalisabilité $\mathcal{B}$ et un $\mathcal{B}$-modèle $\mathcal{N}$, qui est dit *générique* sur $\mathcal{M}$. Nous définirons ensuite le *forcing*, qui est une transformation syntaxique sur les formules ; c'est l'outil essentiel pour calculer les valeurs de vérité dans le modèle générique $\mathcal{N}$.

On considère donc une algèbre de réalisabilité standard $\mathcal{A}$ et un $\mathcal{A}$-modèle $\mathcal{M}$ dont l'ensemble d'individus est P.
On a un prédicat unaire $\mathsf{C} : P \to \mathcal{P}(\mathbf{\Lambda})$, une fonction binaire $\wedge : P^2 \to P$ et un individu distingué $\mathbf{1} \in P$. On suppose que les données $\{\mathsf{C}, \wedge, \mathbf{1}\}$ constituent une *structure de forcing dans* $\mathcal{M}$, ce qui veut dire qu'on a la propriété suivante :

Il existe six quasi-preuves $\alpha_0, \alpha_1, \alpha_2, \beta_0, \beta_1, \beta_2$ telles que :
$\tau \in |\mathsf{C}[(p \wedge q) \wedge r]| \Rightarrow \alpha_0 \tau \in |\mathsf{C}[p \wedge (q \wedge r)]|$;
$\tau \in |\mathsf{C}[p]| \Rightarrow \alpha_1 \tau \in |\mathsf{C}[p \wedge \mathbf{1}]|$;

$\tau \in |\mathsf{C}[p\wedge q]| \Rightarrow \alpha_2\tau \in |\mathsf{C}[q]|$;
$\tau \in |\mathsf{C}[p]| \Rightarrow \beta_0\tau \in |\mathsf{C}[p\wedge p]|$;
$\tau \in |\mathsf{C}[p\wedge q]| \Rightarrow \beta_1\tau \in |\mathsf{C}[q\wedge p]|$;
$\tau \in |\mathsf{C}[((p\wedge q)\wedge r)\wedge s]| \Rightarrow \beta_2\tau \in |\mathsf{C}[(p\wedge(q\wedge r))\wedge s]|$.

Nous appellerons C-*expression* une suite de symboles de la forme $\gamma = (\delta_0)(\delta_1)\ldots(\delta_k)$ où chaque δ_i est l'une des quasi-preuves $\alpha_0, \alpha_1, \alpha_2, \beta_0, \beta_1, \beta_2$.
Une telle expression n'est pas un c-terme, mais $\gamma\tau$ en est un, pour tout c-terme τ ;
le terme $\gamma\tau = (\delta_0)(\delta_1)\ldots(\delta_k)\tau$ sera aussi écrit $(\gamma)\tau$.

Notation. Un $\wedge$-*terme* est un terme écrit avec les variables $p_1, \ldots, p_k$, la constante $\mathbf{1}$ et le symbole de fonction binaire $\wedge$. Soient $t(p_1, \ldots, p_k), u(p_1, \ldots, p_k)$ deux $\wedge$-termes. La notation :

$$\gamma :: t(p_1, \ldots, p_k) \Rightarrow u(p_1, \ldots, p_k)$$

signifie que γ est une C-expression telle que $\tau \in |\mathsf{C}[t(p_1, \ldots, p_k)]| \Rightarrow (\gamma)\tau \in |\mathsf{C}[u(p_1, \ldots, p_k)]|$.

Avec cette notation, les hypothèses ci-dessus s'écrivent donc :

$\alpha_0 :: (p\wedge q)\wedge r \Rightarrow p\wedge(q\wedge r)$; $\alpha_1 :: p \Rightarrow p\wedge\mathbf{1}$; $\alpha_2 :: p\wedge q \Rightarrow q$;
$\beta_0 :: p \Rightarrow p\wedge p$; $\beta_1 :: p\wedge q \Rightarrow q\wedge p$; $\beta_2 :: ((p\wedge q)\wedge r)\wedge s \Rightarrow (p\wedge(q\wedge r))\wedge s$.

Lemme 19. *Il existe des* C-*expressions* $\beta'_0, \beta'_1, \beta'_2, \beta_3, \beta'_3$ *telles que :*
$\beta'_0 :: p\wedge q \Rightarrow (p\wedge q)\wedge q$; $\beta'_1 :: (p\wedge q)\wedge r \Rightarrow (q\wedge p)\wedge r$; $\beta'_2 :: p\wedge(q\wedge r) \Rightarrow (p\wedge q)\wedge r$;
$\beta_3 :: p\wedge(q\wedge r) \Rightarrow p\wedge(r\wedge q)$; $\beta'_3 :: (p\wedge(q\wedge r))\wedge s \Rightarrow (p\wedge(r\wedge q))\wedge s$.

On écrit la suite des transformations, avec la C-expression qui l'exécute :

- $\beta'_0 = (\beta_1)(\alpha_2)(\alpha_0)(\beta_0)$.

$p\wedge q$; β_0 ; $(p\wedge q)\wedge(p\wedge q)$; α_0 ; $p\wedge(q\wedge(p\wedge q))$; α_2 ; $q\wedge(p\wedge q)$; β_1 ; $(p\wedge q)\wedge q$.

- $\beta'_2 = (\beta_1)(\alpha_0)(\beta_1)(\alpha_0)(\beta_1)$.

$p\wedge(q\wedge r)$; β_1 ; $(q\wedge r)\wedge p$; α_0 ; $q\wedge(r\wedge p)$; β_1 ; $(r\wedge p)\wedge q$; α_0 ; $r\wedge(p\wedge q)$; β_1 ; $(p\wedge q)\wedge r$.

- $\beta'_1 = (\alpha_2)(\alpha_0)(\beta_2)(\beta_1)(\alpha_0)(\alpha_2)(\beta_1)(\beta'_2)(\beta'_0)(\beta_1)$.

$(p\wedge q)\wedge r$; β_1 ; $r\wedge(p\wedge q)$; β'_0 $(r\wedge(p\wedge q))\wedge(p\wedge q)$; β'_2 ; $((r\wedge(p\wedge q))\wedge p)\wedge q$; β_1 ; $q\wedge((r\wedge(p\wedge q))\wedge p)$; α_2 ; $(r\wedge(p\wedge q))\wedge p$; α_0 ; $r\wedge((p\wedge q)\wedge p)$; β_1 ; $((p\wedge q)\wedge p)\wedge r$; β_2 ; $(p\wedge(q\wedge p))\wedge r$; α_0 ; $p\wedge((q\wedge p)\wedge r)$; α_2 ; $(q\wedge p)\wedge r$.

- $\beta_3 = (\beta_1)(\beta'_1)(\beta_1)$.

$p\wedge(q\wedge r)$; β_1 ; $(q\wedge r)\wedge p$; β'_1 ; $(r\wedge q)\wedge p$; β_1 ; $p\wedge(r\wedge q)$.

- $\beta'_3 = (\beta'_1)(\beta'_2)(\beta'_1)(\alpha_0)(\beta'_1)$.

$(p\wedge(q\wedge r))\wedge s$; β'_1 ; $((q\wedge r)\wedge p)\wedge s$; α_0 ; $(q\wedge r)\wedge(p\wedge s)$; β'_1 ; $(r\wedge q)\wedge(p\wedge s)$; β'_2 ; $((r\wedge q)\wedge p)\wedge s$; β'_1 ; $(p\wedge(r\wedge q))\wedge s$.

C.Q.F.D.

Théorème 20. *Soient t, u deux $\wedge$-termes tels que toute variable de u apparaisse dans t. Alors, il existe une* C-*expression γ telle que $\gamma :: t \Rightarrow t\wedge u$.*

Lemme 21. *Soient t un $\wedge$-terme et p une variable de t. Alors, il existe une* C-*expression γ telle que $\gamma :: t \Rightarrow t\wedge p$.*

On raisonne par récurrence sur le nombre de symboles de t qui se trouvent après la dernière occurrence de p. Si ce nombre est 0, on a $t = p$ ou $t = u\wedge p$. On a alors $\gamma = \beta_0$ ou β'_0 (lemme 19).
Sinon, on a $t = u\wedge v$; si la dernière occurrence de p est dans u, l'hypothèse de récurrence donne $\gamma' :: v\wedge u \Rightarrow (v\wedge u)\wedge p$. On a alors $\gamma = (\beta'_1)(\gamma')(\beta_1)$.
Si la dernière occurrence de p est dans v, on a $v = v_0\wedge v_1$. Si cette occurrence est dans v_0,

l'hypothèse de récurrence donne $\gamma' :: u{\wedge}(v_1{\wedge}v_0) \Rightarrow (u{\wedge}(v_1{\wedge}v_0)){\wedge}p$. On pose $\gamma = (\beta_3')(\gamma')(\beta_3)$ (lemme 19).
Si cette occurrence est dans v_1, l'hypothèse de récurrence donne
$\gamma' :: (u{\wedge}v_0){\wedge}v_1 \Rightarrow ((u{\wedge}v_0){\wedge}v_1){\wedge}p$. On pose alors $\gamma = (\beta_2)(\gamma')(\beta_2')$.

C.Q.F.D.

On montre le théorème 20 par récurrence sur la longueur de u.
Si $u = \mathbf{1}$, on a $\gamma = \alpha_1$; si u est une variable, on applique le lemme 21.
Si $u = v{\wedge}w$, l'hypothèse de récurrence donne $\gamma' :: t \Rightarrow t{\wedge}v$ et aussi $\gamma'' :: t{\wedge}v \Rightarrow (t{\wedge}v){\wedge}w$. On pose alors $\gamma = (\alpha_0)(\gamma'')(\gamma')$.

C.Q.F.D.

Corollaire 22. *Soient t, u deux $\wedge$-termes tels que toute variable de u apparaisse dans t. Alors, il existe une C-expression γ telle que $\gamma :: t \Rightarrow u$.*

D'après le théorème 20, on a $\gamma' :: t \Rightarrow t{\wedge}u$. On peut donc poser $\gamma = (\alpha_2)(\gamma')$.

C.Q.F.D.

Corollaire 23. *Il existe des C-expressions $\gamma_0, \gamma_I, \gamma_K, \gamma_E, \gamma_W, \gamma_C, \gamma_B, \gamma_{\mathsf{cc}}, \gamma_{\mathsf{k}}$ telles que :*
$\gamma_I :: p{\wedge}q \Rightarrow q$; $\gamma_K :: \mathbf{1}{\wedge}(p{\wedge}(q{\wedge}r)) \Rightarrow p{\wedge}r$; $\gamma_E :: \mathbf{1}{\wedge}(p{\wedge}(q{\wedge}r)) \Rightarrow (p{\wedge}q){\wedge}r$;
$\gamma_W :: \mathbf{1}{\wedge}(p{\wedge}(q{\wedge}r)) \Rightarrow p{\wedge}(q{\wedge}(q{\wedge}r))$; $\gamma_C :: \mathbf{1}{\wedge}(p{\wedge}(q{\wedge}(r{\wedge}s))) \Rightarrow p{\wedge}(r{\wedge}(q{\wedge}s))$;
$\gamma_B :: \mathbf{1}{\wedge}(p{\wedge}(q{\wedge}(r{\wedge}s))) \Rightarrow (p{\wedge}(q{\wedge}r)){\wedge}s$; $\gamma_{\mathsf{cc}} :: \mathbf{1}{\wedge}(p{\wedge}q) \Rightarrow p{\wedge}(q{\wedge}q)$;
$\gamma_{\mathsf{k}} :: p{\wedge}(q{\wedge}r) \Rightarrow q{\wedge}p$.

Lemme 24. *Pour chaque C-expression γ, on pose $\overline{\gamma} = \lambda x(\chi)\lambda y(\chi' x)(\gamma)y$.*
On a alors $\overline{\gamma} \star \xi \,\boldsymbol{.}\, \pi^\tau \succ \xi \star \pi^{\gamma\tau}$.

Immédiat, d'après le théorème 3. On aurait pu aussi prendre $\overline{\gamma} = (\chi)\lambda x\lambda y(\chi' y)(\gamma)x$.

C.Q.F.D.

Proposition 25. *Si on a $\gamma :: t(p_1, \ldots, p_k)] \Rightarrow u(p_1, \ldots, p_k)$, alors :*
$(\overline{\gamma} \star \xi \,\boldsymbol{.}\, \pi, t(p_1, \ldots, p_k)) \succ (\xi \star \pi, u(p_1, \ldots, p_k))$.

Supposons $(\overline{\gamma} \star \xi \,\boldsymbol{.}\, \pi, t(p_1, \ldots, p_k)) \notin \perp\!\!\!\perp\!\!\!\perp$. Il existe donc $\tau \in \mathsf{C}[t(p_1, \ldots, p_k)]$ tel que :
$\overline{\gamma} \star \xi \,\boldsymbol{.}\, \pi^\tau \notin \perp\!\!\!\perp$. On a donc $\xi \star \pi^{\gamma\tau} \notin \perp\!\!\!\perp$ et $\gamma\tau \in \mathsf{C}[u(p_1, \ldots, p_k)]$. Par suite :
$(\xi \star \pi, u(p_1, \ldots, p_k)) \notin \perp\!\!\!\perp\!\!\!\perp$.

C.Q.F.D.

L'algèbre $\mathcal{B}$

On définit une algèbre de réalisabilité $\mathcal{B}$ dont l'ensemble des termes est $\mathbf{\Lambda} = \Lambda \times P$, l'ensemble des piles est $\mathbf{\Pi} = \Pi \times P$ et l'ensemble des processus est $\mathbf{\Lambda} = (\Lambda \star \Pi) \times P$.
L'ensemble de processus $\perp\!\!\!\perp_{\mathcal{B}}$ de cette algèbre sera noté $\perp\!\!\!\perp\!\!\!\perp$. Il est défini comme suit :
$(\xi \star \pi, p) \in \perp\!\!\!\perp\!\!\!\perp \;\Leftrightarrow\; (\forall \tau \in \mathsf{C}[p])\, \xi \star \pi^\tau \in \perp\!\!\!\perp$.
Pour $(\xi, p) \in \mathbf{\Lambda}$ et $(\pi, q) \in \mathbf{\Pi}$), on pose :
$(\xi, p) \star (\pi, q) = (\xi \star \pi, p{\wedge}q)$;
$(\xi, p) \,\boldsymbol{.}\, (\pi, q) = (\xi \,\boldsymbol{.}\, \pi, p{\wedge}q)$.
Pour $(\xi, p), (\eta, q) \in \mathbf{\Lambda}$, on pose :
$(\xi, p)(\eta, q) = (\overline{\alpha}_0 \xi\eta, p{\wedge}q)$.

Lemme 26. *On a $(\xi, p)(\eta, q) \star (\pi, r) \notin \perp\!\!\!\perp\!\!\!\perp \;\Rightarrow\; (\xi, p) \star (\eta, q) \,\boldsymbol{.}\, (\pi, r) \notin \perp\!\!\!\perp\!\!\!\perp$.*

Par hypothèse, on a $(\overline{\alpha}_0\xi\eta \star \pi, (p\wedge q)\wedge r) \notin \perp\!\!\!\perp$; il existe donc $\tau \in \mathsf{C}[(p\wedge q)\wedge r]$ tel que : $\overline{\alpha}_0\xi\eta \star \pi^\tau \notin \perp$. D'après le lemme 24, on a $\xi \star \eta \centerdot \pi^{\alpha_0\tau} \notin \perp$; comme $\alpha_0\tau \in \mathsf{C}[p\wedge(q\wedge r)]$, on a $(\xi \star \eta \centerdot \pi, p\wedge(q\wedge r)) \notin \perp\!\!\!\perp$ et donc $(\xi, p) \star (\eta, q) \centerdot (\pi, r) \notin \perp\!\!\!\perp$.

C.Q.F.D.

On définit les combinateurs élémentaires **B, C, E, I, K, W, cc** de l'algèbre $\mathcal{B}$ en posant :

$\mathbf{B} = (B^*, \mathbf{1})$; $\mathbf{C} = (C^*, \mathbf{1})$; $\mathbf{E} = (E^*, \mathbf{1})$; $\mathbf{I} = (I^*, \mathbf{1})$; $\mathbf{K} = (K^*, \mathbf{1})$; $\mathbf{W} = (W^*, \mathbf{1})$; $\mathsf{cc} = (\mathsf{cc}^*, \mathbf{1})$
avec $B^* = \lambda x\lambda y\lambda z(\overline{\gamma}_B)(\overline{\alpha}_0 x)(\overline{\alpha}_0)yz$; $C^* = \overline{\gamma}_C C$; $E^* = \lambda x\lambda y(\overline{\gamma}_E)(\overline{\alpha}_0)xy$; $I^* = \overline{\gamma}_I I$;
$K^* = \overline{\gamma}_K K$; $W^* = \overline{\gamma}_W W$; $\mathsf{cc}^* = (\chi)\lambda x\lambda y(\mathsf{cc})\lambda k((\chi' y)(\gamma_{\mathsf{cc}})x)(\chi)\lambda x\lambda y(k)(\chi' y)(\gamma_{\mathsf{k}})x$.

On pose $\mathsf{k}_{(\pi,p)} = (\mathsf{k}_\pi^*, p)$ avec $\mathsf{k}_\pi^* = (\chi)\lambda x\lambda y(\mathsf{k}_\pi)(\chi' y)(\gamma_{\mathsf{k}})x$.

Théorème 27. *Quels que soient $\tilde{\xi}, \tilde{\eta}, \tilde{\zeta} \in \mathbf{\Lambda}$ et $\tilde{\pi}, \tilde{\varpi} \in \mathbf{\Pi}$, on a :*
$\mathbf{I} \star \tilde{\xi} \centerdot \tilde{\pi} \notin \perp\!\!\!\perp \;\Rightarrow\; \tilde{\xi} \star \tilde{\pi} \notin \perp\!\!\!\perp$;
$\mathbf{K} \star \tilde{\xi} \centerdot \tilde{\eta} \centerdot \tilde{\pi} \notin \perp\!\!\!\perp \;\Rightarrow\; \tilde{\xi} \star \tilde{\pi} \notin \perp\!\!\!\perp$;
$\mathbf{E} \star \tilde{\xi} \centerdot \tilde{\eta} \centerdot \tilde{\pi} \notin \perp\!\!\!\perp \;\Rightarrow\; (\tilde{\xi})\tilde{\eta} \star \tilde{\pi} \notin \perp\!\!\!\perp$;
$\mathbf{W} \star \tilde{\xi} \centerdot \tilde{\eta} \centerdot \tilde{\pi} \notin \perp\!\!\!\perp \;\Rightarrow\; \tilde{\xi} \star \tilde{\eta} \centerdot \tilde{\eta} \centerdot \tilde{\pi} \notin \perp\!\!\!\perp$.
$\mathbf{B} \star \tilde{\xi} \centerdot \tilde{\eta} \centerdot \tilde{\zeta} \centerdot \tilde{\pi} \notin \perp\!\!\!\perp \;\Rightarrow\; (\tilde{\xi})(\tilde{\eta})\tilde{\zeta} \star \tilde{\pi} \notin \perp\!\!\!\perp$;
$\mathbf{C} \star \tilde{\xi} \centerdot \tilde{\eta} \centerdot \tilde{\zeta} \centerdot \tilde{\pi} \notin \perp\!\!\!\perp \;\Rightarrow\; \tilde{\xi} \star \tilde{\zeta} \centerdot \tilde{\eta} \centerdot \tilde{\pi} \notin \perp\!\!\!\perp$.
$\mathsf{cc} \star \tilde{\xi} \centerdot \tilde{\pi} \notin \perp\!\!\!\perp \;\Rightarrow\; \tilde{\xi} \star \mathsf{k}_{\tilde{\pi}} \centerdot \tilde{\pi} \notin \perp\!\!\!\perp$.
$\mathsf{k}_{\tilde{\pi}} \star \tilde{\xi} \centerdot \tilde{\varpi} \notin \perp\!\!\!\perp \;\Rightarrow\; \tilde{\xi} \star \tilde{\pi} \notin \perp\!\!\!\perp$.

A titre d'exemples, on fait la démonstration pour **W, B,** $\mathsf{k}_{\tilde{\pi}}$, **cc**.
On pose $\tilde{\xi} = (\xi, p), \tilde{\eta} = (\eta, q), \tilde{\zeta} = (\zeta, r), \tilde{\pi} = (\pi, s), \tilde{\varpi} = (\varpi, q)$.

Supposons $\mathbf{W} \star \tilde{\xi} \centerdot \tilde{\eta} \centerdot \tilde{\pi} \notin \perp\!\!\!\perp$, donc $(\overline{\gamma}_W W \star \xi \centerdot \eta \centerdot \pi, \mathbf{1}\wedge(p\wedge(q\wedge s))) \notin \perp\!\!\!\perp$.
Il existe donc $\tau \in \mathsf{C}[\mathbf{1}\wedge(p\wedge(q\wedge s))]$ tel que $\overline{\gamma}_W W \star \xi \centerdot \eta \centerdot \pi^\tau \notin \perp$.
Comme $\overline{\gamma}_W W \star \xi \centerdot \eta \centerdot \pi^\tau \succ \xi \star \eta \centerdot \eta \centerdot \pi^{\gamma_W\tau}$, on a $\xi \star \eta \centerdot \eta \centerdot \pi^{\gamma_W\tau} \notin \perp$.
Mais $\gamma_W\tau \in \mathsf{C}[p\wedge(q\wedge(q\wedge s))]$ et il en résulte que l'on a $\tilde{\xi} \star \tilde{\eta} \centerdot \tilde{\eta} \centerdot \tilde{\pi} \notin \perp\!\!\!\perp$.

Supposons $\mathbf{B} \star \tilde{\xi} \centerdot \tilde{\eta} \centerdot \tilde{\zeta} \centerdot \tilde{\pi} \notin \perp\!\!\!\perp$, soit $(B^* \star \xi \centerdot \eta \centerdot \zeta \centerdot \pi, \mathbf{1}\wedge(p\wedge(q\wedge(r\wedge s)))) \notin \perp\!\!\!\perp$.
Il existe donc $\tau \in \mathsf{C}[\mathbf{1}\wedge(p\wedge(q\wedge(r\wedge s)))]$ tel que $B^* \star \xi \centerdot \eta \centerdot \zeta \centerdot \pi^\tau \notin \perp$.
Or, on a $B^* \star \xi \centerdot \eta \centerdot \zeta \centerdot \pi^\tau \succ (\overline{\gamma}_B)(\overline{\alpha}_0\xi)(\overline{\alpha}_0)\eta\zeta \star \pi^\tau$ (d'après le théorème 3)
$\succ (\overline{\alpha}_0\xi)(\overline{\alpha}_0)\eta\zeta \star \pi^{\gamma_B\tau}$ (d'après le lemme 24). Donc, on a $(\overline{\alpha}_0\xi)(\overline{\alpha}_0)\eta\zeta \star \pi^{\gamma_B\tau} \notin \perp$.
Mais $\gamma_B\tau \in \mathsf{C}[(p\wedge(q\wedge r))\wedge s]$ et on a donc :
$((\overline{\alpha}_0\xi)(\overline{\alpha}_0)\eta\zeta \star \pi, (p\wedge(q\wedge r))\wedge s) \notin \perp\!\!\!\perp$, autrement dit $(\tilde{\xi})(\tilde{\eta})\tilde{\zeta} \star \tilde{\pi} \notin \perp\!\!\!\perp$.

Supposons $\mathsf{k}_{\tilde{\pi}} \star \tilde{\xi} \centerdot \tilde{\varpi} \notin \perp\!\!\!\perp$, soit $(\mathsf{k}_\pi^* \star \xi \centerdot \varpi, s\wedge(p\wedge q)) \notin \perp\!\!\!\perp$. Il existe donc $\tau \in \mathsf{C}[s\wedge(p\wedge q)]$ tel que $\mathsf{k}_\pi^* \star \xi \centerdot \varpi^\tau \notin \perp$. Or, on a $\mathsf{k}_\pi^* \star \xi \centerdot \varpi^\tau \succ \lambda x\lambda y(\mathsf{k}_\pi)(\chi' y)(\gamma_{\mathsf{k}})x \star \tau \centerdot \xi \centerdot \varpi \succ (\mathsf{k}_\pi)(\chi'\xi)(\gamma_{\mathsf{k}})\tau \star \varpi$ (d'après le théorème 3) $\succ (\chi'\xi)(\gamma_{\mathsf{k}})\tau \star \pi \succ \chi' \star \xi \centerdot \gamma_{\mathsf{k}}\tau \centerdot \pi \succ \xi \star \pi^{\gamma_{\mathsf{k}}\tau}$.
On a donc $\xi \star \pi^{\gamma_{\mathsf{k}}\tau} \notin \perp$; mais, comme $\gamma_{\mathsf{k}}\tau \in \mathsf{C}[p\wedge s]$, on a bien $\tilde{\xi} \star \tilde{\pi} \notin \perp\!\!\!\perp$.

Supposons $\mathsf{cc} \star \tilde{\xi} \centerdot \tilde{\pi} \notin \perp\!\!\!\perp$, soit $(\mathsf{cc}^* \star \xi \centerdot \pi, \mathbf{1}\wedge(p\wedge s)) \notin \perp\!\!\!\perp$. Il existe donc $\tau \in \mathsf{C}[\mathbf{1}\wedge(p\wedge s)]$ tel que $\mathsf{cc}^* \star \xi \centerdot \pi^\tau \notin \perp$. Or, on a :
$\mathsf{cc}^* \star \xi \centerdot \pi^\tau \succ \lambda x\lambda y(\mathsf{cc})\lambda k((\chi' y)(\gamma_{\mathsf{cc}})x)(\chi)\lambda x\lambda y(k)(\chi' y)(\gamma_{\mathsf{k}})x \star \tau \centerdot \xi \centerdot \pi$
$\succ (\mathsf{cc})\lambda k((\chi'\xi)(\gamma_{\mathsf{cc}})\tau)(\chi)\lambda x\lambda y(k)(\chi' y)(\gamma_{\mathsf{k}})x \star \pi$
$\succ ((\chi'\xi)(\gamma_{\mathsf{cc}})\tau)(\chi)\lambda x\lambda y(\mathsf{k}_\pi)(\chi' y)(\gamma_{\mathsf{k}})x \star \pi \succ \chi' \star \xi \centerdot \gamma_{\mathsf{cc}}\tau \centerdot (\chi)\lambda x\lambda y(\mathsf{k}_\pi)(\chi' y)(\gamma_{\mathsf{k}})x \centerdot \pi$
$\succ \xi \star (\chi)\lambda x\lambda y(\mathsf{k}_\pi)(\chi' y)(\gamma_{\mathsf{k}})x \centerdot \pi^{\gamma_{\mathsf{cc}}\tau} \equiv \xi \star \mathsf{k}_\pi^* \centerdot \pi^{\gamma_{\mathsf{cc}}\tau}$.
Il en résulte que $\xi \star \mathsf{k}_\pi^* \centerdot \pi^{\gamma_{\mathsf{cc}}\tau} \notin \perp$. Or, on a $\gamma_{\mathsf{cc}}\tau \in \mathsf{C}[p\wedge(s\wedge s)]$ et il en résulte que l'on a $(\xi, p) \star (\mathsf{k}_\pi^*, s) \centerdot (\pi, s) \notin \perp\!\!\!\perp$, c'est-à-dire $\tilde{\xi} \star \mathsf{k}_{\tilde{\pi}} \centerdot \tilde{\pi} \notin \perp\!\!\!\perp$.

C.Q.F.D.

On a ainsi défini complètement l'algèbre de réalisabilité $\mathcal{B}$.

Pour chaque c-terme clos t (quasi-preuve), désignons par $t_{\mathcal{B}}$ sa valeur dans l'algèbre $\mathcal{B}$ (sa valeur dans l'algèbre standard $\mathcal{A}$ est t lui-même). On pose $t_{\mathcal{B}} = (t^*, \mathbf{1}_t)$, où t^* est une quasi-preuve et $\mathbf{1}_t$ une condition écrite avec $\mathbf{1}$, $\wedge$ et les parenthèses, qui sont définis comme suit par récurrence sur t :

- Si t est un combinateur élémentaire $B, C, E, I, K, W, \mathsf{cc}$, alors t^* a déjà été défini ; $\mathbf{1}_t = \mathbf{1}$.
- $(tu)^* = \overline{\alpha}_0 t^* u^*$; $\mathbf{1}_{tu} = \mathbf{1}_t \wedge \mathbf{1}_u$.

Le modèle $\mathcal{N}$

Le $\mathcal{B}$-modèle $\mathcal{N}$ a le même ensemble d'individus P et les mêmes fonctions que $\mathcal{M}$.
Par définition, les prédicats d'arité k de $\mathcal{N}$ sont les applications de P^k dans $\mathcal{P}(\mathbf{\Pi})$. Mais comme $\mathbf{\Pi} = \Pi \times P$, ils s'identifient aux applications de P^{k+1} dans $\mathcal{P}(\Pi)$, c'est-à-dire aux prédicats d'arité $k+1$ du modèle $\mathcal{M}$.
Chaque constante de prédicat R, d'arité k, est interprétée dans le modèle $\mathcal{M}$, par une application $\mathsf{R}_{\mathcal{M}} : P^k \to \mathcal{P}(\Lambda)$. Dans le modèle $\mathcal{N}$, cette constante de prédicat est interprétée par l'application $\mathsf{R}_{\mathcal{N}} : P^k \to \mathcal{P}(\mathbf{\Lambda})$, où $\mathsf{R}_{\mathcal{N}}(p_1, \ldots, p_k) = \mathsf{R}_{\mathcal{M}}(p_1, \ldots, p_k) \times \{\mathbf{1}\}$.

Pour chaque formule close F à paramètres dans $\mathcal{N}$, sa valeur de vérité, qui est une partie de $\mathbf{\Pi}$, sera notée $\|\!|F|\!\|$. On écrira $(\xi, p) \Vdash F$ pour exprimer que $(\xi, p) \in \mathbf{\Lambda}$ réalise F, autrement dit $(\forall \pi \in \Pi)(\forall q \in P)((\pi, q) \in \|\!|F|\!\|) \Rightarrow (\xi, p) \star (\pi, q) \in \perp\!\!\!\perp\!\!\!\perp)$.

Théorème 28.
Si on a $\vdash t : A$ en logique classique du second ordre, où A est une formule close, alors $t_{\mathcal{B}} = (t^*, \mathbf{1}_t) \Vdash A$.

Application immédiate du théorème 5 (lemme d'adéquation) dans le $\mathcal{B}$-modèle $\mathcal{N}$.
C.Q.F.D.

Proposition 29.
i) Si $(\xi, \mathbf{1}) \Vdash F$, alors $(\overline{\gamma}\xi, p) \Vdash F$ pour tout $p \in P$, avec $\gamma :: p \wedge q \Rightarrow \mathbf{1} \wedge q$.
ii) Soient $\xi, \eta \in \Lambda$ tels que $\xi \star \pi \succ \eta \star \pi$ pour toute $\pi \in \Pi$. On a alors :
$(\xi \star \pi, p) \succ (\eta \star \pi, p)$ quels que soient $\pi \in \Pi$ et $p \in P$;
$(\eta, p) \Vdash F \;\Rightarrow\; (\xi, p) \Vdash F$ pour toute formule close F.

i) On doit montrer que, pour tout $(\pi, q) \in \|\!|F|\!\|$, on a $(\overline{\gamma}\xi, p) \star (\pi, q) \in \perp\!\!\!\perp\!\!\!\perp$, soit :
$(\overline{\gamma}\xi \star \pi, p \wedge q) \in \perp\!\!\!\perp\!\!\!\perp$. Soit donc $\tau \in \mathsf{C}[p \wedge q]$, d'où $\gamma\tau \in \mathsf{C}[\mathbf{1} \wedge q]$.
Comme on a, par hypothèse, $(\xi \star \pi, \mathbf{1} \wedge q) \in \perp\!\!\!\perp\!\!\!\perp$, on en déduit $\xi \star \pi^{\gamma\tau} \in \perp\!\!\!\perp$ et donc $\overline{\gamma}\xi \star \pi^{\tau} \in \perp\!\!\!\perp$.
ii) Supposons $(\xi \star \pi, p) \notin \perp\!\!\!\perp\!\!\!\perp$; il existe donc $\tau \in \mathsf{C}[p]$ tel que $\xi \star \pi^{\tau} \notin \perp\!\!\!\perp$. On a donc $\eta \star \pi^{\tau} \notin \perp\!\!\!\perp$, d'où $(\eta \star \pi, p) \notin \perp\!\!\!\perp\!\!\!\perp$.
Soit $(\pi, q) \in \|\!|F|\!\|$; on a $(\eta, p) \star (\pi, q) \in \perp\!\!\!\perp\!\!\!\perp$, soit $(\eta \star \pi, p \wedge q) \in \perp\!\!\!\perp$. D'après ce qu'on vient de voir, on a donc $(\xi \star \pi, p \wedge q) \in \perp\!\!\!\perp$, donc $(\xi, p) \star (\pi, q) \in \perp\!\!\!\perp\!\!\!\perp$.
C.Q.F.D.

Les entiers du modèle $\mathcal{N}$

Rappelons qu'on a posé :
$\sigma = \lambda n \lambda f \lambda x (f)(n) f x$, $\underline{0} = \lambda x \lambda y\, y$ et $\underline{n} = (\sigma)^n \underline{0}$ pour tout entier n.
On a donc $\sigma_{\mathcal{B}} = (\sigma^*, \mathbf{1}_\sigma)$ et $\underline{n}_{\mathcal{B}} = ((\sigma)^n \underline{0})_{\mathcal{B}} = (\underline{n}^*, \mathbf{1}_{\underline{n}})$.
Donc $\underline{0}_{\mathcal{B}} = (KI)_{\mathcal{B}} = (K^*, \mathbf{1})(I^*, \mathbf{1})$ et $\underline{n+1}_{\mathcal{B}} = \sigma_{\mathcal{B}} \underline{n}_{\mathcal{B}} = (\sigma^*, \mathbf{1}_\sigma)(\underline{n}^*, \mathbf{1}_{\underline{n}})$.
Les définitions par récurrence de $\underline{n}^*, \mathbf{1}_{\underline{n}}$ sont donc les suivantes :

$\underline{0}^* = \overline{\alpha}_0 K^* I^*$; $(\underline{n+1})^* = \overline{\alpha}_0 \sigma^* \underline{n}^*$;
$\mathbf{1}_{\underline{0}} = \mathbf{1} \wedge \mathbf{1}$; $\mathbf{1}_{\underline{n+1}} = \mathbf{1}_\sigma \wedge \mathbf{1}_{\underline{n}}$.

On peut définir le prédicat unaire $\mathrm{ent}(x)$ dans le modèle $\mathcal{N}$ de deux façons distinctes :

i) A partir du prédicat $\mathrm{ent}(x)$ du modèle $\mathcal{M}$, en posant :
$|\mathrm{ent}(s^n 0)| = \{(\underline{n}, \mathbf{1})\}$; $|\mathrm{ent}(p)| = \emptyset$ si $p \notin \mathbb{N}$.
ii) Directement par la définition de ent(x) dans le modèle $\mathcal{N}$; nous notons ce prédicat $\mathrm{ent}_{\mathcal{N}}(x)$.
On a donc :
$—\mathrm{ent}_{\mathcal{N}}(s^n 0)| = \underline{n}_{\mathcal{B}}$; $—\mathrm{ent}_{\mathcal{N}}(p)| = \emptyset$ si $p \notin \mathbb{N}$.
D'après le théorème 14, appliqué dans le modèle $\mathcal{N}$, on sait que les prédicats $\mathrm{int}(x)$ et $\mathrm{ent}_{\mathcal{N}}(x)$ sont interchangeables. Le théorème 30 montre que les prédicats $\mathrm{int}(x)$ et $\mathrm{ent}(x)$ sont aussi interchangeables. On a ainsi trois prédicats qui définissent les entiers dans le modèle $\mathcal{N}$; c'est $\mathrm{ent}(x)$ que nous utiliserons le plus souvent dans la suite. En particulier, on remplacera le quantificateur $\forall x^{\mathrm{int}}$ par $\forall x^{\mathrm{ent}}$.

Théorème 30.
Il existe deux quasi-preuves T, J telles que :
i) $(T, \mathbf{1}) \Vdash \forall X \forall x((\mathit{ent}(x) \to X), \mathit{int}(x) \to X)$.
ii) $(J, \mathbf{1}) \Vdash \forall x(\mathit{ent}(x) \to \mathit{int}(x))$.

i) On applique le théorème 14 à la suite $u : \mathbb{N} \to \mathbf{\Lambda}$ définie par $u_n = (\underline{n}, \mathbf{1})$.
On cherche deux quasi-preuves T, S telles que :
$(S, \mathbf{1}) \star (\psi, p) \centerdot (\underline{n}, \mathbf{1}) \centerdot (\pi, r) \succ (\psi, p) \star (\underline{n+1}, \mathbf{1}) \centerdot (\pi, r)$; $(S, \mathbf{1}) \Vdash \top \to \bot, \top \to \bot$.
$(T, \mathbf{1}) \star (\phi, p) \centerdot (\nu, q) \centerdot (\pi, r) \succ (\nu, q) \star (S, \mathbf{1}) \centerdot (\phi, p) \centerdot (\underline{0}, \mathbf{1}) \centerdot (\pi, r)$.
D'après le théorème 14, on aura alors le résultat cherché :
$(T, \mathbf{1}) \Vdash \forall X \forall x((\mathrm{ent}(x) \to X), \mathrm{int}(x) \to X)$.
On pose $S = \lambda f \lambda x(\overline{\gamma} f)(\sigma) x$, avec $\gamma :: \mathbf{1} \wedge (p \wedge (q \wedge r)) \Rightarrow p \wedge (q \wedge r)$.
On a alors $(S, \mathbf{1}) \star (\psi, p) \centerdot (\nu, q) \centerdot (\pi, r) \equiv (S \star \psi \centerdot \nu \centerdot \pi, \mathbf{1} \wedge (p \wedge (q \wedge r))) \succ$
$(\overline{\gamma} \psi \star \sigma \nu \centerdot \pi, \mathbf{1} \wedge (p \wedge (q \wedge r)))$ (théorème 3 et proposition 29(ii))
$\succ (\psi \star \sigma \nu \centerdot \pi, p \wedge (q \wedge r))$ (proposition 25) $\equiv (\psi, p) \star (\sigma \nu, q) \centerdot (\pi, r)$.
Supposons d'abord que $(\psi, p) \Vdash \top \to \bot$; on a alors $(\psi, p) \star (\sigma \nu, q) \centerdot (\pi, r) \in \perp\!\!\!\perp$ et donc :
$(S, \mathbf{1}) \star (\psi, p) \centerdot (\nu, q) \centerdot (\pi, r) \in \perp\!\!\!\perp$. Cela montre que $(S, \mathbf{1}) \Vdash \top \to \bot, \top \to \bot$.
Par ailleurs, en posant $\nu = \underline{n}$, d'où $\sigma \nu = \underline{n+1}$, et $q = \mathbf{1}$, on a bien montré que :
$(S, \mathbf{1}) \star (\psi, p) \centerdot (\underline{n}, \mathbf{1}) \centerdot (\pi, r) \succ (\psi, p) \star (\underline{n+1}, \mathbf{1}) \centerdot (\pi, r)$.
On pose ensuite $T = \lambda f \lambda x(\overline{\gamma}' x) S f \underline{0}$, avec $\gamma' :: \mathbf{1} \wedge (p \wedge (q \wedge r))] \Rightarrow q \wedge (\mathbf{1} \wedge (p \wedge (\mathbf{1} \wedge r)))$.
On a alors $(T, \mathbf{1}) \star (\phi, p) \centerdot (\nu, q) \centerdot (\pi, r) \equiv (T \star \phi \centerdot \nu \centerdot \pi, \mathbf{1} \wedge (p \wedge (q \wedge r))) \succ$
$(\overline{\gamma}' \nu \star S \centerdot \phi \centerdot \underline{0} \centerdot \pi, \mathbf{1} \wedge (p \wedge (q \wedge r)))$ (théorème 3 et proposition 29(ii))
$\succ (\nu \star S \centerdot \phi \centerdot \underline{0} \centerdot \pi, q \wedge (\mathbf{1} \wedge (p \wedge (\mathbf{1} \wedge r))))$ (proposition 25)
$\equiv (\nu, q) \star (S, \mathbf{1}) \centerdot (\phi, p) \centerdot (\underline{0}, \mathbf{1}) \centerdot (\pi, r)$ ce qui est le résultat cherché.
ii) On cherche une quasi-preuve J telle que $(J, \mathbf{1}) \Vdash \forall x(\mathrm{ent}(x) \to \mathrm{int}(x))$. Il suffit d'avoir :
$(J, \mathbf{1}) \Vdash \mathrm{ent}(s^n 0) \to \mathrm{int}(s^n 0)$ pour tout $n \in \mathbb{N}$, puisque $—\mathrm{ent}(p)| = \emptyset$ si $p \notin \mathbb{N}$.
Soit $(\pi, q) \in \|\mathrm{int}(n)\|$; on doit avoir $(J, \mathbf{1}) \star (\underline{n}, \mathbf{1}) \centerdot (\pi, q) \in \perp\!\!\!\perp$, soit $(J \star \underline{n} \centerdot \pi, \mathbf{1} \wedge (\mathbf{1} \wedge q)) \in \perp\!\!\!\perp$.
Or, on a $(\underline{n}^*, \mathbf{1}_{\underline{n}}) = ((\sigma)^n \underline{0})_{\mathcal{B}} \Vdash \mathrm{int}(s^n 0)$ (théorème 5, appliqué dans $\mathcal{B}$) et donc :
$(\underline{n}^*, \mathbf{1}_{\underline{n}}) \star (\pi, q) \in \perp\!\!\!\perp$ ou encore $(\underline{n}^* \star \pi, \mathbf{1}_{\underline{n}} \wedge q) \in \perp\!\!\!\perp$.
Soit donc $\tau \in \mathsf{C}[\mathbf{1} \wedge (\mathbf{1} \wedge q)]$; on a alors $(\gamma)^n (\gamma_0) \tau \in \mathsf{C}[\mathbf{1}_n \wedge q]$
où γ_0 et γ sont deux C-expressions telles que :
$\gamma_0 :: \mathbf{1} \wedge (\mathbf{1} \wedge q) \Rightarrow (\mathbf{1} \wedge \mathbf{1}) \wedge q$; $\gamma :: p \wedge q \Rightarrow (\mathbf{1}_\sigma \wedge p) \wedge q$.
En effet, on a vu que $\mathbf{1}_{\underline{0}} = \mathbf{1} \wedge \mathbf{1}$ et $\mathbf{1}_{\underline{n+1}} = \mathbf{1}_\sigma \wedge \mathbf{1}_{\underline{n}}$. Il en résulte que, si $\tau \in \mathsf{C}[\mathbf{1} \wedge (\mathbf{1} \wedge q)]$, alors

$(\gamma_0)\tau \in \mathsf{C}[\mathbf{1}_{\underline{0}}\wedge q]$, d'où $(\gamma)^n(\gamma_0)\tau \in \mathsf{C}[\mathbf{1}_n\wedge q]$. On a donc $\underline{n}^* \star \pi^{(\gamma)^n(\gamma_0)\tau} \in \perp\!\!\!\perp$.
On construit ci-dessous deux quasi-preuves g, j telles que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, on ait :
a) $g \star \underline{n} \,.\, \xi \,.\, \pi^\tau \succ \xi \star \pi^{(\gamma)^n(\gamma_0)\tau}$;
b) $j \star \underline{n} \,.\, \xi \,.\, \pi \succ \xi \star \underline{n}^* \,.\, \pi$.
En posant $J = \lambda x(gx)(j)x$, on a $J \star \underline{n} \,.\, \pi^\tau \succ \underline{n}^* \star \pi^{(\gamma)^n(\gamma_0)\tau} \in \perp\!\!\!\perp$, ce qui est le résultat voulu.

a) On pose $g = \lambda k\lambda x(\overline{\gamma}_0)(k)\overline{\gamma}x$; on a, d'après le théorème 3 :
$g \star \underline{n} \,.\, \xi \,.\, \pi^\tau \succ \overline{\gamma}_0 \star (\underline{n})\overline{\gamma}\xi \,.\, \pi^\tau \succ (\underline{n})\overline{\gamma}\xi \star \pi^{(\gamma_0)\tau}$.
Il suffit donc de montrer que $(\underline{n})\overline{\gamma}\xi \star \pi^\tau \succ \xi \star \pi^{(\gamma)^n\tau}$ ce qu'on fait par récurrence sur n.
Si $n = 0$, on a immédiatement $\underline{0} \star \overline{\gamma} \,.\, \xi \,.\, \pi^\tau \succ \xi \star \pi^\tau$ puisque $\underline{0} = \lambda x\lambda y\, y$.
Pour passer de n à $n+1$, on a $(\underline{n+1})\overline{\gamma}\xi \star \pi^\tau \equiv (\sigma\underline{n})\overline{\gamma}\xi \star \pi^\tau \succ \sigma \star \underline{n} \,.\, \overline{\gamma} \,.\, \xi \,.\, \pi^\tau$
$\succ \overline{\gamma} \star (\underline{n})\overline{\gamma}\xi \,.\, \pi^\tau \succ (\underline{n})\overline{\gamma}\xi \star \pi^{(\gamma)\tau} \succ \xi \star \pi^{(\gamma)^{n+1}\tau}$ par hypothèse de récurrence.

b) On pose $\beta = \overline{\alpha}_0\sigma^*$, $U = \lambda g\lambda y(g)(\beta)y$ et $j = \lambda k\lambda f(k)Uf\underline{0}^*$.
On a donc $j \star \underline{n} \,.\, \xi \,.\, \pi \succ \underline{n}U\xi \star \underline{0}^* \,.\, \pi$. On montre, par récurrence sur n, que :
$\underline{n}U\xi \star \underline{k}^* \,.\, \pi \succ \xi \star (\underline{n+k})^* \,.\, \pi$ pour tout entier k, ce qui donne le résultat voulu avec $k = 0$.
Pour $n = 0$, on a $\underline{0}U\xi \star \underline{k}^* \,.\, \pi \succ \xi \star \underline{k}^* \,.\, \pi$ puisque $\underline{0} = \lambda x\lambda y\, y$.
Pour passer de n à $n+1$, on a $(\underline{n+1}) \star U \,.\, \xi \,.\, \underline{k}^* \,.\, \pi \equiv \sigma\underline{n} \star U \,.\, \xi \,.\, \underline{k}^* \,.\, \pi \succ U \star \underline{n}U\xi \,.\, \underline{k}^* \,.\, \pi$
(puisque $\sigma = \lambda n\lambda f\lambda x(f)(n)fx) \succ \underline{n}U\xi \star \beta\underline{k}^* \,.\, \pi \equiv \underline{n}U\xi \star (\underline{k+1})^* \,.\, \pi \succ \xi \star (\underline{n+k+1})^* \,.\, \pi$
par hypothèse de récurrence.

C.Q.F.D.

Forcing

Il s'agit d'évaluer les valeurs de vérité des formules dans le $\mathcal{B}$-modèle générique $\mathcal{N}$.
Pour chaque variable de prédicat X d'arité k, on ajoute au langage une nouvelle variable de prédicat, notée X^+, d'arité $k+1$. Dans le $\mathcal{A}$-modèle $\mathcal{M}$, on utilisera les variables X et X^+ ; dans le $\mathcal{B}$-modèle $\mathcal{N}$, seulement les variables X.

A chaque paramètre du second ordre d'arité k du modèle $\mathcal{N}$, soit $\mathcal{X} : P^k \to \mathcal{P}(\mathbf{\Pi})$, on associe un paramètre du second ordre d'arité $k+1$, soit $\mathcal{X}^+ : P^{k+1} \to \mathcal{P}(\Pi)$ du modèle $\mathcal{M}$. Il est défini de façon évidente, puisque $\mathbf{\Pi} = \Pi \times P$; on pose :
$\mathcal{X}^+(p, p_1, \ldots, p_k) = \{\pi \in \Pi;\ (\pi, p) \in \mathcal{X}(p_1, \ldots, p_k)\}$

Pour toute formule F *écrite sans les variables* X^+, avec paramètres dans le modèle $\mathcal{N}$, on définit, par récurrence sur F, une formule notée $p \Vdash F$ (lire " p force F "), avec paramètres dans le modèle $\mathcal{A}$, *écrite avec les variables* X^+ et une variable libre p de condition :

Si F est atomique de la forme $X(t_1, \ldots, t_k)$, alors $p \Vdash F$ est $\forall q(\mathsf{C}[p\wedge q] \to X^+(q, t_1, \ldots, t_k))$.
Si F est atomique de la forme $\mathcal{X}(t_1, \ldots, t_k)$, alors $p \Vdash F$ est $\forall q(\mathsf{C}[p\wedge q] \to \mathcal{X}^+(q, t_1, \ldots, t_k))$.
Si $F \equiv (A \to B)$ où A, B sont des formules, alors $p \Vdash F$ est $\forall q(q \Vdash A \to p\wedge q \Vdash B)$.
Si $F \equiv (\mathsf{R}(t_1, \ldots, t_k) \to B)$, où R est une constante de prédicat, alors :
$p \Vdash F$ est $(\mathsf{R}(t_1, \ldots, t_k) \to p \Vdash B)$.
Si $F \equiv (t_1 = t_2 \mapsto B)$, alors $p \Vdash F$ est $(t_1 = t_2 \mapsto p \Vdash B)$.
Si $F \equiv \forall x\, A$, alors $p \Vdash F$ est $\forall x(p \Vdash A)$.
Si $F \equiv \forall X\, A$, alors $p \Vdash F$ est $\forall X^+(p \Vdash A)$.

On a donc, en particulier :
Si $F \equiv \forall x^{\mathrm{ent}} A$, alors $p \Vdash F$ est $\forall x^{\mathrm{ent}}(p \Vdash A)$.

Lemme 31. *Soient F une formule dont les variables libres sont parmi $X_1, \ldots, X_k$ et $\mathcal{X}_1, \ldots, \mathcal{X}_k$ des paramètres du second ordre du modèle $\mathcal{N}$, d'arités correspondantes. On a alors :*
$(p \Vdash F)[\mathcal{X}_1^+/X_1^+, \ldots, \mathcal{X}_k^+/X_k^+] \equiv (p \Vdash F[\mathcal{X}_1/X_1, \ldots, \mathcal{X}_k/X_k])$.

Immédiat, par récurrence sur F.

C.Q.F.D.

Théorème 32.
Pour chaque formule close F à paramètres dans le modèle $\mathcal{N}$, il existe deux quasi-preuves χ_F, χ'_F, qui ne dépendent que de la structure propositionnelle de F, telles que l'on ait :
$\xi \Vdash (p \Vdash F) \;\Rightarrow\; (\chi_F\xi, p) \Vvdash F$;
$(\xi, p) \Vvdash F \;\Rightarrow\; \chi'_F\xi \Vdash (p \Vdash F)$
quels que soient $\xi \in \Lambda$ et $p \in P$.

La *structure propositionnelle* de F est le type simple construit avec un seul atome O et $\to$, obtenu à partir de F en supprimant tous les quantificateurs, tous les symboles $\mapsto$ avec leur hypothèse, et en identifiant toutes les formules atomiques avec O.
Par exemple, la structure propositionnelle de la formule :
$\forall X(\forall x(\forall y(f(x, y) = 0 \mapsto Xy) \to Xx) \to \forall x\, Xx)$ est $(O \to O) \to O$.

Preuve par récurrence sur la longueur de F.
• Si F est atomique, on a $F \equiv \mathcal{X}(t_1, \ldots, t_k)$; on montre que $\chi_F = \chi$ et $\chi'_F = \chi'$. On a, en effet :
$\|p \Vdash F\| = \|\forall q(\mathsf{C}[p\wedge q] \to \mathcal{X}^+(q, t_1, \ldots, t_k)\| = \bigcup_q\{\tau \centerdot \pi;\ \tau \in \mathsf{C}[p\wedge q], (\pi, q) \in |||\mathcal{X}(t_1, \ldots, t_k)|||\}$.
En effet, par définition de $\mathcal{X}^+$, on a $\pi \in \|\mathcal{X}^+(q, t_1, \ldots, t_k)\| \Leftrightarrow (\pi, q) \in |||\mathcal{X}(t_1, \ldots, t_k)|||$.
On a donc :
$(*)\qquad \xi \Vdash (p \Vdash F) \Leftrightarrow (\forall q \in P)(\forall \tau \in \mathsf{C}[p\wedge q])(\forall \pi \in \Pi)((\pi, q) \in |||\mathcal{X}(t_1, \ldots, t_k)||| \Rightarrow \xi\star\tau \centerdot \pi \in \perp\!\!\!\perp)$.
Par ailleurs, on a $(\xi, p) \Vvdash F \Leftrightarrow (\forall q \in P)(\forall \pi \in \Pi)((\pi, q) \in |||F||| \Rightarrow (\xi, p) \star (\pi, q) \in \perp\!\!\!\perp\!\!\!\perp)$
$\Leftrightarrow (\forall q \in P)(\forall \pi \in \Pi)((\pi, q) \in |||F||| \Rightarrow (\xi \star \pi, p\wedge q) \in \perp\!\!\!\perp\!\!\!\perp)$ d'où enfin, par définition de $\perp\!\!\!\perp\!\!\!\perp$:
$(**)\qquad (\xi, p) \Vvdash F \;\Leftrightarrow\; (\forall q \in P)(\forall \tau \in \mathsf{C}[p\wedge q])(\forall \pi \in \Pi)((\pi, q) \in |||F||| \Rightarrow \xi \star \pi^\tau \in \perp\!\!\!\perp)$.
Supposons que $\xi \Vdash (p \Vdash F)$. Comme $\chi\xi \star \pi^\tau \succ \xi \star \tau \centerdot \pi$, on a d'après $(*)$:
$(\forall q \in P)(\forall \tau \in \mathsf{C}[p\wedge q])(\forall \pi \in \Pi)((\pi, q) \in |||\mathcal{X}(t_1, \ldots, t_k)||| \Rightarrow \chi\xi \star \tau \centerdot \pi \in \perp\!\!\!\perp)$
et donc $(\chi\xi, p) \Vvdash F$ d'après $(**)$.
Inversement, supposons que $(\xi, p) \Vvdash F$. En appliquant $(**)$ et le fait que $\chi'\xi \star \tau \centerdot \pi \succ \xi \star \pi^\tau$, on obtient $(\forall q \in P)(\forall \tau \in \mathsf{C}[p\wedge q])(\forall \pi \in \Pi)((\pi, q) \in |||F||| \Rightarrow \chi'\xi \star \tau \centerdot \pi \in \perp\!\!\!\perp)$
et donc $\chi'\xi \Vdash (p \Vdash F)$ d'après $(*)$.
• Si $F \equiv \forall X\, A$, alors $p \Vdash F \equiv \forall X^+(p \Vdash A)$. On a donc $\xi \Vdash (p \Vdash F) \equiv \forall X^+(\xi \Vdash (p \Vdash A))$.
Par ailleurs, on a $(\xi, p) \Vvdash F \equiv \forall X((\xi, p) \Vvdash A)$.
Soient $\mathcal{X} : P^k \to \mathcal{P}(\mathbf{\Pi})$ un paramètre du second ordre du modèle $\mathcal{N}$, de même arité que X, et $\mathcal{X}^+$ le paramètre correspondant du modèle $\mathcal{M}$.
Si $\xi \Vdash (p \Vdash F)$, alors on a $(\xi \Vdash (p \Vdash A))[\mathcal{X}^+/X^+]$, donc $\xi \Vdash (p \Vdash A[\mathcal{X}/X])$, d'après le lemme 31.
Par hypothèse de récurrence, on a $(\chi_A\xi, p) \Vvdash A[\mathcal{X}/X]$. Comme $\mathcal{X}$ est arbitraire, on en déduit $(\chi_A\xi, p) \Vvdash \forall X\, A$.
Inversement, si on a $(\xi, p) \Vvdash F$, alors $(\xi, p) \Vvdash A[\mathcal{X}/X]$ pour tout $\mathcal{X}$.
Par hypothèse de récurrence, on a $\chi'_A\xi \Vdash (p \Vdash A[\mathcal{X}/X])$, d'où $\chi'_A\xi \Vdash (p \Vdash A)[\mathcal{X}^+/X^+])$, d'après le lemme 31. Comme $\mathcal{X}^+$ est arbitraire, on en déduit $\chi'_A\xi \Vdash \forall X^+(p \Vdash A)$, c'est-à-dire $\chi'_A\xi \Vdash (p \Vdash \forall X\, A)$.
• Si $F \equiv \forall x\, A$, alors $p \Vdash F \equiv \forall x(p \Vdash A)$. Donc $\xi \Vdash p \Vdash F \equiv \forall x(\xi \Vdash (p \Vdash A))$.
Par ailleurs, $(\xi, p) \Vvdash F \equiv \forall x((\xi, p) \Vvdash A)$.
Le résultat est immédiat, d'après l'hypothèse de récurrence.
• Si $F \equiv (t_1 = t_2 \mapsto A)$, alors $p \Vdash F \equiv t_1 = t_2 \mapsto p \Vdash A$. Donc :
$\xi \Vdash (p \Vdash F) \equiv (t_1 = t_2 \mapsto \xi \Vdash (p \Vdash A))$.
Par ailleurs, $(\xi, p) \Vvdash F \equiv (t_1 = t_2 \mapsto (\xi, p) \Vvdash A)$.
Le résultat est immédiat, d'après l'hypothèse de récurrence.

• Si $F \equiv A \to B$, on a $p \Vdash F \equiv \forall q(q \Vdash A \to p\wedge q \Vdash B)$ et donc :
$(*)$ $\quad \xi \Vdash (p \Vdash F) \Rightarrow \forall\eta\forall q(\eta \Vdash (q \Vdash A) \to \xi\eta \Vdash (p\wedge q \Vdash B))$.
Supposons $\xi \Vdash (p \Vdash F)$ et posons $\chi_F = \lambda x\lambda y(\overline{\gamma}_0)(\chi_B)(x)(\chi'_A)y$.
On doit montrer $(\chi_F\xi, p) \Vvdash A \to B$; soient donc $(\eta, q) \Vvdash A$ et $(\pi, r) \in \|\|B\|\|$.
On doit montrer $(\chi_F\xi, p) \star (\eta, q) \centerdot (\pi, r) \in \perp\!\!\!\perp$ soit $(\chi_F\xi \star \eta \centerdot \pi, p\wedge(q\wedge r)) \in \perp\!\!\!\perp$.
Soit donc $\tau \in \mathsf{C}[p\wedge(q\wedge r)]$; on doit montrer $\chi_F\xi \star \eta \centerdot \pi^\tau \in \perp\!\!\!\perp$ ou encore $\chi_F \star \xi \centerdot \eta \centerdot \pi^\tau \in \perp\!\!\!\perp$.
D'après l'hypothèse de récurrence appliquée à $(\eta, q) \Vvdash A$, on a $\chi'_A\eta \Vdash (q \Vdash A)$.
D'après $(*)$, on a donc $(\xi)(\chi'_A)\eta \Vdash (p\wedge q \Vdash B)$.
En appliquant de nouveau l'hypothèse de récurrence, on en déduit :
$((\chi_B)(\xi)(\chi'_A)\eta, p\wedge q) \Vvdash B$. Mais, comme $(\pi, r) \in \|\|B\|\|$, on a alors :
$((\chi_B)(\xi)(\chi'_A)\eta, p\wedge q) \star (\pi, r) \in \perp\!\!\!\perp$, soit $((\chi_B)(\xi)(\chi'_A)\eta \star \pi, (p\wedge q)\wedge r) \in \perp\!\!\!\perp$.
Comme $\tau \in \mathsf{C}[p\wedge(q\wedge r)]$, on a $\gamma_0\tau \in \mathsf{C}[(p\wedge q)\wedge r]$ et donc $(\chi_B)(\xi)(\chi'_A)\eta \star \pi^{\gamma_0\tau} \in \perp\!\!\!\perp$.
Mais, par définition de χ_F, on a, d'après le théorème 3 :
$\chi_F \star \xi \centerdot \eta \centerdot \pi^\tau \succ (\chi_B)(\xi)(\chi'_A)\eta \star \pi^{\gamma_0\tau}$ ce qui donne le résultat voulu : $\chi_F \star \xi \centerdot \eta \centerdot \pi^\tau \in \perp\!\!\!\perp$.
Supposons maintenant $(\xi, p) \Vvdash A \to B$; on pose $\chi'_F = \lambda x\lambda y(\chi'_B)(\overline{\alpha}_0 x)(\chi_A)y$.
On doit montrer $\chi'_F\xi \Vdash (p \Vdash A \to B)$ c'est-à-dire $\forall q(\chi'_F\xi \Vdash (q \Vdash A \to p\wedge q \Vdash B))$.
Soient donc $\eta \Vdash q \Vdash A$ et $\pi \in \|p\wedge q \Vdash B\|$; on doit montrer $\chi'_F\xi \star \eta \centerdot \pi \in \perp\!\!\!\perp$.
Par hypothèse de récurrence, on a $(\chi_A\eta, q) \Vvdash A$, donc $(\xi, p)(\chi_A\eta, q) \Vvdash B$ ou encore, par définition de l'algèbre $\mathcal{B}$: $((\overline{\alpha}_0\xi)(\chi_A)\eta, p\wedge q) \Vvdash B$.
En appliquant encore l'hypothèse de récurrence, on a $(\chi'_B)(\overline{\alpha}_0\xi)(\chi_A)\eta \Vdash (p\wedge q \Vdash B)$ et donc : $(\chi'_B)(\overline{\alpha}_0\xi)(\chi_A)\eta \star \pi \in \perp\!\!\!\perp$. Mais on a :
$\chi'_F\xi \star \eta \centerdot \pi \succ \chi'_F \star \xi \centerdot \eta \centerdot \pi \succ (\chi'_B)(\overline{\alpha}_0\xi)(\chi_A)\eta \star \pi$ d'après le théorème 3 ; d'où le résultat voulu.
C.Q.F.D.

Une formule F est dite *du premier ordre* si elle est obtenue par les règles suivantes :
• $\perp$ est du premier ordre.
• Si A, B sont du premier ordre, alors $A \to B$ est du premier ordre.
• Si B est du premier ordre, R est un symbole de prédicat et $t_1, \ldots, t_k$ sont des termes avec paramètres, alors $\mathsf{R}(t_1, \ldots, t_k) \to B$, $t_1 = t_2 \mapsto B$ sont du premier ordre.
• Si A est du premier ordre, $\forall x\, A$ est du premier ordre (x est une variable d'individu).

Remarques.
i) Si A est une formule du premier ordre, il en est de même de $\forall x^{\text{ent}} A$.
ii) Cette notion sera étendue plus loin (voir proposition 39).

Théorème 33. *Soit F une formule close du premier ordre. Il existe deux quasi-preuves δ_F, δ'_F, qui ne dépendent que de la structure propositionnelle de F, telles que l'on ait :*
$\xi \Vdash (\mathsf{C}[p] \to F) \;\Rightarrow\; (\delta_F\xi, p) \Vvdash F$;
$(\xi, p) \Vvdash F \;\Rightarrow\; \delta'_F\xi \Vdash (\mathsf{C}[p] \to F)$
quels que soient $\xi \in \Lambda$ et $p \in P$.

On raisonne par récurrence sur la construction de F suivant les règles ci-dessus.
• Si F est $\perp$, on pose :
$\delta_\perp = \lambda x(\chi)\lambda y(x)(\alpha)y$ avec $\alpha :: p\wedge q \Rightarrow p$.
$\delta'_\perp = \lambda x\lambda y(\chi' x)(\alpha')y$ avec $\alpha' :: p \Rightarrow p\wedge\mathbf{1}$.
En effet, supposons $\xi \Vdash \mathsf{C}[p] \to \perp$ et montrons $(\delta_\perp\xi, p)(\pi, q) \in \perp\!\!\!\perp$, soit $(\delta_\perp\xi \star \pi, p\wedge q) \in \perp\!\!\!\perp$. Soit donc $\tau \in \mathsf{C}[p\wedge q]$, donc $\alpha\tau \in \mathsf{C}[p]$, d'où $\xi \star \alpha\tau \centerdot \pi \in \perp\!\!\!\perp$, par hypothèse sur ξ, ce qui donne $\delta_\perp\xi \star \pi^\tau \in \perp\!\!\!\perp$.

Inversement, si $(\xi,p) \Vdash\!\!\vdash \perp$, on a $(\xi,p)\star(\pi,\mathbf{1}) \equiv (\xi\star\pi, p\wedge\mathbf{1}) \in \perp\!\!\!\perp$ pour toute $\pi\in\Pi$.
Or, si $\tau\in\mathsf{C}[p]$, on a $\alpha'\tau\in\mathsf{C}[p\wedge\mathbf{1}]$, donc $\xi\star\pi^{\alpha'\tau}\in\perp\!\!\!\perp$, donc $\delta'_\perp\xi\star\tau\,.\,\pi\in\perp\!\!\!\perp$.
Donc $\delta'_\perp\xi \Vdash \mathsf{C}[p]\to\perp$.

- Si F est $A\to B$, on pose :
$\delta_{A\to B} = \lambda x\lambda y(\chi)\lambda z((\chi')(\delta_B)\lambda d((x)(\alpha)z)(\delta'_A y)(\beta)z)(\gamma)z$ avec
$\alpha :: p\wedge(q\wedge r)\Rightarrow p$; $\beta :: p\wedge(q\wedge r)\Rightarrow q$; $\gamma :: p\wedge(q\wedge r)\Rightarrow \mathbf{1}\wedge r$.

En effet, supposons $\xi\Vdash\mathsf{C}[p], A\to B$, $(\eta,q)\Vdash\!\!\vdash A$ et $(\pi,r)\in|||B|||$.
On doit montrer $(\delta_{A\to B}\xi,p)\star(\eta,q)\,.\,(\pi,r)\in\perp\!\!\!\perp$, soit $(\delta_{A\to B}\xi\star\eta\,.\,\pi, p\wedge(q\wedge r))\in\perp\!\!\!\perp$.
Soit donc $\tau\in\mathsf{C}[p\wedge(q\wedge r)]$; on doit montrer $\delta_{A\to B}\xi\star\eta\,.\,\pi^\tau\in\perp\!\!\!\perp$.
On a $\alpha\tau\in\mathsf{C}[p], \beta\tau\in\mathsf{C}[q]$; or, par hypothèse de récurrence, on a $\delta'_A\eta\Vdash\mathsf{C}[q]\to A$, donc $(\delta'_A\eta)(\beta)\tau\Vdash A$ et $((\xi)(\alpha)\tau)(\delta'_A\eta)(\beta)\tau\Vdash B$; d'où $\lambda d((\xi)(\alpha)\tau)(\delta'_A\eta)(\beta)\tau\Vdash\mathsf{C}[\mathbf{1}]\to B$.
D'après l'hypothèse de récurrence, on a $((\delta_B)\lambda d((\xi)(\alpha)\tau)(\delta'_A\eta)(\beta)\tau,\mathbf{1})\Vdash\!\!\vdash B$, donc :
$((\delta_B)\lambda d((\xi)(\alpha)\tau)(\delta'_A\eta)(\beta)\tau,\mathbf{1})\star(\pi,r)\in\perp\!\!\!\perp$, soit $((\delta_B)\lambda d((\xi)(\alpha)\tau)(\delta'_A\eta)(\beta)\tau\star\pi,\mathbf{1}\wedge r)\in\perp\!\!\!\perp$.
Or, on a $\gamma\tau\in\mathsf{C}[\mathbf{1}\wedge r]$, donc $(\delta_B)\lambda d((\xi)(\alpha)\tau)(\delta'_A\eta)(\beta)\tau\star\pi^{\gamma\tau}\in\perp\!\!\!\perp$, d'où :
$((\chi')(\delta_B)\lambda d((\xi)(\alpha)\tau)(\delta'_A\eta)(\beta)\tau)(\gamma)\tau\star\pi\in\perp\!\!\!\perp$. Par suite :
$(\chi)\lambda z((\chi')(\delta_B)\lambda d((\xi)(\alpha)z)(\delta'_A\eta)(\beta)z)(\gamma)z\star\pi^\tau\in\perp\!\!\!\perp$ d'où $\delta_{A\to B}\xi\star\eta\,.\,\pi^\tau\in\perp\!\!\!\perp$.

On pose maintenant :
$\delta'_{A\to B} = \lambda x\lambda y\lambda z((\delta'_B)(\overline{\alpha_0}x)(\delta_A)\lambda d\,z)(\alpha)y$ avec $\alpha :: p\Rightarrow p\wedge\mathbf{1}$.

Supposons $(\xi,p)\Vdash\!\!\vdash A\to B$; soient $\tau\in\mathsf{C}[p]$, $\eta\Vdash A$ et $\pi\in\|B\|$. On doit montrer : $\delta'_{A\to B}\xi\star\tau\,.\,\eta\,.\,\pi\in\perp\!\!\!\perp$. On a $\lambda d\,\eta\Vdash\mathsf{C}[\mathbf{1}]\to A$; en appliquant l'hypothèse de récurrence, on a $((\delta_A)\lambda d\,\eta,\mathbf{1})\Vdash\!\!\vdash A$, donc $(\xi,p)((\delta_A)\lambda d\,\eta,\mathbf{1})\Vdash\!\!\vdash B$ soit $((\overline{\alpha_0}\xi)(\delta_A)\lambda d\,\eta, p\wedge\mathbf{1})\Vdash\!\!\vdash B$.
En appliquant de nouveau l'hypothèse de récurrence, on trouve :
$(\delta'_B)(\overline{\alpha_0}\xi)(\delta_A)\lambda d\,\eta\Vdash\mathsf{C}[p\wedge\mathbf{1}]\to B$. Comme on a $\alpha\tau\in\mathsf{C}[p\wedge\mathbf{1}]$, on obtient :
$(\delta'_B)(\overline{\alpha_0}\xi)(\delta_A)\lambda d\,\eta\star\alpha\tau\,.\,\pi\in\perp\!\!\!\perp$ et finalement $\delta'_{A\to B}\xi\star\tau\,.\,\eta\,.\,\pi\in\perp\!\!\!\perp$.

- Si $F\equiv\mathsf{R}(\vec{q})\to B$, où R est un symbole de prédicat d'arité k et $\vec{p}\in P^k$, on pose :
$\delta_{R\to B} = \lambda x\lambda y(\overline{\alpha})(\delta_B)\lambda z(x)zy$ avec $\alpha :: p\wedge(\mathbf{1}\wedge r)\Rightarrow p\wedge r$.
$\delta'_{R\to B} = \lambda x\lambda y\lambda z((\delta'_B)(\overline{\alpha}_0)xz)(\alpha')y$ avec $\alpha' :: p\Rightarrow p\wedge\mathbf{1}$.

Supposons $\xi\Vdash\mathsf{C}[p],\mathsf{R}[\vec{q}]\to B$ et soient $\eta\in|\mathsf{R}[\vec{q}]|$, $(\pi,r)\in|||B|||$. On doit montrer : $(\delta_{R\to B}\xi,p)\star(\eta,\mathbf{1})\,.\,(\pi,r)\in\perp\!\!\!\perp$, soit $(\delta_{R\to B}\xi\star\eta\,.\,\pi, p\wedge(\mathbf{1}\wedge r))\in\perp\!\!\!\perp$. Soit donc $\tau\in\mathsf{C}[p\wedge(\mathbf{1}\wedge r)]$; on doit montrer $\delta_{R\to B}\xi\star\eta\,.\,\pi^\tau\in\perp\!\!\!\perp$. Or, on a $\lambda z(\xi)z\eta\Vdash\mathsf{C}[p]\to B$, donc $((\delta_B)\lambda z(\xi)z\eta,p)\Vdash\!\!\vdash B$, par hypothèse de récurrence. Par suite, on a $((\delta_B)\lambda z(\xi)z\eta,p)\star(\pi,r)\in\perp\!\!\!\perp$, soit : $((\delta_B)\lambda z(\xi)z\eta\star\pi, p\wedge r)\in\perp\!\!\!\perp$. Mais on a $\alpha\tau\in\mathsf{C}[p\wedge r]$, donc $(\delta_B)\lambda z(\xi)z\eta\star\pi^{\alpha\tau}\in\perp\!\!\!\perp$, donc $(\overline{\alpha})(\delta_B)\lambda z(\xi)z\eta\star\pi^\tau\in\perp\!\!\!\perp$, d'où $\delta_{R\to B}\xi\star\eta\,.\,\pi^\tau\in\perp\!\!\!\perp$.

Supposons maintenant $(\xi,p)\Vdash\!\!\vdash\mathsf{R}(\vec{q})\to B$; soient $\tau\in\mathsf{C}[p]$, $\eta\in|\mathsf{R}[\vec{q}]|$ et $\pi\in\|B\|$. On doit montrer $\delta'_{R\to B}\xi\star\tau\,.\,\eta\,.\,\pi\in\perp\!\!\!\perp$. Or, on a $(\xi,p)(\eta,\mathbf{1})\Vdash\!\!\vdash B$, soit $((\overline{\alpha}_0)\xi\eta,p\wedge\mathbf{1})\Vdash\!\!\vdash B$, donc : $(\delta'_B)(\overline{\alpha}_0)\xi\eta\Vdash\mathsf{C}[p\wedge\mathbf{1}]\to B$, par hypothèse de récurrence.
Or, on a $\alpha'\tau\in\mathsf{C}[p\wedge\mathbf{1}]$, donc $(\delta'_B)(\overline{\alpha}_0)\xi\eta\star\alpha'\tau\,.\,\pi\in\perp\!\!\!\perp$, d'où le résultat.

- Si $F\equiv(p_1=p_2\mapsto B)$, on pose $\delta_F=\delta_B$ et $\delta'_F=\delta'_B$.
En effet, supposons $\xi\Vdash\mathsf{C}[p]\to(p_1=p_2\mapsto B)$ et $(\pi,q)\in|||p_1=p_2\mapsto B|||$. On doit montrer $(\delta_B\xi,p)\star(\pi,q)\in\perp\!\!\!\perp$. Comme $|||p_1=p_2\mapsto B|||\neq\emptyset$, on a $p_1=p_2$, donc $(\pi,q)\in|||B|||$ et $\xi\Vdash\mathsf{C}[p]\to B$. D'où le résultat, par hypothèse de récurrence.

Supposons maintenant $(\xi,p)\Vdash\!\!\vdash p_1=p_2\mapsto B$, $\tau\Vdash\mathsf{C}[p]$ et $\pi\in\|p_1=p_2\mapsto B\|$. On doit montrer $\delta'_B\star\tau\,.\,\pi\in\perp\!\!\!\perp$. Comme $\|p_1=p_2\mapsto B\|\neq\emptyset$, on a $p_1=p_2$, donc $\pi\in\|B\|$ et $(\xi,p)\Vdash\!\!\vdash B$. D'où le résultat, par hypothèse de récurrence.

- Si $F\equiv\forall x\,A$, on pose $\delta_F=\delta_A$ et $\delta'_F=\delta'_A$.

En effet, si $\xi \Vdash \mathsf{C}[p] \to \forall x\, A$, on a $\xi \Vdash \mathsf{C}[p] \to A[a/x]$ pour tout $a \in P$. Par hypothèse de récurrence, on a $(\delta_A \xi, p) \Vvdash A[a/x]$; donc $(\delta_A \xi, p) \Vvdash \forall x\, A$.

Si $(\xi, p) \Vvdash \forall x\, A$, on a $(\xi, p) \Vvdash A[a/x]$ pour tout $a \in P$. Par hypothèse de récurrence, on a $\delta'_A \xi \Vdash \mathsf{C}[p] \to A[a/x]$; donc $\delta'_A \xi \Vdash \mathsf{C}[p] \to \forall x\, A$.

C.Q.F.D.

L'idéal générique

On définit un prédicat unaire $\mathcal{J} : P \to \mathcal{P}(\mathbf{\Pi})$ du modèle $\mathcal{N}$ (paramètre du second ordre d'arité 1), en posant $\mathcal{J}(p) = \Pi \times \{p\}$; on l'appellera *l'idéal générique*.
Le prédicat binaire $\mathcal{J}^+ : P^2 \to \mathcal{P}(\Pi)$ du modèle $\mathcal{M}$ qui lui correspond, est donc tel que $\mathcal{J}^+(p,q) = \emptyset$ (resp. Π) si $p \neq q$ (resp. $p = q$). Autrement dit :

$$\mathcal{J}^+(p,q) \text{ est le prédicat } p \neq q.$$

La formule $p \Vdash \mathcal{J}(q)$ s'écrit $\forall r(\mathsf{C}[p \wedge r] \to \mathcal{J}^+(r,q)$. On a donc $\|p \Vdash \mathcal{J}(q)\| = \|\neg \mathsf{C}[p \wedge q]\|$. Autrement dit :

$$p \Vdash \mathcal{J}(q) \text{ est identique à } \neg \mathsf{C}[p \wedge q].$$

Notations.
• On note $p \sqsubseteq q$ la formule $\forall r(\neg \mathsf{C}[q \wedge r] \to \neg \mathsf{C}[p \wedge r])$ et $p \sim q$ la formule $p \sqsubseteq q \wedge q \sqsubseteq p$, c'est-à-dire $\forall r(\neg \mathsf{C}[q \wedge r] \leftrightarrow \neg \mathsf{C}[p \wedge r])$.
Dans la suite, on écrira souvent $F \to \mathsf{C}[p]$ au lieu de $\neg \mathsf{C}[p] \to \neg F$;
$p \sqsubseteq q$ s'écrit alors $\forall r(\mathsf{C}[p \wedge r] \to \mathsf{C}[q \wedge r])$ et $p \sim q$ s'écrit $\forall r(\mathsf{C}[p \wedge r] \leftrightarrow \mathsf{C}[q \wedge r])$.
Remarque. On rappelle, en effet, que $\mathsf{C}[p]$ n'est pas une formule, mais une partie de Λ ; en fait, dans certains modèles de réalisabilité considérés plus loin, il existera une formule $\mathbb{C}[p]$ telle que $|\mathsf{C}[p]| = \{\tau \in \Lambda_c ; \tau \Vdash \mathbb{C}[p]\}$. On pourra alors identifier $\mathsf{C}[p]$ à la formule $\mathbb{C}[p]$.
• Si F est une formule close, on écrira $\Vvdash F$ pour exprimer qu'il existe une quasi-preuve θ telle que $(\theta, \mathbf{1}) \Vvdash F$. D'après la proposition 29(i), cela équivaut à dire qu'il existe une quasi-preuve θ telle que $(\theta, p) \Vvdash F$ pour tout $p \in P$.

Proposition 34.
i) $\xi \Vdash \neg \mathsf{C}[p \wedge q] \Rightarrow (\chi\xi, p) \Vvdash \mathcal{J}(q)$;
$(\xi, p) \Vvdash \mathcal{J}(q) \Rightarrow \chi'\xi \Vdash \neg \mathsf{C}[p \wedge q]$.
ii) $\xi \Vdash \forall r(\mathsf{C}[p \wedge (\mathbf{1} \wedge r)], \mathsf{C}[q] \to \bot) \Rightarrow (\chi\xi, p) \Vvdash \neg \mathsf{C}[q]$;
$(\xi, p) \Vvdash \neg \mathsf{C}[q] \Rightarrow \chi'\xi \Vdash \forall r(\mathsf{C}[p \wedge (\mathbf{1} \wedge r)], \mathsf{C}[q] \to \bot)$.
iii) Si $\xi \Vdash \neg \mathsf{R}(a_1, \ldots, a_k)$ *alors* $(\xi, p) \Vvdash \neg \mathsf{R}(a_1, \ldots, a_k)$ *pour tout* p *(*R *est un symbole de prédicat d'arité* k*).*

i) Si $\xi \Vdash \neg \mathsf{C}[p \wedge q]$, alors $\xi \star \tau \,.\, \pi \in \perp\!\!\!\perp$ et donc $\chi\xi \star \pi^\tau \in \perp\!\!\!\perp$ pour tout $\tau \in \mathsf{C}[p \wedge q]$. On a donc : $(\chi\xi \star \pi, p \wedge q) \in \mathbb{⊥}$, soit $(\chi\xi, p) \star (\pi, q) \in \mathbb{⊥}$ pour toute $\pi \in \Pi$, c'est-à-dire $(\chi\xi, p) \Vvdash \mathcal{J}(q)$.

Si $(\xi, p) \Vvdash \mathcal{J}[q]$, on a $(\xi, p) \star (\pi, q) \in \mathbb{⊥}$, donc $(\xi \star \pi, p \wedge q) \in \mathbb{⊥}$ pour toute $\pi \in \Pi$. On a donc $\xi \star \pi^\tau \in \perp\!\!\!\perp$, soit $\chi'\xi \star \tau \,.\, \pi \in \perp\!\!\!\perp$ pour tout $\tau \in \mathsf{C}[p \wedge q]$. Donc $\chi'\xi \Vdash \neg \mathsf{C}[p \wedge q]$.

ii) Si $\xi \Vdash \forall r(\mathsf{C}[p \wedge (\mathbf{1} \wedge r)], \mathsf{C}[q] \to \bot)$, on a $\xi \star \upsilon \,.\, \tau \,.\, \pi \in \perp\!\!\!\perp$ pour $\upsilon \in \mathsf{C}[p \wedge (\mathbf{1} \wedge r)]$ et $\tau \in \mathsf{C}[q]$. Donc $\chi\xi \star \tau \,.\, \pi^\upsilon \in \perp\!\!\!\perp$, d'où $(\chi\xi \star \tau \,.\, \pi, p \wedge (\mathbf{1} \wedge r)) \in \mathbb{⊥}$ soit $(\chi\xi, p) \star (\tau, \mathbf{1}) \,.\, (\pi, r) \in \perp\!\!\!\perp$.
Or $(\tau, \mathbf{1})$ décrit $\mathsf{C}_{\mathcal{N}}[q]$, et donc $(\chi\xi, p) \Vvdash \mathsf{C}[q] \to \bot$.

Si $(\xi, p) \Vvdash \neg \mathsf{C}[q]$, on a $(\xi, p) \star (\tau, \mathbf{1}) \,.\, (\pi, r) \in \mathbb{⊥}$, et donc $(\xi \star \tau \,.\, \pi, p \wedge (\mathbf{1} \wedge r)) \in \mathbb{⊥}$ pour tout $\tau \in \mathsf{C}[q]$. On a donc $\xi \star \tau \,.\, \pi^\upsilon \in \perp\!\!\!\perp$ d'où $\chi'\xi \star \upsilon \,.\, \tau \,.\, \pi \in \perp\!\!\!\perp$ pour tout $\upsilon \in \mathsf{C}[p \wedge (\mathbf{1} \wedge r)]$.
On en déduit $\chi'\xi \Vdash \forall r(\mathsf{C}[p \wedge (\mathbf{1} \wedge r)], \mathsf{C}[q] \to \bot)$.
iii) Soit $\tau \in |\mathsf{R}(a_1, \ldots, a_k)|$; on a $\xi \star \tau \,.\, \pi \in \perp\!\!\!\perp$ pour toute $\pi \in \Pi$, donc $(\xi \star \tau \,.\, \pi, a) \in \mathbb{⊥}$ quel que soit $a \in P$, d'où $(\xi, p) \star (\tau, \mathbf{1}) \,.\, (\pi, q) \in \mathbb{⊥}$.

C.Q.F.D.

Théorème 35 (Propriétés élémentaires du générique).
i) $(\overline{\alpha}, \mathbf{1}) \Vdash \neg\mathcal{J}(\mathbf{1})$ *avec* $\alpha :: \mathbf{1}\wedge(p\wedge q) \Rightarrow p\wedge\mathbf{1}$.
ii) $(\theta, \mathbf{1}) \Vdash \forall x(\neg\mathsf{C}[x] \to \mathcal{J}(x))$ *où* $\theta = \lambda x(\chi)\lambda y((\chi' x)(\beta)y)(\alpha)y$
avec $\alpha :: \mathbf{1}\wedge(p\wedge q) \Rightarrow q$ *et* $\beta :: \mathbf{1}\wedge(p\wedge q) \Rightarrow p\wedge(\mathbf{1}\wedge\mathbf{1})$.
iii) $(\theta, \mathbf{1}) \Vdash \forall x\forall y(\mathcal{J}(x\wedge y), \neg\mathcal{J}(x) \to \mathcal{J}(y))$ *où* $\theta = \lambda x\lambda y(\overline{\alpha})(y)(\overline{\beta})x$
avec $\alpha :: \mathbf{1}\wedge(p'\wedge(q'\wedge q)) \Rightarrow q'\wedge((q\wedge p')\wedge\mathbf{1}$ *et* $\beta :: (q\wedge p')\wedge p \Rightarrow p'\wedge(p\wedge q)$.
iv) $(\theta, \mathbf{1}) \Vdash \forall x(\forall y(\neg\mathsf{C}[x\wedge y] \to \mathcal{J}(y)) \to \neg\mathcal{J}(x))$ *où* $\theta = \lambda x\lambda y(\overline{\gamma})(x)\lambda z(\chi' y)(\beta)z$, *avec*
$\beta :: p\wedge q \Rightarrow q\wedge p$ *et* $\gamma :: \mathbf{1}\wedge(r\wedge(q\wedge r')) \Rightarrow r\wedge(\mathbf{1}\wedge p)$.
v) $(\theta, \mathbf{1}) \Vdash \forall x\forall y(\mathcal{J}(x), y \sqsubseteq x \to \mathcal{J}(y))$
où $\theta = \lambda x\lambda y((\chi)\lambda z(((\chi')(\overline{\alpha}_0 y)\lambda z'(\chi' x)(\beta)z')(\alpha)z)(\gamma)z$, *avec*
$\alpha :: \mathbf{1}\wedge(p'\wedge(r\wedge q)) \Rightarrow (r\wedge\mathbf{1})\wedge(\mathbf{1}\wedge\mathbf{1})$; $\alpha' :: \mathbf{1}\wedge(p'\wedge(q'\wedge q)) \Rightarrow q\wedge p'$; $\beta :: p\wedge q \Rightarrow q\wedge p$.

i) Soit $(\xi, p) \Vdash \mathcal{J}(\mathbf{1})$; on doit montrer que $(\overline{\alpha}, \mathbf{1}) \star (\xi, p) \,\text{.}\, (\pi, q) \in \perp\!\!\!\perp$, c'est-à-dire : $(\overline{\alpha} \star \xi \,\text{.}\, \pi, \mathbf{1}\wedge(p\wedge q)) \in \perp\!\!\!\perp$. Mais, d'après la proposition 25, on a :
$(\overline{\alpha} \star \xi \,\text{.}\, \pi, \mathbf{1}\wedge(p\wedge q)) \succ (\xi \star \pi, p\wedge\mathbf{1}) \equiv (\xi, p) \star (\pi, \mathbf{1})$.
Or, on a $(\xi, p) \star (\pi, \mathbf{1}) \in \perp\!\!\!\perp$ par hypothèse sur (ξ, p).

ii)Soient $(\eta, p) \Vdash \neg\mathsf{C}[q]$ et $(\pi, q) \in |||\mathcal{J}(q)|||$. On doit montrer que $(\theta, \mathbf{1}) \star (\eta, p) \,\text{.}\, (\pi, q) \in \perp\!\!\!\perp$, soit $(\theta \star \eta \,\text{.}\, \pi, \mathbf{1}\wedge(p\wedge q)) \in \perp\!\!\!\perp$. Soit donc $\tau \in \mathsf{C}[\mathbf{1}\wedge(p\wedge q)]$; on doit montrer que $\theta \star \eta \,\text{.}\, \pi^\tau \in \perp\!\!\!\perp$.
D'après la proposition 34, on a $\chi'\eta \Vdash \mathsf{C}[p\wedge(\mathbf{1}\wedge\mathbf{1})], \mathsf{C}[q] \to \perp$.
Or, on a $\beta\tau \in \mathsf{C}[p\wedge(\mathbf{1}\wedge\mathbf{1})]$ et $\alpha\tau \in \mathsf{C}[q]$, donc $\chi'\eta \star \beta\tau \,\text{.}\, \alpha\tau \,\text{.}\, \pi \in \perp\!\!\!\perp$ d'où $(\chi)\lambda y((\chi'\eta)(\beta)y)(\alpha)y \star \pi^\tau \in \perp\!\!\!\perp$ d'où $\theta \star \eta \,\text{.}\, \pi^\tau \in \perp\!\!\!\perp$.

iii) Soient $(\xi, p') \Vdash \mathcal{J}(p\wedge q)$, $(\eta, q') \Vdash \neg\mathcal{J}(p)$ et $(\pi, q) \in |||\mathcal{J}(q)|||$. On doit montrer que : $(\theta, \mathbf{1}) \star (\xi, p') \,\text{.}\, (\eta, q') \,\text{.}\, (\pi, q) \in \perp\!\!\!\perp$, soit $(\theta \star \xi \,\text{.}\, \eta \,\text{.}\, \pi, \mathbf{1}\wedge(p'\wedge(q'\wedge q))) \in \perp\!\!\!\perp$.
D'après les propositions 29(ii) et 25, on est ramené à montrer :
$((\overline{\alpha})(\eta)(\overline{\beta})\xi \star \pi, \mathbf{1}\wedge(p'\wedge(q'\wedge q))) \in \perp\!\!\!\perp$ puis $(\eta \star \overline{\beta}\xi \,\text{.}\, \pi, q'\wedge((q\wedge p')\wedge\mathbf{1})) \in \perp\!\!\!\perp$, c'est-à-dire : $(\eta, q') \star (\overline{\beta}\xi, q\wedge p') \,\text{.}\, (\pi, \mathbf{1}) \in \perp\!\!\!\perp$.
Par hypothèse sur (η, q'), il reste donc à montrer que $(\overline{\beta}\xi, q\wedge p') \Vdash \mathcal{J}(p)$, c'est-à-dire : $(\overline{\beta}\xi, q\wedge p') \star (\varpi, p) \in \perp\!\!\!\perp$, ou encore $(\overline{\beta}\xi \star \varpi, (q\wedge p')\wedge p) \in \perp\!\!\!\perp$ pour toute $\varpi \in \Pi$.
Or, d'après la proposition 25, on a :
$(\overline{\beta}\xi \star \varpi, (q\wedge p')\wedge p) \succ (\xi \star \varpi, p'\wedge(p\wedge q)) \equiv (\xi, p') \star (\varpi, p\wedge q) \in \perp\!\!\!\perp$ par hypothèse sur (ξ, p').

iv) Soient $(\xi, q) \Vdash \mathcal{J}(p)$ et $(\eta, r) \Vdash \forall q(\neg\mathsf{C}[p\wedge q] \to \mathcal{J}(q))$; on doit montrer que : $(\theta, \mathbf{1}) \star (\eta, r) \,\text{.}\, (\xi, q) \,\text{.}\, (\pi, r') \in \perp\!\!\!\perp$, soit $(\theta \star \eta \,\text{.}\, \xi \,\text{.}\, \pi, \mathbf{1}\wedge(r\wedge(q\wedge r'))) \in \perp\!\!\!\perp$.
D'après la proposition 34(i), on a $\chi'\xi \Vdash \neg\mathsf{C}[q\wedge p]$. Soit $\tau \in \mathsf{C}[p\wedge q]$, donc $\beta\tau \in \mathsf{C}[q\wedge p]$ d'où $\chi'\xi \star \beta\tau \,\text{.}\, \rho \in \perp\!\!\!\perp$ pour tout $\rho \in \Pi$. On a donc $\lambda x(\chi'\xi)(\beta)x \star \tau \,\text{.}\, \rho \in \perp\!\!\!\perp$, donc $\lambda z(\chi'\xi)(\beta)z \Vdash \neg\mathsf{C}[p\wedge q]$. D'après la proposition 34(iii), on a $(\lambda z(\chi'\xi)(\beta)z, \mathbf{1}) \Vdash \neg\mathsf{C}[p\wedge q]$.
Par hypothèse sur (η, r), on a donc $(\eta, r) \star (\lambda z(\chi'\xi)(\beta)z, \mathbf{1}) \,\text{.}\, (\pi, q) \in \perp\!\!\!\perp$, soit : $(\eta \star \lambda z(\chi'\xi)(\beta)z \,\text{.}\, \pi, r\wedge(\mathbf{1}\wedge q)) \in \perp\!\!\!\perp$, donc $((\overline{\gamma})(\eta)\lambda z(\chi'\xi)(\beta)z \star \pi, \mathbf{1}\wedge(r\wedge(q\wedge r'))) \in \perp\!\!\!\perp$ (proposition 25) et donc $(\theta \star \eta \,\text{.}\, \xi \,\text{.}\, \pi, \mathbf{1}\wedge(r\wedge(q\wedge r'))) \in \perp\!\!\!\perp$.

v) Soient $(\xi, p') \Vdash \mathcal{J}(p)$ et $(\eta, r) \Vdash q \sqsubseteq p$; on doit montrer que : $(\theta, \mathbf{1}) \star (\xi, p') \,\text{.}\, (\eta, r) \,\text{.}\, (\pi, q) \in \perp\!\!\!\perp$ pour toute $\pi \in \Pi$, soit $(\theta \star \xi \,\text{.}\, \eta \,\text{.}\, \pi, \mathbf{1}\wedge(p'\wedge(r\wedge q))) \in \perp\!\!\!\perp$.
D'après la proposition 34(i), on a $\chi'\xi \Vdash \neg\mathsf{C}[p'\wedge p]$, donc $\lambda z'(\chi'\xi)(\beta)z' \Vdash \neg\mathsf{C}[p\wedge p']$: en effet, si $\tau \in \mathsf{C}[p\wedge p']$ et $\rho \in \Pi$, on a $\lambda z'(\chi'\xi)(\beta)z' \star \tau \,\text{.}\, \rho \succ (\chi'\xi)(\beta)\tau \star \rho \in \perp\!\!\!\perp$ puisque $\beta\tau \in \mathsf{C}[p'\wedge p]$.
D'après la proposition 34(iii), on a alors $(\lambda z'(\chi'\xi)(\beta)z', \mathbf{1}) \Vdash \neg\mathsf{C}[p\wedge p']$. Or, par hypothèse sur (η, r), on a $(\eta, r) \Vdash (\neg\mathsf{C}[p\wedge p'] \to \neg\mathsf{C}[q\wedge p'])$. Il en résulte que :
$(\eta, r)(\lambda z'(\chi'\xi)(\beta)z', \mathbf{1}) \Vdash \neg\mathsf{C}[q\wedge p']$, soit $((\overline{\alpha}_0\eta)\lambda z'(\chi'\xi)(\beta)z', r\wedge\mathbf{1}) \Vdash \neg\mathsf{C}[q\wedge p']$.
D'après la proposition 34(ii), on a $(\chi')(\overline{\alpha}_0\eta)\lambda z'(\chi'\xi)(\beta)z' \Vdash \mathsf{C}[(r\wedge\mathbf{1})\wedge(\mathbf{1}\wedge\mathbf{1})], \mathsf{C}[q\wedge p'] \to \perp$.
Soit $\tau \in \mathsf{C}[\mathbf{1}\wedge(p'\wedge(r\wedge q))]$, donc $\alpha\tau \in \mathsf{C}[(r\wedge\mathbf{1})\wedge(\mathbf{1}\wedge\mathbf{1})]$ et $\alpha'\tau \in \mathsf{C}[q\wedge p']$. On a donc :
$(((\chi')(\overline{\alpha}_0\eta)\lambda z'(\chi'\xi)(\beta)z')(\alpha)\tau)(\gamma)\tau \star \pi \in \perp\!\!\!\perp$, donc :

$(\chi)\lambda z(((\chi')(\overline{\alpha}_0\eta)\lambda z'(\chi'\xi)(\beta)z')(\alpha)z)(\alpha')z \star \pi^\tau \in \perp\!\!\!\perp$. Autrement dit :
$((\chi)\lambda z(((\chi')(\overline{\alpha}_0\eta)\lambda z'(\chi'\xi)(\beta)z')(\alpha)z)(\alpha')z \star \pi, \mathbf{1}\wedge(p'\wedge(r\wedge q))) \in \perp\!\!\!\perp$
ou encore, d'après la proposition 29(ii) : $(\theta \star \xi \,.\, \eta \,.\, \pi, \mathbf{1}\wedge(p'\wedge(r\wedge q))) \in \perp\!\!\!\perp$.

C.Q.F.D.

Théorème 36 (Densité)**.**
Pour toute fonction $\phi : P \to P$, *on a :*
$(\theta, \mathbf{1}) \Vdash \forall x(\neg \mathsf{C}[x\wedge\phi(x)] \to \mathcal{J}(x)), \forall x\, \mathcal{J}(x\wedge\phi(x)) \to \bot$
où $\theta = (\overline{\beta})\lambda x\lambda y(x)(\vartheta)y$, $\vartheta = (\chi)\lambda d\lambda x\lambda y(\chi' x)(\alpha)y$;
avec $\alpha :: q\wedge r \Rightarrow q\wedge(q\wedge r)$; $\beta :: \mathbf{1}\wedge(p\wedge(q\wedge r)) \Rightarrow p\wedge(\mathbf{1}\wedge q)$.

Soient $(\xi, p) \Vdash \forall x(\neg \mathsf{C}[x\wedge\phi(x)] \to \mathcal{J}(x))$, $(\eta, q) \Vdash \forall x\, \mathcal{J}(x\wedge\phi(x))$ et $(\pi, r) \in \mathbf{\Pi}$.
On doit montrer que $(\theta \star \xi \,.\, \eta \,.\, \pi, \mathbf{1}\wedge(p\wedge(q\wedge r))) \in \perp\!\!\!\perp$; soit donc $\tau_0 \in \mathsf{C}[\mathbf{1}\wedge(p\wedge(q\wedge r))]$. On doit montrer $\theta \star \xi \,.\, \eta \,.\, \pi^{\tau_0} \in \perp\!\!\!\perp$.
On montre d'abord que $(\vartheta\eta, \mathbf{1}) \Vdash \neg \mathsf{C}[q\wedge\phi(q)]$.
Soient donc $(\varpi, r') \in \mathbf{\Pi}$ et $\tau \in \mathsf{C}[q\wedge\phi(q)]$; on doit montrer $(\vartheta\eta, \mathbf{1}) \star (\tau, \mathbf{1}) \,.\, (\varpi, r') \in \perp\!\!\!\perp$
soit $(\vartheta\eta \star \tau \,.\, \varpi, \mathbf{1}\wedge(\mathbf{1}\wedge r')) \in \perp\!\!\!\perp$ ou encore $\vartheta\eta \star \tau \,.\, \varpi^{\tau'} \in \perp\!\!\!\perp$ pour tout $\tau' \in \mathsf{C}[\mathbf{1}\wedge(\mathbf{1}\wedge r')]$).
Or, $\vartheta\eta \star \tau \,.\, \varpi^{\tau'} \succ \eta \star \varpi^{\alpha\tau}$ et $\alpha\tau \in \mathsf{C}[q\wedge(q\wedge\phi(q))]$. Il suffit donc de montrer :
$(\eta \star \varpi, q\wedge(q\wedge\phi(q))) \in \perp\!\!\!\perp$ ou encore $(\eta, q) \star (\varpi, q\wedge\phi(q)) \in \perp\!\!\!\perp$.
Or, cela résulte de l'hypothèse sur (η, q), qui implique $(\eta, q) \Vdash \mathcal{J}(q\wedge\phi(q))$.
Par hypothèse sur ξ, on a $(\xi, p) \Vdash \neg \mathsf{C}[q\wedge\phi(q)] \to \mathcal{J}(q)$. Il en résulte que :
$(\xi, p) \star (\vartheta\eta, \mathbf{1}) \,.\, (\pi, q) \in \perp\!\!\!\perp$, soit $(\xi \star \vartheta\eta \,.\, \pi, p\wedge(\mathbf{1}\wedge q)) \in \perp\!\!\!\perp$.
Or, on a $\tau_0 \in \mathsf{C}[\mathbf{1}\wedge(p\wedge(q\wedge r))]$), donc $\beta\tau_0 \in \mathsf{C}[p\wedge(\mathbf{1}\wedge q)]$. Il en résulte que $\xi \star \vartheta\eta \,.\, \pi^{\beta\tau_0} \in \perp\!\!\!\perp$.
Cela donne le résultat voulu, puisque $\theta \star \xi \,.\, \eta \,.\, \pi^{\tau_0} \succ \xi \star \vartheta\eta \,.\, \pi^{\beta\tau_0}$.

C.Q.F.D.

Condition de chaîne dénombrable

Dans cette section, on considère une algèbre de réalisabilité standard $\mathcal{A}$ et un $\mathcal{A}$-modèle $\mathcal{M}$. On suppose que l'ensemble P (domaine de variation des variables d'individu) est de cardinal $\geq 2^{\aleph_0}$.
On fixe une surjection $\varepsilon : P \to \mathcal{P}(\Pi)^{\mathbb{N}}$ et on définit un prédicat binaire du modèle $\mathcal{M}$, noté aussi ε, en posant :
$\|n\,\varepsilon\, p\| = \varepsilon(p)(n)$ si $n \in \mathbb{N}$; $\|n\,\varepsilon\, p\| = \emptyset$ si $n \notin \mathbb{N}$
(on utilise, pour le prédicat ε, la notation $n\,\varepsilon\, p$ au lieu de $\varepsilon(n, p)$).
Le prédicat ε permet donc d'associer, à chaque individu, un ensemble d'entiers qui sont ses *éléments*. La proposition 37 montre que l'axiome suivant est réalisé :

Pour tout ensemble, il existe un individu qui a les mêmes éléments entiers.

Cet axiome sera appelé *axiome de représentation des prédicats sur* $\mathbb{N}$ et noté RPN.

Proposition 37 (RPN)**.**
$\lambda x(x)\underline{0}\,\underline{0} \Vdash \forall X \exists x \forall n^{ent}(Xn \leftrightarrow n\,\varepsilon\, x)$.

Cette formule s'écrit $\forall X(\forall x[\forall n(\mathrm{ent}(n), Xn \to n\,\varepsilon\, x), \forall n(\mathrm{ent}(n), n\,\varepsilon\, x \to Xn) \to \bot] \to \bot)$.
On considère donc un paramètre $\mathcal{X} : P \to \mathcal{P}(\Pi)$ d'arité 1 et un terme $\xi \in \Lambda$ tel que :

$\xi \Vdash \forall x[\forall n(\mathrm{ent}(n), \mathcal{X}n \to n\,\varepsilon\, x), \forall n(\mathrm{ent}(n), n\,\varepsilon\, x \to \mathcal{X}n) \to \bot]$.

On doit montrer que $\lambda x(x)\underline{0}\,\underline{0} \star \xi \,.\, \pi \in \perp\!\!\!\perp$, ou encore $\xi \star \underline{0} \,.\, \underline{0} \,.\, \pi \in \perp\!\!\!\perp$ pour toute pile $\pi \in \Pi$.
Par définition de ε, il existe $p_0 \in P$ tel que l'on ait $\mathcal{X}n = \|n\,\varepsilon\, p_0\|$ pour tout entier n. Or, on a :
$\xi \Vdash \forall n(\mathrm{ent}(n), \mathcal{X}n \to n\,\varepsilon\, p_0), \forall n(\mathrm{ent}(n), n\,\varepsilon\, p_0 \to \mathcal{X}n) \to \bot$.

Il suffit donc de montrer que $\underline{0} \Vdash \forall n(\mathrm{ent}(n), \mathcal{X}n \to n \,\varepsilon\, p_0)$ et $\underline{0} \Vdash \forall n(\mathrm{ent}(n), n \,\varepsilon\, p_0 \to \mathcal{X}n)$.
On rappelle que le prédicat ent(x) est défini par :
$|\!\!-\mathrm{ent}(n)| = \{\underline{n}\}$ si $n \in \mathbb{N}$ et $|\!\!-\mathrm{ent}(n)| = \emptyset$ si $n \notin \mathbb{N}$.
On doit donc montrer :
$\underline{0} \star \underline{n} \centerdot \eta \centerdot \rho \in \perp\!\!\!\perp$ pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\eta \Vdash \mathcal{X}(n)$ et $\rho \in \|n \,\varepsilon\, p_0\|$;
$\underline{0} \star \underline{n} \centerdot \eta' \centerdot \rho' \in \perp\!\!\!\perp$ pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\eta' \Vdash n \,\varepsilon\, p_0$ et $\rho' \in \mathcal{X}(n)$.
Or ceci s'écrit $\eta \star \rho \in \perp\!\!\!\perp$ et $\eta' \star \rho' \in \perp\!\!\!\perp$, ce qui est trivialement vérifié, puisque $\mathcal{X}n = \|n \,\varepsilon\, p_0\|$.
C.Q.F.D.

On suppose maintenant que $\{\mathsf{C}, \wedge, \mathbf{1}\}$ est une structure de forcing dans $\mathcal{M}$. On définit alors également le symbole ε dans le $\mathcal{B}$-modèle $\mathcal{N}$ en posant :
$|||n \,\varepsilon\, p||| = \|n \,\varepsilon\, p\| \times \{\mathbf{1}\}$ pour $n, p \in P$. Autrement dit
$|||n \,\varepsilon\, p||| = \{(\pi, \mathbf{1});\ \pi \in \varepsilon(p)(n)\}$ si $n \in \mathbb{N}$; $|||n \,\varepsilon\, p||| = \emptyset$ si $n \notin \mathbb{N}$.

Proposition 38. *Le prédicat* $\varepsilon^+(q, n, p)$ *est* $q = \mathbf{1} \mapsto n \,\varepsilon\, p$.
La formule $q \Vdash n \,\varepsilon\, p$ *est* $\mathsf{C}[q \wedge \mathbf{1}] \to n \,\varepsilon\, p$.

Immédiat, par définition de $|||n \,\varepsilon\, p|||$.
C.Q.F.D.

Proposition 39.
i) $\xi \Vdash (\mathsf{C}[p] \to n \,\varepsilon\, q) \;\Rightarrow\; (\delta\xi, p) \mathrel{|\!|\!\!-} n \,\varepsilon\, q$ *où* $\delta = \lambda x(\chi)\lambda y(x)(\alpha)y$ *et* $\alpha :: p \wedge \mathbf{1} \Rightarrow p$.
ii) $(\xi, p) \mathrel{|\!|\!\!-} n \,\varepsilon\, q \;\Rightarrow\; \delta'\xi \Vdash (\mathsf{C}[p] \to n \,\varepsilon\, q)$ *où* $\delta' = \lambda x \lambda y(\chi' x)(\alpha')y$ *et* $\alpha' :: p \Rightarrow p \wedge \mathbf{1}$.

On a $(\xi, p) \mathrel{|\!|\!\!-} n \,\varepsilon\, p \Leftrightarrow (\xi, p) \star (\pi, \mathbf{1}) \in \perp\!\!\!\perp\!\!\!\perp$ pour toute $\pi \in \|n \,\varepsilon\, p\|$, ou encore :
$(\xi, p) \mathrel{|\!|\!\!-} n \,\varepsilon\, p \;\Leftrightarrow\; \xi \star \pi^\tau \in \perp\!\!\!\perp$ pour tout $\tau \in \mathsf{C}[p \wedge \mathbf{1}]$ et $\pi \in \|n \,\varepsilon\, p\|$.
i) Supposons $\xi \Vdash (\mathsf{C}[p] \to n \,\varepsilon\, q)$, $\tau \in \mathsf{C}[p \wedge \mathbf{1}]$ et $\pi \in \|n \,\varepsilon\, p\|$. On a alors :
$\delta\xi \star \pi^\tau \succ \xi \star \alpha\tau \centerdot \pi \in \perp\!\!\!\perp$, puisque $\alpha\tau \in \mathsf{C}[p]$.
ii) Supposons $(\xi, p) \Vdash n \,\varepsilon\, q$, $\tau \in \mathsf{C}[p]$ et $\pi \in \|n \,\varepsilon\, p\|$. On a alors :
$\delta'\xi \star \tau \centerdot \pi \succ \xi \star \pi^{\alpha'\tau} \in \perp\!\!\!\perp$, puisque $\alpha'\tau \in \mathsf{C}[p \wedge \mathbf{1}]$.
C.Q.F.D.

La notion de *formule du premier ordre* a été définie plus haut (voir théorème 33). On étend cette définition en y ajoutant la clause suivante :

- $t \,\varepsilon\, u$ est du premier ordre, quels que soient les termes t, u.

La proposition 39 montre que le théorème 33 reste valable pour cette notion étendue.

On dira que la structure de forcing $\{\mathsf{C}, \wedge, \mathbf{1}\}$ satisfait la *condition de chaîne dénombrable* (en abrégé *c.c.d.*) s'il existe une quasi-preuve ccd telle que :

$$\begin{aligned}\mathsf{ccd} \Vdash \forall X[&\forall n^{\mathrm{ent}} \exists p\, X(n, p), \forall n^{\mathrm{ent}} \forall p \forall q(X(n, p), X(n, q) \to p = q),\\ &\forall n^{\mathrm{ent}} \forall p \forall q(X(n, p), X(sn, q) \to q \sqsubseteq p) \to\\ &\exists p'\{\forall n^{\mathrm{ent}} \forall p(X(n, p) \to p' \sqsubseteq p), (\forall n^{\mathrm{ent}} \forall p(X(n, p) \to \mathsf{C}[p]) \to \mathsf{C}[p'])\}].\end{aligned}$$

Le sens intuitif de cette formule est :
Si $X(n, p)$ est une suite décroissante de conditions, alors il existe une condition p' qui les minore toutes ; de plus, si toutes ces conditions sont non triviales, alors p' est non triviale.

On se propose, dans cette section de montrer le :

Théorème 40 (Conservation des réels)**.**
Si la c.c.d. est vérifiée, il existe une quasi-preuve crl *telle que :*
$(\mathsf{crl}, \mathbf{1}) \mathrel{|\!|\!\!-} \forall X \exists x \forall n^{ent}(Xn \leftrightarrow n \,\varepsilon\, x)$.

Cela signifie que l'axiome RPN, qui est réalisé dans le $\mathcal{A}$-modèle $\mathcal{M}$ (voir proposition 37) l'est aussi dans le $\mathcal{B}$-modèle générique $\mathcal{N}$.

Notation.
La formule $\forall q(\mathsf{C}[p{\wedge}q], q \mathrel{\Vert\!\!-} Xn \to p \mathrel{\Vert\!\!-} Xn)$ se lit “ p décide Xn ”, et est notée $p \mathrel{\Vert\!\!-} \pm Xn$.
Elle s'écrit aussi $\forall q \forall r(\mathsf{C}[p{\wedge}q], q \mathrel{\Vert\!\!-} Xn, \mathsf{C}[p{\wedge}r] \to X^+(r,n))$.
Si $\mathcal{X} : P \to \mathcal{P}(\Pi \times P)$ un prédicat unaire du $\mathcal{B}$-modèle $\mathcal{N}$, et $\mathcal{X}^+ : P^2 \to \mathcal{P}(\Pi)$ est le prédicat binaire correspondant du $\mathcal{A}$-modèle standard $\mathcal{M}$, la formule $\forall q(\mathsf{C}[p{\wedge}q], q \mathrel{\Vert\!\!-} \mathcal{X}n \to p \mathrel{\Vert\!\!-} \mathcal{X}n)$ est donc notée aussi $p \mathrel{\Vert\!\!-} \pm \mathcal{X}n$.

Théorème 41. *Si la c.c.d. est vérifiée, il existe une quasi-preuve* dec *telle que :*
$\mathsf{dec} \Vdash \forall X \forall p_0 \exists p' \{(\mathsf{C}[p_0] \to \mathsf{C}[p']), p' \sqsubseteq p_0, \forall n^{ent}(p' \mathrel{\Vert\!\!-} \pm Xn)\}$.

On montre d'abord comment le théorème 40 se déduit de ce théorème 41.
D'après le théorème 32, il suffit de trouver une quasi-preuve $\mathsf{crl0}$ telle que :
$\mathsf{crl0} \Vdash \mathbf{1} \mathrel{\Vert\!\!-} \forall X \exists x \forall n^{\mathrm{ent}}(Xn \leftrightarrow n \,\varepsilon\, x)$
ou encore, puisque $\mathbf{1} \mathrel{\Vert\!\!-} \neg A \equiv \forall p_0((p_0 \mathrel{\Vert\!\!-} A), \mathsf{C}[\mathbf{1}{\wedge}p_0] \to \bot)$:
$\mathsf{crl0} \Vdash \forall X \forall p_0[(p_0 \mathrel{\Vert\!\!-} \forall q\{\forall n^{\mathrm{ent}}(Xn \leftrightarrow n \,\varepsilon\, q) \to \bot\}), \mathsf{C}[\mathbf{1}{\wedge}p_0] \to \bot]$.
D'après le théorème 41, il suffit de trouver une quasi-preuve $\mathsf{crl1}$ telle que :
$\mathsf{crl1} \Vdash \forall X \forall p_0 \forall p'\{(\mathsf{C}[p_0] \to \mathsf{C}[p']), p' \sqsubseteq p_0, \forall n^{\mathrm{ent}}(p' \mathrel{\Vert\!\!-} \pm Xn),$
$(p_0 \mathrel{\Vert\!\!-} \forall q(\forall n^{\mathrm{ent}}(Xn \leftrightarrow n \,\varepsilon\, q) \to \bot)), \mathsf{C}[\mathbf{1}{\wedge}p_0] \to \bot\}$.
Il suffit de trouver une quasi-preuve $\mathsf{crl2}$ telle que :
$\mathsf{crl2} \Vdash \forall X \forall p_0 \forall p'\{(p_0 \mathrel{\Vert\!\!-} \forall q(\forall n^{\mathrm{ent}}(Xn \leftrightarrow n \,\varepsilon\, q) \to \bot)), p' \sqsubseteq p_0, \forall n^{\mathrm{ent}}(p' \mathrel{\Vert\!\!-} \pm Xn), \mathsf{C}[p'] \to \bot\}$.
On prendra alors $\mathsf{crl1} = \lambda x \lambda y \lambda z \lambda u \lambda v((x)(\mathsf{crl2})uyz)(\delta)v$ avec $\delta :: \mathbf{1}{\wedge}p \Rightarrow p$;
(rappelons que la formule $\mathsf{C}[p_0] \to \mathsf{C}[p']$ s'écrit, en fait, $\neg\mathsf{C}[p'] \to \neg\mathsf{C}[p_0]$).
On fixe $\mathcal{X}^+ : P^2 \to \mathcal{P}(\Pi)$, $p_0, p' \in P$, $\xi \Vdash (p_0 \mathrel{\Vert\!\!-} \forall q(\forall n^{\mathrm{ent}}(\mathcal{X}n \leftrightarrow n \,\varepsilon\, q) \to \bot))$, $\eta \Vdash p' \sqsubseteq p_0$, $\zeta \Vdash \forall n^{\mathrm{ent}}(p' \mathrel{\Vert\!\!-} \pm \mathcal{X}n)$ et $\tau \in \mathsf{C}[p']$. On doit avoir $(\mathsf{crl2})\xi\eta\zeta\tau \Vdash \bot$.
On choisit $q_0 \in P$ tel que l'on ait $\|n \,\varepsilon\, q_0\| = \|p' \mathrel{\Vert\!\!-} \mathcal{X}n\|$ pour tout $n \in \mathbb{N}$, ce qui est possible, par définition de ε. On a trivialement $\xi \Vdash (p_0 \mathrel{\Vert\!\!-} (\forall n^{\mathrm{ent}}(n \,\varepsilon\, q_0 \to \mathcal{X}n), \forall n^{\mathrm{ent}}(\mathcal{X}n \to n \,\varepsilon\, q_0) \to \bot))$.
Or, la formule $p_0 \mathrel{\Vert\!\!-} (\forall n^{\mathrm{ent}}(n \,\varepsilon\, q_0 \to \mathcal{X}n), \forall n^{\mathrm{ent}}(\mathcal{X}n \to n \,\varepsilon\, q_0) \to \bot)$ s'écrit :
$\forall r \forall r'(r \mathrel{\Vert\!\!-} \forall n^{\mathrm{ent}}(n \,\varepsilon\, q_0 \to \mathcal{X}n),\ r' \mathrel{\Vert\!\!-} \forall n^{\mathrm{ent}}(\mathcal{X}n \to n \,\varepsilon\, q_0),\ \mathsf{C}[(p_0{\wedge}r){\wedge}r'] \to \bot)$.
En remplaçant r et r' par p', on obtient donc :
$\xi \Vdash (p' \mathrel{\Vert\!\!-} \forall n^{\mathrm{ent}}(n \,\varepsilon\, q_0 \to \mathcal{X}n),\ p' \mathrel{\Vert\!\!-} \forall n^{\mathrm{ent}}(\mathcal{X}n \to n \,\varepsilon\, q_0),\ \mathsf{C}[(p_0{\wedge}p'){\wedge}p'] \to \bot)$.
De $\tau \in \mathsf{C}[p']$ et $\eta \Vdash \forall r(\neg\mathsf{C}[p_0{\wedge}r] \to \neg\mathsf{C}[p'{\wedge}r])$, on déduit :
$\lambda h((\eta)\lambda x(h)(\beta)x)(\alpha)\tau \Vdash \neg\neg\mathsf{C}[(p_0{\wedge}p'){\wedge}p']$
où α, β sont des C-expressions telles que $\alpha : p \Rightarrow p{\wedge}p$; $\beta :: p{\wedge}q \Rightarrow (p{\wedge}q){\wedge}q$.
On a donc :
(1) $\lambda y \lambda z((\eta)\lambda x(\xi yz)(\beta)x)(\alpha)\tau \Vdash (p' \mathrel{\Vert\!\!-} \forall n^{\mathrm{ent}}(n \,\varepsilon\, q_0 \to \mathcal{X}n)), (p' \mathrel{\Vert\!\!-} \forall n^{\mathrm{ent}}(\mathcal{X}n \to n \,\varepsilon\, q_0)) \to \bot$.
- La formule $p' \mathrel{\Vert\!\!-} \forall n^{\mathrm{ent}}(n \,\varepsilon\, q_0 \to \mathcal{X}n)$ s'écrit $\forall n^{\mathrm{ent}} \forall r(r \mathrel{\Vert\!\!-} n \,\varepsilon\, q_0 \to p'{\wedge}r \mathrel{\Vert\!\!-} \mathcal{X}n)$.

Mais $r \mathrel{\Vert\!\!-} n \,\varepsilon\, q_0 \equiv \mathsf{C}[r{\wedge}\mathbf{1}] \to n \,\varepsilon\, q_0$ (proposition 38) $\equiv \mathsf{C}[r{\wedge}\mathbf{1}] \to p' \mathrel{\Vert\!\!-} \mathcal{X}(n)$ par définition de q_0.
Donc $p' \mathrel{\Vert\!\!-} \forall n^{\mathrm{ent}}(n \,\varepsilon\, q_0 \to \mathcal{X}n) \equiv \forall n^{\mathrm{ent}} \forall r((\mathsf{C}[r{\wedge}\mathbf{1}] \to p' \mathrel{\Vert\!\!-} \mathcal{X}(n)) \to p'{\wedge}r \mathrel{\Vert\!\!-} \mathcal{X}n) \equiv$
$\forall n^{\mathrm{ent}} \forall r \forall q'[\forall q(\mathsf{C}[r{\wedge}\mathbf{1}], \mathsf{C}[p'{\wedge}q] \to \mathcal{X}^+(q,n)), \mathsf{C}[(p'{\wedge}r){\wedge}q'] \to \mathcal{X}^+(q',n)]$.
On a donc :
(2) $\lambda d \lambda x \lambda y((x)(\alpha')y)(\beta')y \Vdash (p' \mathrel{\Vert\!\!-} \forall n^{\mathrm{ent}}(n \,\varepsilon\, q_0 \to \mathcal{X}n))$
avec $\alpha' :: (p{\wedge}r){\wedge}q \Rightarrow r{\wedge}\mathbf{1}$ et $\beta' :: (p{\wedge}r){\wedge}q \Rightarrow p{\wedge}q$.
- La formule $p' \mathrel{\Vert\!\!-} \forall n^{\mathrm{ent}}(\mathcal{X}n \to n \,\varepsilon\, q_0)$ s'écrit $\forall n^{\mathrm{ent}} \forall r(r \mathrel{\Vert\!\!-} \mathcal{X}n \to p'{\wedge}r \mathrel{\Vert\!\!-} n \,\varepsilon\, q_0)$, ou encore :

$\forall n^{\mathrm{ent}} \forall r(r \mathrel{\Vert\!\!-} \mathcal{X}n, \mathsf{C}[(p'{\wedge}r){\wedge}\mathbf{1}] \to n \,\varepsilon\, q_0)$, c'est-à-dire, par définition de q_0 :
$\forall n^{\mathrm{ent}} \forall r(r \mathrel{\Vert\!\!-} \mathcal{X}n, \mathsf{C}[(p'{\wedge}r){\wedge}\mathbf{1}] \to p' \mathrel{\Vert\!\!-} \mathcal{X}n)$. Or, on a :
$\zeta \Vdash \forall n^{\mathrm{ent}}(p' \mathrel{\Vert\!\!-} \pm \mathcal{X}n)$, autrement dit $\zeta \Vdash \forall n^{\mathrm{ent}} \forall r(r \mathrel{\Vert\!\!-} \mathcal{X}n, \mathsf{C}[p'{\wedge}r] \to p' \mathrel{\Vert\!\!-} \mathcal{X}n)$. Par suite :
(3) $\lambda n \lambda x \lambda y(\zeta nx)(\alpha'')y \Vdash p' \mathrel{\Vert\!\!-} \forall n^{\mathrm{ent}}(\mathcal{X}n \to n \,\varepsilon\, q_0)$ avec $\alpha'' :: (p{\wedge}r){\wedge}\mathbf{1} \Rightarrow p{\wedge}r$.

Il résulte de (1,2,3) que :
$((\lambda y\lambda z((\eta)\lambda x(\xi yz)(\beta)x)(\alpha)\tau)\ \lambda d\lambda x\lambda y((x)(\alpha')y)(\beta')y)\ \lambda n\lambda x\lambda y(\zeta nx)(\alpha'')y \Vdash \bot$.
On peut donc poser $\mathsf{crl2} =$
$\lambda x_0\lambda y_0\lambda z_0\lambda u((\lambda y\lambda z((y_0)\lambda x(x_0yz)(\beta)x)(\alpha)u)\ \lambda d\lambda x\lambda y((x)(\alpha')y)(\beta')y)\ \lambda n\lambda x\lambda y(z_0nx)(\alpha'')y$.

C.Q.F.D.

Le reste de cette section est consacré à la preuve du théorème 41.

Définition d'une suite par récurrence

On se donne une suite finie de formules $\vec{F}(n,p,p')$ avec paramètres et $p_0 \in P$. On se donne aussi une quasi-preuve dse telle que $\mathsf{dse} \Vdash \forall n\forall p\exists p'\,\vec{F}(n,p,p')$.

Remarque. Dans l'application qu'on a en vue, la suite $\vec{F}$ est composée de trois formules.

D'après le théorème 18(ii) (axiome du choix pour les individus), il existe une fonction $f : P^3 \to P$ telle que :
$\varsigma \Vdash \forall n\forall p(\forall k^{\text{ent}}(\vec{F}(n,p,f(n,p,k)) \to \bot) \to \forall p'(\vec{F}(n,p,p') \to \bot))$.
Il en résulte que $\lambda x(\mathsf{dse})(\varsigma)x \Vdash \forall n\forall p(\forall k^{\text{ent}}(\vec{F}(n,p,f(n,p,k)) \to \bot) \to \bot)$.

On définit une fonction notée $(m¡n)$, de P^2 dans P, en posant, pour $m,n \in P$:
$(m¡n) = 1$ si $m,n \in \mathbb{N}$ et $m < n$; $(m¡n) = 0$ sinon.

La relation $(m¡n) = 1$ est évidemment bien fondée sur P.
D'après le théorème 13(ii), on a donc :
$\mathsf{Y} \Vdash \forall k(\forall l(\text{ent}(l), \vec{F}(n,p,f(n,p,l)) \to (l¡k) \neq 1), \text{ent}(k), \vec{F}(n,p,f(n,p,k)) \to \bot)$
$\to \forall k(\text{ent}(k), \vec{F}(n,p,f(n,p,k)) \to \bot)$.

En posant $\mathsf{Y}' = \lambda x(\mathsf{Y})\lambda y\lambda z(x)zy$, on a donc :
$\mathsf{Y}' \Vdash \forall k^{\text{ent}}\{\forall l^{\text{ent}}(\vec{F}[n,p,f(n,p,l)] \to (l¡k) \neq 1), \vec{F}[n,p,f(n,p,k)] \to \bot\}$
$\to \forall k^{\text{ent}}(\vec{F}[n,p,f(n,p,k)] \to \bot)$.

On a donc :
$\lambda x(\mathsf{dse})(\varsigma)(\mathsf{Y}')x \Vdash \forall k^{\text{ent}}\{\forall l^{\text{ent}}(\vec{F}[n,p,f(n,p,l)] \to (l¡k) \neq 1), \vec{F}[n,p,f(n,p,k)] \to \bot\} \to \bot$.

On définit la formule $G(n,p,k) \equiv \forall l^{\text{ent}}(\vec{F}(n,p,f(n,p,l)) \to (l¡k) \neq 1)$ et la suite de formules $\vec{H}(n,p,k) \equiv \{G(n,p,k), \vec{F}(n,p,f(n,p,k))\}$. On a donc montré :

Lemme 42. $\mathsf{dse0} \Vdash \forall n\forall p\exists k^{ent}\{\vec{H}(n,p,k)\}$, *avec* $\mathsf{dse0} = \lambda x(\mathsf{dse})(\varsigma)(\mathsf{Y}')x$.

Lemme 43. *Soit* cp *une quasi-preuve telle que, quels que soient* $m,n \in \mathbb{N}$*, on ait :*
$\mathsf{cp}\star\underline{m}\,.\,\underline{n}\,.\,\xi\,.\,\eta\,.\,\zeta\,.\,\pi \succ \xi\star\pi$ *(resp.* $\eta\star\pi$*,* $\zeta\star\pi$*) si* $m < n$ *(resp.* $n < m$*,* $m = n$*). Alors :*
i) $\mathsf{cp} \Vdash \forall m^{ent}\forall n^{ent}((m¡n) \neq 1, (n¡m) \neq 1, m \neq n \to \bot)$.
ii) $\mathsf{dse1} \Vdash \forall n\forall p\forall k^{ent}\forall k'^{\,ent}(\vec{H}(n,p,k), \vec{H}(n,p,k'), k \neq k' \to \bot)$
avec $\mathsf{dse1} = \lambda k\lambda k'\lambda x\lambda\vec{y}\lambda x'\lambda\vec{y}'((\mathsf{cp}\,k'k)(x)k'\vec{y}')(x')k\vec{y}$*, où* $\vec{y},\vec{y}'$ *sont deux suites de variables distinctes de même longueur que la suite* $\vec{F}$*.*

i) Trivial.
ii) Soient $\xi \Vdash G(n,p,k)$, $\vec{\eta} \Vdash \vec{F}(n,p,f(n,p,k))$, $\xi' \Vdash G(n,p,k')$, $\vec{\eta}' \Vdash \vec{F}(n,p,f(n,p,k'))$ et $\zeta \Vdash k \neq k'$. On doit montrer $\mathsf{cp}\star\underline{k}'\,.\,\underline{k}\,.\,(\xi)\underline{k}'\vec{\eta}'\,.\,(\xi')\underline{k}\vec{\eta}\,.\,\zeta\,.\,\pi \in \perp\!\!\!\perp$.
Si $k = k'$, on est ramené à $\zeta\star\pi \in \perp\!\!\!\perp$; c'est vrai parce qu'on a alors $\zeta \Vdash \bot$.
Si $k' < k$, on est ramené à montrer $\xi\star\underline{k}'\,.\,\vec{\eta}'\,.\,\pi \in \perp\!\!\!\perp$. Cela résulte immédiatement de :
$\xi \Vdash \forall k'^{\,\text{ent}}(\vec{F}(n,p,f(n,p,k')) \to (k'¡k) \neq 1)$ et donc $\xi \Vdash \text{ent}(k'), \vec{F}(n,p,f(n,p,k')) \to \bot$, puisque $k' < k$.

C.Q.F.D.

On définit maintenant le prédicat :
$\Phi(x,y) \equiv \forall X(\forall n\forall p\forall k^{\mathrm{ent}}(\vec{H}(n,p,k), X(n,p) \to X(sn, f(n,p,k))), X(0,p_0) \to X(x,y))$
et on montre que $\Phi(x,y)$ est une suite de conditions (relation fonctionnelle sur $\mathbb{N}$) et quelques autres propriétés de Φ.

Lemme 44.
i) $\lambda x\lambda y\, y \Vdash \Phi(0,p_0)$.
ii) $\lambda x(x)II \Vdash \forall y(\Phi(0,y) \to y = p_0)$.
iii) $\mathsf{rec} \Vdash \forall x\forall y\forall k^{ent}(\vec{H}(x,y,k), \Phi(x,y) \to \Phi(sx, f(x,y,k)))$
où $\mathsf{rec} = \lambda k\lambda x\lambda\vec{y}\lambda x'\lambda z\lambda u(zkx\vec{y})(x')zu$
$\vec{y}$ étant une suite de variables distinctes de même longueur que $\vec{F}$.

i) Trivial.

ii) On définit le prédicat binaire $\mathcal{X} : P^2 \to \mathcal{P}(\Pi)$ en posant $\mathcal{X}(0,q) = \|q = p_0\|$ et $\mathcal{X}(p,q) = \emptyset$ pour $p \neq 0$. On remplace X par $\mathcal{X}$ dans la définition de $\Phi(0,y)$. Comme on a $sn \neq 0$ pour tout $n \in P$, on obtient $\|\Phi(0,y)\| \supset \|\top, p_0 = p_0 \to y = p_0\|$; d'où le résultat.

iii) Soient $\xi \Vdash G(x,y,k)$, $\vec{\eta} \Vdash \vec{F}(x,y,f(x,y,k))$, $\xi' \Vdash \Phi(x,y)$,
$\zeta \Vdash \forall n\forall p\forall k^{\mathrm{ent}}(\vec{H}(n,p,k), X(n,p) \to X(sn, f(n,p,k)))$,
$\upsilon \Vdash X(0,p_0)$ et $\pi \in \|X(sx, f(x,y,k))\|$.
Alors $\xi'\zeta\upsilon \Vdash X(x,y)$, donc $\zeta \star \underline{k} \cdot \xi \cdot \vec{\eta} \cdot \xi'\zeta\upsilon \cdot \pi \in \perp\!\!\!\perp$ soit $(\mathsf{rec})\underline{k}\xi\vec{\eta}\xi'\zeta\upsilon \star \pi \in \perp\!\!\!\perp$.

C.Q.F.D.

Lemme 45. $\mathsf{ccd1} \Vdash \forall n^{ent}\exists p\, \Phi(n,p)$ *où* $\mathsf{ccd1} = \lambda n((n)\lambda x\lambda y(x)\lambda z(\mathsf{cd1})zy)\lambda x(x)\lambda x\lambda y\, y$
avec $\mathsf{cd1} = \lambda x\lambda y(\mathsf{dse0})\lambda l\lambda\vec{z}(y)(\mathsf{rec})l\vec{z}x$ *;*
$\vec{z}$ est une suite de variables distinctes de même longueur que $\vec{H}$.

Preuve par récurrence sur n ; on a $\lambda x\lambda y\, y \Vdash \Phi(0,p_0)$, donc $\lambda x(x)\lambda x\lambda y\, y \Vdash \exists y\, \Phi(0,y)$.
On montre maintenant $\mathsf{cd1} \Vdash \Phi(x,y) \to \exists y\Phi(sx,y)$.
On considère donc $\xi \Vdash \Phi(x,y)$, $\eta \Vdash \forall y(\Phi(sx,y) \to \perp)$.
On a $\mathsf{rec} \Vdash \forall l^{\mathrm{ent}}(\vec{H}(x,y,l), \Phi(x,y) \to \Phi(sx, f(x,y,l)))$ (lemme 44iii),
$\eta \Vdash (\Phi(sx, f(x,y,l)) \to \perp)$, et donc :
$\lambda l\lambda\vec{z}(\eta)(\mathsf{rec})l\vec{z}\xi \Vdash \; \Vdash \forall l^{\mathrm{ent}}(\vec{H}(x,y,l) \to \perp)$, où $\vec{z}$ est de même longueur que $\vec{H}$.
Or, on a $\mathsf{dse0} \Vdash \exists k^{\mathrm{ent}}\{\vec{H}(x,y,k)\}$ (lemme 42) ; donc :
$(\mathsf{dse0})\lambda l\lambda\vec{z}(\eta)(\mathsf{rec})l\vec{z}\xi \Vdash \perp$, soit $(\mathsf{cd1})\xi\eta \Vdash \perp$.

On a donc montré $\mathsf{cd1} \Vdash \forall y(\Phi(x,y) \to \exists y\Phi(sx,y))$, d'où il résulte que :
$\lambda x\lambda y(x)\lambda z(\mathsf{cd1})zy \Vdash \exists y\Phi(x,y) \to \exists y\Phi(sx,y)$.

C.Q.F.D.

Lemme 46. *Il existe une quasi-preuve* $\mathsf{ccd2}$ *telle que :*
$\mathsf{ccd2} \Vdash \forall n^{ent}\forall p\forall q(\Phi(n,p), \Phi(n,q) \to p = q)$.

On fait la preuve détaillée par récurrence sur n. Elle permet d'écrire explicitement la quasi-preuve $\mathsf{ccd2}$.

Pour $n = 0$, le lemme 44(ii) donne le résultat : $\Phi(0,p), \Phi(0,q) \to p = q$.
On fixe m et on suppose $\forall p\forall q(\Phi(m,p), \Phi(m,q) \to p = q)$.
On définit le prédicat binaire :
$\Psi(n,q) \equiv \forall p\forall k^{\mathrm{ent}}(n = sm, \vec{H}(m,p,k), \Phi(m,p) \to q = f(m,p,k))$.

On montre $\Vdash \forall p\forall k^{\mathrm{ent}}(\vec{H}(n,p,k), \Phi(n,p) \to \Psi(sn, f(n,p,k)))$, c'est-à-dire :
$\Vdash \forall p\forall q\forall k^{\mathrm{ent}}\forall l^{\mathrm{ent}}\{\vec{H}(n,p,k), \Phi(n,p), sn = sm, \vec{H}(m,q,l), \Phi(m,q) \to f(n,p,k) = f(m,q,l)\}$.

Or on a $\|sn = sm\| = \|n = m\|$, $\Phi(m,p), \Phi(m,q) \to p = q$ par hypothèse de récurrence ; $\vec{H}(m,p,k), \vec{H}(m,p,l) \to k = l$ (lemme 43(ii)), d'où $f(n,p,k) = f(m,q,l)$.

En posant $\Psi'(x,y) \equiv \Phi(x,y) \wedge \Psi(x,y)$, on a :
$\Vdash \forall p \forall k^{\text{ent}}(\vec{H}(n,p,k), \Psi'(n,p) \to \Psi'(sn, f(n,p,k)))$; on a aussi $\Vdash \Psi'(0,p_0)$. Cela montre que $\Vdash (\Phi(x,y) \to \Psi'(x,y))$ en faisant $X \equiv \Psi'$ dans la définition de Φ.
On a donc $\Vdash \Phi(sm,q) \to \forall p \forall k^{\text{ent}}(\vec{H}(m,p,k), \Phi(m,p) \to q = f(m,p,k))$. D'où :
$\Vdash \Phi(sm,q), \Phi(sm,q') \to \forall p \forall k^{\text{ent}}(\vec{H}(m,p,k), \Phi(m,p) \to (q = f(m,p,k)) \wedge (q' = f(m,p,k)))$
et donc $\Vdash \Phi(sm,q), \Phi(sm,q') \to \forall p \forall k^{\text{ent}}(\vec{H}(m,p,k), \Phi(m,p) \to q = q')$.
On obtient donc $\Vdash \Phi(sm,q), \Phi(sm,q') \to q = q'$ puisqu'on a $\mathsf{ccd1} \Vdash \exists p\, \Phi(m,p)$ (lemme 45) et $\mathsf{dse0} \Vdash \forall p \exists k^{\text{ent}}\{\vec{H}(m,p,k)\}$ (lemme 42).

C.Q.F.D.

Fin de la preuve du théorème 41

Pour montrer le théorème 41, on fixe $p_0 \in P$ et un prédicat binaire $\mathcal{X} : P^2 \to \mathcal{P}(\Pi)$.
Il s'agit de trouver une quasi-preuve dec telle que :
$\mathsf{dec} \Vdash \exists p'\{(\mathsf{C}[p_0] \to \mathsf{C}[p']), p' \sqsubseteq p_0, \forall n^{\text{ent}}(p' \Vdash \pm\mathcal{X}n)\}$.
On applique les résultats précédents, en prenant pour $\vec{F}(n,p,p')$ la suite des trois formules suivantes : $\{(\mathsf{C}[p] \to \mathsf{C}[p']), (p' \sqsubseteq p), p' \Vdash \pm\mathcal{X}n\}$.
Le lemme 47 ci-dessous donne une quasi-preuve dse telle que $\mathsf{dse} \Vdash \forall n \forall p \exists p'\{\vec{F}(n,p,p')\}$.

Lemme 47. $\mathsf{dse} \Vdash \forall p \exists p'\{\vec{F}(n,p,p')\}$
où $\mathsf{dse} = \lambda a(\lambda h(aII)\lambda x\lambda y\, h)\lambda z(\mathsf{cc})\lambda k((a\lambda x\, xz)\beta')\lambda x\lambda y(k)(y)(\alpha)x$
avec $\beta' = \lambda x\lambda y(x)(\beta)y$, $\alpha :: (p\wedge q)\wedge r \Rightarrow r\wedge q$ *et* $\beta :: (p\wedge q)\wedge r \Rightarrow p\wedge r$.

La formule considérée s'écrit $\forall p'[(\mathsf{C}[p] \to \mathsf{C}[p']), p' \sqsubseteq p, (p' \Vdash \pm\mathcal{X}n) \to \bot] \to \bot$.
Soit donc $\xi \Vdash \forall p'[(\mathsf{C}[p] \to \mathsf{C}[p']), p' \sqsubseteq p, (p' \Vdash \pm\mathcal{X}n) \to \bot]$. On doit montrer $(\mathsf{dse})\xi \Vdash \bot$.

- On montre $\lambda h(\xi II)\lambda x\lambda y\, h \Vdash \neg(p \Vdash \mathcal{X}n)$:

Soit $\zeta \Vdash (p \Vdash \mathcal{X}n)$; on a donc $\lambda x\lambda y\, \zeta \Vdash (p \Vdash \pm\mathcal{X}n)$; en effet :
$p \Vdash \pm\mathcal{X}n \equiv \forall q(\mathsf{C}[p\wedge q], q \Vdash \mathcal{X}n \to p \Vdash \mathcal{X}n)$.
Or, on a $\xi \Vdash (\mathsf{C}[p] \to \mathsf{C}[p]), p \sqsubseteq p, (p \Vdash \pm\mathcal{X}n) \to \bot$; on a $I \Vdash \mathsf{C}[p] \to \mathsf{C}[p]$ et $I \Vdash p \sqsubseteq p$ (puisque $p' \sqsubseteq p \equiv \forall q(\neg\mathsf{C}[p\wedge q] \to \neg\mathsf{C}[p'\wedge q])$). Donc $(\xi II)\lambda x\lambda y\, \zeta \Vdash \bot$, d'où le résultat.

- On montre maintenant $\lambda z(\mathsf{cc})\lambda k((\xi\lambda x\, xz)\beta')\lambda x\lambda y(k)(y)(\alpha)x \Vdash (p \Vdash \mathcal{X}n)$.

Soient donc $\tau \in \mathsf{C}[p\wedge q]$ et $\pi \in \mathcal{X}^+(q,n)$. On doit montrer :
$((\xi\lambda x\, x\tau)\beta')\lambda x\lambda y(\mathsf{k}_\pi)(y)(\alpha)x \star \pi \in \perp\!\!\!\perp$. Or, on a $\lambda x\, x\tau \Vdash \neg\neg\mathsf{C}[p\wedge q]$,
$\beta' \Vdash p\wedge q \sqsubseteq p$ (lemme 48) et $\xi \Vdash (\neg\mathsf{C}[p\wedge q] \to \neg\mathsf{C}[p]), p\wedge q \sqsubseteq p, (p\wedge q \Vdash \pm\mathcal{X}n) \to \bot$; donc :
$(\xi\lambda x\, x\tau)\beta' \Vdash ((p\wedge q \Vdash \pm\mathcal{X}n) \to \bot)$. Il suffit donc de montrer :
$\lambda x\lambda y(\mathsf{k}_\pi)(y)(\alpha)x \Vdash (p\wedge q \Vdash \pm\mathcal{X}n)$, c'est-à-dire :
$\lambda x\lambda y(\mathsf{k}_\pi)(y)(\alpha)x \Vdash \forall r(\mathsf{C}[(p\wedge q)\wedge r], r \Vdash \mathcal{X}n \to p\wedge q \Vdash \mathcal{X}n)$. On montre, en fait :
$\lambda x\lambda y(\mathsf{k}_\pi)(y)(\alpha)x \Vdash \forall r(\mathsf{C}[(p\wedge q)\wedge r], r \Vdash \mathcal{X}n \to \bot)$.
Soient donc $\upsilon \in \mathsf{C}[(p\wedge q)\wedge r]$ et $\eta \Vdash (r \Vdash \mathcal{X}n)$. On doit montrer :
$(\mathsf{k}_\pi)(\eta)(\alpha)\upsilon \star \rho \in \perp\!\!\!\perp$ pour tout $\rho \in \Pi$, soit $(\eta)(\alpha)\upsilon \star \pi \in \perp\!\!\!\perp$. Or, on a $(\alpha)\upsilon \in \mathsf{C}[r\wedge q]$, donc $(\eta)(\alpha)\upsilon \Vdash \mathcal{X}^+(q,n)$, d'où le résultat, puisque $\pi \in \mathcal{X}^+(q,n)$.

- Il en résulte que $(\lambda h(\xi II)\lambda x\lambda y\, h)\lambda z(\mathsf{cc})\lambda k((\xi\lambda x\, xz)\beta')\lambda x\lambda y(k)(y)(\alpha)x \Vdash \bot$

soit $(\mathsf{dse})\xi \Vdash \bot$, ce qui termine la preuve.

C.Q.F.D.

Lemme 48. *Soit* $\beta :: (p\wedge q)\wedge r \Rightarrow p\wedge r$. *Alors* $\lambda x\lambda y(x)(\beta)y \Vdash \forall p\forall q((p\wedge q) \sqsubseteq p)$.

Cette formule s'écrit $\forall p \forall q \forall r(\neg \mathsf{C}[p \wedge r], \mathsf{C}[(p \wedge q) \wedge r] \to \bot)$.
Soient donc $\xi \Vdash \neg \mathsf{C}[p \wedge r], \tau \in \mathsf{C}[(p \wedge q) \wedge r]$, d'où $\beta\tau \in \mathsf{C}[p \wedge r]$ et $(\xi)(\beta)\tau \Vdash \bot$. On a donc bien $\lambda x \lambda y(x)(\beta)y \star \xi \,.\, \tau \,.\, \pi \in \perp\!\!\!\perp$ pour tout $\pi \in \Pi$.

C.Q.F.D.

On se propose d'appliquer la condition de chaîne dénombrable au prédicat binaire $\Phi(x,y)$. Les lemmes 45 et 46 montrent que les deux premières hypothèses de la c.c.d. sont réalisées par $\mathsf{ccd1}$ et $\mathsf{ccd2}$. La troisième est donnée par le lemme 49 ci-dessous.

Lemme 49. *Il existe deux quasi-preuves* $\mathsf{ccd3}$ *et* for *telles que :*
i) $\mathsf{ccd3} \Vdash \forall n^{ent} \forall p \forall q(\Phi(n,p), \Phi(sn,q) \to q \sqsubseteq p)$.
ii) $\mathsf{for} \Vdash \forall n^{ent} \forall q(\Phi(sn,q) \to q \Vdash \pm \mathcal{X} n)$.

D'après le lemme 44(iii), on a :
$\mathsf{rec} \Vdash \forall k^{\mathrm{ent}}(\vec{H}(n,p,k), \Phi(n,p) \to \Phi(sn, f(n,p,k)))$. En utilisant $\mathsf{ccd2}$ (lemme 46), on a :
$\Vdash \forall k^{\mathrm{ent}}(\vec{H}(n,p,k), \Phi(n,p), \Phi(sn,q) \to q = f(n,p,k))$.
Or, $\vec{H}(n,p,k)$ est une suite de quatre formules dont les deux dernières sont :
$f(n,p,k) \sqsubseteq p$ et $f(n,p,k) \Vdash \pm \mathcal{X} n$.
i) On en déduit d'abord $\Vdash \forall k^{\mathrm{ent}}(\vec{H}(n,p,k), \Phi(n,p), \Phi(sn,q) \to q \sqsubseteq p)$.
D'où le résultat, puisqu'on a $\mathsf{dse0} \Vdash \exists k^{\mathrm{ent}}\{\vec{H}(n,p,k)\}$ (lemme 42).
ii) On en déduit aussi $\Vdash \forall k^{\mathrm{ent}}(\vec{H}(n,p,k), \Phi(n,p), \Phi(sn,q) \to q \Vdash \pm \mathcal{X} n)$.
On obtient donc $\Vdash \forall n^{\mathrm{ent}} \forall q(\Phi(sn,q) \to q \Vdash \pm \mathcal{X} n)$ puisqu'on a :
$\mathsf{ccd1} \Vdash \forall n^{\mathrm{ent}} \exists p\, \Phi(n,p)$ (lemme 45) et $\mathsf{dse0} \Vdash \forall n \forall p \exists k^{\mathrm{ent}}\{\vec{H}(n,p,k)\}$ (lemme 42).

C.Q.F.D.

On peut maintenant appliquer la c.c.d. au prédicat $\Phi(x,y)$, ce qui donne une quasi-preuve $\mathsf{ccd0}$ telle que $\mathsf{ccd0} \Vdash \exists p'\{\vec{\Omega}(n,p,p')\}$ avec :
$\vec{\Omega}(n,p,p') \equiv \{\forall n^{\mathrm{ent}} \forall p(\Phi(n,p) \to p' \sqsubseteq p),\ \forall n^{\mathrm{ent}} \forall p(\Phi(n,p), \neg \mathsf{C}[p] \to \bot), \neg \mathsf{C}[p'] \to \bot\}$.
Pour terminer la preuve du théorème 41, il suffit donc de trouver des quasi-preuves $\mathsf{dec0}, \mathsf{dec1}, \mathsf{dec2}$ telles que :
$\mathsf{dec0} \Vdash \forall p'(\vec{\Omega}(n,p,p'), \neg \mathsf{C}[p_0], \mathsf{C}[p'] \to \bot)$;
$\mathsf{dec1} \Vdash \forall p'(\vec{\Omega}(n,p,p') \to p' \sqsubseteq p_0)$;
$\mathsf{dec2} \Vdash \forall p'(\vec{\Omega}(n,p,p') \to \forall n^{\mathrm{ent}}(p' \Vdash \pm \mathcal{X} n))$.
Soient donc $\omega_0, \omega_1 \in \Lambda$ tels que :
$\omega_0 \Vdash \forall n^{\mathrm{ent}} \forall p(\Phi(n,p) \to p' \sqsubseteq p)$ et $\omega_1 \Vdash \forall n^{\mathrm{ent}} \forall p(\Phi(n,p), \neg \mathsf{C}[p] \to \bot), \neg \mathsf{C}[p'] \to \bot$
En appliquant le lemme 44(i) avec $n = 0, p = p_0$, on obtient $(\omega_0)\lambda x \lambda y\, y \Vdash p' \sqsubseteq p_0$.
On peut donc prendre $\mathsf{dec1} = \lambda a \lambda b(a) \lambda x \lambda y\, y$.

Lemme 50. $\mathsf{ccd4} \Vdash (\mathsf{C}[p_0] \to \forall n^{ent} \forall p(\Phi(n,p), \neg \mathsf{C}[p] \to \bot))$
où $\mathsf{ccd4} = \lambda a \lambda b \lambda c((b \lambda x_0 \lambda x_1 \lambda x_2 \lambda x_3 \lambda x \lambda y(x)(x_1)y) \lambda x\, xa)c$.

Soient $\tau \in \mathsf{C}[p_0]$, $\xi \Vdash \Phi(n,p)$ et $\eta \Vdash \neg \mathsf{C}[p]$.
En faisant $X(x,y) \equiv \neg\neg \mathsf{C}[y]$ dans la définition de Φ, on a :

$$\xi \Vdash \forall n' \forall p' \forall k^{\mathrm{ent}}(G[n',p',k], \vec{F}[n',p',f(n',p',k)], \neg\neg \mathsf{C}[p'] \to \neg\neg \mathsf{C}[f(n',p',k)]), \neg\neg \mathsf{C}[p_0], \neg \mathsf{C}[p] \to \bot.$$

On a $\lambda x(x)\tau \Vdash \neg\neg \mathsf{C}[p_0]$.
Par ailleurs, puisque $\vec{F}[n',p',q] \equiv \{(\neg \mathsf{C}[q] \to \neg \mathsf{C}[p']), (q \sqsubseteq p'), q \Vdash \pm \mathcal{X} n\}$, on a facilement :

$$\lambda x_0 \lambda x_1 \lambda x_2 \lambda x_3 \lambda x \lambda y(x)(x_1)y \Vdash \forall n' \forall p' \forall k^{\mathrm{ent}}(G[n',p',k], \vec{F}[n',p',f(n',p',k)], \neg\neg \mathsf{C}[p'] \to \neg\neg \mathsf{C}[f(n',p',k)]).$$

Il en résulte que $((\xi \lambda x_0 \lambda x_1 \lambda x_2 \lambda x_3 \lambda x \lambda y(x)(x_1)y) \lambda x(x)\tau)\eta \Vdash \bot$, soit $(\mathsf{ccd4})\tau\xi\eta \Vdash \bot$.

C.Q.F.D.

Du lemme 50, on déduit immédiatement $\lambda x(\omega_1)(\mathsf{ccd4})x \Vdash \mathsf{C}[p_0], \neg\mathsf{C}[p'] \to \bot$.
On peut donc poser $\mathsf{dec0} = \lambda a\lambda b\lambda x(b)(\mathsf{ccd4})x$.

Lemme 51.
i) $\mathsf{lef0} \Vdash \forall p\forall q(p \Vdash \mathcal{X}n,\ q \sqsubseteq p \to q \Vdash \mathcal{X}n)$ *avec* $\mathsf{lef0} = \lambda x\lambda y\lambda z(\mathsf{cc})\lambda k((y)\lambda u(k)(x)u)z$.
ii) $\mathsf{lef1} \Vdash \forall p\forall q(p \Vdash \pm\mathcal{X}n,\ q \sqsubseteq p \to q \Vdash \pm\mathcal{X}n)$ *avec*
$\mathsf{lef1} = \lambda x\lambda y\lambda z\lambda u((\mathsf{lef0})(\mathsf{cc})\lambda h((y)\lambda v(h)(x)vu)z$.

i) Immédiat en explicitant les formules :
$p \Vdash \mathcal{X}n \equiv \forall r(\mathsf{C}[p\wedge r] \to \mathcal{X}^+(r,n))$;
$q \sqsubseteq p \equiv \forall r(\neg\mathsf{C}[p\wedge r] \to \neg\mathsf{C}[q\wedge r])$;
$q \Vdash \mathcal{X}n \equiv \forall r(\mathsf{C}[q\wedge r] \to \mathcal{X}^+(r,n))$.
On déclare $x : p \Vdash \mathcal{X}n$, $y : q \sqsubseteq p$, $z : \mathsf{C}[q\wedge r]$, $k : \neg\mathcal{X}^+n$.
ii) On écrit les formules :
$p \Vdash \pm\mathcal{X}n \equiv \forall r(\mathsf{C}[p\wedge r], r \Vdash \mathcal{X}n \to p \Vdash \mathcal{X}n)$;
$q \sqsubseteq p \equiv \forall r(\neg\mathsf{C}[p\wedge r] \to \neg\mathsf{C}[q\wedge r])$;
$q \Vdash \pm\mathcal{X}n \equiv \forall r(\mathsf{C}[q\wedge r], r \Vdash \mathcal{X}n \to q \Vdash \mathcal{X}n)$.
On déclare $x : p \Vdash \pm\mathcal{X}n$, $y : q \sqsubseteq p$, $z : \mathsf{C}[q\wedge r]$, $u : r \Vdash \mathcal{X}n$, $v : \mathsf{C}[p\wedge r]$, $h : \neg(p \Vdash \mathcal{X}n)$.
C.Q.F.D.

En utilisant les lemmes 49(ii) et 51 ainsi que $\omega_0 \Vdash \forall n^{\mathrm{ent}}\forall p(\Phi(n,p) \to p' \sqsubseteq p)$, on obtient :
$\lambda n\lambda x((\mathsf{lef1})(\mathsf{for})nx)(\omega_0)nx \Vdash \forall n^{\mathrm{ent}}\forall q(\Phi(sn,q) \to p' \Vdash \pm\mathcal{X}n)$.
Or, on a $\mathsf{ccd1} \Vdash \forall n^{\mathrm{ent}}\exists p\,\Phi(n,p)$ (lemme 45) ; on en déduit :
$\lambda n(\mathsf{cc})\lambda k((\mathsf{ccd1})(s)n)\lambda x(k)((\mathsf{lef1})(\mathsf{for})nx)(\omega_0)nx \Vdash \forall n^{\mathrm{ent}}(p_{\mathcal{X}} \Vdash \pm\mathcal{X}n)$.
On peut donc poser $\mathsf{dec2} = \lambda a\lambda b\lambda n(\mathsf{cc})\lambda k((\mathsf{ccd1})(s)n)\lambda x(k)((\mathsf{lef1})(\mathsf{for})nx)(a)nx$.

Cela termine la preuve du théorème 41.
C.Q.F.D.

L'axiome d'ultrafiltre sur $\mathbb{N}$

On considère une algèbre de réalisabilité standard $\mathcal{A}$ et un $\mathcal{A}$-modèle $\mathcal{M}$ dans lequel l'ensemble d'individus (qui est aussi l'ensemble des conditions) est $P = \mathcal{P}(\Pi)^{\mathbb{N}}$.
La relation binaire ε est définie par $\|n\,\varepsilon\,p\| = p(n)$ si $n \in \mathbb{N}$; sinon, $\|n\,\varepsilon\,p\| = \emptyset$.
$\mathbf{1}$ est défini par $\mathbf{1}(n) = \emptyset$ pour tout $n \in \mathbb{N}$;
$\wedge$ est définie par $\|n\,\varepsilon\,(p\wedge q)\| = \|n\,\varepsilon\,p \wedge n\,\varepsilon\,q\|$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

L'axiome de représentation des prédicats sur $\mathbb{N}$ (RPN)

On définit la fonction récursive d'arité k, notée $(n_1,\dots,n_k)$ (codage des k-uplets) :
$(n_1,n_2) = n_1 + (n_1+n_2)(n_1+n_2+1)/2$; $(n_1,\dots,n_{k+1}) = ((n_1,\dots,n_k),n_{k+1})$.

Proposition 52. $\Vdash \forall X\exists x\forall y_1^{int}\dots\forall y_k^{int}((y_1,\dots,y_k)\,\varepsilon\,x \leftrightarrow X(y_1,\dots,y_k))$ *où X est une variable de prédicat d'arité k.*

Soit $\mathcal{X} : P^k \to \mathcal{P}(\Pi)$ un prédicat d'arité k. On définit $a \in P$ en posant :
$a(n) = \mathcal{X}(n_1,\dots,n_k)$ pour $n \in \mathbb{N}$, $n = (n_1,\dots,n_k)$. On a alors immédiatement :
$I \Vdash \forall y_1^{\mathrm{ent}}\dots\forall y_k^{\mathrm{ent}}((y_1,\dots,y_k)\,\varepsilon\,a \to \mathcal{X}(y_1,\dots,y_k))$ et
$I \Vdash \forall y_1^{\mathrm{ent}}\dots\forall y_k^{\mathrm{ent}}(\mathcal{X}(y_1,\dots,y_k) \to (y_1,\dots,y_k)\,\varepsilon\,a)$.
On en déduit :
$\lambda x(x)I \Vdash \forall X\exists x\forall y_1^{\mathrm{ent}}\dots\forall y_k^{\mathrm{ent}}((y_1,\dots,y_k)\,\varepsilon\,x \to X(y_1,\dots,y_k))$ et
$\lambda x(x)I \Vdash \forall X\exists x\forall y_1^{\mathrm{ent}}\dots\forall y_k^{\mathrm{ent}}(X(y_1,\dots,y_k) \to (y_1,\dots,y_k)\,\varepsilon\,x)$.

Il suffit alors d'appliquer le théorème 15.

C.Q.F.D.

Le schéma de compréhension pour $\mathbb{N}$ (SCN)

Soit $F[y, x_1, \ldots, x_k]$ une formule dont les variables libres sont parmi $y, x_1, \ldots, x_k$. On définit une fonction d'arité k, soit $g_F : P^k \to P$, autrement dit $g_F : P^k \times \mathbb{N} \to \mathcal{P}(\Pi)$ en posant $g_F(p_1, \ldots, p_k)(n) = \|F[n, p_1, \ldots, p_k]\|$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Proposition 53. *On a* $\Vdash \forall x_1 \ldots \forall x_k \forall y^{int}(y \,\varepsilon\, g_F(x_1, \ldots, x_k) \leftrightarrow F[y, x_1, \ldots, x_k])$ *pour toute formule* $F[y, x_1, \ldots, x_k]$.

En effet, on a trivialement :
$I \Vdash \forall x_1 \ldots \forall x_k \forall y^{\mathrm{ent}}(y \,\varepsilon\, g_F(x_1, \ldots, x_k) \to F[y, x_1, \ldots, x_k])$ et
$I \Vdash \forall x_1 \ldots \forall x_k \forall y^{\mathrm{ent}}(F[y, x_1, \ldots, x_k] \to y \,\varepsilon\, g_F(x_1, \ldots, x_k))$.
Il suffit alors d'appliquer le théorème 15.

C.Q.F.D.

Remarque. Le symbole de fonction binaire $\wedge$ est obtenu en appliquant SCN à la formule $y \,\varepsilon\, x_1 \wedge y \,\varepsilon\, x_2$.

Le modèle générique

On désigne par $\mathsf{C}[x]$ la formule $\forall m^{\mathrm{int}} \exists n^{\mathrm{int}}(m+n) \,\varepsilon\, x$, qui exprime que l'ensemble d'entiers x est infini. Le prédicat C est défini par cette formule : pour tout $p \in P$, $|\mathsf{C}[p]|$ est, par définition, l'ensemble $\{\tau \in \Lambda;\ \tau \Vdash \mathsf{C}[p]\}$.
Il en résulte que la condition $\gamma :: t(p_1, \ldots, p_n) \Rightarrow u(p_1, \ldots, p_n)$ s'écrit :
$\lambda x\, \gamma x \Vdash \forall p_1 \ldots \forall p_n(\mathsf{C}[t(p_1, \ldots, p_n)] \to \mathsf{C}[u(p_1, \ldots, p_n)])$.
Pour terminer la définition de l'algèbre $\mathcal{B}$ (et du $\mathcal{B}$-modèle $\mathcal{N}$), il reste donc à trouver des quasi-preuves $\alpha_0, \alpha_1, \alpha_2, \beta_0, \beta_1, \beta_2$ telles que :

$\alpha_0 \Vdash \forall p \forall q \forall r(\mathsf{C}[(p \wedge q) \wedge r] \to \mathsf{C}[p \wedge (q \wedge r)])$; $\alpha_1 \Vdash \forall p(\mathsf{C}[p] \to \mathsf{C}[p \wedge \mathbf{1}])$;
$\alpha_2 \Vdash \forall p \forall q(\mathsf{C}[p \wedge q] \to \mathsf{C}[q])$; $\beta_0 \Vdash \forall p(\mathsf{C}[p] \to \mathsf{C}[p \wedge p])$; $\beta_1 \Vdash \forall p \forall q(\mathsf{C}[p \wedge q] \to \mathsf{C}[q \wedge p])$;
$\beta_2 \Vdash \forall p \forall q \forall r \forall s(\mathsf{C}[((p \wedge q) \wedge r) \wedge s] \to \mathsf{C}[(p \wedge (q \wedge r)) \wedge s])$.

Or, on a facilement, en déduction naturelle :
$\vdash \theta : \forall n(n \,\varepsilon\, x \to n \,\varepsilon\, x') \to (\mathsf{C}[x] \to \mathsf{C}[x'])$ avec $\theta = \lambda f \lambda u \lambda m \lambda h(um) \lambda n \lambda x(hn)(f)x$.
D'après le théorème 5 (lemme d'adéquation), on peut donc poser $\alpha_i = \theta \alpha_i^*$ et $\beta_i = \theta \beta_i^*$, pour des quasi-preuves $\alpha_i^*, \beta_i^* (0 \le i \le 2)$ telles que :
$\vdash \alpha_0^* : \forall X \forall Y \forall Z\{(X \wedge Y) \wedge Z \to X \wedge (Y \wedge Z)\}$; $\vdash \alpha_1^* : \forall X\{X \to X \wedge \top\}$;
$\vdash \alpha_2^* : \forall X \forall Y\{X \wedge Y \to Y\}$; $\vdash \beta_0^* : \forall X\{X \to X \wedge X\}$; $\vdash \beta_1^* : \forall X \forall Y\{X \wedge Y \to Y \wedge X\}$;
$\vdash \beta_2^* : \forall X \forall Y \forall Z \forall U\{((X \wedge Y) \wedge Z) \wedge U \to (X \wedge (Y \wedge Z)) \wedge U\}$.

La condition de chaîne dénombrable

On montre, dans cette section le :

Théorème 54.
La structure de forcing $\{\mathsf{C}, \wedge, \mathbf{1}\}$ *satisfait la condition de chaîne dénombrable dans* $\mathcal{M}$.

Il s'agit de trouver une quasi-preuve ccd telle que :
$\mathsf{ccd} \Vdash \forall X \exists x\{\forall n^{\mathrm{ent}} \exists p\, X(n,p), \forall n^{\mathrm{ent}} \forall p \forall q(X(n,p), X(n,q) \to p = q),$
$\qquad \forall n^{\mathrm{ent}} \forall p \forall q(X(n,p), X(sn,q) \to q \sqsubseteq p) \to$

$$\forall n^{\text{ent}}\forall p(X(n,p)\to x\sqsubseteq p)\wedge(\forall n^{\text{ent}}\forall p(X(n,p)\to \mathsf{C}[p])\to \mathsf{C}[x])\}$$
où $p\sqsubseteq q$ est la formule $\forall r(\mathsf{C}[p{\wedge}r]\to \mathsf{C}[q{\wedge}r])$.

D'après le théorème 15, cela revient à trouver une quasi-preuve ccd' telle que :

$$\begin{aligned}\text{ccd'} \Vdash \forall X\exists x\{&\forall n^{\text{int}}\exists p\, X(n,p), \forall n^{\text{int}}\forall p\forall q(X(n,p),X(n,q)\to p=q),\\ &\forall n^{\text{int}}\forall p\forall q(X(n,p),X(sn,q)\to q\sqsubseteq p)\to\\ &\forall n^{\text{int}}\forall p(X(n,p)\to x\sqsubseteq p)\wedge(\forall n^{\text{int}}\forall p(X(n,p)\to \mathsf{C}[p])\to \mathsf{C}[x])\}.\end{aligned}$$

D'après le théorème 5 (lemme d'adéquation), nous pouvons utiliser la méthode suivante pour montrer $\Vdash F$:
Montrer $\Vdash A_1,\dots,\ \Vdash A_k$, puis
montrer $A_1,\dots,A_k\vdash F$ au moyen des règles de la déduction naturelle classique du second ordre (qui contient le schéma de compréhension), et des axiomes suivants qui sont réalisés par des quasi-preuves dans le $\mathcal{A}$-modèle $\mathcal{M}$:

- $t\neq u$ pour tous les termes clos t,u qui ont des valeurs distinctes dans $\mathcal{M}$.
- $\forall x_1^{\text{int}}\dots\forall x_k^{\text{int}}(t(x_1,\dots,x_k)=u(x_1,\dots,x_k))$ pour toutes les équations entre termes qui sont vraies dans $\mathbb{N}$.
- Le schéma de fondation (SCF, voir théorème 13ii) qui est constitué des formules :
$$\forall X_1\dots\forall X_k\{\forall x^{\text{int}}[\forall y^{\text{int}}(X_1y,\dots,X_ky\to f(y,x)\neq 1),X_1x,\dots,X_kx\to\bot]\to\forall x^{\text{int}}(X_1x,\dots,X_kx\to\bot)\}$$
où $f:P^2\to P$ est telle que la relation $f(y,x)=1$ soit bien fondée sur $\mathbb{N}$.
- Le schéma d'axiome du choix pour les individus (ACI, voir théorème 18) qui est constitué des formules $\forall\vec{x}(\forall y^{\text{int}}F(\vec{x},f_F(\vec{x},y))\to\forall y\,F(\vec{x},y))$;
$\vec{x}=(x_1,\dots,x_k)$ est une suite finie de variables, $\forall\vec{x}\forall y^{\text{int}}F$ une formule close quelconque, et f_F un symbole de fonction d'arité $k+1$.
- L'axiome de représentation des prédicats sur $\mathbb{N}$ (RPN, voir proposition 52) qui est constitué des formules $\forall X\exists x\forall\vec{y}^{\text{int}}((y_1,\dots,y_k)\,\varepsilon\,x\leftrightarrow X\vec{y})$;
$\vec{y}=(y_1,\dots,y_k)$ est une suite de k variables et X est une variable de prédicat d'arité k.
- Le schéma de compréhension pour les entiers (SCN, voir proposition 53), qui est constitué des formules $\forall\vec{x}\forall y^{\text{int}}(y\,\varepsilon\,g_F(\vec{x})\leftrightarrow F[y,\vec{x}])$;
$\vec{x}=(x_1,\dots,x_k)$ est une suite de k variables, $\forall\vec{x}\forall y^{\text{int}}F$ est une formule close quelconque, et g_F est un symbole de fonction d'arité k.

Lemme 55. $\vdash\forall p\forall q(p\sqsubseteq q\leftrightarrow\exists m^{int}\forall n^{int}(n+m\,\varepsilon\,p\to n+m\,\varepsilon\,q))$.

On applique le SCN à la formule $F[y,x]\equiv y\notin x$; on obtient donc :
$$\vdash\forall x\forall y^{\text{int}}(y\,\varepsilon\,\neg x\leftrightarrow y\notin x)$$
en utilisant la notation $\neg x$ pour $g_F(x)$.

On a $p\sqsubseteq q\equiv\forall r(\mathsf{C}[p{\wedge}r]\to\mathsf{C}[q{\wedge}r])$ et donc $p\sqsubseteq q\vdash\mathsf{C}[p{\wedge}\neg q]\to\mathsf{C}[q{\wedge}\neg q]$.
Or, on a $\mathsf{C}[q{\wedge}\neg q]\vdash\forall m^{\text{int}}\exists n^{\text{int}}(m+n\,\varepsilon\,q\wedge m+n\notin q)\vdash\bot$, d'où :
$p\sqsubseteq q\vdash\neg\mathsf{C}[p{\wedge}\neg q]$, soit $\vdash p\sqsubseteq q\to\exists m^{\text{int}}\forall n^{\text{int}}\neg(m+n\,\varepsilon\,p\wedge\neg(m+n\,\varepsilon\,q))$.

Inversement, des hypothèses :
$\forall n'^{\text{int}}(m'+n'\,\varepsilon\,p\to m'+n'\,\varepsilon\,q),\forall m^{\text{int}}\exists n^{\text{int}}(m+n\,\varepsilon\,p\wedge m+n\,\varepsilon\,r)$, on déduit :
$\forall m^{\text{int}}\exists n^{\text{int}}((m'+m)+n\,\varepsilon\,p\wedge(m'+m)+n\,\varepsilon\,r)$, puis :
$\forall m^{\text{int}}\exists n^{\text{int}}(m+(m'+n)\,\varepsilon\,q\wedge m+(m'+n)\,\varepsilon\,r)$ puis :
$\forall m^{\text{int}}\exists n^{\text{int}}(m+n\,\varepsilon\,q\wedge m+n\,\varepsilon\,r)$. Par suite :
$\forall n'^{\text{int}}(m'+n'\,\varepsilon\,p\to m'+n'\,\varepsilon\,q)\vdash\mathsf{C}[p{\wedge}r]\to\mathsf{C}[q{\wedge}r]$ et donc :
$\exists m'\forall n'^{\text{int}}(m'+n'\,\varepsilon\,p\to m'+n'\,\varepsilon\,q)\vdash\mathsf{C}[p{\wedge}r]\to\mathsf{C}[q{\wedge}r]$.

C.Q.F.D.

En appliquant RPN et le schéma de compréhension, on obtient :
$\Vdash \forall X \exists h\, D(h,X)$ avec $D(h,X) \equiv \forall k^{\rm int} \forall n^{\rm int}((k,n)\,\varepsilon\, h \leftrightarrow \forall q \forall i^{\rm int}(i \leq n, X(i,q) \to k\,\varepsilon\, q))$.
Le sens intuitif de $D(h,X)$ est : "h est l'individu associé à la suite de conditions X rendue décroissante".

On applique SCN à la formule $F(k,n,h) \equiv (k,n)\,\varepsilon\, h$. On obtient donc :
$\vdash \forall n \forall h \forall k^{\rm int} \forall n(k\,\varepsilon\, g_F(n,h) \leftrightarrow (k,n)\,\varepsilon\, h)$.
On utilisera la notation h_n pour $g_F(n,h)$. On a donc :

$$\vdash \forall n \forall h \forall k^{\rm int}(k\,\varepsilon\, h_n \leftrightarrow (k,n)\,\varepsilon\, h).$$

et par suite :

$$D(h,X) \vdash \forall k^{\rm int} \forall n^{\rm int}(k\,\varepsilon\, h_n \leftrightarrow \forall q \forall i^{\rm int}(i \leq n, X(i,q) \to k\,\varepsilon\, q))$$

On pose $\Phi(k,h,n) \equiv \exists i^{\rm int}\{\forall j^{\rm int}(j+n\,\varepsilon\, h_n \to (j<i) \neq 1),\, i+n\,\varepsilon\, h_n,\, k=i+n\}$.
Le sens intuitif de $\Phi(k,h,n)$ est : " k est le premier élément de h_n qui est $\geq n$ ".
On applique SCN à la formule $F(k,h) \equiv \exists n^{\rm int}\, \Phi(k,h,n)$. On obtient donc :
$\vdash \forall h \forall k^{\rm int}(k\,\varepsilon\, g_F(h) \leftrightarrow \exists n^{\rm int}\, \Phi(k,h,n))$.
On utilisera la notation $\inf(h)$ pour $g_F(h)$. On a donc :

$$\vdash \forall h \forall k^{\rm int}(k\,\varepsilon\, \inf(h) \leftrightarrow \exists n^{\rm int}\, \Phi(k,h,n)).$$

Les hypothèses de la c.c.d. sont :
$H_0[X] \equiv \forall n^{\rm int} \exists p\, X(n,p)$;
$H_1[X] \equiv \forall n^{\rm int} \forall p \forall q(X(n,p), X(n,q) \to p=q)$;
$H_2[X] \equiv \forall n^{\rm int} \forall p \forall q(X(n,p), X(sn,q) \to q \sqsubseteq p)$;
$H_3[X] \equiv \forall n^{\rm int} \forall p(X(n,p) \to \mathsf{C}[p])$.
On pose $\vec{H}[X] \equiv \{H_0[X], H_1[X], H_2[X], H_3[X]\}$ et $\vec{H}_*[X] = \{H_0[X], H_1[X], H_2[X]\}$.
Il suffit donc de montrer :
$D(h,X), \vec{H}_*[X] \vdash \forall n^{\rm int} \forall p(X(n,p) \to \inf(h) \sqsubseteq p)$ et
$D(h,X), \vec{H}[X] \vdash \mathsf{C}[\inf(h)]$.
Notation. La formule $\forall n^{\rm int}(n\,\varepsilon\, p \to n\,\varepsilon\, q)$ est notée $p \subseteq q$.

Lemme 56. *$D(h,X) \vdash \forall m^{int} \forall n^{int}(h_{n+m} \subseteq h_n)$.*

Cette formule s'écrit $\forall m^{\rm int} \forall n^{\rm int} \forall k^{\rm int}(k\,\varepsilon\, h_{n+m} \to k\,\varepsilon\, h_n)$. Or, on a :
$D(h,X) \vdash \forall m^{\rm int} \forall n^{\rm int} \forall k^{\rm int}(k\,\varepsilon\, h_{n+m} \to \forall q \forall i^{\rm int}(i \leq n+m, X(i,q) \to k\,\varepsilon\, q))$;
$\vdash \forall m^{\rm int} \forall n^{\rm int} \forall k^{\rm int}[\forall q \forall i^{\rm int}(i \leq n+m, X(i,q) \to k\,\varepsilon\, q) \to \forall q \forall i^{\rm int}(i \leq n, X(i,q) \to k\,\varepsilon\, q)]$:
$D(h,X) \vdash \forall m^{\rm int} \forall n^{\rm int} \forall k^{\rm int}(\forall q \forall i^{\rm int}(i \leq n, X(i,q) \to k\,\varepsilon\, q) \to k\,\varepsilon\, h_n)$.
C.Q.F.D.

Lemme 57. *$D(h,X), H_0[X], H_1[X] \vdash \forall n^{int} \forall k^{int} \forall p(X(sn,p),\, k\,\varepsilon\, p,\, k\,\varepsilon\, h_n \to k\,\varepsilon\, h_{sn})$.*

On a $D(h,X)$, $\mathrm{int}(k)$, $\mathrm{int}(n) \vdash \forall p \forall i^{\rm int}(i \leq sn, X(i,p) \to k\,\varepsilon\, p) \to k\,\varepsilon\, h_{sn}$.
Or, on a $\mathrm{int}(n)$, $\mathrm{int}(i)$, $i \leq sn \vdash i \leq n \vee i = sn$, et donc :
$\mathrm{int}(n)$, $\forall p \forall i^{\rm int}(i \leq n, X(i,p) \to k\,\varepsilon\, p)$, $\forall p(X(sn,p) \to k\,\varepsilon\, p) \vdash \forall p \forall i^{\rm int}(i \leq sn, X(i,p) \to k\,\varepsilon\, p)$.
Par suite, on a :
$D(h,X)$, $\mathrm{int}(k)$, $\mathrm{int}(n) \vdash \forall p \forall i^{\rm int}(i \leq n, X(i,p) \to k\,\varepsilon\, p), \forall p(X(sn,p) \to k\,\varepsilon\, p) \to k\,\varepsilon\, h_{sn}$, soit :
$D(h,X)$, $\mathrm{int}(k)$, $\mathrm{int}(n) \vdash k\,\varepsilon\, h_n, \forall p(X(sn,p) \to k\,\varepsilon\, p) \to k\,\varepsilon\, h_{sn}$. Par suite :
$D(h,X)$, $\mathrm{int}(k)$, $\mathrm{int}(n), H_0[X], H_1[X] \vdash \forall p(k\,\varepsilon\, h_n, X(sn,p), k\,\varepsilon\, p \to k\,\varepsilon\, h_{sn})$.
C.Q.F.D.

Lemme 58. *$D(h,X), \vec{H}_*[X] \vdash \forall n^{int} \forall p(X(n,p) \to p \sqsubseteq h_n)$.*

Preuve par récurrence sur n. On doit montrer :
$D(h,X), \vec{H}_*[X]$, $\mathrm{int}(n) \vdash \forall p \exists m^{\mathrm{int}} \forall l^{\mathrm{int}} (X(n,p), l+m\,\varepsilon\, p \to l+m\,\varepsilon\, h_n)$.
Pour $n=0$, on a $D(h,X) \vdash \forall k^{\mathrm{int}} (\forall q (X(0,q) \to k\,\varepsilon\, q) \to k\,\varepsilon\, h_0)$. Il suffit donc de montrer :
$D(h,X), \vec{H}_*[X] \vdash \forall p \exists m^{\mathrm{int}} \forall l^{\mathrm{int}} \forall q (X(0,p), l+m\,\varepsilon\, p, X(0,q) \to l+m\,\varepsilon\, q)$,
ce qui découle, en fait, de $H_1[X]$, à savoir $X(0,p), X(0,q) \to p=q$.
L'hypothèse de récurrence est $\forall p (X(n,p) \to p \sqsubseteq h_n)$;
$H_2[X]$ est $\forall p \forall q (X(n,p), X(sn,q) \to q \sqsubseteq p)$; $H_0[X]$ est $\exists p\, X(n,p)$.
Par ailleurs, on a facilement $q \sqsubseteq p, p \sqsubseteq r \vdash q \sqsubseteq r$. On en déduit donc :
$\forall p (X(sn,p) \to p \sqsubseteq h_n)$, soit $\forall p \exists m^{\mathrm{int}} \forall l^{\mathrm{int}} (X(sn,p), l+m\,\varepsilon\, p \to l+m\,\varepsilon\, h_n)$.
Or, on a $D(h,X), H_0[X], H_1[X] \vdash X(sn,p),\ l+m\,\varepsilon\, p,\ l+m\,\varepsilon\, h_n \to l+m\,\varepsilon\, h_{sn}$ par le lemme 57.
On a donc $\forall p \exists m^{\mathrm{int}} \forall l^{\mathrm{int}} (X(sn,p), l+m\,\varepsilon\, p \to l+m\,\varepsilon\, h_{sn})$ c'est-à-dire :
$\forall p (X(sn,p) \to p \sqsubseteq h_{sn})$, ce qui est le résultat voulu.

C.Q.F.D.

Lemme 59. $D(h,X), \vec{H}(X) \vdash \forall n^{int} \mathsf{C}[h_n]$.

On a $\forall n^{\mathrm{int}} \forall p (X(n,p) \to \mathsf{C}[p])$ d'après H_3. Par ailleurs, on a facilement :
$\vdash \forall p \forall q (\mathsf{C}[p], p \sqsubseteq q \to \mathsf{C}[q])$. En appliquant le lemme 58, on obtient donc :
$D(h,X), \vec{H}(X) \vdash \forall n^{\mathrm{int}} \forall p (X(n,p) \to \mathsf{C}[h_n])$. D'où le résultat, en appliquant $H_0[X]$.

C.Q.F.D.

Lemme 60. $D(h,X), \vec{H}[X] \vdash \forall n^{int} \exists k^{int} \Phi(k,h,n)$.

D'après le schéma de fondation (SCF), on a :
$\vdash \forall i^{\mathrm{int}} \{\forall j^{\mathrm{int}} (j+n\,\varepsilon\, h_n \to (j¡i) \neq 1), i+n\,\varepsilon\, h_n \to \perp\} \to \forall i^{\mathrm{int}} (i+n\,\varepsilon\, h_n \to \perp)$.
Or, on a $D(h,X), \vec{H}[X] \vdash \forall n^{\mathrm{int}} \mathsf{C}[h_n]$ (lemme 59), donc $D(h,X), \vec{H}[X] \vdash \forall n^{\mathrm{int}} \exists i^{\mathrm{int}} i+n\,\varepsilon\, h_n$.
On en déduit $D(h,X), \vec{H}[X] \vdash \forall n^{\mathrm{int}} \exists i^{\mathrm{int}} \{\forall j^{\mathrm{int}} (j+n\,\varepsilon\, h_n \to (j¡i) \neq 1), i+n\,\varepsilon\, h_n\}$.

C.Q.F.D.

Lemme 61. $D(h,X), \vec{H}[X] \vdash \mathsf{C}[\inf(h)]$.

On a $\mathsf{C}[\inf(h)] \equiv \forall m^{\mathrm{int}} \exists i^{\mathrm{int}} (i+m\,\varepsilon\, \inf(h))$.
Or, par définition du symbole de fonction inf, on a $\vdash \forall h \forall k^{\mathrm{int}} (k\,\varepsilon\, \inf(h) \leftrightarrow \exists n^{\mathrm{int}} \Phi(k,h,n))$.
Donc $\vdash \mathsf{C}[\inf(h)] \leftrightarrow \forall m^{\mathrm{int}} \exists i^{\mathrm{int}} \exists n^{\mathrm{int}} \Phi(i+m,h,n)$.
Par définition de Φ, on a trivialement $\vdash \forall n^{\mathrm{int}} \forall k^{\mathrm{int}} (\Phi(k,h,n) \to \exists i^{\mathrm{int}} (k=i+n))$.
Par ailleurs, on a $D(h,X), \vec{H}[X] \vdash \forall n^{\mathrm{int}} \exists k^{\mathrm{int}} \Phi(k,h,n)$ (lemme 60).
Donc $D(h,X), \vec{H}[X] \vdash \forall n^{\mathrm{int}} \exists i^{\mathrm{int}}\, \Phi(i+n,h,n)$, d'où $D(h,X), \vec{H}[X] \vdash \mathsf{C}[\inf(h)]$.

C.Q.F.D.

Lemme 62.
$D(h,X), \vec{H}_*[X] \vdash \forall h \forall k^{int} \forall k'^{int} \forall n^{int} \forall n'^{int} (\Phi(k,h,n), \Phi(k',h,n'), k'>k \to n'>n)$.

On a $\Phi(k,h,n) \equiv \exists i^{\mathrm{int}} \vec{\Psi}(k,h,n,i)$, avec :
$\vec{\Psi}(k,h,n,i) \equiv \{\forall j^{\mathrm{int}} (j+n\,\varepsilon\, h_n \to (j¡i) \neq 1),\ i+n\,\varepsilon\, h_n,\ k=i+n\}$.
On doit donc montrer :
$D(h,X), \vec{H}_*[X]$, $\mathrm{int}(k)$, $\mathrm{int}(k')$, $\mathrm{int}(n)$, $\mathrm{int}(n')$, $\mathrm{int}(i)$, $\mathrm{int}(i') \vdash \vec{\Xi}(h,k,n,i,k',n',i') \to \perp$
avec $\vec{\Xi}(h,k,n,i,k',n',i') \equiv \{\vec{\Psi}(k,h,n,i),\ \vec{\Psi}(k',h,n',i'),\ k'>k,\ n' \leq n\}$ c'est-à-dire :
$\vec{\Xi}(h,k,n,i,k',n',i') \equiv$
$\{\forall j^{\mathrm{int}} (j+n\,\varepsilon\, h_n \to (j¡i) \neq 1),\ i+n\,\varepsilon\, h_n,\ k=i+n,$
$\forall j'^{\,\mathrm{int}} (j'+n'\,\varepsilon\, h_{n'} \to (j'¡i') \neq 1),\ i'+n'\,\varepsilon\, h_{n'},\ k'=i'+n',$
$k'>k,\ n' \leq n\}$.

De $n' \le n$ et $k = i + n$, on déduit $n' \le k$, donc $k = j' + n'$.
De $k' > k$, on déduit $i' + n' > k$, et donc $j' < i'$.
On a donc $j' + n' \notin h_{n'}$, soit $k \notin h_{n'}$. Or, de $n' \le n$, on déduit $h_n \subseteq h_{n'}$ (lemme 56), donc $k \notin h_n$, ce qui contredit $i + n \,\varepsilon\, h_n,\ k = i + n$.

C.Q.F.D.

Par définition de Φ, on a trivialement $\vdash \forall n^{\text{int}} \forall k^{\text{int}} (\Phi(k, h, n) \to k \,\varepsilon\, h_n)$.

D'après les lemmes 56 et 62, on en déduit :
$D(h, X), \vec{H}_*[X] \vdash \forall h \forall k^{\text{int}} \forall k'^{\text{int}} \forall n^{\text{int}} \forall n'^{\text{int}} (\Phi(k, h, n), \Phi(k', h, n'), k' > k \to k' \,\varepsilon\, h_n)$.
Le lemme 60 donne $\forall n^{\text{int}} \exists k^{\text{int}} \Phi(k, h, n)$. On en déduit :
$D(h, X), \vec{H}_*[X] \vdash \forall n^{\text{int}} \exists k^{\text{int}} \forall n'^{\,\text{int}} \forall k'^{\,\text{int}} (\Phi(k', h, n'), k' > k \to k' \,\varepsilon\, h_n)$,
et donc $D(h, X), \vec{H}_*[X] \vdash \forall n^{\text{int}} (\inf(h) \sqsubseteq h_n)$.

Or, on a trivialement $D(h, X) \vdash \forall n^{\text{int}} \forall k^{\text{int}} \forall p (k \,\varepsilon\, h_n, X(n, p) \to k \,\varepsilon\, p)$. D'où, finalement :
$D(h, X), \vec{H}_*[X] \vdash \forall n^{\text{int}} \forall p (X(n, p) \to \inf(h) \sqsubseteq p)$.

On a ainsi obtenu la quasi-preuve ccd' cherchée, ce qui termine la preuve du théorème 54.

C.Q.F.D.

L'ultrafiltre

Dans le modèle $\mathcal{N}$, nous avons défini *l'idéal générique* $\mathcal{J}$, qui est un prédicat unaire, en posant : $\mathcal{J}(p) = \Pi \times \{p\}$ pour tout $p \in P$.

D'après le théorème 35, on a :

i) $\Vdash \neg \mathcal{J}(\mathbf{1})$
ii) $\Vdash \forall x (\neg \mathsf{C}[x] \to \mathcal{J}(x))$
iii) $\Vdash \forall x \forall y (\mathcal{J}(x \wedge y) \to \mathcal{J}(x) \vee \mathcal{J}(y))$
iv) $\Vdash \forall x (\forall y (\neg \mathsf{C}[x \wedge y] \to \mathcal{J}(y)) \to \neg \mathcal{J}(x))$
v) $\Vdash \forall x \forall y (\mathcal{J}(x), y \sqsubseteq x \to \mathcal{J}(y))$

D'après le théorème 33, on a $\ \Vdash F \Leftrightarrow\ \Vdash F$ pour toute formule close F du premier ordre.

Remarque. Une formule "du premier ordre" comporte des quantificateurs sur les individus qui, à l'aide du symbole ε, représentent les parties de $\mathbb{N}$.C'est donc une formule du second ordre du point de vue de l'arithmétique. Mais elle ne comporte pas de quantificateur sur les ensembles d'individus.

D'après les théorèmes 15 et 30, on peut utiliser, dans F, le quantificateur $\forall x^{\text{int}}$, puisque le quantificateur $\forall x^{\text{ent}}$ est du premier ordre.

On a donc :

vi) $\Vdash \mathsf{C}[x] \leftrightarrow \forall m^{\text{int}} \exists n^{\text{int}} (m + n \,\varepsilon\, x)$
vii) $\Vdash y \sqsubseteq x \leftrightarrow \exists m^{\text{int}} \forall n^{\text{int}} (m + n \,\varepsilon\, y \to m + n \,\varepsilon\, x)$
viii) $\Vdash \forall n^{\text{int}} n \,\varepsilon\, \mathbf{1}$; $\Vdash \forall x \forall y \forall n^{\text{int}} (n \,\varepsilon\, x \wedge y \leftrightarrow n \,\varepsilon\, x \wedge n \,\varepsilon\, y)$

puisque les formules considérées sont du premier ordre. Les propriétés (i) à (viii) montrent que, dans le $\mathcal{B}$-modèle $\mathcal{N}$, la formule suivante est réalisée :
$\mathcal{J}$ est un idéal maximal non trivial sur l'algèbre de Boole des parties de $\mathbb{N}$ *qui sont représentées par des individus.*

Or, d'après les théorèmes 40 et 54, la formule suivante est réalisée dans $\mathcal{N}$:
Toute partie de $\mathbb{N}$ *est représentée par un individu.*

La formule suivante est donc réalisée dans $\mathcal{N}$:
$\mathcal{J}$ est un idéal maximal non trivial sur l'algèbre de Boole des parties de $\mathbb{N}$.

Programmes obtenus à partir de preuves

Soit F une formule de *l'arithmétique du second ordre*, c'est-à-dire une formule du second ordre dont tous les quantificateurs d'individu sont restreints à $\mathbb{N}$ et tous les quantificateurs du second ordre sont restreints à $\mathcal{P}(\mathbb{N})$.
On lui associe une formule $F^\dagger$ *du premier ordre*, définie par récurrence sur F :
- Si F est $t = u$, $F^\dagger \equiv F$.
- Si F est Xt, $F^\dagger$ est $t \,\varepsilon\, X^-$, où X^- est une variable *d'individu* associée à la variable de prédicat unaire X.
- Si F est $A \to B$, $F^\dagger$ est $A^\dagger \to B^\dagger$.
- Si F est $\forall x\, A$, $F^\dagger$ est $\forall x^{\mathrm{int}}\, A^\dagger$.
- Si F est $\forall X\, A$, $F^\dagger$ est $\forall X^-\, A^\dagger$.

On note que, si F est une formule de *l'arithmétique du premier ordre*, alors $F^\dagger$ est simplement la restriction F^{int} de F au prédicat $\mathrm{int}(x)$.

Soit F une formule close de l'arithmétique du second ordre et considérons une preuve de F à l'aide de l'axiome du choix dépendant ACD et l'axiome AU de l'ultrafiltre sur $\mathbb{N}$, énoncé sous la forme : "$\mathcal{J}$ est un idéal maximal non trivial sur $\mathcal{P}(\mathbb{N})$".
On en déduit immédiatement une preuve de $F^\dagger$ en ajoutant l'axiome RPN de représentation des prédicats sur $\mathbb{N}$: $\forall X \exists x \forall y (y \,\varepsilon\, x \leftrightarrow Xy)$. On obtient donc :
x : AU, y : RPN, z : ACD$^\dagger \vdash t[x, y, z] : F^\dagger$.
On a donc $\vdash u :$ AU, RPN $\to G$ avec $u = \lambda x \lambda y \lambda z\, t[x, y, z]$ et $G \equiv \mathrm{ACD}^\dagger \to F^\dagger$.
G est donc une *formule du premier ordre.*
Dans la section précédente, on a obtenu des quasi-preuve θ, θ' telles que $(\theta, \mathbf{1}) \Vdash\!\!\vdash AU$ et $(\theta', \mathbf{1}) \Vdash\!\!\vdash$ RPN (théorèmes 40 et 54).
Le théorème 28 (lemme d'adéquation) donne donc $(u^*, \mathbf{1}_u)(\theta, \mathbf{1})(\theta', \mathbf{1}) \Vdash\!\!\vdash G$, c'est-à-dire :
$(v, (\mathbf{1}_u {\wedge} \mathbf{1}){\wedge}\mathbf{1}) \Vdash\!\!\vdash G$ avec $v = ((\overline{\alpha}_0)(\overline{\alpha}_0)u^*\theta)\theta'$.
D'après le théorème 33, on a donc $\delta'_G v \Vdash \mathsf{C}[(\mathbf{1}_u {\wedge} \mathbf{1}){\wedge}\mathbf{1}] \to G$, c'est-à-dire :
$\delta'_G v \Vdash \mathsf{C}[(\mathbf{1}_u {\wedge} \mathbf{1}){\wedge}\mathbf{1}]$, ACD$^\dagger \to F$.
L'axiome ACD† est conséquence de ACI (axiome du choix pour les individus). D'après le théorème 18, on a donc une quasi-preuve $\eta_0 \Vdash$ ACD†.
Par ailleurs, on a évidemment une quasi-preuve $\xi_0 \Vdash \mathsf{C}[(\mathbf{1}_u {\wedge} \mathbf{1}){\wedge}\mathbf{1}]$.
On a donc finalement $\delta'_G v \xi_0 \eta_0 \Vdash F$.
On peut alors appliquer au programme $\zeta = \delta'_G v \xi_0 \eta_0$ tous les résultats obtenus dans le cadre de la réalisabilité usuelle. Le cas où F est une formule arithmétique (resp. Π^1_1) est étudié dans [12] (resp. [13]).
Pour prendre deux exemples très simples :

Si $F \equiv \forall X (X1, X0 \to X1)$, on a $\zeta \star \kappa \,.\, \kappa' \,.\, \pi \succ \kappa \star \pi$ quels que soient les termes $\kappa, \kappa' \in \Lambda$ et la pile $\pi \in \Pi$.

Si $F \equiv \forall m^{\mathrm{int}} \exists n^{\mathrm{int}} (\phi(m, n) = 0)$, où ϕ est un symbole de fonction, alors pour tout $m \in \mathbb{N}$, il existe $n \in \mathbb{N}$ tel que $\phi(m, n) = 0$ et $\zeta \star \underline{m} \,.\, T\kappa \,.\, \pi \succ \kappa \star \underline{n} \,.\, \pi'$.
T est la quasi-preuve de mise en mémoire des entiers donnée au théorème 15(i).
π, κ sont quelconques ; en prenant pour κ une constante, on obtient donc un programme de calcul de n en fonction de m.

Bon ordre sur $\mathbb{R}$

Le $\mathcal{A}$-modèle $\mathcal{M}$ est le même que dans la section précédente : l'ensemble d'individus est $P = \mathcal{P}(\Pi)^{\mathbb{N}}$. Rappelons qu'un élément de P est appelé tantôt *individu*, tantôt *condition*, suivant le contexte.

On pose $(m,n) = m + (m+n)(m+n+1)/2$ (bijection de $\mathbb{N}^2$ sur $\mathbb{N}$). On définit une fonction binaire $\phi : P^2 \to P$ en posant :
$\phi(n,p)(i) = p(i,n)$ si $n \in \mathbb{N}$; $\phi(n,p)$ est arbitraire (par exemple 0) si $n \notin \mathbb{N}$.

Notation. Dans la suite, on écrira p_n au lieu de $\phi(n,p)$. La donnée d'un individu p est donc équivalente à celle d'une suite d'individus $p_n (n \in \mathbb{N})$. Si $i,n \in \mathbb{N}$, on a $\|(i,n)\,\varepsilon\, p\| = \|i\,\varepsilon\, p_n\|$.

On fixe un bon ordre strict $\triangleleft$ sur $P = \mathcal{P}(\Pi)^{\mathbb{N}}$, isomorphe au cardinal $2^{\aleph_0}$: tout segment initial propre de $\triangleleft$ est donc de cardinal $< 2^{\aleph_0}$. On définit une fonction binaire, notée $(p \triangleleft q)$ en posant $(p \triangleleft q) = 1$ si $p \triangleleft q$; $(p \triangleleft q) = 0$ sinon.
Comme la relation $(p \triangleleft q) = 1$ est bien fondée sur P, on a (théorème 13) :
$\mathsf{Y} \Vdash \forall X[\forall x(\forall y((y \triangleleft x) = 1 \mapsto Xy) \to Xx) \to \forall x\, Xx]$
dans le $\mathcal{A}$-modèle $\mathcal{M}$, mais aussi dans tout $\mathcal{B}$-modèle $\mathcal{N}$.
On écrira, en abrégé, $y \triangleleft x$ pour $(y \triangleleft x) = 1$.
Dans $\mathcal{M}$ et $\mathcal{N}$, la relation $\triangleleft$ est donc bien fondée mais, en général, pas totale.
C'est une relation d'ordre strict, dans ces deux modèles, car on a immédiatement, dans le modèle $\mathcal{M}$: $I \Vdash \forall x((x \triangleleft x) \neq 1)$; $I \Vdash \forall x \forall y \forall z((x \triangleleft y) = 1 \mapsto ((y \triangleleft z) = 1 \mapsto (x \triangleleft z) = 1))$.
Comme il s'agit de formules du premier ordre, d'après le théorème 33, on a aussi, dans le modèle $\mathcal{N}$: $\Vvdash \forall x((x \triangleleft x) \neq 1)$; $\Vvdash \forall x \forall y \forall z((x \triangleleft y) = 1 \mapsto ((y \triangleleft z) = 1 \mapsto (x \triangleleft z) = 1))$.

Une condition $p \in P$ est aussi une suite d'individus p_k. On va la considérer intuitivement comme “ l'ensemble des individus p_{k+1} pour $k\,\varepsilon\, p_0$ ” ; cela pour définir la condition $\mathbf{1}$, la formule $\mathsf{C}[p]$ qui exprime que p est une condition non triviale, et l'opération binaire $\wedge$.

$\mathbf{1}$ est l'ensemble vide, autrement dit $i\,\varepsilon\, \mathbf{1}_0$ (c'est-à-dire $(i,0)\,\varepsilon\, \mathbf{1}$) doit être faux. On pose donc : $\mathbf{1}(n) = \Pi$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Une condition est non triviale si l'ensemble d'individus qui lui est associé est totalement ordonné par $\triangleleft$. On pose donc :
$\mathsf{C}[p] \equiv \forall i^{\mathrm{ent}} \forall j^{\mathrm{ent}}(i\,\varepsilon\, p_0, j\,\varepsilon\, p_0 \to E[p_{i+1}, p_{j+1}])$ avec :
$E[x,y] \equiv (x = y \vee x \triangleleft y \vee y \triangleleft x)$ c'est-à-dire $E[x,y] \equiv (x \neq y, (x \triangleleft y) \neq 1, (y \triangleleft x) \neq 1 \to \bot)$.

L'ensemble associé à $p \wedge q$ est la réunion des ensembles associés à p et à q ; on pose donc :
$p \wedge q = r$ où r_0 est défini par : $\|2i\,\varepsilon\, r_0\| = \|i\,\varepsilon\, p_0\|$; $\|2i+1\,\varepsilon\, r_0\| = \|i\,\varepsilon\, q_0\|$;
r_{j+1} est défini par : $r_{2i+1} = p_{i+1}$; $r_{2i+2} = q_{i+1}$.
La notation $p \subset q$ signifie que l'ensemble associé à q contient celui associé à p.
On pose donc :
$p \subset q \equiv \forall i^{\mathrm{ent}}(i\,\varepsilon\, p_0 \to \exists j^{\mathrm{ent}}\{j\,\varepsilon\, q_0, p_{i+1} = q_{j+1}\})$.

Lemme 63.
i) $\theta \Vdash \forall p \forall q \forall r(p \subset q, q \subset r \to p \subset r)$ *avec* $\theta = \lambda f \lambda g \lambda i \lambda x \lambda h(fix)\lambda j \lambda y(g)jyh$.
ii) $\theta' \Vdash \forall p \forall q \forall r(p \subset q \to p \wedge r \subset q \wedge r)$ *avec* $\theta' = \lambda f \lambda i \lambda y \lambda u((ei)(u)iy)(((f)(d_2)iy)\lambda j(u)(d_0)j$
où d_0, d_1, d_2, e *sont des quasi-preuves représentant respectivement les fonctions récursives :* $n \mapsto 2n$, $n \mapsto 2n+1$, $n \mapsto [n/2]$, $n \mapsto$ *parité de* n *(*e *est à valeurs booléennes).*

i) On suppose :
$f \Vdash \forall i(\mathrm{ent}(i), i\,\varepsilon\, p_0, \forall j(\mathrm{ent}(j), j\,\varepsilon\, q_0 \to p_{i+1} \neq q_{j+1}) \to \bot)$;
$g \Vdash \forall j(\mathrm{ent}(j), j\,\varepsilon\, q_0, \forall k(\mathrm{ent}(k), k\,\varepsilon\, r_0 \to q_{j+1} \neq r_{k+1}) \to \bot)$;

$x \Vdash i\,\varepsilon\,p_0$; $h \Vdash \forall k(\mathrm{ent}(k), k\,\varepsilon\,r_0 \to p_{i+1} \neq r_{k+1})$; et on a $\underline{i} \in |\mathrm{ent}(i)|$.
D'où $f\underline{i}x \Vdash \forall j(\mathrm{ent}(j), j\,\varepsilon\,q_0 \to p_{i+1} \neq q_{j+1}) \to \bot$.
Supposons $y \Vdash j\,\varepsilon\,q_0$ et soit $\underline{j} \in |\mathrm{ent}(j)|$.

Si $p_{i+1} = q_{j+1}$, alors $g\underline{j}yh \Vdash \bot$; donc $g\underline{j}yh \Vdash p_{i+1} \neq q_{j+1}$. On a montré :
$\lambda j\lambda y(g)jyh \Vdash \forall j(\mathrm{ent}(j), j\,\varepsilon\,q_0 \to p_{i+1} \neq q_{j+1})$. Donc $(f\underline{i}x)\lambda j\lambda y(g)jyh \Vdash \bot$.

ii) On suppose :
$f \Vdash \forall i(\mathrm{ent}(i), i\,\varepsilon\,p_0, \forall j(\mathrm{ent}(j), j\,\varepsilon\,q_0 \to p_{i+1} \neq q_{j+1}) \to \bot)$;
$y \Vdash i'\,\varepsilon\,(p{\wedge}r)_0$; $u \Vdash \forall j'(\mathrm{ent}(j'), j'\,\varepsilon\,(q{\wedge}r)_0 \to (p{\wedge}r)_{i'+1} \neq (q{\wedge}r)_{j'+1})$.
Si on remplace j' par $2j''$, puis par $2j''+1$, on obtient, d'après la définition de $\wedge$:

(1) $(u)(d_0)\underline{j}'' \Vdash j''\,\varepsilon\,q_0 \to (p{\wedge}r)_{i'+1} \neq q_{j''+1}$;
(2) $(u)(d_1)\underline{j}'' \Vdash j''\,\varepsilon\,r_0 \to (p{\wedge}r)_{i'+1} \neq r_{j''+1}$.

Il y a alors deux cas :

- Si $i' = 2i''$, on a $y \Vdash i''\,\varepsilon\,p_0$ et, d'après (1), $(u)(d_0)\underline{j}'' \Vdash j''\,\varepsilon\,q_0 \to p_{i''+1} \neq q_{j''+1}$. Donc :
$\lambda j(u)(d_0)j \Vdash \forall j(\mathrm{ent}(j), j\,\varepsilon\,q_0 \to p_{i''+1} \neq q_{j+1})$ et, par suite :
$$(((f)(d_2)\underline{i}')y)\lambda j(u)(d_0)j \Vdash \bot.$$
- Si $i' = 2i''+1$, on a $y \Vdash i''\,\varepsilon\,r_0$ et, d'après (2), $(u)(d_1)\underline{j}'' \Vdash j''\,\varepsilon\,r_0 \to r_{i''+1} \neq r_{j''+1}$.
En faisant $j'' = i''$, on obtient $(u)(d_1)\underline{i}'' \Vdash i''\,\varepsilon\,r_0 \to \bot$ et donc :
$$(u)\underline{i}'y \Vdash \bot.$$

On a donc, dans les deux cas : $((e\underline{i}')(u)\underline{i}'y)(((f)(d_2)\underline{i}')y)\lambda j(u)(d_0)j \Vdash \bot$.
C.Q.F.D.

Lemme 64.
i) $\theta \Vdash \forall p\forall q(p \subset q, \mathsf{C}[q] \to \mathsf{C}[p])$ *avec*
$\theta = \lambda f\lambda g\lambda i\lambda i'\lambda x\lambda x'\lambda u\lambda v\lambda w(fi'x')\lambda j'\lambda y'(fix)\lambda j\lambda y(g)jj'yy'uvw.$
ii) $\Vdash \forall p\forall q\forall r(p \subset q, \mathsf{C}[q{\wedge}r] \to \mathsf{C}[p{\wedge}r])$ *autrement dit* $\Vdash \forall p\forall q(p \subset q \to q \sqsubseteq p)$.

i) Soient $f \Vdash p \subset q, g \Vdash \mathsf{C}[q]$, c'est-à-dire :
$f \Vdash \forall i(\mathrm{ent}(i), i\,\varepsilon\,p_0, \forall j(\mathrm{ent}(j), j\,\varepsilon\,q_0 \to p_{i+1} \neq q_{j+1}) \to \bot)$;
$g \Vdash \forall j\forall j'(\mathrm{ent}(j), \mathrm{ent}(j'), j\,\varepsilon\,q_0, j'\,\varepsilon\,q_0 \to E[q_{j+1}, q_{j'+1}])$ avec :
$E[x,y] \equiv (x \neq y, (x \triangleleft y) \neq 1, (y \triangleleft x) \neq 1 \to \bot)$.
Soient $x \Vdash i\,\varepsilon\,p_0, x' \Vdash i'\,\varepsilon\,p_0, u \Vdash p_{i+1} \neq p_{i'+1}, v \Vdash (p_{i+1} \triangleleft p_{i'+1}) \neq 1, w \Vdash (p_{i'+1} \triangleleft p_{i+1}) \neq 1$.
Soient $y \Vdash j\,\varepsilon\,q_0$, $y' \Vdash j'\,\varepsilon\,q_0$.
On a $g\underline{j}\,\underline{j}'yy' \Vdash E[q_{j+1}, q_{j'+1}]$; si $p_{i+1} = q_{j+1}$ et $p_{i'+1} = q_{j'+1}$, alors $g\underline{j}\,\underline{j}'yy' \Vdash E[p_{i+1}, p_{i'+1}]$, donc $g\underline{j}\,\underline{j}'yy'uvw \Vdash \bot$.
On a donc $\lambda j\lambda y(g)jj'yy'uvw \Vdash \mathrm{ent}(j), j\,\varepsilon\,q_0 \to \bot$ si $p_{i+1} = q_{j+1}$ et $p_{i'+1} = q_{j'+1}$.
Par suite, $\lambda j\lambda y(g)jj'yy'uvw \Vdash \forall j(\mathrm{ent}(j), j\,\varepsilon\,q_0 \to p_{i+1} \neq q_{j+1})$ si $p_{i'+1} = q_{j'+1}$, d'où :
$(f\underline{i}x)\lambda j\lambda y(g)jj'yy'uvw \Vdash \bot$ si $p_{i'+1} = q_{j'+1}$, d'où :
$\lambda j'\lambda y'(f\underline{i}x)\lambda j\lambda y(g)jj'yy'uvw \Vdash \forall j'(\mathrm{ent}(j'), j'\,\varepsilon\,q_0 \to p_{i'+1} \neq q_{j'+1})$. Donc :
$(f\underline{i}'x')\lambda j'\lambda y'(f\underline{i}x)\lambda j\lambda y(g)jj'yy'uvw \Vdash \bot$.

ii) Se déduit immédiatement de (i) et $\Vdash \forall p\forall q\forall r(p \subset q \to p{\wedge}r \subset q{\wedge}r)$ (lemme 63).
C.Q.F.D.

Le lemme suivant montre qu'on peut construire l'algèbre $\mathcal{B}$ et le $\mathcal{B}$-modèle $\mathcal{N}$.

Lemme 65. *Il existe six quasi-preuves* $\alpha_0, \alpha_1, \alpha_2, \beta_0, \beta_1, \beta_2$ *telles que :*
$\alpha_0 \Vdash \forall p\forall q\forall r(\mathsf{C}[(p{\wedge}q){\wedge}r] \to \mathsf{C}[p{\wedge}(q{\wedge}r)])$; $\alpha_1 \Vdash \forall p(\mathsf{C}[p] \to \mathsf{C}[p{\wedge}\mathbf{1}])$;
$\alpha_2 \Vdash \forall p\forall q(\mathsf{C}[p{\wedge}q] \to \mathsf{C}[q])$; $\beta_0 \Vdash \forall p(\mathsf{C}[p] \to \mathsf{C}[p{\wedge}p])$; $\beta_1 \Vdash \forall p\forall q(\mathsf{C}[p{\wedge}q] \to \mathsf{C}[q{\wedge}p])$;
$\beta_2 \Vdash \forall p\forall q\forall r\forall s(\mathsf{C}[((p{\wedge}q){\wedge}r){\wedge}s] \to \mathsf{C}[(p{\wedge}(q{\wedge}r)){\wedge}s])$.

On montre seulement le premier cas. D'après le lemme 64(i), il suffit de trouver une quasi-preuve $\theta \Vdash \forall p \forall q \forall r(p \wedge (q \wedge r) \subset (p \wedge q) \wedge r)$. On suppose donc :
$y \Vdash i \,\varepsilon\, (p \wedge (q \wedge r))_0$; $u \Vdash \forall j(\mathrm{ent}(j), j \,\varepsilon\, ((p \wedge q) \wedge r)_0 \to (p \wedge (q \wedge r))_{i+1} \neq ((p \wedge q) \wedge r)_{j+1})$.
Il y a trois cas :
- $i = 2i'$; on a alors $y \Vdash i' \,\varepsilon\, p_0$. On fait $j = 2i = 4i'$, donc $u \Vdash \mathrm{ent}(2i), i' \,\varepsilon\, p_0 \to p_{i'+1} \neq p_{i'+1}$.
On a donc : $(u)(d_0)\underline{i}y \Vdash \perp$.
- $i = 4i' + 1$; on a alors $y \Vdash i' \,\varepsilon\, q_0$. On fait $j = i + 2 = 4i' + 3$, donc :
$u \Vdash \mathrm{ent}(i + 2), i' \,\varepsilon\, q_0 \to q_{i'+1} \neq q_{i'+1}$. On a donc : $((u)(\sigma)^2\underline{i})y \Vdash \perp$.
- $i = 4i' + 3$; on a alors $y \Vdash i' \,\varepsilon\, r_0$. On fait $j = i - 3 = 4i'$, donc :
$u \Vdash \mathrm{ent}(i - 3), i' \,\varepsilon\, r_0 \to r_{i'+1} \neq r_{i'+1}$. On a donc : $((u)(\mathsf{p})^3\underline{i})y \Vdash \perp$
(p est le programme pour le prédécesseur).
On pose donc $\theta = \lambda i \lambda y \lambda u(((e_4 i)(u)(d_0)iy)((u)(\sigma)^2 i)y)((u)(\mathsf{p})^3 i)y$, où e_4 est défini par sa règle d'exécution : $e_4 \star \underline{i} \,.\, \xi \,.\, \eta \,.\, \zeta \,.\, \pi \succ \xi \,.\, \pi$ (resp. $\eta \,.\, \pi$, $\zeta \,.\, \pi$) si $i = 4i'$ (resp. $4i' + 1, 4i' + 3$).

C.Q.F.D.

On montre maintenant le :

Théorème 66.
La structure de forcing $\{\mathsf{C}, \wedge, \mathbf{1}\}$ satisfait la condition de chaîne dénombrable dans $\mathcal{M}$.

Les hypothèses de la c.c.d. sont :
$H_0 \equiv \forall n \exists p\, \mathcal{X}(n, p)$;
$H_1 \equiv \forall n^{\mathrm{ent}} \forall p \forall q\{\mathcal{X}(n, p), \mathcal{X}(n, q) \to p = q\}$;
$H_2 \equiv \forall n^{\mathrm{ent}} \forall p \forall q(\mathcal{X}(n, p), \mathcal{X}(sn, q) \to q \sqsubseteq p)$;
$H_3 \equiv \forall n^{\mathrm{ent}} \forall p(\mathcal{X}(n, p) \to \mathsf{C}[p])$.
Par ailleurs, d'après le théorème 18, on a une fonction binaire $f : P^2 \to P$ telle que :
$\varsigma \Vdash \forall n^{\mathrm{ent}}(\exists p\, \mathcal{X}(n, p) \to \exists k^{\mathrm{ent}} \mathcal{X}(n, f(n, k)))$.
D'après H_0, on peut donc aussi utiliser la formule :
$H'_0 \equiv \forall n^{\mathrm{ent}} \exists k^{\mathrm{ent}}\, \mathcal{X}(n, f(n, k))$.
On pose $\vec{H} = \{H_0, H'_0, H_1, H_2, H_3\}$ et $\vec{H}_* = \{H_0, H'_0, H_1, H_2\}$.

Lemme 67. $\vec{H} \vdash \forall p \forall q \forall m^{ent} \forall n^{ent}(\mathcal{X}(m, p), \mathcal{X}(n, q) \to \mathsf{C}[p \wedge q])$.

On montre $\forall m^{\mathrm{int}} \forall n^{\mathrm{int}}(\mathcal{X}(m, p), \mathcal{X}(m + n, q) \to q \sqsubseteq p)$ par récurrence sur n.
Pour $n = 0$, cela découle de H_1, H_3. Pour le pas de la récurrence, on utilise H_2.
On a donc $\forall p \forall q \forall m^{\mathrm{ent}} \forall n^{\mathrm{ent}}(\mathcal{X}(m, p), \mathcal{X}(n, q) \to p \sqsubseteq q \vee q \sqsubseteq p)$.
De $p \sqsubseteq q$, on déduit $\mathsf{C}[p \wedge p] \to \mathsf{C}[q \wedge p]$, d'où le résultat d'après H_3 et $\mathsf{C}[p] \to \mathsf{C}[p \wedge p]$.

C.Q.F.D.

On définit la limite cherchée h en définissant h_0 et h_{m+1} pour chaque $m \in \mathbb{N}$.
Pour $m = (i, n, k)$ (c'est-à-dire $(i, (n, k))$), on pose $\|m \,\varepsilon\, h_0\| = \|\mathcal{X}(n, f(n, k)) \wedge i \,\varepsilon\, (f(n, k))_0\|$;
puis $h_{m+1} = (f(n, k))_{i+1}$.
Intuitivement, $\mathcal{X}$ définit une suite d'ensembles dénombrables, et h est la réunion de ces ensembles.
- Preuve de $\vec{H}_* \vdash \mathcal{X}(n, p) \to h \sqsubseteq p$.

D'après le lemme 64(ii), il suffit de montrer $\mathcal{X}(n, p) \to p \subset h$, soit :
$\mathcal{X}(n, p), i \,\varepsilon\, p_0, \forall m^{\mathrm{ent}}(m \,\varepsilon\, h_0, \to h_{m+1} \neq p_{i+1}) \to \perp$, pour $n, i \in \mathbb{N}$.
On fixe $k \in \mathbb{N}$ et on pose $m = (i, n, k)$. D'après la définition de h, il suffit de montrer :
$\mathcal{X}(n, p), i \,\varepsilon\, p_0, \forall k^{\mathrm{ent}}(\mathcal{X}(n, f(n, k)), i \,\varepsilon\, (f(n, k))_0, \to (f(n, k))_{i+1} \neq p_{i+1}) \to \perp$.
Or, de $H_1, \mathcal{X}(n, p), \mathcal{X}(n, f(n, k))$, on déduit $f(n, k) = p$ et donc :
$(f(n, k))_0 = p_0$ et $(f(n, k))_{i+1} = p_{i+1}$. On est donc ramené à montrer :

$\mathcal{X}(n,p), i\,\varepsilon\, p_0, \forall k^{\rm ent}(\mathcal{X}(n,f(n,k)), i\,\varepsilon\, p_0 \to p_{i+1} \neq p_{i+1}) \to \bot$.
Or, cette formule se déduit immédiatement de H_0'.

- Preuve de $\vec{H} \vdash \mathsf{C}[h]$.

On doit montrer $\mathsf{C}[h]$, soit $m\,\varepsilon\, h_0, m'\,\varepsilon\, h_0 \to E[h_{m+1}, h_{m'+1}]$. Or, on a :
$m = (i,n,k)$; $\|m\,\varepsilon\, h_0\| = \|\mathcal{X}(n,f(n,k)) \wedge i\,\varepsilon\,(f(n,k))_0\|$; $h_{m+1} = (f(n,k))_{i+1}$;
$m' = (i',n',k')$; $\|m'\,\varepsilon\, h_0\| = \|\mathcal{X}(n',f(n',k')) \wedge i'\,\varepsilon\,(f(n',k'))_0\|$; $h_{m'+1} = (f(n',k'))_{i'+1}$.
De $\mathcal{X}(n,f(n,k)), \mathcal{X}(n',f(n',k'))$, on déduit $\mathsf{C}[u]$ avec $u = f(n,k) \wedge f(n',k')$ (lemme 67).
On a donc :
$\|i\,\varepsilon\,(f(n,k))_0\| = \|2i\,\varepsilon\, u\|$; $\|i'\,\varepsilon\,(f(n',k'))_0\| = \|2i'+1\,\varepsilon\, u\|$; $h_{m+1} = u_{2i+1}$; $h_{m'+1} = u_{2i'+2}$.
De $\mathsf{C}[u]$, on déduit $E[u_{2i+1}, u_{2i'+2}]$, c'est-à-dire $E[h_{m+1}, h_{m'+1}]$.

Cela termine la preuve du théorème 66.

C.Q.F.D.

Le bon ordre sur $\mathcal{P}(\mathbb{N})$

Dans le modèle $\mathcal{N}$, on définit le prédicat unaire $\mathcal{G}(x) \equiv \exists p \exists i^{\rm ent}\{\neg\mathcal{J}(p), i\,\varepsilon\, p_0, x = p_{i+1}\}$.

Lemme 68. $\Vdash \mathcal{G}(x), \mathcal{G}(y) \to E[x,y]$.

On doit montrer $\Vdash \neg\mathcal{J}(p), \neg\mathcal{J}(q), i\,\varepsilon\, p_0, x = p_{i+1}, j\,\varepsilon\, q_0, y = q_{j+1} \to E[x,y]$, soit :
$\Vdash \neg\mathcal{J}(p), \neg\mathcal{J}(q), i\,\varepsilon\, p_0, j\,\varepsilon\, q_0 \to E[p_{i+1}, q_{j+1}]$.
D'après le théorème 35(ii) et (iii), on a $\Vdash \neg\mathcal{J}(p), \neg\mathcal{J}(q) \to \mathsf{C}[p \wedge q]$.
Il suffit donc de montrer $\Vdash \mathsf{C}[p\wedge q], i\,\varepsilon\, p_0, j\,\varepsilon\, q_0 \to E[p_{i+1}, q_{j+1}]$.
On montre ci-dessous qu'on a $I \Vdash \mathsf{C}[p\wedge q], i\,\varepsilon\, p_0, j\,\varepsilon\, q_0 \to E[p_{i+1}, q_{j+1}]$. Comme c'est une formule du premier ordre, cela donne le résultat voulu, d'après le théorème 33.
On a, en effet : $p_{i+1} = (p\wedge q)_{2i+1}$; $q_{j+1} = (p\wedge q)_{2j+2}$;
$\|i\,\varepsilon\, p_0\| = \|2i\,\varepsilon\,(p\wedge q)_0\|$; $\|j\,\varepsilon\, q_0\| = \|2j+1\,\varepsilon\,(p\wedge q)_0\|$.
On est donc ramené à montrer :
$I \Vdash \mathsf{C}[p\wedge q], 2i\,\varepsilon\,(p\wedge q)_0, 2j+1\,\varepsilon\,(p\wedge q)_0 \to E[(p\wedge q)_{2i+1}, (p\wedge q)_{2j+2}]$
ce qui est évident, par définition de $\mathsf{C}[p\wedge q]$.

C.Q.F.D.

Le lemme 68 montre que $\triangleleft$ est une relation *totale* sur $\mathcal{G}$. Mais, par ailleurs, dans $\mathcal{N}$, $\triangleleft$ est une relation bien fondée. On a donc :

$$\Vdash \mathcal{G} \text{ est } \textit{bien ordonné} \text{ par } \triangleleft.$$

On définit maintenant deux fonctions sur P :

- une fonction unaire $\delta : P \to P$ en posant $\|i\,\varepsilon\,\delta(p)_0\| = \|i+1\,\varepsilon\, p_0\|$; $\delta(p)_{i+1} = p_{i+2}$.
- une fonction binaire $\phi : P^2 \to P$ en posant $\|0\,\varepsilon\,\phi(p,q)_0\| = \emptyset$; $\|i+1\,\varepsilon\,\phi(p,q)_0\| = \|i\,\varepsilon\, p_0\|$;

$\phi(p,q)_1 = q$; $\phi(p,q)_{i+2} = p_{i+1}$ pour tout $i \in \mathbb{N}$.
On a donc $\delta(\phi(p,q)) = p$ et $\phi(p,q)_1 = q$ quels que soient $p, q \in P$ et par suite :
$I \Vdash \forall p \forall q(\delta(\phi(p,q)) = p)$; $\mathbf{I} \Vdash \forall p \forall q(\delta(\phi(p,q)) = p)$;
$I \Vdash \forall p \forall q(\phi(p,q)_1 = q)$; $\mathbf{I} \Vdash \forall p \forall q(\phi(p,q)_1 = q)$.
Intuitivement, $\delta(p)$ définit l'ensemble obtenu en ôtant p_1 de l'ensemble associé à p ;
$\phi(p,q)$ définit l'ensemble obtenu en ajoutant q à l'ensemble associé à p.

Lemme 69. *Si $p, q \in P$, il existe $q' \in P$ tel que $\delta(q') = q$ et $p_i \triangleleft q'$ pour tout $i \in \mathbb{N}$.*

Pour chaque $a \in P$, on a $\delta(\phi(q,a)) = q$. Mais l'application $a \mapsto \phi(q,a)$ est évidemment injective, puisque $\phi(q,a)_1 = a$. Donc l'ensemble $\{\phi(q,a);\ a \in P\}$ est de cardinal $2^{\aleph_0}$. Or, par hypothèse sur $\triangleleft$, tout segment initial propre de P, pour le bon ordre $\triangleleft$, est de cardinal $< 2^{\aleph_0}$. Il existe donc $a_0 \in P$ tel que $p_i \triangleleft \phi(q, a_0)$ pour tout $i \in \mathbb{N}$. Il suffit alors de poser $q' = \phi(q, a_0)$.

C.Q.F.D.

On peut donc définir une fonction binaire $\psi : P^2 \to P$ telle que l'on ait :
$\delta(\psi(p, q)) = q$ et $(p_i \triangleleft \psi(p, q)) = 1$ quels que soient $p, q \in P$ et $i \in \mathbb{N}$. On a donc :
$I \Vdash \forall p \forall q(\delta(\psi(p, q)) = q)$; $\mathbf{I} \,|\!\!\Vdash \forall p \forall q(\delta(\psi(p, q)) = q)$.
$KI \Vdash \forall p \forall q \forall i^{\text{ent}}(p_i \triangleleft \psi(p, q))$; $\mathbf{KI} \,|\!\!\Vdash \forall p \forall q \forall i^{\text{ent}}(p_i \triangleleft \psi(p, q))$.

Lemme 70. *On a* $|\!\!\Vdash \forall q \exists x\{\mathcal{G}(x), \delta(x) = q\}$.

Ceci s'écrit $|\!\!\Vdash \forall q[\forall x \forall p \forall i^{\text{ent}}(\delta(x) = q,\, i \,\varepsilon\, p_0,\, x = p_{i+1} \to \mathcal{J}(p)) \to \bot]$ ou encore :
$|\!\!\Vdash \forall q[\forall p \forall i^{\text{ent}}(i \,\varepsilon\, p_0,\, \delta(p_{i+1}) = q \to \mathcal{J}(p)) \to \bot]$.
En faisant $i = 0$, il suffit de montrer :
(1) $|\!\!\Vdash \forall q[\forall p(0 \,\varepsilon\, p_0, \delta(p_1) = q \to \mathcal{J}(p)) \to \bot]$.
En remplaçant p par $\phi(p, \psi(p, q))$ dans (1), on voit qu'il suffit de montrer :

$$|\!\!\Vdash \forall q \neg \forall p\, \mathcal{J}(\phi(p, \psi(p, q))).$$

Lemme 71. $\Vdash \forall p \forall q(\mathsf{C}[p] \to \mathsf{C}[\phi(p, \psi(p, q))])$.

On a $\mathsf{C}[r] \equiv \forall i^{\text{ent}} \forall j^{\text{ent}}(i \,\varepsilon\, r_0, j \,\varepsilon\, r_0 \to E[r_{i+1}, r_{j+1}])$. Donc, pour montrer $\Vdash \mathsf{C}[p] \to \mathsf{C}[r]$, il suffit de montrer :
(1) $\Vdash \mathsf{C}[p] \to \forall i^{\text{ent}} \forall j^{\text{ent}}(i + 1 \,\varepsilon\, r_0, j + 1 \,\varepsilon\, r_0 \to E[r_{i+2}, r_{j+2}])$ et
(2) $\Vdash \mathsf{C}[p] \to \forall j^{\text{ent}}(0 \,\varepsilon\, r_0, j + 1 \,\varepsilon\, r_0 \to E[r_1, r_{j+2}])$.
On applique cette remarque en posant $r = \phi(p, \psi(p, q))$. Alors (1) s'écrit $\Vdash \mathsf{C}[p] \to \mathsf{C}[p]$ puisque $\|i + 1 \,\varepsilon\, r_0\| = \|i \,\varepsilon\, p_0\|$ et $r_{i+2} = p_{i+1}$ et de même pour j.
Il suffit donc de montrer (2), c'est-à-dire :
$\Vdash \mathsf{C}[p] \to \forall j^{\text{ent}}(0 \,\varepsilon\, \phi(p, \psi(p, q))_0, j + 1 \,\varepsilon\, \phi(p, \psi(p, q))_0 \to E[\phi(p, \psi(p, q))_1, \phi(p, \psi(p, q))_{j+2}])$.
Or, on a $I \Vdash \forall p \forall q(0 \,\varepsilon\, \phi(p, q)_0)$; $I \Vdash \forall p \forall q(j \,\varepsilon\, p_0 \to j + 1 \,\varepsilon\, \phi(p, \psi(p, q))_0)$;
$I \Vdash \forall p \forall q(\phi(p, \psi(p, q))_1 = \psi(p, q))$; $I \Vdash \forall p \forall q(\phi(p, \psi(p, q))_{j+2} = p_{j+1})$.
Il suffit donc de montrer :
$\Vdash \mathsf{C}[p] \to \forall j^{\text{ent}}(j \,\varepsilon\, p_0 \to E[\psi(p, q), p_{j+1}])$
ce qui est trivial, puisqu'on a $KI \Vdash \forall p \forall q \forall j^{\text{ent}}(p_{j+1} \triangleleft \psi(p, q))$.

C.Q.F.D.

Lemme 72. $\lambda i \lambda x \lambda y((y)(\sigma)i)x \Vdash \forall p \forall q(p \subset \phi(p, q))$.

Ceci s'écrit :
$\lambda i \lambda x \lambda y((y)(\sigma)i)x \Vdash \forall i(\text{ent}(i), i \,\varepsilon\, p_0, \forall j(\text{ent}(j), j \,\varepsilon\, \phi(p, q)_0 \to \phi(p, q)_{j+1} \neq p_{i+1}) \to \bot)$
ce qui est immédiat, en faisant $j = i + 1$.

C.Q.F.D.

On a $\Vdash p \subset \phi(p, \psi(p, q))$ (lemme 72), d'où on déduit $\Vdash \phi(p, \psi(p, q)) \sqsubseteq p$ (lemme 64ii), et donc $\Vdash \mathsf{C}[\phi(p, \psi(p, q))] \to \mathsf{C}[p \wedge \phi(p, \psi(p, q))]$. D'après le lemme 71, on a donc :
$\Vdash \forall p \forall q(\mathsf{C}[p] \to \mathsf{C}[p \wedge \phi(p, \psi(p, q))])$. Comme il s'agit d'une formule du premier ordre, on a, d'après le théorème 33 : $|\!\!\Vdash \forall p \forall q(\mathsf{C}[p] \to \mathsf{C}[p \wedge \phi(p, \psi(p, q))])$
et donc, d'après le théorème 35(ii) : $|\!\!\Vdash \forall p \forall q(\neg \mathsf{C}[p \wedge \phi(p, \psi(p, q))] \to \mathcal{J}(p))$.
On applique alors le théorème 36 qui donne : $|\!\!\Vdash \forall q \neg \forall p\, \mathcal{J}(\phi(p, \psi(p, q)))$
ce qui est le résultat cherché.

C.Q.F.D.

Théorème 73. *Les formules suivantes sont réalisées dans $\mathcal{N}$:*
i) Il existe un bon ordre sur l'ensemble des individus.
ii) Il existe un bon ordre sur l'ensemble des parties de $\mathbb{N}$.

i) Le lemme 70 montre que, dans $\mathcal{N}$, la fonction δ est une surjection de $\mathcal{G}$ sur l'ensemble P des individus. Or, on a vu que la formule : " $\mathcal{G}$ est bien ordonné par $\triangleleft$ " est réalisée dans $\mathcal{N}$.
ii) D'après les théorèmes 40 et 66, la formule suivante est réalisée dans $\mathcal{N}$: " Toute partie de $\mathbb{N}$ est représentée par un individu ". D'où le résultat, d'après (i).

C.Q.F.D.

Le théorème 73(ii) permet de transformer en programme n'importe quelle preuve d'une formule de l'arithmétique du second ordre, utilisant l'existence d'un bon ordre sur $\mathbb{R}$. La méthode est la même que celle exposée ci-dessus pour l'axiome de l'ultrafiltre.

Références

[1] S. Berardi, M. Bezem, T. Coquand. *On the computational content of the axiom of choice.* J. Symb. Log. 63 (1998), p. 600-622.

[2] H.B. Curry, R. Feys. *Combinatory Logic.* North-Holland (1958).

[3] W. Easton. *Powers of regular cardinals.* Ann. Math. Logic 1 (1970), p. 139-178.

[4] J.Y. Girard. *Une extension de l'interprétation fonctionnelle de Gödel à l'analyse.* Proc. 2nd Scand. Log. Symp. (North-Holland) (1971) p. 63-92.

[5] T. Griffin. *A formulæ-as-type notion of control.* Conf. record 17th A.C.M. Symp. on Principles of Progr. Languages (1990).

[6] S. Grigorieff. *Combinatorics on ideals and forcing.* Ann. Math. Logic 3(4) (1971), p. 363-394.

[7] W. Howard. *The formulas–as–types notion of construction.* Essays on combinatory logic, λ-calculus, and formalism, J.P. Seldin and J.R. Hindley ed., Acad. Press (1980) p. 479–490.

[8] G. Kreisel. *On the interpretation of non-finitist proofs I.* J. Symb. Log. 16 (1951) p. 248-26.

[9] G. Kreisel. *On the interpretation of non-finitist proofs II.* J. Symb. Log. 17 (1952), p. 43-58.

[10] J.-L. Krivine. *Typed lambda-calculus in classical Zermelo-Fraenkel set theory.* Arch. Math. Log., 40, 3, p. 189-205 (2001).
http ://www.pps.jussieu.fr/ krivine/articles/zf_epsi.pdf

[11] J.-L. Krivine. *Dependent choice, 'quote' and the clock.* Th. Comp. Sc., 308, p. 259-276 (2003).
http ://hal.archives-ouvertes.fr/hal-00154478
http ://www.pps.jussieu.fr/ krivine/articles/quote.pdf

[12] J.-L. Krivine. *Realizability in classical logic.* A paraître dans Panoramas et synthèses, Société Mathématique de France.
http ://hal.archives-ouvertes.fr/hal-00154500
Version mise à jour à :
http ://www.pps.jussieu.fr/ krivine/articles/Luminy04.pdf

[13] J.-L. Krivine. *Realizability : a machine for Analysis and set theory.*
Geocal'06 (février 2006 - Marseille) ; Mathlogaps'07 (juin 2007 - Aussois).
http ://cel.archives-ouvertes.fr/cel-00154509
Version mise à jour à :
http ://www.pps.jussieu.fr/ krivine/articles/Mathlog07.pdf

[14] J.-L. Krivine. *Structures de réalisabilité, RAM et ultrafiltre sur* $\mathbb{N}$. (2008)
http ://hal.archives-ouvertes.fr/hal-00321410
http ://www.pps.jussieu.fr/ krivine/articles/Ultrafiltre.pdf