

# Diagnostic des systèmes non linéaires par une approche multimodèle

Rodolfo ORJUELA<sup>1</sup>, Benoît MARX<sup>2</sup>, José RAGOT<sup>2</sup>, Didier MAQUIN<sup>2</sup>

<sup>1</sup> Laboratoire Modélisation Intelligence Processus Systèmes, MIPS  
EA 2332, Université de Haute-Alsace  
12 rue des frères Lumière, F-68093 Mulhouse Cedex, France  
[rodolfo.orjuela@uha.fr](mailto:rodolfo.orjuela@uha.fr)

<sup>2</sup> Centre de Recherche en Automatique de Nancy, CRAN  
UMR 7039, Nancy-Université, CNRS  
2 avenue de la forêt de Haye, F-54516 Vandœuvre, France  
[benoit.marx@cran.uhp-nancy.fr](mailto:benoit.marx@cran.uhp-nancy.fr), [jose.ragot@cran.uhp-nancy.fr](mailto:jose.ragot@cran.uhp-nancy.fr), [didier.maquin@ensem.inpl-nancy.fr](mailto:didier.maquin@ensem.inpl-nancy.fr)

**Résumé**—Cet article propose deux stratégies de diagnostic à base d'observateurs pour des systèmes non linéaires représentés par une classe particulière de multimodèle nommée *multimodèle découplé*. Dans un premier temps, la structure du multimodèle découplé est présentée puis mise à profit afin de concevoir deux sortes d'observateurs. La première, dite à gain proportionnel (P), permet d'effectuer une estimation de l'état du système alors que la deuxième, dite à gain proportionnel-intégral (PI), rend possible l'estimation simultanée de l'état et des entrées inconnues agissant sur le système (p. ex. un défaut). La convergence de l'erreur d'estimation des deux observateurs est étudiée à l'aide de la méthode de Lyapunov. Dans un deuxième temps, les observateurs P et PI sont exploités en vue de générer des indicateurs de défauts permettant d'accomplir les tâches de détection, de localisation et éventuellement d'estimation des défauts de capteur. Ces stratégies de diagnostic sont illustrées en considérant le modèle simplifié d'un bioréacteur, un procédé de nature non linéaire largement répandu dans l'industrie chimique.

**Mots-clés**— estimation d'état, entrées inconnues, diagnostic, système non linéaire, multimodèle

## I. INTRODUCTION

La conduite de systèmes de plus en plus complexes nécessite l'intégration de *modules de surveillance et de diagnostic* permettant de générer des symptômes de défaillance du système en vue, par exemple, d'alerter l'opérateur en cas de dysfonctionnement et de garantir ainsi sa sécurité et l'intégrité du système [5], [14].

Dans un contexte de diagnostic, l'estimation de l'état d'un système constitue une phase intermédiaire qui permet de fournir une estimation des variables caractéristiques du système (p. ex. ses sorties) engendrant ainsi une certaine forme de *redondance analytique* [5], [14]. Le diagnostic du système est opéré en testant la cohérence entre les signaux de sortie mesurés et les signaux de sortie estimés à l'aide de l'observateur. Cette comparaison entre les mesures et leurs estimées donne naissance à un indicateur de défaut ou *résidu*. Un résidu est, en théorie, nul dans des conditions normales de fonctionnement, les sorties du système et celles estimées par l'observateur devant coïncider. En effet, l'observateur piloté par les mêmes signaux d'entrée que ceux appliqués au système est en mesure de fournir les mêmes signaux de sortie, à condition toutefois que le modèle employé pour la synthèse de l'observateur reproduise avec précision le comportement du système à surveiller dans tout son domaine de fonctionnement. Toutefois, la synthèse de l'observateur peut s'avérer très délicate voire impossible selon le caractère (linéaire ou non linéaire) du modèle employé, d'où l'importance de dis-

poser d'un modèle aussi *simple et précis* que possible.

La modélisation mathématique d'un système est loin d'être aisée en raison notamment de la complexité du système, d'un manque de connaissance des lois qui régissent son fonctionnement ou tout simplement d'une mise en équation délicate et laborieuse. Bien souvent, il faut faire appel à des techniques d'identification de type boîte noire pour représenter mathématiquement les comportements dynamiques de nature non linéaire de ces systèmes [16]. Au problème initialement posé par la synthèse de l'observateur vient donc se superposer le problème initial de l'identification du modèle avec toutes les difficultés qu'il comporte. Il convient alors de proposer des techniques d'estimation d'état conçues à partir de modèles de représentation non linéaire d'une part assez généraux pour caractériser un large nombre de systèmes dans diverses situations de fonctionnement et d'autre part structurellement aptes à favoriser la synthèse de l'observateur. On trouve parmi les différentes approches de représentation non linéaire l'*approche multimodèle* [10].

Le principe de l'approche multimodèle [10] repose sur la réduction de la complexité du système par le fractionnement de son espace de fonctionnement en un nombre fini de zones de fonctionnement. Un *sous-modèle* de structure simple et souvent linéaire peut alors servir à la description du comportement dynamique du système dans chaque zone. Le comportement global du système est ensuite représenté en considérant judicieusement la contribution relative de chaque sous-modèle au moyen d'une *fonction de pondération* associée à chaque zone de fonctionnement. L'approche multimodèle est une puissante technique de modélisation des systèmes non linéaires qui permet de parvenir à un bon compromis entre la complexité et la précision du modèle dans une large plage de fonctionnement. Les multimodèles sont reconnus pour leur capacité à favoriser l'extension aux systèmes non linéaires de certains résultats obtenus pour les systèmes linéaires et ce, sans avoir à effectuer d'analyse spécifique de la non-linéarité du système.

Dans ce contexte de modélisation, deux familles de multimodèles sont recensées selon la structure mise à profit pour agréger les sous-modèles. La première, connue sous l'appellation de *multimodèle de Takagi-Sugeno*, est constituée de sous-modèles *homogènes* partageant un même espace d'état. La seconde, connue sous l'appellation de multimodèle découplé,

fait intervenir des sous-modèles *hétérogènes* découplés, chacun d'entre eux possédant une structure et un espace d'état différent. L'intérêt suscité par le multimodèle de Takagi-Sugeno lors de la modélisation, de la commande, de l'estimation d'état ou du diagnostic des systèmes non linéaires a largement été démontré [1], [2], [10], [17]. Le multimodèle découplé a, quant à lui, déjà été utilisé dans le cadre de l'identification [11], [19] et/ou de la commande [8], [9] de systèmes non linéaires. En revanche, au regard des travaux actuellement publiés [11], [18], il semble que peu d'études théoriques portant sur l'estimation d'état en général et sur le diagnostic des systèmes non linéaires caractérisés par un multimodèle découplé ont été menées. Cet article propose donc d'apporter une contribution aux méthodes d'estimation d'état et de diagnostic basées sur les multimodèles découplés.

## II. A PROPOS DU MULTIMODÈLE DÉCOUPLÉ

*Filev* [7] propose un multimodèle issu de l'agrégation des sous-modèles sous la forme d'une structure à états découplés :

$$x_i(t+1) = A_i x_i(t) + B_i u(t), \quad (1a)$$

$$y_i(t) = C_i x_i(t), \quad (1b)$$

$$y(t) = \sum_{i=1}^L \mu_i(\xi(t)) y_i(t), \quad (1c)$$

où  $L$  est le nombre des sous-modèles,  $u \in \mathbb{R}^m$  est le vecteur de commande,  $y \in \mathbb{R}^p$  est le vecteur de mesure,  $x_i \in \mathbb{R}^{n_i}$  et  $y_i \in \mathbb{R}^p$  sont respectivement le vecteur d'état et le vecteur de sortie du  $i^{\text{ème}}$  sous-modèle. Les matrices  $A_i \in \mathbb{R}^{n_i \times n_i}$ ,  $B_i \in \mathbb{R}^{n_i \times m}$  et  $C_i \in \mathbb{R}^{p \times n_i}$  associées aux sous-modèles sont constantes et supposées connues.

Les quantités  $\mu_i(\xi(t))$  représentent les *fonctions de pondération* qui assurent la transition entre les sous-modèles et qui dépendent de la variable d'indexation  $\xi(t)$ . Cette dernière peut correspondre, par exemple, à des variables mesurables en temps réel du système (le signal d'entrée ou de sortie du système). Les *fonctions de pondération* possèdent les propriétés suivantes :

$$\sum_{i=1}^L \mu_i(\xi(t)) = 1 \text{ et } 0 \leq \mu_i(\xi(t)) \leq 1 \quad \forall i = 1 \dots L, \forall t. \quad (2)$$

Le mélange entre les sous-modèles s'effectue donc à travers l'équation de mesure, la sortie globale du multimodèle étant la somme pondérée des sorties des sous-modèles (voir (1c)). Chaque sous-modèle possède par conséquent son propre espace d'état et  $y$  évolue indépendamment en fonction du signal de commande et de son état initial. Le principal avantage du multimodèle découplé, par rapport aux structures plus classiques, réside donc dans le fait qu'il permet le recours à un *vecteur d'état de dimension différente* pour chaque sous-modèle. Il devient ainsi possible d'adapter, lors de la phase d'identification, la complexité de chaque sous-modèle à la complexité du comportement dynamique du système dans les différentes zones de fonctionnement. Le recours à cette structure épargne alors une description fine et uniforme de l'espace de fonctionnement du système. Ceci permet de réduire le nombre global de paramètres à identifier. L'introduction d'un tel *degré de flexibilité* favorise la *généralité* du multimodèle découplé, en particulier lors de la modélisation de systèmes dont la structure ou le comportement peuvent présenter des changements selon le régime de fonctionnement.

**Remarque 1 :** Les sorties  $y_i(t)$  des sous-modèles doivent être considérées comme des "signaux artificiels de modélisation"

utilisés pour décrire le comportement non linéaire du système réel. Par conséquent, ces signaux ne sont pas exploitables pour piloter un observateur. En effet, seule la sortie globale du multimodèle  $y(t)$  dans la mesure où elle est accessible à la mesure peut être assimilée à une grandeur physique du système.

## III. CONCEPTION D'OBSERVATEURS À L'AIDE D'UN MULTIMODÈLE DÉCOUPLÉ

La structure du multimodèle découplé a été exploitée dans [18] en vue de concevoir une stratégie de détection et de localisation des défauts (*Neuro-Fuzzy Decoupling Fault Detection Scheme* NFDDFS) pour un système non linéaire à base d'observateurs. Toutefois, bien que les résultats exposés soient encourageants, aucune étude théorique de l'erreur d'estimation n'est abordée dans ces travaux et aucune preuve rigoureuse de la convergence vers zéro de cette erreur n'est proposée.

Dans cette section, nous présentons une démarche de synthèse de deux observateurs d'état dits à gain proportionnel (P) et à gain proportionnel-intégral (PI) [11], [12]. Une preuve théorique de la convergence de l'erreur d'estimation est donnée à l'aide de la méthode de Lyapunov. Cette dernière largement répandue dans l'étude des systèmes non linéaires permet d'obtenir des conditions suffisantes de convergence de l'erreur d'estimation sous forme d'inégalités linéaires matricielles (Linear Matrix Inequalities LMI) [3].

**Notations :** Par la suite, une matrice  $P$  définie positive (négative) sera notée  $P > 0$  ( $P < 0$ ) et la transposée d'une matrice  $P$  sera notée  $P^T$ .  $I$  est la matrice identité de dimension appropriée,  $\text{diag}\{A_1, \dots, A_n\}$  est une matrice diagonale par blocs de coefficients diagonaux  $A_i$ . Afin d'alléger l'écriture,  $\mu_i(\xi(t))$  sera abrégé sous la forme  $\mu_i(t)$ .

### A. Observateur à gain proportionnel (P)

Récemment, la conception d'un observateur dit à gain P a été proposée [11], [12]. Cet observateur se présente sous la forme suivante :

$$\hat{x}_i(t+1) = A_i \hat{x}_i(t) + B_i u(t) + K_i (y(t) - \hat{y}(t)), \quad (3a)$$

$$\hat{y}_i(t) = C_i \hat{x}_i(t), \quad (3b)$$

$$\hat{y}(t) = \sum_{i=1}^L \mu_i(t) \hat{y}_i(t), \quad (3c)$$

où  $\hat{x}_i \in \mathbb{R}^{n_i}$  est l'estimation du vecteur d'état du  $i^{\text{ème}}$  sous-modèle,  $y(t)$  la sortie du multimodèle,  $\hat{y}(t)$  la sortie reconstruite par l'observateur et  $K_i \in \mathbb{R}^{n_i \times p}$  le gain du  $i^{\text{ème}}$  observateur à déterminer.

L'introduction d'un vecteur d'état augmenté de la forme :

$$x(t) = [x_1^T(t) \dots x_i^T(t) \dots x_L^T(t)]^T \in \mathbb{R}^n, \quad n = \sum_{i=1}^L n_i$$

permet de réécrire les équations de l'observateur (3) sous une forme plus compacte :

$$x(t+1) = \tilde{A}x(t) + \tilde{B}u(t) + \tilde{K}(y(t) - \hat{y}(t)), \quad (4a)$$

$$y(t) = \tilde{C}(t)x(t), \quad (4b)$$

où

$$\tilde{A} = \text{diag}\{A_1, \dots, A_n\} \in \mathbb{R}^{n \times n}, \quad (5a)$$

$$\tilde{B} = [B_1^T, \dots, B_n^T]^T \in \mathbb{R}^{n \times m}, \quad (5b)$$

$$\tilde{C}(t) = [\mu_1(t)C_1, \dots, \mu_L(t)C_L] \in \mathbb{R}^{p \times n}, \quad (5c)$$

$$\tilde{K} = [K_1^T, \dots, K_L^T]^T \in \mathbb{R}^{n \times p}. \quad (5d)$$

Les gains  $K_i$  de l'observateur P sont déterminés afin que l'erreur d'estimation de l'état

$$e(t) = x(t) - \hat{x}(t) \quad (6)$$

converge exponentiellement vers zéro. L'évolution de l'erreur d'estimation d'état (6) est obtenue à partir de l'équation précédente et des formes augmentées des équations du multimodèle et de l'observateur :

$$e(t+1) = (\tilde{A} - \tilde{K}\tilde{C}(t))e(t) = A_{obs}(t)e(t). \quad (7)$$

**Remarque 2 :** Le lecteur peut remarquer que la matrice à paramètres variables dans le temps  $\tilde{C}(t)$  admet, compte tenu des propriétés (2) des fonctions de  $\mu_i(t)$ , la réécriture suivante :

$$\tilde{C}(t) = \sum_{i=1}^L \mu_i(t) \tilde{C}_i, \quad (8)$$

où chaque  $\tilde{C}_i$  est une matrice bloc à paramètres constants de la forme :

$$\tilde{C}_i = [0 \quad \dots \quad C_i \quad \dots \quad 0], \quad (9)$$

c.-à-d. que tous ses blocs sont nuls excepté le  $i^{\text{ème}}$  bloc qui est égal à  $C_i$ .

Remarquons qu'il est illusoire de croire que la synthèse individuelle d'un observateur pour chaque sous-modèle conduit à la synthèse de l'observateur global du multimodèle. Cette démarche individuelle de synthèse des observateurs peut s'avérer dangereuse et ne garantit en aucun cas la convergence vers zéro de l'erreur d'estimation (6). En effet, le mélange entre les sorties des sous-modèles doit être impérativement pris en considération lors de la synthèse de l'observateur afin de garantir la convergence de l'erreur d'estimation (6) pour un mélange arbitraire entre les sorties des sous-modèles et ce, quel que soit l'état initial du système  $x(0)$  et de l'observateur  $\hat{x}(0)$ . Pour cette raison, la synthèse de tous les observateurs est réalisée simultanément à partir de l'équation (7). La convergence de l'erreur d'estimation est analysée à l'aide de la méthode de Lyapunov. Le théorème suivant propose des *conditions suffisantes* assurant la convergence exponentielle de l'erreur d'estimation.

**Théorème 1 :** L'erreur d'estimation d'état, entre le multimodèle découplé à temps discret (1) et l'observateur à gain P (3), converge exponentiellement vers zéro s'il existe une matrice symétrique et définie positive  $P$  et une matrice  $G$  vérifiant les LMI suivantes :

$$\begin{bmatrix} (1-2\alpha)P & \tilde{A}^T P - \tilde{C}_i^T G^T \\ P\tilde{A} - G\tilde{C}_i & P \end{bmatrix} > 0, \quad i = 1, \dots, L, \quad (10)$$

pour un taux de décroissance  $0 < \alpha < 0.5$  donné. Le gain de l'observateur est donné par  $\tilde{K} = P^{-1}G$ .

*Éléments de preuve :* La démonstration complète de ce théorème est omise ici. Toutefois, elle s'effectue en considérant une fonction candidate de Lyapunov de la forme :

$$V(e(t)) = e^T(t)Pe(t), \quad P > 0 \quad P = P^T. \quad (11)$$

La convergence exponentielle de l'erreur d'estimation est garantie si [3] :

$$\exists P = P^T > 0, \alpha > 0 : \Delta V(e(t)) + 2\alpha V(e(t)) < 0, \quad (12)$$

où  $\Delta V(e(t)) = V(e(t+1)) - V(e(t))$  et où  $\alpha$  est le *taux de décroissance* qui sert à quantifier la vitesse de convergence de l'erreur d'estimation. La condition LMI (10) est obtenue par une manipulation algébrique des expressions (11), (12) et (7). La preuve complète du théorème est proposée dans [11].

## B. Observateur à gain proportionnel-intégral (PI)

Dans cette section, on considère un multimodèle découplé dont une partie des entrées est inconnue. Les entrées inconnues peuvent représenter des signaux de commande non contrôlés ou un défaut dans un contexte de diagnostic, d'où l'intérêt porté à l'estimation des entrées inconnues.

La structure du multimodèle découplé (1) est modifiée comme suit de façon à prendre en compte le vecteur d'entrées inconnues  $\eta(t)$  susceptible d'agir sur le système :

$$x_i(t+1) = A_i x_i(t) + B_i u(t) + D_i \eta(t), \quad (13a)$$

$$y_i(t) = C_i x_i(t), \quad (13b)$$

$$y(t) = \sum_{i=1}^L \mu_i(t) y_i(t) + V \eta(t), \quad (13c)$$

où  $x_i \in \mathbb{R}^{n_i}$  et  $y_i \in \mathbb{R}^p$  sont respectivement l'état et la sortie du  $i^{\text{ème}}$  sous-modèle, où  $u \in \mathbb{R}^m$  est l'entrée,  $\eta \in \mathbb{R}^l$  l'entrée inconnue et  $y \in \mathbb{R}^p$  la sortie. Les matrices  $A_i \in \mathbb{R}^{n_i \times n_i}$ ,  $B_i \in \mathbb{R}^{n_i \times m}$ ,  $D_i \in \mathbb{R}^{n_i \times l}$ ,  $C_i \in \mathbb{R}^{p \times n_i}$  et  $V \in \mathbb{R}^{p \times l}$  sont connues. Les nouvelles matrices  $D_i$  et  $V$  caractérisent respectivement l'impact de l'entrée inconnue  $\eta$  sur l'état et sur la sortie du système, p. ex. un défaut d'actionneur ou de capteur (c.f. la section IV).

L'estimation simultanée de l'état et des entrées inconnues est réalisée ici à l'aide d'un observateur dit à gain PI [4], [15] dont la structure est donnée par :

$$\hat{x}_i(t+1) = A_i \hat{x}_i(t) + B_i u(t) + D_i \hat{\eta}(t) + K_i (y(t) - \hat{y}(t)), \quad (14a)$$

$$\hat{\eta}(t+1) = \hat{\eta}(t) + K_I (y(t) - \hat{y}(t)), \quad (14b)$$

$$\hat{y}_i(t) = C_i \hat{x}_i(t), \quad (14c)$$

$$\hat{y}(t) = \sum_{i=1}^L \mu_i(t) \hat{y}_i(t) + V \hat{\eta}(t), \quad (14d)$$

où  $\hat{x}_i$  est l'estimation du vecteur d'état du  $i^{\text{ème}}$  sous-modèle,  $\hat{y}(t)$  la sortie reconstruite par l'observateur,  $\hat{\eta}(t)$  l'estimation de l'entrée inconnue et  $y(t)$  la sortie du multimodèle. Les gains  $K_i \in \mathbb{R}^{n_i \times p}$  et  $K_I \in \mathbb{R}^{l \times p}$  sont à déterminer.

L'appellation "observateur proportionnel-intégral" sous laquelle apparaît cet observateur tire son origine de la nature de la correction apportée par les gains  $K_i$  et  $K_I$ . En effet, le gain  $K_i$  assure une correction proportionnelle à l'erreur d'estimation de la sortie  $y(t) - \hat{y}(t)$ . Quant au gain  $K_I$ , il assure une correction dans la boucle intégrale décrite par l'équation (14b). Cette action intégrale permet d'estimer l'entrée inconnue à condition que cette dernière soit constante au cours du temps ou à dynamique très lente [4], [15].

**Hypothèse 1 :** L'entrée inconnue  $\eta(t)$  est supposée constante ou à dynamique très lente, c.-à-d.  $\eta(k+1) \approx \eta(k)$ .

Les gains  $K_i$  et  $K_I$  de l'observateur PI sont déterminés de sorte que l'erreur d'estimation de l'état

$$e(t) = x(t) - \hat{x}(t) \quad (15)$$

et l'erreur d'estimation de l'entrée

$$\varepsilon(t) = \eta(t) - \hat{\eta}(t) \quad (16)$$

convergent exponentiellement vers zéro.

La dynamique de l'erreur d'estimation d'état (15) est obtenue à l'aide des formes augmentées du multimodèle et de l'observateur PI. Elle est donnée par

$$e(t+1) = (\tilde{A} - \tilde{K}\tilde{C}(t))e(t) + (\tilde{D} - \tilde{K}V)\varepsilon(t), \quad (17)$$

où  $\tilde{A}$ ,  $\tilde{K}$ ,  $\tilde{C}(t)$  ont déjà été définies en (5) et où

$$\tilde{D} = [D_1^T, \dots, D_L^T]^T \in \mathbb{R}^{n \times l}. \quad (18)$$

Quant à la dynamique de l'erreur d'estimation de l'entrée inconnue (16), elle est donnée par

$$\varepsilon(t+1) = \eta(t+1) - \hat{\eta}(t) - K_I(y(t) - \hat{y}(t)). \quad (19)$$

Compte tenu du fait que l'entrée inconnue est considérée constante ou à dynamique très lente,  $\eta(t+1) - \eta(t) \approx 0$ , alors

$$\varepsilon(t+1) = \varepsilon(t) - K_I \tilde{C}(t) e(t) - K_I V \varepsilon(t). \quad (20)$$

Il vient finalement :

$$\begin{bmatrix} e(t+1) \\ \varepsilon(t+1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \tilde{A} - \tilde{K} \tilde{C}(t) & \tilde{D} - \tilde{K} V \\ -K_I \tilde{C}(t) & I - K_I V \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e(t) \\ \varepsilon(t) \end{bmatrix} \quad (21)$$

soit encore

$$e_a(t+1) = (A_a - K_a C_a(t)) e_a(t), \quad (22)$$

où

$$e_a(t) = \begin{bmatrix} e(t) \\ \varepsilon(t) \end{bmatrix}, \quad A_a = \begin{bmatrix} \tilde{A} & \tilde{D} \\ 0 & I \end{bmatrix}, \quad K_a = \begin{bmatrix} \tilde{K} \\ K_I \end{bmatrix}, \\ C_a(t) = [\tilde{C}(t) \quad V].$$

Le théorème suivant propose des *conditions suffisantes* assurant la convergence exponentielle de l'erreur d'estimation pour l'observateur PI (14).

**Théorème 2 :** L'erreur d'estimation d'état entre le multimodèle découplé à temps discret (13) et l'observateur à gain PI (14) converge exponentiellement vers zéro s'il existe une matrice symétrique et définie positive  $P$  et une matrice  $G$  vérifiant les LMI suivantes :

$$\begin{bmatrix} (1-2\alpha)P & A_a^T P - \bar{C}_i^T G^T \\ P A_a - G \bar{C}_i & P \end{bmatrix} > 0, \quad i = 1, \dots, L, \quad (23)$$

où

$$\bar{C}_i = [\tilde{C}_i \quad V] \quad (24)$$

pour un taux de décroissance  $0 < \alpha < 0.5$  donné. Le gain de l'observateur est donné par  $K_a = P^{-1}G$ .

*Éléments de preuve :* Il est possible de constater que la dynamique de l'erreur d'estimation (22) se présente sous une forme analogue à celle de l'erreur d'estimation de l'observateur à gain proportionnel (7). Les conditions LMI du théorème 2 sont obtenues en adoptant une démarche similaire à celle proposée au cours de la section III-A. La preuve complète du théorème est exposée dans [11].

#### IV. APPLICATION AU DIAGNOSTIC D'UN BIORÉACTEUR

L'objectif des sections suivantes est de présenter deux stratégies de diagnostic des défauts de capteur. Les observateurs à gain proportionnel et à gain proportionnel-intégral sont mis à profit afin de générer des signaux indicateurs des défauts de capteur. Ces stratégies sont appliquées, à titre d'exemple, au diagnostic d'un bioréacteur simplifié.

#### A. Présentation du modèle du bioréacteur

Le terme bioréacteur désigne un récipient dans lequel se déroule une réaction bio-chimique. Une bioréaction fait en principe intervenir trois sortes de variables : la biomasse (p. ex. les micro-organismes), le substrat (p. ex. les sources de carbone dans l'alimentation) et les produits de la biomasse (p. ex. les enzymes).

Le comportement dynamique d'un bioréacteur continu homogène (infiniment mélangé) et limité par un seul substrat, réaction de type  $S(t) \rightarrow X(t)$ , peut être décrit à l'aide du modèle non linéaire suivant [6] :

$$\dot{S}(t) = D(t)(S_{in}(t) - S(t)) - kr(t), \quad (25a)$$

$$\dot{X}(t) = -D(t)X(t) + r(t), \quad (25b)$$

où  $S(t)$  et  $X(t)$  sont respectivement le taux de concentration du substrat carboné et celui de la biomasse, où  $D(t) > 0$  est le taux de dilution,  $k$  un coefficient de rendement,  $S_{in}(t)$  le taux de concentration d'alimentation en substrat et  $r(t)$  la vitesse de réaction (c.-à-d. la production de biomasse par unité de volume). La vitesse de réaction  $r(t)$  peut être caractérisée par l'expression

$$r(t) = \mu_{max} S(t) X(t) / (K_s + S(t)), \quad (26)$$

où  $\mu_{max}$  et  $K_s$  sont deux constantes qui représentent respectivement la vitesse spécifique maximum de croissance et une constante de saturation. Les paramètres utilisés lors de la simulation sont  $\mu_{max} = 0.33 \text{ h}^{-1}$ ,  $K_s = 5 \text{ g l}^{-1}$ ,  $k = 20$ . Le taux de concentration d'alimentation en substrat est considéré constant  $S_{in} = 20 \text{ g l}^{-1}$  et le taux de dilution variable dans la plage  $D \in [0.0 \quad 0.22] \text{ h}^{-1}$ . Le bioréacteur présente un comportement non linéaire dans cette plage de fonctionnement.

#### B. Représentation multimodèle du bioréacteur

L'objectif est de représenter le comportement dynamique du bioréacteur (25) à l'aide d'un multimodèle découplé. Pour ce faire, deux séquences de pseudo-mesures (c.-à-d. de mesures générées par simulation) du taux de substrat carboné  $S(t)$  et du taux de biomasse  $X(t)$  sont disponibles pour les besoins de l'identification et de la validation du modèle. Elles sont générées en considérant un taux de dilution composé de créneaux d'amplitudes variables comprises dans la plage de variation donnée.

La variable d'indexation  $\xi(t)$  est ici le signal de commande  $u(t)$ . Ce choix arbitraire se justifie par le fait que le signal de commande conduit le système vers les différents modes de fonctionnement. L'étude de la caractéristique en régime statique du bioréacteur conduit à une décomposition de l'espace de fonctionnement en deux zones de fonctionnement. Les fonctions de pondération associées à chaque zone de fonctionnement sont obtenues par la normalisation de fonctions de type gaussien :

$$\mu_i(\xi(t)) = \omega_i(\xi(t)) / \sum_{j=1}^L \omega_j(\xi(t)), \quad (27)$$

$$\omega_i(\xi(t)) = \exp\left(-(\xi(t) - c_i)^2 / \sigma^2\right), \quad (28)$$

où  $c_1 = 0.02$ ,  $c_2 = 0.20$  et  $\sigma = 0.247$ . Les deux sous-modèles utilisés comportent deux états et leurs paramètres sont identifiés à l'aide de l'algorithme d'identification proposé dans [11].

D'après la figure 1, le multimodèle identifié (noté *M.M.*) parvient à capturer globalement le comportement non linéaire du bioréacteur (noté *Bio*). Il convient néanmoins de remarquer qu'un écart entre le comportement dynamique du bioréacteur

et celui du multimodèle apparaît dans les régimes transitoires. En effet, le multimodèle ne parvient pas à suivre parfaitement le comportement transitoire du système. Toutefois, cette représentation multimodèle du bioréacteur répond de façon satisfaisante aux besoins du diagnostic avec un nombre réduit de sous-modèles (il ne comporte que deux sous-modèles).

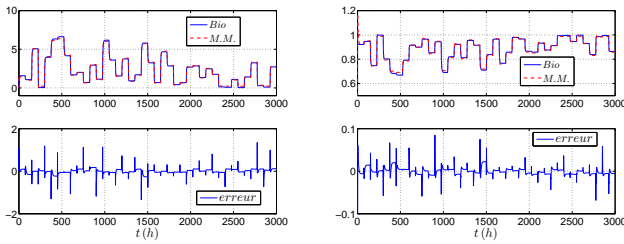


Fig. 1. Evolution du substrat carboné  $S(t)$  (à gauche) et du taux de biomasse  $X(t)$  (à droite)

### C. Génération des résidus à l'aide d'un banc d'observateurs P

La génération de résidus à base d'observateurs passe par la reconstruction des sorties du système à partir des mesures et du modèle du système. Le diagnostic du système est opéré en analysant la cohérence entre les signaux de sortie mesurés et les signaux de sortie estimés à l'aide de l'observateur [5], [14]. En théorie, le résidu (l'erreur d'estimation) est nul dans des conditions normales de fonctionnement, les sorties du système et celles estimées par l'observateur devant coïncider.

Toutefois, les tâches de détection et de localisation des défauts nécessitent une structuration des résidus. Un moyen de parvenir à cette structuration consiste à remplacer l'utilisation d'un seul observateur par celle d'un banc d'observateurs, chaque observateur n'étant piloté que par une partie des informations disponibles. Une structuration des résidus, visant la détection des défauts de capteur, peut être réalisée à l'aide par exemple d'observateurs dédiés suivant un schéma DOS (*Dedicated Observer Scheme*) [5], [14]. Dans ce cas, le  $i^{\text{ème}}$  observateur est piloté par la  $i^{\text{ème}}$  sortie du système et toutes les entrées.

Les défauts de capteurs agissant sur la mesure de  $S(t)$  et  $X(t)$  sont notés respectivement  $\eta_1(t)$  et  $\eta_2(t)$ . Pour le diagnostic des défauts de capteur du bioréacteur, l'observateur 1 est piloté par la sortie  $y_1$ , l'observateur 2 par la sortie  $y_2$  et l'observateur 3 par le vecteur complet de sortie  $y = [y_1 \ y_2]^T$  avec  $y_1 = S(t)$  et  $y_2 = X(t)$ . On notera par la suite  $r_{i,j}$  le signal indicateur de défaut (résidu) calculé à partir de la différence entre la  $i^{\text{ème}}$  sortie du système et la  $i^{\text{ème}}$  sortie estimée par le  $j^{\text{ème}}$  observateur.

La phase de localisation ou d'isolation d'un défaut  $\eta_i$  est réalisée par le biais d'une analyse de l'évolution des différents résidus basée sur une logique de décision. Une table des signatures théoriques (table I) est dressée afin de caractériser l'évolution des résidus  $r_{i,j}$  en présence d'un défaut  $\eta_i$  affectant le système. Sur la table des signatures théoriques proposée, un "1" traduit qu'il est certain que le défaut  $\eta_i$  affecte le résidu  $r_{i,j}$ , un "0" qu'il est certain que le défaut  $\eta_i$  n'affecte pas le résidu  $r_{i,j}$  et un "?" qu'il est impossible de se prononcer. La table des signatures est élaborée à partir des considérations suivantes [12] :

1. L'observateur 1 reconstruit la sortie du multimodèle en utilisant seulement la sortie  $y_1$  et toutes les entrées du système. La **présence d'un défaut** sur cette sortie engendre donc une mauvaise estimation de l'état susceptible d'affecter les résidus  $r_{i,1}$ .

Il convient cependant de souligner qu'il est difficile de prédire l'évolution de l'estimation d'état en présence d'un défaut sur la sortie  $y_1$  en raison de la non-linéarité de l'observateur. En effet, des phénomènes dits de compensation peuvent apparaître et les défauts s'en trouvent masqués (les résidus  $r_{i,1}$  pouvant rester nuls). Il est par conséquent dangereux de se prononcer affirmativement sur l'absence de défaut sur la sortie  $y_1$  en analysant la nullité des résidus (un "?" apparaît sur la table des signatures).

2. Si la sortie  $y_1$  **ne présente pas de défaut** alors l'estimation d'état est correctement effectuée. Par conséquent, en présence d'un défaut sur la sortie  $y_2$  le résidu  $r_{2,1}$  est éloigné de zéro (sensibilité au défaut  $\eta_2$ ) alors que le résidu  $r_{1,1}$  demeure insensible à ce même défaut. Il est alors possible de tirer une conclusion positive sur la présence d'un défaut  $\eta_2$  si les résidus  $r_{i,1}$  présentent simultanément la signature  $r_{1,1} = 0$  et  $r_{2,1} = 1$ .

L'adoption d'une démarche similaire permet d'élaborer les signatures associées à l'observateur 2. Enfin, l'observateur 3 génère une mauvaise estimation d'état en présence d'un défaut de capteur  $\eta_i$  sur n'importe quelle sortie. Les résidus obtenus à l'aide de cet observateur servent seulement à confirmer (et non à prendre) une décision, la signature de cet observateur étant difficile à déterminer.

	$r_{1,1}$	$r_{2,1}$	$r_{1,2}$	$r_{2,2}$	$r_{1,3}$	$r_{2,3}$
$\eta_1$	?	?	1	0	?	?
$\eta_2$	0	1	?	?	?	?

TABLE I

TABLE DES SIGNATURES THÉORIQUES

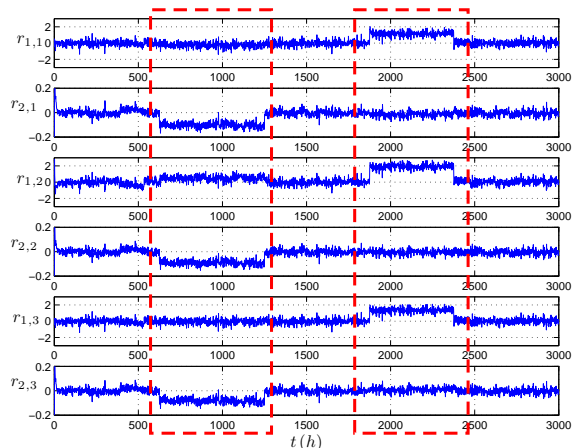


Fig. 2. Évolution des résidus  $r_{i,j}$

Les défauts sont constitués d'un créneau d'amplitude constante égale à 10% de l'amplitude maximale de chaque sortie. Le défaut  $\eta_1$  apparaît sur la sortie  $y_1(t)$  à  $t = 1880$  et disparaît à  $t = 2380$ . Le défaut  $\eta_2$ , injecté sur la sortie  $y_2(t)$ , intervient à  $t = 625$  et disparaît à  $t = 1240$ . La détection et la localisation des défauts de capteur sont effectuées grâce à l'analyse de la signature des résidus  $r_{i,1}$  et  $r_{i,2}$  suivant la table des signatures I. La figure 2 illustre l'évolution des résidus générés par le banc d'observateurs. En l'absence de défaut les résidus sont statiquement nuls. Entre les instants  $625 \leq t \leq 1240$ , les résidus  $r_{1,1}$  et  $r_{2,1}$  correspondent à la signature d'un défaut  $\eta_2$  sur la sortie  $y_2$ . Cette information est confirmée par les résidus générés au moyen des deux autres observateurs. En appliquant un raisonnement similaire à la signature des résidus  $r_{1,2}$  et  $r_{2,2}$ , il est possible de conclure qu'un défaut  $\eta_1$  sur la sortie  $y_1$  apparaît entre les instants  $1880 \leq t \leq 2380$ . Il convient toutefois de souligner que la localisation de deux défauts apparaissant simultanément sur les deux sorties devient impossible (c.f. table

I). De plus, cette stratégie de diagnostic ne permet pas l'estimation de l'évolution temporelle des défauts. Afin de contourner ces difficultés, l'observateur PI proposé dans la section III-B peut être utilisé pour générer des résidus.

#### D. Génération des résidus à l'aide d'un observateur PI

Le recours à un observateur à entrées inconnues permet une structuration des résidus sans faire appel à un banc d'observateurs. En effet, l'observateur PI fournit une estimation simultanée de l'état du système et des entrées inconnues. Il est alors possible d'utiliser directement l'estimation des entrées inconnues comme signal indicateur de défauts, les défauts de capteur pouvant être considérés comme des entrées inconnues du système que l'on cherche à reconstruire.

Les matrices  $V$  et  $\tilde{D}$  permettant de caractériser l'influence des défauts respectivement sur les mesures et sur l'état du multimodèle sont données par :  $V = \text{diag}\{1, 1\}$  et  $\tilde{D} = 0_{(4 \times 2)}$ . En effet, les défauts considérés n'affectent que les sorties du système (défauts de capteur).

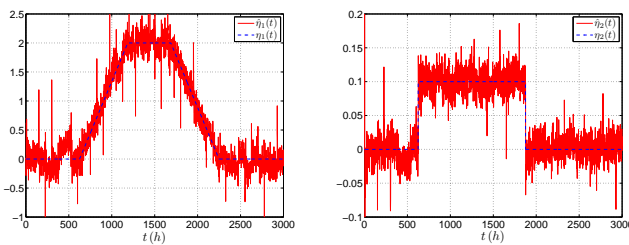


Fig. 3. Comparaison entre les défauts  $\eta_i$  et leurs estimés  $\hat{\eta}_i$

Sur la figure 3 sont tracés les défauts  $\eta_i$  injectés sur les sorties du bioréacteur (en pointillés) et leurs estimés  $\hat{\eta}_i$  (en trait plein). Il convient de remarquer que les défauts estimés  $\hat{\eta}_i$  évoluent conformément aux défauts de capteur injectés et ce, en dépit de l'apparition simultanée des deux défauts à  $t = 620$  (localisation possible des défauts simultanés), même si cette estimation est relativement bruitée (il s'agit là du problème classique d'inversion de système). Les défauts ainsi estimés peuvent être considérés, dans une procédure de diagnostic, comme des signaux indicateurs de défauts (c.-à-d. des résidus). La tâche de surveillance (détection, localisation et identification) peut être alors menée à partir d'une logique de décision simple basée sur l'évolution de ces résidus. Remarquons enfin que l'observateur proposé est capable de suivre l'évolution du défaut  $\eta_1(t)$  injecté sur  $S(t)$  alors qu'il n'est pas constant. Il se révèle donc relativement robuste vis-à-vis des entrées inconnues variant lentement au cours du temps. Remarquons que le principe de l'observateur PI peut se généraliser au cas multi-intégral afin de prendre en compte des entrées inconnues sous une forme plus générale, p. ex. un polynôme [13]. Une preuve de la convergence vers zéro des erreurs d'estimation de l'état et des entrées inconnues, dans ce cas plus général, est fournie dans [11], [13].

#### V. CONCLUSION

L'approche multimodèle se révèle une technique efficace de modélisation des systèmes non linéaires. Cet article expose une méthode de synthèse d'observateurs pour des systèmes non linéaires représentés par un multimodèle découplé. Ce dernier comporte des sous-modèles qui peuvent être de dimensions différentes, contrairement aux approches classiques où les sous-modèles sont tous de la même dimension.

Le problème posé par l'estimation d'état est abordé à l'aide de deux types d'observateurs. Le premier type d'observateur, dit à gain proportionnel, fournit une estimation de l'état du système. Le second, l'observateur à gain proportionnel-intégral, rend possible l'estimation simultanée de l'état et des entrées inconnues agissant sur le système (p. ex. un défaut). Des conditions suffisantes permettant la synthèse de ces observateurs sont établies à l'aide de la méthode de Lyapunov et sous la forme de LMI.

Nous avons montré, à travers l'exemple d'un bioréacteur, dans quelle mesure les techniques d'estimation d'état proposées peuvent être exploitées dans un contexte de diagnostic des systèmes non linéaires. Deux stratégies de génération de signaux indicateurs de défauts, visant la détection, la localisation et éventuellement l'estimation du défaut, ont été mises en œuvre. La première stratégie fait appel au principe des bancs d'observateurs où chaque observateur est dédié à un défaut particulier. La seconde tire directement profit de l'estimation des défauts livrée par l'observateur PI à entrées inconnues.

#### RÉFÉRENCES

- [1] A. Akhenak. *Conception d'observateurs non linéaires par approche multimodèle : application au diagnostic*. Thèse de doctorat, Institut National Polytechnique de Lorraine, France, 2004.
- [2] R. Babuska. *Fuzzy Modeling for Control*. Kluwer Academic Publishers, London, 1998.
- [3] S. Boyd, L. El Ghaoui, E. Feron, and V. Balakrishnan. *Linear Matrix Inequalities in System and Control Theory*. SIAM Studies in Applied Mathematics 15, Philadelphia, 1994.
- [4] K.K. Busawon and P. Kabore. Disturbance attenuation using proportional integral observers. *International Journal of Control*, 74(74) : 618–627, 2001.
- [5] S.X. Ding. *Model-based Fault Diagnosis Techniques*. Springer-Verlag, Berlin Heidelberg, 2008.
- [6] I. Dunn, E. Heinzle, J. Ingham, and J. Penosil. *Biological Reaction Engineering : Dynamic Modelling Fundamentals with Simulation Examples*. Wiley-VCH Verlag GmbH & Co. KGaA, Weinheim, 2005.
- [7] D. Filev. Fuzzy modeling of complex systems. *International Journal of Approximate Reasoning*, 5(3) : 281–290, 1991.
- [8] S. García-Nieto, M. Martínez, X. Blasco, and J. Sanchis. Nonlinear predictive control based on local model networks for air management in diesel engines. *Control Engineering Practice*, 16(12) : 1399–1413, 2008.
- [9] G. Gregoric and G. Lightbody. Control of highly nonlinear processes using self-tuning control and multiple/local model approaches. In *2000 IEEE International Conference on Intelligent Engineering Systems, INES 2000*, Portoroz, Slovenia, 2000.
- [10] R. Murray-Smith and T.A. Johansen. *Multiple model Approaches to Modelling and Control*. Taylor & Francis, London, 1997.
- [11] R. Orjuela. *Contribution à l'estimation d'état et au diagnostic des systèmes représentés par des multimodèles*. Thèse de doctorat, Institut National Polytechnique de Lorraine, 2008.
- [12] R. Orjuela, B. Marx, J. Ragot, and D. Maquin. State estimation for nonlinear systems using a decoupled multiple mode. *International Journal of Modelling Identification and Control*, 4(1) : 59–67, 2008.
- [13] R. Orjuela, B. Marx, J. Ragot, and D. Maquin. On the simultaneous state and unknown input estimation of complex systems via a multiple model strategy. *IET Control Theory and Applications*, 3(7) : 877–890, 2009.
- [14] R. J. Patton, P. Frank, and N. Clark. *Issues of Fault Diagnosis for Dynamic systems*. Springer-Verlag, 2000.
- [15] D. Söffker, T. Yu, and P. Müller. State estimation of dynamical systems with nonlinearities by using proportional-integral observer. *International Journal of Systems Science*, 26(9) : 1571–1582, 1995.
- [16] J. Sjöberg, Q. Zhang, L. Ljung, A. Benveniste, B. Delyon, P. Glorennec, H. Hjalmarsson, and A. Juditsky. Nonlinear black-box modeling in system identification : a unified overview. *Automatica*, 31(12) : 1691–1724, 1995.
- [17] K. Tanaka and H. Wang. *Fuzzy Control Systems design and analysis*. John Wiley & Sons, INC., New York, 2001.
- [18] F. J. Uppal, R. J. Patton, and M. Witczak. A neuro-fuzzy multiple-model observer approach to robust fault diagnosis based on the DAMADICS benchmark problem. *Control Engineering Practice*, 14(6) : 699–717, 2006.
- [19] A. N. Venkat, P. Vijaysai, and R. D. Gudi. Identification of complex nonlinear processes based on fuzzy decomposition of the steady state space. *Journal of Process Control*, 13(6) : 473–488, 2003.