

*THÈSE DE DOCTORAT EM MATHÉMATIQUES
DE L'UNIVERSITÉ JOSEPH FOURIER (GRENOBLE I)
préparée à l'Institut Fourier
Laboratoire de mathématiques
UMR 5582 CNRS - UJF
et à l'Instituto de Matemática
Universidade Federal do Rio Grande do Sul - UFRGS*

Términalité, Désingularisations et Applications Birationnelles Toriques

Leandro Colau Merlo

Soutenue à Porto Alegre le 10 Aut 2009 devant le jury:

Alvaro RITTATORE (Universidad de la República)

Angel PEREYRA (Universidad de la República)

Gérard GONZALEZ-SPRINBERG (Université Joseph Fourier), Directeur

Ivan Edgardo PAN PEREZ (Universidade Federal do Rio Grande do Sul), Co-Directeur

Luiz Gustavo DONINELLI MENDES (Universidade Federal do Rio Grande do Sul)

Au vu des rapports de Alvaro RITTATORE et Angel PEREYRA

Agradecimentos

Deixo meus agradecimentos:

Ao meu orientador Gerard Gonzalz-Sprinberg, cuja dedicação e empenho estiveram muito além do âmbito profissional e de maneira muito especial ao grande amigo e co-orientador deste trabalho Ivan Pan.

Aos membros da banca Alvaro Rittatore, Angel Pereyra e Luiz Gustavo Doninelli Mendez, por sua disponibilidade, suas correções e sugestões. A Angel também por sua grande hospitalidade no período em que estive no Uruguai e à Luis Gustavo, também pelos frequentes auxílios nos corredores da universidade.

Aos professores, colegas e funcionários do *Institut Fourier* e do Instituto de Matemática da Univercidade Federal do Rio Grande do Sul. No primeiro, um abraço aos amigos Max, Alvaro, Damien e claro ao super Gerolin, que cuidou de boa parte da burocracia da tese na França. No segundo, um alô aos professores Ada, Alexandre, Alveri, Claus, Cydara, Elismar, Flávia, Jaime, Leonardo, Liana, Luisa, Luis Fernando e Vilmar. Para a secretária Rosane, que me atura por muito tempo, vai um abraço bem apertado.

Agradeço ao Conselho Nacional de Desenvolvimento Científico e Tecnológico - CNPq, à Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nivel Superior - CAPES e ao governo francês, pelos valiosos auxílios financeiros em forma de bolsas de estudos.

Deixo também meus agradecimentos ao Marcos Sebastiani, meu maior inspirador no mundo da matemática, ao Fernando Cukierman, por sua ajuda e sua compreensão no início de meu doutorado, à Dileusa Disconzi e ao Alvaro Genro, que tiveram um papel fundamental.

Por fim meus agradecimentos àqueles que foram principal fonte de energia, que fizeram e fazem tudo ter sentido, meus amigos, dentre eles: Déia, Lady Ka, Babi, Alexadre, Cí, Mile, Joana, Rafael, Carlos Felipe, Jinho, Cacy, Vraja, Joyce, Paulinha, Carol, Bruno, Greta, Pablo, Cami, Marnes, Rodrigoão e Gariba.

Sumário

Agradecimentos	i
Resumo, Résumé, Abstract	v
Introdução	vii
Introduction	xii
1 Conceitos e Definições Preliminares	1
1.1 Generalidades de Geometria Algébrica	1
1.2 Geometria Convexa	5
1.2.1 Cones	5
1.2.2 Leques	8
1.3 Variedades Tóricas	9
1.3.1 Construção de Variedades Tóricas Via Cones e Leques	9
1.3.2 Ação do Toro e Suas Órbitas	12
1.3.3 Divisores	14
1.3.4 Morfismos e Aplicações Birracionais Tóricas	16
1.4 Variedades Quociente	18
1.4.1 Generalidades	18
1.4.2 Quocientes Abelianos	20
1.4.3 Quocientes Cíclicos	22
1.4.4 Descrição Tórica dos Quocientes Cíclicos	26
2 Algumas Propriedades de Cones e Objetos Relacionados	30
2.1 Cones de Índice 1	30

2.2	Sistema Minimal Gerador de Subsemigrupos de $\sigma \cap N$	32
2.3	Cones Standards	35
3	Variedades Tóricas Terminais	43
3.1	Resultados Conhecidos	43
3.2	Relação Entre Terminal de Dimensão n e Terminal, Gorenstein de Dimensão $n + 1$	46
3.3	Quocientes Cíclicos Terminais	49
3.4	Algumas subdivisões terminais de cones índice finito	53
4	Sobre Dessingularizações e Divisores Essenciais	56
4.1	Divisores e Componentes Essenciais	56
4.2	Componentes e Divisores Essencias Sobre Variedades Tóricas .	59
4.3	Propriedades do conjunto S^σ	62
4.4	Geometria dos Cones Simpliciais, Terminais, de Dimensão 4 e Índice 1	65
5	Transformações Elementares em Variedades de Fano com Número de Picard Igual a 1	85
5.1	Generalidades	85
5.2	Transformações Obtidas a Partir de Explosões Elementares sobre Variedades de Fano com $\rho = 1$	90
5.3	Transformações Elementares em \mathbb{P}^n	97
	Bibliografia	101

Resumo

Nesta tese, obtemos condições suficientes para terminalidade de variedades tóricas de dimensão arbitrária generalizando resultados conhecidos em dimensão 3 e 4. Classificamos as variedades tóricas \mathbb{Q} -fatoriais, terminais, Gorenstein de dimensão 4 que admitem G -dessingularização. Uma variedade algébrica X obtida pela explosão ponderada de um ponto regular invariante de uma variedade de Fano tórica de dimensão n e número de Picard igual a 1 é descrita por dois vetores em \mathbb{Z}^n . Em termos destes vetores descrevemos o cone nef e classificamos as contrações elementares de X , no sentido de Mori. No caso em que a variedade de Fano é o um espaço projetivo, apresentamos algumas famílias de exemplos onde X é terminal.

Résumé

Dans cette thèse on obtient des conditions suffisantes pour la terminabilité des variétés toriques de dimension arbitraire, généralisant des résultats connus en dimension 3 et 4. On classe les variétés toriques \mathbb{Q} -factorielles, terminales, Gorenstein de dimension 4 qui admettent un G -désingularisation. Une variété torique X obtenue par l'éclatement à poids d'un point régulier invariant d'une variété de Fano torique avec nombre de Picard égal à 1 est décrit par deux vecteurs en \mathbb{Z}^n . En termes de ces vecteurs on décrit le cône nef et on classe les contractions élémentaires de X au sens de Mori. Dans le cas où la variété de Fano est un espace projectif, on donne quelques familles d'exemples où les variétés éclatées sont terminales.

Abstract

In this thesis, we obtain sufficient conditions for terminality of toric varieties of arbitrary dimension generalizing known results in dimension 3 and 4. We classify the \mathbb{Q} -factorial, terminal, Gorenstein toric varieties of dimension 4 which admit G -desingularization. An algebraic variety X obtained by the weighted blowing-up of a regular invariant point of a toric Fano variety of dimension n and Picard's number equal to 1 is described by two vectors in \mathbb{Z}^n . In terms of these vectors we describe the nef cone and classify the elementary contractions of X in the Mori's sense. In the case where the Fano variety is a projective space, we present some families of examples where X is terminal.

Introdução

No final do século **XX** o estudo da geometria birracional teve importantes avanços vinculados ao chamado Programa do Modelo Minimal, introduzido por S. Mori no início dos anos 80. Nesse âmbito, uma classe de singularidades que aparece com importância crucial são as chamadas *singularidades terminais*. Em dimensão 3 estas singularidades foram classificadas, primeiramente no caso de variedades quociente, nos trabalhos independentes de diversos autores como em [Da2], [Fr] e [MS]. O caso geral em dimensão 3 foi obtido por Mori, Kollár, Shepherd-Barron em [Mo] e [KS]. As idéias centrais para a obtenção desta classificação se encontram nos trabalhos de M. Reid [Re1], [Re3].

Em dimensão 4, a classificação das singularidades terminais não é totalmente conhecida, contudo existem alguns resultados parciais no caso tórico e com singularidade isolada (ver [MS], [MMM]).

Por outro lado, na teoria de singularidades tóricas, são de especial interesse aquelas que admitem uma dessingularização essencial em algum sentido. Mais precisamente, dada uma variedade tórica afim $X_{\sigma,N}$ associada a um reticulado N (i.é, um \mathbb{Z} -módulo livre) de posto finito e um cone poliedral racional $\sigma \subset N_{\mathbb{R}} = N \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{R}$, é bem conhecido que uma dessingularização tórica (i.é, equivariante pela ação do toro) corresponde a uma subdivisão regular Σ de σ . Em [BG1] e [BG2] C. Bouvier e G. Gonzalez-Sprinberg provam que, dada uma subdivisão regular Σ de σ , o conjunto $sk^1\Sigma$, formado pelos vetores primitivos de N que geram algum cone unidimensional de Σ , contém o sistema minimal gerador G_{σ} do semigrupo $\sigma \cap N$. Quando, $sk^1\Sigma = G_{\sigma}$ dizemos que Σ é uma G -subdivisão regular e a dessingularização tórica associada é dita

G -dessingularização .

Num contexto diferente da geometria tórica, a existência de G -subdivisões regulares de um poliedral, racional e fortemente convexo também foi uma das conjecturas, apresentadas por A. Sebö em [Se], motivado por considerações em otimização combinatória. Ele apresenta uma demonstração desta conjectura no caso de dimensão 3.

De maneira independente C. Bouvier e G. Gonzalez-Sprinberg também provam a existência de G -subdivisões regulares em dimensão 3 e fornecem o primeiro contra exemplo de cone em dimensão 4 que não admite uma tal subdivisão. Dado um cone tridimensional σ , eles mostram ainda que: se σ tem índice maior que 1 então ele tem uma única G -subdivisão regular ; se σ tem índice igual a 1 então duas G -subdivisões regulares são obtidas uma da outra por um número finito de transformações elementares .

Em nosso trabalho, estamos interessados essencialmente nos problemas de classificação, por um lado das variedades tóricas terminais e por outro lado, das variedades tóricas que admitem G -dessingularizações . Neste sentido, obteremos critérios de terminalidade pra variedades tóricas de dimensão arbitrária e singularidade não necessariamente isolada, que generalizam resultados conhecidos em dimensão 3 e 4. Também classificamos as variedades tóricas \mathbb{Q} -fatoriais, terminais, Gorenstein de dimensão 4 que admitem G -dessingularização . Como aplicação, descrevemos o cone nef de variedades obtidas pela explosão ponderada de um ponto regular invariante de uma variedade de Fano tórica com número de Picard igual a 1. No caso em que a variedade de Fano é o um espaço projetivo, apresentamos algumas famílias de exemplos onde variedades explodidas são terminais.

O texto será desenvolvido da seguinte maneira:

O capítulo 1 tem como objetivo principal fixar notações e introduzir os conceitos mínimos para as próximas seções. Nele a maior parte dos resultados

é citada sem demonstração.

Começaremos com uma rápida exposição das noções e algumas propriedades de variedades algébricas e divisores. Em seguida, introduzimos os conceitos de cone (poliedral racional) e leque, a partir dos quais, na seção subsequente, descreveremos a construção das variedades tóricas e seus divisores e morfismos invariantes pela ação do toro. A última seção deste capítulo contém uma apresentação um pouco mais detalhada das variedades quociente, onde damos uma demonstração da bem conhecida caracterização das variedades tóricas afins \mathbb{Q} -fatoriais como quocientes abelianos [Teorema 1.20]. O capítulo termina com um primeiro resultado [Proposição 1.28] o qual caracteriza os quocientes cíclicos em termos do cone associado.

No capítulo 2 apresentamos um apanhado de resultados relativos a cones e objetos relacionados. Começaremos descrevendo algumas propriedades dos cones de índice 1. Na seção seguinte, apresentaremos uma prova de que dados, um reticulado de posto finito N e um cone fortemente convexo $\sigma \subset N_{\mathbb{R}} = N \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{R}$, todo subsemigrupo $S \subset \sigma \cap N$ possui um único conjunto minimal de geradores [Proposição 2.9]. Veremos em particular, que tal conjunto minimal de geradores se caracteriza como os elementos minimais em $S \setminus \{0\}$ de uma ordem parcial induzida em $\sigma \cap N$ pela operação de N . Finalizaremos o capítulo com o estudo dos cones que possuem pelo menos um muro (i.é, uma face de codimensão 1) regular, os quais serão chamados de cones standards. Fixado um muro regular de um cone standard σ e uma base que contenha os geradores extremais deste muro, o cone σ é representado por $\sigma = \mathfrak{s}(a_1, \dots, a_n)$, onde os a_i 's são as coordenadas do vetor extremal que não pertencente ao muro regular. Veremos, em particular [Proposição 2.14], que a variedade tórica correspondente ao cone standard σ é um quociente cíclico de tipo $\frac{1}{a_n}(a_1, \dots, a_{n-1}, -1)$.

No capítulo 3 abordaremos o problema de terminalidade de variedades tóricas, sobretudo no caso afim. Na primeira seção apresentamos alguns resultados conhecidos em dimensão 3 e 4. Em seguida mostraremos que a clas-

sificação das variedades tóricas terminais de dimensão n pode ser reduzido ao caso Gorenstein. Mais precisamente, mostraremos que todo cone terminal de dimensão n corresponde a um cone terminal de dimensão $n + 1$ e índice 1 [Proposição 3.6]. Além disso, veremos que sob certas condições, a terminalidade de um cone de índice 1 corresponde à terminalidade de duas de suas faces [Proposição 3.7]. A aplicação destes resultados aos quocientes cíclicos e em particular aos cones standards, nos permitirá obter algumas famílias de variedades tóricas terminais em qualquer dimensão [Teorema 3.12], as quais generalizam alguns casos importantes de dimensão 3 e 4 apresentados no início. Para finalizar, veremos [Proposição 3.14] que a terminalidade de um leque obtido pela subdivisão elementar de um cone regular corresponde a terminalidade de um único cone standard ou equivalentemente de um único quociente cíclico.

O capítulo 4 é dedicado ao estudo de dessingularizações e “divisores essenciais” sobre variedades tóricas. Daremos uma descrição de parte dos trabalhos de Bouvier e Gonzalez-Sprinberg [BG1],[BG2] e de S.Ishii e J. Kollár [IK]. Dada uma família \mathcal{F} de morfismos próprios e brracionais sobre uma variedade X , introduzimos os conceitos de divisor \mathcal{F} -essencial e componente \mathcal{F} -essencial, dos quais os diferentes tipos de divisores essenciais estudados em [BG1],[BG2] e [IK] são casos particulares.

Resulta dos trabalhos supracitados que se $\sigma \subset N_{\mathbb{R}}$ é um cone fortemente convexo e \mathcal{F} é a família das dessingularizações tóricas de X_{σ} , então o conjunto de divisores \mathcal{F} -essenciais corresponde ao sistema minimal gerador G_{σ} do semigrupo $\sigma \cap N$ e o conjunto de componentes \mathcal{F} -essenciais corresponde ao sistema minimal gerador S^{σ} do subsemigrupo de $\sigma \cap N$ formado pelos elementos que estão no interior de uma face singular de σ . Motivados por isto dedicamos a seção 4.3 ao estudo de propriedades de S^{σ} e sua relação com G_{σ} . Na última seção deste capítulo, nos concentraremos na questão da existência de G -dessingularizações, ou seja, a existência subdivisões regulares de um cone σ que contenha como vetores extremais apenas os elementos de G_{σ} , no caso de variedades tóricas Gorenstein, \mathbb{Q} -fatoriais e terminais

de dimensão 4. Mais precisamente, inspirados num importante exemplo de Bouvier-G-Sprinberg, mostraremos [Teorema 4.16] que a menos de isomorfismos os únicos cones cuja a variedade tórica tem as propriedades acima e admite uma G -dessingularização são os da forma $\sigma = \mathfrak{s}(1, 1, r - 1, r)$ e neste caso a G -subdivisão será única.

Por fim, o capítulo 5 termina com uma aplicação de alguns resultados anteriores no estudo de transformações elementares. Começamos fazendo uma breve exposição sobre contrações elementares no sentido de Mori. Mais especificamente, enunciaremos sem demonstração, os Teorema do Cone e Teorema da Contração para o caso tórico, os quais descrevem os tipos de contrações como fibrada, divisorial e tipo flip. Em seguida, dada uma variedade de Fano tórica F , com número de Picar $\rho(F) = 1$ e dada uma explosão elementar $E \rightarrow F$ de um ponto T -invariante $x \in F$, descreveremos o *cone fechado de curvas* ou *cone nef* associado à E bem como as contrações extremas desta variedade em termos de relações lineares entre os elementos do esqueleto de E (ver [Proposição 5.8]): isto consiste em fazer uma análise das *transformações elementares* obtidas a partir de F pela composição da inverção da explosão ponderada com uma contração elementar.

Para terminar, analisaremos a terminalidade de E no caso em que a variedade de Fano considerada é o espaço projetivo \mathbb{P}^n .

Introduction

A la fin du $XX^{\text{ème}}$ siècle, l'étude de la géométrie birationnelle fait des progrès importants qui ont été en rapport avec ce qu'on appelle le Programme du Modèle Minimal, introduit par S. Mori dans les années 80. Dans ce cadre, une classe de singularités dont l'importance est cruciale est celle des *singularités terminales*. En dimension 3 ces singularités ont été classifiées, premièrement dans le cas des variétés quotient, dans des travaux indépendants de divers auteurs comme [Da2], [Wh] et [MS]. Les idées centrales pour l'obtention de cette classification se trouvent dans les travaux de M. Reid [Re1] et [Re3].

En dimension 4 la classification des singularités terminales n'est pas connue entièrement, pourtant il existe quelques résultats partiels dans le cas torique et avec singularité isolée (voir [MS], [MMM]).

Par ailleurs, dans la théorie des singularités toriques, ce qui suscite un intérêt particulier sont celles qui admettent une désingularisation essentielle dans un certain sens. Plus précisément, étant donné une variété torique affine $X_{\sigma,N}$ associée avec un réseau N (c'est-à-dire, un \mathbb{Z} -module libre) de rang fini et a un cône polyédral rationnel $\sigma \subset N_{\mathbb{R}} = N \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{R}$, il est bien connu qu'une désingularisation torique (c'est-à-dire, équivariante par l'opération du tore) correspond à une subdivision régulière Σ de σ . Dans [BG1] et [BG2] C. Bouvier et G. Gonzalez-Sprinberg démontrent que pour toute subdivision Σ de σ , l'ensemble $sk^1\Sigma$, constitué par les vecteurs primitifs de N qui engendrent un cône de dimension 1 de Σ , contient un système minimal de générateurs G_{σ} du semi-groupe $\sigma \cap N$. Lorsque $sk^1\Sigma = G_{\sigma}$ on dit que Σ est une G -subdivision régulière et la désingularisation torique associée est dite

une G -désingularisation.

Dans un contexte différent de celui de la géométrie torique, l'existence d'une G -subdivision régulière d'un cône polyédral, rationnel et fortement convexe a été l'objet de l'une des conjectures de A. Sebö dans [Se], motivé par des considérations d'optimisation combinatoire. Il donne une démonstration de cette conjecture dans le cas de dimension 3.

Indépendamment, C. Bouvier et G. Gonzalez-Sprinberg donnent aussi une preuve de l'existence de G -subdivision régulière en dimension 3 et fournissent un premier contre-exemple de cône de dimension 4 qui n'admet pas de tel subdivision. De plus, ils démontrent aussi que pour un cône σ de dimension 3 on a: si σ a indice plus grand que 1, alors la G -subdivision régulière est unique; si σ a indice égal à 1, alors deux telles G -subdivisions sont obtenue l'une de l'autre en effectuant un nombre fini de transformations élémentaires.

Dans notre travail, on est intéressé essentiellement aux problèmes de classification, d'un côté des variétés toriques terminales, d'un autre côté aux variétés toriques qui admettent des G -désingularisations. Dans ce sens, on obtient des critères de terminalité pour des variétés toriques de dimension arbitraire et avec des singularités non nécessairement isolées, qui généralisent des résultats connus en dimension 3 et 4. On classe aussi les variétés toriques \mathbb{Q} -factorielles, terminales, Gorenstein de dimension 4 qui admettent un G -désingularisation. Comme application, on décrit le cône nef des variétés obtenues par l'éclatement à poids d'un point régulier invariant d'une variété de Fano torique avec nombre de Picard égal à 1. Dans le cas où la variété de Fano est un espace projectif, on donne quelques familles d'exemples où les variétés éclatées sont terminales.

Le texte est structuré de la manière suivante:

Dans le chapitre 1 on fixe des notations et on introduit un minimum de préliminaires dont on aura besoin dans la suite. La plupart des résultats sont

énoncés sans démonstration.

On commence avec un exposé rapide sur les variétés algébriques et les diviseurs définis sur celles-ci. Ensuite on introduit les notions de cône (polyédral rationnel) et d'éventail à partir desquelles, dans les prochaines sections, on décrira la construction des variétés toriques et leurs diviseurs équivariants aussi bien que les morphismes équivariants entre de telles variétés. La dernière section contient un exposé détaillé des variétés quotient où on donne une preuve du fait bien connu qu'une variété torique affine \mathbb{Q} -factorielle est caractérisée par la propriété d'être un quotient abélien. [Teorema 1.20]. Le chapitre se termine avec un premier résultat [Proposição 1.28] qui caractérise les quotients cycliques en termes du cône associé.

Dans le chapitre 2 on fait un rappel des résultats relatifs aux cônes et des objets liés à ceux-ci. Pour commencer on décrit certaines des propriétés des cônes d'indice 1. Dans la section suivante, on montre qu'étant donné un réseau de rang fini N et un cône fortement convexe $\sigma \subset N_{\mathbb{R}} = N \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{R}$, tout sous-semigroupe $S \subset \sigma \cap N$ possède un unique ensemble minimal de générateurs [Proposição 2.9]. On voit, en particulier, qu'un tel ensemble minimal de générateurs est caractérisé comme étant l'ensemble minimal dans $S \setminus \{0\}$ par rapport à un certain ordre partiel de $\sigma \cap N$ induit par l'opération de N . Pour finir ce chapitre on étudie les cônes qui possèdent au moins un mur (c'est-à-dire, une face de codimension 1) régulière, qui seront appelés *cônes standards*. Après avoir fixé un mur régulier d'un cône standard σ et une base qui contienne les générateurs extrémaux de ce mur, le cône σ est représenté par $\sigma = \mathfrak{s}(a_1, \dots, a_n)$ où les a_i 's sont les coordonnées du vecteur extrémal qui n'appartient pas au mur régulier. On montre, en particulier, que la variété torique qui correspond au cône standard σ est un quotient cyclique de type $\frac{1}{a_n}(a_1, \dots, a_{n-1}, -1)$ (voir [Proposição 2.14]).

Dans le chapitre 3 on aborde le problème de la terminalité de variétés toriques, surtout dans le cas affine. Dans la première section on rappelle quelques résultats connus en dimension 3 et 4. Ensuite on montre que la classification des variétés toriques terminales en dimension n peut être réduite au cas Go-

renstein. Plus précisément, on montre que tout cône terminal de dimension n correspond à un cône terminal de dimension $n+1$ et d'indice 1 [Proposição 3.6]. En plus, on verra que sous certaines conditions, la terminalité d'un cône d'indice 1 correspond à la terminalité de deux de ses faces [Proposição 3.7]. En appliquant ces résultats au cas des quotients cycliques, et en particulier aux cônes standards, on obtiendra quelques familles de variétés toriques terminales en toute dimension [Teorema 3.12]; ceci généralise quelques cas importants parmi ceux en dimension 3 et 4 qui ont été donnés au début. Pour finir, dans [Proposição 3.14] on montre que la terminalité d'un éventail obtenu par subdivision élémentaire d'un cône régulier, correspond à la terminalité d'un unique cône standard ou, de manière équivalente, d'un unique quotient cyclique.

Le chapitre 4 est dédié à l'étude des désingularisations et "diviseurs essentiels" sur des variétés toriques. On donne une description d'une partie des travaux de Bouvier et Gonzalez-Sprinberg [BG1],[BG2] ainsi que ceux de Ishii et Kollár [IK]. Étant donnée une famille \mathcal{F} de morphismes propres et birationnels sur une variété X on définit les notions de diviseur \mathcal{F} -essentiel et composante \mathcal{F} -essentielle qui incluent, comme cas particuliers, les différents types de diviseurs essentiels considérés dans [BG1],[BG2] et [IK].

Il résulte des travaux cités ci-dessus que si $\sigma \subset N_{\mathbb{R}}$ est un cône fortement convexe et \mathcal{F} est la famille des désingularisations toriques de X_{σ} , alors l'ensemble des diviseurs \mathcal{F} -essentiels correspond au système minimal de générateurs G_{σ} du semigroupe $\sigma \cap N$ et l'ensemble des composantes \mathcal{F} -essentielle au système minimal de générateurs S^{σ} du sous-semigroupe de $\sigma \cap N$ constitué par les éléments qui sont à l'intérieur d'une face singulière de σ . Motivés par ceci, on dédie la section 4.3 à l'étude des propriétés de S^{σ} et son rapport avec G_{σ} .

Dans la dernière section du chapitre on se concentre sur la question de l'existence, c'est-à-dire, l'existence de subdivisions régulières d'un cône σ qui ne contient, en tant que vecteurs extrémaux, que les éléments de G_{σ} . On s'intéresse au cas des variétés toriques Gorenstein, \mathbb{Q} -factorielles et termina-

les de dimension 4. Plus précisément, inspiré d'un exemple important donné dans [BG2], on montre [Teorema 4.16] qu'à isomorphismes près, les seuls cônes dont la variété torique associée satisfait les propriétés ci-dessus et admet une G -désingularisation, sont ceux de la forme $\sigma = \mathfrak{s}(1, 1, r - 1, r)$, de plus, cette désingularisation est unique.

Finalement, dans le chapitre 5 on donne une application des résultats précédents à l'étude des transformations élémentaires. Pour commencer on donne brièvement une description des contractions extrémales dans le sens de Mori. Plus précisément, on énonce sans démonstration les Théorèmes du Cône et de la Contraction dans le cas torique; ce dernier classifie les contractions dans les trois types fibrée, divisorielle et type flip. Ensuite, étant donné une variété de Fano torique F avec nombre de Picard $\rho(F) = 1$ et un éclatement élémentaire $E \rightarrow F$ de un point $x \in F$ fixe par l'opération du tore, on décrivons le *cône fermé de courbes* ou *cône nef* associé à E aussi bien que les contraction extrémales de cette variété, en termes de relations lineaires entre les elements de le squelette associée a E . (voir [Proposição 5.8]); ceci constitue une analyse des *transformations élémentaires* obtenues à partir de F par composition de l'inverse de l'éclatement élémentaire composé avec la contraction élémentaire.

Pour finir, on analyse la terminalité de E dans le cas particulier où la variété de Fano est l'espace projectif \mathbb{P}^n .

Capítulo 1

Conceitos e Definições

Preliminares

1.1 Generalidades de Geometria Algébrica

Esta seção tem por objetivo introduzir a terminologia associada às noções básicas de geometria algébrica que utilizaremos ao longo do texto, assim como fixar algumas notações. Nossas referências principais são [Har], [Fu1].

Uma *variedade algébrica*, ou simplesmente *variedade*, é um esquema integral X que é separado e de tipo finito sobre \mathbb{C} . Salvo menção explícita X será uma variedade *normal*, isto é, para todo $x \in X$ o anel local $\mathcal{O}_{X,x}$ de x é integralmente fechado; além disso, se x é um ponto de codimensão 1, então o anel local $\mathcal{O}_{X,x}$ é um anel de valorização discreta.

Uma subvariedade de X é um subesquema fechado de X , que é integral separado e de tipo finito, mas não necessariamente normal.

Denotamos por $Sing X$ ao *conjunto singular de X* , ou seja, ao conjunto formado pelos $x \in X$ tais que o anel local $\mathcal{O}_{X,x}$ não é regular. X é dita *lisa* ou *não singular* se $Sing X$ é vazio.

Um *divisor de Weil* em X é uma combinação linear formal

$$D = \sum_{i=1}^s a_i V_i,$$

onde a_i é um número inteiro e V_i é uma subvariedade (irredutível) de codimensão 1 em X , para todo $i = 1, \dots, s$. Denotamos $\text{Div}(X)$ o grupo de todos os divisores de Weil em X .

O *divisor de zeros e pólos* de uma função racional não nula $f : X \dashrightarrow \mathbb{C}$ é o divisor

$$\text{div}(f) := \sum_{V \subset X} \text{ord}_V(f) V,$$

onde o somatório é tomado sobre todas as subvariedades irredutíveis $V \subset X$ de codimensão 1 e $\text{ord}_V(f)$ é calculado em termos da valorização associada ao anel de valorização discreta $\mathcal{O}_{X,V}$. Todo divisor da forma $\text{div}(f)$ é dito *divisor principal*.

Um divisor $D \in \text{Div}(X)$ é dito *divisor de Cartier* ou *divisor localmente principal* se existe uma cobertura finita por abertos $X = \bigcup U_i$ tal que a restrição $D|_{U_i}$ de D a U_i é um divisor principal. Denotamos $\text{CDiv}(X)$ o subgrupo formado pelos divisores que são de Cartier.

Dois divisores D e D' em $\text{Div}(X)$ são *linearmente equivalentes*, e escrevemos $D \sim D'$, se $D - D'$ é principal.

O *grupo de classe* $Cl(X)$ e o *grupo de Picard* $Pic(X)$, podem ser respectivamente definidos como os quocientes de $\text{Div}(X)$ e de $\text{CDiv}(X)$, pela relação de equivalência linear.

Seja C uma curva em X , isto é, uma subvariedade de dimensão 1. Se $D \in \text{CDiv}(X)$ é um divisor de Cartier com $D|_{U_i} = \text{div}(f_i)$ para uma cobertura finita de abertos $X = \bigcup U_i$ e $f_i : X \dashrightarrow \mathbb{C}$ é uma função racional cuja restrição $f_i|_C$ a C é uma função racional bem definida e não nula em C , para todo i .

Então D define um divisor de Cartier em C

$$D|_C = \sum_i n_i P_i.$$

Neste caso, o número de interseção de D com C é definido como

$$D \cdot C := \sum_i n_i.$$

Se D' é outro divisor em X com $D' \sim D$ e $D' \cdot C$ bem definido, então $D \cdot C = D' \cdot C$. Por fim, se $[D] \in \text{Pic}(X)$ podemos escolher D' na classe, de $[D]$ para o qual $D' \cdot C$ bem definido, com efeito, basta somar a D um divisor principal adequado. O número de interseção de $[D]$ com C pode ser definido como $[D] \cdot C = D' \cdot C$.

Um divisor de Weil D é dito \mathbb{Q} -Cartier se existe um inteiro $r \in \mathbb{N}$ tal que rD é um divisor de Cartier. Uma variedade algébrica (normal) X é dita \mathbb{Q} -fatorial se qualquer divisor de Weil em X é \mathbb{Q} -Cartier.

Um divisor de Cartier D em X é *muito amplo* se o conjunto de seções globais do feixe invertível $\mathcal{O}(D)$ associado a D , define um mergulho de X num espaço projetivo. Mais precisamente, se $\Gamma(X, \mathcal{O}(D)) = \{f_0, \dots, f_N\}$ é o conjunto de seções globais de $\mathcal{O}(D)$, a aplicação racional

$$(f_0 : \dots : f_N) : X \dashrightarrow \mathbb{P}^N$$

é uma imersão fechada. Diz-se que D é *amplo* se existe um inteiro positivo m tal que mD é muito amplo.

Seja X uma variedade de dimensão n . Se $x \in X$ é um ponto fechado, $\mathcal{O}_{X,x}$ é regular de dimensão n se e somente se o $\mathcal{O}_{X,x}$ -módulo $\Omega_{X,x}$ de diferenciais de Kaelher é livre de posto n ; neste caso, o produto exterior

$$\omega_{X,x} := \bigwedge_{i=1}^n \Omega_{X,x} \simeq \mathcal{O}_{X,x} \omega_x$$

é livre de posto 1, onde ω_x é uma n -forma definida numa vizinhança U_x de x . Se $x, y \in X$ são pontos fechados tais que $U_x \cap U_y \neq \emptyset$ temos $\omega_x = f\omega_y$ onde $f = \frac{f_x}{f_y} : X \dashrightarrow \mathbb{C}$ é uma função racional bem definida em $U_x \cap U_y$, isto é, $f_x\omega_x = f_y\omega_y$. A família (U_x, f_x) define um divisor de Cartier em $X \setminus \text{Sing } X$, chamado um divisor canônico em $X \setminus \text{Sing } X$. Por abuso de linguagem, qualquer divisor linearmente equivalente a um divisor canônico chama-se o divisor canônico em $X \setminus \text{Sing } X$, que denotaremos por $K_{X \setminus \text{Sing } X}$. Finalmente o fecho de Zariski em X deste divisor é o divisor canônico K_X de X , que não é necessariamente de Cartier.

No caso em que o divisor canônico K_X é \mathbb{Q} -Cartier dizemos que a variedade X é \mathbb{Q} -Gorenstein e o menor inteiro j para o qual jK_X é um divisor de Cartier é dito *índice* de X . Quando o índice de X é igual a 1 dizemos que a variedade X é *Gorenstein*.

Seja $f : Y \rightarrow X$ um morfismo birracional entre variedades normais. O conjunto formado pelos $y \in Y$ onde f não é um isomorfismo local é dito conjunto excepcional de f e será denotado por $\text{Exc}(f)$. Dizemos que o morfismo f é divisorial se todas as componentes irredutíveis do conjunto excepcional de f tiverem codimensão 1, ou seja, se $\text{Exc}(f)$ é o suporte de um divisor em Y . Em particular, se X é \mathbb{Q} -fatorial então f é sempre divisorial.

Seja X uma variedade singular. Um morfismo próprio e birracional $f : Y \rightarrow X$ é dito uma *resolução de singularidades* ou uma *dessingularização de X* se Y é uma variedade algébrica não singular e a restrição $Y \setminus f^{-1}(\text{Sing } X) \rightarrow X \setminus \text{Sing } X$ é um isomorfismo.

Definição 1.1. Uma variedade algébrica \mathbb{Q} -Gorenstein X é dita *terminal* (resp. *canônica*) se existe uma dessingularização $f : Y \rightarrow X$ tal que a *fórmula da ramificação* associada

$$K_Y = f^*(K_X) + \sum_i a_i E_i$$

satisfaz $a_i > 0$ (resp. $a_i \geq 0$), onde $\{E_i\}$ é o conjunto dos divisores excepcionais primos de f .

1.2 Geometria Convexa

Nesta seção apresentaremos alguns conceitos e resultados básicos de geometria convexa, que de certo modo formam os alicerces da teoria de variedades tóricas. As principais referências desta seção e da seção subsequente são: [Da3], [Ew], [Fu2], [GLMS] e [KKMD].

No que segue, N denotará um reticulado, ou seja, um \mathbb{Z} -módulo livre de posto $n \geq 2$ e M denotará seu reticulado dual $\text{Hom}_{\mathbb{Z}}(N, \mathbb{Z})$. Dado um corpo k as extensões $M \otimes_{\mathbb{Z}} k$ e $N \otimes_{\mathbb{Z}} k$ serão denotadas respectivamente por M_k e N_k . Em particular, a aplicação canônica $\langle \cdot, \cdot \rangle : M \times N \rightarrow \mathbb{Z}$, $\langle u, v \rangle := u(v)$ se estende naturalmente a $\langle \cdot, \cdot \rangle : N_k \times M_k \rightarrow k$.

1.2.1 Cones

Um *cone (poliedral racional)* é um conjunto $\sigma \subset N_{\mathbb{R}}$ formado pelas combinações lineares não negativas de um número finito de vetores $v_1, \dots, v_r \in N$ e escrevemos $\sigma := \langle v_1, \dots, v_r \rangle$. Fixados, um reticulado N como acima e um cone poliedral racional $\sigma \in N_{\mathbb{R}}$, faremos um abuso de linguagem dizendo que σ é um cone em N para destacar que o conjunto de geradores de σ é tomado em N . Além disso, salvo menção explícita do contrário, quando nos referirmos a um cone estaremos supondo que ele é poliedral e racional.

Um cone σ em N é dito *simplicial* se ele admite um conjunto \mathbb{R} -linearmente independente de geradores. Se além disso, um conjunto de geradores de σ for parte de uma base de N então σ será dito *regular*. Um cone não regular é também chamado de *cone singular*.

Dado um cone $\sigma \subset N_{\mathbb{R}}$ definimos a dimensão $\dim \sigma$ (resp. codimensão $\text{codim } \sigma$) de σ como sendo a dimensão (resp. codimensão) do espaço vetorial $\mathbb{R}\sigma \subset N_{\mathbb{R}}$ gerado por σ . Além disso, definimos o interior relativo $\text{int } \sigma$ e a fronteira relativa por $\partial\sigma$ como sendo, respectivamente o interior e a fronteira de σ no espaço vetorial $\mathbb{R}\sigma$.

Dado um cone $\sigma \in N_{\mathbb{R}}$ denotaremos por $\tilde{\sigma}$ ao conjunto formado pelos vetores $u \in M_{\mathbb{R}}$ tais que $\langle u, v \rangle \geq 0$ para todo $v \in \sigma$. Verifica-se que $\tilde{\sigma}$ é um cone em $M_{\mathbb{R}}$, o qual chamaremos de *cone dual* de σ .

Uma *face* de um cone σ é um conjunto do tipo $\tau = \sigma \cap u^{\perp}$, onde $u \in \tilde{\sigma}$ e $u^{\perp} = \{v \in N_{\mathbb{R}} : \langle u, v \rangle = 0\}$. Neste caso, denotamos $\tau < \sigma$. Claramente σ é face dele mesmo e é dita *face imprópria* de σ , as demais faces de σ são ditas *faces próprias*. Verifica-se que toda face também é um cone e que toda face de uma face também é uma face.

Um cone $\sigma \subset N_{\mathbb{R}}$ é dito *fortemente convexo* se para todo $v \in \sigma$, não nulo, temos $-v \notin \sigma$. Verifica-se que σ é fortemente convexo se, e somente se, $\mathbb{R}\tilde{\sigma}$ gera $M_{\mathbb{R}}$.

Dado um reticulado N , um elemento $v \in N$ é dito *vetor primitivo* se $\alpha v \notin N$ para todo $\alpha \in (0, 1)$. Se σ é um cone fortemente convexo em N , diremos que um elemento primitivo $v \in \sigma \cap N$ é um vetor *extremal* de σ se v gera uma face de dimensão 1 de σ . O *esqueleto* de σ é o conjunto $sk^1\sigma$ formado pelos vetores extremais de σ . Claramente $sk^1\sigma$ é o menor conjunto de geradores em N de σ .

Se σ é um cone fortemente convexo em N , definimos a *multiplicidade* $mult(\sigma)$ de σ como sendo o índice do subgrupo gerado por $sk^1\sigma$ no reticulado $N_{\sigma} := N \cap \mathbb{R}\sigma$. Definimos também o *paralelepípedo fundamental* de σ como sendo o conjunto

$$Par_{\sigma} := \{v \in N_{\mathbb{R}} : v = \sum_{w \in sk^1\sigma} a_w w, \ 0 \leq a_w < 1\}.$$

Por simplicidade denotaremos o conjunto $Par_{\sigma} \cap N \setminus \{0\}$, dos pontos inteiros não nulos de Par_{σ} por P_{σ} .

Um *semigrupo* é um conjunto S , munido de uma operação binária, comutativa e com elemento neutro.

Proposição 1.2. *Seja um cone σ em N . Com as notações acima temos:*

i) (Lema de Gordan) O conjunto $\sigma \cap N$ é um semigrupo finitamente gerado com a operação induzida por N ;

ii) Se σ é fortemente convexo, então existe um único conjunto gerador G_σ do semigrupo $\sigma \cap N$ que está contido em qualquer outro conjunto de geradores de $\sigma \cap N$. Mais ainda, G_σ pode ser descrito como

$$G_\sigma = \{v \in \sigma \cap N \setminus \{0\} : v = v_1 + v_2 \text{ com } v_1, v_2 \in \sigma \cap N \Rightarrow v_1 = 0 \text{ ou } v_2 = 0\}$$

e vale

$$sk^1\sigma \subset G_\sigma \subset P_\sigma \cup sk^1\sigma;$$

iii) Se σ é simplicial então

$$\text{mult}(\sigma) = \text{card}(P_\sigma) + 1 = |\det(\text{col}(v_1, \dots, v_n))|.$$

Em particular temos que

$$\sigma \text{ é regular} \Leftrightarrow \text{mult}(\sigma) = 1 \Leftrightarrow P_\sigma = \emptyset \Leftrightarrow sk^1\sigma = G_\sigma.$$

Demonstração: Para os itens *i)* e *iii)* ver, por exemplo, [Fu2, pág. 12, Prop 1] e [GLMS, pág.19, Lemme 1.37], respectivamente. O ítem *ii)* será provado com maior generalidade na seção 2.2. ■

O conjunto G_σ definido na proposição acima é chamado de *sistema minimal gerador* ou *base de Hilbert* do semigrupo $\sigma \cap N$.

Dois cones $\sigma \subset N$ e $\tau \subset N'$ são isomorfos se existe um morfismo de reticulados $\varphi : N \rightarrow N'$ tal que a extensão $\varphi_{\mathbb{R}}$ satisfaz $\varphi_{\mathbb{R}}(\sigma) = \tau$ e cuja restrição $\varphi|_{\mathbb{R}\sigma \cap N} : \mathbb{R}\sigma \cap N \rightarrow \mathbb{R}\tau \cap N'$ é um isomorfismo de reticulados.

Se $\sigma \subset N_{\mathbb{R}}$ é um cone fortemente convexo de dimensão $n = \dim N_{\mathbb{R}}$ diremos que σ tem *índice finito* quando existem: um elemento $m \in \sigma \cap M$ e um inteiro positivo r de modo que $\langle m, v \rangle = r$ para todo $v \in sk^1\sigma$. O

menor inteiro positivo r batizando esta condição é dito *índice de σ* e neste caso definimos $\ell_\sigma := \frac{1}{r}m \in \check{\sigma} \cap M_{\mathbb{R}}$.

Definição 1.3. Um cone $\sigma \subset N_{\mathbb{R}}$ de índice finito é dito *terminal* (resp. *canônico*) se $\langle \ell_\sigma, v \rangle > 1$ (resp. $\langle \ell_\sigma, v \rangle \geq 1$) para todo $v \in \sigma \cap N \setminus (sk^1\sigma \cup \{0\})$.

Para verificar que um dado cone de índice finito é terminal (resp. canônico) basta verificar que $\langle \ell_\sigma, v \rangle > 1$ ou (resp. ≥ 1) para todo $v \in C \setminus sk^1\sigma$ onde C é qualquer conjunto de geradores do semigrupo $\sigma \cap N$. Isto decorre diretamente de que ℓ_σ é não negativa em $\sigma \cap N$. Normalmente um bom candidato é o conjunto P_σ pois, em geral, $P_\sigma \cup sk^1\sigma$ é um dos conjuntos geradores de $\sigma \cap N$ mais simples de se calcular.

Um politopo em $N_{\mathbb{R}}$ é o fecho convexo de um conjunto finito em $N_{\mathbb{R}}$. Dizemos que um politopo $K \subset N_{\mathbb{R}}$ é elementar se $K = \text{conv}(v_1, \dots, v_s)$ e $K \cap N = \{v_1, \dots, v_s\}$.

Uma caracterização de cone terminal é dada pelo lema abaixo.

Lema 1.4. *Seja σ um cone de índice finito, com esqueleto $sk^1\sigma = \{v_1, \dots, v_s\}$. Então σ é terminal se, e somente se, o politopo $\text{conv}(0, v_1, \dots, v_s)$ é elementar.*

1.2.2 Leques

Dado N um reticulado de posto finito, um *leque* em N (ou em $N_{\mathbb{R}}$) é uma família finita Σ de cones fortemente convexos em $N_{\mathbb{R}}$ com as seguintes propriedades:

- i)* se $\sigma \in \Sigma$ e $\tau < \sigma$ então $\tau \in \Sigma$;
- ii)* se $\sigma, \sigma' \in \Sigma$ então $\sigma \cap \sigma'$ é face de σ e de σ' .

Dado um leque Σ em N , denotaremos por Σ^k (resp. Σ^{\max}) ao subconjunto de Σ formado pelos cones de dimensão k (resp. máxima) e denotaremos por $\text{Sing}\Sigma$ ao conjunto dos cones singulares de Σ .

O suporte $|\Sigma|$ e o esqueleto $sk^1\Sigma$ de Σ são os conjuntos formados respectivamente, pela reunião dos cones e pela reunião dos esqueletos dos cones, de Σ , i.é.

$$|\Sigma| = \bigcup_{\sigma \in \Sigma} \sigma \quad \text{e} \quad sk^1\Sigma = \bigcup_{\sigma \in \Sigma} sk^1\sigma.$$

Um elemento $v \in sk^1\Sigma$ é dito um *vetor extremal* de Σ .

Um leque Σ será dito *simplicial*, *regular*, *canônico*, ou *terminal* se todos seu cones tiverem a respectiva propriedade. Diremos também que Σ é *completo* se $|\Sigma| = N_{\mathbb{R}}$.

Definição 1.5. Um leque Σ' é dito uma *subdivisão* de Σ se $|\Sigma| = |\Sigma'|$ e para cada $\sigma' \in \Sigma'$ existe um cone $\sigma \in \Sigma$ tal que $\sigma' \subset \sigma$. Neste caso escrevemos $\Sigma \preceq \Sigma'$. Uma *subdivisão de um cone* σ é uma subdivisão do leque formado pelas faces de σ . Dizemos que Σ' é *subdivisão elementar* de Σ se

$$\Sigma \preceq \Sigma'' \preceq \Sigma' \quad \Rightarrow \quad \Sigma = \Sigma'' \quad \text{ou} \quad \Sigma'' = \Sigma'.$$

Se além disso, $sk^1\Sigma' = sk^1\Sigma \cup \{v\}$, com $v \notin sk^1\Sigma$, então Σ' é dita *subdivisão elementar centrada em v* e denotamos $\Sigma' = \Sigma_v$. Por simplicidade escreveremos $\Sigma_{v,w} = (\Sigma_v)_w$. Note que podemos ter $\Sigma_{v,w} \neq \Sigma_{w,v}$.

1.3 Variedades Tóricas

Nesta seção, apresentaremos a definição de variedade tórica a partir de cones ou leques. Também descreveremos algumas propriedades das variedades tóricas e de objetos relacionados a estas em termos dos objetos convexo combinatórios associados.

1.3.1 Construção de Variedades Tóricas Via Cones e Leques

O conceito de variedade tórica é definido a partir das noções de cones, no caso afim e de leques no caso geral. Começaremos pelo caso afim.

Dados, um reticulado N e um cone $\sigma \subset N_{\mathbb{R}}$, considere a \mathbb{C} -álgebra $\mathbb{C}[S_{\sigma}]$, gerada como \mathbb{C} -espaço vetorial pelo conjunto de símbolos

$$\{\chi^m : m \in S_{\sigma} := \sigma \cap M\},$$

de modo que a multiplicação em $\mathbb{C}[S_{\sigma}]$ é induzida pela adição em M através da relação $\chi^m \cdot \chi^{m'} = \chi^{m+m'}$. Como S_{σ} é um semigrupo de tipo finito, pelo *lema de Gordan*, segue que $\mathbb{C}[S_{\sigma}]$ é uma \mathbb{C} -álgebra de tipo finito e portanto define uma variedade algébrica afim $X_{\sigma, N} := \text{Spec } \mathbb{C}[S_{\sigma}]$, chamada *variedade tórica afim* associada ao cone σ e ao reticulado N . Quando não houver ambigüidade com relação ao reticulado N denotaremos a variedade acima simplesmente por X_{σ} .

A princípio, poderíamos definir a variedade tórica associada ao cone σ como o espectro de $\mathbb{C}[\sigma \cap N]$, o que na definição precedente corresponde a X_{σ} , porém verifica-se uma melhor correlação entre as propriedades de $\text{Spec } \mathbb{C}[\sigma \cap M]$ e aquelas de σ .

Como é feito usualmente, chamaremos de *pontos* de X_{σ} apenas aos pontos fechados de $\text{Spec } \mathbb{C}[S_{\sigma}]$, ou seja, aos elementos de $M\text{spec } \mathbb{C}[S_{\sigma}]$. Isso se justifica, pois, como \mathbb{C} é algebricamente fechado, podemos recuperar a estrutura de esquema de X_{σ} a partir do conjunto de seus pontos fechados (ver [Har] prop 4.10.). Em função disso, frequentemente faremos um abuso de notação escrevendo $X_{\sigma} = M\text{spec } \mathbb{C}[S_{\sigma}]$.

Pela Nullstellensatz, verifica-se também que o conjunto de pontos de X_{σ} se identifica com

$$M\text{spec } \mathbb{C}[S_{\sigma}] = \text{Hom}_{\mathbb{C}\text{-alg}}(\mathbb{C}[S_{\sigma}], \mathbb{C}) = \text{Hom}_{\text{sgr}}(S_{\sigma}, \mathbb{C}),$$

onde $\text{Hom}_{\text{sgr}}(S_{\sigma}, \mathbb{C})$ é entendido como sendo o conjunto dos homomorfismos de semigrupo que levam 0 em 1. Em particular, dado $u \in M$, o elemento $\chi^u \in \mathbb{C}[S_{\sigma}]$ é, por definição, uma função regular em $X_{\sigma} = \text{Hom}_{\text{sgr}}(S_{\sigma}, \mathbb{C})$, cuja imagem em $x \in X_{\sigma}$ é $\chi^u(x) = x(u)$.

Quando o cone $\sigma = W \subset N_{\mathbb{R}}$ é um subespaço vetorial a variedade tórica afim associada é chamada de *toro algébrico* e será denotada por $T_{W,N}$ ou T_W . No caso em que $W = \{0\}$ denotaremos $T_{\{0\},N}$ simplesmente por T_N ou T .

Se $\sigma = W$ é um subespaço vetorial de $N_{\mathbb{R}}$ temos as seguintes identificações

$$T_W = \text{Hom}_{gr}(W^{\perp} \cap M, \mathbb{C}^*) = (N/W \cap N) \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{C}^* \simeq (\mathbb{C}^*)^d,$$

onde $d = \dim W^{\perp}$ e o último isomorfismo é obtido a partir de um isomorfismo entre $N/W \cap N$ e \mathbb{Z}^d . Se $\dim N_{\mathbb{R}} = n$ temos

$$T = \text{Hom}_{gr}(M, \mathbb{C}^*) = N \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{C}^* \simeq (\mathbb{C}^*)^n.$$

Se τ é uma face de σ então existe $u \in \check{\sigma}$ tal que $\tau = \check{\sigma} \cap u^{\perp}$. Logo $\check{\tau} \cap M = \check{\sigma} \cap M + \mathbb{Z}u$ e temos $\mathbb{C}[S_{\tau}] = \mathbb{C}[S_{\sigma}]_{\chi^u}$. Donde segue que X_{τ} é um aberto principal de X_{σ} . Em termos de homomorfismo de semigrupo, a inclusão de X_{τ} em X_{σ} é obtida através da restrição $x|_{S_{\sigma}}$ de cada homomorfismo de semigrupo $x : S_{\tau} \rightarrow \mathbb{C}$. Em particular, o toro algébrico $T_{\sigma \cap (-\sigma)}$ é um aberto denso de X_{σ} e portanto temos $\dim X_{\sigma} = \dim \check{\sigma}$. Ainda, χ^u , $u \in M$ são funções regulares em $T_{\sigma \cap (-\sigma)}$ e portanto, funções racionais em X_{σ} .

Se σ é um cone não fortemente convexo em N então podemos escrever $\sigma = \sigma' + W$, onde $W = \sigma \cap (-\sigma)$ e σ' é um cone fortemente convexo. Neste caso temos $\check{\sigma} = (\sigma')^{\vee} \cap W^{\perp}$. Por outro lado, o reticulado N se decompõem da seguinte forma $N = N' \oplus N''$ de modo que $\sigma_0 \subset N'_{\mathbb{R}}$ e $W = N''_{\mathbb{R}}$. Pondo $M' = \text{Hom}(N', \mathbb{Z})$ temos $M'_{\mathbb{R}} = W^{\perp}$, assim, considerando agora o cone dual de σ' em $M'_{\mathbb{R}}$ temos $\check{\sigma} = (\sigma')^{\vee}$, donde segue que $X_{\sigma,N} = X_{\sigma',N'}$. Com isso, sempre podemos reduzir o estudo das variedades tóricas afins ao caso onde o cone associado é fortemente convexo.

Dado um leque Σ em N , definimos a *variedade tórica* associada X_{Σ} , como sendo a variedade algébrica obtida a partir da colagem de todos os X_{σ} , com $\sigma \in \Sigma$, em suas faces comuns. Mais precisamente, se $\sigma, \tau \in \Sigma$, identificamos $X_{\sigma} \cap X_{\tau}$ com $X_{\sigma \cap \tau}$. Em particular, uma variedade tórica afim X_{σ} coincide com a variedade tórica X_{Σ} , onde Σ é o leque formado pelas faces do cone

σ . O Lema de separação [Fu2, §1.4] mostra que o esquema definido por esta colagem é separado.

1.3.2 Ação do Toro e Suas Órbitas

Abaixo descreveremos como a ação natural do toro algébrico se estende à uma ação na variedade tórica que o contém como aberto denso. Também apresentaremos algumas propriedades das órbitas associadas a esta ação. Para isso, utilizaremos a interpretação dos pontos de uma variedade tórica como homomorfismo de semigrupo.

O toro algébrico $T = Hom_{gr}(M, \mathbb{C}^*)$ tem uma estrutura natural de grupo com a operação definida da seguinte maneira: Se $t, t' \in T$ então $t.t'$ é o elemento de $Hom_{gr}(M, \mathbb{C}^*)$ que satisfaz

$$t.t'(m) := t(m).t'(m) \quad \text{para todo } m \in M.$$

Se σ é um cone fortemente convexo, então a ação de T em T definida pela operação acima se entende de maneira única a uma ação de T em X_σ através da aplicação

$$T \times X_\sigma \rightarrow X_\sigma, \quad (t, x) \mapsto t.x,$$

onde para cada $t \in T$ e $x \in X_\sigma$, o elemento $t.x \in Hom_{sgr}(S_\sigma, \mathbb{C})$ é definido por

$$t.x(m) := t(m).x(m) \quad \text{para todo } m \in \sigma \cap M.$$

Mais geralmente, se X_Σ é uma variedade tórica associada a um leque Σ qualquer, então a ação de T em cada aberto X_σ é compatível com a colagem nas faces comuns e portanto a operação de T como grupo se estende de maneira única a uma ação de T em X_Σ .

Com isso temos a seguinte caracterização de variedade tórica (ver [Su]).

Proposição 1.6. *Seja X é uma variedade algébrica separada e normal*

sobre \mathbb{C} que contém um toro algébrico T como aberto denso e tal que a ação natural de T em si mesmo se estende a uma ação de T em X . Então X é uma variedade tórica.

Passaremos a descrição de algumas propriedades de alguns conjuntos T -invariantes de uma variedade tórica, notadamente as T -órbitas.

Dado um cone fortemente convexo em N , considere o elemento de $X_\sigma = \text{Hom}_{\text{sgr}}(S_\sigma, \mathbb{C})$ dado por

$$x_\sigma(u) := \begin{cases} 1 & \text{se } u \in \sigma^\perp \cap M \\ 0 & \text{caso contrário.} \end{cases}$$

O elemento x_σ é chamado de *ponto distinto de X_σ* .

Proposição 1.7. *Seja Σ um leque em N .*

- i)* Para cada cone $\sigma \in \Sigma$ a T -órbita $\text{orb}(\sigma) = \text{orb}(x_\sigma) := \{t.x_\sigma : t \in T\}$ do ponto distinto x_σ esta contida em X_σ e se identifica com o toro algébrico $T_{\mathbb{R}\sigma} = \text{Hom}(\sigma^\perp \cap M, \mathbb{C})$. Em particular, temos $\dim \text{orb}(\sigma) = \dim \sigma^\perp$;
- ii)* $\text{orb}(\sigma)$ não contém nenhum outro ponto distinto x_τ diferente de x_σ e portanto existe uma bijeção entre Σ e o conjunto das T -órbitas de X_Σ ;
- iii)* Para $\sigma \in \Sigma$, o aberto X_σ de X_Σ é formado pela união disjunta das órbitas $\text{orb}(\tau)$ tais que $\tau < \sigma$;
- iv)* Para $\sigma, \tau \in \Sigma$ temos que τ é face de σ se, e somente se, a órbita $\text{orb}(\sigma)$ está contida no fecho Zariski $V(\tau) := \overline{\text{orb}(\tau)}$ da órbita $\text{orb}(\tau)$. Em particular, a única T -órbita relativamente fechada em X_σ é $\text{orb}(\sigma)$;

A proposição abaixo caracteriza o conjunto de pontos singulares de uma variedade tórica.

Proposição 1.8. *Seja σ um cone em N , então a variedade tórica afim X_σ é singular se, e somente se, σ é um cone singular. Neste caso, o conjunto*

singular de X_σ é formado pela união das órbitas $orb(\tau)$ tais que τ é face singular de σ , ou seja,

$$Sing X_\sigma = \bigcup_{\tau \text{ singular}, \tau < \sigma} orb(\tau).$$

Mais geralmente, se Σ é um leque em N , então o conjunto dos pontos singulares de X_Σ é dado por

$$Sing X_\Sigma = \bigcup_{\tau \text{ singular}, \tau \in \Sigma} orb(\tau).$$

Em particular, uma variedade tórica afim X_σ é regular se, e somente se, σ é regular. Neste caso X_σ é isomorfa a $\mathbb{C}^d \times \mathbb{C}^{*n-d}$, onde $d = \dim \sigma$.

Corolário 1.9. *Sejam σ um cone fortemente convexo em N e X_σ a variedade tórica afim associada.*

- i)* X_σ é regular se, e somente se, σ é regular. Neste caso X_σ é isomorfa a $\mathbb{C}^d \times \mathbb{C}^{*n-d}$, onde $d = \dim \sigma$.
- ii)* X_σ tem singularidade isolada se, e somente se, σ é singular e todos os muros de σ são regulares.

O item *ii)* do corolário acima motiva a seguinte

Definição 1.10. Um cone singular σ é de *singularidade isolada* se todo muro de σ é um cone regular .

1.3.3 Divisores

Dada uma variedade tórica X_Σ , associada a um leque Σ em N , denotaremos por $\text{Div}_T X_\Sigma$ (resp. $\text{CDiv}_T X_\Sigma$) ao conjunto dos divisores de Weil (resp. Cartier) em $\text{Div} X_\Sigma$ que são T -invariantes. Fixado um elemento $v \in sk^1 \Sigma$, denotaremos por D_v ao fecho Zariski $V(\langle v \rangle)$ em X_Σ , da órbita $orb(\langle v \rangle)$.

Segue da Proposição 1.7 acima que D é um divisor primo T -invariante de X_Σ se, e somente se, $D = D_v$ para algum $v \in sk^1\Sigma$. Disso concluímos que $\text{Div}_T X_\Sigma$ é um \mathbb{Z} -módulo livre, de posto $\text{card}(sk^1\Sigma)$, dado por

$$\text{Div}_T X_\Sigma = \bigoplus_{v \in sk^1\Sigma} \mathbb{Z}D_v.$$

Além disso, temos a decomposição

$$X_\Sigma \setminus T = \bigcup_{v \in sk^1\Sigma} D_v.$$

Dado $u \in M$, χ^u é uma função regular em T , e portanto, uma função racional em X_Σ . Verifica-se (ver, [Fu2, §3.3]) que o divisor de zeros de polos de χ^u é dado por

$$\text{div}(\chi^u) = \sum_{v \in sk^1\Sigma} u(v)D_v.$$

Se σ não é maximal, então $\text{div}(\chi^u)$ e $\text{div}(\chi^{u'})$ coincidem em X_σ se, e somente se, $u - u' \in \sigma^\perp \cap M =: M(\sigma)$. Disso segue que todo divisor de Cartier em X_σ corresponda a elementos de $\frac{M}{M(\sigma)}$ e portanto, temos a identificação

$$\text{CDiv}_T X_\Sigma = \varprojlim \frac{M}{M(\sigma)}.$$

Na proposição abaixo descrevemos o divisor canônico associado a uma variedade tórica e caracterizamos algumas propriedades destas em termos das propriedades dos leques associados.

Proposição 1.11. *Seja Σ um leque em N_R e seja $X = X_\Sigma$ a variedade tórica associada. O divisor canônico de X é dado por*

$$K_X = - \sum_{v \in sk^1\Sigma} D_v.$$

E temos as seguintes equivalências:

i) X é uma variedade completa \Leftrightarrow o leque Σ é completo ;

- ii)* X é uma variedade \mathbb{Q} -fatorial \Leftrightarrow todo cone $\sigma \in \Sigma$ é simplicial ;
- iii)* X é uma variedade \mathbb{Q} -Gorenstein \Leftrightarrow todo cone $\sigma \in \Sigma$ tem índice finito;
- iv)* X é uma variedade Gorenstein \Leftrightarrow todo cone $\sigma \in \Sigma$ tem índice 1;
- v)* X é uma variedade terminal (resp. canônica) \Leftrightarrow todo cone $\sigma \in \Sigma$ é um cone terminal (resp. canônico).

Demonstração: Ver por exemplo, [Oda, Thm. 1.11] para o item i) e [Mat, Prop. 14-3-1] para os demais itens. ■

1.3.4 Morfismos e Aplicações Birracionais Tóricas

Sejam X e X' duas variedades tóricas contendo respectivamente os toros T e T' como abertos densos. Dizemos que um morfismo $f : X \rightarrow X'$ é *equivariante* (com respeito a T e T') se $f(tx) = f(t)f(x)$ para todo $t \in T$ e todo $x \in X$. Um morfismo equivariante entre variedades tóricas é também chamado de *morfismo tórico*.

Sejam σ e σ' cones em N e N' respectivamente. Então existe um morfismo tórico $f : X_{\sigma'} \rightarrow X_{\sigma}$ se, e somente se, existe um morfismo de reticulados $\varphi : N' \rightarrow N$ tal que $\varphi_{\mathbb{R}}(\sigma) \subset \sigma'$. Neste caso, f e φ são obtidos um do outro através da seqüência de aplicações induzidas:

$$\begin{aligned} \sigma' \cap N' \xrightarrow{\varphi} \sigma \cap N &\iff \check{\sigma}' \cap M' \xrightarrow{\check{\varphi}} \check{\sigma} \cap M \\ &\iff \mathbb{C}[S_{\sigma'}] \rightarrow \mathbb{C}[S_{\sigma}] \\ &\iff X_{\sigma'} \xrightarrow{f} X_{\sigma}. \end{aligned}$$

Em particular temos:

- i)* f é um morfismo tórico birracional se, e somente se, φ induz um isomorfismo entre os reticulados $\mathbb{R}\sigma' \cap N'$ e $\mathbb{R}\sigma \cap N$;

ii) f é uma imersão fechada se, e somente se, φ induz um isomorfismo entre os reticulados $\mathbb{R}\sigma' \cap N'$ e $\mathbb{R}\sigma \cap N$ e $\varphi_{\mathbb{R}}(\sigma')$ é face de σ .

Mais geralmente temos

Proposição 1.12. *Sejam Σ e Σ' leques em N e N' respectivamente, satisfazendo $\mathbb{R}|\Sigma| = N_{\mathbb{R}}$ e $\mathbb{R}|\Sigma'| = N'_{\mathbb{R}}$. Existe um morfismo tórico $f : X_{\Sigma'} \rightarrow X_{\Sigma}$ se, e somente se, existe um morfismo de reticulados $\varphi : N' \rightarrow N$ tal que para todo $\sigma' \in \Sigma'$ existe $\sigma \in \Sigma$ satisfazendo $\varphi_{\mathbb{R}}(\sigma') \subset \sigma$. Neste caso:*

i) f é um morfismo birracional se, e somente se, φ é um isomorfismo;

ii) f é um morfismo próprio se, e somente se, $\varphi_{\mathbb{R}}^{-1}(|\Sigma'|) := |\Sigma|$.

Pela Proposição acima, não há perda de generalidade em restringir o estudo dos morfismos birracionais entre variedades tóricas ao caso em que os reticulados coincidem. No que segue apenas consideraremos leques num mesmo reticulado N . Neste caso, a menos de menção explícita do contrário, o morfismo φ da Proposição acima é a identidade.

A seguinte Proposição, descreve o conjunto excepcional de um morfismo tórico associado a uma subdivisão.

Proposição 1.13. *Seja Σ um leque em N e seja Σ' uma subdivisão de Σ . Então o conjunto excepcional $Exc(f)$ do morfismo associado $f : X_{\Sigma'} \rightarrow X_{\Sigma}$ é formado pela união das órbitas $orb(\sigma')$ tal que $\sigma' \in \Sigma' \setminus \Sigma$, ou seja,*

$$Exc(f) = \bigcup_{\sigma' \in \Sigma' \setminus \Sigma} orb(\sigma').$$

Definição 1.14. Uma desingularização $f : X \rightarrow Y$ é dita *desingularização tórica* se f é um morfismo tórico.

Como sabemos, uma desingularização $f : X \rightarrow Y$ é um morfismo próprio e birracional com X regular e tal que o conjunto excepcional $Exc(f)$ de f coincide com a imagem inversa $f^{-1}(Sing Y)$ do conjunto singular de Y . Deste

modo, como consequência das Proposições 1.8, 1.12 e 1.13 temos a seguinte:

Proposição 1.15. *Seja Σ' é uma subdivisão de Σ . Então o morfismo tórico associado $f : X_{\Sigma'} \rightarrow X_{\Sigma}$ é um morfismo próprio e birracional. Além disso, Σ' é uma subdivisão regular de Σ se, e somente se, o morfismo f é uma dessingularização tórica de X_{Σ} .*

Definição 1.16. Um morfismo tórico $f : X_{\Sigma'} \rightarrow X_{\Sigma}$ é dito *elementar* se Σ' é uma subdivisão elementar de Σ . Quando $\Sigma' = \Sigma_v$ é uma subdivisão centrada em v , também dizemos que f é uma *explosão elementar* ou uma *explosão ponderada*. Mais geralmente, uma aplicação birracional entre variedades tóricas $\psi : X \dashrightarrow Y$ é dita uma *transformação elementar* entre X e Y se ψ é um morfismo elementar ou a aplicação inversa de um morfismo elementar.

1.4 Variedades Quociente

1.4.1 Generalidades

É bem conhecido que as variedades tóricas \mathbb{Q} -fatoriais afins correspondem às variedades obtidas como quociente de \mathbb{C}^n por um grupo abeliano finito que age linearmente em \mathbb{C}^n . Em [Fu2, section 2.2] se trata o caso cíclico com algumas indicações para o caso geral. Nesta seção faremos uma apresentação detalhada deste resultado (Teorema 1.20) e estudaremos algumas propriedades relacionadas.

Como estamos interessados em grupos que agem linearmente em \mathbb{C}^n , podemos naturalmente supor que o grupo em questão é um subgrupo do *grupo geral linear* $GL(n, \mathbb{C})$ com a ação induzida por este. $SL(n, \mathbb{C}) \subset GL(n, \mathbb{C})$ denota o *grupo especial linear*, formado pelas matrizes com determinante igual a 1. Consideramos o $\mathbb{T}_{\mathbb{R}}$ ou $\mathbb{T}_{\mathbb{R}}^n$ ao toro real

$$\mathbb{T}_{\mathbb{R}} = \mathbb{T}_{\mathbb{R}}^n = \{(z_1, \dots, z_n) : |z_i| = 1, \quad i = 1, \dots, n\} \subset (\mathbb{C}^*)^n \subset GL(n, \mathbb{C}).$$

Seja G um subgrupo finito de $GL(n, \mathbb{C})$. A ação natural de $GL(n, \mathbb{C})$ em \mathbb{C}^n induz uma ação de G em \mathbb{C}^n . O conjunto \mathbb{C}^n/G , formado pelas órbitas desta ação tem estrutura natural de variedade algébrica afim dada por

$$\mathbb{C}^n/G = \text{Spec } \mathbb{C}[X_1, \dots, X_n]^G,$$

onde $\mathbb{C}[X_1, \dots, X_n]^G$ é a \mathbb{C} -álgebra formada pelos polinômios $f \in \mathbb{C}[X_1, \dots, X_n]$ tais que $f(g.p) = f(p)$ para todo $g \in G$ e $p \in \mathbb{C}^n$.

Definição 1.17. Uma variedade X é dita *variedade quociente* se X é isomorfa a \mathbb{C}^n/G onde G é um grupo finito. Dizemos que X é um *quociente abeliano* (resp. *cíclico*) se G é um grupo abeliano (resp. cíclico).

Na Proposição 1.19 abaixo resumiremos algumas propriedades das variedades quociente (ver [Pr, §3]). Antes precisamos de uma definição.

Definição 1.18. Um elemento $g \in GL(n, \mathbb{C})$ é dito uma *pseudo-reflexão* se o posto de $g - Id$ for igual a 1. Um subgrupo finito G de $GL(n, \mathbb{C})$ é dito *pequeno* se ele não contém pseudo-reflexões.

Proposição 1.19. *Seja G um subgrupo finito de $GL(n, \mathbb{C})$. Seja $p : \mathbb{C}^n \rightarrow \mathbb{C}^n/G$ a aplicação quociente. Então*

- i) $\text{Sing } \mathbb{C}^n/G = \{p(z) : g.z = z \text{ para algum } g \in G \setminus Id\}$;*
- ii) \mathbb{C}^n/G é lisa $\Leftrightarrow \mathbb{C}^n/G \simeq \mathbb{C}^n \Leftrightarrow G$ é gerado por pseudo-reflexões;*
- iii) Se \mathbb{C}^n/G é singular então existe um grupo pequeno $G' \subset GL(n, \mathbb{C})$ tal que $\mathbb{C}^n/G \simeq \mathbb{C}^n/G'$;*
- iv) Se G e G' são subgrupos pequenos de $GL(n, \mathbb{C})$ então \mathbb{C}^n/G e \mathbb{C}^n/G' são variedades isomorfas se, e somente se, G e G' são subgrupos conjugados.*

1.4.2 Quocientes Abelianos

Seja X um quociente abeliano. É bem conhecido que todo grupo abeliano finito de $GL(n, \mathbb{C})$ é conjugado a um subgrupo de $\mathbb{T}_{\mathbb{R}}^n$ (ver por exemplo [1]). Desta forma, pela Proposição 1.19, podemos supor que $X = \mathbb{C}^n/G$ onde $G \subset \mathbb{T}_{\mathbb{R}}^n$ é um grupo finito sem pseudo reflexões.

Considere o epimorfismo

$$Exp : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{T}_{\mathbb{R}}, \quad (x_1, \dots, x_n) \mapsto (e^{2\pi x_1 \sqrt{-1}}, \dots, e^{2\pi x_n \sqrt{-1}})$$

e defina $N_G := Exp^{-1}(G)$. Com isso, temos uma seqüência exata de grupos abelianos

$$\mathbb{Z}^n \hookrightarrow N_G \twoheadrightarrow G,$$

O grupo N_G é um reticulado de posto n . De fato, se a ordem de G é r , verifica-se que as coordenadas de cada elemento de N_G são números racionais cujo denominador pode ser escolhido como sendo r , em outras palavras, N_G é um subgrupo do reticulado $(\frac{1}{r}\mathbb{Z})^n$, donde segue que N_G também é um reticulado de posto n .

Teorema 1.20. *Seja X uma variedade tórica afim. X é \mathbb{Q} -fatorial se, e somente se, X é um quociente abeliano.*

Demonstração: Seja $X = \mathbb{C}^n/G$ um quociente abeliano. Então, como mencionado anteriormente, podemos supor $G \subset \mathbb{T}_{\mathbb{R}}$ e temos uma seqüência exata de grupos abelianos $\mathbb{Z}^n \hookrightarrow N_G \twoheadrightarrow G$ induzida por $Exp : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{T}_{\mathbb{R}}$. Sejam $M := Hom(\mathbb{Z}^n, \mathbb{Z})$ e $M_G := Hom(N_G, \mathbb{Z})$. Sejam $\{e_1, \dots, e_n\}$ e $\{e_1^*, \dots, e_n^*\} \subset M$ a base canônica de \mathbb{Z}^n e sua base dual respectivamente. Defina $\sigma := \langle e_1, \dots, e_n \rangle \subset N_{G, \mathbb{R}}$. Vamos mostrar que $\mathbb{C}^n/G = X_{\sigma, N_G}$.

Como σ é regular em \mathbb{Z}^n temos $\mathbb{C}^n = Mspec \mathbb{C}[M \cap \sigma]$. A ação de G em \mathbb{C}^n define uma ação de G em $\mathbb{C}[M \cap \sigma]$, que no caractere $\chi^u \in \mathbb{C}[M \cap \sigma]$ é dada por

$$g \cdot \chi^u = e^{2\pi \langle u, v \rangle \sqrt{-1}} \chi^u \quad \text{onde } v \in Exp^{-1}(g).$$

De fato, suponha $u = b_1 e_1^* + \dots + b_n e_n^* \in M \cap \check{\sigma}$. Para $g \in G$ tome $v = a_1 e_1 + \dots + a_n e_n \in \text{Exp}^{-1}(g)$. Assim se $x = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{C}^n$ temos

$$\begin{aligned}\chi^u(g.x) &= X_1^{b_1} \dots X_n^{b_n}(e^{2\pi a_1 \sqrt{-1}} x_1, \dots, e^{2\pi a_n \sqrt{-1}} x_n) \\ &= e^{2\pi(a_1 b_1 + \dots + a_n b_n) \sqrt{-1}} X_1^{b_1} \dots X_n^{b_n}(x_1, \dots, x_n) \\ &= e^{2\pi \langle u, v \rangle \sqrt{-1}} \chi^u(x).\end{aligned}$$

Basta mostrar que $\mathbb{C}[M \cap \check{\sigma}]^G = \mathbb{C}[M_G \cap \check{\sigma}]$. Como $\mathbb{Z}^n \subset N_G$ temos $M_G \subset M$ e portanto $\mathbb{C}[M_G \cap \check{\sigma}] \subset \mathbb{C}[M \cap \check{\sigma}]$. Para a outra inclusão note que

$$\begin{aligned}\chi^u \in \mathbb{C}[M \cap \check{\sigma}]^G &\Leftrightarrow \chi^u = e^{2\pi \langle u, v \rangle \sqrt{-1}} \chi^u \quad \text{para todo } v \in N_G \\ &\Leftrightarrow \langle u, v \rangle \in \mathbb{Z} \quad \text{para todo } v \in N_G \\ &\Leftrightarrow u \in M_G \cap \check{\sigma} \\ &\Leftrightarrow \chi^u \in \mathbb{C}[M_G \cap \check{\sigma}].\end{aligned}$$

Reciprocamente, seja σ um cone simplicial em N . Suponha $sk^1 \sigma = \{v_1, \dots, v_n\}$ e considere o reticulado $N' = \mathbb{Z}v_1 + \dots + \mathbb{Z}v_n$. Em particular, N' tem índice finito em N , dado por $[N : N'] = \text{mult } \sigma = r$. Logo $G := N/N'$ é um grupo abeliano finito de ordem r . Vamos mostrar que $X_\sigma = \mathbb{C}^n/G$.

Sejam e_1, \dots, e_n os vetores da base canônica de \mathbb{Z}^n . Considere o morfismo linear $\varphi : N' \rightarrow \mathbb{Z}^n$ dado por $v_i \mapsto e_i$, e seja $\varphi_{\mathbb{R}} : N'_{\mathbb{R}} \rightarrow \mathbb{R}^n$ a extensão de φ . Temos o seguinte diagrama comutativo com linhas exatas

$$\begin{array}{ccccccc} 0 & \longrightarrow & N' & \longrightarrow & N & \xrightarrow{p} & G & \longrightarrow & 0 \\ & & \downarrow \varphi & & \downarrow \varphi_{\mathbb{R}} & & \downarrow f & & \\ 0 & \longrightarrow & \mathbb{Z}^n & \longrightarrow & \mathbb{R}^n & \xrightarrow{\text{Exp}} & \mathbb{T}_{\mathbb{R}} & \longrightarrow & \text{Id}, \end{array}$$

onde f é definido como $f(g) := \text{Exp} \circ \varphi_{\mathbb{R}} \circ p^{-1}(g)$ para todo $g \in G$.

Pelo "Lema dos cinco" f é injetiva. A inclusão $G \hookrightarrow \mathbb{T}_{\mathbb{R}} \subset GL(n, \mathbb{C})$ define uma ação linear de G em \mathbb{C}^n . Por construção obtemos, usando a primeira parte, que $\mathbb{C}^n/G = X_\sigma$. ■

1.4.3 Quocientes Cíclicos

Nesta parte apresentaremos algumas propriedades dos quocientes cíclicos. Como anteriormente, sempre podemos supor que o grupo cíclico está em $\mathbb{T}_{\mathbb{R}}^n$.

Dado um elemento $g \in \mathbb{T}_{\mathbb{R}}$ de ordem r , então g se escreve como

$$g = (e^{2\pi \frac{a_1}{r} \sqrt{-1}}, \dots, e^{2\pi \frac{a_n}{r} \sqrt{-1}}).$$

onde a_1, \dots, a_n são números inteiros. De fato, se $g = (z_1, \dots, z_n)$ e e_i denota o i -ésimo vetor da base canônica de \mathbb{C}^n temos $e_i = g^r e_i = z_i^r e_i$, donde segue que z_i é uma raiz r -ésima da unidade e portanto existe um inteiro a_i tal que $z_i = e^{2\pi \frac{a_i}{r} \sqrt{-1}}$.

Isto motiva a seguinte

Definição 1.21. Se G é um grupo cíclico de ordem r , gerado por

$$(e^{2\pi \frac{a_1}{r} \sqrt{-1}}, \dots, e^{2\pi \frac{a_n}{r} \sqrt{-1}}).$$

onde a_1, \dots, a_n são números inteiros. Dizemos que o quociente cíclico \mathbb{C}^n/G é de *tipo* $\frac{1}{r}(a_1, \dots, a_n)$.

Claramente, o tipo de um quociente cíclico não é único. Mais precisamente, o lema abaixo mostra algumas propriedades relacionadas ao tipo de um quociente cíclico \mathbb{C}^n/G e as representações dos elementos de um grupo cíclico $G \subset \mathbb{T}_{\mathbb{R}}$.

Lema 1.22. *Seja $G \subset \mathbb{T}_{\mathbb{R}}$ um grupo cíclico de ordem r . Temos*

- i) Se $(e^{2\pi \frac{a_1}{s} \sqrt{-1}}, \dots, e^{2\pi \frac{a_n}{s} \sqrt{-1}}) \in G$ é um elemento de ordem s então $\text{mdc}(a_1, \dots, a_n, s) = 1$;*
- ii) Existe um gerador $(e^{2\pi \frac{a_1}{r} \sqrt{-1}}, \dots, e^{2\pi \frac{a_n}{r} \sqrt{-1}})$ de G tal que $\text{mdc}(a_1, \dots, a_n) = 1$;*

iii) G é um grupo pequeno se, e somente se, para qualquer gerador $(e^{2\pi\frac{a_1}{r}\sqrt{-1}}, \dots, e^{2\pi\frac{a_n}{r}\sqrt{-1}})$ de G temos $\text{mdc}(a_1, \dots, \widehat{a_i}, \dots, a_n, r) = 1$ para todo $i = 1, \dots, n$.

Demonstração:

i) Suponha $\text{mdc}(a_1, \dots, a_n, s) = d$ e defina $b_i := a_i/d$, $t := s/d$ e $h := (e^{2\pi\frac{b_1}{s}\sqrt{-1}}, \dots, e^{2\pi\frac{b_n}{s}\sqrt{-1}})$. Note que $g^t = (h^d)^t = h^s = Id$. Portanto $s|t$, donde $d = 1$.

ii) Seja $(e^{2\pi\frac{a_1}{r}\sqrt{-1}}, \dots, e^{2\pi\frac{a_n}{r}\sqrt{-1}})$ um gerador de G com $\text{mdc}(a_1, \dots, a_n) = d > 1$. Defina $b_i = a_i/d$ e $h = (e^{2\pi\frac{b_1}{r}\sqrt{-1}}, \dots, e^{2\pi\frac{b_n}{r}\sqrt{-1}})$. Para que h seja um gerador, basta que a ordem de h seja r . Suponha que existe $s \leq r$ tal que $h^s = Id$, então $g^s = (h^d)^s = Id$ donde $s = r$.

iii) Seja $g = (e^{2\pi\frac{a_1}{r}\sqrt{-1}}, \dots, e^{2\pi\frac{a_n}{r}\sqrt{-1}})$ um gerador de G . Suponha que G não é pequeno. Logo existe uma pseudo-reflexão $h = g^s$. Como o posto de $h - Id$ é igual a 1, existe $i_0 \in \{1, \dots, n\}$ tal que

$$e^{2\pi s \frac{a_{i_0}}{r} \sqrt{-1}} = 1 \quad \text{e} \quad e^{2\pi s \frac{a_i}{r} \sqrt{-1}} = 1 \quad \text{para todo} \quad i \neq i_0.$$

Logo, existem inteiros $t_1, \dots, \widehat{t_{i_0}}, \dots, t_n$ tais que $sa_i = t_i r$ para todo $i \neq i_0$. Seja $c = \text{mdc}(s, r)$ e defina $t := s/c$ e $d := r/c$. Com isso temos $ta_i = t_i d$ para todo $i \neq i_0$. Como $\text{mdc}(d, t) = 1$ segue que d divide a_i para todo $i \neq i_0$, donde $\text{mdc}(a_1, \dots, \widehat{a_{i_0}}, \dots, a_n, r) \geq d > 1$.

Reciprocamente, se $\text{mdc}(a_1, \dots, \widehat{a_{i_0}}, \dots, a_n, r) = d > 1$ para algum i_0 , então, pondo $s = r/d$ temos $e^{2\pi s \frac{a_i}{r} \sqrt{-1}} = 1$ para todo $i \neq i_0$. Por outro lado, pelo item i) temos $\text{mdc}(a_{i_0}, d) = \text{mdc}(a_1, \dots, a_n, r) = 1$, donde $e^{2\pi s \frac{a_{i_0}}{r} \sqrt{-1}} \neq 1$. Logo g^s é pseudo-reflexão e G não é pequeno. ■

Pela Proposição 1.19 *iii)* e pelo Lema 1.22 *iii)*, dado um quociente cíclico

de tipo $\frac{1}{r}(a_1, \dots, a_n)$, podemos supor

$$\text{mdc}(a_1, \dots, a_n) = 1 \quad \text{e} \quad \text{mdc}(a_1, \dots, \widehat{a}_i, \dots, a_n, r) = 1 \quad i = 1, \dots, n. \quad (*)$$

No que segue, a menos de menção explícita do contrario, quando nos referirmos ao tipo de um quociente cíclico estaremos supondo que valem as hipóteses (*) acima.

Proposição 1.23. *Dois quocientes cíclicos de tipos $\frac{1}{r}(a_1, \dots, a_n)$ e $\frac{1}{s}(b_1, \dots, b_n)$ respectivamente, são isomorfos se, e somente se, $r = s$ e existem, uma permutação $\delta \in S_n$ e um número inteiro α , tais que*

$$\text{mdc}(\alpha, r) = 1 \quad \text{e} \quad \alpha b_i \equiv a_{\delta(i)} \pmod{r}.$$

Demonstração: Ver [Fuj, Lemma 2]. ■

Proposição 1.24. *Seja X um quociente abeliano associado ao grupo $G \in \mathbb{T}_{\mathbb{R}}$ e a ao cone $\sigma \subset N_G = \text{Exp}^{-1}(G)$. Equivalem:*

- i)* X é uma variedade Gorenstein;
- ii)* $G \subset SL(n, \mathbb{C})$;
- iii)* X é canônica de índice 1;

Além disso, se X é um quociente cíclico de tipo $\frac{1}{r}(a_1, \dots, a_n)$ temos também a condição:

- iv)* $a_1 + \dots + a_n \equiv 0 \pmod{r}$.

Demonstração: Ver [Re2, Thm. 3.1]. ■

Dado um número real x , denotamos por $[x]$ ao menor inteiro maior ou igual a x . Ainda, se a e b são números inteiros com b não nulo denotaremos por $[a]_b$ ao menor inteiro não negativo cômputo com a módulo b .

Proposição 1.25. *Se X é um quociente cíclico de tipo $\frac{1}{r}(a_1, \dots, a_n)$, então X é canônico (resp. terminal) se, e somente se*

$$\sum_{i=1}^n [a_i k]_r \geq r \quad (\text{resp. } > r) \quad \text{para todo } k = 1, \dots, r-1.$$

Ou equivalentemente, se, e somente se,

$$\sum_{i=1}^n \left\lceil \frac{a_i k}{r} \right\rceil - \frac{1}{r} \sum_{i=1}^n a_i k \geq 1 \quad (\text{resp. } > 1) \quad \text{para todo } k = 1, \dots, r-1.$$

Demonstração: Para a primeira equivalência ver [YPG, Thm 4.11] e para a segunda equivalência basta usar o fato que

$$b \left\lceil \frac{a}{b} \right\rceil = a - [a]_b \quad \text{para } a, b \in \mathbb{Z}, b \neq 0.$$

■

Corolário 1.26. *Sejam a_1, \dots, a_n, r números inteiros, com r positivo. Se existe uma partição $\{I_1, \dots, I_s\}$ de $\{1, \dots, n\}$ e existem inteiros b_1, \dots, b_s, b tais que $\text{mdc}(b, r) = 1$ e*

$$b_k \equiv b \sum_{i \in I_k} a_i \pmod{r}, \quad \text{para todo } k = 1, \dots, s,$$

então o quociente cíclico de tipo $\frac{1}{r}(b_1, \dots, b_s)$ ser canônico (resp. terminal) implica o quociente cíclico de tipo $\frac{1}{r}(a_1, \dots, a_n)$ ser canônico (resp. terminal).

Demonstração: No caso que $b_k = \sum_{i \in I_k} a_i$, para todo $k = 1, \dots, s$, temos

$$\sum_{j=1}^s b_j = \sum_{i=1}^n a_i.$$

Logo o resultado segue da Proposição acima e do fato que

$$\sum_{i \in I_j} \left\lceil \frac{a_i k}{r} \right\rceil \geq \left\lceil \sum_{i \in I_j} \frac{a_i k}{r} \right\rceil = \left\lceil \frac{b_j k}{r} \right\rceil.$$

Com isso, o caso geral é consequência da Proposição 1.23. ■

1.4.4 Descrição Tórica dos Quocientes Cíclicos

Lema 1.27. *Seja N' um reticulado com base $\{e_1, \dots, e_n\}$, seja $v = a_1e_1 + \dots + a_n e_n$, com a_1, \dots, a_n inteiros e sejam t_1, \dots, t_n, r números inteiros, com r positivo e tais que*

$$a_1 t_1 + \dots + a_n t_n \in \{1 - r, 1 + r, -1 - r, -1 + r\}.$$

Para cada $i \in \{1, \dots, n\}$ defina

$$v_i := \begin{cases} e_i + \frac{t_i}{r} v & \text{se } a_1 t_1 + \dots + a_n t_n \in \{1 - r, -1 - r\} \\ e_i - \frac{t_i}{r} v & \text{se } a_1 t_1 + \dots + a_n t_n \in \{1 + r, -1 + r\}. \end{cases}$$

Então $N := N' + \frac{v}{r}\mathbb{Z} \subset N'_{\mathbb{R}}$ é um reticulado de posto n tendo $\{v_1, \dots, v_n\}$ como base.

Demonstração: Sem perda de generalidade podemos supor $N' = \mathbb{Z}^n$. Desta forma N está contido no reticulado $(\frac{1}{r}\mathbb{Z})^n$ de posto n . Como todo subgrupo de um reticulado de posto n também é um reticulado de posto menor ou igual a n , segue que N é um reticulado de posto $s \leq n$, mas como $\mathbb{Z}^n \subset N$ devemos ter $s = n$.

Continuaremos a demonstração apenas no caso em que $a_1 t_1 + \dots + a_n t_n = 1 - r$, os demais casos são análogos. Para mostrar que $\{v_1, \dots, v_n\}$ é uma base de N basta mostrar que $N'' = N$. Claramente $N'' := \mathbb{Z}v_1 + \dots + \mathbb{Z}v_n \subset N$.

Por outro lado, note que

$$\begin{aligned} \frac{1}{r}v &= v + \frac{(1-r)}{r}v \\ &= a_1e_1 + \cdots + a_n e_n + \frac{(a_1t_1 + \cdots + a_nt_n)}{r}v \\ &= a_1(e_1 + \frac{t_1}{r}v) + \cdots + a_n(e_n + \frac{t_n}{r}v) \\ &= a_1v_1 + \cdots + a_nv_n. \end{aligned}$$

Assim, se $w \in N$ temos

$$\begin{aligned} w &= \alpha_1e_1 + \cdots + \alpha_n e_n + \frac{\alpha}{r}v, \quad (\text{com } \alpha, \alpha_1, \dots, \alpha_n \text{ inteiros}) \\ &= \alpha_1(v_1 - \frac{t_1}{r}v) + \cdots + \alpha_n(v_n - \frac{t_n}{r}v) + \frac{\alpha}{r}v \\ &= \alpha_1v_1 + \cdots + \alpha_nv_n - (\alpha_1t_1 + \cdots + \alpha_nt_n - \alpha)\frac{v}{r} \\ &= \alpha_1v_1 + \cdots + \alpha_nv_n - (\alpha_1t_1 + \cdots + \alpha_nt_n - \alpha)(a_1v_1 + \cdots + a_nv_n) \\ &= \beta_1v_1 + \cdots + \beta_nv_n, \quad (\text{com } \beta_1, \dots, \beta_n \text{ inteiros}). \end{aligned}$$

Portanto $N \subset N''$. ■

Proposição 1.28. *Seja X uma variedade tórica \mathbb{Q} -fatorial e seja N um reticulado de posto $n = \dim X$ e base $\{v_1, \dots, v_n\}$. Equivalem:*

- i)* X é isomorfa ao quociente cíclico de tipo $\frac{1}{r}(a_1, \dots, a_n)$, com $\text{mdc}(a_1, \dots, a_n) = 1$;
- ii)* Existem, um vetor primitivo $v = a_1v_1 + \cdots + a_nv_n \in N$ e inteiros t_1, \dots, t_n tais que

$$\sigma = \langle v_1 + t_1v, \dots, v_n + t_nv \rangle, \quad r = \text{mult } \sigma \quad e \quad X \simeq X_{\sigma, N}.$$

Nas situação acima vale $r = |1 + \sum_{i=1}^n a_i t_i|$.

Demonstração:

(i) \Rightarrow ii): Suponha que X é isomorfa a um quociente cíclico de tipo $\frac{1}{r}(a_1, \dots, a_n)$, com $\text{mdc}(a_1, \dots, a_n) = 1$. Sejam e_1, \dots, e_n os elementos da base canônica de

\mathbb{Z}^n e seja $u = a_1e_1 + \cdots + a_n e_n$. Por hipótese, temos $X \simeq \mathbb{C}^n/G$, onde $G \subset \mathbb{T}_{\mathbb{R}}$ é o grupo gerado por $g = \text{Exp}(\frac{u}{r})$. É fácil ver que $N_G = \text{Exp}^{-1}(G) = \mathbb{Z}^n + \frac{u}{r}\mathbb{Z}$. Como vimos na demonstração do Teorema 1.20, temos $X \simeq X_{\sigma, N_G}$ onde $\sigma = \langle e_1, \dots, e_n \rangle \subset N_G$. Como $\text{mdc}(a_1, \dots, a_n) = 1$ existem inteiros t_1, \dots, t_n tais que $a_1t_1 + \cdots + a_nt_n = -1 + r$. Pondo

$$u_i = e_i - \frac{t_i}{r}u \quad \text{para todo } i \in \{1, \dots, n\},$$

segue do Lema 1.27 que $\{u_1, \dots, u_n\}$ é uma base de N_G . Nesta base temos

$$\begin{aligned} v &:= a_1u_1 + \cdots + a_nu_n \\ &= a_1e_1 + \cdots + a_ne_n - (a_1t_1 + \cdots + a_nt_n)\frac{u}{r} \\ &= u - \frac{(-1+r)}{r}u = \frac{1}{r}u. \end{aligned}$$

Donde

$$e_i = u_i + t_iv, \quad \text{para todo } i \in \{1, \dots, n\}.$$

Como \det_{N_G} é uma função multilinear alternada e $v = a_1u_1 + \cdots + a_nu_n$ temos

$$\det_{N_G}(u_1 + t_1v, \dots, u_n + t_nv) = (1 + \sum_{j=1}^n a_jt_j)\det_{N_G}(u_1, \dots, u_n).$$

Assim, como $\{u_1, \dots, u_n\}$ é base de N_G segue que

$$\text{mult } \sigma = |\det_{N_G}(u_1 + t_1v, \dots, u_n + t_nv)| = |(1 + \sum_{j=1}^n a_jt_j)| = r$$

Com isso, mostramos que a parte ii) do enunciado é válida no caso do reticulado N_G com a base descrita acima. Para concluir que o resultado vale para o reticulado N com a base $\{v_1, \dots, v_n\}$, considere o isomorfismo $\varphi : N_G \rightarrow N$ dado por $u_i \mapsto v_i$. Então, $X_{\sigma, N_G} \simeq X_{\varphi(\sigma), N}$ e temos

$$sk^1 \varphi(\sigma) = \{u_1 + t_1v', \dots, u_n + t_nv'\},$$

onde $v' := \varphi(v) = a_1u_1 + \dots + a_nu_n$. Claramente $r = \text{mult } \sigma = \text{mult } \varphi(\sigma)$.

(**ii** \Rightarrow **i**): Por hipótese, existe um vetor primitivo $v = a_1v_1 + \dots + a_nv_n \in N$ e inteiros t_1, \dots, t_n tais que

$$\sigma = \langle v_1 + t_1v, \dots, v_n + t_nv \rangle$$

é um cone de multiplicidade r e $X \simeq X_{\sigma, N}$. Defina

$$e_i = v_i + t_iv \quad \text{para todo } i \in \{1, \dots, n\}$$

e denote N' o reticulado gerado por $sk^1\sigma$. Como feito na demonstração do Teorema 1.20, X_σ é um quociente abeliano \mathbb{C}^n/G com G definido pela seqüência exata $N' \hookrightarrow N \twoheadrightarrow G$. Para mostrar que X_σ é um quociente cíclico de tipo $\frac{1}{r}(a_1, \dots, a_n)$, basta mostrar que $N = N' + \frac{u}{r}\mathbb{Z}$, com $u = a_1e_1 + \dots + a_ne_n$. Como feito acima temos $r := \text{mult } \sigma = |\det_N(v_1 + t_1v, \dots, v_n + t_nv)| = |(1 + \sum_{j=1}^n a_jt_j)|$, donde concluímos que $a_1t_1 + \dots + a_nt_n \in \{-1 + r, -1 - r\}$. Note que

$$\begin{aligned} u &= a_1e_1 + \dots + a_ne_n \\ &= a_1v_1 + \dots + a_nv_n + (a_1t_1 + \dots + a_nt_n)v \\ &= (1 + (a_1t_1 + \dots + a_nt_n))v. \end{aligned}$$

Portanto

$$v_i = e_i - t_iv = \begin{cases} e_i - t_i\frac{u}{r} & \text{se } a_1t_1 + \dots + a_nt_n = -1 + r, \\ e_i + t_i\frac{u}{r} & \text{se } a_1t_1 + \dots + a_nt_n = -1 - r. \end{cases}$$

O resultado segue do lema 1.27. ■

Capítulo 2

Algumas Propriedades de Cones e Objetos Relacionados

Neste capítulo definiremos a família de cones standards e apresentaremos algumas propriedades dos cones poliedrais racionais que serão utilizadas ao longo do texto.

2.1 Cones de Índice 1

Começaremos apresentando algumas propriedades dos cones de índice 1.

Proposição 2.1. *Seja $\sigma \subset N_{\mathbb{R}}$ um cone racional.*

i) σ é regular $\Rightarrow \sigma$ é terminal e de índice 1;

ii) σ é de índice 1 $\Leftrightarrow M \cap \text{int } \check{\sigma} = \ell_{\sigma} + \check{\sigma} \cap M \Rightarrow \sigma$ é canônico.

Demonstração: O item *i)* é imediato.

ii) Suponha que σ é de índice 1. Provaremos apenas que $M \cap \text{int } \check{\sigma} = \ell_{\sigma} + \check{\sigma} \cap M$.

(\subseteq) : Por hipótese temos $\ell_{\sigma} \in \check{\sigma} \cap M$ e como

$$M \cap \text{int } \check{\sigma} = \{m \in \check{\sigma} \cap M : \langle m, v \rangle > 0 \quad \forall v \in \text{sk}^1 \sigma\},$$

é imediato da definição que $\ell_\sigma \in M \cap \text{int } \check{\sigma}$ e conseqüentemente

$$\ell_\sigma + \check{\sigma} \cap M \subseteq M \cap \text{int } \check{\sigma}.$$

(\supseteq) : Seja $m \in M \cap \text{int } \check{\sigma}$ e tome $m' := m - \ell_\sigma \in M$. Dado $v \in \text{sk}^1 \sigma$ temos $\langle m, v \rangle > 0$, pois caso contrario teríamos $m \in \check{\sigma} \cap v^\perp \subset \partial \check{\sigma}$. Assim, como $\langle m, v \rangle$ é um inteiro positivo temos $\langle m', v \rangle = \langle m, v \rangle - 1 \geq 0$, donde $m' \in \check{\sigma} \cap M$ e $m = \ell_\sigma + m'$.

As outras afirmações são imediatas. ■

Lembramos que um cone σ é de *singularidade isolada* se todo muro de σ é um cone regular, ou equivalentemente, a variedade tórica associada X_σ tem singularidade isolada.

Lema 2.2. *Seja σ um cone simplicial com $\text{sk}^1 \sigma = \{v_1, \dots, v_k\}$.*

i) σ é de singularidade isolada $\Leftrightarrow \emptyset \neq P_\sigma \subset \text{int } \sigma$.

ii) Se $v \in P_\sigma$ então existe um único $w \in \sigma \cap N$ tal que

$$v + w = v_1 + \dots + v_k.$$

Além disso, se $v \in P_\sigma \cap \text{int } \sigma$ então $w \in P_\sigma \cap \text{int } \sigma$

Demonstração:

i) Se σ é um cone singular segue da Proposição 1.2. *iii)*, que $P_\sigma \neq \emptyset$. É imediato da definições que $\partial \sigma$ é o conjunto formado pela reunião dos muros de σ e que $P_\tau = P_\sigma \cap \tau$ para qualquer $\tau < \sigma$. Desta forma temos que

$$\begin{aligned} \sigma \text{ é de singularidade isolada} &\Leftrightarrow \tau \text{ é regular } \forall \tau \text{ muro de } \sigma; \\ &\Leftrightarrow P_\tau = \emptyset \quad \forall \tau \text{ muro de } \sigma; \\ &\Leftrightarrow P_\sigma \cap \partial \sigma = \emptyset; \\ &\Leftrightarrow P_\sigma \subset \text{int } \sigma. \end{aligned}$$

ii) Seja $v \in P_\sigma$, então $v = \alpha_1 v_1 + \cdots + \alpha_k v_k \in N$, com $0 \leq \alpha_i < 1 \forall i$. Defina $w = (1-\alpha_1)v_1 + \cdots + (1-\alpha_k)v_k$. Por hipótese $sk^1\sigma$ é LI e portanto w é o único vetor em $N_{\mathbb{R}}$ tal que $v + w = v_1 + \cdots + v_k$. Como v e $v_1 + \cdots + v_k$ pertencem a $\sigma \cap N$ segue que w também pertence a $\sigma \cap N$. Em particular, se $v \in P_\sigma \cap \text{int } \sigma$ temos $0 < \alpha_i < 1 \forall i$ e portanto $0 < 1 - \alpha_i < 1 \forall i$, donde $w \in P_\sigma \cap \text{int } \sigma$. ■

Proposição 2.3. *Seja $\sigma \subset N_{\mathbb{R}}$ um cone simplicial, terminal e de índice 1. Então toda face de σ com dimensão menor ou igual a 3 é regular.*

Demonstração: Suponha que existe uma face singular $\tau = \langle v_1, v_2, v_3 \rangle < \sigma$ de dimensão 3. Como σ é terminal segue que τ também é terminal. Por outro lado, todo cone singular e terminal de dimensão 3 é de singularidade isolada, logo, pelo Lema 2.2. *i)*, temos $\emptyset \neq P_\tau \subset \text{int } \tau$. Seja $v \in P_\tau$, pelo Lema 2.2. *ii)*, existe $w \in P_\tau$ tal que $v + w = v_1 + v_2 + v_3$. Como σ tem índice 1 temos $\ell_\sigma(u) \in \mathbb{Z}$ para todo $u \in N$, desta forma, como σ é terminal, temos $\ell_\sigma(u) \geq 2$ para todo $u \in P_\tau$, donde

$$3 = \ell_\sigma(v_1 + v_2 + v_3) = \ell_\sigma(v) + \ell_\sigma(w) \geq 4.$$

Absurdo. ■

Corolário 2.4. *Seja X uma variedade tórica Gorenstein, terminal e \mathbb{Q} -fatorial. Se $\dim X = 3$ então X é regular e se $\dim X = 4$ então X é regular ou de singularidade isolada.*

2.2 Sistema Minimal Gerador de Subsemigrupos de $\sigma \cap N$

Dados, um reticulado de posto finito N e um cone $\sigma \subset N_{\mathbb{R}}$, o Lema de Gordan afirma que $\sigma \cap N$ é um semigrupo finitamente gerado. Ademais, é bem conhecido que existe um único conjunto “minimal” de geradores de $\sigma \cap N$

e somente se, σ é fortemente convexo. Apresentaremos uma demonstração deste fato observando que quando o cone σ é fortemente convexo, então a operação de $\sigma \cap N$ induz uma relação de ordem parcial em $\sigma \cap N$, a qual tem a propriedade que o menor conjunto de geradores de qualquer semigrupo $S \subset \sigma \cap N$ se caracteriza como sendo o conjunto dos elementos de $S \setminus \{0\}$ que são minimais pela dita relação de ordem parcial.

Definição 2.5. Seja $\sigma \subset N_{\mathbb{R}}$ um cone racional e seja $S \subset \sigma \cap N$ um subsemigrupo. Um conjunto G de geradores do subsemigrupo S é dito *sistema minimal gerador* ou *base Hilbert* de S se ele está contido em todo conjunto gerador de S .

Está implícito na definição que quando existe um sistema minimal gerador de $S \subset \sigma \cap N$ ele é único. Neste caso, o sistema minimal gerador de $\sigma \cap N$ é denotado por G_{σ} .

Como dissemos acima, uma condição necessária para que G_{σ} exista é que σ seja fortemente convexo. De fato, se σ não é fortemente convexo podemos escrever $\sigma = \tau + W$, onde τ é um cone fortemente convexo e $W \neq \{0\}$ é um subespaço vetorial de $N_{\mathbb{R}}$. Se G_{σ} existisse deveríamos ter $G_{\sigma} \cap W$ contido em qualquer conjunto de geradores do semigrupo de $W \cap N$, o que não é possível.

Definição 2.6. Seja N um reticulado de posto finito e seja $\sigma \subset N_{\mathbb{R}}$ um cone. Definimos uma relação \preceq em $\sigma \cap N$ da seguinte forma: Dados $u, v \in \sigma \cap N$ temos

$$u \preceq v \Leftrightarrow v \in u + \sigma.$$

É fácil verificar que a relação acima é reflexiva e transitiva para qualquer cone $\sigma \subset N_{\mathbb{R}}$, contudo esta relação será antisimétrica se, e somente se, σ é um cone fortemente convexo. Com isso temos a seguinte proposição:

Proposição 2.7. *A relação \preceq define uma relação de ordem parcial em $\sigma \cap N$ se, e somente se, σ é um cone fortemente convexo.*

De agora até o final da seção todo cone $\sigma \subset N_{\mathbb{R}}$ será fortemente convexo.

Definição 2.8. Dado um conjunto não vazio $C \subset \sigma \cap N$, dizemos que um elemento $v \in C$ é um *elemento minimal de C* , com respeito a \preceq , se para todo $u \in C$ tal que $u \preceq v$ temos $u = v$.

Se existem elementos minimais em C denotaremos por $\min C$ ao conjunto formado por estes elementos.

Proposição 2.9. *Seja $\sigma \subset N_{\mathbb{R}}$ um cone fortemente convexo e seja $C \subset \sigma \cap N$ um conjunto não vazio. Então*

- i) $\min C$ é um conjunto não vazio;*
- ii) $\min C = \{0\} \Leftrightarrow 0 \in C$;*
- iii) Se C é um subsemigrupo de $\sigma \cap N \setminus \{0\}$, então $\min(C \setminus \{0\})$ é o sistema minimal gerador de C . Em particular, $\min(\tau \cap N \setminus \{0\}) = G_{\tau}$ para toda face $\tau < \sigma$;*
- iv) Se $0 \notin C$ então $G_{\sigma} \cap C \subset \min C$.*

Demonstração:

i) Pelo Lema de Zorn, basta mostrar que todo subconjunto totalmente ordenado de C tem uma cota inferior. Seja $T \subset C$ um subconjunto totalmente ordenado. Seja $c = \inf\{|v| : v \in T\}$, onde $|\cdot|$ denota a norma euclidiana em $N_{\mathbb{R}}$. Seja $B = \{v \in N_{\mathbb{R}} : |v| \leq c + 1\}$ a bola fechada com centro na origem e raio $c + 1$. Como T é discreto e B é compacto, temos que $B \cap T$ é finito, logo existe $v_0 \in B \cap T$ tal que $|v_0| = c$. Agora suponha que existe $u \in T$ tal que $u \preceq v_0$, logo $v_0 = u + w$ para algum $w \in \sigma$. Pela desigualdade triangular temos $c = |v_0| = |u + w| \leq |u| + |w|$, donde segue que $|u| = c$ e $|w| = 0$, pois todo ponto inteiro de $u + \sigma$ tem norma $\geq |u|$. Portanto $v_0 = u$ e v_0 é uma cota inferior de T .

ii) Suponha que $0 \in C$ e seja $v \in \min C$. Como $v = v + 0$ segue que $0 \preceq v$. Do fato que v é minimal segue, da definição, que $v = 0$. A recíproca é imediata.

iii) Como σ é fortemente convexo existe $m \in \sigma \cap M$ tal que $\sigma \cap m^\perp = \{0\}$. Se $u \in C$, então u se escreve como uma soma de, no máximo $m(u)$ elementos do semigrupo C . Se $u = u_1 + \dots + u_s$ é uma decomposição com s máximo, então cada u_i deve pertencer a $\min C$. Portanto $\min C$ gera C . Seja G um outro sistema gerador de C e seja $v \in \min C$. Então $v = g_1 + \dots + g_t$, com $g_i \in G$. Mas pela minimalidade de v devemos ter $t = 1$, donde segue que $\min C \subset G$.

Em particular, se τ é uma face de σ então $\tau \cap N \setminus \{0\}$ é um subsemigrupo de $\sigma \cap N \setminus \{0\}$ cujo sistema minimal gerador é G_τ , logo $\min(\tau \cap N \setminus \{0\}) = G_\tau$.

iv) Suponha que existe $v \in \min(\sigma \cap N \setminus \{0\}) \cap C$. Seja $u \in C$ tal que $u \preceq v$, devemos mostrar que $u = v$. De fato, como $0 \notin C$ então $u \in \sigma \cap N \setminus \{0\}$ mas pela minimalidade de v em $\sigma \cap N \setminus \{0\}$ temos $u = v$. ■

Corolário 2.10. *Seja τ uma face de σ , então $G_\sigma \cap \tau = G_\tau$. Em particular $sk^1\sigma \subset G_\sigma$.*

Demonstração: Pelos itens *iii)* e *iv)* da proposição acima temos $G_\sigma \cap \tau \subset G_\tau$. Suponha que existe $v \in G_\tau \setminus G_\sigma$. Então existem $u, w \in \sigma \cap N \setminus \{0\}$ tais que $v = u + w$. Porém $v \in \tau$ implica $u, w \in \tau$, donde $v \notin G_\tau$. Contradição. ■

2.3 Cones Standards

Nesta seção estudaremos a família dos cones simpliciais que possuem pelo menos um muro regular. O motivo de se estudar este tipo de cone se deve ao fato de que, além deles possuírem uma descrição amigável, eles ainda são suficientemente gerais englobando, por exemplo, a família dos cones de singularidade isolada.

Definição 2.11. Diremos que um cone simplicial $\sigma \subset N_{\mathbb{R}}$ é *standard* se σ contiver pelo menos um muro regular.

Seja σ um cone standard em N . Suponha que $sk^1\sigma = \{e_1, \dots, e_{n-1}, e\}$ e que $\langle e_1, \dots, e_{n-1} \rangle$ é um muro regular de σ . Então existe $e_n \in N$ tal que $\{e_1, \dots, e_n\}$ é base de N . Logo

$$e = a_1e_1 + \dots + a_{n-1}e_{n-1} + a_n e_n.$$

Neste caso, denotamos $\sigma = \mathfrak{s}(a_1, \dots, a_n)$.

Note que quando denotamos um cone standard $\sigma \subset N_{\mathbb{R}}$ por $\mathfrak{s}(a_1, \dots, a_n)$ esta implícito a escolha de uma base $\{e_1, \dots, e_n\}$ do reticulado N , na qual $\sigma = \langle e_1, \dots, e_{n-1}, e \rangle$ e $e = (a_1, \dots, a_n)$. Tal base será dita *base associada* a $\mathfrak{s}(a_1, \dots, a_n)$ e, como é usual, denotaremos por $\{e_1^*, \dots, e_n^*\}$ à sua base dual em $M = \text{Hom}(N, \mathbb{Z})$.

Como veremos, a última coordenada do vetor e tem algumas propriedades especiais, assim, por comodidade, frequentemente escreveremos $a_n = r$ e assumiremos $r > 0$. Isso não causa perda de generalidade, pois se $a_n < 0$, basta substituir e_n por $e'_n = -e_n$ e a_n por $a'_n = -a_n > 0$.

Na proposição abaixo descreve algumas propriedades dos cones standards. Lembramos que, dado um número real x , $\lceil x \rceil$ denota o menor inteiro maior ou igual a x .

Proposição 2.12. *Seja $\sigma = \mathfrak{s}(a_1, \dots, a_{n-1}, r)$ com $r > 0$. Defina*

$$u_i := re_i^* - a_i e_n^* \quad i = 1, \dots, n-1 \quad e \quad u_n = e_n^*;$$

$$w_k := (\lceil a_1 k / r \rceil, \dots, \lceil a_{n-1} k / r \rceil, k) \in \mathbb{Z}^n, \quad k \in \mathbb{Z}.$$

Então:

i) A multiplicidade de σ é $\text{mult}(\sigma) = r$;

ii) O conjunto dos pontos inteiros não nulos do paralelepípedo fundamental associado a σ é dado por $P_\sigma = \{w_1, \dots, w_{r-1}\}$;

iii) O cone dual de σ é dado por $\check{\sigma} = \langle u_1, \dots, u_n \rangle$;

iv) Seja $\ell_\sigma : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ a aplicação linear que leva todo vetor extremal de σ em 1, então $\ell_\sigma = \frac{u_1}{r} + \dots + \frac{u_n}{r} = (1, \dots, 1, \frac{1-(a_1+\dots+a_{n-1})}{r})$;

v) σ tem índice 1 $\Leftrightarrow a_1 + \dots + a_{n-1} \equiv 1 \pmod{r}$;

vi) seja $\{\{i_1, \dots, i_k\}, \{i_{k+1}, \dots, i_{n-1}\}\}$ uma partição de $\{1, \dots, n-1\}$ e considere a face $\tau = \langle e_{i_1}, \dots, e_{i_k}, e \rangle < \sigma$; então existe um isomorfismo

$$\tau \simeq \mathfrak{s}(a_{i_1}, \dots, a_{i_k}, r'),$$

onde $r' = \text{mdc}(a_{i_{k+1}}, \dots, a_{i_{n-1}}, r)$. Em particular, τ é regular se, e somente se, $r' = 1$;

vii) σ é um cone de singularidade isolada $\Leftrightarrow \text{mdc}(a_k, r) = 1$ para todo $k = 1, \dots, n-1$. Neste caso temos

$$w_k + w_{r-k} = e + e_1 + \dots + e_{n-1}$$

para todo $k = 1, \dots, n-1$.

Demonstração:

i) Imediato, $\text{mult}(\sigma) = |\det(e_1, \dots, e_{n-1}, e)| = r$.

ii) Se $w \in P_\sigma$, então existem $q, q_1, \dots, q_{n-1} \in [0, 1)$ tais que

$$\begin{aligned} w &= qe + q_1e_1 + \dots + q_{n-1}e_{n-1} \\ &= (q_1 + qa_1)e_1 + \dots + (q_{n-1} + qa_{n-1})e_{n-1} + qre_n. \end{aligned}$$

Como $q \in [0, 1)$, temos $qr \in \mathbb{Z} \Leftrightarrow q = k/r$ para algum $k \in \{0, \dots, r-1\}$. Agora, como $q_i + a_iq \in \mathbb{Z}$ e $q_i \in [0, 1)$ segue, substituindo q por k/r , que $q_i + a_iq = \lceil a_ik/r \rceil$, donde $w = w_k$.

iii) Observe que se σ é um cone simplicial qualquer, com $sk^1\sigma = \{v_1, \dots, v_n\}$, então $\tilde{\sigma}$ é gerado por vetores $u_i \in M$ tais que

$$\langle u_i, v_j \rangle = \begin{cases} 0 & \text{se } i \neq j \\ \alpha_i \in \mathbb{Z}_{>0} & \text{se } i = j \end{cases} \quad \text{para } i, j \in \{1, \dots, n\}.$$

Assim, se $\sigma = \mathfrak{s}(a_1, \dots, a_{n-1}, r)$, temos que os vetores u_1, \dots, u_n definidos no enunciado satisfazem as condições acima, para $v_i = e_i$ se $i \in \{1, \dots, n-1\}$ e $v_n = e = (a_1, \dots, a_{n-1}, r)$, donde o resultado.

Para o item (iv), basta verificar que as aplicações em questão coincidem na base canônica. O item (v) é consequência de (iv) e das definições.

vi) Seja $\tau = \langle e_{i_1}, \dots, e_{i_k}, e \rangle < \sigma$. Defina

$$r' = \text{mdc}(a_{i_{k+1}}, \dots, a_{i_{n-1}}, r) \quad \text{e} \quad e' = \frac{a_{i_{k+1}}}{r'} e_{i_{k+1}} + \dots + \frac{a_{i_{n-1}}}{r'} e_{i_n} + \frac{r}{r'} e_n.$$

Temos

$$e = a_{i_1} e_{i_1} + \dots + a_{i_k} e_{i_k} + r' e'.$$

Por outro lado, verifica-se que $\{e_{i_1}, \dots, e_{i_k}, e'\}$ é base do reticulado $\mathbb{R}\tau \cap N$, logo $\tau = \mathfrak{s}(a_{i_1}, \dots, a_{i_k}, r')$.

vii) Lembre que um cone τ é de singularidade isolada se e somente se todo muro de τ for regular, logo tomando $\sigma = \mathfrak{s}(a_1, \dots, a_{n-1}, r)$, como $\langle e_1, \dots, e_{n-1} \rangle$ é sempre regular, segue que σ é um cone de singularidade isolada se e somente se as faces

$$\sigma_i := \langle e_1, \dots, e_{j-1}, e_{j+1}, \dots, e_{n-1}, e \rangle = \mathfrak{s}(a_1, \dots, a_{j-1}, a_{j+1}, \dots, a_{n-1}, \text{mdc}(a_j, r))$$

forem regulares para todo $j \in \{1, \dots, n-1\}$. Isso equivale a $\text{mult } \sigma_i = \text{mdc}(a_j, r) = 1$ para todo $j \in \{1, \dots, n-1\}$.

Suponha que σ é de singularidade isolada e tome $w_k \in P_\sigma$. Pelo lema 2.2 existe $w_j \in P_\sigma$ tal que $w_k + w_j = e + e_1 + \dots + e_{n-1}$, mas como a últimas coordenadas de w_j, w_k e de $e + e_1 + \dots + e_{n-1}$ são respectivamente j, k e r ,

concluimos que $j = r - k$. ■

Proposição 2.13. *Sejam $\sigma = \mathfrak{s}(a_1, \dots, a_{n-1}, r)$ e $\tau = \mathfrak{s}(b_1, \dots, b_{n-1}, s)$ com $r, s > 0$. Então σ e τ são isomorfos se e somente se $r = s$ e existe uma permutação $\delta \in S_{n-1}$ tal que vale uma das condições abaixo:*

i) $b_i \equiv a_{\delta(i)} \pmod{r}, \quad i \in \{1, \dots, n-1\}$ ou

ii) existem $i_0, j_0 \in \{1, \dots, n-1\}$, não necessariamente distintos, tais que $\delta(i_0) = j_0$ e

$$\begin{aligned} a_{i_0} b_{j_0} &\equiv 1 \pmod{r} \\ a_{i_0} b_i &\equiv -a_{\delta(i)} \pmod{r}, \quad i \in \{1, \dots, n-1\} \setminus \{j_0\}. \end{aligned}$$

Demonstração:

Suponha que existe $\varphi \in \text{Aut}(\mathbb{Z}^n)$ tal que $\varphi_{\mathbb{R}}(\sigma) = \tau$. Como a multiplicidade de um cone é invariante por isomorfismos temos que $s = r$. Além disso, temos $\varphi(sk^1\sigma) = sk^1\tau$. Logo, se $e = (a_1, \dots, a_{n-1}, r)$ e $e' = (b_1, \dots, b_{n-1}, r)$ temos os seguintes casos:

Caso a: existe uma permutação $\lambda \in S_{n-1}$ tal que

$$\varphi(e) = e' \quad \text{e} \quad \varphi(e_i) = e_{\lambda(i)} \quad \forall i \in \{1, \dots, n-1\};$$

Caso b: existem $i_0, j_0 \in \{1, \dots, n-1\}$ e uma permutação $\lambda \in S_{n-1}$ tais que $\lambda(i_0) = j_0$ e

$$\varphi(e) = e_{j_0}, \quad \varphi(e_{i_0}) = e' \quad \text{e} \quad \varphi(e_i) = e_{\lambda(i)} \quad \forall i \in \{1, \dots, n-1\} \setminus \{i_0, j_0\}.$$

Em cada um dos casos acima, suponha $\varphi(e_n) = \sum_{i=1}^n \alpha_i e_i$ com $\alpha_i \in \mathbb{Z}$ para todo $i \in \{1, \dots, n\}$ e considere $\delta = \lambda^{-1}$.

No **caso a** temos:

$$\begin{aligned}
 \sum_{i=1}^{n-1} b_i e_i + r e_n &= \sum_{i=1}^{n-1} a_i \varphi(e_i) + r \varphi(e_n) \\
 &= \sum_{i=1}^{n-1} a_i e_{\lambda(i)} + \sum_{i=1}^n r \alpha_i e_i \\
 &= \sum_{i=1}^{n-1} a_{\delta(i)} e_i + \sum_{i=1}^n r \alpha_i e_i \\
 &= \sum_{i=1}^{n-1} (a_{\delta(i)} + r \alpha_i) e_i + r \alpha_n e_n
 \end{aligned}$$

Logo $b_i = a_{\delta(i)} + r \alpha_i$ para todo $i \in \{1, \dots, n-1\}$ e obtemos o item i).

No **caso b** temos

$$\begin{aligned}
 e_{j_0} &= \sum_{i=1}^{n-1} a_i \varphi(e_i) + r \varphi(e_n) \\
 &= \left(\sum_{i=1, i \neq i_0}^{n-1} a_i e_{\lambda(i)} \right) + a_{i_0} \varphi(e_{i_0}) + r \varphi(e_n) \\
 &= \left(\sum_{i=1, i \neq j_0}^{n-1} a_{\delta(i)} e_i \right) + a_{i_0} \left(\sum_{i=1}^{n-1} b_i e_i + r e_n \right) + r \left(\sum_{i=1}^n \alpha_i e_i \right) \\
 &= \left(\sum_{i=1, i \neq j_0}^{n-1} (a_{\delta(i)} + a_{i_0} b_i + r \alpha_i) e_i \right) + (a_{i_0} b_{j_0} + r \alpha_{j_0}) e_{j_0} + r (\alpha_n + a_{i_0}) e_n
 \end{aligned}$$

logo

$$0 = \left(\sum_{i=1, i \neq j_0}^{n-1} (a_{\delta(i)} + a_{i_0} b_i + r \alpha_i) e_i \right) + (a_{i_0} b_{j_0} + r \alpha_{j_0} - 1) e_{j_0} + r (\alpha_n + a_{i_0}) e_n.$$

Deduzimos

$$\begin{aligned} a_{i_0}b_{j_0} + r\alpha_{j_0} - 1 &= 0 \\ a_{\delta(i)} + a_{i_0}b_i + r\alpha_i &= 0 \quad i \in \{1, \dots, n-1\} \setminus \{i_0\}. \end{aligned}$$

donde obtemos o item *ii)* do enunciado.

Reciprocamente, se σ e τ satisfazem a condição *i)*, defina $\lambda = \delta^{-1}$ e φ como no **caso a** pondo também $\varphi(e_n) = e_n$. Se σ e τ satisfazem *ii)*, então $\text{mdc}(b_{j_0}, r) = 1$, logo existem $\alpha, \beta \in \mathbb{Z}$ tais que $b_{j_0}\beta + r\alpha = 1$. Defina $\lambda = \delta^{-1}$ e φ como no **caso b** pondo também $\varphi(e_n) = \alpha e_{j_0} + \beta e_n$. Com isso, verifica-se que em cada um dos casos temos $\varphi_{\mathbb{R}}(\sigma) = \tau$ e $|\det(\varphi)| = 1$, logo σ e τ são isomorfos. ■

Proposição 2.14. *Uma variedade tórica afim $X_{\sigma, N}$ é um quociente cíclico de tipo $\frac{1}{r}(a_1, \dots, a_{n-1}, -1)$ se, e somente se, $\sigma = \mathfrak{s}(a_1, \dots, a_{n-1}, r)$.*

Demonstração: Seja X um quociente cíclico de tipo $\frac{1}{r}(a_1, \dots, a_{n-1}, -1)$ e seja N um reticulado de base $\{v_1, \dots, v_n\}$. Ponha $v = a_1v_1 + \dots + a_{n-1}v_{n-1} - v_n$. Pela proposição 1.28, existem inteiros t_1, \dots, t_n e um cone

$$\sigma = \langle v_1 + t_1v, \dots, v_n + t_nv \rangle \quad \text{com} \quad \text{mult } \sigma = r = |1 + a_1t_1 + \dots + a_{n-1}t_{n-1} - t_n|$$

tal que $X \simeq X_\sigma$. Ponha

$$\begin{aligned} e &:= v_n + t_nv, \quad e_i := v_i + t_iv \quad \text{para} \quad i = 1, \dots, n-1 \quad \text{e} \\ e_n &= \begin{cases} v & \text{se} \quad 1 + a_1t_1 + \dots + a_{n-1}t_{n-1} - t_n = -r; \\ -v & \text{se} \quad 1 + a_1t_1 + \dots + a_{n-1}t_{n-1} - t_n = r. \end{cases} \end{aligned}$$

Com isso, verifica-se que $e = a_1e_1 + \dots + a_{n-1}e_{n-1} + re_n$ e que

$$|\det_N(e_1, \dots, e_n)| = |\det_N(v_1, \dots, v_n)| = 1.$$

Portanto $\{e_1, \dots, e_n\}$ é base de N e temos

$$\sigma = \langle e_1, \dots, e_{n-1}, e \rangle = \mathfrak{s}(a_1, \dots, a_{n-1}, r).$$

Reciprocamente, suponha que $\sigma = \mathfrak{s}(a_1, \dots, a_{n-1}, r)$ tem $\{e_1, \dots, e_n\}$ como base associada e seja $e = a_1e_1 + \dots + a_{n-1}e_{n-1} + re_n$. Colocando

$$e'_n = e + (1 - r)e_n \quad \text{e} \quad v = a_1e_1 + \dots + a_{n-1}e_{n-1} - e'_n,$$

segue que $\{e_1, \dots, e'_n\}$ também é base de N e que

$$\sigma = \langle e_1, \dots, e_{n-1}, e'_n + (1 - r)v \rangle.$$

Logo o resultado segue da proposição 1.28 tomando $t_1 = \dots = t_{n-1} = 0$ e $t_n = 1 - r$. ■

Capítulo 3

Variedades Tóricas Terminais

3.1 Resultados Conhecidos

As singularidades terminais aparecem de forma importante em diversos ramos da geometria birracional, tendo papel fundamental na Teoria de Mori. Tais singularidades só aparecem a partir de dimensão 3 e sua caracterização tem se mostrado muito complicada, mesmo no caso tórico e em dimensão pequena. Abaixo enunciaremos alguns resultados conhecidos para variedades tóricas \mathbb{Q} -fatoriais de dimensão 3 e 4.

As variedades tóricas afins \mathbb{Q} -fatoriais, terminais e de dimensão 3 estão classificadas pelo conhecido *Lema Terminal*, que é consequência de um resultado de G. K. White [Wh] e pode ser enunciado da seguinte forma (ver: [Da2, §4], [MS, Thm 2.4], [Oda, p. 36]).

Teorema 3.1. (*Lema Terminal.*) *Seja X uma variedade tórica \mathbb{Q} -fatorial de dimensão 3, associada a um cone $\sigma \subset N_{\mathbb{R}}$. Equivalem:*

- i) X é terminal;*
- ii) $\sigma = \mathfrak{s}(a, -a, r)$, com $\text{mdc}(a, r) = 1$;*
- iii) X é um quociente cíclico de tipo $\frac{1}{r}(a, -a, -1)$, com $\text{mdc}(a, r) = 1$.*

Trabalhando no contexto de quocientes cíclicos, D. R. Morrison e I. Stevens ([MS]) reobtem o resultado do teorema acima e também fornecem a classificação das variedades tóricas \mathbb{Q} -fatoriais afins de dimensão 4 que tem a propriedade adicional de serem Gorenstein e de singularidade isolada. Seu resultado pode ser enunciado da seguinte forma (ver: [MS, Thm 2.4]):

Teorema 3.2. *Seja X um quociente cíclico Gorenstein, de dimensão 4 e singularidade isolada, associado como variedade tórica a um cone $\sigma \subset N_{\mathbb{R}}$. Equivalem:*

- i) X é terminal;*
- ii) $\sigma = \mathfrak{s}(1, a, -a, r)$, com $\text{mdc}(a, r) = 1$;*
- iii) X é um quociente cíclico de tipo $\frac{1}{r}(1, a, -a, -1)$, com $\text{mdc}(a, r) = 1$.*

Como sabemos, todo quociente cíclico (afim) é um caso particular de variedade tórica \mathbb{Q} -fatorial. Por outro lado, vimos no Corolário 2.4, que toda variedade tórica terminal, \mathbb{Q} -fatorial, Gorenstein e de dimensão 4 deve necessariamente ter singularidades isoladas. Logo, concluímos que o teorema acima apresenta todas as variedades tóricas \mathbb{Q} -fatoriais afins e Gorenstein de dimensão 4.

Para o caso não Gorenstein de dimensão 4, S. Mori, D. R. Morrison e I. Morrison, em [MMM], apresentam uma família de quintuplas associadas a quocientes cíclicos terminais de dimensão 4 cujo índice é primo. Os autores afirmam que para alguns números primos p entre 17 e 419 existem singularidades quocientes de dimensão 4 e índice p que não estão associadas a tais famílias de quintuplas. Porém eles conjecturam que para $p \geq 421$ primo, todos os quocientes cíclicos de índice p estão associados a dita família. Tal conjectura foi provada mais tarde por G. K. Sankaran em [Sa].

Abaixo apresentaremos estes resultados mais precisamente, porém antes daremos algumas definições.

A idéia em [MMM] consiste em associar a cada quociente cíclico de tipo $\frac{1}{p}(a_1, \dots, a_{n-1})$, com p primo, uma n -upla de números inteiros $Q = (b_1, \dots, b_n)$ satisfazendo as seguintes propriedades:

- i)* $b_1 + \dots + b_n = 0$;
- ii)* $b_i \equiv a_i \pmod{p}$ para $i = 1, \dots, n - 1$;
- iii)* $|b_i| < p$ para $i = 1, \dots, n$.

Dada uma n -upla (b_1, \dots, b_n) como acima, temos associados n quocientes cíclicos

$$\frac{1}{p}(b_1, \dots, \widehat{b_i}, \dots, b_n) \quad \text{para} \quad i = 1, \dots, n.$$

Dado $Q = (b_1, \dots, b_n)$, uma n -upla de números inteiros tal que $b_1 + \dots + b_n = 0$, denotaremos $M_Q := \max\{|b_i| : i = 1, \dots, n\}$. Dado um número primo p , uma n -upla Q é dita p -terminal se $p > M_Q$ e Q for associada a um quociente cíclico terminal de índice p .

Com as definições acima temos o seguinte teorema:

Teorema 3.3. *(Mori, D. Morrison, I. Morrison, Sankaran) Seja p um número primo e considere as seguintes famílias de quintuplas de números inteiros:*

- i)* $Q = (\alpha, -\alpha, \beta, \gamma, -\beta - \gamma)$, com $0 < |\alpha|, |\beta|, |\gamma| < p/2$ e $\beta + \gamma \neq 0$;
- ii)* $Q = (\alpha, -2\alpha, \beta, -2\beta, \alpha + \beta)$, com $0 < |\alpha|, |\beta| < p/2$ e $\alpha + \beta \neq 0$;
- iii)* Q é uma das quintuplas da tabela abaixo:

(9, 1, -2, -3, -5)	(9, 2, -1, -4, -6)	(12, 3, -4, -5, -6)	(12, 2, -3, -4, -7)	(9, 4, -2, -3, -8)
(12, 1, -2, -3, -8)	(12, 3, -1, -6, -8)	(15, 4, -5, -6, -8)	(12, 2, -1, -4, -9)	(10, 6, -2, -5, -9)
(15, 1, -2, -5, -9)	(12, 5, -3, -4, -10)	(15, 2, -3, -4, -10)	(6, 4, 3, -1, -12)	(7, 5, 3, -1, -4)
(9, 7, 1, -3, -14)	(15, 7, -3, -5, -14)	(8, 5, 3, -1, -15)	(10, 6, 1, -2, -15)	(12, 5, 2, -4, -15)
(9, 6, 4, -1, -18)	(9, 6, 5, -2, -18)	(12, 9, 1, -4, -18)	(10, 7, 4, -1, -20)	(10, 8, 3, -1, -20)
(10, 9, 4, -3, -20)	(12, 10, 1, -3, -20)	(12, 8, 5, -1, -24)	(15, 10, 6, -1, -30)	

Se $M_Q < p$, então a quintupla Q é p -terminal. Reciprocamente, se $p \geq 421$ então a menos de isomorfismos todo quociente cíclico de índice p , singularidade isolada e dimensão 4, esta associado a alguma quintupla das famílias citadas acima.

Em [MMM, p. 777] também é observado o seguinte resultado:

Proposição 3.4. *Se uma n -upla Q é p -terminal, então todo quociente cíclico de índice p associado a Q é terminal. Além disso, se $Q = (b_1, \dots, b_n)$ e existe uma partição não trivial $I \cup J = \{1, \dots, n\}$ tal que*

$$\sum_{i \in I} b_i = 0 \quad e \quad \sum_{i \in J} b_i = 0,$$

então Q é p -terminal para todo primo $p > M_Q$.

Proposição 3.5. *i) $p > m_Q$ e Q p -terminal $\Rightarrow \frac{1}{p}(b_1, \dots, \widehat{b}_i, \dots, b_n)$ é terminal $\forall i$;*

ii) $\exists I \subsetneq \{1, \dots, n\}$ tal que $\sum_{i \in I} b_i = 0 \Rightarrow Q$ é p -terminal $\forall p > m_Q$;

iii) $p > m_Q$ e Q p -terminal então $\frac{1}{p}(b_1, \dots, b_n)$ é terminal.

Nas próximas seções deste capítulo apresentaremos algumas generalizações destes resultados.

3.2 Relação Entre Terminal de Dimensão n e Terminal, Gorenstein de Dimensão $n + 1$

Os teoremas 3.1 e 3.2 apresentam uma certa correlação entre quocientes cíclicos terminais de dimensão 3 e quocientes cíclicos Gorenstein terminais de dimensão 4. Mostraremos que este tipo de relação ainda se mantém para as variedades tóricas afins de dimensão arbitrária, mesmo no caso não \mathbb{Q} -fatorial.

Proposição 3.6. *Seja N um reticulado de posto n e seja $\sigma \subset \mathbb{N}_{\mathbb{R}}$ um cone de índice r , não necessariamente simplicial, com $sk^1 \sigma = \{v_1, \dots, v_s\}$. Defina*

$$\tilde{\sigma} := \langle (0, 1), (v_1, 1 - r), \dots, (v_s, 1 - r) \rangle \subset \mathbb{N}_{\mathbb{R}} \oplus \mathbb{R},$$

onde 0 representa a origem de N . Seja $\ell_\sigma : N_{\mathbb{R}} \rightarrow \mathbb{R}$ uma aplicação linear tal que $\ell_\sigma(v_i) = 1$ para $i = 1, \dots, s$, e defina

$$\ell_{\tilde{\sigma}} : N_{\mathbb{R}} \oplus \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, \quad \ell_{\tilde{\sigma}}(v, t) := r\ell_\sigma(v) + t.$$

Então, dados $v \in N_{\mathbb{R}}$ e $t \in \mathbb{R}$ temos:

- i)* $(v, t) \in \tilde{\sigma} \Leftrightarrow v \in \sigma$ e $t \geq (1 - r)\ell_\sigma(v)$;
- ii)* $\ell_{\tilde{\sigma}} \in (\tilde{\sigma})^\vee \cap M \oplus \mathbb{Z}$ e $\ell_{\tilde{\sigma}}|_{sk^1\tilde{\sigma}} = 1$. Em particular, $\tilde{\sigma}$ tem índice 1 com respeito a $N \oplus \mathbb{Z}$;
- iii)* $\dim \tilde{\sigma} = \dim \sigma + 1$;
- iv)* σ é terminal $\Leftrightarrow \tilde{\sigma}$ é terminal.

Demonstração:

Os itens *(i)* e *(ii)* são imediatos da definição e o item *(iii)* segue de

$$\mathbb{R}\tilde{\sigma} = \mathbb{R}\sigma \oplus \mathbb{R}.$$

iv) (\Leftarrow): Suponha $\tilde{\sigma}$ não terminal, como $\tilde{\sigma}$ é de índice 1 com respeito a $N \oplus \mathbb{Z}$, existe

$$(v, t) \in \tilde{\sigma} \cap (N \oplus \mathbb{Z}) \setminus sk^1\tilde{\sigma} \quad \text{tal que} \quad \ell_{\tilde{\sigma}}(v, t) = 1.$$

Logo, $v \in \sigma \cap N \setminus sk^1\sigma$ e usando o item *i)*, temos

$$1 = \ell_{\tilde{\sigma}}(v, t) = r\ell_\sigma(v) + t \geq r\ell_\sigma(v) + (1 - r)\ell_\sigma(v) = \ell_\sigma(v)$$

Portanto σ não é terminal.

(\Rightarrow): Suponha σ não terminal, então existe

$$v \in \sigma \cap N \setminus sk^1\sigma \quad \text{tal que} \quad r\ell_\sigma(v) = k \in \{1, \dots, r\},$$

logo, usando novamente o item *(i)*, segue que

$$(1 - r)\ell_\sigma(v) = \frac{(1 - r)k}{r} \leq 1 - k \Rightarrow (v, 1 - k) \in \tilde{\sigma}$$

Mas $\ell_{\tilde{\sigma}}(v, 1 - k) := r\ell_{\sigma}(v) + 1 - k = 1$ e portando $\tilde{\sigma}$ não é terminal. ■

A proposição abaixo juntamente com a proposição 3.6 mostra que a classificação dos cones terminais se reduz à classificação dos cones σ de índice 1 tais que $\ell_{\sigma} \in G_{\tilde{\sigma}}$.

Proposição 3.7. *Seja $\sigma \subset N_{\mathbb{R}}$ um cone de índice 1 e suponha que*

$$\ell_{\sigma} = u + w \quad \text{com} \quad u, w \in \tilde{\sigma} \cap M \setminus \{0\}.$$

Então as faces $\gamma = \sigma \cap u^{\perp}$ e $\tau = \sigma \cap w^{\perp}$ tem índices relativos iguais a 1 e σ é terminal se e somente se γ e τ forem terminais.

Demonstração: Por hipótese temos que

$$sk^1\gamma = \{v \in sk^1\sigma : \langle w, v \rangle = 1\} \quad \text{e} \quad sk^1\tau = \{v \in sk^1\sigma : \langle u, v \rangle = 1\}.$$

Além disso, verifica-se que

$$u|_{N_{\tau}} = l_{\tau} \in M_{\tau} \quad \text{e} \quad w|_{N_{\gamma}} = l_{\gamma} \in M_{\gamma} \quad (*)$$

donde segue que γ e τ tem índices relativos igual a 1.

Agora, se σ é terminal então por definição temos γ e τ terminais.

Reciprocamente, se σ não é terminal, como índice 1 implica canônico (proposição 2.1), segue que existe $v \in P_{\sigma}$ tal que

$$\langle l_{\tau}, v \rangle + \langle l_{\gamma}, v \rangle = \langle \ell_{\sigma}, v \rangle = 1.$$

Logo, por (*) temos $\langle l_{\tau}, v \rangle = 1$ ou $\langle l_{\gamma}, v \rangle = 1$, contradizendo a hipótese de γ e τ serem ambos terminais. ■

Corolário 3.8. *Se σ é um cone de singularidade isolada e $\ell_{\sigma} = u + w$, como no enunciado acima, então σ é terminal.*

Na próxima seção aplicaremos estes conceitos para o caso de quocientes cíclicos e em particular, para a família dos cones standards.

3.3 Quocientes Cíclicos Terminais

Nesta subseção estabelecemos condições suficientes para que um quociente cíclico de qualquer dimensão e não necessariamente de singularidade isolada seja terminal. Começaremos verificando como a proposição 3.6 se traduz neste contexto.

Proposição 3.9. *Sejam a_1, \dots, a_{n-1}, r inteiros, com $r > 0$ e seja $a_n \equiv -\sum_{i=1}^{n-1} a_i \pmod{r}$. O quociente cíclico de tipo $\frac{1}{r}(a_1, \dots, a_{n-1})$ é terminal se, e somente se, o quociente cíclico de tipo $\frac{1}{r}(a_1, \dots, a_n)$ é terminal.*

Demonstração: Suponha $\mathbb{Z}^{n-1} \subset \mathbb{Z}^n$ com última coordenada igual a 0. Sejam e_1, \dots, e_n os vetores da base canônica de \mathbb{Z}^n . Pela Proposição 1.28, o quociente cíclico de tipo $\frac{1}{r}(a_1, \dots, a_{n-1})$ corresponde a um cone do tipo

$$\sigma = \langle e_1 + t_1 e, \dots, e_{n-1} + t_{n-1} e \rangle \subset \mathbb{R}^{n-1},$$

com $\text{mult } \sigma = r$ e $e = (a_1, \dots, a_{n-1}, 0) \in \mathbb{Z}^{n-1}$. Para $i = 1, \dots, n-1$, tome

$$v_i = e_i + t_i e + (1-r)e_n \quad \text{e} \quad u_i = e_i + (1-r)e_n.$$

Assim, o cone $\tilde{\sigma}$ da Proposição 3.6 é dado por

$$\tilde{\sigma} = \langle v_1, \dots, v_{n-1}, e_n \rangle = \langle u_1 + t_1 e, \dots, u_{n-1} + t_{n-1} e, e_n + 0 \cdot e \rangle.$$

Note que $\{u_1, \dots, u_{n-1}, e_n\}$ é uma base de \mathbb{Z}^n e que

$$e = \sum_{i=1}^{n-1} a_i u_i - \left(\sum_{i=1}^{n-1} a_i \right) (1-r) e_n.$$

Logo, pela Proposição 1.28, temos que $\tilde{\sigma}$ corresponde ao quociente cíclico de tipo $\frac{1}{r}(a_1, \dots, a_n)$ com $a_n = -(\sum_{i=1}^{n-1} a_i)(1-r)$. O resultado segue, novamente da Proposição 1.28 e da Proposição 1.23. ■

Uma consequência da Proposição acima é que a família de quintuplas dadas pelo Teorema 3.3 também correspondem a quocientes cíclicos Gorenstein terminais de dimensão 5 cuja a ordem do grupo que o define é um número primo. Mais precisamente, se $Q = (a, b, c, d, e)$ pertence a alguma família de quintuplas dadas no Teorema 3.3, e p é um número primo com $M_Q < p$, então o quociente cíclico de tipo $\frac{1}{p}(a, b, c, d, e)$ é Gorenstein e terminal. Reciprocamente, todo quociente cíclico Gorenstein, de dimensão 5 e cuja a ordem do grupo (pequeno) que o define é um primo $p \geq 421$, é a menos de isomorfismos, de tipo $\frac{1}{p}(a, b, c, d, e)$ com $Q = (a, b, c, d, e)$ dado pelo Teorema 3.3.

No Teorema 3.12 abaixo, apresentaremos uma família de cones standards terminais em dimensão arbitrária. Tal família conterà como casos particulares os cones dados pelos teoremas 3.1 e 3.2. Além disso, traduzindo o resultado para quocientes cíclicos através da Proposição 2.14, reobteremos a família de quintuplas do item (i) do Teorema 3.3.

A idéia consiste em escolher uma família de cones standards que, após aplicação das proposições 3.6 e 3.7, se reduzem a cones standards que são conhecidamente terminais. Precisaremos do seguintes lemas.

Lema 3.10. *Seja $\sigma = \mathfrak{s}(a_1, \dots, a_{n-1}, r)$ com $r > 0$. Mantendo as notações da proposição 3.6, temos $\tilde{\sigma} \simeq \mathfrak{s}(a_1, \dots, a_{n-1}, a_n, r)$, para todo $a_n \in \mathbb{Z}$ tal que*

$$a_n \equiv 1 - \sum_{i=1}^{n-1} a_i \pmod{r}.$$

Demonstração: Basta adaptar a demonstração da Proposição 3.9 ao cone $\mathfrak{s}(a_1, \dots, a_{n-1}, r)$. ■ .

Lema 3.11. *Sejam $a_1, \dots, a_{n-1}, r \in \mathbb{Z}$, com $r > 0$, e seja $C = \{i : \text{mdc}(a_i, r) = 1\}$. Se $r \leq \text{card } C$ então $\mathfrak{s}(a_1, \dots, a_{n-1}, r)$ é terminal.*

Demonstração: Sejam w_k e u_i como na proposição 2.12. Suponha que $\sigma = \mathfrak{s}(a_1, \dots, a_{n-1}, r)$ não é terminal. Então para algum $k_0 \in \{1, \dots, r-1\}$ temos $\langle \ell_\sigma, w_{k_0} \rangle \leq 1$. Consideramos o conjunto

$$A = \{i : \langle u_i, w_{k_0} \rangle > 0\}$$

Note que $n \in A$ pois $\langle u_n, w_{k_0} \rangle = k_0$. Além disso, se $\text{mdc}(a_i, r) = 1$ então $r \nmid a_i k_0$ donde temos

$$\langle u_i, w_{k_0} \rangle = r \left\lceil \frac{a_i k_0}{r} \right\rceil - a_i k_0 > 0.$$

Logo $C \cup \{n\} \subset A$ e portanto

$$\text{card } C < \text{card } A \leq \sum_{i \in A} \langle u_i, w_{k_0} \rangle \leq \sum_{i=1}^n \langle u_i, w_{k_0} \rangle = \langle r \ell_\sigma, w_{k_0} \rangle \leq r.$$

Absurdo. ■

Teorema 3.12. *Seja $\sigma = \mathfrak{s}(a_1, \dots, a_{n-1}, r)$ com $r > 0$, um cone de índice 1. Suponha que existe uma partição não trivial $\{\{i_1, \dots, i_k\}, \{i_{k+1}, \dots, i_{n-1}\}\}$ de $\{1, \dots, n-1\}$ com as seguintes propriedades:*

i) $a_{i_1} + \dots + a_{i_k} \equiv 1 \pmod{r}$;

ii) para $s := \text{mdc}(a_{i_{k+1}}, \dots, a_{i_{n-1}}, r)$ temos

$$s \leq \text{card}\{j : \text{mdc}(a_{i_j}, s) = 1, j = 1, \dots, k\}.$$

Então σ é terminal. Em particular, os cones $\mathfrak{s}(a_1, \dots, \hat{a}_i, \dots, a_{n-1}, r)$ são terminais para todo $i \in \{1, \dots, n-1\}$.

Demonstração: Sejam

$$u = e_{i_1}^* + \dots + e_{i_k}^* - \left(\frac{a_{i_1} + \dots + a_{i_k} - 1}{r}\right) e_n^*, \quad e$$

$$w = e_{i_{k+1}}^* + \dots + e_{i_{n-1}}^* - \left(\frac{a_{i_{k+1}} + \dots + a_{i_{n-1}}}{r}\right) e_n^*$$

Avaliando estas funções nos elementos de $sk^1\sigma = \{e_1, \dots, e_{n-1}, e\}$ verifica-se que $u, w \in \check{\sigma}$. Por outro lado, como σ é de índice 1 com

$$a_{i_1} + \dots + a_{i_k} \equiv 1 \pmod{r},$$

pela proposição 2.12 v) temos

$$a_{i_{k+1}} + \dots + a_{i_{n-1}} \equiv 0 \pmod{r}.$$

Logo $u, w \in \text{Hom}(\mathbb{Z}^n, \mathbb{Z}) \cap \check{\sigma}$. Consideremos as seguintes faces de σ :

$$\gamma := \sigma \cap u^\perp = \langle e_{i_{k+1}}, \dots, e_{i_{n-1}} \rangle, \quad \tau := \sigma \cap w^\perp = \langle e_{i_1}, \dots, e_{i_k}, e \rangle.$$

Claramente, γ é sempre terminal. Por outro lado, pela proposição 2.12 vi), temos

$$\tau \simeq \mathfrak{s}(a_{i_1}, \dots, a_{i_k}, s)$$

e como

$$s \leq \text{card}\{j : \text{mdc}(a_{i_j}, s) = 1, j = 1, \dots, k\},$$

segue do lema 3.11 acima que τ também é terminal. Agora, pela proposição 2.12 iv) temos $\ell_\sigma = u + w$. Com isso, segue da proposição 3.7 que σ é terminal. Em particular, pelo lema 3.10 os cones $\mathfrak{s}(a_1, \dots, \hat{a}_i, \dots, a_{n-1}, r)$ são terminais para todo $i \in \{1, \dots, n-1\}$. ■

Corolário 3.13. *Seja $\sigma = \mathfrak{s}(a_1, \dots, a_{n-1}, r) \subset \mathbb{R}^n$ um cone de singularidade isolada. Se existe um subconjunto próprio $I = \{i_1, \dots, i_k\}$ de $\{1, \dots, n-1\}$ tal que*

$$\sum_{i \in I} a_i \equiv 0 \pmod{r} \quad \text{ou} \quad \sum_{i \in I} a_i \equiv 1 \pmod{r}$$

então σ é terminal.

É fácil de verificar que todos os cones terminais dados pelos Teoremas 3.1 e 3.2 são obtidos pelo Corolário acima. Além disso, se X é um quociente cíclico de tipo $\frac{1}{r}(\alpha, -\alpha, \beta, \gamma, -\beta - \gamma)$, com α, β, γ e $\beta + \gamma$ primos com r , então a menos de isomorfismo (ver Proposição 1.23) podemos supor $\alpha = 1$ e usando a Proposição 2.14, verifica-se que X corresponde como variedade tórica ao cone $\mathfrak{s}(1, \beta, \gamma, -\beta - \gamma, r)$, o qual é terminal pelo corolário acima. Logo o Teorema 3.12 generaliza o item (i) do Teorema 3.3.

Contudo, a família de quocientes cíclicos associados aos itens (ii) e (iii) do Teorema 3.3 em geral não são contempladas pelo Teorema 3.12, pois existem casos onde obtemos um cone σ tal que $\ell_\sigma \in G_\sigma$.

Por exemplo, seja X o quociente cíclico de tipo $\frac{1}{11}(-1, 2, 3, -6, 2)$. Então X corresponde ao cone $\mathfrak{s}(2, 3, -6, 2, 11)$, que não satisfaz as hipóteses do Teorema 3.12. Contudo sabemos que X é terminal, pois está associado a uma quintupla do Teorema 3.3-(ii), com $\alpha = -1$, $\beta = 3$ e $p = 11$.

3.4 Algumas subdivisões terminais de cones índice finito

Nesta seção veremos que, sobre certas hipóteses, a terminalidade de um leque Σ , obtido pela subdivisão elementar de um cone de índice finito σ , equivale a terminalidade de um único cone σ' , cujo esqueleto é dado por uma translação do esqueleto de σ (ver Proposição 3.14). Em particular (ver Corolário 3.15), se σ é regular então a terminalidade de Σ corresponde a terminalidade de um quociente cíclico. Neste caso, obtemos uma família de vetores para os quais a subdivisão elementar de σ é sempre terminal.

Para a proposição abaixo, lembramos que um politopo $K \subset N$ com vértices em N é elementar se, e somente se $K \cap N$ é igual ao conjunto dos

vértices de K . Se K é um politopo elementar e $v \in N$ então o politopo $K + v$ também é elementar.

Proposição 3.14. *Seja $\sigma = \langle v_1, \dots, v_n \rangle \subset N_{\mathbb{R}}$ um cone de índice finito e seja $v \in \sigma$ tal que $\ell_{\sigma}(v) > 1$. Considere o leque Σ obtido pela subdivisão elementar de σ em v . Então*

$$\Sigma \text{ é terminal} \Leftrightarrow \langle v_1 - v, \dots, v_n - v \rangle \text{ é terminal.}$$

Neste caso, σ também é terminal.

Demonstração:

$$\begin{aligned} \Sigma \text{ é terminal} &\Leftrightarrow \langle v_1, \dots, \widehat{v}_i, \dots, v_n, v \rangle \text{ é terminal } \forall i; \\ &\Leftrightarrow \text{conv}(0, v_1, \dots, \widehat{v}_i, \dots, v_n, v) \text{ é elementar } \forall i; \\ &\Leftrightarrow \text{conv}(0, v_1, \dots, v_n, v) \text{ é elementar}; \\ &\Leftrightarrow \text{conv}(v_1, \dots, v_n, v) \text{ é elementar}; \\ &\Leftrightarrow \text{conv}(v_1 - v, \dots, v_n - v, 0) \text{ é elementar}; \\ &\Leftrightarrow \langle v_1 - v, \dots, v_n - v \rangle \text{ é terminal}; \end{aligned}$$

■

Corolário 3.15. *Sejam $\sigma = \langle e_1, \dots, e_n \rangle \subset N_{\mathbb{R}}$ um cone regular, $e = a_1 e_1 + \dots + a_n e_n \in \sigma$ um vetor primitivo e $r := \sum_{i=1}^n a_i - 1$. Seja X a variedade tórica associada ao leque Σ , obtido pela subdivisão de σ em e . Equivalem:*

- i) X é uma variedade terminal;*
- ii) O quociente cíclico de tipo $\frac{1}{r}(a_1, \dots, a_n)$ é terminal;*
- iii) O quociente cíclico de tipo $\frac{1}{r}(a_1, \dots, a_n, -1)$ é terminal;*
- iv) O cone $\mathfrak{s}(a_1, \dots, a_n, r)$ é terminal.*

Em particular, se existe $a_{i_0} = 1$ e $\text{mdc}(a_1, \dots, \widehat{a_{i_0}}, \dots, a_n) = 1$ então X é terminal.

Demonstração: Para a equivalência entre os itens (i) e (ii) note que, pela Proposição 3.14, X é terminal se, e somente se, $\tau = \langle e_1 - e, \dots, e_n - e \rangle$ é terminal. Porém, pela Proposição 1.28, τ é o cone associado ao quociente cíclico $\frac{1}{r}(a_1, \dots, a_n)$. As equivalências entre os itens (ii), (iii) e (iv) seguem das Proposições 2.14 e 3.9. Por fim, se $a_{i_0} = 1$ e $\text{mdc}(a_1, \dots, \widehat{a_{i_0}}, \dots, a_n) = 1$ segue do Teorema 3.12 que $\mathfrak{s}(a_1, \dots, a_n, r)$ é terminal. ■

Obs: Para $n = 3$, o Corolário acima fornece todas as possibilidades de vetor $e \in \Sigma = \langle e_1, e_2, e_3 \rangle$ tais que a subdivisão de Σ em e produza apenas cones terminais. Já para $n \geq 4$, podemos verificar que a subdivisão de $\Sigma' = \langle e_1, e_2, e_3, e_4 \rangle$ centrada em $e = (2, 3, 7, 13)$ é terminal, porém este caso, não é contemplado pela última afirmação do Corolário ??.

Capítulo 4

Sobre Dessingularizações e Divisores Essenciais

Este capítulo está baseado nos artigos [BG1], [BG2] de C. Bouvier e G. Gonzalez-Sprinberg e [IK], de S. Ishii e J. Kollár. Dada uma variedade tórica X , estudaremos os conceitos de “divisores essenciais” para uma classe de dessingularizações, bem como alguns tipos especiais de dessingularizações.

O conceito de divisor essencial sobre uma variedade X apresentado em [BG1], [BG2] difere daquele apresentado em [IK]. Para que não haja confusão de idéias, o conceito de divisor essencial do último artigo corresponderá ao que chamaremos de componente essencial. .

4.1 Divisores e Componentes Essenciais

Começaremos com algumas definições, que são válidas para variedades normais em geral.

Seja uma variedade singular X . Lembramos que um morfismo $f : Y \rightarrow X$ é uma *resolução de singularidades* ou uma *dessingularização de X* se Y é uma variedade não singular e f é um morfismo próprio e birracional cuja restrição $Y \setminus f^{-1}(\text{Sing } X) \rightarrow X \setminus \text{Sing } X$ é um isomorfismo. Uma resolução de singularidades $f : Y \rightarrow X$ é dita uma *divisorial* se todas as componentes

irredutíveis do conjunto excepcional $Exc(f) = f^{-1}(Sing X)$ de f tiverem codimensão 1. Em outras palavras, uma resolução de singularidades f é divisorial se e somente se o conjunto excepcional $Exc(f)$ de f for uma reunião de divisores irredutíveis de Y .

Denotaremos por \mathcal{R}_X ao conjunto formado pelas resoluções de singularidade de X e por \mathcal{R}_X^{div} ao subconjunto de \mathcal{R}_X formado pelas resoluções de singularidade que são divisoriais. Ainda, se X é uma variedade tórica, denotaremos por \mathcal{R}_X^T (resp. $\mathcal{R}_X^{T,div}$) ao conjunto formado pelas resoluções de singularidade tóricas (resp. resoluções de singularidades divisoriais tóricas).

Definição 4.1. Sejam $f : Y \rightarrow X$ e $g : Z \rightarrow X$ dois morfismos próprios e birracionais sobre uma variedade (normal) X . Se $D \subset Exc(f)$ é um divisor irredutível contido no conjunto excepcional de f , então a aplicação birracional $g^{-1} \circ f : Y \dashrightarrow Z$ esta definida num aberto não vazio D° do divisor D . O fecho Zariski $\overline{(g^{-1} \circ f)(D^\circ)}$, de $(g^{-1} \circ f)(D^\circ)$ em Z , é um conjunto irredutível e não depende do aberto D° . Ele será chamado de *centro de D em Z* e denotado por $centro_g(D)$ ou simplesmente $centro(D)$.

Se o centro $D' = centro_g(D)$ de D em Z também é um divisor diremos que D e D' são *divisores birracionalmente equivalentes sobre X* e denotaremos $D \sim_X D'$.

Note que a relação \sim_X definida no conjunto dos divisores irredutíveis $D \subset Exc(f)$ tal que $f : Y \rightarrow X$ é um morfismo próprio e birracional é de fato uma relação de equivalência.

Um *divisor excepcional sobre X* é uma classe, $E = [D]_X$, de equivalência birracional sobre X , onde $D \subset Exc(f)$, é um divisor primo contido no conjunto excepcional de um morfismo próprio e birracional $f : Y \rightarrow X$, com Y normal. O conjunto dos divisores excepcionais sobre X será denotado por \mathcal{E}_X . Ao longo do texto frequentemente faremos um abuso de linguagem também chamando de divisor excepcional à um representante particular de E .

A noção de centro se estende ao conjunto dos divisores excepcionais sobre X da seguinte forma: Se E é um divisor excepcional sobre X e $g : Z \rightarrow X$ é um morfismo próprio e birracional então o centro de E em g (ou em Y), é definido como

$$\text{centro}_g(E) := \text{centro}_g(D),$$

onde D é um representante da classe, de equivalência birracional E , isto é, $[D]_X = E$.

Note que o $\text{centro}_g(E)$ pode não ser um divisor e nem estar contido no conjunto excepcional de g , como se pode ver no exemplo abaixo.

Exemplo 4.2. Seja $f : Y \rightarrow X$ a explosão de X em x . Considere $E = [D]_X$ onde $D \subset \text{Exc}(f)$ é o divisor excepcional. Se $g : X \rightarrow X$ é um isomorfismo, então $\text{Exc}(g) = \emptyset$ e $\text{centro}_g(E) = x$.

Dada uma família \mathcal{F} de morfismos próprios e birracionais sobre X , vamos considerar os divisores excepcionais sobre X que de algum modo “aparecem” no conjunto excepcional de qualquer morfismo da família \mathcal{F} . Abaixo definiremos mais precisamente estes objetos.

Definição 4.3. Seja X uma variedade e seja \mathcal{F} uma família de morfismos próprios e birracionais sobre X . Dizemos que um divisor excepcional E sobre X é:

- i)* Um *divisor \mathcal{F} -essencial* se para todo $f \in \mathcal{F}$, $\text{centro}_f(E)$ é uma componente irredutível de $\text{Exc}(f)$ de codimensão 1;
- ii)* Uma *componente \mathcal{F} -essencial* se para todo $f \in \mathcal{F}$, $\text{centro}_f(E)$ é uma componente irredutível de $\text{Exc}(f)$ de codimensão menor ou igual a 1.

Os conjuntos dos divisores \mathcal{F} -essenciais e das componentes \mathcal{F} -essenciais serão denotados respectivamente por $\mathcal{D}(\mathcal{F})$ e $\mathcal{C}(\mathcal{F})$.

O seguinte lema segue das definições.

Lema 4.4. *Seja X uma variedade e seja \mathcal{F} uma família de morfismos próprios e birracionais sobre X .*

- i) Em geral $\mathcal{D}(\mathcal{F}) \subset \mathcal{C}(\mathcal{F})$ e se X é \mathbb{Q} -fatorial então $\mathcal{D}(\mathcal{F}) = \mathcal{C}(\mathcal{F})$;*
- ii) Se $\mathcal{G} \subset \mathcal{F}$ então $\mathcal{D}(\mathcal{F}) \subset \mathcal{D}(\mathcal{G})$ e $\mathcal{C}(\mathcal{F}) \subset \mathcal{C}(\mathcal{G})$.*

4.2 Componentes e Divisores Essencias Sobre Variedades Tóricas

A partir de agora vamos analisar algumas propriedades do conjunto de divisores ou componentes \mathcal{F} -essenciais no caso em que X é uma variedade tórica e a família \mathcal{F} em questão é uma das seguintes:

$$\mathcal{R}_X, \quad \mathcal{R}_X^{div}, \quad \mathcal{R}_X^T, \quad \mathcal{R}_X^{Tdiv}.$$

Em [BG1],[BG2] os autores basicamente trabalham com as famílias $\mathcal{D}(\mathcal{R}_X)$ e $\mathcal{D}(\mathcal{R}_X^T)$, onde os elementos de cada uma delas são ditos respectivamente “divisores essenciais” e “divisores essenciais equivariantes”. Já em [IK], os autores trabalham, no caso tórico, com $\mathcal{C}(\mathcal{R}_X)$, $\mathcal{C}(\mathcal{R}_X^{div})$ e $\mathcal{C}(\mathcal{R}_X^{Tdiv})$, contudo, embora trabalhem com componentes, eles se referem aos elementos de cada uma dessas três famílias respectivamente por “divisores essenciais”, “divisores divisorialmente essenciais” e “divisores tóricos divisorialmente essenciais”. Como um dos objetivos deste trabalho é fazer uma comparação entre os conceitos e resultados de [BG1], [BG2] e [IK], a noção de divisor \mathcal{F} -essencial e componente \mathcal{F} -essencial foi dada para evitar confusão com a nomenclatura usada nos artigos supracitados.

O Lema abaixo, descreve as incidências entre as famílias de divisores e componentes essenciais com que trabalharemos.

Lema 4.5. *Seja X uma variedade tórica. Temos*

$$\begin{array}{ccccccc} \mathcal{D}(\mathcal{R}_X) & \subset & \mathcal{C}(\mathcal{R}_X) & \subset & \mathcal{C}(\mathcal{R}_X^{div}) & = & \mathcal{D}(\mathcal{R}_X^{div}) \\ \cap & & \cap & & \cap & & \\ \mathcal{D}(\mathcal{R}_X^T) & \subset & \mathcal{C}(\mathcal{R}_X^T) & \subset & \mathcal{C}(\mathcal{R}_X^{Tdiv}) & = & \mathcal{D}(\mathcal{R}_X^{Tdiv}) \end{array}$$

Em particular, se X é \mathbb{Q} -fatorial então todas as famílias acima coincidem.

Demonstração: Conseqüência direta do Lema 4.4 e das definições. ■

Seja $\sigma \subset N_{\mathbb{R}}$ um cone racional fortemente convexo e seja $X = X_{\sigma}$ a variedade tórica associada. Como sabemos, uma dessingularização tórica divisorial $f : X_{\Sigma} \rightarrow X$ de X corresponde a uma subdivisão regular Σ de σ . Ademais, os divisores excepcionais desta dessingularização correspondem aos elementos de $sk^1\Sigma \setminus sk^1\sigma \subset \sigma \cap N$. Em particular, existe um subconjunto $C \subset sk^1\Sigma \setminus sk^1\sigma$ que corresponde aos divisores \mathcal{R}_X^{Tdiv} -essenciais, i.é.

$$\mathcal{D}(\mathcal{R}_X^{Tdiv}) = \{[D_v] : v \in C\}.$$

Pelo Lema 4.5, concluímos que existem 5 subconjuntos de C :

$$\begin{array}{ccccc} C_1 & \subset & C_3 & \subset & C_5 \\ \cap & & \cap & & \cap \\ C_2 & \subset & C_4 & \subset & C, \end{array}$$

correspondendo aos respectivos conjuntos divisores e componentes essenciais do Lema 4.5. O teorema 4.6 abaixo, resume alguns resultados de [BG1], [BG2], [IK] e mostra que, eventualmente com exceção de C_1 , tais conjuntos são intrínsecos a variedade X , isto é, não dependem do morfismo f . Antes de enunciá-lo, vamos estabelecer algumas notações.

Dado um cone fortemente convexo $\sigma \subset N_{\mathbb{R}}$, denotaremos por $S(\sigma)$ ao conjunto formado pelos elementos de $\sigma \cap N$ que pertencem ao interior de

alguma face singular de σ , ou seja,

$$S(\sigma) = \bigcup_{\tau < \sigma, \tau \text{ singular}} \text{int } \tau \cap N.$$

Considere também o conjunto $S^\sigma = \min S(\sigma)$ (não confundir com $S_\sigma = \check{\sigma} \cap M$) formado pelos elementos de $S(\sigma)$ que são minimais pela relação de ordem parcial \preceq definida em $\sigma \cap N$ por (ver seção ?? para maiores detalhes):

$$u \preceq v \Leftrightarrow v \in u + \sigma.$$

Por fim, lembramos que G_σ denota o sistema minimal gerador do semigrupo $\sigma \cap N$. Com isso temos:

Teorema 4.6. *Seja σ um cone racional e fortemente convexo em N e seja X a variedade tórica associada. Então:*

i) $\mathcal{C}(\mathcal{R}_X) = \mathcal{C}(\mathcal{R}_X^{T \text{ div}}) = \{[D_v] : v \in S^\sigma\};$

ii) $\mathcal{D}(\mathcal{R}_X^T) = \{[D_v] : v \in G_\sigma \setminus \text{sk}^1 \sigma\};$

iii) *Se $\dim X = 3$ então $\mathcal{D}(\mathcal{R}_X) = \mathcal{D}(\mathcal{R}_X^T)$.*

Demonstração: Para o item (i) ver [IK, Theorem 3.16 e Corollary 3.17]. Para os itens (ii) e (iii) ver [BG2, Théorème 1.10 e Théorème 2.5] respectivamente. ■

Uma consequência direta do teorema acima é que, dentre as famílias de divisores e componentes essenciais do Lema 4.5, podemos ter no máximo 3 delas distintas. A saber

$$\mathcal{D}(\mathcal{R}_X) \subset \mathcal{D}(\mathcal{R}_X^T) \subset \mathcal{C}(\mathcal{R}_X) = \mathcal{D}(\mathcal{R}_X^{T \text{ div}}).$$

De acordo com o teorema acima, para obter uma dessingularização tórica (resp. dessingularização divisorial tórica) de σ , o mínimo de arestas que

devemos acrescentar na subdivisão associada, são aquelas geradas pelos elementos de G_σ (resp. S^σ). Isto motiva a seguinte definição.

Definição 4.7. Seja $\sigma \subset N_{\mathbb{R}}$ um cone fortemente convexo. Uma subdivisão Σ de σ é dita uma G -subdivisão se $sk^1\Sigma = G_\sigma$ e o morfismo tórico correspondente é dito G -morfismo tórico. Ainda, se a G -subdivisão Σ for regular então o morfismo tórico associado é dito G -dessingularização.

A existência de G -subdivisões regulares de um cone fortemente convexo foi conjecturada por A. Sebö em [Se], motivado por considerações em otimização combinatória. Ele apresenta uma demonstração da existência no caso de dimensão 3. De maneira independente C. Bouvier e G. Gonzalez-Sprinberg também provam a existência de G -subdivisões regulares em dimensão 3 e fornecendo o primeiro contra exemplo de cone em dimensão 4 que não admite G -subdivisões regulares, a saber, o cone standard $\mathfrak{s}(1, 3, 4, 7)$. Dado um cone tridimensional σ , eles mostram ainda que: se σ tem índice maior que 1 então ele tem uma única G -subdivisão regular; se σ tem índice igual a 1 então duas G -subdivisões regulares são obtidas uma da outra por um número finito de transformações elementares. Mais tarde, M. T. Firla e G. M. Ziegler, em [FZ] apresentam um contra exemplo um pouco mais simples dado pelo cone standard $\mathfrak{s}(1, 2, 3, 5)$.

Voltaremos ao conceito de G -dessingularização na Seção 4.4. Antes apresentaremos algumas propriedades do conjunto S^σ e de sua relação com G_σ .

4.3 Propriedades do conjunto S^σ

Dado um cone fortemente convexo $\sigma \subset N_{\mathbb{R}}$, denotaremos por E_σ o subconjunto de $S(\sigma)$ formado pelos elementos $v = v_1 + \dots + v_k \in S(\sigma)$ tais que:

$$i) \{v_1, \dots, v_k\} \subset sk^1\sigma;$$

ii) $\langle v_1, \dots, v_k \rangle$ é regular;

iii) toda face própria de $\langle v_1, \dots, v_k \rangle$ é uma face regular de σ .

Note que o item iii) é equivalente a:

iii') $v_{i_1} + \dots + v_{i_s} \notin S(\sigma)$ para todo subconjunto próprio $\{i_1, \dots, i_s\} \subset \{1, \dots, k\}$.

Exemplo 4.8. Seja $\sigma = \langle e_1, e_2, e_3, e \rangle \subset \mathbb{R}^3$, onde e_1, e_2, e_3 os primeiros vetores da base canônica de \mathbb{R}^3 e $e = (-1, 1, 1)$. Note que σ é um cone não simplicial de singularidade isolada e temos

$$S(\sigma) = \text{int } \sigma \cap \mathbb{Z}^3, \quad G_\sigma \cap S(\sigma) = \emptyset \quad \text{e} \quad S^\sigma = E_\sigma = \{e + e_1\}.$$

Exemplo 4.9. Seja $\tau = \langle e_1, e_2, u, v \rangle \subset \mathbb{R}^3$, onde e_1, e_2 são os dois primeiros vetores da base canônica de \mathbb{R}^3 , $u = (-1, 0, 3)$ e $v = (2, -1, 3)$. Note que σ é um cone não simplicial de singularidade isolada e temos

$$S(\tau) = \text{int } \tau \cap \mathbb{Z}^3, \quad G_\tau \cap S(\tau) = S^\tau = \{w_1, w_2\} \quad \text{e} \quad E_\tau = \{e_1 + u\},$$

onde $w_1 = (1, 0, 1)$ e $w_2 = (1, 0, 2)$.

Os exemplos 4.8 e 4.9 mostram que no caso não \mathbb{Q} -fatorial podemos ter

$$\mathcal{D}(\mathcal{R}_X^T) \neq \mathcal{C}(\mathcal{R}_X) \quad \text{ou} \quad \mathcal{D}(\mathcal{R}_X^T) = \mathcal{C}(\mathcal{R}_X).$$

Proposição 4.10. *Seja $\sigma \in N_{\mathbb{R}}$ um cone fortemente convexo, não necessariamente simplicial. Então:*

i) σ é regular $\Leftrightarrow S(\sigma)$ é vazio;

ii) σ simplicial $\Rightarrow E_\sigma$ vazio;

iii) $S(\sigma)$ é um subsemigrupo de $\sigma \cap N$;

iv) $S^\sigma \subset E_\sigma \uplus (G_\sigma \cap S(\sigma))$.

Em particular, se σ é simplicial temos $S^\sigma = G_\sigma \cap S(\sigma)$

Demonstração:

i) Consequência direta da definição.

ii) Seja σ simplicial. Se existe $v = v_1 + \dots + v_k \in E_\sigma$, com $v_1, \dots, v_k \in sk^1\sigma$ e $\langle v_1, \dots, v_k \rangle$ regular. Como este cone é face de σ temos que $v \notin S(\sigma)$, absurdo.

iii) Para ver que $S(\sigma)$ é subsemigrupo de $\sigma \cap N$ devemos mostrar que $S(\sigma)$ é fechado pela soma. Sejam $v, w \in S(\sigma)$; então existem γ e τ faces singulares de σ tais que $v \in \text{int } \gamma$ e $w \in \text{int } \tau$. Seja δ a menor face de σ que contém γ e τ . Portanto, δ é singular. Basta mostrar que $v + w \in \text{int } \delta$. Suponha que isto não ocorre. Então existe $u \in \check{\delta} \subset \check{\gamma} \cap \check{\tau}$, não nulo, tal que $\langle u, v + w \rangle = 0$. Logo $\langle u, v \rangle = 0$, donde segue que $v \notin \text{int } \tau$, absurdo.

iv) É claro que $G_\sigma \cap E_\sigma = \emptyset$. Assim, pela proposição anterior, basta mostrar que $(\text{min } S(\sigma) \setminus G_\sigma) \subset E_\sigma$. Suponha que existe $v \in S^\sigma \setminus G_\sigma$ e considere

$$sk^1\sigma = \{v_1, \dots, v_n\} \quad \text{e} \quad G_\sigma \cap S(\sigma) = \{w_1, \dots, w_t\}.$$

Como $G_\sigma = sk^1\sigma \cup (G_\sigma \cap S(\sigma))$ temos, a priori, que

$$v = \sum_{i=1}^n a_i v_i + \sum_{i=1}^t b_i w_i$$

com $a_1, \dots, a_n, b_1, \dots, b_m \in \mathbb{N} \cup \{0\}$. Pela minimalidade de v devemos ter todos os b_j s nulos, caso contrario teríamos $v = w_{j_0} \in G_\sigma \cap S(\sigma)$.

Seja τ o cone gerado por $\{v_i : a_i > 0\}$. Sem perda de generalidade podemos supor que $\tau = \langle v_1, \dots, v_k \rangle$, $2 \leq k \leq n$. Por hipótese, existe uma face singular $\gamma < \sigma$ tal que $v \in \text{int } \gamma$. Assim, se $\gamma = \check{\sigma} \cap u^\perp$, com $u \in \check{\sigma}$, segue que

$$0 = \langle v, u \rangle = \sum_{i=1}^k a_i \langle v_i, u \rangle$$

logo, como todos os a_i 's são positivos, temos $\langle v_i, u \rangle = 0$, para todo $i \in \{1, \dots, k\}$, donde $\tau \subset \gamma$. Além disso, como $\text{int } \tau \cap \text{int } \gamma \neq \emptyset$, temos também $\text{int } \tau \subset \text{int } \gamma$. De fato, se existe $v' \in \text{int } \tau \setminus \text{int } \gamma$ então $v' = \alpha_1 v_1 + \dots + \alpha_k v_k$, com $\alpha_i > 0$ para todo $i = 1, \dots, k$ e existe $u' \in \tilde{\gamma} \setminus \{0\}$ tal que

$$0 = \langle u', v' \rangle = \sum_{i=1}^k \alpha_i \langle u', v_i \rangle.$$

Portanto, $\langle u', v_i \rangle = 0$ para todo $i = 1, \dots, k$, o que implica $\tau \subset \partial\gamma$, absurdo.

Se $\langle v_{i_1}, \dots, v_{i_s} \rangle \subset \tau$ é um subcone simplicial de dimensão máxima, então $v_{i_1} + \dots + v_{i_s} \in \text{int } \tau \subset \text{int } \gamma$ e portanto $v_{i_1} + \dots + v_{i_s} \in S(\sigma)$. Pela minimalidade de v devemos ter $s = k$ e $v = v_1 + \dots + v_k$. Note também que τ deve ser simplicial.

Se τ é singular, considere $\tau' = \langle v_{i_1}, \dots, v_{i_s} \rangle < \tau$ uma face singular de dimensão mínima. Então $v_{i_1} + \dots + v_{i_s} \in S(\sigma)$ e, novamente pela minimalidade de v , segue que $\tau' = \tau$. Portanto τ é um cone de singularidade isolada. Mas então, pelo lema 2.2 existem $w, w' \in \text{int } \tau \cap N$ tais que $w + w' = v$ e isto contradiz a minimalidade de v . Logo τ é regular, donde v satisfaz a propriedade (i) da definição de E_σ . Note, em particular que γ é não simplicial, caso contrário, τ seria uma face própria de γ e portanto $v \notin \text{int } \gamma$.

Para finalizar, se existe um subconjunto próprio $\{i_1, \dots, i_s\} \subset \{1, \dots, k\}$ tal que $v_{i_1} + \dots + v_{i_s} \in S(\sigma)$ temos, mais uma vez, uma contradição com a minimalidade de v . Portanto $v \in E_\sigma$. ■

4.4 Geometria dos Cones Simpliciais, Terminais, de Dimensão 4 e Índice 1

Nesta seção descrevemos um pouco da geometria dos cones simpliciais, terminais, de dimensão 4 e índice 1. Em particular, caracterizaremos os cones com as propriedades acima que possuem G -subdivisão regular.

Proposição 4.11. *Seja $\sigma \subset N_{\mathbb{R}}$ um cone simplicial, não regular, de índice 1 e de dimensão 4. São equivalentes:*

- i) σ é terminal;*
- ii) σ é de singularidade isolada e existem $u, v \in \sigma \cap M \setminus \{0\}$ tais que $\ell_{\sigma} = u + v$;*
- iii) Existem a, r inteiros satisfazendo $0 < a < \frac{r}{2}$ e $\text{mdc}(a, r) = 1$ tais que $\sigma \simeq \mathfrak{s}(1, a, r - a, r)$.*

Demonstração:

A equivalência (*i* \Leftrightarrow *iii*) é dada pelo Teorema 3.2 e a implicação (*iii* \Rightarrow *i*) é consequência da Proposição 3.7.

(*iii* \Rightarrow *ii*): Basta mostrar a existência de u e v como no enunciado. Como na demonstração do teorema 3.12, temos $\ell_{\sigma} = e_1^* + e_2^* + e_3^* - e_4^*$, logo $u = e_1^*$ e $v = e_2^* + e_3^* - e_4^*$ satisfazem as condições exigidas. ■

Corolário 4.12. *Seja $\sigma \subset N_{\mathbb{R}}$ um cone terminal, simplicial, não regular, de índice 1 e de dimensão 4. Então:*

- i) $G_{\sigma} = \text{sk}^1 \sigma \cup P_{\sigma}$;*
- ii) se $\ell_{\sigma} = u + v$ é como no item *ii*) da proposição acima, temos que P_{σ} está contido no plano de equações $u = 1, v = 1$.*

Demonstração:

i) Suponha que existe $w \in P_{\sigma} \setminus G_{\sigma}$. Então existem $w' \in G_{\sigma}$ e $w'' \in \sigma \cap N \setminus \{0\}$ tais que $w = w' + w''$. Portanto,

$$2 = \langle \ell_{\sigma}, w \rangle = \langle \ell_{\sigma}, w' \rangle + \langle \ell_{\sigma}, w'' \rangle = 2 + \langle \ell_{\sigma}, w'' \rangle \geq 3.$$

Absurdo.

ii) Suponha que $\text{sk}^1 \sigma = \{v_1, v_2, v_3, v_4\}$ e seja $w \in P_{\sigma}$. Pelo lema 2.2, existe $w' \in P_{\sigma}$ tal que $w + w' = v_1 + v_2 + v_3 + v_4$. Logo, $\langle \ell_{\sigma}, w \rangle + \langle \ell_{\sigma}, w' \rangle =$

4. Como σ é terminal e de índice 1, então $\langle \ell_\sigma, w \rangle$ e $\langle \ell_\sigma, w' \rangle$ são inteiros maiores que 1. Portanto, $\langle \ell_\sigma, w \rangle = \langle \ell_\sigma, w' \rangle = 2$. Mas $\ell_\sigma = u + v$ implica $\langle u, w \rangle + \langle v, w \rangle = 2$. Logo, como σ é de singularidade isolada temos $\langle u, w \rangle = \langle v, w \rangle = 1$. ■

Lema 4.13. *Seja $\sigma = \mathfrak{s}(1, a, r - a, r)$ com $0 < a < \frac{r}{2}$ e $\text{mdc}(a, r) = 1$. Então:*

i) $w_{k+1} - w_k \in \{(0, 0, 1, 1), (0, 1, 0, 1)\}$ para todo $k = 1, \dots, r - 2$;

ii) existe um único automorfismo $\varphi \in \text{Aut}(\mathbb{Z}^4)$, com $\varphi \neq \text{Id}$, tal que $\varphi(\sigma) = \sigma$. Em particular, $\varphi^2 = \text{Id}$ e temos

$$\varphi(e_1) = e, \quad \varphi(e_2) = e_3 \quad e \quad \varphi(w_k) = w_{r-k} \quad \text{para todo } w_k \in P_\sigma.$$

Demonstração:

i) Como $w_k = (1, \lceil \frac{ak}{r} \rceil, \lceil \frac{(r-a)k}{r} \rceil, k)$ para $k = 1, \dots, r - 1$, temos

$$w_{k+1} - w_k = (0, \alpha, \beta, 1), \quad \text{para } k = 1, \dots, r - 2,$$

onde

$$\alpha = \lceil \frac{a(k+1)}{r} \rceil - \lceil \frac{ak}{r} \rceil \quad e \quad \beta = \lceil \frac{(r-a)(k+1)}{r} \rceil - \lceil \frac{(r-a)k}{r} \rceil.$$

Claramente $\alpha, \beta \in \{0, 1\}$, logo basta provar que $\alpha = 0 \Leftrightarrow \beta = 1$. De fato, note que como $0 < a < \frac{r}{2}$ e $\text{mdc}(a, r) = 1$ temos que $\frac{ak}{r}$ e $\frac{(r-a)k}{r}$ não são inteiros para $k = 1, \dots, r - 2$. Com isso, existe $t \in \mathbb{Z}$ tal que valem as equivalências:

$$\begin{aligned} \alpha = 0 &\Leftrightarrow t < \frac{ak}{r} < \frac{a(k+1)}{r} < t + 1 \\ &\Leftrightarrow -t - 1 < \frac{-a(k+1)}{r} < \frac{-ak}{r} < -t \\ &\Leftrightarrow k - t < \frac{(r-a)(k+1)}{r} < \frac{(r-a)k}{r} + 1 < k - t + 1 \\ &\Leftrightarrow \frac{(r-a)k}{r} < k - t < \frac{(r-a)(k+1)}{r} \\ &\Leftrightarrow \beta = 1 \end{aligned}$$

ii) Suponha que existe um automorfismo $\varphi \in \text{Aut}(\mathbb{Z}^4)$ diferente da identidade tal que $\varphi(\sigma) = \sigma$. Então $\varphi(sk^1\sigma) = sk^1\sigma$. Por simplicidade ponha $e_0 = e = (1, a, r - a, r)$. Suponha que

$$\varphi(e_1) = e_i, \quad \varphi(e_2) = e_j, \quad \varphi(e_3) = e_k, \quad \varphi(e_4) = e_l$$

com $\{i, j, k, l\} = \{0, 1, 2, 3\}$. Então

$$e_l = \varphi(e_0) = \varphi(e_1) + a\varphi(e_2) + (r - a)\varphi(e_3) + r\varphi(e_4)$$

e portanto

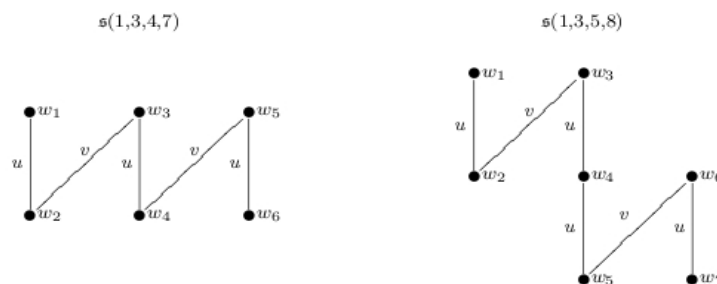
$$\varphi(e_4) = \frac{1}{r}(e_l - e_i - ae_j + (a - r)e_k) \in \mathbb{Z}^4.$$

Calculando todas as possibilidades concluimos do fato que $\varphi(e_4) \in \mathbb{Z}^4$ que

$$\varphi(e_1) = e_0, \quad \varphi(e_2) = e_3, \quad \varphi(e_3) = e_2, \quad \varphi(e_4) = e_1.$$

As demais afirmações se verificam facilmente. ■

Abaixo mostramos as configurações do conjunto P_σ associado ao cone σ de acordo com o lema 4.13.



No Teorema 4.16 abaixo caracterizaremos a família dos cones simpliciais, terminais, não regulares e de índice 1, que admitem G -subdivisão regular. Para isso precisaremos de dois lemas técnicos.

No lema abaixo, lembramos que dado um inteiro c denotamos por $[c]$ ao elemento de $\{1, \dots, r\}$ que é cômputo a c módulo r .

Lema 4.14. *Sejam a e r inteiros relativamente primos satisfazendo $1 < a < \frac{r}{2}$. Existe $b \in \{2, \dots, r-2\}$ tal que $[ab] = 1$. Além disso a aplicação $j \mapsto k_j := [-bj]$ define uma bijeção do conjunto $\{1, \dots, r-1\}$ nele mesmo com as seguintes propriedades:*

$$i) \quad k_{j+j'} = [k_j + k_{j'}], \quad j, j' \in \mathbb{Z}. \text{ Em particular, } k_{r-j} + k_j = r;$$

$$ii) \quad r \left[\frac{ak_j}{r} \right] - ak_j = j, \quad j = 0, \dots, r-1;$$

$$iii) \quad \text{Se } r = 2t + 1 \text{ então } \{t, t+1\} \cap \{k_t, k_{t+1}\} = \emptyset;$$

$$iv) \quad \text{Se } r = 2t \text{ então } k_1 \in \{3, \dots, r-3\}.$$

Demonstração:

Como $\text{mdc}(a, r) = 1$, existem inteiros b e c tais que $ab + cr = 1$. Logo $[ab] = 1$. Pelo algoritmo da divisão podemos supor $b \in \{1, \dots, r-1\}$. Como $a > 1$ devemos ter $1 \neq b \neq r-1$.

A bijeção e o item *i)* do enunciado são imediatos das propriedades de congruência nos inteiros;

ii) Sejam inteiros c, d com $d \neq 0$. Pelo algoritmo da divisão verifica-se que

$$d \left[\frac{c}{d} \right] - c = t \in \{0, \dots, r-1\}.$$

Substituindo c por ak_j e d por r temos

$$t = r \left[\frac{ak_j}{r} \right] - ak_j \equiv -ak_j \equiv j \pmod{r}.$$

donde $t = j$.

iii) Se $\{t, t+1\} \cap \{k_t, k_{t+1}\} \neq \emptyset$, segue do item *i)* que $k_t = t$ ou $k_t = t+1$. Como $r > 2$ temos que $\text{mdc}(t, r) = 1$. Logo

$$k_t = t \Leftrightarrow [-bt] = t \Leftrightarrow b = r-1, \text{ absurdo.}$$

$$k_t = t+1 \Leftrightarrow [-bt] = -t \Leftrightarrow b = 1, \text{ absurdo.}$$

iv) Se $r = 2t$ temos $k_1 = 2 \Leftrightarrow [-b] = 2 \Leftrightarrow [-1] = 2a \Leftrightarrow 2a = 2t - 1$, absurdo. $k_1 = r - 2 \Leftrightarrow [-b] = r - 2 \Leftrightarrow [-1] = 2a \Leftrightarrow 2a = 2t + 1$, absurdo. ■

No Lema 4.15 abaixo, generalizamos a técnica que em [BG2], os autores utilizam para provar que o cone $\sigma = \mathfrak{s}(1, 3, 4, 7)$ não admite uma G_σ -subdivisão regular.

Lema 4.15. *Seja $\sigma = \mathfrak{s}(1, a, r - a, r)$ com $1 < a < \frac{r}{2}$ e $\text{mdc}(a, r) = 1$. Se Σ é uma G -subdivisão regular de σ então, com as notações acima, temos*

$$\langle w_j, w_{j+1} \rangle \in \Sigma \quad e \quad \langle w_{k_j}, w_{k_{j+1}} \rangle \in \Sigma \quad \text{para} \quad j = 1, \dots, r - 2.$$

Demonstração: Denotando $e := (1, a, r - a, r)$, temos $G_\sigma \setminus \{e, e_1\} = \{e_2, e_3, w_1, \dots, w_{r-1}\}$. Além disso, este conjunto está contido no espaço afim de equação $x_2 + x_3 - x_4 = 1$: Com efeito, $v = x_2 + x_3 - x_4$ é a forma linear da proposição 4.11.

Se $w = (x, y, z, u) \in G_\sigma \setminus \{e, e_1\}$ e $k \in \{1, \dots, r - 1\}$ temos

$$\begin{aligned} |\det(e_1, e, w_k, w)| &= \left| \det \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & x \\ 0 & a & \lceil ak/r \rceil & y \\ 0 & r-a & \lceil (r-a)k/r \rceil & z \\ 0 & r & k & u \end{pmatrix} \right| \\ &= \left| \det \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & x \\ 0 & a & \lceil ak/r \rceil & y \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & r & k & u \end{pmatrix} \right| \\ &= |r \lceil ak/r \rceil - ak + au - ry|. \end{aligned}$$

Para a segunda igualdade, observe que a segunda matrix é obtida substituindo a linha l_3 da primeira matrix por $l_2 + l_3 - l_4$.

Substituindo k por k_j na equação acima, segue do Lema 4.14-ii, que

$$|\det(e, e_1, w_{k_j}, w)| = |j + au - ry|.$$

Donde concluímos que

$$\langle e, e_1, w_{k_j}, w \rangle \text{ é regular} \Leftrightarrow \begin{cases} j = 1 \text{ e } w \in \{e_3, w_{k_2}\}, \\ j = r - 1 \text{ e } w \in \{e_2, w_{k_{r-2}}\}, \\ j \in \{2, \dots, r - 2\} \text{ e } w \in \{w_{k_{j-1}}, w_{k_{j+1}}\}. \end{cases} \quad (4.1)$$

Como $\langle e, e_1, e_3 \rangle$ é um muro de σ temos $\langle e, e_1, e_3 \rangle \in \Sigma$. Por hipótese, existe um cone regular $\langle e, e_1, e_3, w \rangle \in \Sigma$ com $w \in G_\sigma$, mas por 4.1 a única possibilidade é $w = w_{k_1}$. Em particular, $\langle e, e_1, w_{k_1} \rangle \in \Sigma$. Como $w_{k_1} \in \text{int } \sigma$ existem dois cones maximais regulares em Σ da forma $\langle e, e_1, w_{k_1}, w' \rangle \in \Sigma$, com $w' \in G_\sigma \setminus \{w_{k_1}\}$. Novamente por 4.1, as únicas possibilidades são $w' = e_3$ ou $w' = w_{k_2}$. Em particular, $\langle e, e_1, w_{k_2} \rangle \in \Sigma$. Repetindo este raciocínio obtemos a seqüência de implicações:

$$\begin{aligned} \langle e, e_1, e_3 \rangle \in \Sigma &\Rightarrow \langle e, e_1, e_3, w_{k_1} \rangle \in \Sigma \Rightarrow \langle e, e_1, w_{k_1} \rangle \in \Sigma \Rightarrow \langle e, e_1, w_{k_1}, w_{k_2} \rangle \in \Sigma \\ &\Rightarrow \langle e, e_1, w_{k_2} \rangle \in \Sigma \Rightarrow \langle e, e_1, w_{k_2}, w_{k_3} \rangle \in \Sigma \Rightarrow \dots \Rightarrow \langle e, e_1, w_{k_{r-2}}, w_{k_{r-1}} \rangle \in \Sigma \end{aligned}$$

donde concluímos que

$$\langle w_{k_j}, w_{k_{j+1}} \rangle \in \Sigma \quad \text{para } j = 1, \dots, r - 2.$$

A outra parte se procede de maneira similar: Tomando $w = (x, y, z, u) \in \{e, e_1, w_1, \dots, w_{r-1}\} = G_\sigma \setminus \{e_2, e_3\}$. Para $k \in \{1, \dots, r - 1\}$ temos

$$|\det(e_2, e_3, w_k, w)| = |u - xk|$$

de onde segue que

$$\langle e_2, e_3, w_j, w \rangle \text{ é regular} \Leftrightarrow \begin{cases} j = 1 \text{ e } w \in \{e_1, w_2\}, \\ j = r - 1 \text{ e } w \in \{e, w_{r-2}\}, \\ j \in \{2, \dots, r - 2\} \text{ e } w \in \{w_{j-1}, w_{j+1}\}. \end{cases}$$

Assim, argumentando como anteriormente obtemos a seqüência de implicações:

$$\begin{aligned} \langle e_1, e_2, e_3 \rangle \in \Sigma &\Rightarrow \langle e_1, e_2, e_3, w_1 \rangle \in \Sigma \Rightarrow \langle e_2, e_3, w_1 \rangle \in \Sigma \Rightarrow \langle e_2, e_3, w_1, w_2 \rangle \in \Sigma \\ &\Rightarrow \langle e_2, e_3, w_2 \rangle \in \Sigma \Rightarrow \langle e_2, e_3, w_2, w_3 \rangle \in \Sigma \Rightarrow \dots \Rightarrow \langle e_2, e_3, w_{r-2}, w_{r-1} \rangle \in \Sigma \end{aligned}$$

donde concluimos que

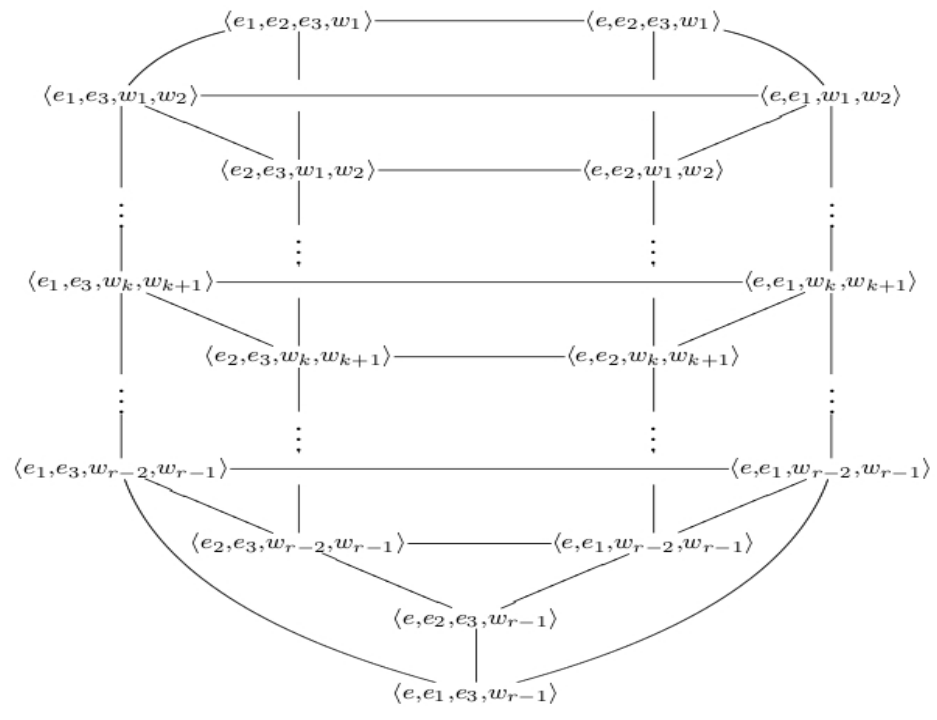
$$\langle w_j, w_{j+1} \rangle \in \Sigma \quad \text{para} \quad j = 1, \dots, r - 2.$$

Isto prova o lema. ■

Teorema 4.16. *Seja $\sigma \subset N_{\mathbb{R}}$ um cone simplicial terminal não regular de índice 1 e de dimensão 4. Então as condições abaixo são equivalentes:*

- i) $P_{\sigma} = G_{\sigma} \setminus sk^1\sigma$ está contido em uma reta;*
- ii) $\sigma \simeq \mathfrak{s}(1, 1, r - 1, r)$ para algum r maior que 2;*
- iii) Existe uma G -subdivisão regular de σ . Neste caso a G -subdivisão regular é única. .*

Nas hipóteses do teorema acima, as relações de incidência dos cones maximais da única G -subdivisão Σ , quando esta existe, pode ser representada pelo grafo a abaixo, onde dois cones são ligados se eles possuem um muro em comum.



Demonstração:

Pela proposição 4.11, podemos supor sem perda de generalidade que $\sigma = \mathfrak{s}(1, a, r - a, r)$, onde a, r são inteiros com $\text{mdc}(a, r) = 1$ e $0 < a < \frac{r}{2}$. Note que para $r = 2$ a única possibilidade é $\sigma = \mathfrak{s}(1, 1, 1, 2)$ e neste caso,

$$G_\sigma \setminus sk^1\sigma = \{(1, 1, 1, 1)\},$$

donde, os itens *i*), *ii*) e *iii*) se verificam facilmente. Suponha então que $r > 2$.

(*i* \Leftrightarrow *ii*): Primeiramente,

$$w_k = \left(1, \left\lceil \frac{ak}{r} \right\rceil, \left\lceil \frac{(r-a)k}{r} \right\rceil, k\right) \quad k = 1, \dots, r - 1.$$

Em particular, como $0 < a < \frac{r}{2}$, temos

$$w_1 = (1, 1, 1, 1) \quad \text{e} \quad w_{r-1} = (1, a, r - a, r - 1).$$

Portanto, $P_\sigma = \{w_1, w_2, \dots, w_{r-1}\}$ esta contido numa reta se, e somente se, para todo $k \in \{1, \dots, r-1\}$ existe $\lambda_k \in \mathbb{R}$ tal que

$$w_k = w_1 + \lambda_k(w_{r-1} - w_1).$$

Como $r > 2$, substituindo w_1, w_k e w_{r-1} na equação acima, obtemos $\lambda_k = \frac{k-1}{r-2}$ e segue que P_σ esta contido numa reta se, e somente se,

$$\left\lceil \frac{ak}{r} \right\rceil = 1 + \frac{(k-1)(a-1)}{r-2} \quad \text{e} \quad \left\lceil \frac{(r-a)k}{r} \right\rceil = 1 + \frac{(k-1)(r-a-1)}{r-2},$$

para todo $k \in \{1, \dots, r-1\}$. Mas como $r > 2$, (tomando $k = r-2$) verifica-se que isso ocorre se, e somente se, $a = 1$.

(**ii** \Rightarrow **iii**): Se $a = 1$ verifica-se que

$$w_k = (1, 1, k, k) \quad \text{para todo} \quad k = 1, \dots, r-1.$$

Pondo $e = (1, 1, r-1, r)$ temos que para quais quer $i, j, k \in \{1, \dots, r-1\}$ vale:

- $|\det(e_1, e_2, e_3, w_k)| = |\det(e, e_1, e_2, w_k)| = k;$
- $|\det(e, e_1, e_3, w_k)| = |\det(e, e_2, e_3, w_k)| = r - k;$
- $|\det(w, w_i, w_j, w_k)| = 0 \quad \text{para todo} \quad w \in \mathbb{R}^4;$
- $|\det(e, e_1, w_j, w_k)| = |\det(e, e_2, w_j, w_k)| = |\det(e_1, e_3, w_j, w_k)| = |\det(e_2, e_3, w_j, w_k)| = |k - j|.$

Como conseqüência, os únicos cones regulares de dimensão 4 contidos em σ que contém seus geradores em G_σ são:

$$\begin{aligned} &\langle e_1, e_2, e_3, w_1 \rangle, \langle e, e_1, e_2, w_1 \rangle, \langle e, e_1, e_3, w_{r-1} \rangle, \langle e, e_2, e_3, w_{r-1} \rangle \\ &\langle e, e_1, w_j, w_{j+1} \rangle, \langle e, e_2, w_j, w_{j+1} \rangle, \langle e_1, e_3, w_j, w_{j+1} \rangle, \langle e_2, e_3, w_j, w_{j+1} \rangle \end{aligned}$$

para $j = 1, \dots, r-2$.

Seja Σ o conjunto formado por todos os cones regulares que tem como geradores os elementos de G_σ , ou seja, por cada um dos cones acima juntamente com sua faces. Verifica-se que Σ satisfaz todas as condições para ser leque. Como $sk^1\Sigma = G_\sigma$ e todos os elementos de Σ são regulares, segue que Σ é uma G -subdivisão regular de σ .

Para a unicidade, suponha que Σ' é uma G -subdivisão regular qualquer de σ . Como $\langle e_1, e_2, e_3 \rangle$ é face de σ temos $\langle e_1, e_2, e_3 \rangle \in \Sigma'$. Logo existe $w \in G_\sigma$ tal que $\langle e_1, e_2, e_3, w \rangle \in \Sigma'$. Como Σ' é regular, a única possibilidade é $w = w_1$. Em particular, $\langle e_2, e_3, w_1 \rangle \in \Sigma'$, logo, existe $w' \in G_\sigma$ tal que $\langle e_2, e_3, w_1, w' \rangle \in \Sigma'$ e novamente, como Σ' é regular, a única possibilidade é $w' = w_2$. Repetindo este raciocínio concluímos que $\langle e_2, e_3, w_j \rangle$ e $\langle e_2, e_3, w_j, w_{j+1} \rangle$ pertencem a Σ' par todo $j = 1, \dots, r - 1$. De maneira análoga mostramos que os demais cones regulares acima citados pertencem a Σ' , donde $\Sigma \subset \Sigma'$. Mas por construção, Σ é a G -subdivisão regular de σ com o maior número de cones maximais, logo $\Sigma' = \Sigma$.

(*iii* \Rightarrow *ii*): Suponhamos, por absurdo, que $a > 1$ e que existe uma G_σ -subdivisão regular Σ de σ . Com isso estamos nas hipóteses do lema 4.15, logo mantendo suas notações temos

$$\langle w_j, w_{j+1} \rangle \in \Sigma \quad \text{e} \quad \langle w_{k_j}, w_{k_{j+1}} \rangle \in \Sigma \quad \text{para} \quad j = 1, \dots, r - 2.$$

Vamos analisar separadamente os casos em que r é par ou ímpar.

Se r é ímpar, escrevemos $r = 2t + 1$, logo

$$t + 1 = r - t \quad \text{e} \quad k_{t+1} = r - k_t.$$

Assim, pelo item *vii*) da proposição 2.12, temos

$$w_t + w_{t+1} = w_{k_t} + w_{k_{t+1}} = e + e_1 + e_2 + e_3.$$

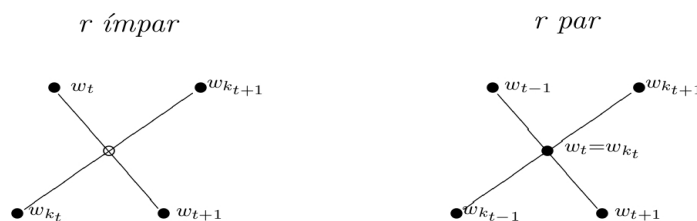
Pelo lema 4.14-*iii*), temos $\{w_t, w_{t+1}\} \cap \{w_{k_t}, w_{k_{t+1}}\} = \emptyset$, donde segue que

$$\langle e + e_1 + e_2 + e_3 \rangle = \text{int}\langle w_t, w_{t+1} \rangle \cap \langle w_{k_t}, w_{k_{t+1}} \rangle \in \Sigma.$$

Contradição.

Se r é par, digamos $r = 2t$, um argumento similar não funciona, pois neste caso

$$\langle e + e_1 + e_2 + e_3 \rangle = \text{int}\langle w_t, w_{t+1} \rangle \cap \langle w_{k_t}, w_{k_{t+1}} \rangle = \langle w_t \rangle \in \Sigma.$$



Se r é par, como $\text{mdc}(a, r) = 1$ e $2 \leq a < \frac{r}{2}$ temos que a é ímpar e que $r \geq 8$. Pela equivalência entre os itens *i*) e *ii*), segue que P_σ não está contido numa única reta, logo existem inteiros $2 \leq c < d < r$ tais que c é o maior inteiro para o qual $\{w_1, \dots, w_c\}$ está contido numa reta R_1 e d é o maior inteiro d para o qual $\{w_c, \dots, w_d\}$ está contido numa reta R_2 diferente de R_1 .

No que segue, denote

$$[w_i, w_j] := \text{conv}(w_i, w_j) \quad \text{e} \quad (w_i, w_j) := [w_i, w_j] \setminus \{w_i, w_j\}.$$

Temos seis casos a analisar (ver figura abaixo). Em cada um deles provaremos que existem dois cones distintos $\langle w_i, w_j \rangle$ e $\langle w_k, w_l \rangle$ em Σ tais que $(w_i, w_j) \cap [w_k, w_l] \neq \emptyset$, obtendo assim uma contradição. Primeiramente considere $j, j', j'' \in \{1, \dots, r-1\}$ tais que

$$k_j = 1, \quad k_{j'} = 2 \quad \text{e} \quad k_{j''} = 3.$$

Pelos itens *i*) e *iv*) do lema 4.14 temos

$$k_1 + 3 \leq r, \quad k_{j+1} = k_1 + 1, \quad k_{j'+1} = k_1 + 2 \quad \text{e} \quad k_{j''+1} = k_1 + 3.$$

Em particular, pelo lema 4.15, segue que $\langle w_1, w_{k_1+1} \rangle$ e $\langle w_2, w_{k_1+2} \rangle$ pertencem a Σ .

Caso 1. ($k_1 + 1 \leq c$): Pelo Lema 4.14-(iv) temos $k_1 + 1 \geq 4$ logo $(w_1, w_3) \cap [w_1, w_{k_1+1}] \neq \emptyset$. Absurdo.

Caso 2. ($k_1+1 > d$): Considere $W = \text{conv}(w_1, \dots, w_d)$ e $W' = \text{conv}(w_c, \dots, w_{r-1})$. Como $w_1 \in W$ e $w_{k_1+1} \in W' \setminus W$, então o segmento (w_1, w_{k_1+1}) intercepta $W \cap W' = [w_c, w_d]$. Absurdo.

Caso 3. ($c < k_1 + 1 < d$): Tome W como acima e $W'' = \text{conv}(w_1, \dots, w_{k_1+1})$. Como $w_2 \in W''$ e $w_{k_1+2} \in W \setminus W''$, então o segmento (w_2, w_{k_1+2}) intercepta $W \cap W''$ em $[w_1, w_{k_1+1}]$. Absurdo.

Caso 4. ($2 < c < k_1 + 1 = d$): Com um argumento similar ao anterior provamos que $(w_2, w_{k_1+2}) \cap [w_1, w_{k_1+1}] \neq \emptyset$. Absurdo.

Caso 5. ($2 = c < k_1 + 1 = d, k_1 + 3 = r$): Neste caso, $r \geq 8$ temos $k_1 \geq 5$. Por outro lado, como $k_{j''} = 3$ temos $k_{j''+1} = k_{j''} + k_1 = r$ donde segue que $j'' = r - 1$. Logo $3 = k_{r-1} = [k_{r-2} + k_1]$, e portanto $k_{r-2} + k_1 = r + 3 = k_1 + 6$, donde temos $k_{r-2} = 6$. Com isso temos que $(w_4, w_5) \subset [w_3, w_6]$. Absurdo.

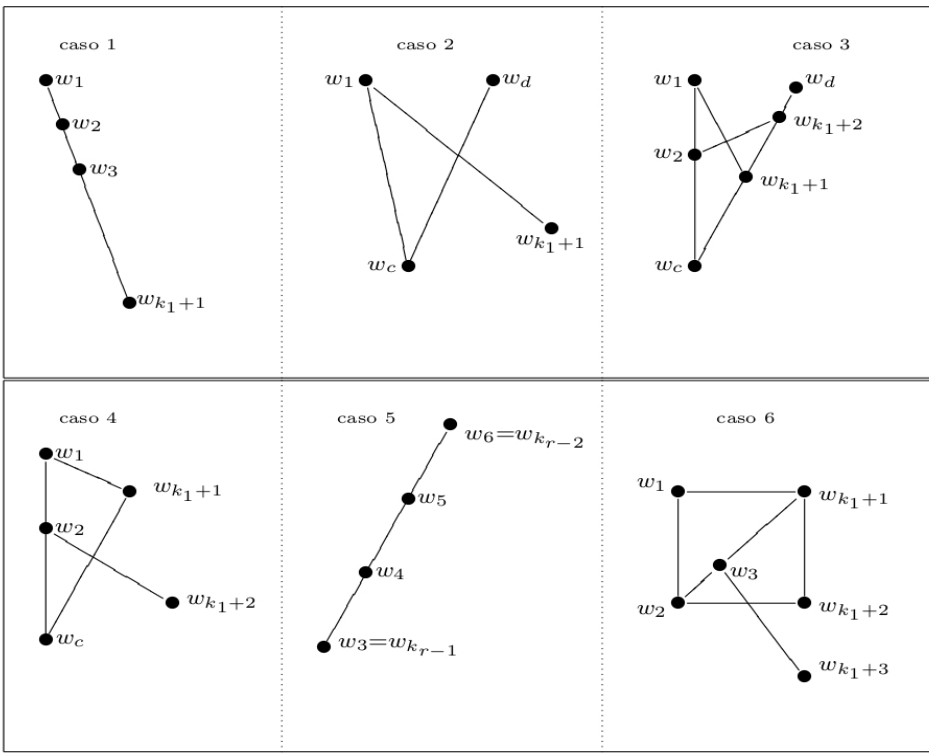
Caso 6. ($2 = c < k_1 + 1 = d, k_1 + 3 < r$): Considere o quadrângulo

$$Q = \text{conv}(w_1, w_2, w_{k_1+1}, w_{k_1+2}).$$

Pelo lema 4.14 iv) temos que w_3 pertence (w_2, w_{k_1+1}) e portanto, como $[w_2, w_{k_1+1}]$ é diagonal de Q , temos $w_3 \in \text{int } Q$. Por outro lado, como $k_1 < r - 3$ temos que $w_{k_1+3} \notin Q$, logo (w_3, w_{k_1+3}) intercepta a fronteira de Q , dada por

$$[w_1, w_2] \cup [w_1, w_{k_1+1}] \cup [w_2, w_{k_1+2}] \cup [w_{k_1+1}, w_{k_1+2}].$$

Absurdo. ■



G -Subdivisões de $\mathfrak{s}(1, 2, 3, 5)$

Para finalizar este capítulo, apresentaremos todas as possíveis G -subdivisões do cone $\sigma = \mathfrak{s}(1, 2, 3, 5)$ e as subdivisões regulares minimais provenientes delas.

Lembramos que

$$sk^1\sigma = \{e, e_1, e_2, e_3\} \quad \text{e} \quad G_\sigma = \{w_1, w_2, w_3, w_4\} \cup sk^1\sigma,$$

onde e_1, e_2 e e_3 são os três primeiros vetores da base canônica de \mathbb{Z}^4 e

$$\begin{aligned} w_1 &= (1, 1, 1, 1), & w_2 &= (1, 1, 2, 2), & w_3 &= (1, 2, 2, 3) \\ w_4 &= (1, 2, 3, 4), & e &= (1, 2, 3, 5). \end{aligned}$$

Pelo lema 4.13, existe um único automorfismo $\varphi \in \text{Aut}(\mathbb{Z}^4)$ diferente da

identidade tal que $\varphi(\sigma) = \sigma$, $\varphi^2 = Id$ e

$$\varphi(e_1) = e, \quad \varphi(e_2) = e_3 \quad \text{e} \quad \varphi(w_k) = w_{5-k} \quad \text{para todo} \quad w_k \in P_\sigma.$$

Se \mathcal{F} é uma família de cones, denote por $\varphi\mathcal{F}$, a família de cones definida por

$$\{\varphi(\tau) : \tau \in \mathcal{F}\}.$$

Proposição 4.17. *Com as notações acima, se Σ é uma G -subdivisão de $\mathfrak{s}(1, 2, 3, 5)$ então o conjunto Σ^{max} dos cones maximais de Σ é dado por*

$$\Sigma^{max} = \mathcal{F}_i \quad \text{ou} \quad \Sigma^{max} = \varphi\mathcal{F}_i, \quad i = 1, 2, 3, 4,$$

onde $\mathcal{F}_1, \mathcal{F}_2, \mathcal{F}_3$ e \mathcal{F}_4 são listados abaixo.

$$\mathcal{F}_1 = \left\{ \begin{array}{cccc} \langle e_1, e_3, e, w_2 \rangle, & \langle e_1, e, w_2, w_4 \rangle, & \langle e_3, e, w_2, w_4 \rangle, & \langle e_1, e_2, e_3, w_1 \rangle, \\ \langle e_1, e_3, w_1, w_2 \rangle, & \langle e_2, e_3, w_1, w_2 \rangle, & \langle e_1, e_2, w_1, w_4 \rangle, & \langle e_1, w_1, w_2, w_4 \rangle, \\ \langle e_2, w_1, w_2, w_4 \rangle, & \langle e_1, e_2, w_3, w_4 \rangle, & \langle e_1, e_2, e, w_3 \rangle, & \langle e_2, e, w_3, w_4 \rangle, \\ \langle e_1, e, w_3, w_4 \rangle, & \langle e_2, e_3, w_2, w_4 \rangle, & \langle e_2, e_3, e, w_4 \rangle & \end{array} \right\}$$

$$\mathcal{F}_2 = \left\{ \begin{array}{cccc} \langle e_1, e_3, e, w_2 \rangle, & \langle e_1, e, w_2, w_4 \rangle, & \langle e_3, e, w_2, w_4 \rangle, & \langle e_1, e_3, w_1, w_2 \rangle, \\ \langle e_1, w_1, w_2, w_4 \rangle, & \langle e_3, w_1, w_2, w_4 \rangle, & \langle e_1, e_2, w_3, w_4 \rangle, & \langle e_1, e_2, e, w_3 \rangle, \\ \langle e_2, e, w_3, w_4 \rangle, & \langle e_1, e, w_3, w_4 \rangle, & \langle e_1, e_2, e_3, w_1 \rangle, & \langle e_1, e_2, w_1, w_4 \rangle, \\ \langle e_2, e_3, w_1, w_4 \rangle, & \langle e_2, e_3, e, w_4 \rangle & \end{array} \right\}$$

$$\mathcal{F}_3 = \left\{ \begin{array}{cccc} \langle e_2, e_3, e, w_4 \rangle, & \langle e_2, e_3, w_3, w_4 \rangle, & \langle e_2, e, w_3, w_4 \rangle, & \langle e_1, e_2, e_3, w_1 \rangle, \\ \langle e_1, e_2, w_1, w_3 \rangle, & \langle e_1, e_3, w_1, w_3 \rangle, & \langle e_2, e_3, w_1, w_3 \rangle, & \langle e_1, e_3, e, w_2 \rangle, \\ \langle e_1, e_3, w_2, w_3 \rangle, & \langle e_1, e, w_2, w_3 \rangle, & \langle e_3, e, w_2, w_4 \rangle, & \langle e_3, w_2, w_3, w_4 \rangle, \\ \langle e, w_2, w_3, w_4 \rangle, & \langle e_1, e_2, e, w_3 \rangle & \end{array} \right\}$$

$$\mathcal{F}_4 = \left\{ \begin{array}{cccc} \langle e_2, e_3, e, w_4 \rangle, & \langle e_2, e_3, w_3, w_4 \rangle, & \langle e_2, e, w_3, w_4 \rangle, & \langle e_1, e_2, e_3, w_1 \rangle, \\ \langle e_1, e_2, w_1, w_3 \rangle, & \langle e_1, e_3, w_1, w_3 \rangle, & \langle e_2, e_3, w_1, w_3 \rangle, & \langle e_1, e_3, e, w_2 \rangle, \\ \langle e_1, e, w_2, w_4 \rangle, & \langle e_3, e, w_2, w_4 \rangle, & \langle e_1, e_3, w_2, w_3 \rangle, & \langle e_1, e, w_3, w_4 \rangle, \\ \langle e_1, w_2, w_3, w_4 \rangle, & \langle e_3, w_2, w_3, w_4 \rangle, & \langle e_1, e_2, e, w_3 \rangle & \end{array} \right\}$$

Demonstração: Note que todas as G -subdivisões de σ são da forma

$$(\sigma)_{w_i, w_j, w_k, w_l} \quad \text{para} \quad \{i, j, k, l\} = \{1, 2, 3, 4\}.$$

Começaremos obtendo as G -subdivisões de σ que começam pela subdivisão elementar em w_4 . Neste caso, os cones maximais de $(\sigma)_{w_4}$ são:

$$\sigma_1 = \langle e_2, e_3, e, w_4 \rangle, \sigma_2 = \langle e_1, e_3, e, w_4 \rangle, \sigma_3 = \langle e_1, e_2, e, w_4 \rangle, \sigma_4 = \langle e_1, e_2, e_3, w_4 \rangle.$$

Para termos uma G -subdivisão de σ devemos subdividir cada cone σ_i acima nos pontos $\{w_1, w_2, w_3\} \cap \sigma_i$. Note que $\text{mult } \sigma_i = i$, para $i = 1, 2, 3, 4$. Em particular, σ_1 é regular e portanto os cones em jogo nas próximas subdivisões são os cones σ_2, σ_3 e σ_4 .

Verifica-se que

$$w_2 = \frac{1}{2}e_1 + \frac{1}{2}e_3 + \frac{1}{2}w_4, \quad w_3 = \frac{1}{3}e_1 + \frac{2}{3}e_2 + \frac{1}{3}w_4 + \frac{1}{3}e \quad e$$

$$w_1 = \frac{1}{2}e_1 + \frac{1}{2}e_2 + \frac{1}{2}w_2 = \frac{3}{4}e_1 + \frac{1}{2}e_2 + \frac{1}{4}e_3 + \frac{1}{4}w_4.$$

Logo,

$$w_2 \in \langle e_1, e_3, w_4 \rangle = \sigma_2 \cap \sigma_4, \quad w_1 \in \text{int } \sigma_4, \quad w_3 \in \text{int } \sigma_3.$$

Note que $w_1, w_2 \in \sigma_4$ e que σ_4 é o único cone dentre $\sigma_2, \sigma_3, \sigma_4$ que contém mais do que um elemento de $\{w_1, w_2, w_3\}$. Logo ele é o único destes cones cuja subdivisão final varia de acordo com o fato de começarmos a subdividir por w_1 ou por w_2 . Por outro lado, a subdivisão em w_3 interfere apenas no cone σ_3 e a ordem das subdivisões em w_1 e w_2 não interferem nos cones σ_2 e σ_3 . Logo a subdivisão em w_3 pode ser feita em qualquer ordem sem alterar o resultado final da subdivisão. Resumindo, temos apenas duas possíveis G -subdivisões de σ obtidas a partir de $(\sigma)_{w_4}$ dadas por

$$\begin{aligned} \Sigma_1 &:= (\sigma)_{w_4, w_3, w_2, w_1} = (\sigma)_{w_4, w_2, w_3, w_1} = (\sigma)_{w_4, w_2, w_1, w_3} \quad e \\ \Sigma_2 &:= (\sigma)_{w_4, w_3, w_1, w_2} = (\sigma)_{w_4, w_1, w_3, w_2} = (\sigma)_{w_4, w_1, w_2, w_3} \end{aligned}$$

Para continuar, calcularemos primeiro a subdivisão em w_3 . Note que $(\sigma_3)_{w_3}$

tem como cones maximais

$$\alpha = \langle e_1, e_2, w_3, w_4 \rangle, \quad \beta = \langle e_1, e_2, e, w_3 \rangle, \quad \gamma = \langle e_2, e, w_3, w_4 \rangle, \\ \delta = \langle e_1, e, w_3, w_4 \rangle,$$

com α, β e γ regulares e δ de multiplicidade 2

Obtenção de Σ_1 : Neste caso devemos subdividir primeiro em w_2 e depois em w_1 . Os cones afetados pela subdivisão em w_2 são os cones σ_2 e σ_4 . Com isso temos

$$(\sigma_2)_{w_2}^{max} = \{ \langle e_1, e_3, e, w_2 \rangle, \langle e_1, e, w_2, w_4 \rangle, \langle e_3, e, w_2, w_4 \rangle \},$$

cujos cones são todos regulares e $(\sigma_4)_{w_2}^{max}$ formado pelos cones:

$$\varepsilon = \langle e_1, e_2, e_3, w_2 \rangle, \quad \zeta = \langle e_1, e_2, w_2, w_4 \rangle, \quad \theta = \langle e_2, e_3, w_2, w_4 \rangle,$$

todos de multiplicidade 2 e com $w_1 \in \varepsilon \cap \zeta$. A subdivisão em w_1 fornece, portanto

$$\varepsilon_{w_1}^{max} = \{ \langle e_1, e_2, e_3, w_1 \rangle, \langle e_1, e_3, w_1, w_2 \rangle, \langle e_2, e_3, w_1, w_2 \rangle \}, \\ \zeta_{w_1}^{max} = \{ \langle e_1, e_2, w_1, w_4 \rangle, \langle e_1, w_1, w_2, w_4 \rangle, \langle e_2, w_1, w_2, w_4 \rangle \},$$

todas formadas por cones regulares. Com isso concluímos que

$$\Sigma_1^{max} = (\sigma_2)_{w_2}^{max} \cup \varepsilon_{w_1}^{max} \cup \zeta_{w_1}^{max} \cup \{ \alpha, \beta, \gamma, \delta, \theta, \sigma_1 \} = \mathcal{F}_1.$$

Obtenção de Σ_2 : Neste caso devemos subdividir primeiro em w_1 e depois em w_2 . O único cone afetado pela subdivisão em w_1 é σ_4 , fornecendo os seguintes cones maximais

$$\mu = \langle e_1, e_2, e_3, w_1 \rangle, \quad \nu = \langle e_1, e_2, w_1, w_4 \rangle, \quad \pi = \langle e_1, e_3, w_1, w_4 \rangle, \\ \kappa = \langle e_2, e_3, w_1, w_4 \rangle,$$

onde μ e ν são regulares, $mult \pi = 2$ e $mult \kappa = 3$. Agora, os cones que intervem na subdivisão em w_2 são os cones σ_2 e π , fornecendo $(\sigma_2)_{w_2}^{max}$ como

no caso 1 e

$$\pi_{w_2}^{max} = \{\langle e_1, e_3, w_1, w_2 \rangle, \langle e_1, w_1, w_2, w_4 \rangle, \langle e_3, w_1, w_2, w_4 \rangle\},$$

cujos cones são todos regulares. Assim

$$\Sigma_2^{max} = (\sigma_2)_{w_2}^{max} \cup \pi_{w_2}^{max} \cup \{\alpha, \beta, \gamma, \delta, \mu, \nu, \kappa, \sigma_1\} = \mathcal{F}_2.$$

Verifica-se de maneira análoga, que se começarmos a G -subdivisão de σ por w_3 obteremos apenas dois leques dados por

$$\begin{aligned} \Sigma_3 &:= (\sigma)_{w_3, w_1, w_2, w_4} = (\sigma)_{w_3, w_2, w_1, w_4} = (\sigma)_{w_3, w_2, w_4, w_1} \quad \text{e} \\ \Sigma_4 &:= (\sigma)_{w_3, w_1, w_4, w_2} = (\sigma)_{w_3, w_4, w_1, w_2} = (\sigma)_{w_3, w_4, w_2, w_1}. \end{aligned}$$

onde os respectivos cones maximais são dados por $\Sigma_3^{max} = \mathcal{F}_3$ e $\Sigma_4^{max} = \mathcal{F}_4$. Para finalizar, aplicando o automorfismo φ temos

$$\varphi(\sigma)_{w_i, w_j, w_k, w_l} = (\sigma)_{\varphi(w_i), \varphi(w_j), \varphi(w_k), \varphi(w_l)}.$$

para $\{i, j, k, l\} = \{1, 2, 3, 4\}$. Portanto, as outras possíveis G -subdivisões de σ são dadas por

$$\begin{aligned} \varphi\Sigma_1 &:= (\sigma)_{w_1, w_2, w_3, w_4} = (\sigma)_{w_1, w_3, w_2, w_4} = (\sigma)_{w_1, w_3, w_4, w_2}, \\ \varphi\Sigma_2 &:= (\sigma)_{w_1, w_2, w_4, w_3} = (\sigma)_{w_1, w_4, w_2, w_3} = (\sigma)_{w_1, w_4, w_3, w_2}, \\ \varphi\Sigma_3 &:= (\sigma)_{w_2, w_4, w_3, w_1} = (\sigma)_{w_2, w_3, w_4, w_1} = (\sigma)_{w_2, w_3, w_1, w_4}, \\ \varphi\Sigma_4 &:= (\sigma)_{w_2, w_4, w_1, w_3} = (\sigma)_{w_2, w_1, w_4, w_3} = (\sigma)_{w_2, w_1, w_3, w_4}. \end{aligned}$$

■

Proposição 4.18. *Com as notações acima, cada Σ_i possui uma única sub-*

divisão minimal regular Σ'_i , cujo esqueleto é dado por

$$\begin{aligned} sk^1\Sigma'_1 &= G_\sigma \cup \{w_1 + e, w_3 + e_3\}, \\ sk^1\Sigma'_2 &= G_\sigma \cup \{w_1 + e, w_2 + e_2, w_3 + e_3\}, \\ sk^1\Sigma'_3 &= G_\sigma \cup \{w_1 + e, w_2 + e_2, w_3 + e_3\}, \\ sk^1\Sigma'_4 &= G_\sigma \cup \{w_1 + e, w_2 + e_2\}. \end{aligned}$$

Em particular, cada $\varphi\Sigma'_i$ possui uma única subdivisão minimal regular $\varphi\Sigma'_i$ cujo esqueleto é $\varphi(sk^1\Sigma'_i)$.

Demonstração: Verifica-se que nas famílias \mathcal{F}_i acima os únicos cones não regulares são:

$$\begin{aligned} \delta &= \langle e_1, e, w_3, w_4 \rangle & e \quad \theta &= \langle e_2, e_3, w_2, w_4 \rangle & \text{em } \mathcal{F}_1, \\ \delta &= \langle e_1, e, w_3, w_4 \rangle & e \quad \kappa &= \langle e_2, e_3, w_1, w_4 \rangle & \text{em } \mathcal{F}_2, \\ \delta' &:= \langle e_2, e_3, w_1, w_3 \rangle & e \quad \theta' &:= \langle e_1, e, w_2, w_3 \rangle & \text{em } \mathcal{F}_3, \\ \delta' &:= \langle e_2, e_3, w_1, w_3 \rangle & e \quad \kappa' &:= \langle e_1, e, w_3, w_4 \rangle & \text{em } \mathcal{F}_4. \end{aligned}$$

Vejamos quais subdivisões regulares minimais podem corresponder a cada uma das G -subdivisões acima.

No caso de Σ_1 devemos subdividir os cones $\delta = \langle e_1, e, w_3, w_4 \rangle$ e $\theta = \langle e_2, e_3, w_2, w_4 \rangle$ em pontos de G_δ e G_θ respectivamente. Note que

$$w_1 + e = \frac{1}{2}(e_1 + w_3 + w_4 + e) \in \text{int } \delta \quad e \quad w_3 + e_3 = \frac{1}{2}(e_2 + e_3 + w_2 + w_4) \in \text{int } \theta.$$

Assim, como $\text{mult } \delta = \text{mult } \theta = 2$, temos que $G_\delta = \{w_1 + e\}$ e $G_\theta = \{w_3 + e_3\}$. Portanto as subdivisões δ_{w_1+e} e $\theta_{w_3+e_3}$ são regulares e seus cones maximais são dados respectivamente por:

$$\begin{aligned} &\{ \langle e_1, e, w_3, w_1 + e \rangle, \langle e_1, e, w_4, w_1 + e \rangle, \langle e_1, w_3, w_4, w_1 + e \rangle, \langle e, w_3, w_4, w_1 + e \rangle \} \quad e \\ &\{ \langle e_2, e_3, w_2, w_3 + e_3 \rangle, \langle e_2, e_3, w_4, w_3 + e_3 \rangle, \langle e_2, w_2, w_4, w_3 + e_3 \rangle, \langle e_3, w_2, w_4, w_3 + e_3 \rangle \}. \end{aligned}$$

Denotando esta subdivisão de Σ_1 por Σ'_1 , temos que

$$sk^1\Sigma'_1 = G_\sigma \cup \{w_1 + e, w_3 + e_3\}.$$

Os demais resultados se verificam de maneira similar. ■

Capítulo 5

Transformações Elementares em Variedades de Fano com Número de Picard Igual a 1

Neste capítulo, dadas, uma variedade tórica completa F com número de Picard igual a $\rho(F) = 1$, e uma explosão elementar $\varphi : E \rightarrow F$ de um ponto T -invariante $x \in F$, classificaremos as contrações elementares de E , no sentido de Mori, em termos de relações lineares entre os elementos do esqueleto de E .

No caso em que $F = \mathbb{P}^n$, caracterizamos todas as explosões elementares como acima, tais que E é terminal e toda curva contraída pela única transformação elementar diferente de φ intersepta o divisor canônico K_E negativamente.

5.1 Generalidades

Fixemos uma variedade completa X . Dois divisores de Cartier $D, D' \in CDiv(X)$ são *numericamente equivalentes*, e escrevemos $D \equiv D'$, se para toda curva irredutível $C \subset X$ temos $D \cdot C = D' \cdot C$.

De maneira dual, consideremos o grupo livre $Z_1(X)$ dos 1-ciclos, isto é,

das combinações lineares (formais) finitas $\sum_i a_i C_i$, $a_i \in \mathbb{Z}$, onde C_i é uma curva irredutível para todo i . Dois 1-ciclos C e C' em X são *numericamente equivalentes*, e escrevemos $C \equiv C'$, se para todo divisor de Cartier D em X temos $D \cdot C = D \cdot C'$.

Como sabemos, equivalência linear implica equivalência numérica, então temos um epimorfismo natural $PicX \twoheadrightarrow \frac{CDiv(X)}{\equiv}$. Ainda, a forma de interseção $\frac{CDiv(X)}{\equiv} \times \frac{Z_1(X)}{\equiv} \rightarrow \mathbb{Z}$ é não degenerada e, em particular, os espaços vetoriais

$$N^1(X) := \frac{CDiv(X)}{\equiv} \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{R} = \frac{Pic(X)}{\equiv} \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{R} \quad \text{e} \quad N_1(X) := \frac{Z_1(X)}{\equiv} \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{R}$$

tem mesma dimensão (finita), a qual chamamos de *número de Picard* de X e denotamos por $\rho(X)$, ou simplesmente ρ , se X esta subentendida.

No caso tórico temos o seguinte resultado (ver [Fu2, §3.4]).

Proposição 5.1. *Seja X_{Σ} uma variedade tórica completa. Então o número de Picard de X_{Σ} é dado por $\rho(X_{\Sigma}) = \text{card}(sk^1\Sigma) - \dim X_{\Sigma}$.*

No contexto geral, considere $N^1(X)$ e $N_1(X)$ munidos de sua topologia usual. O *cone de curvas*, $NE(X)$ é o cone (convexo) em $N_1(X)$ constituído pelas classes de equivalência dos 1-ciclos efetivos (sobre \mathbb{R}), isto é, pelas combinações lineares formais

$$\sum_{i=1}^n a_i [C_i], \quad [C_i] \in N_1(X),$$

onde os a_i 's são números reais não negativos e as C_i 's são curvas irredutíveis.

Em geral, o cone de curvas $NE(X)$ não é polihedral e nem fechado em $N_1(X)$. O fecho $\overline{NE}(X)$ de $NE(X)$ em $N_1(X)$ é chamado *cone fechado de curvas*, ou também *cone nef*, da variedade X .

Um dos teoremas fundamentais da teoria de Mori, conhecido como *Teorema do Cone*, descreve a estrutura de $\overline{NE}(X)$ no caso em que X tem boas

propriedades, como por exemplo, ser normal, \mathbb{Q} -fatorial e ter singularidades terminais. (ver [MK, Thm. 3.7,(1) e (2)]). Abaixo enunciamos o referido teorema no caso tórico, onde a hipótese de terminalidade pode ser omitida ([Mat, Thm 14-1-4]).

Seja X_Σ a variedade tórica associada a um leque $\Sigma \subset \mathbb{R}^n$. Se $\omega \in \Sigma$, denotamos $V(\omega) = \overline{\text{orb}}(\omega) \subset X_\Sigma$. Ainda, denotaremos por Σ^k ao subconjunto de Σ formado pelos cones de dimensão k .

Teorema 5.2. (Teorema do cone, caso tórico:) *Seja $X = X_\Sigma$ uma variedade tórica associada a um leque simplicial e completo $\Sigma \subset \mathbb{R}^n$. Então:*

$$\overline{NE}(X) = NE(X) = \sum_{\omega \in \Sigma^{n-1}} a_\omega [V(\omega)].$$

Em particular, $\rho(X) = \dim \overline{NE}(X)$.

Voltemos novamente caso geral. Seja $f : X \rightarrow Y$ um morfismo entre variedades projetivas. Definimos o *cone relativo de f* , denotado por $NE(f)$, como sendo o subcone de $NE(X)$ gerado pelas classe de curvas irredutíveis contraídas por f .

Note que, como Y é projetiva, se f contrai uma curva irredutível C num ponto P , então qualquer curva C' numericamente equivalente a C também é contraída por f num ponto P' . Portanto f induz um homomorfismo linear $f_* : N_1(X) \rightarrow N_1(Y)$ e temos $NE(f) = \ker f_* \cap NE(X)$.

O cone $NE(f)$ é claramente um subcone convexo e fechado de $NE(X)$ e além disso, ele é uma face de $NE(X)$, isto é, existe uma forma linear $h : N_1(X) \rightarrow \mathbb{R}$ tal que h é não negativa sobre $NE(X)$ e

$$NE(f) \subset NE(X) \cap \ker h.$$

Mais ainda, suponhamos que f tem fibras conexas; se $f' : X \rightarrow Y'$ é um outro morfismo, com Y' projetiva e $NE(f) = NE(f')$, então existe um único

morfismo $g : Y \rightarrow Y'$ tal que $f' = g \circ f$. Em particular, o cone associado a um morfismo caracteriza o morfismo no caso deste ter fibras conexas. (ver [De, Prop. 1.14]).

Reciprocamente, dada uma face F de $\overline{NE}(X)$, em geral, com certas propriedades adicionais, existe um morfismo $h : X \rightarrow Z$, onde Z é uma variedade normal e projetiva, cujo cone associado $NE(h)$ coincide com F . Este é um segundo resultado fundamental da teoria de Mori, conhecido como o *Teorema da Contração* (ver [MK, Thm. 3.7,(3) e (4)]). No caso tórico, a existência da contração pode ser demonstrada sem assumir condições adicionais sobre a face de $\overline{NE}(X)$. Enunciaremos uma versão deste teorema no caso tórico, onde a face considerada é um raio extremal, isto é, tem dimensão 1 ([Mat, Thm 14-1-9]).

Teorema 5.3. (Teorema da contração:) *Seja $X = X_\Sigma$ uma variedade tórica associada a um leque simplicial e completo $\Sigma \subset \mathbb{R}^n$. Seja $R \subset \overline{NE}(X)$ um raio extremal e considere a variedade tórica Y associada ao leque Σ_R , obtido a partir de Σ removendo todos os muros $\omega \in \Sigma^{n-1}$ tais que $[V(\omega)] \in R$. Então existe um morfismo sobrejetivo, equivariante e com fibras conexas $\varphi_R : X \rightarrow Y$ tal que para todo $\omega \in \Sigma^{n-1}$ vale*

$$\varphi_R(V(\omega)) = pt \Leftrightarrow [V(\omega)] \in R$$

Além disso, se X é projetiva então Y também é projetiva e para toda curva $C \subset X$ vale

$$\varphi_R(C) = pt \Leftrightarrow [C] \in R$$

Definição 5.4. O morfismo $\varphi = \varphi_R$ do teorema acima é chamado de *contração associada* ao raio extremal R . Existem três possibilidades:

- $\dim Y < \dim X$ e φ é dita de *tipo fibrada*;
- $\dim Y = \dim X$ e $\text{codim}_X(\text{Exc}(\varphi)) = 1$ e φ é dita de *tipo divisorial*;
- $\dim Y = \dim X$ e $\text{codim}_X(\text{Exc}(\varphi)) \geq 2$ e φ é dita de *tipo flip*.

Observe que no caso tórico o conjunto $Exc(\varphi)$ é necessariamente invariante pela ação do toro e portanto é uma subvariedade irredutível de X .

As explosões ponderadas são sempre contrações divisoriais como mostra a proposição abaixo.

Proposição 5.5. *Seja $\Sigma \subset \mathbb{R}^n$ um leque simplicial e completo e seja Σ_w o leque obtido pela subdivisão elementar de Σ em $w \in \mathbb{R}^n \setminus sk^1\Sigma$. Então a explosão elementar $\varphi : X_{\Sigma_w} \rightarrow X_\Sigma$ é a contração divisorial associada ao raio extremal gerado pelas classes de equivalência numérica das curvas $V(\tau)$, com $\tau \in \Sigma_w^{n-1}$ e $w \in \tau$.*

Demonstração: Note que $R = NE(\varphi)$ é o cone extremal gerado pelas classes de equivalência numérica das curvas $V(\tau)$, com $\tau \in \Sigma_w^{n-1}$ e $w \in \tau$. Por outro lado, a aplicação linear $\varphi_* : N_1(X_{\Sigma_w}) \rightarrow N_1(X_\Sigma)$ é sobrejetiva, e como $\rho(X_{\Sigma_w}) = \rho(X_\Sigma) + 1$, temos que $R = \ker \varphi_* \cap NE(X_{\Sigma_w})$ tem dimensão 1, donde segue que R é de fato um raio extremal de $NE(X_{\Sigma_w})$. Como $\dim X_{\Sigma_w} = \dim X_\Sigma$ e $Exc(\varphi) = D_w$ é um divisor temos o resultado. ■

O seguinte resultado (ver [Mat, Cor. 14-2-2]) descreve o tipo de contração de uma variedade tórica \mathbb{Q} -fatorial e completa arbitraria X_Σ em termos de relações entre alguns elementos específicos de $sk^1\Sigma$.

Teorema 5.6. *Seja $X = X_\Sigma$ uma variedade tórica associada a um leque simplicial e completo $\Sigma \subset \mathbb{R}^n$. Seja $R \subset \overline{NE}(X)$ um raio extremal e considere a variedade tórica Y associada ao leque Σ_R , obtido a partir de Σ removendo todos os muros $\omega \in \Sigma^{n-1}$ tais que $[V(\omega)] \in R$. Seja $\omega = \langle v_1, \dots, v_{n-1} \rangle$ um muro de Σ tal que $[V(\omega)] \in R$ e sejam v_n, v_{n+1} dois vetores primitivos tais que $\langle \omega, v_n \rangle, \langle \omega, v_{n+1} \rangle \in \Sigma$. Então existe uma combinação linear*

$$\alpha_1 v_1 + \dots + \alpha_n v_n + v_{n+1} = 0$$

tal que

$$\text{codim}(Exc \varphi_R) = \alpha := \text{card}\{\alpha_i < 0 : 1 \leq i \leq n\}.$$

Além disso, a contração φ_R tem as seguintes propriedades:

- i)* φ_R é de tipo fibrada $\Leftrightarrow \alpha = 0$. Neste caso Y é \mathbb{Q} -fatorial de dimensão $\dim Y = \text{card}\{\alpha_i = 0 : 1 \leq i \leq n\}$.
- ii)* φ_R é de tipo divisorial $\Leftrightarrow \alpha = 1$. Neste caso Y é \mathbb{Q} -fatorial e $\text{Exc } \varphi_R = D_{v_i}$, para o único i tal que $\alpha_i < 0$;
- iii)* φ_R é de tipo flip $\Leftrightarrow \alpha \geq 2$. Neste caso Y não é \mathbb{Q} -fatorial.

No caso em que a contração $\varphi^- = \varphi : X^- = X \rightarrow Y$ é de tipo flip, existe outra contração (tórica) de tipo flip $\varphi^+ : X^+ \rightarrow Y$ tal que $\varphi^+ \circ \varphi^-$ induz um isomorfismo

$$X^- \setminus \text{Exc}(\varphi^-) \rightarrow X^+ \setminus \text{Exc}(\varphi^+).$$

Por abuso de linguagem diz-se que a composição $\varphi^+ \circ \varphi^- : X^- \dashrightarrow X^+$ é o *flip* associado a R .

Finalmente, dentre as contrações possíveis, destacam-se aquelas com a seguinte propriedade de "negatividade": Se C é uma curva irredutível C contraída por φ_R , isto é, $[C] \in R$, então $C \cdot K_X < 0$, onde K_X denota o divisor canônico de X . Neste caso, quando $\varphi : X \rightarrow Y$ é uma contração divisorial e X é terminal, Y também é terminal. Da mesma forma, se $\varphi^+ \circ \varphi^- : X^- \dashrightarrow X^+$ é um flip e X^- é terminal, X^+ também é terminal; além disso, toda curva irredutível contraída por φ^+ intercepta K_{X^+} positivamente, o que por um resultado de Shokurov, mostra que X^+ tem singularidades melhores, em certo sentido, do que X^- (ver [Mat, Lemma 9-1-3]).

5.2 Transformações Obtidas a Partir de Explosões Elementares sobre Variedades de Fano com $\rho = 1$

Lembramos que um divisor de Cartier D em X é *muito amplo* se o conjunto de seções globais do feixe invertível $\mathcal{O}(D)$ associado a D , define um

mergulho de X num espaço projetivo, ou seja, se $\Gamma(X, \mathcal{O}(D)) = \{f_0, \dots, f_N\}$ é o conjunto de seções globais de $\mathcal{O}(D)$, a aplicação racional

$$(f_0 : \dots : f_N) : X \dashrightarrow \mathbb{P}^N$$

é uma imersão fechada. Mais geralmente dizemos que D é *amplo* se existe um inteiro positivo m tal que mD é muito amplo.

Definição 5.7. Seja X uma variedade algébrica e seja K_X o seu divisor (de Weil) canônico. Dizemos que X é uma *Variedade de Fano* se:

- i)* X é completa e \mathbb{Q} -fatorial;
- ii)* o divisor anti-canônico $-K_X$ é amplo, isto é, existe um inteiro positivo m tal que $-mk_X$ é Cartier e muito amplo.

Em particular X é uma variedade projetiva.

Vejamos como esta definição se traduz no caso tórico. Seja $X = X_\Sigma$ uma variedade de Fano tórica de dimensão n e número de Picard $\rho(X) = \rho$. A condição *i)* da definição significa que $|\Sigma| = \mathbb{R}^n$ e que todos seus cones são simpliciais. Como $\rho(X) = \text{card}(sk^1\Sigma) - \dim X$ para qualquer variedade tórica completa, temos que o esqueleto de Σ é da formado por $\rho + n$ vetores, digamos $sk^1\Sigma = \{v_1, \dots, v_{\rho+n}\} \subset \mathbb{Z}^n$. Neste caso o divisor canônico de X é $K_X = -\sum_{i=1}^{\rho+n} D_{v_i}$ (ver Proposição 1.11) e a condição *ii)* significa que para qualquer cone maximal $\sigma \in \Sigma$ vale

$$\ell_\sigma(v_i) < 1, \quad \forall v_i \in sk^1\Sigma \setminus sk^1\sigma, \quad (5.1)$$

onde $\ell_\sigma \in M_{\mathbb{Q}}$ é a função linear que satisfaz $\ell_\sigma(v_j) = 1, \forall v_j \in sk^1\sigma$. (Colocar Explicação no cap.1)

Seja $F = X_\Sigma$ uma variedade tórica completa de dimensão n e $\rho(F) = 1$. Neste caso, a condição *ii)* da definição acima é trivialmente satisfeita e portanto F é uma variedade de Fano. Com efeito, neste caso $sk^1\Sigma =$

$\{v_0, \dots, v_n\} \subset \mathbb{Z}^n$ e todo subconjunto próprio de $sk^1\Sigma$ é linearmente independente. Em partiucclar, v_0 se escreve de maneira única como combinação linear com coeficientes racionais de v_1, \dots, v_n , digamos

$$v_0 = a_1v_1 + \dots + a_nv_n, \quad \text{com} \quad a_i \in \mathbb{Q}. \quad (5.2)$$

Note que $a_i < 0$, $\forall i$, caso contrario teriamos $|\Sigma| \neq \mathbb{R}^n$, contradizendo a completude de F . Por outro lado, se $M = Hom(\mathbb{Z}^n, \mathbb{Z})$ e $v_1^*, \dots, v_n^* \in M_{\mathbb{Q}}$ são as funções lineares que satisfazem $v_j^*(v_i) = \delta_{ij}$ (delta de Kronecker). temos que, para o cone maximal $\sigma_j := \langle v_1, \dots, \widehat{v}_j, \dots, v_n \rangle$, com $j = 0, \dots, n$, vale

$$l_{\sigma_0} = \sum_{i=1}^n v_i^* \quad \text{e} \quad l_{\sigma_j} = \sum_{i \neq j} v_i^* + \left(\frac{1 - \sum_{i \neq j} a_i}{a_j} \right) v_j^* \quad \text{se} \quad j = 1, \dots, n.$$

Com isso, as inequações de 5.1 correspondem a

$$l_{\sigma_j}(v_j) < 1 \quad \text{para todo} \quad j = 0, \dots, n,$$

o que sempre ocorre, pois $a_i < 0$, $\forall i$.

Seja $\varphi : E \rightarrow F$ uma explosão elementar de um ponto T -invariante $x \in F$. Mais especificamente, podemos supor sem perda de generalidade que x é o ponto distinto x_{σ_0} associado a um cone maximal $\sigma_0 = \langle v_1, \dots, v_n \rangle$ de Σ (ver Seção 1.7). Portanto, φ é o morfismo birracional associado a uma subdivisão elementar $\Sigma_{v_{n+1}}$ de Σ centrada num elemento primitivo $v_{n+1} \in \text{int } \sigma_0$. Deste modo

$$v_{n+1} = b_1v_1 + \dots + b_nv_n, \quad \text{com} \quad b_i \in \mathbb{Q} \quad \text{e} \quad b_i > 0 \quad \forall i. \quad (5.3)$$

Note que, fixada F , a explosão elementar $\varphi : E \rightarrow F$ fica bem determinada pela escolha dos vetores primitivos v_0 e v_{n+1} . Claramente, se $x = x_{\sigma_0}$ é um ponto regular de F então os coeficientes de v_0 e v_{n+1} nas equações 5.2 e 5.3 são inteiros.

Um pouco mais de notação: Nas situação descrita acima temos $sk^1\Sigma_{v_{n+1}} =$

$\{v_0, v_1, \dots, v_{n+1}\}$. Se $s \geq 2$ denote por $\sigma_{v_{i_1}, \dots, v_{i_s}}$ ao cone gerado por $sk^1 \Sigma_{v_{n+1}} \setminus \{v_{i_1}, \dots, v_{i_s}\}$. Note que, nem todo cone da forma $\sigma_{v_{i_1}, \dots, v_{i_s}}$ pertence a $\Sigma_{v_{n+1}}$. Se $\sigma_{v_i, v_j, v_k} \in \Sigma_{v_{n+1}}$, denote a curva $V(\sigma_{v_i, v_j, v_k}) \subset E$ por C_{v_i, v_j, v_k} . Mais precisamente, como $v_{n+1} \in \text{int } \sigma_0 = \text{int } \sigma_{v_0, v_{n+1}}$, o conjunto dos muros de $\Sigma_{v_{n+1}}$ é dado por

$$\Sigma_{v_{n+1}}^{n-1} := \{\sigma_{v_0, v_i, v_{n+1}}, \sigma_{v_0, v_i, v_j}, \sigma_{v_i, v_j, v_{n+1}} : i, j = 1, \dots, n\}.$$

Portanto, as curvas T -invariantes de E são as curvas

$$C_{v_0, v_i, v_{n+1}}, C_{v_0, v_i, v_j}, C_{v_i, v_j, v_{n+1}} : i, j = 1, \dots, n.$$

Pelo Teorema do Cone, o cone $\text{nef } \overline{\text{NE}}(E) = \text{NE}(E)$ é gerado pelas classes de equivalência numérica das curvas T -invariantes de E e tem dimensão $\rho(E) = 2$. Portanto existem duas contrações φ_R e φ_S associadas aos raios extremais R e S de $\text{NE}(E)$, sendo que, pela Proposição 5.5, a explosão elementar $\varphi : E \rightarrow F$ é uma delas, digamos $\varphi = \varphi_R$, cujo tipo é claramente divisorial. Na Proposição abaixo descrevemos os geradores dos raios extremais de $\text{NE}(E)$, caracterizamos o tipo da contração φ_S e apresentamos condições necessárias e suficientes para que o divisor canônico K_E intersepte negativamente as curvas contraídas por φ_S .

Proposição 5.8. *Seja $F = X_\Sigma$ uma variedade tórica completa, não necessariamente terminal, com $sk^1 \Sigma_{v_{n+1}} = \{v_0, v_1, \dots, v_{n+1}\}$ e seja $\varphi : E \rightarrow F$ a explosão elementar de F , obtida pela subdivisão de Σ centrada num ponto $v_{n+1} \in \text{int } \langle v_1, \dots, v_n \rangle$. Suponha que*

$$\begin{aligned} v_0 &= a_1 v_1 + \dots + a_n v_n, & \text{com } a_i \in \mathbb{Q} \text{ e } a_i < 0 \quad \forall i; \\ v_{n+1} &= b_1 v_1 + \dots + b_n v_n, & \text{com } b_i \in \mathbb{Q} \text{ e } b_i > 0 \quad \forall i. \end{aligned}$$

Sejam R e S os raios extremais de $\text{NE}(E)$ tais que $\varphi = \varphi_R$ e defina

$$\lambda := \max\left\{\frac{b_i}{a_i} : i = 1, \dots, n\right\} < 0 \text{ e } I := \{i \in \{1, \dots, n\} : \frac{b_i}{a_i} = \lambda\}.$$

Então:

- i)* R é gerado pela classe de equivalência numérica da curva C_{v_0, v_i, v_j} para quais quer $i, j \in \{1, \dots, n\}$;
- ii)* S é gerado pela classe de equivalência numérica da curva $C_{v_0, v_i, v_{n+1}}$ para qualquer $i \in I$;
- iii)* A contração φ_S está classificada da seguinte forma:
 - a** - é de tipo fibrada se $b_i = \lambda a_i$ para todo i ;
 - b** - é de tipo divisorial se existe um único i_0 tal que

$$b_{i_0} > \lambda a_{i_0} \quad e \quad b_i = \lambda a_i \quad \forall i \neq i_0;$$

c - é de tipo flip nos demais casos;

- iv)* Se $C \subset E$ é uma curva irredutível cuja classe de equivalência numérica está em S , então $K_E \cdot C < 0$ se, e somente se

$$a_{t_0} \left(1 - \sum_{t \neq t_0} b_t\right) - b_{t_0} \left(1 - \sum_{t \neq t_0} a_t\right) < 0, \quad \forall t_0 \in I.$$

Demonstração:

i) Esta é a afirmação da Proposição 5.5. De fato, os muros acrescentados ao leque de F ao se fazer a explosão são os da forma σ_{v_0, v_i, v_j} .

ii) Sejam, respectivamente μ e ν , as classes de equivalência numérica das curvas $C_{v_{n-1}, v_n, v_{n+1}}$ e C_{v_0, v_{n-1}, v_n} . Pelo item anterior temos $\mu \notin R$ e $\nu \in R$. Portanto μ e ν são linearmente independentes e como $N_1(E)$ é bídimensional temos $N_1(E) = \mathbb{R}\mu \oplus \mathbb{R}\nu$. Precisamos do seguinte Lema, cuja demonstração apresentaremos depois.

Lema 5.9. *Com as notações acima, para quais quer $i, j \in \{1, \dots, n\}$ distintos, temos*

$$[C_{v_0, v_i, v_j}] = \frac{b_{n-1} b_n}{b_i b_j} \nu, \quad [C_{v_i, v_j, v_{n+1}}] = \frac{a_{n-1} a_n}{a_i a_j} \mu \quad e \quad [C_{v_0, v_j, v_{n+1}}] = -\frac{a_{n-1} a_n}{a_j} \mu - \frac{b_{n-1} b_n}{b_j} \nu.$$

Voltemos à demonstração da proposição. Note que o raio extremal S é gerado pela classe de equivalência numérica das curvas T -invariantes de E , cujo ângulo com o vetor ν é máximo. Pelo Lema 5.9 acima, é imediato que o ângulo de $[C_{v_i, v_j, v_{n+1}}]$ com ν é reto para todo $i \neq j$ e que o ângulo de $[C_{v_0, v_i, v_{n+1}}]$ com ν é obtuso, com tangente dada por $\beta_i = \frac{a_n a_{n-1} b_i}{b_n b_{n-1} a_i} < 0$, para todo i . Deste modo, S é gerado pelas classes das curvas $C_{v_0, v_i, v_{n+1}}$ tais que β_i é máximo.

iii) Seja $t_0 \in I$. Pelo item **ii)**, o cone $\sigma_{v_0, v_{t_0}, v_{n+1}}$ corresponde a uma curva contraída por φ_S . Além disso, $\sigma_{v_0, v_{t_0}, v_{n+1}}$ é muro de $\sigma_{v_0, v_{t_0}}$ e $\sigma_{v_{t_0}, v_{n+1}}$. Como

$$sk^1(\sigma_{v_{t_0}, v_{n+1}}) = \{v, v_1, \dots, v_{t_0-1}, v_{t_0+1}, \dots, v_n\}$$

é linearmente independentes, existe uma combinação linear

$$0 = \alpha_0 v + \sum_{i \neq t_0} \alpha_i v_i + v_{n+1} = (b_{t_0} + \alpha_0 a_{t_0}) v_{t_0} + \sum_{i \neq t_0} (\alpha_i + b_i + \alpha_0 a_i) v_i.$$

Donde,

$$\alpha_0 = -\frac{b_{t_0}}{a_{t_0}} = -\lambda \quad \text{e} \quad \alpha_i = -b_i + \lambda a_i \quad \forall i \notin \{0, t_0\}.$$

Para concluir basta aplicar o Teorema 5.6.

iv) Seja C uma curva em E cuja classe de equivalência numérica está em S . Pelo item **ii)**, dado $t_0 \in I$, existe uma constante positiva α satisfazendo

$$\alpha D \cdot C = D \cdot C_{v_0, v_{t_0}, v_{n+1}}$$

para qualquer divisor D em E . Em particular, temos

$$D_{v_{t_0}} \cdot C = 0 \quad \text{e} \quad D_{v_{n+1}} \cdot C > 0 \tag{5.4}$$

Seja $M = \text{Hom}(\mathbb{Z}^n, \mathbb{Z})$ e sejam $v_1^*, \dots, v_n^* \in M_{\mathbb{Q}}$ como acima e seja k um inteiro positivo tal que $k a_i v_j^* \in M$ para todo i, j e defina

$$m = k a_{t_0} \ell_{\sigma_{v_0, v_{n+1}}} := k \sum_{i \neq t_0} a_{t_0} v_i^* + k \left(1 - \sum_{i \neq t_0} a_i\right) v_{t_0}^* \in M.$$

Como m vale ka_{t_0} em $sk^1(\sigma_{v_{t_0}, v_{n+1}}) = \{v, v_1, \dots, \widehat{v_{t_0}}, \dots, v_n\}$, temos

$$\operatorname{div}(\chi^m) = \sum_{i \neq t_0} ka_{t_0} D_{v_i} + ka_{t_0} D_v + m(v_{t_0}) D_{v_{t_0}} + m(v_{n+1}) D_w \sim 0.$$

Lembrando que $K_E = -\sum_{i=1}^n D_{v_i} - D_{v_0} - D_{v_{n+1}}$ e usando 5.4, deduzimos

$$ka_{t_0} K_E \cdot C = \left(ka_{t_0} K_E + \operatorname{div}(\chi^m) \right) \cdot C = (m(v_{n+1}) - ka_{t_0}) D_w \cdot C$$

Portanto, usando novamente 5.4 e que $ka_{t_0} < 0$ concluímos que $K_E \cdot C < 0$ se e somente se $m(v_{n+1}) > ka_{t_0}$. O resultado segue de que

$$m(v_{n+1}) = k \sum_{i \neq t_0} a_{t_0} b_i + k \left(1 - \sum_{i \neq t_0} a_i \right) b_{t_0}.$$

■

Demonstração do Lema 5.9: Sejam M e v_1^*, \dots, v_n^* como acima e tome inteiros positivos a, b, c tais que $aa_i \in \mathbb{Z}$, $bb_i \in \mathbb{Z}$ e $cv_i^* \in M$ para todo i . Tomando $S = V(\sigma_{v_0, v_i, v_j, v_{n+1}})$ e $m \in M \cap (\sigma_{v_0, v_i, v_j, v_{n+1}})^\perp$, o caracter χ^m define uma função racional em S cujo divisor de zeros e pólos é

$$m(v_0) C_{v_i, v_j, v_{n+1}} + m(v_{n+1}) C_{v_0, v_i, v_j} + m(v_i) C_{v_0, v_j, v_{n+1}} + m(v_j) C_{v_0, v_i, v_{n+1}} \sim_S 0,$$

onde \sim_S indica equivalência linear de divisores em S . Como equivalência linear implica equivalência numérica, escolhendo $m = cv_i^*$ obtemos a seguinte relação

$$-C_{v_0, v_j, v_{n+1}} \equiv a_i C_{v_i, v_j, v_{n+1}} + b_i C_{v_0, v_i, v_j}; \quad (5.5)$$

De maneira completamente analoga, considerando $S = V(\sigma_{v_i, v_j, v_k, v_{n+1}})$ e $m = ac(a_k v_j^* - a_j v_k^*)$ e depois $S = V(\sigma_{v, v_i, v_j, v_k})$ e $m = bc(b_k v_j^* - b_j v_k^*)$ obtemos respectivamente.

$$C_{v_i, v_j, v_{n+1}} \equiv \frac{a_k}{a_j} C_{v_i, v_k, v_{n+1}} \quad \text{e} \quad C_{v_0, v_i, v_j} \equiv \frac{b_k}{b_j} C_{v_0, v_i, v_k}. \quad (5.6)$$

Aplicando sucessivamente as relações de 5.6 obtemos

$$\begin{aligned} C_{v_i, v_j, v_{n+1}} &\equiv \frac{a_n}{a_j} C_{v_i, v_n, v_{n+1}} \equiv \frac{a_n a_{n-1}}{a_j a_i} C_{v_{n-1}, v_n, v_{n+1}}; \\ C_{v_0, v_i, v_j} &\equiv \frac{b_n}{b_j} C_{v_0, v_i, v_n} \equiv \frac{b_n b_{n-1}}{b_j b_i} C_{v_0, v_{n-1}, v_n}. \end{aligned} \quad (5.7)$$

Com isso, obtemos as duas primeiras igualdades do enunciado. Por fim, substituindo 5.7 em 5.5 temos

$$\begin{aligned} -C_{v_0, v_j, v_{n+1}} &\equiv a_i C_{v_i, v_j, v_{n+1}} + b_i C_{v_0, v_i, v_j} \\ &\equiv a_i \frac{a_n a_{n-1}}{a_j a_i} C_{v_{n-1}, v_n, v_{n+1}} + b_i \frac{b_n b_{n-1}}{b_j b_i} C_{v_0, v_{n-1}, v_n} \\ &\equiv \frac{a_n a_{n-1}}{a_j} C_{v_{n-1}, v_n, v_{n+1}} + \frac{b_n b_{n-1}}{b_j} C_{v_0, v_{n-1}, v_n} \end{aligned}$$

Donde segue a última igualdade do enunciado. ■

Observação 5.10. Na Proposição 5.8 não assumimos a hipótese de terminalidade, contudo este resultado desperta interesse, pelo menos no que diz respeito a Teoria de Mori, quando $\varphi : E \rightarrow F$ for um morfismo birracional entre variedades terminais.

É conhecido (ver [Mat, Prop. 14-5-2]) que existe um número finito de variedades tóricas completas de dimensão n , que são terminais e tem número de Picard igual a 1, contudo, a lista completa de tais variedades não é conhecida em dimensão arbitrária. Logo, via de regra, o procedimento para se verificar se F é terminal consiste em verificar se cada um dos cones maximais pertencentes ao leque associado a F é terminal.

Se F como acima é conhecidamente terminal e $\varphi : E \rightarrow F$ é uma explosão elementar de um ponto T -invariante de F , podemos eventualmente nos valer da Proposição 3.14, para verificar a terminalidade de E .

5.3 Transformações Elementares em \mathbb{P}^n

Nesta seção vamos analisar o caso $F = \mathbb{P}^n$, com $n > 2$.

Seja $\varphi : E \rightarrow \mathbb{P}^n$ uma explosão elementar de um ponto T -invariante de \mathbb{P}^n . É bem conhecido que o espaço projetivo \mathbb{P}^n pode ser descrito como variedade tórica associada ao leque Σ de \mathbb{R}^n , cujo esqueleto é $sk^1\Sigma_{\mathbb{P}^n} = \{v, e_1, \dots, e_n\}$, onde e_1, \dots, e_n são os vetores da base canônica de \mathbb{R}^n e $v = -(e_1 + \dots + e_n)$. Fazendo uma mudança de coordenadas se necessário, podemos supor que φ é obtida pela subdivisão elementar de Σ centrada num elemento primitivo

$$w = b_1 e_1 + \dots + b_n e_n, \quad \text{com } 0 < b_1 \leq \dots \leq b_n. \quad (5.8)$$

Seja $\psi : E \rightarrow Y$ a única contração extremal diferente de φ . Pela Proposição 5.8, toda curva contraída por ψ intersepta o divisor canônico K_E negativamente se, e somente se,

$$b_2 + \dots + b_n < n b_1 + 1. \quad (5.9)$$

Além disso, temos que

- ψ é de tipo fibrada se e somente se $b_i = \dots = b_n = 1$;
- ψ é de tipo divisorial se e somente se $b_1 = \dots = b_{n-1} < b_n$;
- ψ é de tipo flip se e somente se existe $1 \leq k_0 < n - 1$ tal que

$$b_1 = \dots = b_{k_0} < b_{k_0+1} \leq \dots \leq b_n.$$

Vamos analisar a terminalidade de E em cada um dos casos separadamente.

ψ de tipo fibrada: Neste caso, verifica-se que E é uma variedade regular e portanto terminal. Além disso, a condição 5.9 é satisfeita e portanto, toda curva contraída por ψ intercepta negativamente o divisor canônico. Contudo, esta informação não é de grande interesse neste caso.

ψ de tipo divisorial: Neste caso, E é terminal $\Leftrightarrow b_1 = 1$. De fato, se $b_1 = 1$ segue que E é terminal pelo Corolário 3.15. Resiprocamente, o leque associado a E contém o cone standard $\langle e_n, w \rangle \simeq \mathfrak{s}(b_n, b_1)$ que tem

multiplicidade b_1 . Portanto, se E é terminal todos seus cones de dimensão 2 são regulares e $b_1 = 1$.

Por outro lado, se E é terminal, então a condição 5.9 se reduz a $b_n < 2$, mas isso não pode acontecer, logo nenhuma curva contraída por ψ intersepta negativamente o divisor canônico K_E .

ψ de tipo flip: Neste caso não temos uma resposta completa dos casos em que E é terminal. No entanto, se assumirmos que toda curva contraída por ψ intersepta negativamente o divisor canônico K_E , então temos uma caracterização da terminalidade de E como segue.

Suponha que vale a condição 5.9, então E é terminal se, e somente se, vale

$$2(b_1 + \cdots + b_n) < nb_n + 2 \quad \text{ou} \quad (5.10)$$

$$b_1 + \cdots + b_n < nb_{n-1} + 1, (n-1)b_n + 1. \quad (5.11)$$

De fato, seja $r = b_1 + \cdots + b_n - 1$. Pelo Corolário 3.15, E é terminal se, e somente se, o quociente cíclico $\frac{1}{r}(b_1, \dots, b_n, -1)$ é terminal, o que, pela Proposição 1.25, equivale a

$$\sum_{i=1}^n \left[\frac{b_i k}{r} \right] - k > 1 \quad \forall k = 1, \dots, r-1. \quad (5.12)$$

Dado um inteiro positivo t , das inequações 5.9, 5.10 e 5.11, obtemos respectivamente

$$\frac{tnb_1}{r} < t \quad \text{e} \quad \frac{t(n+1)b_1}{r} > t, \quad (5.13)$$

$$\frac{t(n-1)b_n}{r} > t \quad \text{e} \quad \frac{tnb_n}{r} > 2t, \quad (5.14)$$

$$\frac{t(n-1)b_n}{r} > t \quad \text{e} \quad \frac{tnb_{n-1}}{r} > t. \quad (5.15)$$

Note que as inequações de 5.13 implicam as inequações de 5.12 para todo

$$k \in \{(t-1)n+1, \dots, tn-2\} \quad \text{com} \quad t \in \mathbb{Z}_{>0}.$$

Por outro lado, as inequações de 5.12 são satisfeitas para os k 's da forma $k = tn - 1$ e $k = tn$ se, e somente se, vale 5.14 ou 5.15. Com isso provamos a seguinte:

Proposição 5.11. *Seja $\varphi : E \rightarrow \mathbb{P}^n = X_\Sigma$ uma explosão elementar de \mathbb{P}^n obtida pela subdivisão elementar Σ_w , centrada num ponto*

$$w = b_1 e_1 + \cdots + b_n e_n \in \text{int} \langle e_1, \dots, e_n \rangle.$$

Seja $\psi : E \rightarrow Y$ a única contração extremal distinta de φ . Então E é terminal e o divisor canônico K_E intersepta negativamente toda curva contraída por ψ se, e somente se, vale

- ψ é de tipo fibrada e portanto $b_i = 1, \forall i$ ou
- ψ é de tipo flip com $b_2 + \cdots + b_n < nb_1 + 1$ e

$$\sum_{i=1}^n 2b_i < nb_n + 2 \quad \text{ou} \quad \sum_{i=1}^n b_i < \begin{cases} nb_{n-1} + 1 & e \\ (n-1)b_n + 1. \end{cases}$$

Referências Bibliográficas

- [BG1] C. Bouvier, G. Gonzalez-Sprinberg, *G-désingularisation des variétés toriques*, C. R. Acad. Sci. Paris Ser. I Math. 315, 1992, 817-820.
- [BG2] C. Bouvier, G. Gonzalez-Sprinberg, *Système générateur minimal, diviseurs essentiels et G-désingularisations*, Tohoku Math. J. 47, 1995 125-149.
- [CR] A. Corti, M. Reid, *Explicit birational geometry of 3-folds*, London Math. Soc. Lecture Notes Series 281, Cambridge Univ. Press, 2000.
- [Da1] V. I. Danilov, *Decomposition of certain birational morphisms*, Izv. Akad. Nauk SSSR Ser. Mat. Tom 44, 1980. English transl., Math. USSR-IZV. Vol. 16, 1981, 419-429.
- [Da2] V. I. Danilov, *The birational geometry of toric 3-folds*, Izv. Akad. Nauk SSSR Ser. Mat. Tom 46, 1982, 972-981. English transl., Math. USSR-IZV. Vol. 21, 1983, 269-280.
- [Da3] V. I. Danilov, *The geometry of toric varieties*, Uspehi Mat. Nauk 33, 1978,85-134. Russian Math. Surv. 33, 1978, 97-154.
- [De] O. Debarre, *Higher-Dimensional Algebraic Geometry*, Springer, 2001.
- [Dem] M. Demazure, *Sous-groupes algébriques de rang maximum du groupe de Cremona*, Ann. Sci. École Norm. (4), 3, 1970, 507-588.
- [Ew] G. Ewald, *Combinatorial convexity and algebraic geometry*, Graduate Texts in Mathematics 168. Springer-Verlag, New York 1996.

- [FZ] R. T. Firla, G. M. Ziegler, *Hilbert Bases, Unimodular Triangulations, and Binary Covers of Rational Polyhedral Cones*, Discrete and Computational Geometry volume 21, Number 2 February, 1999, 205-216.
- [Fr] M. A. Frumkin, *Description of the elementary three-dimensional polyhedra*, First All-Union Conference Statist, and Discrete Anal. Non-numer. (Information, Expert Estimation and Discrete Optimization. Abstracts of Reports. Nauchn. Sovet. Akad. Nauk SSSR Kompleks. Probl. “Kibernetika”, Moscow and Alma-Ata), 1981, (Russian).
- [Fuj] A. Fujiki, *On resolutions of cyclic quotient singularities*, Publ. RIMS 10, 1974, 293-328.
- [Fu1] W. Fulton, *Intersection Theory*, Springer-Verlag, 1984.
- [Fu2] W. Fulton, *Introduction to toric varieties*, Annals of Math. St. 131, Princeton Univ. Press. 1993.
- [GLMS] G. Gonzalez-Sprinberg, M. Lejeune-Jalabert, B. Malgrange, M. Sebastiani, *Singularités et applications*, Cours CIMPA-Uruguay, Montevideo 6-17 mars 1995.
- [Har] R. Hartshorne, *Algebraic Geometry*, Graduate Texts in Mathematics 52. Springer-Verlag, New York 1977.
- [IK] S. Ishii, J. Kollár, *The Nash Problem on Arc Families of Singularities*. Duke Math. J. Volume 120, Number 3, 2003, 601-620.
- [KKMD] G. Kempf, F. Knudsen, D. Mumford, B. Saint-Donat, *Toroidal Embeddings I*, LMN 339, Springer 1973.
- [MK] J. Kollár, S. Mori, C.H. Clemens, A. Corti, *Birational Geometry of Algebraic Varieties*, Cambridge Univ. Press, 1998.
- [KS] J. Kollár, N. I. Shepherd-Barron, *Threefolds and deformations of surface singularities*, Invent. Math. v. 26, 1985, 530-539.

- [Mat] K. Matsuki, *Introduction to the Mori Program*, Springer-Verlag, New York 2002.
- [Mo] S. Mori, *On 3-dimensional terminal singularities*, Nagoya Math. J. v. 98, 1985, 43-66.
- [MMM] S. Mori, D. R. Morrison, I. Morrison, *On four dimensional terminal quotient singularities*, Mathematics of Computation, v. 51, n. 184, October 1988, 769-786.
- [MS] D. R. Morrison, G. Stevens, *Terminal quotient singularities in dimensions three and four*, Proc. Amer. Math. Soc., v. 90, 1984, 15-20.
- [Oda] T. Oda, *Torus embeddings and applications*, Tata Inst. Fund. Res. Stud. Math., vol. 57, Tata Institute of Fundamental Research, Bombay, 1978.
- [Pr] D. Prill, *Local classification of quotients of complex manifolds by discontinuous groups*, Duke Math. Jour. 34, 1967, 375-386.
- [Re1] M. Reid, *Canonical three folds*, Jour. de Géométrie Algébrique d'Angers, A. Beauville ed., Sijthoff and Noordhoff, Alphen aan den Rijn, 1983, 273-310.
- [Re2] M. Reid, *Decomposition of toric morphisms*, em Arithmetic and Geometry, papers dedicad to I.R.Shafarevich on the occasion of his 60th birthday (M. Artin and J. Tate, eds.) ou Vol II, Geometry, Progress in Math. 36, 1983, 395-418.
- [Re3] M. Reid, *Minimal models of canonical threefolds*, Algebraic Varieties and Analytic Varieties (S. Iitaka, ed.) Adv. Stud. Pure Math., v. 1, North-Holland, Amsterdam, 1983, 131-180.
- [YPG] M. Reid, *Young person's guide to canonical singularities*, Algebraic Geometry, Bowdoin 1985, ed. S.J. Bloch. ou Proc. of Symp. in Pure Math. A.M.S., 46, 1987, 345-416.

- [Sa] G. K. Sankaran, *Stable quintuples and terminal quotient singularities*, Math. Proc. Cambridge Philos. Soc. 107, (1990), n. 1, 91-101.
- [Se] A Sebö, *Hilbert bases, Carathéodory's theorem and combinatorial optimization*, Math. Programming Society, Univ. of Waterloo Press, Waterloo, 1990, 431-456.
- [Su] H. Sumihiro, *Equivariant Completion, I*, J. Math. Kyoto Univ. 14, 1974, 1-21.
- [Wh] G. K. White, *Lattice tetrahedra*, Canad. J. Math. 16, 1964, 389-396.

Índice Remissivo

- G -morfismo tórico, 62
- T -órbita, 13
- n -upla p -terminal, 45, 46
- índice
 - de um cone, viii, 8, 24, 46
 - de uma variedade, 4, 45
- base associada a um cone standard, 36
- base de Hilbert, 7, 33
- centro de um divisor, 57, 58
- componente
 - \mathcal{F} -essencial, 58, 59
 - essencial, 60, 61
- componente essencial, 56
- cone, vii, viii, 9
 - canônico, 8, 16
 - de índice 1, 30, 37, 47, 48
 - de índice finito, 7, 16
 - de curvas, 86
 - de singularidade isolada, 14, 31, 37, 38, 52, 63, 65, 67
 - dual, 6, 37
 - fortemente convexo, 6, 7, 11, 12, 33–35, 60–63
 - nef, v, viii, xi, 86
 - poliedral racional, 5
 - regular, 5, 14, 31, 38
 - relativo de f , 87
 - simplicial, 5, 16, 21, 31, 32, 35, 36, 38, 63–66, 72
 - singular, 5, 13
 - standard, 30, 35, 36, 49, 62
 - terminal, 8, 16, 32, 47, 48, 65–67, 72
- conjunto
 - excepcional, 4, 17, 57, 58
 - singular, 1, 14
- contração
 - associada ao raio extremal, 88
 - de tipo divisorial, 88, 90, 94, 98
 - de tipo fibrada, 88, 94, 98
 - de tipo flip, 88, 94, 98
 - tórica, 90
- contração elementar, 85
- dessingularização, 4, 56, 60
 - G -dessingularização, viii, xi, 62
 - divisorial, 4, 56, 60, 61
 - essencial, vii
 - tórica, vii, 17, 18, 57, 60, 61
- diferenciais de Kaelher, 3
- divisor, 57
 - \mathcal{F} -essencial, 58, 59

- Q-Cartier, 3
- T -invariante, 14
- amplo, 3, 91
- anti-canônico, 91
- canônico, 4, 15, 90, 91
- de Cartier, 2–4, 85, 90
- de Weil, 2, 3
- de zeros e pólos, 96
- de zeros e polos, 2
- divisores birracionalmente equivalentes, 57
- divisores linearmente equivalentes, 2
- divisorialmente essencial, 59
- equivariante, 59
- essencial, 56, 59–61
- excepcional, 60
- excepcional sobre X , 57
- muito amplo, 3, 90, 91
- principal, 2, 3
- elemento minimal, 34
- equivalência
 - linear, 86
 - numérica, 86
- esqueleto
 - de um cone, 6
 - de um leque, 9
- explosão
 - elementar, 18
 - ponderada, 18
- fórmula da ramificação, 4
- face de um cone, 6
- flip, 90
- grupo
 - de classe, 2
 - de Picard, 2
 - pequeno, 19, 23
- Lema de Gordan, 7, 10, 32
- Lema Terminal, 43
- leque, 8, 9
 - canônico, 9
 - completo, 9, 15, 87–89
 - regular, 9
 - simplicial, 9, 87–89, 91
 - terminal, 9
- morfismo
 - elementar, 18
 - equivariante, 16
 - tórico, 16
- multiplicidade de um cone, 6, 36, 81
- muro, 35, 88, 89
- número de Picard, 86
- paralelepípedo fundamental, 6, 37
- politopo elementar, 53
- ponto distinto, 13
- pontos de uma variedade tórica, 10, 12
- pseudo-reflexão, 19, 23
- quintupla p -terminal, 45
- quociente
 - abeliano, 19, 20, 24, 29

cíclico, 19, 22, 25, 27, 41, 43, 44, 46, 49

raio extremal, 88, 89

resolução de singularidades, 4, 56
 divisorial, 56
 tórica, 57

reticulado, vii, 5, 20, 26, 38, 46

semigrupo, 6

singularidade
 terminal, vii, 43, 87

sistema minimal gerador, vii, 7, 33, 34, 61

subdivisão, 9, 17, 62, 80, 81, 83
 G -subdivisão, 62, 65, 70, 72, 75, 78–80, 82, 83
 G -subdivisão regular, vii, viii
 de um leque, 55
 elementar, 9
 regular, vii, 18, 60, 83

suporte
 de um leque, 9

Teorema
 da contração, 88
 do cone, 86, 87

tipo de um quociente cíclico, 22, 24, 25, 27, 29, 41, 43, 44, 49, 50, 53, 54

toro algébrico, 11, 12

transformação elementar, viii, 18, 62, 85

variedade, 1
 \mathbb{Q} -fatorial, viii, 3, 16, 27, 43, 44, 59, 60, 63, 87, 90, 91
 \mathbb{Q} -Gorenstein, 4, 16
 canônica, 4, 16, 25
 completa, 15, 91
 de Fano, 91
 Gorenstein, viii, 4, 16, 24, 32, 44, 46, 50
 lisa, 1
 não singular, 1
 normal, 3
 quociente, 19
 subvariedade, 1, 2
 termial, 44
 terminal, 4, 16, 25, 43, 46

variedade tórica, viii, 11
 afim, vii
 terminal, viii

variedade tórica afim, 10

vetor
 extremal, 37
 extremal de um cone, 6
 extremal de um leque, 9
 primitivo, vii, 6, 89