

Égalité politique, égalité mathématique

B. VITRAC

La présente étude s'efforce de montrer, sur un exemple, qu'on peut certainement tirer profit d'une étude simultanée des mathématiques d'une culture donnée et de la société dans laquelle elles se sont développées. Il s'agira ici de la société grecque ancienne et l'exemple traité sera la notion d'égalité. Je dois d'abord remercier Mme Claude Mossé qui m'a permis d'intervenir dans son séminaire sur le thème de l'égalité politique, au cours des séances des Lundi 25 Mai et 15 Juin 1987. On trouvera ici le contenu de mon exposé, légèrement modifié et amplifié. J'ai utilisé un certain nombre d'éléments qui avaient été avancés au cours du déroulement du séminaire, sans qu'il m'ait toujours été possible d'éviter les redites ou, à l'inverse, d'être parfois trop allusif, mon auditoire étant très averti de certaines questions soulevées ici. En revanche, les auditeurs étant tous historiens "classiques", j'ai essayé d'éviter les questions trop techniques ou les points controversés du domaine de l'histoire des mathématiques grecques anciennes. Je me suis toutefois efforcé de leur fournir une information élémentaire, mais réelle sur les questions de mathématiques abordées au cours de l'étude. Je dois aussi remercier J. Ritter qui a très patiemment répondu aux questions que je lui posais au sujet de l'égalité dans les mathématiques égyptienne et babylonienne, ainsi que C. Goldstein et M. Zytnicki pour les remarques qu'ils m'ont faites. Je n'ai pas réussi à unifier totalement mon propos qui comporte donc deux parties assez bien distinctes :

- une étude de l'usage de "métaphores mathématiques" dans la philosophie politique et le droit.
- une étude des usages de l'égalité dans les mathématiques grecques.

Les indications bibliographiques se trouvent à la fin de la seconde partie.

I

Pour le premier point de mon étude je prendrai "métaphore mathématique" dans un sens très large, y compris pour ce que j'entends par "mathématique". Je me suis appuyé sur les analyses faites sur des terrains similaires par G. Vlastos¹, J.P. Vernant², et G.E.R. Lloyd³ : ils ont montré qu'un même langage est à l'œuvre dans deux aspects solidaires du développement de la rationalité grecque : l'étude du cosmos et la réflexion politique; qu'en particulier le domaine de la loi et de la justice fournissent des "modèles" de l'ordre cosmique. Si l'on veut marquer la différence avec le Proche-Orient, on dira que la loi — même lorsque s'y rattache une efficacité religieuse — possède un caractère abstrait, qu'elle n'apparaît pas liée à un garant humain ou

¹ Voir Vlastos, G., « Equality and Justice in early Greek Cosmologies », 1947, pp. 156-78.

² Voir Vernant, J. P., Structure géométrique et notions politiques dans la cosmologie d'Anaximandre, Vernant, J. P., *Les origines de la pensée grecque* et Vernant, J. P., La formation de la pensée positive dans la Grèce archaïque.

³ Voir Lloyd, G. E. R., *Polarity and Analogy, Magic, Reason and Experience* et *The Revolutions of Wisdom : Studies in the Claims and Practice of ancient Greek Science*.

divin et que ceci, selon Lloyd, a certainement joué un rôle dans le développement de l'idée de nécessité naturelle⁴. G. Vlastos a bien montré le rôle que jouait l'égalité dans l'idée d'une justice "cosmique" dans les premières cosmologies présocratiques, en particulier dans celle d'Anaximandre : l'ordre naturel est possible et maintenu car c'est un ordre qui prévaut entre égaux. L'analyse a été reprise et développée par Jean-Pierre Vernant. Geoffrey Lloyd a montré également que ces métaphores sont diverses, qu'il n'y a pas seulement l'égalité que Vlastos mettait en avant, mais aussi la "monarchie" d'un seul principe, ou bien un état constant de lutte ... et que ces "images" débordent le champ de la cosmologie puisqu'on les retrouve aussi en médecine et en physiologie⁵.

Mon approche diffère simplement en ce que, compte tenu de la chronologie plus tardive des textes que j'ai étudiés, je pouvais espérer constater des influences en sens inverse, du domaine de l'ordre naturel vers la réflexion sociopolitique⁶.

Je partirai de la seconde partie de l'analyse logique de Lloyd, laquelle portait sur les analogies, à partir de deux types fondamentaux d'argumentation fréquents chez les Présocratiques : les raisonnements polaires et l'analogie. D'une part il explore la "préhistoire" des principes logiques du tiers exclu et de contradiction, d'autre part, avec l'évolution de l'analyse des notions à l'œuvre dans les grandes "métaphores" de l'enquête présocratique : animé/inanimé ; naturel / artefact; naturel / conventionnel (= φύσις / νομός), il montre comment se dégagent les notions de rigueur, de nécessité et d'impossibilité logique, et, corrélativement de probabilité. Il distingue trois principaux types de métaphores :

- a) la métaphore sociale : le cosmos comparé à une "société" politique.
- b) la métaphore vitaliste : le cosmos comparé à un être vivant.
- c) la métaphore technologique : le cosmos comme un artefact.

Chacune permet de penser l'ensemble des "faits naturels" comme une unité, le cosmos, unité intelligible car régi par un ordre semblable à celui qui existe dans les sociétés (a), ordre non arbitraire mais correspondant à une nécessité créatrice (c)⁷.

De cette étude, je retiendrai ici un point parmi d'autres : la valeur démonstrative de l'"analogie"; chez les Présocratiques, l'usage d'une image *en tant que telle* n'est pas évidente; cela supposerait d'ailleurs une distinction claire entre un sens premier ou littéral et un sens dérivé ou métaphorique. Mais une comparaison est avancée comme une explication, et cette *valeur argumentative* de l'analogie dans le domaine de l'enquête naturelle et philosophique n'est pas contestée avant Platon. Il oppose l'image (εἰκόσις), le mythe, le récit probable (μυθός) d'une part, et le compte- rendu rationnel et la démonstration (ἀποδείξις) d'autre part, même si,

⁴ Voir Lloyd, G. E. R., *Magic, Reason and Experience*, pp. 49-58 et 240-264.

⁵ Voir Alcmeon Fgt B4. De la Nature de l'homme 7, pp. 48-52 ; 61-66. Outre les références des notes 1, 2, 3 de la p. 3 on consultera aussi Détiene, M., *En Grèce archaïque : Géométrie, Politique et Société*.

⁶ Qu'il y ait une nouvelle rencontre entre géométrie et politique au IV^e siècle, en particulier sous l'influence d'Archytas, est admis par P. Lévêque et P. Vidal-Naquet dans leur *Clisthène l'Athénien*, 1973. Voir en particulier pp. 132-133. Voir aussi *infra*.

⁷ Ce qu'expriment l'Amitié d'Empédocle, le Démiurge platonicien, la Nature aristotélicienne...

souvent, il faut se contenter du récit probable, par exemple dans la description des règles qui ont présidé à la construction du cosmos (*Timée*)⁸. C'est seulement Aristote⁹ qui, en critiquant les comparaisons, entre autres bien sûr le paradigme platonicien, produira une double analyse de l'analogie : comme argument rhétorique¹⁰ et comme argument logique insuffisant¹¹ car présupposant une induction incomplète. Pour Aristote une similitude, une comparaison sera scientifiquement fondée si, après une analyse causale de deux ordres de choses, on a bien constaté un même schéma d'explication. Mais pour les penseurs plus anciens, il semble bien que l'analogie "précède" ou plutôt renferme l'explication. Dans le cadre de l'*Enquête sur la nature*, cet usage d'analogies constitue un problème qui ne se réduit donc pas à l'exploitation des métaphores par les poètes et plus généralement par les langues naturelles : il s'agit d'un cas particulier du problème de la constitution d'un langage technique à partir de ces dernières, de l'usage des métaphores dans les sciences¹². Ce problème est crucial par rapport à la lecture aristotélicienne des Présocratiques.

Cette valeur explicative de l'analogie vaut pour l'"égalité" dans les cosmologies présocratiques¹³ : l'égalité des qualités (chaud, froid, sec, humide) ou des quatre racines fonde l'ordre du cosmos et du corps¹⁴; l'égalité des distances, c'est-à-dire le fait d'être au milieu justifie la stabilité de la Terre¹⁵. Cet usage "cosmique" de l'égalité est déjà d'une certaine manière attesté chez Homère¹⁶ : selon la messagère Iris, Poséidon peut parler à Zeus comme un égal (ἴσον). Poséidon affirme qu'il est ὁμότιμον avec Zeus car à la suite du partage du monde entre les trois frères : Zeus, Poséidon et Hadès, chacun est ἰσομόρον. De même chez Hésiode¹⁷. Si,

⁸ Xénophane et Parménide déjà opposaient savoir vrai et simple opinion, parallèlement à la dualité gnoséologique raison / perception; quant aux historiens, s'ils reprennent la première opposition à leur compte, il ne s'agit pas pour eux d'une différence "ontologique", mais simplement d'une différence de degré entre certitude et probabilité. Voir Lloyd, G. E. R., *Polarity and Analogy*, pp. 210-303 et 421-440.

⁹ Bien que des analogies particulières puissent être contestées bien avant Aristote. Le procédé en tant que tel est critiqué par Platon (*Phaed.* 85 e-f; 87 b3; *Theaet.* 161c-162 e; *Phaedr.* 262a-c; *Soph.* 231a), mais ce dernier lui conserve sa vertu pédagogique et heuristique.

¹⁰ *Rhét.*, B 20, 1393 a23-1394 a17.

¹¹ *An. pr.* B 24, 68 b37-69 a19. Voir Lloyd, G. E. R., *Polarity and Analogy*, pp. 405-414.

¹² Voir Lloyd, 1987, en particulier le chapitre 4, Metaphor and the Language of Science.

¹³ Voir par exemple Empédocle, DK 31 B 17 et Vlastos, G., *op., cit.*

¹⁴ « Alcméon dit que ce qui maintient la santé c'est l'égalité des puissances (τὴν ἰσομορίαν τῶν δυνάμεων), humide, sec, froid, chaud, amer, sucré et les autres, la domination d'une seule d'entre elles (ἐν αὐτοῖς μοναρχίαν) produisant la maladie; car la domination d'un seul est corruptrice. C'est d'une part par l'excès de chaud ou de froid, d'autre part par l'excès ou le défaut de nourriture que la maladie survient par exemple dans le sang, la moelle, ou le cerveau. Parfois elle est produite en eux à partir de causes externes : de la qualité des eaux, ou du lieu, de l'épuisement ou de la torture ou les choses semblables à celles-ci. La santé est le mélange des qualités en bonne proportion (τὴν σύμμετρον τῶν ποιῶν κρᾶσιν) » DK 24 B4.

¹⁵ « Certains en revanche disent que la terre demeure immobile à cause de sa [position] similaire (διὰ τὴν ὁμοιότητά φασιν αὐτὴν μενεῖν), ainsi, parmi les Anciens, Anaximandre ; car, en effet, ce qui est établi au centre et qui est semblablement [disposé] relativement aux extrémités n'est pas plus enclin à se mouvoir vers le haut ou vers le bas ou vers les côtés. Par ailleurs il est impossible que le mouvement se produise simultanément dans des directions contraires. De sorte qu'elle reste nécessairement immobile ». Aristote *De cael.* II, 13, 295 b 11-15. Voir le commentaire de J. P. Vernant dans *Structure géométrique et notions politiques dans la cosmologie d'Anaximandre*, pp. 187-8, et sa discussion intéressante des témoignages de la doxographie.

¹⁶ *Iliade*, XV, v.184-186 et 209.

¹⁷ « Terre, elle, d'abord enfanta un être égal à elle-même, capable de la couvrir toute entière, Ciel Etoilé... » *Theog.* 126-7 ; « ... une enclume d'airain tomberait du ciel durant neuf jours et neuf nuits, avant d'atteindre le dixième jour

chez les poètes, l'égalité est souvent particulière : parts égales, honneurs égaux, en revanche chez les Présocratiques, elle est fréquemment générale. Toutefois, comme dans le cas d'autres termes employés dans les analogies présocratiques, cette "égalité" n'est pas strictement définie; en particulier elle n'est guère distinguée de la "similitude" (ὁμοιοτήτης)¹⁸.

Il est notable qu'il n'y ait chez Héraclite (du moins dans les fragments conservés) aucune mention d'ἴσος, d'ἴσοτης, d'ὁμοίος, d'ὁμοιοτήτης; certainement les connotations d'équilibre, de stabilité qui accompagnaient ces termes étaient incompatibles avec une position philosophique qui, en revanche, affirmait l'identité de notions apparemment contradictoires¹⁹.

Du point de vue logique et dans le cadre des catégories aristotéliennes, l'égalité est une relation entre deux choses (par opposition aux substances par exemple²⁰) et les analogies fondent souvent (ou sont souvent fondées sur) des relations; le statut complexe de la capacité explicative de l'analogie se retrouve au cœur de l'idéalisme platonicien²¹ et dans le rôle causal qu'il attribue à l'idée; les exemples les plus probants selon Platon pour montrer que le concept précède ce dont il est le concept sont les relations. En effet celles-ci donnent souvent lieu à des perceptions contradictoires et donc une aporie que l'intellect doit démêler ; elles montrent donc bien la supériorité de l'intellect sur les sens et du concept sur l'objet dont il est le concept²².

Les dialogues dits socratiques s'en prennent essentiellement aux appréciations divergentes au sujet des valeurs morales comme la piété, le courage, la "tempérance" (σωφροσύνη)²³. Dans le *Protagoras*²⁴, Socrate établit que le mérite moral est une sorte de savoir (et donc que la méchanceté est une forme de l'ignorance) en introduisant une métaphore de la pesée des plaisirs et des peines : si le bonheur dépendait de la capacité à distinguer le grand et le petit, la "μετρητική τέχνη", l'art de la mesure serait la planche de salut; ce serait l'arithmétique s'il dépendait du pair et de l'impair. Or cette planche de salut est une sorte de métrétique car c'est un art de l'excès, du manque et de l'égalité. Le bonheur réside justement dans une juste appréciation du plaisir et de la douleur, des biens et des maux : une recherche de

à la terre ; et de même une enclume d'airain tomberait de la terre durant neuf jours et neuf nuits, avant d'atteindre le dixième jour au Tartare ». *id.* 719-725. Texte et traduction P. Mazon. Collection des Universités de France. Paris, Belles-Lettres, 1928.

¹⁸ Voir Parménide : « il(l'être) n'est pas non plus divisible puisqu'il est tout entier homogène » (οὐδὲ διαιρετόν ἐστιν, ἐπεὶ πᾶν ἐστιν ὁμοῖον) DK28 B 8, 22 ; « et gonflé de partout comme une balle bien ronde, équilibré dans toute direction à partir du centre » (πάνθοθεν εὐκύκλου σφαίρης ἐναλίγκιον ὄγκῳ - μεσσόθεν ἰσοπαλῆς πάντῃ), *Id.*, 43-4 ; « car il est égal à lui-même de partout, il atteint semblablement ses limites » (οἱ γὰρ πάντοθεν ἴσον ὁμῶς ἐν πείρασι κύρει) *Id.* v. 49.

¹⁹ Voir fragments 15, 30, 49a, 72, 88 et la discussion de Vlastos, G, *op. cit.*, pp. 164-168.

²⁰ Pour l'analyse aristotélienne du "πρὸς τι", voir *Cat.*, 7, 6 a36-8 b24.

²¹ En particulier dans l'analogie fondamentale, quasiment au sens mathématique du terme (proportion), qui est censé exister entre le sensible et l'intelligible (Voir par ex. *Resp.* VI, 508 e - 511e).

²² Voir Platon *Phaed.* 100 e -101 c. *Resp.* VII, 523 a - 525 a.

²³ La relativité de ces valeurs avait été soulignée par l'enquête "ethnographique", par le développement de l'activité politique et par l'activité pédagogique et polémique des Sophistes. L'enseignement socratique consistait surtout à montrer que les apories qui en résultaient, exigeaient, pour leur dépassement un usage du langage strictement réglé par des définitions.

²⁴ Voir Platon : *Prot.* 356 a1 - 357 b3.

ἰσοότης entre l'"ὑπερβολή" et l'"ἔνδεια"²⁵. Les dialogues dits de maturité préfèrent prendre leurs exemples dans les relations comprenant "du plus ou du moins" comme la grandeur : ils peuvent en effet alors se référer à un modèle d'intelligibilité : les mathématiques²⁶; entre l'excès et le défaut comme entre la πλεονεξία et l'ἔνδεια, il y a place pour un juste milieu, ou, comme le dit Aristote à propos de l'arété, pour une μεσότης .

On trouve donc une sorte de théorie "quantitative" des valeurs tout à fait représentative de la rationalité grecque "calculante" : tel est le sens fondamental de "λογισμός". Platon et Aristote à cet égard ne font que développer (mais d'une manière considérable) cet aspect de la raison grecque; le premier appelle de ses vœux une sorte de "logistique générale"²⁷, une théorie des rapports qui s'applique aussi bien au cosmos qu'aux sociétés ; d'une certaine façon le second réalise cet idéal grâce à sa théorie du (juste) milieu qu'il applique aussi bien à l'éthique et à la politique qu'à la physique et à la logique.

Cette théorie "quantitative" des valeurs a des avantages évidents :

- grâce au nombre, beaucoup de choses hétérogènes seront comparables²⁸.
- une formulation quantitative confèrera une "objectivité" à cette évaluation²⁹. Cet aspect est surtout net chez Platon pour qui le degré de scientificité d'un domaine dépend de sa participation à la quantification.

*

Pour expliquer l'élaboration et le succès d'une telle théorie chez les philosophes grecs, et en particulier chez Platon, on invoque souvent l'influence pythagoricienne; de fait, cela ne fait

²⁵ . *Prot.*, 357 b2-3 « μετρητικὴ φαίνεται, ὑπερβολῆς τε καὶ ἔνδειας οὐσα καὶ ἰσοτήτος πρὸς ἄλληλας σκέψεις ». Voir aussi Isocrate : *A Nicoclès*, 33.

²⁶ Ces principes d'excès et de défaut dépassent d'ailleurs largement le domaine du calcul : selon Aristote ce sont des principes universels qui valent en cosmologie (*Phys.*, I,4 186 a16-17; Arstt utilise "ὑπεροχή" et "ἔλλειψις"), aussi bien qu'en médecine et en morale : dans l'*Ethique à Nicomaque* (1104 a10-26), il établit un parallélisme entre la santé et les vertus morales comme la "σωφροσύνη" et le courage : la santé suppose la juste mesure (τὰ σύμμετρα) entre excès et l'insuffisance (τὰ ὑπερβάλλοντα et τὰ ἐλλείποντα) ; la vertu est sauvegardée par la "μεσότης" entre ὑπερβολή et ἔλλειψις. Dans le *Timée*, Platon rapproche lui aussi "πλεονεξία" et "ἔνδεια" des quatre éléments et les maladies (82a).

²⁷ Dans le cadre limité des études mathématiques proprement dites, Platon distingue parfois un art qu'il appelle logistique et qu'il distingue de l'arithmétique comme science du calcul en tant qu'elle étudie les propriétés "relationnelles" des nombres et non leurs propriétés intrinsèques. Voir par exemple *Gorg.* 451 c1-5. Cette étude est présentée comme "théorique". Mais dans la terminologie usuelle telle qu'elle apparaît dans des textes plus tardifs, "logistique" désignera simplement le calcul (ou arithmétique "appliquée"). Voir Vitrac B., "Logistique et fractions en Grèce ancienne" dans *Histoires des Fractions, Fractions d'histoire*. Actes du Colloque Histoires des Fractions, Fractions d'histoire, Coordonné par P. Benoit, K. Chemla, et J. Ritter. Basel, Boston, Berlin, Birkhäuser, 1992, pp.149-172, avec des références bibliographiques.

²⁸ Voir l'analyse aristotélicienne du rôle de la monnaie comme "mesure" du besoin (*Eth. Nic.* 1132b20-1133b28) et Aristote : *Pol.* 1318a30-40. Aristote admet toutefois des réserves sur la commensurabilité générale des différences de mérite *Pol.*, 1282b36-1283a10.

²⁹ La discussion entre Socrate et Protagoras que nous évoquons ci-dessus s'achève par : « Et que si c'est une mensuration, c'est évidemment un art et une science ? (τέχνη καὶ ἐπιστήμη) ». Voir aussi *Phil.* 56 c-d où les arts sont divisés en fonction de leur degré d'exactitude lequel dépend lui-même de la part que le calcul joue dans ces arts. Sur la notion aristotélicienne de mesure comme moyen de connaissance et la plus grande exactitude des sciences de la quantité, voir *Met.* I, 1052b1-1053a20.

que déplacer le problème. Quoi qu'il en soit, il n'est pas impossible de vouloir expliquer ce succès par la pertinence propre que les Anciens pouvaient reconnaître à ce genre de théorie. On connaît en effet un exemple de "succès relatif" de ce type d'analyse : la spéculation numérique qui s'est exercée sur la définition des intervalles musicaux, laquelle a débouché, au moins à partir d'Archytas de Tarente, sur la constitution d'une théorie mathématique, la Canonique. Cette spéculation est traditionnellement rattachée à Pythagore lui-même et plusieurs "expériences" sont rapportées à partir desquelles il aurait élaboré cette théorie mathématique des intervalles. Certaines de ces expériences ne peuvent établir ce que l'on prétend leur faire dire³⁰. La spéculation sur les intervalles musicaux est probable chez Philolaos, certaine chez Archytas³¹. Comme le fait remarquer Aristote³², le fait que les « nombres exprimaient les propriétés et les proportions musicales » a certainement soutenu la croyance pythagoricienne « que le Ciel tout entier est harmonie et nombre », ou comme on le dit souvent, que « toutes choses sont nombres ».

L'affirmation du nombre comme "principe" d'organisation des phénomènes se retrouve aussi dans certains traités médicaux, l'exemple le plus extrême étant le *Περὶ ἑβδομάδων* du Corpus Hippocratique. S'agit-il d'une influence pythagoricienne ou simplement d'un fonds commun ? Dans ce dernier cas, l'influence est possible, mais la théorie des jours critiques et, solidairement, la notion de crise, fondamentale pour le pronostic, que l'on retrouve dans la plupart des traités du corpus amènent à penser qu'il s'agit plutôt d'un fond commun. Ces jours critiques organisent numériquement l'interprétation des observations, justifient de façon théorique la nécessité d'un protocole attentif, et permettent une compréhension globale du processus, pour toutes les maladies, et pas seulement pour celles qui présentent effectivement un caractère périodique. L'idée d'une homologie entre l'individu (son corps autant que son caractère) et le cosmos est bien attestée dans le Corpus hippocratique.

Quoi qu'il en soit l'universalisation de cette idée a pu être facilitée par un ensemble sans doute assez ancien³³ d'homologies entre l'individu (mais pour la tradition pythagorico-platonicienne il s'agit avant tout de son âme), la cité et le cosmos. De là, en particulier, l'idée que l'âme et la cité sont des harmonies, au sens d'un agencement d'éléments différents voire opposés³⁴. La comparaison de la cité avec une harmonie dont les lois seraient le mode d'accord,

³⁰ Quoiqu'il en soit cette expérimentation acoustique attribuée aux Pythagoriciens n'est pas sans intérêt. Voir Lloyd, 1987, pp. 241-244 et 295-8.

³¹ Voir DK 47 B1, 2, le témoignage de Ptolémée dans ses *Harmoniques*, I, 13 (DK 47 A 16) ainsi que la démonstration conservée par Boèce (*De Institutione musica* III. 11) de ce que l'on ne peut partager un rapport superparticulier [du type $(n + 1)/n$, n entier] en deux parties égales en intercalant un nombre moyen proportionnel, résultat repris dans la *Section du canon* attribuée à Euclide (Prop. 3).

³² *Met.* A, 985b33-986a3.

³³ Les spéculations sur le pouvoir de la musique sur l'"âme" sont certainement très anciennes. Dans le Livre III de la *République* Socrate sélectionne les harmonies dont on doit user pour l'éducation des gardiens; cette sélection repose sur le principe qu'un certain type d'harmonie engendre dans l'âme certaine disposition (398 d- 399 c). Il en est de même des rythmes (399 e - 400 e).

³⁴ La doctrine de l'âme comme harmonie est rapportée par Platon dans le *Phédon*, dialogue entre Socrate et Simmias et Cébès, auditeurs de Philolaos. L'idée de cosmos envisagé comme une harmonie — au sens d'un

la "tension" entre ses éléments, se trouve chez Platon³⁵ et chez Aristote³⁶. Pour ma part je crois aussi repérer chez Platon (et peut-être chez d'éventuels prédécesseurs pythagoriciens) la volonté de prendre en compte un "lieu commun", où se noue d'une part justice et droit, d'autre part les nombres.

L'idée d'une justice qui renvoie à une forme de "Loi du Talion" impliquant une réciprocité stricte est attribuée par Platon au poète Simonide³⁷. Il semble que ce soit une idée traditionnelle : rendre le "bien" aux amis et le "mal" aux ennemis. Selon Aristote les Pythagoriciens définissent la justice comme simple réciprocité ("τὸ ἀντιπεπονηθός"); il fait le rapprochement avec l'antique jugement de Rhadamante³⁸. Cette conception étroite ne pouvait évidemment pas satisfaire Platon, mais il a pu apercevoir ou recevoir une transposition possible de cette justice "distributive" pour en faire une "science", une sorte d'« arithmétique générale » des valeurs qui pouvait ainsi apparaître comme une transposition philosophique de la distribution des destins par les Dieux. A l'occasion il établit le parallélisme entre l'égalité selon le mérite et le jugement de Zeus qui s'exprime certainement dans la distribution des dons et des mérites, répartition évidemment inégalitaire qui justifie d'ailleurs l'usage de l'inégalité (autrement dit de l'"égalité" géométrique) dans la répartition des *timai*³⁹.

Pour repérer les traces de ce "lieu commun" entre droit et nombres, je me propose d'examiner quatre secteurs :

- a — l'application de la théorie des médiétés à la philosophie politique
- b — et plus particulièrement son usage dans la distinction aristotélicienne des deux justices.
- c — la pratique politique et judiciaire.
- d — la tradition de l'invention des mathématiques.

a — La théorie mathématique des médiétés et son application à la philosophie politique

La théorie des médiétés⁴⁰ (μεσότητες) s'est apparemment développée en plusieurs étapes. Nous en possédons trois exposés tardifs par Nicomaque de Gérase⁴¹, Théon de Smyrne⁴² et Pappus d'Alexandrie⁴³. Le terme "médiété" désigne soit l'ensemble des trois termes en progression, soit le terme médian. Les exposés de Nicomaque et de Théon situent la théorie des

ajustement aussi bien qu'au sens musical (voir la thèse de l'"harmonie des Sphères", Aristote, *De cal.* 290 b12) — est attribuée, par Aristote, aux Pythagoriciens en général (*Met.* A, 5), et, par la doxographie procédant de Théophraste, à Philolaos en particulier.

³⁵ 36. *Resp.* 432a-b ; en 443 d-e la métaphore de l'accord est appliquée aux trois parties constitutives de l'âme humaine pour fournir une "image" de la justice.

³⁶ Voir *Pol.* IV, 3 1290a25- 29; auparavant Aristote a fait allusion à un parallélisme entre constitutions et modes musicaux. Voir aussi *ibid.*, V, 1, 1301b 15-17.

³⁷ *Resp.*, I, 331 e-332 d. et 335 e.

³⁸ *Eth. Nic.*, V, 8, 1132 b21-27.

³⁹ *Legg.*, 757b6.

⁴⁰ Pour l'exposé de la théorie des médiétés se reporter à l'Appendice A, *infra*.

⁴¹ Voir Nicomaque de Gérase, *Introduction arithmétique*, II, Chapitres XXI-XXIX.

⁴² Voir Théon de Smyrne, *Exposition...*, II, L-LII, 175-183 et LIV-LXI, 186-197.

⁴³ Voir Pappus, *Collection Mathématique*, Livre III, théorèmes XI-XXIII., 50-80.

médiétés dans la science musicale; celui de Pappus dans la géométrie. Le plus ancien témoignage conservé au sujet des trois premières médiétés est dû à Archytas⁴⁴.

L'"application" de cette théorie à la philosophie politique est le point le mieux connu de notre dossier, surtout depuis le bel article de F. D. Harvey⁴⁵. Résumons ses résultats : on appellera "argument géométrique" la thèse selon laquelle il faut distinguer deux formes d'égalité : arithmétique et géométrique. Cet argument a été forgé par les adversaires de la démocratie et de son principe qu'Harvey formule ainsi :

« personne ne doit recevoir un traitement préférentiel à moins qu'il y ait une justification appropriée (technicité de la charge, circonstances exceptionnelles...) ».

Les partisans de la démocratie ne mettent pas en avant une forme d'égalité qu'ils qualifieraient d'arithmétique; ils défendent simplement l'égalité, l'isonomie, l'isègoria ... Ce sont leurs adversaires qui l'interprètent "mathématiquement" comme égalité arithmétique, en particulier en liaison avec le tirage au sort généralisé pour l'attribution des magistratures. Le point d'appui de cet argument est : « à mérite exceptionnel, droits exceptionnels »; son origine, selon Harvey, est militaire⁴⁶. On trouve la première attestation de ce *topos* dans un contexte politique chez Thucydide⁴⁷. Au demeurant les démocrates reconnaissent partiellement le principe du mérite⁴⁸; mais ils n'ont pas élaboré une théorie de ces deux aspects de l'égalité.

Quoi qu'il en soit, ce lieu commun va trouver une nouvelle formulation — la forme proprement dite de l'argument géométrique selon Harvey — d'origine mathématique grâce à un emprunt à la théorie des médiétés. Sur la base de son interprétation d'un autre fragment⁴⁹, Harvey pense que cette application est le fait d'Archytas. En fait cette formulation mathématique de l'argument géométrique reste vague : la nature du mérite à prendre en considération, les modalités de son évaluation font problème. Qui plus est, elle est trop souple : on connaît effectivement deux formes de son application à la politique :

- La forme "classique" : elle considère l'égalité arithmétique comme constitutive de la démocratie, et l'égalité géométrique de l'oligarchie; elle n'utilise pas la médiété harmonique.
- La forme "tardive" : elle associe égalité arithmétique et oligarchie, égalité géométrique et démocratie, égalité harmonique et aristocratie.

Selon Harvey, les deux formes associent une médiété ou une égalité avec une forme constitutionnelle. Ce qui les distingue des théories des constitutions mixtes. La première forme met l'accent sur les différences de valeur, la seconde sur les valeurs elles-mêmes et leurs rapports. La première forme est attestée chez Platon⁵⁰ et Aristote⁵¹; elle est certainement connue

⁴⁴ Voir Appendice A, *infra*.

⁴⁵ Voir Harvey, F. D., Two kinds of Equality.

⁴⁶ Voir Harvey, F. D., *op., cit.*, pp. 101-102.

⁴⁷ 6. 39. 1.

⁴⁸ Voir Thucydide 2. 37. 1.

⁴⁹ DK 47B3. V. *infra*.

⁵⁰ Platon, *Gorg.* (508 a6) : « il t'[Calliclès] a échappé au contraire que l'égalité géométrique possède un grand pouvoir, chez les dieux aussi bien que chez les hommes. Mais toi, c'est à avoir davantage que l'on doit, penses-tu, travailler, et tu es indifférent à la géométrie ! » Traduction L. Robin, Gallimard, 1950, I, p. 461.

d'Isocrate⁵². Elle est rétro projetée par Plutarque sur l'action de Lycurgue et de Solon⁵³. La seconde forme n'est attestée que chez Boèce et dans un fragment, transmis par Stobée qui l'attribue au *Περὶ νομοῦ καὶ δικαιοσύνης* d'Archytas :

« C'est pourquoi les uns établissent le droit sous une forme aristocratique, d'autres sous une forme démocratique, d'autres encore sous une forme oligarchique. Le droit aristocratique est fondé sur la médiété subcontraire ; car cette proportion distribue aux plus grands termes de plus grands rapports, aux plus petits, de plus petits. Le droit démocratique est établi selon la [médiété] géométrique ; dans celle-ci, en effet, les rapports des grandes et des petites grandeurs sont égaux. Le droit oligarchique et tyrannique est fondé sur la [médiété] arithmétique ; celle-ci, en effet, s'oppose à la subcontraire ; car elle distribue aux plus petits termes, les plus grands rapports, aux plus grands, les plus petits.

Telles sont les formes de la distribution. On peut en considérer les images dans les Etats et les maisonnées. Car les honneurs, les punitions et les charges y sont distribués aux plus grands et aux plus petits par mesures égales ou dans des proportions inégales, en considération d'une supériorité soit de mérite, soit de richesse, soit de puissance. La première [forme], l'égalitaire est démocratique ; l'autre, inégalitaire, est aristocratique ou oligarchique »⁵⁴.

Legg. (756e-757c): « Il y a en effet deux espèces d'égalité portant toutes deux le même nom, mais qui en fait sont à de nombreux égards presque opposées : l'une peut être employée par n'importe quel Etat suffisamment organisé et par n'importe quel législateur pour la promotion aux dignités, à savoir en réglant la répartition de celles-ci par le tirage au sort au sein d'une égalité qui se fonde sur la mesure, ou le poids, ou le nombre. Quant à l'égalité la plus vraie et la meilleure, celle-là, ce n'est plus à n'importe quel qu'il est aisé de l'apercevoir ! Il y faut en effet, certes, le discernement de Zeus ; bien faible est au contraire celui dont les hommes doivent toujours se contenter, et pourtant tout autant qu'ils en auront leur content, pour les Etats et pour les particuliers ce sera en toutes choses une source de biens : plus grande en sera la part attribuée à qui vaut davantage, plus faible à qui vaut moins, exactement proportionnée pour l'un ou pour l'autre à ce que vaut sa nature ; accordant toujours aussi, comme de juste, de plus grands honneurs à ceux dont, en mérite, la valeur est plus grande, de moindres à ceux qui au contraire ont moins de mérite et moins d'éducation ; bref, attribuant aux uns comme aux autres proportionnellement la part qui convient ». Traduction L. Robin, Gallimard, 1950, II, p. 819.

⁵¹ Voir *infra* ; voir aussi *Pol.* 1301b27-1302a8 ; 1317 b2-10.

⁵² Isocrate: *Aréopagite* (7, 21-22). Ce dernier mentionne deux ἰσοτήτα mais elles ne sont pas appelées arithmétique et géométrique ; la seconde est dite κατ'ἄξιαν — selon le mérite — et s'oppose au tirage au sort généralisé.

⁵³ Pour Solon : *Propos de table* 8, 2, 2. 719c. Voir Harvey, F. D., *Op. cit.*, pp. 121-2.

⁵⁴ Traduction de A. Delatte, *Essai sur la politique pythagoricienne*, Slatkine Reprint, 1979, p. 95), légèrement modifiée. Dans son abondant commentaire (*Op. cit.*, pp. 95-109), Delatte note la divergence évidente entre ce fragment et l'usage des deux égalités chez Platon et Aristote. A l'inverse de Harvey, il n'en conclut pas moins à l'authenticité de ces fragments (pp. 121-4).

Stobée 4, I, 137 : διὸ τὸ δίκαιον τοῖς μὲν ἀριστοκρατικὸν τοῖς δὲ δαμοκρατικὸν τοῖς δὲ ὀλιγαρχικὸν ποιοῦντι· καὶ τὸ ἀριστοκρατικὸν κατὰ τὴν ὑπεναντίαν μεσότατα· τοῖς μὲν γὰρ μέζοσι μέζοντας τῶς [δὲ] λόγως, τοῖς δὲ μήσοι μήοντας διανέμει ἅ ἀναλογία αὐτὰ· τὸ δὲ δαμοκρατικὸν κατὰ τὴν γεωμετρικάν· ἐν γὰρ ταῦτα τοῖς λόγοι ἴσοι τῶν μεζόνων καὶ μόνων μεγεθῶν· τὸ δὲ ὀλιγαρχικὸν καὶ τυραννικὸν κατὰ τὴν ἀριθμητικάν· ἀντιάζει γὰρ αὐτὰ τῇ ὑπεναντίᾳ· τοῖς γὰρ μήσοι μέζοντας τῶς λόγως, τοῖς δὲ μέζοσι μήοντας.

ταῖς μὲν ὦν ἰδέαι τὰς διανομᾶς τοσαῦται, ταὶ δὲ εἰκόνες ἐν ταῖς πολιτείαις καὶ τοῖς οἴκοις θεωροῦνται· τιμαὶ τε γὰρ καὶ κολάσεις καὶ ἀρχαὶ <ἢ> ἐξ ἴσω τοῖς μέζοσι καὶ μήσοι διανέμονται, ἢ ἐξ ἀνίσω ἢ τῷ ἀρετᾷ ὑπερέχεν ἢ τῷ πλούτῳ ἢ καὶ δυνάμει. τὸ μὲν ὦν ἐξ ἴσω δαμοκρατικόν, τὸ δὲ ἐξ ἀνίσω ἀριστοκρατικὸν ἢ ὀλιγαρχικόν.

Selon Harvey, ce dernier est un faux⁵⁵, comme l'ensemble des fragments politiques attribués à Archytas, faux qui procède d'une source commune avec Boèce. Même si cela paraît étonnant, l'application de la théorie des médiétés à la philosophie politique à l'époque classique a donc, selon Harvey, laissé de côté l'une des médiétés, la médiété harmonique pour ne prendre que la première forme. On voit bien comment la forme "tardive" a été dégagée de l'exposé "musical" des trois médiétés par Archytas⁵⁶. On peut remarquer, pour renforcer l'argumentation de Harvey, que le fragment transmis par Stobée utilise le terme "λόγος" pour "rapport" alors qu'Archytas — au moins dans le domaine de la musique — utilisait "διαστήμα", ce qui apparaît comme caractéristique de la terminologie ancienne⁵⁷. De même la description de la deuxième médiété, par l'usage de "μέγεθος", suggère une conception géométrique proche d'Euclide plutôt que musicale.

Quoi qu'il en soit, je voudrais faire deux remarques⁵⁸ sur l'analyse de F.D. Harvey :

1) La présentation qu'il fait de l'argument géométrique dans sa forme "classique" appelle une réserve : A quoi exactement est appliqué le modèle mathématique ? Est-ce aux constitutions réelles ? Harvey le laisse croire lorsqu'il compare son interprétation du fragment DK 47 B3 avec les témoignages qu'Aristote et Strabon transmettent au sujet du gouvernement de Tarente. Or nos sources nous fournissent deux types d'usage de l'argument :

— un usage strictement polémique, et dans lequel souvent une seule égalité est mentionnée⁵⁹; par exemple dans le texte du *Gorgias* que nous avons cité où il s'agit de combattre la *pleonexia* que prône Calliclès, plutôt que l'égalité arithmétique.

— un usage plus théorique, dans le cadre de l'analyse des constitutions en "éléments"; les deux égalités correspondent alors aux éléments démocratique, aristocratique ou oligarchique tels que l'analyse permet de les isoler, mais qui débouche presque nécessairement sur l'idée d'un mélange nécessaire des deux⁶⁰. C'est donc un moment de l'analyse théorique et non un argument complètement indépendant de la réflexion sur les constitutions mixtes.

2) En étudiant l'"argument géométrique" uniquement comme une réponse à l'idée démocratique d'égalité, Harvey n'a pas cherché — ce n'était pas son propos — ce sur quoi la formulation mathématique est venue se greffer.

⁵⁵ Voir Harvey, F. D., *op. cit.*, pp. 123-126 et 131-138. Ce fragment est en contradiction avec l'interprétation que Harvey propose pour DK47B3 ; de plus, selon lui, la question du pouvoir royal est (trop) importante dans ces fragments transmis par Stobée.

⁵⁶ DK 47 B2. Voir Appendice A.

⁵⁷ Voir Appendice A.

⁵⁸ Je ne suis pas non plus d'accord avec l'interprétation qu'il propose pour le fragment DK47B3, et sur laquelle repose toute une partie de ses conclusions. J'y reviendrai en détail *infra*.

⁵⁹ Voir aussi Isocrate : *Nicochlès* (14-16) où l'égalité selon le mérite est appliquée à la royauté de façon quelque peu paradoxale.

⁶⁰ Platon : *Legg.* 756c-757e. Aristote : *Pol.* 1280a7-25 ; 1282b18-30.

b — La distinction aristotélicienne des deux justices

Pour tenter d'éclaircir ce dernier point je partirai d'un texte fameux de l'*Ethique à Nicomaque* d'Aristote : les paragraphes 6 à 8 du livre V⁶¹, lequel est consacré à l'étude de cette vertu particulière qu'est la justice ; sur quelles actions porte-t-elle ? quelle sorte de "μεσότης" est-elle, et, de quels extrêmes le juste est-il un μέσον ? D'abord, dit Aristote, la justice porte sur les actions prescrites par la loi, laquelle vise le bonheur de la communauté politique; mais la loi prescrit aussi la pratique des vertus particulières : en ce sens la justice est une vertu complète, du moins en ce qui concerne les rapports avec autrui ; dans ce domaine elle est coextensive à la vertu entière. Mais on peut aussi faire une recherche sur la justice comme partie de la vertu. Ce qui montre que cela est possible c'est que certaines actions injustes (injures, adultères...) ont d'autres fins que l'injustice; au contraire quand il y a πλεονεξία, ce n'est, en général pour rien d'autre que pour l'appât du gain⁶². Il y a donc deux formes de l'injuste :

- le παράνομον: le contraire à la loi.
- l'ἄνισον : l'inégal.

D'où, à partir de là, deux formes du juste : le νόμιμον et l'ἴσον. Dans la discussion qui suit, Aristote laisse de côté la première forme pour distinguer deux espèces dans cette forme de justice particulière qu'est l'ἴσον :

- l'une relative à la distribution des honneurs et des richesses (ἐν ταῖς διανομαῖς τιμῆς ἢ χρημάτων ...) ⁶³;
- l'autre relative au διορθωτικόν τοῖς συναλλαγμάτων (la rectitude des "transactions").

Féru de distinctions, Aristote croit nécessaire de distinguer, parmi les transactions, celles qui sont ἐκουσία (que l'on traduit habituellement par volontaires, ici c'est plutôt de plein gré : vente, achat, caution, prêt, dépôt, louage) et celles qui sont ἀκουσία (involontaires, ici sans consentement de l'une des parties, que cela soit à son insu : adultère, vol... ou avec contrainte : voies de fait, séquestration...). Les précautions méthodologiques⁶⁴ qu'Aristote prend au début de son analyse montrent que, de son point de vue, il s'agit là de quelque chose de tout à fait sérieux. Par une argumentation mathématique détaillée, Aristote montre :

- 1) que le juste c'est l'ἴσον car l'inégalité est l'injuste; et là où il y a du plus et du moins, il y a l'égal⁶⁵.
- 2) dans la distribution des honneurs et des biens communs cette égalité est l'égalité géométrique⁶⁶.
- 3) dans l'équité des συναλλάγματα c'est l'égalité arithmétique⁶⁷.

⁶¹ Aristote : *Eth. Nic.* 1130b30-1133b28.

⁶² *Id.* - 1129b15-1130a14.

⁶³ *Id.* - 1130b30 : cette justice particulière est homonyme de la justice universelle parce que toutes deux s'intéressent à nos rapports avec autrui.

⁶⁴ *Id.* - 1129a5-25.

⁶⁵ *Id.* - 1131a12.

⁶⁶ *Id.* - 1131a15-1131b24.

⁶⁷ *Id.* - 1131b25-1132b20.

La démonstration du deuxième point repose sur des considérations aussi bien formelles que "factuelles" :

— l'égalité suppose deux termes ; or le juste est l'égal. Mais il est l'égal relativement à quelque chose et relativement à quelqu'un. Il suppose donc quatre termes.

— Il en est de même de la proportion, qui est une égalité de rapports, qu'elle soit continue ou discontinue⁶⁸.

— la distribution des choses communes (τὸ διανεμητικὸν τῶν κοινῶν) doit se faire de telle façon qu'il y ait la même égalité entre les personnes et les choses. Là est la perfidie ; si on peut contester qu'il y ait dans les personnes, un rapport autre que l'identité ou l'égalité des "valeurs", personne ne contestera que toutes les "choses" ne se valent pas. Une seconde perfidie est d'affirmer que tout le monde est d'accord pour que la distribution se fasse en tenant compte du mérite, même si tous ne supposent pas le même mérite⁶⁹. Ainsi la démocratie ne suppose que la liberté, plus petit commun dénominateur, mais cela limite quand même considérablement l'étendue du corps civique par rapport au corps social. Un principe de "limitation" est donc reconnu par tous : la question est de savoir où le placer.

— la répartition selon la proportion géométrique dans les personnes et dans les "choses" aboutit à un assemblage *juste* :

Si A (une personne) est à B (une autre personne) comme C (une chose) est à D (une autre chose), d'une part, par inversion, comme A est à C, ainsi est B à D — et il y a bien même rapport entre les personnes et les "choses" — d'autre part, comme A avec C est relativement à B avec D, ainsi est A relativement à B. Leur rapport après la distribution est donc le même que ce qu'il était avant Aristote utilise donc deux résultats sur les proportions que l'on retrouve dans les *Éléments* d'Euclide⁷⁰.

En termes modernes : si $A : B :: C : D$ alors $A : C :: B : D$.

si $A : B :: C : D$ alors $A + C : B + D :: A : B :: C : D$.

Cette justice distributrice est donc une justice conservatrice au sens quasi-mathématique du terme (et social, cela va de soi !) : elle réalise l'invariance des "rapports".

Dans les "transactions" il s'agit de rétablir l'égalité (ἰσάζειν) à la suite d'un "tort" subi, de compenser gain (κέρδος) et perte (ζημία) ; bien sûr cela suppose le "dommage" évalué⁷¹. La terminologie peut nous paraître curieuse, mais c'est que l'analyse se veut abstraite, au sens aristotélicien du terme :

« On applique en effet indistinctement le terme *gain* aux cas de ce genre, même s'il n'est pas approprié à certaines situations, par exemple pour une personne qui a causé une

⁶⁸ Voir Nicomaque de Gêrase, *Introduction arithmétique*, II chapitres XXI 5,6. Dans l'usage "normal" de la médiété géométrique à partir de deux termes, on obtient une progression continue en trois termes (Voir Appendice A); d'où, sans doute, les précautions oratoires d'Aristote pour établir qu'il faut compter le moyen deux fois et reconnaître qu'il y a bien quatre termes.

⁶⁹ Les protagonistes, affirme Aristote, peuvent bien être d'accord sur l'égalité des choses, ils ne s'accordent plus sur celles des personnes, car chacun est mauvais juge de ses propres intérêts. *Pol.* III, 9, 1280 a18-20.

⁷⁰ Prop. VII.12 - VII.13.

⁷¹ « ἀλλ' ὅταν γε μετρηθῇ τὸ πάθος, καλεῖται τὸ μὲν ζημία τὸ δὲ κέρδος ». Voir *Eth. Nic.*, 1132 a13-14.

blessure, et le terme *perte* n'est pas non plus dans ce cas bien approprié à la victime ; mais, de toute façon, quand le dommage souffert a été évalué, on peut parler de perte et de gain. Par conséquent l'égal est moyen entre le plus et le moins, mais le gain et la perte sont respectivement plus et moins en des sens opposés, plus de bien et moins de mal étant du gain, et le contraire étant une perte ; et comme il y a entre ces extrêmes un moyen, lequel, avons-nous dit est l'égal, égal que nous identifions au juste, il s'ensuit que le juste rectificatif sera le moyen entre une perte et un gain »⁷².

Les termes "gain" et "perte", en eux-mêmes, comportent déjà l'aspect quantitatif sur lequel Aristote fonde son analyse. C'est en particulier le cas pour le sens abstrait de $\pi\lambda\epsilon\omicron\nu\epsilon\kappa\tau\acute{\epsilon}\omega\text{-}\acute{\omega}$ = prendre plus que sa part - y compris quand il s'agit d'éviter des maux, car un moindre mal équivaut à un bien. Là encore cette équivalence et la terminologie le plus/ le moins ($\tau\acute{o}\ \pi\lambda\acute{\epsilon}\omicron\nu\ -\ \tau\acute{o}\ \acute{\epsilon}\lambda\alpha\tau\tau\omicron\nu$) sous-tendent la possibilité d'une quantification ou, au moins, d'une comparaison. Ce qui pourrait donc apparaître comme une digression sur la monnaie (1132b20-1133b28) est donc tout à fait à sa place, bien qu'elle dépasse certainement de beaucoup ce que nous pourrions appeler le "droit commercial", qui, comme Aristote l'indique lui-même, lui a servi de modèle. Il faut noter que le droit commercial est le domaine dans lequel, selon L. Gernet⁷³, l'innovation juridique, quoique limitée, a été la plus grande; mais l'historien du droit a bien montré aussi que l'action judiciaire vise moins à établir des droits (de propriété par exemple) que de trancher et de réparer un dommage subi.

Cette réparation doit se faire, dit Aristote, selon la proportion arithmétique et là encore il l'explique assez longuement en raisonnant (certainement à l'aide d'une figure) sur des lignes. Il explique deux procédures pour prendre la médiété arithmétique, procédures qu'expose également Nicomaque, mais pour deux nombres⁷⁴.

En notations modernes on peut les résumer comme suit :

$$(A, B), (A + B), (A + B)/2. \quad (A, B), (A - B), (A - B)/2, B + (A - B)/2.$$

L'application de cette égalité arithmétique exprime l'égalité de tous devant la loi et la soumission de tous à la dite loi, ce qui, dans le cas d'Athènes est attribué par Aristote à l'action législatrice de Solon.

Avant d'en venir là, il faut dire un mot de l'analyse aristotélicienne de la monnaie et de l'échange⁷⁵. Dans l'échange la réciprocité assure la cohésion de la cité, mais elle doit se faire selon la proportion et par assemblage "selon la diagonale" ($\kappa\alpha\tau\acute{\alpha}\ \delta\iota\alpha\mu\acute{\epsilon}\tau\rho\nu\ \sigma\acute{\upsilon}\zeta\epsilon\nu\zeta\iota\varsigma$). Bien sûr l'échange suppose une évaluation préalable des produits : toutes les choses échangeables doivent être comparables ($\sigma\upsilon\mu\beta\lambda\acute{\eta}\tau\alpha$)⁷⁶, d'où l'introduction de la monnaie comme un certain

⁷² *Id.* 1132b12-20. Trad. J. Tricot, Paris, Vrin, 1972, p. 234.

⁷³ Voir « Sur la notion de jugement en droit grec » dans *Droit et Société dans la Grèce ancienne*, pp. 61-81. En particulier pp. 80-81.

⁷⁴ Voir Nicomaque de Gérase, *op. cit.*, II, Chapitre XXVII, 3,7.

⁷⁵ *Eth. Nic.* 1132b20-1133b28.

⁷⁶ Dans le domaine politique, en revanche, les différents mérites (naissance, beauté, richesse, qualité d'homme libre...) sont incommensurables. C'est pourquoi la distribution des honneurs et des fonctions doit se faire en respectant les compétences. Voir *Pol.* 1282 b36-1283 a10.

moyen terme qui mesure tout. En réalité l'étalon de mesure universelle est le besoin (ἡ χρεία) dont la monnaie est devenue le substitut par convention. Sa fonction est de rendre commensurable et donc d'égaliser, car sans échange pas de communauté, ni d'échanges sans égalité ni d'égalité sans commensurabilité⁷⁷. On aurait tort de croire qu'Aristote s'appuie sur une réflexion approfondie au sujet des questions d'économie monétaire; il s'agit simplement de voir, par une analyse *logique* de l'échange, que la monnaie est un signe conventionnel (et à la limite superflu) des relations numériques que supposent les évaluations qui permettent les "échanges". Là aussi le terme est abstrait : il englobe non seulement ce qui relève des transactions commerciales, mais aussi les "réparations", les compensations financières à un dommage subi, les amendes rééquilibrant un délit commis⁷⁸. Le niveau monétaire au sens strict fournit un modèle, mais le traitement quantitatif se fait à un niveau général : celui des valeurs⁷⁹. Cette recherche de la généralité maximale dans la discussion est d'ailleurs un obstacle au développement d'une analyse économique *stricto sensu*.

c — La "quantification" dans la pratique politique et judiciaire

Droit et "quantification" se trouvent liés de manière évidente — sans que cette liaison soit forcément thématifiée — dans la pratique des compensations financières, des amendes... qui supposent et développent une quantification des statuts sociaux. Ainsi, dans le Code de Gortyne (Crète) rédigé au V^e siècle, sans doute d'après un modèle plus ancien, amendes et compensations financières dépendent du statut social des personnes impliquées (ἐλεύθεροι, ἀπεταῖροι, Φοικῆες, δῶλοι). Par exemple en cas de conflit entre un homme libre et un esclave, l'amende frappant l'esclave, s'il perd, sera double de celle qui frapperait l'homme libre dans le même cas; la compensation éventuelle sera moitié⁸⁰. Cette quantification n'est certainement pas propre à la culture grecque et dans le droit du Proche-Orient de telles pratiques sont parfaitement attestées. Le "Code" d'Hammurapi — le plus complet des recueils de sentences royales concernant la justice⁸¹ — généralise ce système des compensations tout en

⁷⁷ « ... τὸ δὲ νόμισμα ὡσπερ μέτρον σύμμετρα ποιῆσαν ἰσάζει· οὔτε γὰρ ἂν μὴ οὔσης ἀλλαγῆς κοινωνία ἦν, οὔτ' ἀλλαγῆ ἰσότητος μὴ οὔσης, οὔτ' ἰσότης μὴ οὔσης συμμετρίας » *Eth. Nic.* 1133 b16-18. Sur un plan plus spéculatif, on peut aussi citer *De gen. & corr.* II, 333 a16-34 : Empédocle affirme l'égalité des éléments. Aristote circonscrit la difficulté : pour qu'ils puissent être égaux, il faut qu'il y ait quelque chose de commun à tous qui permettent la comparaison : soit une mesure (333 a21-22), soit par une mesure de leurs effets — dans les deux cas le modèle est métrologique — soit par analogie, car l'égalité est dans la quantité comme la similitude dans la qualité. Pour ce dernier point voir *infra*, II.

⁷⁸ *Eth. Nic.* 1132 a6-14.

⁷⁹ Le rapprochement entre le développement de l'usage de la monnaie avec la rédaction des lois, et, plus généralement, avec la définition des valeurs au cours de l'époque archaïque, a été exposé — entre autres à partir de ce texte de l'*Ethique à Nicomaque* — par E. Will, « De l'aspect éthique des origines grecques de la monnaie », 1954, et "La Grèce archaïque" dans II^e Conférence Internationale ... Voir aussi Vernant, J. P., *Les origines de la pensée grecque*.

⁸⁰ Voir la Loi de Gortyne. Texte, traduction et commentaires par R. Dareste. 1886; en particulier, I.1, II.6, 8.

⁸¹ Des "codes" ou des fragments plus anciens nous sont parvenus : le "code" de Ur-Nammu (vers 2080). Le "code" de Bilalama. Le "code" de Lipit-Ishtar (1934-1924 env.). En fait il ne s'agit pas de codes de lois au sens que nous donnons à ce terme, mais de sentences peut-être d'origine casuistique, les dinat misrahim, qui "montrent la voie". Les documents issus de la pratique montrent qu'on ne se réfère pas à ces sentences comme à des lois ; tout au plus

maintenant la loi du talion dans quelques cas; certaines sentences montrent une certaine "quantification" sociale :

§209. Si quelqu'un a frappé la fille d'un homme libre et (s')il lui a fait expulser le fruit de son sein, il pèsera 10 sicles d'argent pour le fruit de son sein.

§210. Si cette femme est morte, on tuera sa fille.

§211. Si c'est à une fille de *mushkenum* que, à la suite d'un coup, il a fait expulser le fruit de son sein, il pèsera 5 sicles d'argent.

§212. Si cette femme est morte, il pèsera une demi-mine d'argent.

§213. Si c'est une esclave de particulier qu'il a frappée et à qui il a fait expulser le fruit de son sein, il pèsera 2 sicles d'argent.

§214. Si cette esclave est morte, il pèsera un tiers de mine d'argent⁸².

Pour utiliser la terminologie d'Aristote on voit qu'il y a "incommensurabilité"⁸³ entre la mort de la fille d'un homme libre et celle de la fille d'un dépendant ou d'une esclave. Dans les documents qui nous sont parvenus, il ne semble pas que les Babyloniens aient thématiqué cette quantification sociale; mais le Proche-Orient a développé une idéologie du monarque garant de justice, soucieux d'équité et de la protection des faibles face aux puissants, souci dont on trouve l'écho dans les "codes"⁸⁴. L'avènement du roi est souvent accompagné d'une réforme des poids et mesures et de l'abolition des créances. Dans le cas d'Hammurapi, on sait qu'il a même essayé d'uniformiser les poids et les mesures ainsi que les calendriers des différentes villes de son empire, pour combattre les particularismes locaux.

On peut penser à la réforme de Clithène, malgré des différences évidentes. En Mésopotamie le résultat fut peu probant sans doute parce que la tentative était trop solidaire de la personne d'Hammurapi : elle fut sans grand lendemain, mais dans les deux cas, l'utilisation, à des fins politiques, d'un système numérique était à peu près inévitable; dans le cas clithénien la chose a été bien analysée par P. Lévêque et P. Vidal-Naquet⁸⁵; il n'est donc pas utile de

peut-être s'en inspire-t-on. On trouve dans le code, mais aussi dans les lettres d'Hammurapi, des décrets royaux (*simdat sarrim*) lesquels ont une valeur prescriptive et comportent souvent une expression quantitative (par exemple fixation de l'équivalence orge/argent, ou le salaire de certaines charges). Sur la nature du Code d'Hammurapi voir J. Bottéro : "le Code d'Hammurabi" dans *La Mésopotamie : l'écriture, la raison et les dieux*. 1987, pp.191-223.

⁸² Traduction A. Finet, pp. 112-113.

⁸³ Toujours à propos d'"incommensurabilité" des personnes, signalons un jeu de mot platonicien au début du *Politique* : Théodore affirme que Socrate lui devra trois fois plus de grâces quand Théétète et l'Etranger auront terminé les portraits du Sophiste, du Politique et du Philosophe. Il se voit taxé par Socrate d'une énorme faute de calcul, ce qui est un comble de la part du plus grand maître dans ce domaine : en effet il traite ainsi ces hommes comme étant de mérite égal (τῆς ἴσης ἀξίας) alors que leurs différences de valeurs (τιμῆ) échappe à toute proportion de l'art mathématique. Par ailleurs (*Theaet.* 145a-d), nous savons par Platon que Théodore avait fourni une contribution importante à la théorie des grandeurs incommensurables.

⁸⁴ Les "puissants" sont peut-être les temples contre l'autorité desquels la monarchie déploya une grande énergie, en particulier à l'époque d'Hammurapi. Témoignages de ce souci d'équité : Cône B d'Urukagina (v. 2350 av. J.C). Prologue du "code" de Lipit-Ishtar dans *La naissance de l'écriture*. Paris, Editions de la Réunion des musées nationaux, 1982, pp. 202-203. Epilogue d'Hammurapi, Lignes 60-75. XXV. 1.8.12. Voir Finet, *op. cit.*, pp. 136-137.

⁸⁵ P. Lévêque et P. Vidal-Naquet : *Clithène l'Athénien*. Annales littéraires de l'Université de Besançon. Paris 1973. Voir en particulier le Chap. VI.

repandre ce dossier ici. Remarquons simplement que certains traits que nous venons d'indiquer pour le monarque oriental se trouvent regroupés sous la figure de Solon telle que nous l'ont transmise Aristote et Plutarque, voire Hérodote⁸⁶ :

- non seulement il abolit les dettes mais il augmenta les poids et les mesures; il aurait même, selon Aristote, réformé la monnaie, ce qui paraît incompatible avec ce que nous croyons savoir par ailleurs de la chronologie du début du monnayage.
- l'idée de Solon réformateur du calendrier n'est peut-être pas étrangère à l'esprit d'Hérodote⁸⁷, à moins qu'il ne s'agisse d'une rétro projection à partir de la réforme du calendrier réalisée par Clisthène.
- Quant à Plutarque, il insiste sur l'aspect moral de l'action solonienne, sur la promotion de la maîtrise de soi, d'où la restriction des manifestations de magnificence aristocratique, l'interdiction des injures dans certaines circonstances, réglementation du mariage, des sorties et de la tenue des femmes ...

Il rapporte aussi des dispositions stupéfiantes de précision numérique qui font bel et bien du réformateur athénien le champion de la "juste mesure" :

- il définit un système d'amendes.
- pour les sacrifices il fixe l'équivalence : 1 mouton = 1 médimne = 1 drachme.
- il fixe aussi les récompenses pour les vainqueurs aux Jeux Isthmiques, aux Jeux Olympiques, ainsi que pour les destructeurs de loups⁸⁸.
- il réglemente l'accès aux puits publics en fonction de l'éloignement, ainsi que l'usage des puits des voisins : si après avoir creusé jusqu'à dix brasses de profondeur, on n'a pas trouvé d'eau, on pourra, deux fois par jour, venir chez le voisin prendre une jarre de six congés (19 litres).
- Toujours numériquement il précise les intervalles entre les arbres des plantations (5 pieds ; 9 pieds s'il s'agit d'oliviers ou de figuiers) ; de même pour les ouvertures entre voisins ou la mise en place de nouvelles ruches (300 pieds)⁸⁹.
- Après quoi Plutarque mentionne enfin le changement que Solon aurait opéré dans la terminologie du calendrier lunaire (il aurait désigné les jours entre le 20^e et le 30^e à partir de la nouvelle lune : 21^e jour = Nouvelle lune - 9, 22^e jour = Nouvelle lune - 8...) ⁹⁰.

Si pour son exposé des lois "soloniennes" Plutarque n'a pas inventé ces dispositions de toutes pièces, et a effectivement utilisé un recueil athénien, on a alors un témoignage que cette justice "quantitative" avait été jugée digne d'élaboration. Et il s'agit certainement d'un processus plutôt que de l'action d'un seul homme, fût-il Solon. Mais si l'on tient absolument à poursuivre la comparaison avec le Proche-Orient, l'originalité grecque en général, et celle de Solon en

⁸⁶ Dans le cas de Plutarque il ne faut pas écarter l'influence de l'image du Roi hellénistique, qui lui-même, pu reprendre à son compte les traits de l'idéologie royale plus ancienne.

⁸⁷ *Histoires* I, 32.

⁸⁸ Plutarque : *Vie de Solon* : 23.1 et 3 ; 24.1.

⁸⁹ *Vie de Solon* 23.6-8.

⁹⁰ *Vie de Solon* 25;4-5.

particulier, par rapport à cette "quantification juridique", c'est bien évidemment l'usage qui en est fait dans le domaine du droit constitutionnel :

- à travers des dispositions censitaires;
- dans la désignation de collèges de magistrats souvent dénommés par un critère éminemment abstrait : leur cardinal ; (les "vingt" de la Cité dans la "Constitution" de Dréros; le conseil des Quatre-Cents...);
- dans les modalités de désignation des membres du conseil ou des candidats à une charge (conseil populaire à raison de 50 par tribu à Chios, 10 candidats par tribu pour la charge d'archonte à Athènes...)⁹¹, et ensuite dans l'exercice politique, avec tout ce qui se rapporte aux procédures de vote.

Aristote développe toute une combinatoire des différentes possibilités de nomination aux magistratures en fonction de trois paramètres : ceux qui ont le droit de nommer, ceux qui ont le droit d'être nommés, le mode de désignation : élection ou tirage au sort ou association des deux modes ... Il considère ainsi 12 combinaisons qu'il qualifie de populaire, d'oligarchique ou d'aristocratique⁹². Ces usages universalisent les cas particuliers de "quantification" que l'on peut trouver ailleurs et débouche sur une analyse théorique des différentes πολιτεῖαι en fonction de leur "structure numérique". La *Politique* d'Aristote développe profusément ces investigations; la théorie des deux égalités n'est qu'un aspect de cette étude des "régulations numériques"⁹³.

Il faut aussi noter la parenté visible entre l'analyse aristotélicienne du livre V de l'*Ethique à Nicomaque* et ce que nous rapporte la *Constitution d'Athènes* de la réforme de Solon; il est bien difficile de différencier les *a priori* du théoricien Aristote de ce qu'il peut ou croit savoir de l'action réelle de Solon.

Quoiqu'il en soit, chez le Stagirite, les deux aspects se soutiennent mutuellement jusque dans les fragments du poète réformateur qu'Aristote a sélectionnés :

- « en donnant au peuple autant de puissance qu'il suffit sans rien retrancher ni ajouter à ses droits... en ne donnant pas aux bons et aux mauvais une part égale de la grasse terre de la patrie »⁹⁴ il s'est bien sûr démarqué de la pratique des tyrans (du moins tels que la tradition les présente) mais il a également préservé l'égalité géométrique qui doit régler la justice distributive.

⁹¹ Voir R. Meiggs et D. Lewis, *A selection of Greek Historical Inscriptions*. 1969, n°2 (Dréros), n°8 (Chios). Pour Athènes, voir Aristote, *Ath.* VIII.

⁹² *Pol.* IV, 15 1300a10-1300b5. Nous avons déjà remarqué que la théorie des deux égalités — autrement dit la promotion de l'égalité géométrique — apparaît souvent dans le contexte de la désignation des magistrats et en désaccord avec le tirage au sort généralisé. Voir Isocrate, *Aréopagite*, 7, 21-2 ; Platon, *Legg.* 757 be.

⁹³ Voir par exemple l'analyse de la "république tempérée" obtenue en prenant la "moyenne" des constitutions oligarchique et démocratique, soit dans le domaine de la présence aux tribunaux (amendes pour les riches qui refusent de siéger μισθός pour que les pauvres puissent remplir cette office), soit dans la détermination d'un cens moyen pour la participation aux assemblées, soit dans le choix d'institutions appartenant aux deux modes opposés de gouvernement. *Pol.* IV, 9, 1294 b1-14.

⁹⁴ Voir Aristote : *Ath.* XI, 3.

- en rédigeant des « lois égales pour le bon et le méchant, fixant pour chacun une justice droite »⁹⁵, il a dans le domaine de la justice rectificatrice, instauré l'égalité arithmétique qui permet de définir la cité comme communauté d'ayant-droits égaux sur le plan judiciaire.

A quel degré cela correspond-il à l'action de Solon ? Il est difficile de répondre, mais on sait que celle-ci fut le centre de nombreux débats de la réflexion politique athénienne et il semble que la "théorie des deux égalités" ait des résonances plus anciennes que celles d'un simple argument réactionnaire contre le mot d'ordre démocratique d'isonomie, ou du moins qu'elle formalise, en termes "mathématiques", des analogies et des associations d'idées plus anciennes.

Au demeurant ce qui était peut-être "révolutionnaire" au début du VI^e siècle ne l'est évidemment plus vers 350. Le projet de l'Athénien des *Lois* maintient des idées similaires à celles que l'analyse aristotélicienne dégage de l'action réformatrice de Solon, tout en introduisant un partage le plus égalitaire possible de la terre (mais n'oublions pas qu'il s'agit de la fondation d'une colonie). Cette égalité foncière s'accompagne d'une égalité géométrique des biens et des charges distribuées : pour évaluer les contributions et ce qu'il y a à distribuer on pourra, l'égalité complète étant impossible, prendre en compte l'arête personnelle ou celle des ancêtres, la belle apparence physique mais aussi la condition quant à la richesse et de la pauvreté. Pour cela il faut des classes censitaires qui, mesurant les inégalités (et donc les délimitant) rendront impossibles les différents. Des limites extrêmement strictes sont donc posées pour la richesse et la pauvreté : une échelle de 1 à 4, mesurée à partir du lot initial comme minimum⁹⁶.

Il est frappant qu'à la suite de ces considérations censitaires, l'Athénien préconise d'une part une législation de la "juste mesure" qui n'est pas sans évoquer les dispositions soloniennes rapportées par Plutarque⁹⁷, et dont il reconnaît lui-même qu'elle peut paraître trop minutieuse, et d'autre part l'étude de la métrologie — c'est logique — mais aussi des mathématiques du quadrivium pythagoricien, cela bien entendu sous le règne de la loi car sinon, comme Phéniciens et Egyptiens, on tombera dans la cupidité⁹⁸. C'est d'ailleurs après sa remarque sur les amendes en cas d'abstention dans le vote qu'il entonne son couplet sur les deux égalités, surtout pour louer l'égalité *κατὰ λόγον*. Faut-il associer ici l'égalité arithmétique (*ἡ μέτρῳ καὶ σταθμῷ καὶ ἀριθμῷ ἴση*) avec la répartition de la propriété foncière ? Ce n'est pas sûr puisqu'elle n'est évoquée que dans le contexte du mode d'élection qui, en faisant une part au tirage au sort, combinera les deux principes⁹⁹.

On peut croire que l'on retrouve, dans des textes non philosophiques, cette tension entre, d'une part, l'égalité pour tous devant et par la loi, d'autre part, les inégalités sociales et

⁹⁵ *Id.* XI.4.

⁹⁶ *Legg.* 744b5-745a3. De même, en cas d'abstention dans le conseil, l'amende est, pour la 1^e classe censitaire, quadruple, pour la 2^e, triple, de l'amende de base (756c-d).

⁹⁷ Fixation des poids et mesures, dimensions des différents ustensiles ... (746e-747a).

⁹⁸ *Legg.* 747a-747c7.

⁹⁹ *Legg.* 757b-e. Cf. *supra*.

l'émulation entre citoyens. Selon le contexte politique de son intervention, l'auteur mettra l'accent sur l'un ou l'autre aspect : ainsi Démosthène dans le *Contre Leptine* défend l'idée d'émulation entre citoyens semblables distribuant des *timai*¹⁰⁰, alors qu'il montre dans le *Contre Midias* que, si les inégalités se développent, au point d'échapper à la mesure et à toute proportion, elles pourront remettre en cause l'égalité judiciaire (Aristote dirait rectificatrice) qui est à la base de la cité¹⁰¹. On retrouve cette même dualité dans l'Oraison funèbre que Thucydide prête à Périclès :

«... la loi, elle fait à tous, pour leurs différents privés, la part égale tandis que pour les titres si l'on se distingue en quelque domaine, ce n'est pas l'appartenance à une catégorie, mais le mérite qui vous fait accéder aux honneurs »¹⁰².

L'originalité des philosophes réside donc moins dans la prise en charge de cette dualité que dans son "habillage" mathématique. Celui-ci est facilité par cette connivence, que j'ai cru reconnaître entre le droit, ou plutôt la justice, et les nombres — non pas au sens d'une théorie mathématique sophistiquée, mais au sens du nombre comme moyen privilégié d'ordonner, de symboliser et de hiérarchiser — fonction que lui font d'ailleurs jouer les Pythagoriciens dans leur philosophie d'une manière systématique et universelle. Ce dernier point nous ramène aux mathématiques, mais avant d'en venir aux usages de l'égalité dans ces sciences il me reste à dire un mot de la tradition grecque de l'invention des mathématiques dans laquelle nous retrouvons cette liaison nombres/justice.

d – La tradition grecque de l'invention des mathématiques.

Dans les écrits "historiques" des Grecs, pour rendre compte de l'invention d'une technique ou d'une pratique sociale, il y a deux méthodes :

- l'une consiste à attribuer cette invention à un dieu ou à un héros : un εὐρητής.
- l'autre consiste à l'expliquer par l'emprunt à une civilisation plus ancienne : la tradition grecque savait qu'elle était plus récente que d'autres, avec lesquelles elle était en contact; les Égyptiens en particulier avaient une réputation d'antique sagesse et de grande piété; les Grecs n'hésitaient pas à se considérer comme leurs débiteurs.

La question de l'"origine" des sciences, ou du moins de certaines d'entre elles, n'échappe pas à cette double approche, qu'il s'agisse d'une "science" prise en elle-même, globalement, (comme l'arithmétique ou la divination), ou de certaines notions-clés (comme le calendrier), d'instruments (le gnomon par exemple) ou de connaissances spécifiques (observations astronomiques). Cette question des origines des sciences grecques et, corrélativement, celle de leurs dettes éventuelles à l'égard des traditions proche orientales ou égyptiennes a également été l'objet d'une littérature considérable dans les temps modernes. Ces discussions ont leur point de

¹⁰⁰ *Contre Leptine* § 4 à 6.

¹⁰¹ *Contre Midias* §188 et 209-210.

¹⁰² « μέτεστι δὲ κατὰ μὲν τοὺς νόμους πρὸς τὰ ἴδια διάφορα πᾶσι τὸ ἴσον, κατὰ δὲ τὴν ἀξίωσιν, ὡς ἕκαστος ἔν τῳ εὐδοκιμεῖ, οὐκ ἀπὸ μέρους τὸ πλεον ἐς τὰ κοινὰ ἢ ἀπ' ἀρετῆς προτιμᾶται », II.37.1. Traduction J. de Romilly. Belles Lettres.

départ dans les témoignages que nous ont transmis Hérodote, Platon ou Aristote... La valeur historique de ces témoignages constitue un problème difficile dont nous renvoyons la discussion dans l'Appendice B (voir *infra*).

C'est sur un autre aspect de cette tradition que je voudrais mettre l'accent maintenant : plusieurs témoignages rattachent l'invention des mathématiques à un souci de justice. On remarquera d'abord que le lien entre la justice et la métrologie est une banalité. Les *μετρονόμοι* veillent à ce que les marchands utilisent des poids et mesures justes¹⁰³. A un niveau plus abstrait, Aristote, à la suite de son analyse de la monnaie que j'ai évoquée, utilise métaphoriquement les prescriptions relatives à la métrologie; il s'agit de distinguer ce qui dans la loi est "naturel"¹⁰⁴ de ce qui relève de prescriptions particulières. Aristote pense certainement aux décrets par opposition aux lois, et pour cela il compare les règles de droits qui dépendent de la convention avec les mesures, car « les mesures de capacité pour le vin et le blé ne sont pas égales partout, mais plus grandes là où on achète, plus petites là où on vend »¹⁰⁵.

De même pour expliquer l'origine de la géométrie, Hérodote se réfère aux mensurations et à l'équité :

« Ce roi, disaient les prêtres, partagea le sol entre tous les Egyptiens, attribuant à chacun un lot égal aux autres, carré ; et c'est d'après cette répartition qu'il établit ses revenus, prescrivant qu'on payât une redevance annuelle. S'il arrivait que le fleuve enlevât à quelqu'un une partie de son lot, celui-là venait le trouver et lui signalait ce qui s'était passé ; lui, envoyait des gens pour examiner et mesurer de combien le terrain était amoindri, afin qu'il fût fait à l'avenir une diminution proportionnelle dans le paiement de la redevance fixée. C'est ce qui donna lieu, à mon avis, à l'invention de la géométrie, que des Grecs rapportèrent dans leur pays. Car, pour l'usage du polos, du gnomon, et pour la division du jour en douze parties, c'est des Babyloniens que les Grecs les apprirent »¹⁰⁶.

L'explication d'Hérodote procède vraisemblablement de l'étymologie; la façon dont il s'exprime montre qu'il s'agit certainement d'une conjecture personnelle. En tout cas il ne fait pas de doute que la géométrie doit servir à faire respecter l'équité de la redevance prescrite par le roi (comme elle avait d'ailleurs déjà dû jouer un rôle dans le partage égalitaire de la terre entre tous les Egyptiens), équité résidant bien évidemment dans la proportion. Cette explication est reprise par Proclus au début de son résumé ; il la combine avec une autre, du même type, pour rendre compte de l'origine empirique de l'autre grande branche du savoir mathématique grec : la science des nombres¹⁰⁷.

Dans le même ordre d'idées et pour conclure cette partie, il nous faut venir au fragment d'Archytas sur l'interprétation duquel Harvey fonde en partie sa conjecture :

¹⁰³ Aristote, *Ath.*, LI, 2.

¹⁰⁴ L'expression a des significations très différentes selon les auteurs; ici elle signifie universelle.

¹⁰⁵ *Eth. Nic.* V, 1134b35-1135a3.

¹⁰⁶ Hérodote : *Histoires* II, 109. Traduction Ph. Legrand Belles-Lettres.

¹⁰⁷ Voir Appendice B.

« Quand le calcul (λογισμός) fut découvert, la stasis cessa, l'ὁμόνοια augmenta ; quand il existe, la πλεονεξία n'est pas, mais il y a ἰσότης. Car avec celui-ci nous réglons nos échanges (συναλλάγματα). Assurément par le biais de ceux-ci les pauvres reçoivent de la part des puissants. Les riches donnent aux nécessiteux ; par là, les uns et les autres pensent être égaux. Etant une règle et un frein, il arrête ceux qui savent calculer avant qu'ils ne commettent une injustice, persuadés qu'ils ne pourront le cacher s'ils en venaient là. A ceux qui en sont ignorants, injustes en cela de façon évidente, il leur interdit de commettre l'injustice »¹⁰⁸.

Harvey pense que le calcul dont il est question ici est la proportion géométrique. Il n'y a, à ma connaissance, aucun emploi de λογισμός en ce sens, et les arguments qu'avance Harvey pour soutenir sa thèse sont extrêmement faibles. En fait cette interprétation se rattache à la volonté de réfuter J.S. Morrison¹⁰⁹, lequel interprétait ce fragment comme la célébration de la découverte de la médiété harmonique. Harvey, quant à lui, est persuadé qu'il n'y a pas d'intervention de la médiété harmonique dans la réflexion politique à l'époque classique. Il a certainement raison sur ce point, mais la recherche d'une interprétation trop précise de ce fragment est certainement vaine. Harvey écarte l'idée selon laquelle il puisse s'agir du calcul en général (possibilité renforcée par λογίζεσθαι, comme il le reconnaît lui-même), car, dans ce cas, il n'y aurait aucun sens à parler de "découverte". Je crois au contraire qu'il s'agit bien de ce sens général de "calcul" que λογισμός recouvre ici et que la signification de sa "découverte" en rapport avec le respect de la justice et le progrès de la civilisation est clairement établie par toutes les considérations qui précèdent.

Sur la base de son interprétation Harvey pense que c'est bien Archytas qui a conçu l'application de l'égalité géométrique à la politique et il en cherche une confirmation dans ce que nos sources nous font connaître de Tarente, où, selon la tradition, Archytas aurait joué un rôle politique important. Bien sûr la chose n'est pas impossible *a priori*, mais rien ne permet de l'affirmer une fois que l'on n'admet plus l'interprétation du troisième fragment d'Archytas proposée par Harvey. L'indice le plus probant serait peut-être le rôle indiscutablement important que les pythagoriciens en général, et Archytas en particulier, accordent aux médiétés dans leurs recherches mathématiques¹¹⁰. Pour ma part je rattache ce fragment à la tradition de réflexion sur l'"origine" de la civilisation, et sur les éléments qui la composent, à laquelle appartient également la contribution d'Hérodote au sujet de la géométrie. Archytas est peut-être l'une des sources de Proclus pour ce qui est de l'origine de la science des nombres¹¹¹; quoiqu'il en soit

¹⁰⁸ DK47B3 : « στάσιν μὲν ἔπαυσεν, ὁμόνοιαν δὲ αὐξήσεν λογισμὸς εὐρεθείς· πλεονεξία τε γὰρ οὐκ ἔστι τούτου γενομένου καὶ ἰσότης ἔστιν· τούτῳ γὰρ περὶ τῶν συναλλαγμάτων διαλασσόμεθα. διὰ τούτου οὖν οἱ πένητες λαμβάνοντι παρὰ τῶν δυναμένων, οἳ τε πλοῦσιοι δίδονται τοῖς δεομένοις, πιστεύοντες ἀμφοτέρω διὰ τούτῳ τὸ ἴσον ἔξειν. κανὼν δὲ καὶ κωλυτὴρ τῶν ἀδικούντων «ἐὼν» τοὺς μὲν ἐπισταμένους λογίζεσθαι πρὶν ἀδικεῖν ἔπαυσε, πείσας ὅτι οὐ δυνασοῦνται λαθεῖν, ὅταν ἐπ' αὐτὸν ἔλθωσι· τοὺς δὲ μὴ ἐπισταμένους, ἐν αὐτῷ δηλώσας ἀδικούντας, ἐκώλυσε ἀδικῆσαι ».

¹⁰⁹ Harvey, *op. cit.*, pp. 138-141.

¹¹⁰ Voir Appendice A.

¹¹¹ Voir Appendice B.

cette tradition remonte certainement au moins jusqu'à la seconde moitié du V^e siècle et au début du IV^e siècle avant J. C.

J'ai essayé de montrer que l'"argument géométrique" recouvre vraisemblablement une opposition plus ancienne que le IV^e siècle, caractéristique d'une analyse politique "dualiste"; la *στάσις* oppose deux camps dans la cité : l'"égalité" doit fournir le moyen de mettre à un terme à ces dissensions. Quant à la formulation mathématique en terme de médiétés, elle peut être due aussi bien à l'Ancienne Académie qu'aux Pythagoriciens car dans nos sources, elle apparaît dans un contexte (tirage au sort généralisé par exemple) qui fait penser à une topique athénienne. Quoi qu'il en soit, comme la référence reste la "constitution des Anciens", l'analyse politique de Platon et d'Aristote peut se contenter des deux égalités; elle peut définir les constitutions "intermédiaires" comme des mixtes et ne pas utiliser la médiété harmonique.

Appendice A : la théorie des médiétés

Le vocabulaire

Comme nous l'avons déjà dit, le substantif "médiété" ("*μεσότης*") désigne soit un ensemble de trois termes en progression (a, b, c), soit le terme médian de cette progression, b. Pour ce terme médian, les auteurs anciens utilisent aussi "*μέση*", adjectif substantivé - ce que l'on peut traduire par moyenne¹¹². La théorie des médiétés s'inscrit *a priori* dans le cadre de l'arithmétique et de ses applications à la musique; dans ce cas (a, b, c) désigne des nombres. Mais comme il existe des procédures de calcul justifiées par une construction géométrique, la théorie des médiétés est aussi appliquée aux grandeurs, en particulier aux lignes droites.

La rencontre avec la géométrie tient aussi à ce que les médiétés sont souvent rapprochées des proportions (*ἀναλογίαι*). Cette notion d'"analogie" est très large, même si l'on se limite à un sens mathématique ou "méta-mathématique". Ainsi selon Nicomaque un rapport est une relation entre deux termes et la proportion est une "unification" de deux ou plusieurs de ces rapports¹¹³. Nicomaque connaît les définitions d'Euclide¹¹⁴ et les généralise ici. Une présentation formalisée moderne de ces notions peut être la suivante : un rapport entre deux termes (a, b) se représente par $R(a, b)$: le rapport qui existe entre a et b et qui ne se limite pas à ce que nous désignons par a/b ¹¹⁵, mais peut être par exemple leur différence $a - b$ ou autre chose.

Une "analogie" désigne une relation d'ordre supérieure $A(R_1(a_1, b_1), R_2(a_2, b_2), \dots)$, en général une identité ou une égalité de rapports¹¹⁶. Pour avoir une "analogie" non triviale il faut

¹¹² "*μέση*" se trouve chez Euclide (VI.16, XIII.17) dans un contexte géométrique; "*μέσος ἀριθμός*" (sing. et plur.) dans des contextes arithmétiques (VIII.11, 12. VIII. 18, 19, 20, 21).

¹¹³ *Introduction arithmétique*, II, Chapitre XXI.

¹¹⁴ *Éléments*, V, Déf. 3 et 6.

¹¹⁵ Les Grecs n'ont certainement pas élaboré une notion de nombres réels ni même rationnels entre lesquels existerait l'opération de division correspondant à notre notation a/b .

¹¹⁶ Sur ce point, voir *infra*, pp. 00-00.

donc au minimum trois termes $A(R_1(a_1, a_2), R_2(a_2, a_3))$ et on dit alors que la proportion est continue. Si $b_1 \neq a_2$, on dit qu'elle est disjointe. Nicomaque donne deux exemples : la progression (1, 2, 4) qui est une proportion selon la qualité — correspondant à une progression géométrique — et la progression (1, 2, 3), "analogie" selon la quotité, correspondant à une progression arithmétique.

La suite de son exposé (Ch. XXII) montre qu'il utilise indifféremment "proportion" pour "médiété" quoiqu'il remarque, en introduisant la médiété géométrique (Ch. XXIV) qu'elle seule est appelée *proportion* au sens propre, puisqu'il y a bien identité de rapports entre les termes.

Théon cite un certain Adraste qui insiste sur la différence entre les deux notions et signale l'abus de langage commis par certains¹¹⁷. Toutefois, Théon lui-même, lorsqu'il a cité auparavant le musicien Thrasyllé¹¹⁸, a utilisé "proportion" pour désigner les trois médiétés fondamentales et n'a donc pas recherché l'exactitude terminologique. Enfin Pappus signale que ce qui est proportion est médiété mais que la réciproque est fautive. Encore faudrait-il qu'il précise "proportion continue"¹¹⁹.

Les étapes de la constitution de la théorie des médiétés

Dans leurs exposés, les auteurs tardifs mentionnent dix ou douze médiétés. Ainsi Théon, suivant Adraste, mentionne qu'il y a douze médiétés. Ce qui est exact; mais l'une d'elles implique l'identité des termes. Il reste donc en fait onze médiétés. Toutefois Théon n'expose que les six premières et renvoie pour les autres à la littérature pythagoricienne¹²⁰. Si les exposés de Nicomaque et de Pappus s'accordent sur la définition des six premières, il faut noter une petite variation pour ce qui concerne les médiétés dites récentes : ils n'exposent que 10 médiétés, correspondant à la décade pythagoricienne, qui ne coïncident que dans trois cas sur quatre.

La découverte de ces onze médiétés ne s'est pas faite en une seule fois selon la tradition ancienne elle-même. Si Théon et Pappus mettent les six premières médiétés sur le même plan et les déclarent connus des Anciens¹²¹ (?) par opposition à quatre médiétés que l'on trouve seulement chez les auteurs récents, Jamblique nous fournit un compte-rendu plus complet :

« Il n'existait anciennement, du temps de Pythagore et des mathématiciens contemporains, que trois types de médiétés : l'arithmétique, la géométrique et celle que l'on appelle, un temps, sous-contraire, à cause de sa troisième place, et qui devint à l'époque des mathématiciens Archytas et Hippase, la médiété harmonique. Après ce changement de nom, les mathématiciens disciples d'Eudoxe¹²² découvrant trois

¹¹⁷ *Exposition...*, II, L.

¹¹⁸ *Idem*, II, XXXIII.

¹¹⁹ Dans son exposé, il réserve "mesotês" aux médiétés arithmétique et harmonique et "proportion" à la médiété géométrique. Voir par exemple *Coll. math.*, III, XI, reproduit dans I. Thomas, *Greek Mathematical Works*, II, pp. 568-70.

¹²⁰ *Exposition...*, II, LX.

¹²¹ Pappus, *Coll. math.*, III, XVIII.

¹²² Proclus dit simplement Eudoxe, voir *Comm. in Eucl.* I, pp. 67.2-68.4 ; trad. franç., p. 59.

médiétés supplémentaires appellèrent sous-contraire la quatrième, et simplement cinquième et sixième les deux autres, en fonction de l'ordre de leur place »¹²³.

Mais selon Nicomaque le nom "harmonique" pour la troisième médiété aurait été retenu en considération du cube, véritable "harmonie géométrique" (12 arêtes, 8 angles et 6 faces) par Philolaos¹²⁴. Jamblique lui-même n'est pas très cohérent dans son attribution de la découverte des médiétés 4 à 6, également initiées par Hippias et Archytas et utilisée par les successeurs de Platon jusqu'à Eratosthène¹²⁵.

Quoi qu'il en soit, Jamblique suit ici Nicomaque et développe les indications de ce dernier, selon qui les trois premières médiétés remontent à Pythagore. Les trois suivantes sont attestées après Platon et Aristote dans les mémoires d'école (?)¹²⁶. Quant aux quatre dernières médiétés (en réalité cinq) elles ont été découvertes, si l'on en croit encore Jamblique, par les Pythagoriciens Myonides et Euphranor¹²⁷.

L'association de la théorie des médiétés avec l'école pythagoricienne remonte, ainsi que nous l'avons dit, au plus ancien témoignage conservé à propos des trois premières médiétés, rapporté à Archytas :

« Il y a trois moyennes dans la musique : la première est l'arithmétique, la deuxième la géométrique, la troisième la sous-contraire, que l'on appelle harmonique. [Il y a moyenne] arithmétique quand trois termes sont en proportion quant à leur excès de la façon suivante : de ce dont le premier dépasse le deuxième, le deuxième dépasse le troisième. Et dans cette proportion il arrive que l'intervalle des termes les plus grands est plus petit, celui des plus petits [est] plus grand. [Il y a moyenne] géométrique quand [les trois termes] sont tels que le premier est relativement au deuxième comme le deuxième relativement au troisième. Dans ce cas l'intervalle produit par les plus grands [termes] est égal à [celui produit] par les plus petits. [Il y a moyenne] subcontraire, que nous appelons harmonique, quand ils sont tels que le premier dépasse le deuxième par une même partie de lui-même que la partie du troisième par laquelle le moyen dépasse le troisième. Dans cette proportion il se produit que l'intervalle des plus grands termes est plus grand, et celui des plus petits, plus petit »¹²⁸.

¹²³ *Comm. In Nic.*, Pistelli, p. 100. 19 = DK 18 A15.

¹²⁴ *Introduction arithmétique*, II, Chapitre XXVI.

¹²⁵ Voir Heath, T. L., *A History of Greek Mathematics*, I, p. 86.

¹²⁶ *Introduction arithmétique*, II, Chapitre XXVII.

¹²⁷ « On parle aussi des trois médiétés à la suite des trois premières, celles qu'on utilisa de Platon jusqu'à Eratosthène et dont la découverte commença comme nous l'avons dit avec les mathématiciens Archytas et Hippias. Mais il ne serait pas convenable de laisser de côté les quatre autres habilement conçues chez les modernes par les pythagoriciens Myonides et Euphranor ». *Comm. In Nic.*, Pistelli, p. 116. 1 = DK 56 A 3.

¹²⁸ DK 47B2 : « μέσαι δέ ἐντι τρεῖς τῆι μουσικῆι, μία μὲν ἀριθμητικῆ, δευτέρα δὲ ἁ γεωμετρικῆ, τρίτη δ' ὑπεναντία, ἂν καλέοντι ἁρμονικῆν. ἀριθμητικῆ μὲν, ὅκκα ἔωντι τρεῖς ὅροι κατὰ τὸν τοῖαν ὑπεροχὰν ἀνὰ λόγον· ὡι πρῶτος δευτέρου ὑπερέχει, τούτῳι δεύτερος τρίτου ὑπερέχει. καὶ ἐν ταύτῳι <τῆι> ἀναλογίῳι συμπέπτει ἡμεν τὸ τῶν μειζόνων ὄρων διάστημα μείον, τὸ δὲ τῶν μειόνων μείζον. ἁ γεωμετρικῆ δέ, ὅκκα ἔωντι οἶος ὁ πρῶτος ποτὶ τὸν δεύτερον, καὶ ὁ δεύτερος ποτὶ τὸν τρίτον. τούτων δ' οἱ μείζονες ἴσον ποιοῦνται τὸ διάστημα καὶ οἱ μείους. ἁ δ' ὑπεναντία, ἂν καλοῦμεν ἁρμονικῆν, ὅκκα ἔωντι <τοῖου· ὡι> ὁ πρῶτος ὅρος ὑπερέχει τοῦ δευτέρου αὐταύτου μέρει, τούτῳι ὁ μέσος τοῦ τρίτου

Ce texte est cité par Porphyre¹²⁹ pour illustrer l'emploi ancien du mot διάστημα" (intervalle) dans un sens équivalent à rapport ("λόγος"); il montre également un usage "souple" de " ἡ ἀναλογία " ou " ἀναλόγον " : en proportion¹³⁰, non limité à la seule proportion géométrique.

Quoiqu'il en soit de Pythagore, Nicomaque ne se trompait pas en attribuant une connaissance des trois premières médiétés à l'époque de Platon et Aristote, en dehors du cercle des spécialistes comme Archytas. Le Stagirite utilise les médiétés arithmétique et géométrique dans sa philosophie politique comme nous l'avons rappelé¹³¹. Platon utilise les médiétés arithmétique et harmonique pour la construction de l'âme du monde et les définitions qu'il donne correspondent à celles données par Archytas :

« la première des médiétés surpasse et est surpassée par les extrêmes d'une même part de chacun d'eux ; la seconde surpasse et est surpassée de manière égale selon le nombre »¹³².

Auparavant il avait utilisé la médiété géométrique pour justifier l'existence de quatre corps simples pour la construction du corps du monde : pour que celui-ci soit visible il faut qu'existe le feu ; pour qu'il soit tangible il faut qu'existe la terre. Entre ces extrêmes, il faut un moyen qui serve de lien. Le lien le plus parfait est la proportion¹³³; toutefois, comme l'on raisonne ici sur des solides il faut, dit Platon, intercaler deux moyens : l'air et l'eau. On aura donc une proportion continue : Feu : Air :: Air : Eau :: Eau : Terre.

Il y a là une allusion à un résultat de théorie des nombres que Nicomaque appelle d'ailleurs un théorème platonicien :

— entre deux nombres plans, il peut y avoir un nombre moyen à condition qu'ils soient semblables. Par exemple entre 4 et 9 il y a 6.

— entre deux nombres solides (semblables) on peut intercaler deux moyens; par exemple entre 8 et 27 on intercale 12 et 18 car $8/12 = 12/18 = 18/27 (= 2/3)$ ¹³⁴.

ὑπερέχει τοῦ τρίτου μέρει. γίνεται δ' ἐν ταῦται τῆ ἀναλογίαι τὸ τῶν μειζόνων ὄρων διάστημα μείζον, τὸ δὲ τῶν μειόνων μείον ».

¹²⁹ *Comm. aux Harmoniques de Ptolémée*, 92.

¹³⁰ Aristote utilise aussi l'expression "proportion arithmétique" (*Eth. Nic.*, 1132 a30) mais on ne la trouve ni chez Euclide, ni chez Archimède ou Apollonius.

¹³¹ Voir *supra* la distinction aristotélicienne des deux justices.

¹³² *Timée*, 36 a. On peut aussi considérer que Platon utilise la médiété parfaite dont il sera question plus loin. Pour la spéculation sur les intervalles musicaux présentes dans le *Timée*, cf. la notice de A. Rivaud dans son édition des Belles-Lettres, pp. 42-52.

¹³³ *Timée*, 32 a. Car la proportion enveloppe une identité de rapports : $a/b = b/c$. On en déduit facilement que $b/a = c/b$ et les extrêmes deviennent moyens, le moyen devient extrêmes : les positions sont donc échangeables.

¹³⁴ On remarquera que les exemples de Nicomaque portent sur des nombres carrés ou cubes; ces cas particuliers sont consignés par Euclide dans les propositions VIII. 11 et 12. Le cas général est traité dans les propositions VIII. 18 et 19 des *Éléments*.

Le premier résultat généralise un résultat démontré par Archytas sur l'impossibilité de diviser un rapport épimore¹³⁵, résultat transmis dans la proposition 3 de la *Division du Canon* d'Euclide.

Définition et propriétés des médiétés

Les trois médiétés fondamentales sont donc définies de la manière suivante :

- (a, b, c) constituent une médiété arithmétique si $a - b = b - c$ ¹³⁶. Dans ce cas $a/b < b/c$. Exemple (6, 4, 2) ; $6/4 = 3/2 < 4/2 = 2$.

- (a, b, c) constituent une médiété géométrique si $a : b :: b : c$ ¹³⁷. Dans ce cas $a/b = b/c$. Exemple (8, 4, 2);

- (a, b, c) constituent une médiété harmonique si :

$a = b + (1/n).a$ et $b = c + (1/n).c$ avec le même entier n, qui doit d'ailleurs être un diviseur de a et c si l'on travaille en nombres entiers¹³⁸. Dans ce cas $a/b > b/c$. Exemple (6, 3, 2) car $6 - 3 = 3 = (1/2).6$ et $3 - 2 = 1 = (1/2).2$; ici $n = 2$; et $6/3 = 2 > 3/2$.

La propriété mentionnée pour chacune des médiétés quant aux rapports des termes suggère déjà que la médiété géométrique va jouer un rôle clé; nous y reviendrons. Les termes d'une médiété arithmétique peuvent s'écrire (m + x, m, m-x). Alors $m + x / m = 1 + x/m$ et $m / m - x = 1 + x/m - x$ qui est évidemment plus grand que le rapport des deux plus grands termes. De même si (a, b, c) constituent une médiété harmonique :

$$a/b = 1 + (1/n)(a/b) > 1 + (1/n) = b/c$$
¹³⁹.

L'extension de la théorie — en terme de proportion — que nous présentons un peu plus loin s'est certainement faite lorsque les trois médiétés ont été définies en termes de rapport entre les "excès" (a-b, b-c, a-c) et les nombres ou les grandeurs données (a, b, c)¹⁴⁰. On peut comparer chacun des trois rapports (a-b/b-c, a-c/b-c, a-c/a-b) avec chacun des quatre rapports (a/a, a/b, a/c, b/c), soit 12 possibilités de proportion (si l'on ne tient pas compte de la possibilité de prendre les inverses), mais $a-c/b-c = a/b$ donne : $a = b$ et c quelconque ($< a$).

Remarquons que la définition proposée par Archytas pour la médiété harmonique conduit assez naturellement à ce genre de comparaison. En effet, si $a = b + (1/n).a$ et $b = c + (1/n).c$, alors : $a - b = (1/n).a$ et $b - c = (1/n).c$ et d'après la définition VII. 21 des *Éléments*

¹³⁵ Autrement dit si $m : p :: (n + 1) : n$, on ne peut intercaler un moyen proportionnel entre m et p. Boèce nous a conservé la démonstration d'Archytas (*De Inst. Musica*, III, 11). En particulier on ne peut dichotomiser ni l'octave, ni le ton.

¹³⁶ Les termes des médiétés sont ordonnés en ordre décroissant.

¹³⁷ Nous transcrivons ainsi la formulation "a est à b comme b est à c". Aux yeux d'un moderne, cette assertion est difficile à distinguer de celle de l'égalité de rapports.

¹³⁸ Une condition nécessaire pour que la moyenne harmonique de deux nombres (a, c) soit un entier naturel est donc que a et c soient non premiers entre eux. Elle n'est évidemment pas suffisante (la moyenne harmonique de 8 et 12 est 48/5).

¹³⁹ Dans son exposé Pappus donne deux définitions pour chacune des médiétés : les premières correspondent à celles du texte d'Archytas ; les secondes aux définitions qui procèdent de l'extension de la théorie en termes de proportion.

¹⁴⁰ On notera alors une nette différence de terminologie avec celle du fragment d'Archytas.

d'Euclide, les nombres (a-b, a ; b-c, c) sont en proportion. On a donc bien : $a-b/b-c = a/c$ ¹⁴¹. Il est alors facile de voir que (a, b, c) constituent une médiété arithmétique si $a-b/b-c = a/a$ et une médiété géométrique si $a-b/b-c = a/b = b/c$. A partir de là on peut envisager d'autres combinaisons de rapports et définir ainsi de nouvelles médiétés ; on remarquera toutefois que si cette "combinatoire" nous paraît aller de soi, il n'en était peut-être pas de même pour les Anciens s'il est vrai que la théorie s'est développée en trois étapes comme le rapporte la tradition néo-pythagoricienne.

Les médiétés et la théorie musicale

La terminologie adoptée pour la troisième médiété indique certainement l'intérêt que lui portèrent les théoriciens de la musique. On sait que les intervalles musicaux consonants fondamentaux : octave, quarte, quinte, ton... étaient associés à des rapports numériques censés correspondre à des caractéristiques des instruments produisant ces intervalles: longueur des cordes, espacement des ouvertures sur une flûte, niveaux d'eau différents dans des vases identiques ... Grâce à des expériences diverses, Pythagore a été le premier, selon cette tradition, à mettre en évidence cette détermination numérique des intervalles : rapport 2/1 pour l'octave; 4/3 pour la quarte; 3/2 pour la quinte, 9/8 pour le ton¹⁴². Tous sont épimores (de la forme $n + 1/n$). On remarque que dans la progression harmonique (12, 8, 6) on a le rapport associé à l'octave (12/6), à la quarte (8/6), à la quinte (12/8). Selon Nicomaque, il existe une médiété parfaite entre deux nombres solides (a, d) et qui enveloppent les trois médiétés principales grâce à deux termes moyens (b, c)¹⁴³.

On peut la transcrire ainsi : $(a : b = (a + d)/2 :: c : d)$.

Le terme c est donc tel que le rapport du plus grand extrême à la médiété arithmétique soit le même que celui de c relativement au petit extrême. Donc $c = (a \cdot d)/b = (2ad)/a+d$. (a, b, d) est une médité arithmétique; (a,b, c, d) est une proportion (disjointe); selon Nicomaque la médiété est parfaite car (a, c, d) est aussi une médiété harmonique¹⁴⁴. Il donne comme exemple : (12, 9, 8, 6). En effet 9 est médiété arithmétique de 6 et 12, (12, 8, 6) est une médiété harmonique; on vérifie que $12/8 = 9/6$. Cette médiété, outre les rapports associés aux intervalles fondamentaux déjà mentionnés ci-dessus, contient aussi le rapport "épigde" (9/8) qui est associé au ton.

¹⁴¹ Cette propriété est prise comme définition de la médiété harmonique dans les exposés tardifs (Nicomaque inclus, voir *Introduction arithmétique*, II, Chapitre XXV). On en déduit facilement que $(a-b)/a = 1 - b/a = b/c - 1 = (b - c)/c$, et donc que $(1/b) - (1/a) = (1/c) - (1/b)$, autrement dit que l'inverse de la moyenne harmonique de (a, c) est la moyenne arithmétique des inverses de a et c. La moyenne harmonique de deux entiers est donc toujours un nombre rationnel contrairement à ce qui se passe pour la moyenne géométrique. Voir *infra*.

¹⁴² L'historicité de cette tradition est évidemment sujette à caution. Théon attribue cette découverte à Pythagore, mais il mentionne aussi certaines expériences acoustiques de la part de Lasos d'Hermione et d'Hippase. Voir *Exposition...*, II, XII = DK 18 A 13.

¹⁴³ Selon Jamblique, cette médiété avait été découverte par les Babyloniens et introduite en Grèce par Pythagore ; ensuite de nombreux pythagoriciens et Platon, dans son *Timée*, en firent usage. *Comm. in Nic.*, Pistelli, p. 118. 19.

¹⁴⁴ En fait, il est facile de montrer que si on a quatre nombres (a, b, c, d) en ordre décroissant, tel que b soit la demi-somme de a et d, les conditions $(a/b = c/d)$ et $([a, c, d]$ médiété harmonique) sont équivalentes.

De la médiété parfaite on peut déduire la propriété de la médiété harmonique citée par les auteurs "tardifs" : le produit du nombre moyen par la somme des extrêmes est égal au double du produit de ces extrêmes¹⁴⁵. Comme on l'a remarqué depuis longtemps, cette propriété permettait une détermination simple de la médiété harmonique; mais ce n'est pas celle qu'ont retenue Nicomaque et Théon¹⁴⁶.

On peut formuler autrement cette propriété : étant donnés deux nombres (a, b), si l'on forme leurs moyennes arithmétique et harmonique, respectivement m_a , m_h , on a donc $a.b = m_a.m_h$, or $(m_g)^2 = a.b$ en notant m_g la moyenne géométrique de a et b ; et donc $(m_g)^2 = m_a.m_h$, donc m_g est aussi moyenne géométrique de m_a , m_h . Comme on a : $a < m_h < m_g < m_a < b$, on peut itérer les moyennes arithmétique et harmonique pour obtenir une double suite d'approximations par défaut et par excès de m_g , quand ce terme n'est pas exprimable.

La détermination du moyen terme

Un premier problème dans la théorie des médiétés est la détermination du moyen terme, les extrêmes étant supposés connus. En principe la théorie des médiétés s'intègre à l'arithmétique et à la musique. Il faut donc, étant donnés deux nombres (a, c) trouver le moyen b. Si les médiétés arithmétique et harmonique donnent toujours des nombres rationnels¹⁴⁷ et si l'on peut donc, par une multiplication convenable, se ramener à des entiers, il n'en est pas de même de la moyenne géométrique comme nous le signalions ci-dessus pour les nombres en rapport épimore. Et de même qu'il a été nécessaire d'établir une théorie des proportions valables pour les grandeurs continues et pas seulement pour les entiers, une théorie géométrique des médiétés a été développée pour les lignes droites. C'est cette théorie qu'expose Pappus, d'après les Anciens, comme il le dit lui-même.

Nicomaque expose d'abord deux exemples, l'un en nombres pairs (10 et 40) ; les trois médiétés sont : 16, 20, 25 ; l'autre en nombre impairs (5 et 45); les trois médiétés sont 9, 15, 25. La distinction pair/impair intervient sans doute ici parce que la médiété arithmétique est un nombre entier si et seulement si les deux nombres de départ ont la même parité. Il remarque toutefois que la procédure est la même.

Il formule donc deux règles générales que l'on peut transcrire ainsi :

- (a, c), $(a + c)$, $(a + c)/2 = b$.
- (a, c), (a-c), $(a-c)/2$, $c + (a-c)/2$ ¹⁴⁸.

Pour la médiété géométrique on prendra (selon N. et T.) le côté du carré égal au rectangle produit par les extrêmes, ce que nous appelons la racine carrée du produit. Ou encore selon Nicomaque on partagera en deux le rapport a/c des extrêmes. En effet, si l'on sait que la médiété

¹⁴⁵ Nicomaque, *Introduction arithmétique*, II, Chapitre XXV. Théon, *Exposition...*, II, LVII.

¹⁴⁶ Pappus fournit quant à lui une détermination géométrique sur la quelle nous reviendrons *infra*, pp. 00-00.

¹⁴⁷ Dans la terminologie grecque ancienne des nombres entiers auxquels on ajoute éventuellement un certain nombre de parts.

¹⁴⁸ Théon expose ces mêmes règles et ajoute : (a, c) ; $(a/2, c/2)$; $(a/2) + (c/2) = b$. *Exposition...*, II, LXI.

est un nombre, c'est que a et c sont semblables ; ils ont donc l'un pour l'autre un rapport de nombre carré (m^2) à un nombre carré (n^2)¹⁴⁹. Par exemple $40/10 = 4/1$ et $45/5 = 9/1$. On peut donc le "partager en deux" et considérer le rapport m/n . D'où $10 \times (2/1) = 20$ et $5 \times (3/1) = 15$ dans nos deux exemples. Dans le cas où les deux nombres ne sont pas semblables, la médiété géométrique n'est pas numériquement déterminable. C'est pourquoi Théon explique comment l'on détermine géométriquement la moyenne géométrique entre deux grandeurs (en fait deux lignes droites)¹⁵⁰. Sa construction est substantiellement identique à celle d'Euclide¹⁵¹.

Enfin pour la médiété harmonique Nicomaque et Théon propose la même règle, assez compliquée¹⁵², que l'on peut transcrire ainsi :

$$(a, c) ; (a-c) ; (a-c).c ; [(a-c).c]/(a+c) ; c + [(a-c).c]/(a+c) = b.$$

Cette règle découle directement de la définition telle qu'elle est donnée par Archytas. Si (a, b, c) constituent une médiété harmonique $a-b$ est donc la même part de a que $b-c$ est de c . Donc la somme de ces excès, $a-c$ est la même part de $a + c$ ¹⁵³. Donc $(b-c)/c = (a-c)/(a+c)$. D'où l'excès $b-c = [(a-c).c]/(a+c)$. D'où b .

La première partie de l'exposé de Pappus est consacrée à la solution de petits problèmes :

- étant données deux droites, déterminer leur moyenne géométrique, harmonique et arithmétique¹⁵⁴.
- étant donnés deux droites déterminer une troisième droite qui soient l'une des deux extrêmes pour que l'ensemble constitue une progression géométrique, harmonique ou arithmétique¹⁵⁵.

La construction de la médiété harmonique peut être citée :

Soient AB, BG deux droites données. On mène DE perpendiculaire à AB en A ; on place $DA = AE$. On joint BD . On élève la perpendiculaire GF à AB en G . On joint FE qui coupe AB en C .

Alors BC est la moyenne harmonique de AB et BG . En effet $AB - BC = AC$ et $BC - BG = CG$. Or $AC/CG = AE/FG = AD/FG = AB/BG$ en appliquant deux fois le théorème de Thalès et en utilisant $DA = AE$. D'où $AC/CG = AB/BG$ ou encore $AC/AB = CG/BC$. Donc $(AB - BC)/(BC - BG) = AB/BG$. Ce qu'il fallait démontrer.

¹⁴⁹ Voir Euclide, *Éléments*, VIII. 26.

¹⁵⁰ L'origine de la théorie géométrique des moyennes est certainement le problème de la duplication du cube tel qu'Hippocrate de Chios l'avait réénoncé : dupliquer le cube de côté a revient à insérer deux moyennes proportionnelles entre a et $2a$. Voir Heath, T. L., *op. cit.*, pp. 244-270. On peut remarquer que c'est après avoir exposé quatre solutions à ce problème d'insertion de deux moyennes géométriques entre deux droites que Pappus introduit son exposé au sujet des médiétés. Sous cette forme, c'est semble-t-il Archytas lui-même qui avait résolu ce problème pour la première fois.

¹⁵¹ *Éléments*, VI. 13. La construction de Pappus (*Coll. math.*, III, XII) est très légèrement différente mais bien entendu équivalente.

¹⁵² Par rapport à celle que l'on pouvait déduire directement de la médiété parfaite (*supra*), du moins aux yeux d'un moderne; on peut la transcrire : $(a, c) ; a.c ; 2ac ; (a + c) ; 2ac/(a+c) = b$. On remarquera que la méthode ancienne est "algorithmiquement" plus simple car chaque étape utilise le résultat de l'étape précédente contrairement à la procédure indiquée ci-dessus. Cette simplicité apparaît clairement si l'on calcule avec des tables ou avec des abaques.

¹⁵³ Voir Euclide, *Éléments*, VII. 5.

¹⁵⁴ Respectivement Prop. 6, 10, 12.

¹⁵⁵ Respectivement Prop. 7 et 8; 9 et 11; 13 et 14.

Grâce à ces petites constructions préliminaires, il peut facilement produire une progression de cinq droites en ordre décroissant (A, B, C, D, E) telles que :

- (A, B, C) soit une progression arithmétique.
- (B, C, D) soit une progression géométrique.
- (C, D, E) soit une progression harmonique.

Il montre ensuite comment construire les trois médiétés dans un demi-cercle avec six droites, car son exposé était motivé par la critique d'une construction des trois médiétés dans un demi-cercle, construction simple que Pappus ne semble pas avoir comprise. La construction euclidienne de la médiété géométrique fait également apparaître la médiété arithmétique; il était donc naturel de vouloir faire apparaître la médiété harmonique sur la même figure.

On abaisse DF perpendiculaire à EB. Alors FB est moyenne harmonique des droites AD, DC.

En effet $FB : BD :: BD : EB$ ou :

$$FB \cdot EB = BD^2 = AD \cdot DC.$$

Comme dans un triangle rectangle un côté de l'angle droit est toujours plus petit que l'hypoténuse, la figure illustre l'ordre croissant que vérifient toujours les trois médiétés : harmonique, géométrique, arithmétique.

L'extension de la théorie

A partir du même rapport des excès "des grands termes et des petits termes" : $(a-b)/(b-c)$, on peut définir trois nouvelles médiétés en prenant pour ce rapport les combinaisons des termes non utilisées pour les trois médiétés fondamentales. On obtient :

- avec c/a : la médiété sous-contraire à l'harmonique. Par exemple [3, 5, 6] ; son nom se justifie peut-être parce qu'à la place de a/c comme pour la moyenne harmonique, on a pris l'inverse. Il n'est pas non plus difficile de voir que si $[a, b, c]$ est une médiété harmonique et que l'on appelle b' la moyenne selon la quatrième médiété $c - b' = b - a$; autrement dit (a, c) et (b, b') ont même moyenne arithmétique.
- avec c/b et b/c on obtient les cinquième et sixième médiétés. D'un point de vue moderne le terme moyen s'obtient en résolvant une équation du second degré¹⁵⁶.

Comme l'indique Pappus pour définir les médiétés "modernes" il fallait introduire la terminologie suivante : étant donnés trois nombres (a, b, c) dans un ordre décroissant, on appellera respectivement premier, deuxième et troisième excédents les nombres $a-b$, $b-c$, $a-c$. Les six premières médiétés épuisent les combinaisons possibles quand on considère le rapport entre les premier et deuxième excédents. D'où six autres médiétés en considérant les rapports $(a-c)/(a-b)$ ou $(a-c)/(b-c)$. Comme je l'ai déjà dit, si l'on prend pour ce dernier rapport celui de a/b , on a $a = b$ et c quelconque, inférieur à a .

¹⁵⁶ Dans le cas de la sixième médiété, on peut dire, pour utiliser la terminologie ancienne de l'application des aires, que la détermination du moyen revient à appliquer a^2 sur $a + c$ avec hyperbole d'un carré.

Nicomaque et Pappus ont choisi chacun quatre des cinq médiétés possibles. Ils ne les exposent pas dans le même ordre ainsi que le montre le petit tableau ci-dessous :

	Nicomaque	Pappus
médiété 7	$(a - c) / (b - c) = a / c$	$(a - c) / (a - b) = b / c$
médiété 8	$(a - c) / (a - b) = a / c$	$(a - c) / (a - b) = a / b$
médiété 9	$(a - c) / (b - c) = b / c$	$(a - c) / (a - b) = a / c$
médiété 10	$(a - c) / (a - b) = b / c$	$(a - c) / (b - c) = b / c$

Il est clair que chaque exposé a sa logique propre, Nicomaque suit un ordre commandé d'abord par les rapports des termes (a/c , b/c puis a/b), ensuite par les rapports entre "excès". Pappus à l'inverse examine d'abord les médiétés formées à partir de $(a-c)/(a-b)$, puis $(a-c)/(b-c)$. Peut-être suivent-ils des sources différentes. Il faut toutefois remarquer que, dans les deux cas, la médiété qui doit logiquement suivre est justement $(a-c)/(b-c) = a/b$, sans intérêt. Cette constatation les a peut-être amené à ne pas chercher plus loin. Cela signifie toutefois ou bien que le petit raisonnement combinatoire qui permet de dénombrer les médiétés, si facile pour nous, leur avait échappé, ou bien que ces médiétés "modernes" avaient si peu d'intérêt qu'ils ne voyaient pas la nécessité d'ennuyer leurs lecteurs plus longtemps avec cela.

Pour conclure cette étude des médiétés, signalons un résultat apparemment aussi élégant qu'inutile : on peut engendrer tous les rapports (numériques) et toutes les médiétés à partir de la progression géométrique qui se voit ainsi conférer le rôle de principe-élément. L'engendrement des rapports est exposé par Nicomaque¹⁵⁷, et Théon¹⁵⁸ qui cite à cet occasion un certain Adraste. Ce dernier aurait complété un travail d'Eratosthène; on sait en effet que ce savant avait écrit un traité *Des Médiétés* en deux livres. Le résultat repose sur la constatation suivante : Si $[a, b, c]$ est une médiété géométrique, $[a+2b+c, b+c, c]$ l'est aussi. En partant de $a = b = c$, on obtient $[4a, 2a, a]$, puis à partir de là $[9a, 3a, a]$, soit le rapport double puis triple... En raisonnant par rapport à "a" on obtient le rapport moitié puis hémiole... On peut à l'inverse et en partant de trois termes en progression géométrique se ramener à une égalité par application successive de la même règle. Pappus reprend ce résultat et le complète en montrant que l'on peut engendrer les différentes médiétés¹⁵⁹ à partir de trois termes donnés en progression géométrique, en formant des expressions linéaires de ces trois termes donnés. A titre d'exemple si $[a, b, c]$ est une médiété géométrique, $[2a+3b+c, 2b+c, b+c]$ est une médiété harmonique. Peut-être obtient-il ainsi facilement des termes satisfaisant à une médiété donnée. Peut-être veut-il simplement tout ramener à la médiété géométrique en s'inspirant de ce qu'il reconnaît comme l'opinion de Platon, que la proportion est un lien entre toutes les choses et toutes les connaissances¹⁶⁰.

¹⁵⁷ *Introduction arithmétique*, I, Chapitre XXIII et II, Chapitres I et II.

¹⁵⁸ *Exposition...*, II, LXI.

¹⁵⁹ Sauf pour la médiété arithmétique et sa septième médiété qui conduit simplement à $a = b + c$ et pour laquelle il n'est pas difficile de déterminer le moyen ou l'un des extrêmes à partir des deux autres termes.

¹⁶⁰ *Coll. math.*, III, XVIII.

Appendice B : l'"invention" des Mathématiques.

Le thème de l'"invention" des mathématiques est, comme nous l'avons déjà dit, un cas particulier de toute une réflexion sur les origines de la science comme composante essentielle de la civilisation. Mais il déborde de ce cadre car le développement d'"enquête historique" dans le cadre du Lycée aristotélicien, et la prise de conscience d'un certain progrès scientifique, d'une certaine accumulation des résultats font qu'une forme d'"histoire des sciences" se développent dès le début de l'époque hellénistique. Les traditions concernant le début des sciences vont s'insérer dans cette problématique qui les dépasse évidemment largement. Le fameux "résumé" de l'histoire de la géométrie, transmis par Proclus et que nous citons un peu plus loin, s'il évoque le début des sciences mathématiques, propose avant toute chose une "archéologie des *Éléments* d'Euclide en insistant sur le rôle joué par l'Académie de Platon. Je crois cependant qu'il ne faut pas perdre de vue l'impulsion initiale pour ce type de recherche historique pour interpréter et juger ces témoignages sur l'invention des sciences. Comme nous l'avons dit il y a deux méthodes : celle qui renvoie à l'activité d'un "inventeur", un εὐρετής, et celle de l'emprunt et du diffusionnisme.

Pour ce qui est de la première "méthode", les candidats à l'invention de techniques telles que l'écriture, le calcul, les dés..., très souvent regroupées ensemble, sont Hermès, Palamède¹⁶¹ et Prométhée. Cette tradition est certainement ancienne et le *Prométhée enchaîné* d'Eschyle nous fournit la version la plus complète car il s'agit de bien mentionner tout ce que les hommes doivent au héros persécuté par un Zeus tyran :

« Écoutez en revanche les misères des Mortels, et comment des enfants qu'ils étaient j'ai fait des êtres de raison, doués de pensée. Je veux le conter ici, non pour dénigrer les humains, mais pour vous montrer la bonté dont leur ont témoigné mes dons. Au début ils voyaient sans voir, ils écoutaient sans entendre, et, pareils aux formes des songes, ils vivaient leur longue existence dans le désordre et la confusion. Ils ignoraient les maisons de briques ensoleillées, ils ignoraient le travail du bois ; ils vivaient sous terre, comme les fourmis agiles, au fond de grottes closes au soleil. Pour eux il n'était point de signe sûr ni de l'hiver ni du printemps fleuri ni de l'été fertile ; ils faisaient tout sans recourir à la raison, jusqu'au moment où je leur appris la science ardue des levers et des couchers des astres. Puis ce fut le tour de celle du nombre, la première de toutes, que j'inventai pour eux, ainsi que des lettres assemblées, mémoire de toutes choses, labeur qui enfante les arts. Le premier aussi, je liai sous le joug des bêtes soumises soit au harnais, soit à un cavalier, pour prendre aux gros travaux la place des mortels, et je menai au char les chevaux dociles aux rênes, dont se pare le faste opulent. Nul autre que moi non plus n'inventa ces véhicules aux ailes de toile qui permettent aux marins de courir les mers...

¹⁶¹ Pour Palamède, inventeur de l'arithmétique, voir Platon, *Resp.*, VII, 522d.

Et ceci surtout : ceux qui tombaient malades n'avaient point de remède ni à manger ni à s'appliquer ni à boire, et, privés de médicaments, ils dépérissaient, jusqu'au jour où je leur montrai à mélanger les baumes cléments qui écartent toute maladie. Je classai aussi pour eux les mille formes de l'art divinatoire¹⁶²...

Et de même les trésors que la terre cache aux humains, bronze, fer, or et argent, quel autre les leur a donc révélés avant moi ? Personne, je le sais - à moins qu'on ne veuille s'abandonner à une sottise jactance. D'un mot, tu sauras tout à la fois : tous les arts aux mortels viennent de Prométhée »¹⁶³.

Les auteurs tragiques du V^e siècle étaient apparemment sensibles à cette dimension "progressiste" de l'acquisition des techniques par les hommes ; Sophocle a lui aussi mentionné l'extraordinaire fertilité des techniques humaines, mais avec moins de détail et dans un esprit différent¹⁶⁴.

Mais c'est la seconde "méthode" qu'a retenue Hérodote dans différents témoignages :

- emprunts aux Egyptiens de la géométrie¹⁶⁵, d'une nomination de douze dieux principaux¹⁶⁶, de la sculpture et de l'architecture sacrées;
- emprunts aux Babyloniens du polos, du gnomon et de la division du jour en heures¹⁶⁷;
- emprunt de l'écriture, des Φοινικεία, aux Phéniciens¹⁶⁸.

Platon nous livre une version mixte puisqu'il choisit un inventeur, mais égyptien :

« Ce que l'on m'a donc conté, c'est que, dans la région de Naucratis en Egypte, a vécu un des antiques dieux de ce pays-là, celui dont l'emblème consacré est cet oiseau qu'ils nommaient l'ibis, et que Theuth est le nom de ce dieu ; c'est lui, me disait-on, qui le premier inventa le nombre et le calcul, la géométrie et l'astronomie, sans parler du tric-trac et des dés, enfin précisément les lettres de l'écriture »¹⁶⁹.

Au demeurant l'emprunt simple ne fait que déplacer le problème de l'origine; pour éviter une régression à l'infini du problème de l'origine, l'autre possibilité consiste à expliquer "sociologiquement" la découverte ou l'invention de ladite technique dans une civilisation donnée ; c'est ce que fait Aristote dans un passage fameux du début de la *Métaphysique* :

« C'est donc à bon droit que celui qui, le premier, trouva un art quelconque, dégagé des sensations communes, excita l'admiration des hommes; ce ne fut pas seulement en

¹⁶² Interprétation des songes, des sons, des rencontres, du vol des oiseaux, de l'aspect des viscères (en particulier de la vésicule biliaire et du foie, du comportement de la flamme dans le sacrifice (dont l'institution est traditionnellement rapportée à Prométhée).

¹⁶³ Eschyle, *Prométhée Enchaîné*, v. 442 -471; 476-484; 500-506. Texte et traduction P. Mazon. Collection des Universités de France, *Tragédies*, 2 vol., Tome I, Paris, Les Belles Lettres, 1931.

¹⁶⁴ *Antigone*, v.332-375. Dans Sophocle, *Tragédies*, 3 vol. Texte et traduction, A. Dain et P. Mazon. Collection des Universités de France, Tome I, Paris, Les Belles Lettres, 1955.

¹⁶⁵ Voir *Histoires*, II. 109, *supra*, pp. 00-00.

¹⁶⁶ Mis en parallèle avec l'invention du calendrier de douze mois et du cycle des saisons par les Égyptiens, toujours selon Hérodote.

¹⁶⁷ Voir *Histoires*, II. 109, *supra*, pp. 00-00.

¹⁶⁸ *Histoires*, V. 58.

¹⁶⁹ *Phædr.*, 274d. Traduction L. Robin, II, p. 74.

raison de l'utilité de ses découvertes, mais pour sa sagesse et sa supériorité sur les autres. Puis les arts nouveaux se multiplièrent, dirigés, les uns vers les nécessités de la vie, les autres vers son agrément; or toujours les inventeurs de ces derniers arts ont été considérés comme plus sages que les autres, et cela, parce que leurs sciences ne tendent pas à l'utilité. De là vient que tous ces différents arts étaient déjà constitués, quand on découvrit ces sciences qui ne s'appliquent ni au plaisir, ni aux nécessités, et elles prirent naissance dans les contrées où régnait le loisir. Aussi l'Égypte a-t-elle été le berceau des arts mathématiques, car on y laissait de grands loisirs à la classe sacerdotale »¹⁷⁰.

Tels sont les éléments du dossier. Il est clair qu'au-delà de la "boutade" platonicienne, le débat se situe entre Hérodote et Aristote. D'un côté la thèse de l'origine pratique et "externe" des mathématiques, à partir des nécessités, de l'autre celle de la naissance des mathématiques dans une société suffisamment développée pour permettre à une classe de disposer de loisirs suffisants pour cultiver une activité désintéressée. Cette alternative, présentée ici de façon quelque peu simpliste, se retrouve sous une forme peu différente dans certaines approches modernes de la question.

La synthèse est d'ailleurs possible et c'est ce que fait Proclus au début de son résumé de l'histoire de la géométrie : il reprend l'explication d'Hérodote sur l'origine de la géométrie, la combine avec une autre, du même type, pour rendre compte de l'origine empirique de l'autre grande branche du savoir mathématique grec, la science des nombres :

« ... c'est chez les Egyptiens que pour la première fois la géométrie a été découverte, selon ce qui est rapporté par le grand nombre, prenant son origine dans la mesure précise des terrains ; car celle-ci leur était nécessaire à cause de l'élévation du Nil qui rendait invisibles les bornes délimitant (les propriétés) de chacun d'eux. Et il n'y a rien d'étonnant à ce que la découverte de cette science et des autres ait pris son origine dans les besoins car tout ce qui est soumis à la génération s'élève de l'inachèvement à la perfection. Et la transition se fait, le cas échéant, avec raison de la perception au raisonnement et de celui-ci à l'intelligence ; de même que c'est assurément chez les Phéniciens, au début à cause du commerce maritime et des contrats (τὰς ἐμπορείας καὶ τὰ συναλλάγματα), que la connaissance précise des nombres (ἡ τῶν ἀριθμῶν ἀκριβῆς γνῶσις) a été trouvée, ainsi, c'est chez les Egyptiens que la géométrie a été découverte pour la cause sus-dite.

Thalès, le premier vint en Égypte et rapporta cette étude dans l'Hellade, et, d'une part, lui-même trouva beaucoup de choses, d'autre part, il donna des indications sur les débuts de beaucoup d'autres à ses condisciples, s'appliquant aux unes d'une manière plus générale, aux autres, de façon plus perceptive...

¹⁷⁰ *Met.* A, 980 a20-982a2.

Après ceux-ci, Pythagore, en ce qui concerne cette même étude libre, en commençant par examiner les principes de celle-ci et en cherchant les théorèmes immatériellement et intellectuellement ... »¹⁷¹.

Il n'est pas question de trancher ce qui apparaît comme un débat philosophique ; je me contenterai d'observer qu'il emprunte ses catégories aux Grecs, et qu'en fait, dans les textes de Platon¹⁷², d'Aristote¹⁷³, et de Proclus¹⁷⁴, nous trouvons, non des témoignages historiques sur les débuts des sciences — au sens que nous donnons à "témoignage" —, mais des élaborations idéologico-philosophiques ; celles-ci cherchent à définir une image de la science grecque dans ses rapports avec la philosophie et la politique, à promouvoir un idéal de *science désintéressée*, en contraste avec ce que les Grecs savaient ou plutôt croyaient savoir des sciences dans les civilisations du Proche-Orient.

Ces constructions sont peut-être toutes aussi imaginaires que celles du "juif philosophe" ou du "mage zoroastrien" qu'a bien démontées A. Momigliano¹⁷⁵. Ce qui ne veut évidemment pas dire qu'elles sont sans signification ! Leur façon de situer les mathématiques est solidaire d'une position philosophique (théorie des Idées séparées dans la *République* de Platon ; refus de cette position doctrinale et "théorie de l'abstraction" chez Aristote), d'une analyse socio-politique (en général très conservatrice) menée en vue d'une visée pédagogique et réformatrice.

Ainsi les mathématiques n'ont pu se développer que parmi des hommes de loisir selon Aristote, pour qui la Cité vise le bien-vivre et le loisir des citoyens¹⁷⁶ et non, comme l'affirment Platon et Proclus, pour répondre à des besoins ; pour la tradition platonicienne, tant la cité que les sciences sont filles de la nécessité. Pour Aristote, l'origine de la science en tant que telle est l'*étonnement* et non le besoin, étonnement devant les merveilles dont la compréhension ne peut servir à rien mais qui est à elle-même sa propre fin - ce qui est la définition de la liberté¹⁷⁷ ! La science commence donc avec les Grecs et avec la recherche philosophique des premières causes et des principes de toutes choses, initiée par Thalès. Ce n'est pas un hasard si les prêtres égyptiens sont crédités de l'invention des *arts* mathématiques (αἱ μαθηματικαὶ τέχναι) et non de la *science* mathématique.

Proclus tente d'articuler un point de départ platonicien avec une théorie de la connaissance quelque peu teintée d'aristotélisme. Son "résumé" - du moins le début- apparaît comme une formulation historique correspondant à la synthèse des analyses "logiques" de

¹⁷¹ Proclus, *Comm. in Eucl. I*, pp. 64.16-70.18. Il s'agit du seul texte à prétention historique sur les mathématiques que les anciens Grecs nous ont laissé. Ce "résumé" de l'histoire de la géométrie — en fait une "généalogie" des *Éléments* d'Euclide dont Proclus va commenter le premier livre — a longtemps été considéré comme puisé en grande partie chez Eudème de Rhodes, disciple immédiat d'Aristote, et qui avait rédigé des *Histoires arithmétiques, géométriques et astronomiques*. Des études récentes pensent qu'il pourrait se rattacher plutôt à une tradition académique de l'histoire des mathématiques. Voir F. Lasserre, *De Léodamas de Thasos à Philippe d'Oponte : Témoignages et Fragments*. Naples, Bibliopolis, 1987.

¹⁷² Voir *Resp.* VII, 522 c-531 e ; *Legg.*, 747 b6 - c7.

¹⁷³ Voir l'ensemble des trois premiers chapitres de *Met.* A, 980 a20-983 b 20.

¹⁷⁴ Réf. *supra*, n. 00.

¹⁷⁵ *Sagesses barbares*.

¹⁷⁶ Voir *Pol.* A, 2,1252b28-1253a3.

¹⁷⁷ Voir *Met.* A, 982 b10-30.

Platon et d'Aristote¹⁷⁸ : besoins et nécessités sont à l'origine des mathématiques comme de la civilisation chez les Barbares : arpentage et géométrie chez les Egyptiens, commerce et arithmétique chez les Phéniciens. La figure de Thalès sert d'"intermédiaire"; sa méthode est hybride : mi grecque et universelle/ mi-barbare et perceptive. Enfin Pythagore consomme la rupture définitive en faisant des mathématiques une théorie "pure" quant à leurs méthodes, et une étude libérale quant à son but : l'éducation de l'homme libre. La série Barbares / Thalès / Pythagore est parallèle à la hiérarchie gnoséologique aristotélicienne : perception / raisonnement / intellect.

Ainsi l'opposition entre mathématiques pures et désintéressées d'une part, et mathématiques "appliquées" d'autre part, l'éminente supériorité des premières sur les secondes trouvent naturellement leurs places dans les sociétés divisées de la Grèce ancienne, aussi bien les cités réelles, le monde issu de la conquête d'Alexandre, que la société tripartite de la Cité idéale : les statuts des activités intellectuelles, leur hiérarchie, recouvrent ceux des protagonistes sociaux. Les textes de Platon, d'Aristote et de Proclus articulent à peu près la même position : ils justifient l'intérêt d'une science désintéressée, qui dans le cas des mathématiques s'applique à des objets *idéaux*. Ils lui accordent une place élevée dans la hiérarchie des activités humaines qu'ils élaborent par la même occasion, place néanmoins subordonnée et propédeutique à la philosophie. Ceci s'opère à partir d'oppositions polaires traditionnelles : Grecs/ Barbares ; sensible / intelligible ; devenir / être ; mathématiques préhelléniques / mathématiques grecques. Cet enracinement idéologique du discours grec sur l'origine de la science étant ainsi mis en évidence, je ne crois pas que l'on puisse reprendre cette construction comme un témoignage documenté sur le début des sciences sans s'interroger sur sa finalité et sa validité.

II

Dans cette seconde partie je me propose d'aborder deux points :

- (a) Que peut-on dire de la terminologie retenue pour désigner les deux égalités ou les deux médiétés ?
- (b) L'égalité est-elle un concept constitutif des mathématiques ?

La terminologie

Pour ce qui est de la terminologie il faut distinguer deux problèmes :

- d'une part une question interne aux mathématiques ;
- d'autre part il y a la question de l'application de la théorie mathématique à la politique ;

¹⁷⁸ Encore qu'Aristote prétend parfois utiliser le témoignage de l'histoire pour conforter sa thèse sur l'histoire des sciences : selon lui tous les besoins étaient assurés quand les premières recherches scientifiques furent entreprises. *Met. A*, 982 b 22-24.

Les adjectifs "arithmétique" et "géométrique" renvoient d'abord à une certaine partition des études mathématiques; les mathématiques grecques sont loin d'être un domaine unifié, j'aurai l'occasion d'y revenir en examinant le second point; même en se limitant aux mathématiques théoriques, l'unité en est assez problématique :

« Les mathématiques ont pour objet la quantité (τὸ ποσόν) », affirme Aristote, « par exemple les lignes, les angles ou les nombres ou quelque autre quantité, non en tant qu'êtres, mais chacune d'elles comme continu à une ou deux ou trois (dimensions) »¹⁷⁹.

Mais la catégorie de la quantité présente deux espèces exclusives :

- La quantité discrète : la multitude (πλήθος πόσον ἀριθμήτων - μὴ συνεχῆ)¹⁸⁰, par exemple le nombre ou le discours¹⁸¹.
- La quantité continue : la grandeur (μέγεθος δὲ μετρητόν - συνεχῆ)¹⁸² ; par exemple la ligne, la surface, le solide, le temps, le lieu¹⁸³.

Cette dualité de la quantité recoupe l'opposition arithmétique / géométrie. Le premier problème est donc de savoir pourquoi on a choisi ces deux termes pour désigner deux procédures de détermination d'un moyen terme, procédures qui s'appliquent aussi bien aux nombres qu'aux lignes droites¹⁸⁴. Toutefois la médiété existe toujours dans le domaine des grandeurs¹⁸⁵ alors que, dans le domaine des nombres, on ne peut la déterminer que pour deux nombres plans semblables¹⁸⁶ : deux nombres **m** et **n** sont plans s'ils s'écrivent sous forme de produit, **m = a.b** et **n = c.d** ; ils sont dits semblables si leurs "côtés" sont proportionnels (**a : b :: c : d**). Ainsi, même dans le domaine numérique, la moyenne géométrique est associée avec des propriétés liées à la "forme" des nombres : deux nombres plans semblables peuvent être figurés par des rectangles de même forme.

Pour la médiété arithmétique la dissymétrie est moins grande : si elle est tout à fait simple à déterminer dans le cas de deux lignes, il faut que les deux nombres aient même parité pour que le résultat soit entier. Sinon des moitiés s'introduisent, mais la procédure reste très simple¹⁸⁷; Nicomaque donne deux exemples de détermination des trois médiétés, pour 10 et 40 (deux pairs), pour 5 et 45 (deux impairs), bien que la distinction n'ait d'importance que pour la médiété arithmétique et bien qu'il constate que la procédure soit la même dans les deux cas¹⁸⁸.

¹⁷⁹ *Métaphysique*, K, 1061 b 23- 25.

¹⁸⁰ *Idem* Δ, 1020 a 8-11.

¹⁸¹ *Catégories*, 4 b 23-24.

¹⁸² *Métaphysique*, Δ, 1020 a 8-11.

¹⁸³ *Catégories*, 4 b 23 - 24.

¹⁸⁴ Dans le cas de droites on parle de moyenne, "μέση", plutôt que de médiété. Voir Appendice A.

¹⁸⁵ Voir Euclide, *Éléments* VI, 13 pour le cas des lignes droites : il suffit de remarquer que dans un triangle rectangle, la hauteur relative à l'hypoténuse est moyenne géométrique entre les segments qu'elle découpe sur l'hypoténuse, et qu'un triangle rectangle est inscrit dans le demi-cercle ayant pour diamètre cette hypoténuse.

¹⁸⁶ Voir Euclide, *Éléments*, VIII. 18 et 20.

¹⁸⁷ Voir Nicomaque de Gérase, *Introduction arithmétique*, II, Chapitre XXVII, 2-7, et notre Appendice A.

¹⁸⁸ Cela est justifié par le fait que le Pair et l'Impair sont, pour un néo-pythagorien, les divisions fondamentales du nombre ; voir Nicomaque de Gérase, *op. cit.*, I, chapitre VII.

Si on admet que la terminologie était fixée pour les deux premières médiétés (elle avait certainement fluctué pour la troisième¹⁸⁹), dans leur application à la théorie des deux égalités. il n'y avait guère le choix; les textes platoniciens et aristotéliens montrent une certaine variation dans les dénominations; pour l'égalité "géométrique", on peut penser que l'expression « κατ' ἀξίαν » l'ait précédée, avant la mise en place du "modèle mathématique". Elle s'opposait certainement à l'égalité par le nombre (ἀριθμῶ), laquelle ne pouvait être associée, en politique, qu'avec la tendance démocratique, et, en particulier, avec l'élection par tirage au sort généralisé.

Chez Hérodote, dans la fameuse discussion des trois régimes, le gouvernement populaire est celui où commande "τὸ πλῆθος"¹⁹⁰; le terme est utilisé en mathématique pour la quantité non déterminée par opposition à "ἀριθμός", et, chez Euclide, dans son "métalangage", pour signifier une "certaine quantité de nombres". Selon W. Burkert¹⁹¹ "ἀριθμός" et "πλῆθος" s'opposent, dès Homère, comme ce qui compte et ce qui ne compte pas — ce qui n'est pas comptable; dans ce contexte, essentiellement militaire, "ἀριθμός" a une valeur aristocratique ! On voit quel renversement sémantique le développement des pratiques et des institutions démocratiques a provoqué ! Pour la période qui nous intéresse on peut donc dire que, négativement, par leur "opposition" au nombre, "mérite" et "géométrie" se trouvaient liés.

Mais il se peut aussi que des raisons plus positives aient contribué à ce rapprochement. Ainsi Nicomaque associe l'égalité par différence dans la quantité avec la médiété arithmétique — cela va de soi — et l'oppose à l'égalité dans la qualité (à savoir le rapport), associée à la médiété géométrique. En revanche la médiété harmonique, dit-il, n'est liée ni à une différence de quantité, ni à une différence de qualité¹⁹²; en fait elle prend en compte les deux aspects et c'est même cela qui justifierait son nom, selon Nicomaque (certainement avec l'idée qu'une harmonie est l'union de choses contraires).

Quoi qu'il en soit, l'opposition arithmétique\géométrique rencontrerait alors la distinction aristotélienne quantité / qualité (τὸ ποσόν / τὸ ποιόν), laquelle, on le sait bien, est nettement marquée dans la langue grecque¹⁹³. Il est vraisemblable que Nicomaque ait été influencé par Aristote et, en tant que néo-platonicien, il ne peut méconnaître la théorie des deux égalités. Il faut donc revenir à Aristote pour examiner ce lien hypothétique entre les oppositions arithmétique \ géométrique d'une part, et quantité \ qualité d'autre part. En se greffant sur l'analyse politique des philosophes de l'époque classique, fondamentalement dualiste, ce lien pourrait expliquer partiellement pourquoi la troisième médiété n'a certainement pas été appliquée à l'époque classique¹⁹⁴.

¹⁸⁹ Voir Appendice A.

¹⁹⁰ Voir *Histoires*, III, 80;25. 81;4. 82;2.

¹⁹¹ Voir Burkert, W., *Lore and Science*, 266.

¹⁹² . Pour la médiété géométrique, voir Nicomaque de Gérase, *op. cit.*, II, chapitre XXIII, 4. Pour la médiété harmonique, *idem*, chapitre XXV, 5.

¹⁹³ Voir E. Benveniste, *Problèmes de linguistique générale*, I, ch.VI "Catégories de pensée et catégories de langue". Réimp. Paris, Gallimard, coll. TEL, 1981, en particulier 66-7.

¹⁹⁴ En revanche Nicomaque (*op. cit.*, II, ch. XXIII, 6) associe égalité, excès et défaut avec les médiétés géométrique, arithmétique, et harmonique, en considérant les rapports entre, d'une part, les deux plus petits termes, d'autre part, les deux plus grands ; c'est l'"analyse mathématique" sous-jacente à la forme tardive du Pseudo-

Pour Aristote la qualité "se dit aussi des nombres — non ceux en une seule dimension — mais ceux qui imitent les surfaces et les solides"¹⁹⁵. En effet, tant dans l'"arithmo-géométrie" figurée de l'école pythagoricienne¹⁹⁶ que dans la tradition euclidienne, certaines propriétés des nombres sont explicitées de manière géométrique : nombres triangulaires, carrés, hétéromèques...nombres plans, solides, semblables... D'ailleurs la qualité comprend la forme (μορφή) et la figure (σχῆμα), par exemple le triangulaire, le quadrangulaire, le droit et le courbe¹⁹⁷.

Dans l'analyse des caractéristiques spécifiques à la quantité et à la qualité, Aristote affirme que :

- l'égal et l'inégal appartiennent en propre à la quantité¹⁹⁸, mais non le plus et le moins¹⁹⁹.
- le plus et le moins appartiennent à certaines qualités mais pas à toutes, en particulier pas à la forme.
- en revanche, semblable et dissemblable ne se disent que des qualités²⁰⁰.

Cette dernière caractéristique s'applique bien évidemment aux formes : la similitude, notion cardinale de la géométrie grecque, est un autre point de contact entre la science des figures et la qualité. Or "ὁμοιότης", avec le sens de similarité, voire d'identité, appartient comme "ἴσοτης" au vocabulaire de la réflexion politique. Les discussions du Ve siècle, que j'ai déjà évoquées à propos de l'opposition « νομός / φύσις », ont certainement eu comme conséquence une différenciation plus marquée entre des termes comme "ὁμοίον" et "ἴσον"; selon Proclus qui suit peut-être Eudème de Rhodes, Thalès, à la manière ancienne (ἀρχαιώτερον)²⁰¹, décrivait les angles égaux (τὰς ἴσας γωνίας) comme semblables (ὁμοίως)²⁰². Le cas des angles est assez intéressant car, d'une part, si des figures sont semblables elles ont des angles correspondants égaux²⁰³, et, d'autre part, savoir si on va dire que les angles sont égaux ou semblables ou identiques suppose que l'on ait tranché l'épineuse question de la nature de l'angle : grandeur (quantité) ou qualité ("anguleux") ou relation entre droites... On sait, d'après Proclus²⁰⁴, qu'il y eut un long débat à ce sujet.

Archytas et de Boèce, mais aussi bien déjà formulée en terme d'intervalle par Archytas (DK 47 B2). Voir Appendice A. Cela n'empêche d'ailleurs pas Nicomaque de reconnaître la primauté de la médiété arithmétique sur les deux autres, au nom de la supériorité de la science homonyme, l'Arithmétique sur la Géométrie et l'Harmonique (*Id.*, chapitre XXII, 3).

¹⁹⁵ *Métaphysique*, Δ, 1020 b2-5.

¹⁹⁶ Pour l'"arithmo-géométrie" pythagoricienne, voir Burkert, W., *op. cit.*, 427-47 et Caveing M., *La constitution du type mathématique de l'idéalité...*, II; chapitre IV section 3, 845-85.

¹⁹⁷ *Catégories*, 10 a11-16.

¹⁹⁸ *Id.*, 6 a32 -33.

¹⁹⁹ *Id.*, 6 a20 -25 ; il y a désaccord avec les Platoniciens pour qui le plus et le moins sont certainement les deux espèces de l'inégalité.

²⁰⁰ *Id.*, 11 a5-15.

²⁰¹ S'il est douteux qu'Eudème (et à fortiori Proclus) ait disposé d'informations sur la terminologie de Thalès, il est possible que l'auteur des *Histoires* ait rencontré cette terminologie dans des textes "anciens".

²⁰² Proclus, *op. cit.*, 250.22-251.2.

²⁰³ Et réciproquement dans le cas des triangles. Voir Euclide, *Éléments*, VI, prop. 4.

²⁰⁴ *Op. cit.*, commentaire à la définition VIII.

Usages mathématiques, réflexion épistémologique et philosophie politique se rencontrent donc dans cette double série:

arithmétique / géométrie

nombres / figures

égal / semblable

quantité / qualité

ἰσοτήϑ / ὁμοιοτήϑ.

L'Égal et l'Égalité sont des concepts fondamentaux pour l'épistémologie néopythagoricienne de Nicomaque²⁰⁵ : l'égalité est l'Élément de la quantité relative auquel tout se résout²⁰⁶. En s'appuyant sur Platon et Philolaos, Nicomaque explicite une sorte de "table des opposés" :

Égalité / Inégalité;

Identité / Altérité;

Limité / Illimité;

Défini / Indéfini;

Pair / Impair;

Unité / Dyade;

Carré / Hétéromèqne²⁰⁷.

Mais on doit remarquer que les mathématiciens n'utilisent pas le substantif "ἰσοτήϑ" avant l'Antiquité tardive : aucune mention chez Euclide, Archimède, Apollonios, ni dans les fragments mathématiques plus anciens; la seule mention du terme dans les fragments des Présocratiques est celle d'Archytas (DK47B3), sur le rôle conciliateur du calcul²⁰⁸. Il faut chercher dans les textes de Pappus²⁰⁹ et de Proclus²¹⁰ pour trouver la mention de l'égalité de deux figures dans un contexte mathématique mais qui relève du commentaire. La situation est différente pour "ὁμοιοτήϑ", nous y reviendrons.

Dans un sens technique on trouve "ἰσοτήϑ" (ou "ἴσωςιϑ") pour désigner ce que nous appelons "équation" seulement chez Diophante; il utilise aussi « διπλή ἰσοτήϑ » ou « ἴσωςιϑ διπλοῖ ἰσοτήϑ » pour double équation : ce que nous appelons "système"²¹¹. On sait qu'un débat divise les commentateurs modernes sur l'existence ou non d'une algèbre dans les textes mathématiques grecques, en particulier dans le Livre II des *Éléments* d'Euclide et dans le

²⁰⁵ La quantité se divise en égalité -elle-même indivise- et en inégalité dont Nicomaque distingue dix formes (*Op. cit.*, I, Ch.XVII,2-4).

²⁰⁶ *Op. cit.*, II, Ch.I, 1 et Appendice A.

²⁰⁷ *Op. cit.*, II, Ch. XVIII, 3-4. On sait qu'Aristote attribue une telle table de dix oppositions aux Pythagoriciens : « D'autres, parmi ces mêmes philosophes (les pythagoriciens), reconnaissent dix principes, qu'ils rangent en deux séries parallèles : Limite et Illimité, en Repos et Mû, Impair et Pair, Rectiligne et Courbe, Un et Multiple, Lumière et Obscurité, Droit et Gauche, Bon et Mauvais, Mâle et Femelle, Carré et Oblong ». (*Métaphysique*, A, 5, 986 a21); l'Égalité/Inégalité n'y figure donc pas, mais ce type de tables a eu beaucoup de succès à l'époque hellénistique puis romaine ; certaines mentionnent Egal / Inégal ou Égalité / Inégalité. Voir Burkert, W., *op. cit.*, 51-52 et n.119.

²⁰⁸ Pour DK47B3, voir *supra*.

²⁰⁹ Par exemple *Collection Mathématique*, VIII,11. (III^e siècle de notre ère) ;

²¹⁰ *Op. cit.*, 313 ; 421. (V^e siècle de notre ère).

²¹¹ Voir par ex. *Arithmétiques*, IV, 39.

traitement des coniques par Apollonius. Bien entendu il ne peut s'agir de l'étude des structures, l'algèbre au sens moderne du terme, mais simplement de l'étude d'équations et d'identités algébriques. La question est délicate, mais on peut penser que l'"archéologie de l'algèbre" consiste à repérer les différentes étapes de la thématization de l'égalité. En ce sens, et bien plus que pour l'usage d'abréviations nombreuses, Diophante pourrait être considéré comme l'"inventeur" de l'algèbre — entendue comme manipulation d'égalités — du moins dans l'état actuel de nos sources.

Remarquons, pour conclure ce premier point, que si les mathématiciens font grand usage d'"ἴσον" et non d'"ἴσοτης", ce dernier terme appartient au vocabulaire politique et philosophique. Voilà qui nous amène au second point :

L'égalité dans les mathématiques

Dans l'enquête sur les "métaphores" mathématiques ou calculatoires de la première partie, le mot même de métaphore supposait que le "territoire d'origine" des notions en question était la mathématique; ceci est certainement vrai de l'analyse aristotélicienne qui explicite cet emprunt et constitue donc une sorte d'effet en retour de ce que l'on a observé depuis longtemps à propos de la réflexion présocratique sur la φύσις pour laquelle c'est plutôt la pensée politique (entre autres) qui a fourni des modèles. Toutefois dans le cas de l'égalité je crois qu'il faut être prudent avant d'affirmer qu'il s'agit d'une notion mathématique universelle; ce serait certainement céder à une illusion imposée par la forme qu'ont prise les mathématiques modernes sur lesquelles — pour procéder par comparaison — il me faut dire un mot :

« Les propositions des mathématiques sont des équations... Lorsque deux expressions sont reliées par le signe d'égalité, cela veut dire qu'elles sont mutuellement remplaçables. Mais que ceci soit le cas, c'est ce qui doit se reconnaître dans les deux expressions mêmes... La méthode des mathématiques pour en arriver à leurs équations est la méthode de substitution. Car les équations expriment la substituabilité de deux expressions et nous progressons d'un nombre d'équations à de nouvelles équations, en remplaçant des expressions par d'autres, conformément aux équations »²¹².

Cette position de Wittgenstein est évidemment extrême, mais reflète bien deux traits essentiels des "mathématiques modernes" :

— l'importance de l'algèbre et des équations, y compris dans des domaines comme le calcul différentiel ou la mécanique²¹³.

²¹² L. Wittgenstein, *Tractatus logico-philosophicus*. § 6.2, 6.23, 6.24. Traduction P. Klossowski. Paris, Gallimard, 1961.

²¹³ Théories initialement développées sous une forme géométrique. Leur "algébrisation" a été faite seulement au XVIII^e siècle.

— le développement d'un langage symbolique et la formalisation de plus en plus poussée des théories et des énoncés²¹⁴.

L'égalité y renvoie au signe "=" et n'est qu'une abréviation d'un cas particulier de l'identité, laquelle serait "dissimulée" par la non-univocité des notations²¹⁵.

Observons que si cette description est partiellement adéquate pour l'usage de l'égalité en arithmétique, en algèbre ou en analyse, les choses sont différentes en géométrie; selon A. Tarski²¹⁶, "égal" y est utilisé en plusieurs sens:

- l'identité, quand nous disons en géométrie élémentaire que dans le triangle isocèle la hauteur et la médiane relatives à la base sont égales.
- la congruence, c'est-à-dire le fait que deux figures peuvent coïncider en déplaçant l'une pour l'amener sur l'autre. La congruence est définie d'abord pour les segments et les angles, puis pour les triangles, et étendue ensuite aux autres figures²¹⁷.
- l'égalité en grandeur, laquelle suppose assignée des nombres aux figures ou des caractéristiques susceptibles de mesure : longueur, aire, volume. On dira par exemple que deux triangles qui ont la même surface sont égaux.

On voit qu'il serait facile de faire disparaître ces ambiguïtés en réservant "égal" à l'identité, et en lui substituant "congruent" et "équivalent en mesure" respectivement pour les sens 2 et 3. Nous verrons que ces deux sens de "égal" coexistent dans la géométrie grecque; l'homonymie peut s'expliquer par le fait que, d'une part, dans le cas de longueur les deux sens coïncident (à condition d'effectuer les mesures avec une même unité évidemment !), d'autre part ces deux relations ont un certain nombre de propriétés formelles communes :

- Toute figure est équivalente en grandeur ou congruente à elle-même.
- Si une figure A est équivalente en grandeur ou congruente à une figure B, B est équivalente en grandeur ou congruente à A.
- Si A est équivalente en grandeur ou congruente à B et que B est équivalente en grandeur ou congruente à C, alors A est équivalente en grandeur ou congruente à C.

Autrement dit ce sont des cas particuliers de ce qu'on appelle relation d'équivalence; une telle relation peut toujours se définir sous la forme "avoir même... que ..."; autrement dit, il s'agit d'une "identité" relative à un aspect particulier : "même taille que ..."; "même fortune que ..."; par exemple la relation de congruence peut se dédoubler en deux relations de ce type : "avoir même forme que ..." et "avoir même grandeur que ...", ou encore "être semblable à ..." et "être équivalente en grandeur à ...".

²¹⁴ La formalisation des mathématiques était une question fondamentale à la fin du XIX^e et au début du XX^e siècles. Le *Tractatus* de Wittgenstein est lui-même une contribution importante à la réflexion sur l'importance du symbolisme. Dans ses écrits ultérieurs, Wittgenstein a considérablement infléchi son point de vue.

²¹⁵ Voir L. Wittgenstein, *Op. cit.*, § 6.23.

²¹⁶ *Introduction à la logique*, 3^e éd. Trad. J. Tremblay. Paris, Gauthier-Villars. 1971, 55-7.

²¹⁷ Voir D. Hilbert, *Grundlagen der Geometrie*, traduction P. Rossier, Chapitre I, § 5.

Mais qu'en est-il dans le cadre des mathématiques anciennes ? Rappelons que si "égal", "semblable", "similitude" sont bien attestés dans les mathématiques grecques, il faut émettre des réserves pour ce qui concerne "égalité". Qu'importe, dira-t-on, que la notion ne soit pas nommée, puisque, avec "ἴσος", elle est pratiquée. Pourtant il faut insister sur deux points :

- 1) à ma connaissance il n'y a aucun terme pour désigner l'égalité comme relation dans les mathématiques égyptiennes et babyloniennes.
- 2) la situation est quasiment identique pour toute une partie des mathématiques grecques, celle que, par commodité, j'appellerai "logistique".

Il me faut ouvrir ici une parenthèse : lorsque l'on parle des mathématiques grecques on n'envisage très souvent que la partie "théorique" de celles-ci, pour le dire de manière abrégée le quadrivium pythagoricien : arithmétique, géométrie, astronomie, musique²¹⁸, dans lequel, déjà, la diversité est grande. L'astronomie peut désigner soit des connaissances élémentaires sur le lever et le coucher des astres, le calendrier et les saisons, soit des notions mathématiquement plus élaborées concernant les mouvements réels et apparents du soleil, de la lune ou des planètes; sa partie strictement mathématique est parfois appelée Sphérique en raison des hypothèses de sphéricité de la terre et du cosmos émises à partir du V^e siècle. De même la musique signifie ici la théorie des intervalles musicaux, en particulier la détermination numérique des intervalles consonants; on l'appelle aussi Canonique.

Doit-on exclure des mathématiques, sans enquête préalable, l'arithmologie philosophique dans la mesure où elle ne correspond pas à notre idée d'un développement scientifique, mais qui est pourtant bien attestée dans la tradition pythagoricienne au point que certains commentateurs réduisent la contribution mathématique des premiers Pythagoriciens (Pythagore, Philolaos...) à cette spéculation sur les nombres²¹⁹ ?

Mais surtout il y a en Grèce, et bien ailleurs qu'en Grèce²²⁰, une autre tradition mathématique, par contraste avec laquelle les mathématiques démonstratives apparaissent plutôt comme l'exception que comme la règle. L'orientation fondamentalement géométrique des mathématiques démonstratives grecques ainsi que leur mode d'exposition caractéristique sont bien connus dans la mesure où elles sont devenues un modèle auquel les mathématiques occidentales sont restées plus ou moins fidèles.

Les caractéristiques de cette autre tradition mathématique sont moins connues ou souvent mal interprétées. Il faut dire que nos sources pour son étude sont principalement scolaires et comportent deux types de documents : des tables (tables de carrés, d'inverse, de décomposition de fractions...) et des recueils de problèmes dont la résolution est proposée par une suite d'"instructions élémentaires" dont l'ensemble constitue une procédure à effectuer.

²¹⁸ Voir Platon, *Hippias Mineur*, 366a-368c ; *République*, 522c-531c . Archytas, DK47B1.

²¹⁹ C'est à peu près la position de W. Burkert, en réaction avec la surévaluation fréquente de l'apport scientifique de Pythagore.

²²⁰ En Égypte et en Mésopotamie ; en Chine "ancienne" (avant le XVI^e siècle et l'introduction des mathématiques occidentales par les Jésuites, en particulier Euclide et Archimède), en Inde et en Grèce, dans la tradition "logistique".

Dans les textes eux-mêmes, il n'y a pas de justifications des procédures²²¹. La présentation des problèmes est souvent artificiellement concrète²²². Si l'on juge ces mathématiques en fonction des objets auxquels elles se réfèrent, leur origine comptable, métrologique ou rituelle reste très perceptible (partages proportionnels, calculs d'intérêt, de longueurs, de surfaces, de volumes, problèmes d'ombres, construction d'autels...). Pour une certaine histoire des sciences, ceci confinait ces mathématiques au rang de simples recettes pratiques d'origine empirique. Cette présentation affecte souvent la forme d'une "devinette"²²³; parfois la question n'est même pas énoncée ce qui a donné lieu à d'interminables discussions sur la part orale d'enseignement que cela suppose.

On voit que la nature de nos sources²²⁴ pour cette tradition mathématique exclut toute comparaison simpliste avec les traités originaux des mathématiques démonstratives. La tradition "logistique" grecque est constituée de papyrus scolaires²²⁵, de petits problèmes versifiés et posés sous forme de devinette²²⁶, et de traités considérés en général comme relevant des mathématiques "appliquées". Un corpus entier de tels ouvrages nous a été transmis sous le nom de Héron d'Alexandrie²²⁷, quoiqu'ils ne soient certainement que des compilations byzantines, à l'exception des *Métriques*, considérées comme authentiques.

La tradition héronienne n'ignore pas la "grande tradition géométrique", en particulier Euclide et Archimède, mais exception faite des *Métriques*²²⁸ et des recueils de définitions qui procèdent plus ou moins d'Euclide et de ses commentateurs, les énoncés qu'on y trouve appartiennent bien à cette tradition "logistique" pour laquelle résoudre un problème c'est effectuer "rituellement" une suite de calculs.

²²¹ En Inde et en Chine, des commentaires peuvent fournir des explications sur les procédures. Celles-ci sont d'ailleurs très rarement formulées de façon générale; ce sont les Modernes qui les isolent à partir des exemples que les textes anciens nous livrent. Ce qui fait croire que ces procédures pouvaient néanmoins avoir un statut d'"objet" mathématique, c'est que, dans certains documents, l'enchaînement des problèmes est fonction des types de procédures mises en oeuvre dans les solutions.

²²² Calcul de "champs" de quelques pas ou résultats en "fractions d'hommes" : il s'agit de problèmes qui visent à enseigner le calcul des fractions et des proportions. L'affabulation est un prétexte "pédagogique" : il suffit d'ouvrir un manuel contemporain pour voir que les choses n'ont pas beaucoup changé de ce point de vue !

²²³ Faut-il mettre cette forme en rapport avec l'évaluation très positive que portent ces différentes cultures (peut-être à l'exception de la Chine) sur l'activité mathématique comme savoir difficile (Éloge du roi sumérien Shulgi ou d'Assourbanipal) ou comme savoir de ce qui est caché (introduction du papyrus Rhind). De ce point de vue une telle activité s'élève (ainsi que l'écriture et les autres techniques liées à l'appareil administratif) à un certain "désintéressement" puisque socialement valorisante par elle-même. La "devinette" ou l'"énigme" est la forme ancienne du "problème" que le mathématicien propose à ses pairs comme un défi, pratique attestée d'Archimède (voir la préface au traité *Sur les Spirales*, Mugler, 8-9) à Fermat et Euler au moins.

²²⁴ Celle-ci est peut-être en partie aussi la cause de l'apparente stabilité des méthodes utilisées par cette tradition mathématique, stabilité à laquelle il est facile d'opposer le développement rapide et cumulatif des mathématiques démonstratives grecques, par exemple entre 400 et 150 avant J.C.

²²⁵ J'ai consulté : Papyrus Michigan iii 145 et 146 (n°621 et 4966); P. S. I. VII 763, 186; Pap. SB III 6951 de l'Université de Gand. Tablettes métrologiques du Louvre AF 1196, 1197 et MND 552 I et K. Et surtout le Papyrus d'Akhmîm, comprenant des tables et une collection d'une cinquantaine de problèmes.

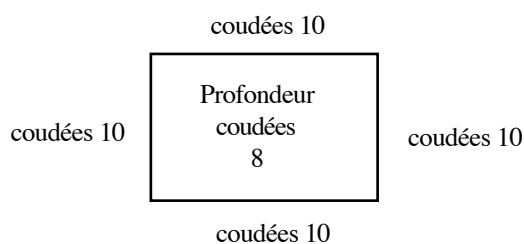
²²⁶ *Anthologie Palatine*, livre XIV : 45 petits problèmes.

²²⁷ *Définitions; Geometrica; Stereometrica* I, II, *De Mensuris*. Voir Héron d'Alexandrie; *Œuvres*, Tomes III, IV, V. Sur les questions d'authenticité voir Heath, T. L., *A History of Greek Mathematics*, II, 316-344.

²²⁸ Voir Héron d'Alexandrie; *Œuvres*, Tome III. Et le Codex Constantinopolitanus.

Dans les papyrus scolaires que j'ai examinés ainsi que dans les épigrammes de l'*Anthologie Palatine*, je n'ai trouvé aucune mention d'"ἴσος" ni d'"ὁμοίος". Dans les fragments du corpus héronien compilés dans le Codex Constantinopolitanus²²⁹ je n'ai trouvé que deux mentions de "ἴσον" : "τῶν ἴσον πλευρῶν" pour désigner les côtés obliques du triangle isocèle par opposition à la base²³⁰; « Trouver un rectangle de périmètre égal à un domaine donné et d'aire quadruple de l'aire (du domaine) »²³¹. Et ce sur, en tout, trois ou quatre cents problèmes. Dans les solutions, le résultat d'une opération n'est jamais énoncé comme "égal" à quelque chose. Une opération est proposée et on dit : « il est produit (γίγνεται)²³² ...tant » ». Les réponses aux questions précises du problème : « quelle est l'aire de...? », « Calcule la diagonale de... » sont données sous la forme : « autant que cela (τοσοῦτον) est ... ». Dans le cas de problèmes "géométriques" (grenier, fosse, pyramide...) l'égalité éventuelle d'éléments de la figure est inscrite numériquement sur un schéma ou donnée comme telle. Ainsi dans le problème 2 du Papyrus d'Akhmîm il est question d'un dépôt carré de 10 coudées de côté. La présentation est la suivante :

« Un dépôt carré : 10 coudées; 10 coudées; 10 coudées; 10 coudées.



Semblablement 10 sur 10 produit 100.

Semblablement 100 sur 8 produit 800.

Semblablement 800 sur 3 1/4 1/9.

Lequel est 2700 unités contenues dans le dépôt ».

La question : « quelle est la contenance? » est sous-entendue.

On trouve des modalités d'expression similaires dans les mathématiques égyptiennes et babyloniennes. On peut donc conclure que l'égalité ne paraît pas liée à la pratique du calcul²³³.

Le corpus héronien livre toutefois un indice : de nombreux problèmes de géométrie métrique portent sur des objets également traités par les mathématiques démonstratives, par exemple les polygones réguliers, dont la construction est traitée au livre IV des *Éléments*, et pour l'aire desquels des procédures de calcul approché sont développées dans la tradition logistique²³⁴.

²²⁹ "Géométrie d'Euclide". *Geometrica, Stereometrica*, Méthode générale pour les polygones, mesure des pyramides, *Mesures de Didyme* ...

²³⁰ *Geometrica* I : Problème VIII. Codex Constantinopolitanus, fol. 7v.

²³¹ « Εὐρεῖν χωρίον χωρίου τῆ περιμέτρῳ ἴσον, τὸ δὲ ἐμβαδὸν τοῦ ἐμβαδοῦ τετραπλάσιον ». *Geometrica*, 24, Problème II. Codex Constantinopolitanus, fol. 29r.

²³² Souvent abrégé par une barre verticale.

²³³ Mais on a vu dans la première partie que l'égalité politique était liée à la réflexion "philosophico-historique" sur l'invention du calcul.

²³⁴ Question déjà abordée par les Babyloniens.

La terminologie de la géométrie démonstrative s'y retrouve donc partiellement : des termes comme "ἰσοπλευρόν", "ἰσογώνιον", "ἰσοσκελῆς" sont attestés relativement souvent, en particulier pour désigner les polygones réguliers (ἰσοπλευρόν καὶ ἰσογώνιον) ; mais il ne s'agit que d'une égalité particularisée à certains éléments (côtés, angles, côtés obliques) d'une figure et non d'une relation générale entre deux objets mathématiques. D'ailleurs, en dehors des mathématiques, le vocabulaire grec est riche de mots exprimant de telles "équivalences" particulières : ἰσηγορία, ἰσοκρατής, ἰσομέτρητος, ἰσόμορος, ἰσονομία, ἰσοπαλής, ἰσοπληθής, ἰσόρροπος, ἰσότιμος, ἰσόψηφος.

Si la notion d'égalité en mathématiques n'a pas son origine dans le calcul, si on ne la trouve pas dans les traditions égyptiennes et mésopotamiennes, on est amené à penser que c'est dans la démarche démonstrative et géométrique, spécifiquement grecque, qu'il faut la chercher. Une telle particularité n'est pas forcément exceptionnelle : les notions d'angle et de parallèle n'existent semble-t-il — dans l'Antiquité — que dans la géométrie grecque, que ces notions soient rattachées à une origine architecturale²³⁵ ou à l'usage de la géométrie en astronomie dans laquelle l'angle permet le repérage partiel de points par ailleurs inaccessibles²³⁶.

Un exemple simple et lumineux, bien qu'assez "tardif", de cet usage de l'angle se retrouve dans la méthode d'Eratosthène pour mesurer la circonférence de la terre ; à partir d'une hypothèse astronomico-géométrique : le Soleil est suffisamment loin de la Terre pour que l'on admette que ses rayons soient parallèles, il calcule l'angle au centre de la Terre (inaccessible!) qui sous-tend la portion de méridien²³⁷ qui sépare Alexandrie et Syène, sur le Tropique nord, grâce à un gnomon perfectionné et en utilisant l'égalité des angles alternes internes interceptés par une sécante (la verticale d'Alexandrie) sur ces rayons parallèles. Comme il connaît la distance entre les deux villes, il peut en déduire la circonférence terrestre²³⁸.

*

Mon étude a porté sur les *Éléments* d'Euclide, et tout particulièrement sur:

- les livres I et II qui posent les premiers éléments de géométrie plane.
- le livre V qui contient la fameuse théorie générale des proportions attribuée d'ordinaire à Eudoxe de Cnide.
- le livre XI qui, pour la géométrie dans l'espace, est un peu l'équivalent du livre I.
- le livre VII qui, contrairement aux précédents, est consacré à l'arithmétique.

²³⁵ Voir Burkert, W., *Lore and Science*, 416-419. Dès Théognis (VI^e siècle av. J. C) les instruments de géométrie sont symboles de rigueur : « il doit s'astreindre à plus de rigueur dans sa démarche que le tour, le cordeau et l'équerre, ô Cynos, le théore qui ... » (Τόρνου καὶ σπάθης καὶ γνώμονος ἄνδρα θεωρὸν εὐθύτερον χρῆν ἔμεν, Κύρνε ...). Voir *op. cit.*, 419, notes 101 à 104.

²³⁶ Voir Vernant J. P., *Géométrie et astronomie sphérique dans la première cosmologie grecque* et Caveing M., *La constitution du type mathématique de l'idéalité...*, II, Chapitre 3, 516-586.

²³⁷ Hypothèse ou approximation géographique : Alexandrie et Syène sont sur le même méridien ; de plus Syène étant sur le Tropique Nord, il n'y a pas d'ombre à midi le jour du solstice d'été, ou si l'on préfère, la verticale du lieu est dans la direction des rayons solaires. La méthode d'Eratosthène suppose connue toute la théorie de la terre sphérique et du mouvement annuel du soleil entre les Tropiques ...

²³⁸ Voir Cléomède, *Théorie élémentaire*, I, ch. 10, 3-4.

Ces "chapitres" ont comme point commun d'introduire les définitions de base et les premiers résultats dans les principaux domaines dont traitent les *Éléments*. Que constate-t-on ?

1) L'adjectif "ἴσον" apparaît aussi bien en arithmétique qu'en géométrie; toutefois la différence de traitement de l'égalité entre la science du nombre et la science des figures est flagrante.

2) trois notions sont susceptibles d'être qualifiées d'"égale" dans le livre VII :

a) le nombre (ἀριθμός). Par exemple :

Prop. VII. 16 : Si deux nombres se multipliant l'un l'autre produisent certains nombres, les nombres produits à partir d'eux seront égaux entre eux²³⁹. Ou encore :

Prop. VII. 19 : Si quatre nombres sont en proportion, le produit à partir du premier et du quatrième sera égal au produit à partir du deuxième et du troisième...²⁴⁰

Au demeurant si A est une partie de B, autrement dit si A mesure B, B est divisible en nombre égaux à A ; le cas où A est "des parties" de B (A ne mesurant pas B) est plus délicat²⁴¹.

b) la multitude "πλῆθος" : terme qu'on applique à "un nombre de nombres" et qui appartient plutôt à la "métalangue" de la théorie des nombres, plutôt qu'à la théorie des nombres elle-même. Mais si deux collections de nombres sont aussi nombreuses, on peut tout aussi bien dire "ἴσον"²⁴² que "ὅσοι ... τοσοῦτοι" (tant est... autant que cela est...)²⁴³.

c) dans le même ordre d'idée on utilise l'adverbe "ἰσάκις" pour dire qu'un nombre est pris "le même nombre de fois" qu'un autre. Par exemple :

Prop. VII. 15 : Si une unité mesure un certain nombre autant de fois qu'un autre nombre mesure un certain autre nombre, de manière alternée, l'unité mesurera aussi le troisième nombre autant de fois que le deuxième [mesure] le quatrième²⁴⁴.

Bien sûr on trouve "ἴσον" et "ὅμοιον" dans les définitions qui se réfèrent aux propriétés "géométriques" des nombres : nombres carrés (Df. VII. 17), cubes (Df. VII. 20), semblables

²³⁹ « Ἐὰν δύο ἀριθμοὶ πολλαπλασιάσαντες ἀλλήλους ποιῶσί τινας, οἱ γενόμενοι ἐξ αὐτῶν ἴσοι ἀλλήλοις ἔσονται ». Dans sa réénonciation Euclide précise : si, d'une part A multiplié par B produit C (i.e C = A.B), d'autre part B multiplié par A produit D, (D = B.A), alors C est égal à D. La définition de la multiplication (Df.16) étant non symétrique, la proposition vérifie donc la "commutativité" de cette opération : il revient au même d'ajouter B fois des nombres égaux à A que d'ajouter A fois des nombres égaux à B. On peut noter que pour désigner le résultat de la multiplication Euclide utilise la terminologie de la tradition logistique ("produit") ; mais peut-être le résultat est-il "pensé" géométriquement.

²⁴⁰ Et réciproquement ($A/B = C/D$ si et seulement si $AC = BD$) : « Ἐὰν τέσσαρες ἀριθμοὶ ἀνάλογον ᾧσιν, ὁ ἐκ πρώτου καὶ τετάρτου γενόμενος ἀριθμὸς ἴσος ἔσται τῷ ἐκ δευτέρου καὶ τρίτου γενομένῳ ἀριθμῷ ». »

²⁴¹ Voir par exemple VII. 4. Là aussi la "composition" est certainement "pensée" géométriquement : au livre I on ne retranche pas une droite donnée à une autre, donnée, plus grande ; on retranche une droite égale à la droite donnée à l'autre, plus grande. Et ce parce qu'une droite est donnée non seulement de grandeur mais aussi de position. De même, VII. 4 fixe en quelque sorte le sens de l'expression "être des parties d'un nombre"; la proposition procède à partir de la distinction : premiers entre eux / composés entre eux. Dans le premier cas, chacune des unités de A est une partie de B par suite de la définition du nombre ; dans le second cas, si A ne mesure pas B (terminologie fixée par Df. VII. 3), on dit que A est des parties de B si B peut être divisé en nombres égaux à une partie de A. Il s'agit donc d'une opération de "substitution". En revanche dans VII.1, étant donnés deux nombres A et B, A plus grand que B, on soustrait purement et simplement B de A. Les opérations de "composition" et de "soustraction" ne sont donc traitées tout à fait de la même manière.

²⁴² Par exemple VII. 5.

²⁴³ Par exemple VII. 9, 10. VIII. 8, 9, 10).

²⁴⁴ Ἐὰν μὴ μὴ ἀριθμὸν τινα μετρήῃ, ἰσάκις δὲ ἕτερος ἀριθμὸς ἄλλον τινα ἀριθμὸν μετρήῃ, καὶ ἐναλλάξ ἰσάκις ἢ μὴ μὴ τὸν τρίτον ἀριθμὸν μετρήσει καὶ ὁ δεύτερος τὸν τέταρτον.

(Df. VII. 22) ainsi que pour le nombre parfait (Df. VII. 23) : le nombre parfait ("τέλειος") est égal à (la somme de) ses propres parts (μέρη de ses diviseurs)²⁴⁵. Par exemple, $28 = 1 + 2 + 4 + 7 + 14$.

3) Une des notions fondamentales du livre VII — bien que non définie — est celle de "rapport de deux nombres". La notion intervient dans trois expressions équivalentes :

« (A, B) et (C, D) ont le même rapport (τὸν αὐτὸν λόγον ἔχουσι) »²⁴⁶.

« Comme A est relativement à B, ainsi est C relativement à D (ὡς ὁ A πρὸς τὸν B, οὕτως ὁ Γ πρὸς τὸν Δ) »²⁴⁷.

" (A, B, C, D) sont en proportion (ἀναλόγον)"²⁴⁸.

On le voit sur ces expressions, dans le livre VII la seule chose qui est affirmée des rapports de nombres c'est l'identité et non l'égalité et, à fortiori, l'inégalité; on verra que les choses sont un peu différentes pour les rapports de grandeurs. L'égalité s'applique à certains "objets" mathématiques, par exemple les grandeurs ou les nombres. Pour les relations entre "objets", que les modernes qualifieraient d'objets du "second ordre", les *Éléments* utilisent le langage de l'identité. Rappelons aussi que dans DK 47 B2, Archytas parle d'égalité de rapports, mais il utilise pour désigner ces rapports le terme "διαστήμα", c'est-à-dire "intervalle"; le contexte est musical et entre les bornes ὄροι de l'intervalle, il y a un "espace" susceptible d'être mesuré.

4. C'est évidemment dans les livres I et II que les références à l'égalité sont les plus nombreuses et les plus intéressantes :

a) L'égalité intervient dans la définition d'objets fondamentaux : le cercle et mais aussi les espèces de figures rectilignes (triangles et quadrilatères)²⁴⁹.

b) elle est constitutive de la définition de l'angle droit et de la perpendiculaire²⁵⁰.

c) parmi les neuf notions communes (on dit souvent axiomes) — même si plusieurs sont vraisemblablement des interpolations — huit d'entre elles concernent l'égalité :

1. Les choses égales à une même chose sont aussi égales entre elles.

2. Et si, à des choses égales, des choses égales sont ajoutées, les tous sont égaux.

3. Et si, à partir de choses égales, des choses égales sont retranchées, les restes sont égaux.

{4. Et si, à des choses inégales, des choses égales sont ajoutées, les tous sont inégaux.

²⁴⁵ Τέλειος ἀριθμὸς ἐστὶν ὁ τοῖς ἑαυτοῦ μέρεσιν ἴσος ὢν. Voir Nicomaque de Gérase, *op. cit.*, I, chapitre XIV. Nicomaque associe les nombres abondants, parfaits, déficients, respectivement avec le plus/ l'égal et le moins, auxquels il associe respectivement: excès, ambitions... manque, défauts, pauvreté et, pour l'égalité : vertu, santé, modération et beauté... Ces associations arithmologiques qui peuvent paraître étranges ont leur logique : le nombre abondant a plus de parts que "ce qui lui revient" (ainsi $1+2+3+4+6 > 12$), le nombre déficient en a moins ($1+3+5 < 15$).

²⁴⁶ Par exemple VII. 17.

²⁴⁷ *Idem*.

²⁴⁸ Par exemple VII. 12.

²⁴⁹ Voir *Éléments*, I, Df. 15, 20, 22.

²⁵⁰ . Voir *Éléments*, I, Df. 10 et Demande 4. Euclide n'utilise pas la notion d'égalité pour définir le parallélisme de deux droites (Df. 23) comme le feront certains géomètres grecs; ainsi Proclus rapporte que Posidonius définissait les parallèles comme « les droites, qui ne convergent, ni ne divergent, dans un même plan, mais telles que toutes les perpendiculaires menées sur l'une d'entre elles à partir des points de l'autre, sont égales ». *In Eucl. I*, 176. 6-10.

5. Et les doubles du même sont égaux entre eux.
6. Et les moitiés du même sont égales entre elles.}
7. Et les choses qui s'ajustent les unes sur les autres sont égales entre elles (Καὶ τὰ ἐφαρμόζοντα ἐπ' ἄλληλα ἴσα ἀλλήλοις ἐστίν).
8. Et le tout est plus grand (μείζον que la partie τὸ μέρος).

La question se pose de savoir en quel(s) sens est utilisé "ἴσον" dans ces énoncés, parmi ceux que nous avons précédemment distingués : identité, congruence ou équivalence en grandeur²⁵¹. La Notion commune n°1 peut s'appliquer aux deux derniers cas, tandis que les n° 2 à 7 n'ont de sens que pour l'équivalence en grandeur; la Notion n° 8 fait à première vue la liaison entre les deux sens. L'égalité, au sens de congruence, entre deux "objets" suppose leur distinction ; il ne peut s'agir de l'identité²⁵²; dans le cas des lignes droites rappelons qu'il revient au même de parler de congruence ou d'équivalence en grandeur; au demeurant on sait qu'Euclide s'est astreint à occulter tout aspect "métrique" particulier.

L'inégalité²⁵³ est appliquée aux lignes droites et aux angles de façon similaire : AB (resp. A) est plus petit(e) que CD (resp.B) si on peut construire CE (resp.C) dans CD (resp. dans B), égal(e) à AB (resp. à A)²⁵⁴.

L'égalité au sens de l'équivalence en grandeur est appliquée dans les Livres I et II pour les aires (triangles, parallélogrammes et figures rectilignes quelconques). Cette équivalence en aire est l'objet de trois résultats fondamentaux des Livres I et II :

Prop. I. 45 : Dans un angle rectiligne donné, construire un parallélogramme égal à une figure rectiligne donnée.

Prop. I. 47 : Dans les triangles rectangles, le carré sur le côté sous- tendant l'angle droit est égal aux carrés sur les côtés délimitant l'angle droit (th. dit de Pythagore).

Prop. II. 14 : Construire un carré égal à une figure rectiligne donnée²⁵⁵.

Dans les livres XI et XII elle s'applique aux volumes (parallélépipèdes, pyramides, prisme, cylindre, cône...)²⁵⁶. Pour exprimer la congruence dans l'espace les choses sont évidemment plus compliquées ; par exemple en XII.3 pour dire que deux pyramides sont congruentes, Euclide utilise l'expression "ἴσας τε καὶ ὁμοίας", égales et semblables, définie au livre XI (Df. 10) :

« Les figures solides égales et semblables sont celles délimitées par des surfaces semblables, égales en multitude et en grandeur (ἴσων τῷ πλήθει καὶ τῷ μεγέθει) »;

cette définition n'est d'ailleurs pas correcte (à moins de supposer les figures convexes)²⁵⁷.

²⁵¹ Voir *supra*, 00.

²⁵² Par exemple *Éléments*, I, 2; 22.

²⁵³ Ἄνίσον avec ses deux modalités : μείζων / ἐλάσσων.

²⁵⁴ Voir *Éléments*, I, 3, 6; 16, 24. Voir aussi *supra*, 00, note 00.

²⁵⁵ Il s'agit de la quadrature des aires rectilignes ; elle permet d'évaluer la grandeur des dites aires.

²⁵⁶ Voir par exemple XI. 29 à 31, XI. 36, XI. 39.

²⁵⁷ Voir Euclid, *The Elements*. trad. angl. T. Heath, III, 265-6.

5) Au livre V est introduite explicitement la notion de rapport entre les grandeurs :

V. Df. 3 : Un rapport entre deux grandeurs de même genre est une sorte de relation selon la dimension²⁵⁸;

V. Df. 4 : Les grandeurs qui sont dites avoir un rapport l'une à l'autre sont celles qui, multipliées, peuvent se dépasser l'une l'autre²⁵⁹;

ainsi que, pour quatre grandeurs, le fait d'avoir deux à deux le même rapport :

V. Df. 5 : Des grandeurs sont dites être dans le même rapport, la première relativement à la deuxième et la troisième relativement à la quatrième quand des équimultiples de la première et de la troisième ayant été pris, soit ils sont simultanément en excès, soit ils sont simultanément égaux, soit ils sont simultanément en défaut, par rapport à n'importe quels équimultiples de la deuxième et de la quatrième, chacun à chacun, et de manière correspondante²⁶⁰;

c'est-à-dire d'être en proportion :

V. Df. 6 : Les grandeurs qui ont le même rapport [entre elles] sont dites en proportion²⁶¹.

Dans cette très belle théorie, la nouveauté par rapport au traitement de l'égalité tient à ce qu'Euclide définit le fait pour deux grandeurs d'avoir un rapport plus grand que deux autres :

V. Df. 7 : Et quand, parmi les équimultiples, d'une part le multiple de la première [grandeur] est en excès par rapport au multiple de la deuxième, et que d'autre part, le multiple de la troisième n'est pas en excès par rapport au multiple de la quatrième, alors la première est dite avoir un rapport plus grand relativement à la deuxième que la troisième, relativement à la quatrième²⁶².

En considérant les rapports inverses, il n'a nul besoin de définir "avoir un rapport plus petit que..."²⁶³. En revanche pour ce que nous appelons égalité, il conserve sa terminologie de l'identité comme au livre VII²⁶⁴.

6) Que l'égalité (dans les deux sens du terme) soit, dans le domaine des mathématiques grecques, un concept qui opère plutôt dans la géométrie des figures que dans l'arithmétique, on peut en chercher la confirmation dans le petit tableau suivant; les propositions ont été regroupées selon que leur énonciation concerne :

²⁵⁸ Λόγος ἐστὶ δύο μεγεθῶν ὁμογενῶν ἢ κατὰ πηλικότητά ποια σχέσις.

²⁵⁹ Λόγον ἔχειν πρὸς ἄλληλα μεγέθη λέγεται, ἃ δύναται πολλαπλασιαζόμενα ἀλλήλων ὑπερέχειν.

²⁶⁰ Ἐν τῷ αὐτῷ λόγῳ μεγέθη λέγεται εἶναι πρῶτον πρὸς δεῦτερον καὶ τρίτον πρὸς τέταρτον, ὅταν τὰ τοῦ πρῶτου καὶ τρίτου ἰσάκεις πολλαπλάσια τῶν τοῦ δευτέρου καὶ τετάρτου ἰσάκεις πολλαπλασίων καθ' ὅποιον οὖν πολλαπλασιασμὸν ἐκάτερον ἐκατέρου ἢ ἅμα ὑπερέχη ἢ ἅμα ἴσα ἢ ἢ ἅμα ἐλλείπη ληφθέντα κατάλληλα.

²⁶¹ Τὰ δὲ τὸν αὐτὸν ἔχοντα λόγον μεγέθη ἀνάλογον καλεῖσθω.

²⁶² Ὄταν δὲ τῶν ἰσάκεις πολλαπλασίων τὸ μὲν τοῦ πρῶτου πολλαπλάσιον ὑπερέχη τοῦ τοῦ δευτέρου πολλαπλασίου, τὸ δὲ τοῦ τρίτου πολλαπλάσιον μὴ ὑπερέχη τοῦ τοῦ τετάρτου πολλαπλασίου, τότε τὸ πρῶτον πρὸς τὸ δεῦτερον μείζονα λόγον ἔχειν λέγεται, ἢ πρὸς τὸ τρίτον πρὸς τὸ τέταρτον.

²⁶³ Voir par exemple Prop. XII. 2.

²⁶⁴ Cette "inégalité" des rapports est définie sans doute en vue du Livre XII. Toutefois il faut remarquer qu'elle est plutôt évitée qu'utilisée. Les relations d'inégalité sont remplacées par des égalités, au prix d'admettre l'existence d'une quatrième proportionnelle. Si, en notations modernes, on a $A/B > C/D$, Euclide utilisera le fait qu'alors $A/B = C/E$ avec $E < D$ ou E/D avec $E > C$. L'ordre est ainsi ramenée aux grandeurs et non aux rapports de grandeurs, en particulier grâce aux propositions V. 8 et 10.

- l'égalité de deux objets.
- une inégalité entre deux objets.
- l'identité de deux objets.
- ceux qui n'ont rien à voir avec aucune de ces trois possibilités.

Précisons que le plan du livre XI est le suivant :

- relations élémentaires entre droites et plans (n° 1 à 19)²⁶⁵.
- propriétés des angles solides (n°20 à 23 et n°26)²⁶⁶.
- propriétés des parallélépipèdes, n°27 à 38, et des prismes, n°39, partie analogue à la deuxième partie du livre I.

Dans cette partie, 9 propositions sur 15 concernent une égalité, les six autres portent sur la similitude, puisque, à la différence de la géométrie plane élémentaire, l'introduction de la stéréométrie dans les *Éléments* a lieu après l'exposé de la théorie des proportions et des figures semblables. D'autre part toutes les identités, aussi bien dans le livre V que dans le livre VII, sont des identités de rapports; compte tenu de la définition euclidienne des proportions, j'ai rangé dans cette classe toutes les énonciations portant sur une proportion.

	Egalité	Inégalité	Identité	Autres	Total
LIVRE I	36	8	0	4	48
LIVRE II ²⁶⁷	12	2	0	0	14
LIVRE V	2	4	16	3	25
LIVRE XI	11	4	0	24	39
LIVRE VII	3	0	12	24	39
Total	64	18	28	55	165

On peut faire le même sondage dans les autres livres ; les résultats vont dans le même sens. A partir du livre VI de nombreuses énonciations dans les éléments "géométriques" portent sur la similitude; il faudrait donc introduire une cinquième catégorie; d'autre part les livres consacrés à des sujets très précis (*Éléments* IV, X, XII, XIII) se prêtent mal à ce type d'analyse.

Le livre III consacré à la géométrie élémentaire du cercle fournit lui aussi des indications intéressantes : sur 37 propositions 16 sont relatives à une égalité, 7 à une inégalité, 2 à une identité et 12 à aucune de ces trois catégories. 2/3 des propositions concernent donc égalité et inégalité. Mais on peut ajouter, après avoir remarqué que l'organisation de ce livre est beaucoup moins "linéaire" que celle du livre I, que les 19 premières propositions exposent les propriétés élémentaires du cercle. Ensuite, Euclide expose les propriétés des angles dans le cercle et des segments de cercle (n°20 à 34) : 11 énonciations sur 15 concernent une égalité et

²⁶⁵ 18 propositions sur 19 ne concernent aucun de nos trois intitulés spécifiés.

²⁶⁶ Une égalité et 4 inégalités.

²⁶⁷ Les énoncés des propositions 12 et 13 du Livre II ont la forme d'une inégalité bien que la démonstration porte sur une égalité. Ceci, sans doute, parce qu'ils expriment le "plus" et le "moins" alors que I. 47 exprime l'"égal". Il est d'ailleurs facile de démontrer une version plus faible des propositions II. 12 et 13 en établissant seulement les inégalités sans évaluer l'excès ou le défaut à partir d'une adaptation de la démonstration de I. 47. Voir Knorr, W. R. *The Evolution of the Euclidean Elements*, 1975, 18, note 16.

2, une inégalité. Compte tenu des problèmes techniques que posent la manipulation d'aires curvilignes, l'égalité désigne indiscutablement la congruence dans le cas des segments de cercle ou des arcs de circonférence²⁶⁸. Le livre s'achève sur trois résultats (n° 35 à 37) qui établissent une équivalence en mesure. Soit 16 propositions sur 18 en terme d'égalité et d'inégalité dans la deuxième partie du livre III.

7) L'identité de rapports ou proportion nous conduit à la notion de similitude; la théorie des figures semblables a été repoussée au livre VI par Euclide car dans son exposé elle présuppose la notion générale de rapports entre grandeurs. Cette notion de similitude va réalisée une sorte de "synthèse" de la notion d'égalité et de celle de proportion. Dans la définition 1 du Livre VI, il définit les figures semblables (ὁμοία) comme celles ayant les angles égaux et les côtés respectifs en proportion. Il montre d'ailleurs que pour les triangles les deux conditions sont en fait équivalentes²⁶⁹. La similitude possède une propriété en commun avec l'égalité : ce que nous appelons la transitivité²⁷⁰. La similitude des figures planes du Livre VI intervient dans trois constructions fondamentales :

- F et A étant deux figures rectilignes données, construire une figure égale à A et semblable à F²⁷¹.
- Etant donné un parallélogramme P et une droite D, appliquer sur D un parallélogramme égal à une figure rectiligne donnée, avec défaut (ἔλλειψις) d'un parallélogramme semblable à P²⁷².
- Même chose mais avec excès (ὑπερβολή) d'un parallélogramme semblable à P²⁷³.

On retrouve la trilogie (égal, défaut, excès). Comme le dit Proclus, cette application des aires est certainement à l'origine de la fameuse nomenclature des trois coniques non dégénérées. A l'inverse de ce que nous avons vu pour "ἰσότης", "ὁμοιοτήτης" est utilisé pour désigner la similitude géométrique ; en particulier on trouve souvent l'expression à valeur "argumentative" : « διὰ τὴν ὁμοιοτήτα τῶν ... »²⁷⁴ correspondant à « à cause de la similitude

²⁶⁸ Voir *Éléments*, III. 23, 24, 26, 27.

²⁶⁹ Voir *Éléments*, VI. 4 et 5.

²⁷⁰ Voir *Éléments*, VI. 21. Dans les propriétés de ce que nous appelons relation d'équivalence, Euclide n'énonce, pour certains cas particulier, que ce que nous appelons transitivité; les deux autres propriétés, réflexivité et symétrie, n'ont aucun intérêt pour qui raisonne en langue naturelle. Son énoncé n'est d'ailleurs en général pas exactement formellement identique à l'énoncé moderne. Pour l'égalité, la "transitivité" est posée dans la notion commune n°1. Pour le parallélisme voir *Éléments*, I, 31; pour la commensurabilité des grandeurs, voir *Éléments*, X, 12. Plus remarquable encore est la démonstration de la "transitivité" de l'identité de rapport entre grandeurs (prop. V. 11).

²⁷¹ Prop. VI. 25 : Τῷ δοθέντι εὐθυγράμμῳ ὅμοιον καὶ ἄλλῳ τῷ δοθέντι ἴσον τὸ αὐτὸ συστήσασθαι. Construire une même figure, semblable à une [figure] rectiligne donnée et égale à une autre [figure rectiligne] donnée.

²⁷² Prop. VI. 28 : Παρὰ τὴν δοθεῖσαν εὐθείαν τῷ δοθέντι εὐθυγράμμῳ ἴσον παραλληλόγραμμον παραβαλεῖν ἔλλειπον εἶδει παραλληλογράμμῳ ὁμοίῳ τῷ δοθέντι... Sur une droite donnée, appliquer un parallélogramme égal à une figure rectiligne donnée par défaut d'une figure parallélogrammique semblable à une [figure parallélogrammique] donnée. L'énoncé précise ensuite la condition de possibilité de ce problème.

²⁷³ Prop. VI. 29 : Παρὰ τὴν δοθεῖσαν εὐθείαν τῷ δοθέντι εὐθυγράμμῳ ἴσον παραλληλόγραμμον παραβαλεῖν ὑπερβάλλον εἶδει παραλληλογράμμῳ ὁμοίῳ τῷ δοθέντι. Sur une droite donnée, appliquer un parallélogramme égal à une figure rectiligne donnée par excès d'une figure parallélogrammique semblable à une [figure parallélogrammique] donnée.

²⁷⁴ Voir par exemple *Éléments*, VI. 20, 26.

des ... », expression en général suivie de l'énoncé d'une ou de plusieurs proportions. Il n'y a rien d'étonnant à ce que la similitude ait été dégagée comme notion mathématique alors que l'égalité ne l'était apparemment pas puisqu'elle est l'expression géométrique de la proportion, de l'identité de rapports à laquelle les mathématiciens grecs se montrent si attentifs ; en un mot elle correspond à l'identité de forme (εἶδος).

Pour nous résumer, dans la géométrie grecque "classique" nous ne trouvons pas la notion d'égalité élaborée et traitée en tant que telle. Il faut pour cela attendre Diophante, puis l'algèbre. Ce n'est pas simplement l'absence du substantif qui est visé ici et dont on pourrait dire qu'elle a peu d'importance, encore que ce soit un indicateur : du moins la définition de la notion générale et les règles de sa pratique sont restées implicites. En fait les textes "classiques" ne font qu'utiliser des égalités ou des inégalités particulières, même si l'établissement de ces relations peut s'avérer ardu; ce n'est que lorsque l'égalité, ou si l'on préfère l'équation, est thématifiée en tant que telle, que l'on peut rechercher les opérations "intéressantes" et celles qui sont permises sur ces égalités, comme le font Diophante puis Al-Khwarizmi.

Dans cette géométrie "égal" est certainement utilisé en deux sens qui, comme nous l'avons déjà dit, coïncident pour les lignes droites, mais aussi pour le cercle et les polygones réguliers, c'est-à-dire les objets géométriques ayant une forme éminente. Le cas des figures non rectilignes est intéressant. Lequel de ces deux sens est utilisé dans le cas de l'angle ? Euclide présuppose-t-il une mesure des angles — dont l'unité serait alors l'angle droit — et l'angle est-il donc une grandeur ou seulement une grandeur ? Rien n'est moins sûr²⁷⁵; en fait, tant qu'on a affaire à des angles (ainsi que leur combinaisons par somme et différence) inférieurs à quatre droits, et donc en particulier aux angles dans le triangle, les deux sens coïncident également. Dans les *Éléments* il s'agit d'abord de comparer les angles et leurs combinaisons à l'angle droit ou à deux angles droits puisque cela constitue, pour les côtés, un critère de perpendicularité ou d'alignement. En même temps l'angle est défini comme l'inclinaison mutuelle de deux droites, donc comme une relation; il conviendrait dans ce cas d'utiliser le vocabulaire de l'identité.

Même si cela est un peu forcé, il est amusant de pouvoir rapprocher cette dualité de l'"Égal" mathématique de celle de l'égalité politique évoquée dans la première partie : l'équivalence en mesure est analogue à l'égalité arithmétique ; l'identité de forme, l'"ὁμοιοτήτης", exprimée par l'identité des rapports, correspond à l'égalité géométrique de la pensée politique, toutes deux attentives à la "qualité". La véritable égalité géométrique du point de vue du mathématicien — la congruence — est la combinaison des deux.

Conclusion

On pourra trouver bien frivole cette mise en parallèle de la réflexion épistémologique et de la réflexion politique qui, toutes deux, ont été conduites à distinguer, à préciser les différentes significations, les nuances des notions parfois proches qu'elles utilisaient : ainsi

²⁷⁵ Les Grecs emprunteront le système babylonien de division du cercle en 360 degrés qui a perduré jusqu'à aujourd'hui ; mais ceci n'est pas attesté avant le II^e siècle avant J. C.

l'expression "ἴσος τε καὶ ὁμοίος" (égal et semblable) appartient elle aussi au vocabulaire politique; lors du conflit qui opposa Corinthe et sa colonie Corcyre, la métropole annonça un départ de colons pour Épidamne, dont n'importe qui pouvait être, avec pleine égalité de droits (ἴση καὶ ὁμοία)²⁷⁶. Dans un contexte mathématique, la première attestation qui nous soit parvenue se trouve dans le *Timée* : la pyramide, c'est à dire le tétraèdre, une fois construite dans la sphère, en partage l'espace en quatre parties "ἴση καὶ ὁμοία". J'ai déjà signalé qu'Euclide utilisait l'expression pour définir de cette façon les solides égaux²⁷⁷.

Bien sûr le langage technique, quel qu'il soit, a souvent recours à ce procédé ; un terme est choisi dans la langue naturelle (ou dans une autre langue technique), sans doute à cause de ses connotations, mais une fois l'emprunt réalisé, ses règles d'emploi sont spécifiées par celles qui régissent le domaine emprunteur; les connotations initiales n'ont, en droit, plus aucune importance. Cela dit, on ne doit pas perdre de vue que les mathématiques anciennes s'expriment dans la langue naturelle et s'appuient sur des catégories linguistique; certes une langue technique a été développée, mais sans l'usage d'un symbolisme et d'un formalisme puissant le contexte linguistique conserve son importance. De ce fait je crois que les liaisons que l'on peut établir entre les pratiques des mathématiciens et les réflexions du "second ordre" menées par les philosophes pour indirectes qu'elles soient, ne manquent pas d'intérêt. J. P. Vernant dit du rationalisme grec qu'il est rhétorique, que la raison grecque est avant tout une raison exprimée en discours²⁷⁸. En analysant ses pratiques discursives et ses théories scientifiques, on peut établir des parallélismes entre différents domaines; on ne fait, et je conclurai sur ce point, que suivre l'exemple d'Aristote. A plusieurs reprises il explicite les distinctions à faire entre les différents sens des termes comme "égal", "semblable", "identique"²⁷⁹ :

« D'une part, à l'un appartiennent, ainsi que nous l'avons décrit dans notre division des contraires, le même, le semblable et l'égal, d'autre part, à la pluralité, l'autre, le dissemblable et l'inégal. Le même se dit de manière multiple : en un premier sens, nous disons parfois même pour unicité numérique ; en un second sens, c'est quand il y a unicité à la fois en définition et en nombre : par exemple tu es un avec toi-même, et selon la forme, et selon la matière; et encore s'il y a unicité de la définition de la substance première : ainsi les lignes droites égales sont les mêmes, comme aussi les quadrilatères égaux et équiangles²⁸⁰ : il y a bien pluralité mais dans ces cas l'égalité est unité.

²⁷⁶ Thucydide, I. 27. Voir aussi Platon, *Lois*, 741a.

²⁷⁷ Voir *supra*, 00.

²⁷⁸ « Raison d'hier et d'aujourd'hui » dans *Religions, histoires, raisons*, 1979, 102-3.

²⁷⁹ Au livre I de la *Métaphysique*, dans la discussion de l'un (quelles choses sont dites une? 1052 a15-37 - quel est l'essence de l'un ? 1052 b1- 1053 a20). Au livre Δ de la *Métaphysique* (9, 1017 b27-1018 a9) et dans les *Topiques* (I, 7, 102 b) pour les différents sens de "même" : identité par le nombre (plusieurs noms pour une même chose), par la forme : deux hommes sont identiques en tant qu'hommes, par le genre : un homme et un cheval en tant qu'animal. L'identité est ici rapportée aux distinctions aristotéliennes fondamentale : individu, forme-espèce, genre ; Aristote remarque que la plupart des gens entendent l'identité comme identité individuelle, mais que, même dans ce cas particulier, des distinctions logiques sont nécessaires.

²⁸⁰ C'est la première mention conservée du terme "ἰσογώνια" = équiangle.

Sont semblables les êtres qui, n'étant pas absolument les mêmes, ni sans différence dans la substance dont ils sont composés sont les mêmes selon la forme . Par exemple le quadrilatère plus grand est semblable au plus petit ; des droites inégales sont semblables : elles sont semblables et non pas absolument les mêmes. Sont encore semblables les êtres qui, ayant la même forme, et dans lesquels se produit le plus et le moins, ne sont cependant ni plus ni moins. De même les êtres dont l'état est le même, un par la forme, par exemple le blanc, mais est affectée du plus ou moins, sont dites semblables parce que leur forme est unique. Et ceux qui ont plus d'identités que d'altérités, absolues ou apparentes ... »²⁸¹.

La langue d'Aristote est concise et le texte difficile, mais il montre bien que le philosophe s'appuie avant tout sur une analyse des usages linguistiques qui, de fait, dépasse largement le domaine des mathématiques. C'est particulièrement évident pour l'"ὁμοιοτήσ" dont seule une partie du premier sens concerne l'usage des mathématiciens. Mais les mathématiques fournissent de bons exemples d'identité comme égalité (au sens de congruence), de similitude comme identité de forme ; la coïncidence des deux sens de "égal" dans le cas particulier des droites est remarquée; pour les quadrangles, ces deux sens de sont certainement repérés; les notions d'identité", de similitude et d'égal(ité) sont alors bien distinguées.

Bibliographie

Textes :

Code d'Hammurapi, Traduction française de A. Finet. Paris, Edition du Cerf, 1973.

Archimède, *Œuvres*. Edition et traduction Ch. Mugler, 4 vol. Collection des Universités de France, Paris, Belles-Lettres, 1970-74.

Aristote, *Categoriae et Liber de Interpretatione*, rec. L. Minio-Paluello, Oxford Classical Texts, 1949.

Aristote, *Analytica priora et posteriora*, rec. W. D. Ross, Oxford Classical Texts, 1964.

Aristote, *Metaphysica*, rec. W. Jaeger, Oxford Classical Texts, 1957.

Aristote, *Ethica Nicomachea*, rec. L. Bywater, Oxford Classical Texts, 1894.

Aristote, *Politica*, rec. W. D. Ross, Oxford Classical Texts, 1957.

Aristote, *Rhétorique*, Texte et traduction M. Dufour et A. Wartelle. 3 vol. Collection des Universités de France, Paris, Belles-Lettres, 1967 et 1973.

²⁸¹ *Métaphysique*, I, 1054 a30-1054 b12 : ἔστι δὲ τοῦ μὲν ἑνός, ὥσπερ καὶ ἐν τῇ διαιρέσει τῶν ἐναντίων διεγράψαμεν, τὸ ταῦτὸ καὶ ὅμοιον καὶ ἴσον, τοῦ δὲ πλείους τὸ ἕτερον καὶ ἀνόμοιον καὶ ἄνισον. λεγομένου δὲ τοῦ ταῦτοῦ πολλαχῶς, ἕνα μὲν τρόπον κατ' ἀριθμὸν λέγομεν ἐνίοτε αὐτό, τὸ δ' ἐὰν καὶ λόγῳ καὶ ἀριθμῷ ἐν ἧ, οἷον σὺ σαυτῷ καὶ τῷ εἶδει καὶ τῇ ὕλῃ ἐν· ἔτι δ' ἐὰν ὁ λόγος ὁ τῆς πρώτης οὐσίας εἰς ἧ, οἷον αἱ ἴσαι γραμμαὶ εὐθεῖαι αἱ αὐταί, καὶ τὰ ἴσα καὶ ἰσογῶνια τετράγωνα, καίτοι πλείω· ἀλλ' ἐν τούτοις ἡ ἰσότης ἐνόησεν. ὅμοια δὲ ἐὰν μὴ ταῦτὰ ἀπλῶς ὄντα, μηδὲ κατὰ τὴν οὐσίαν ἀδιάφορα τὴν συγκεκλιμένην, κατὰ τὸ εἶδος ταῦτὰ ἧ, ὥσπερ τὸ μείζον τετράγωνον τῷ μικρῷ ὅμοιον, καὶ αἱ ἄνισοι εὐθεῖαι· αὐταὶ γὰρ ὅμοιαι μὲν, αἱ αὐταὶ δὲ ἀπλῶς οὐ· τὰ δὲ ἐὰν τὸ αὐτὸ εἶδος ἔχοντα, ἐν οἷς τὸ μᾶλλον καὶ ἡττον ἐγγίγνεται, μήτε μᾶλλον ἢ μήτε ἡττον. τὰ δὲ ἐὰν ἧ τὸ αὐτὸ πάθος καὶ ἐν τῷ εἶδει, οἷον τὸ λευκόν, σφόδρα καὶ ἡττον, ὅμοιά φασι εἶναι ὅτι ἐν τὸ εἶδος αὐτῶν. τὰ δὲ ἐὰν πλείω ἔχη ταῦτὰ ἢ ἕτερα, ἢ ἀπλῶς ἢ τὰ πρόχειρα ...

Aristote, *Constitution d'Athènes*. Texte et traduction G. Mathieu et B. Haussoullier. Collection des Universités de France, Paris, Belles-Lettres, 1922.

Aristote, *Du Ciel*, Texte et traduction P. Moraux. Collection des Universités de France, Paris, Belles-Lettres, 1965.

Aristote, *De la Génération et de la Corruption*, Texte et traduction Ch. Mugler. Collection des Universités de France, Paris, Belles-Lettres, 1966.

Boèce, *De Institutione Musica Libri V*, ed. G. Friedlein. Leipzig, in aed. B. G. Teubner, 1867.

Cléomède, *Cleomedis de motu circulari corporum caelestium libri duo*, ed. H. Ziegler. Leipzig in aed; B. G. Teubner, 1891. Traduction Théorie élémentaire, R. Goulet. Paris, Vrin 1980.

Démosthène, *Plaidoyers politiques*. Collection des Universités de France, 4. vol. Paris, Les Belles Lettres, 1946-1957. Tome I : Contre Androtion. Contre la loi de Leptine. Contre Timocrate. Texte et traduction O. Navarre et P. Orsini. 1957. Tome II : Contre Midias. Contre Aristocrate. Texte et traduction par J. Humbert et L. Gernet. 1959.

Diophanti Alexandrini Opera Omnia cum Graecis Commentariis, ed. P. Tannery, 2 vol., Leipzig, in aed. B. G. Teubner, 1893-95.

Les Six livres arithmétiques et le livre des nombres polygones. Traduction P. Ver Eecke. Paris, Blanchard, 1959.

Euclidis Opera omnia, ed. I. L. Heiberg & H. Menge, Leipzig, in aed. B. G. Teubner : I. *Elementa* I-IV (1883) ; II. *El. V-IX* (1884); III. *El. X* (1886); IV. *El. XI-XIII* (1885); V. *El. XIV-XV*, Scholia, Prolegomena critica (1888). VI. *Data, Marini Commentarius in Eucl. Data* (1896); VII. *Optica, Opticorum recensio Theonis, Catoptrica* (1895); VIII. *Phaenomena, Scripta musica, Fragmenta* (1916); IX. Supplementum: *Anaritii in decem libros priores Elementorum Euclidis Commentarii*, ed. M. Curtze (1899).

Euclidis Elementa, post Heiberg ed. E. S. Stamatis, Leipzig, B. G. Teubner, I. *El. I-IV* (1969); II. *El. V-IX* (1970); III. *El. X* (1972); IV. *El. XI-XIII* (1973); V, 1. *El. XIV-XV*, Scholia in lib. I-V (1977); V, 2. Scholia in lib. VI-XIII (1977).

Euclid, *The Elements*. Trad. angl. T. L. Heath. New York, Dover, 3 vol., 1956, réédition de la 2nd édition, Cambridge University Press, London, 1926.

Itard, J., *Les livres arithmétiques d'Euclide*, Paris, Hermann, coll. Histoire de la pensée, X, 1961.

Euclide, *La division du Canon*. Trad. franç. Ch-Em. Ruelle. Coll. des auteurs grecs relatifs à la musique, Paris, Baur, 1881.

Hérodote, *Histoires*. Texte et traduction Ph.-E. Legrand. 9 vol. Collection des Universités de France, Paris, Belles-Lettres, 1932.

Heronis Alexandrini opera quae supersunt omnia, ed. W. Schmidt, Leipzig, in aed. B. G. Teubner. III. : *Metrica, Dioptra* (1903, H. Schöne); IV. : *Definitiones, Geometrica* (1912, I.L. Heiberg); V. : *Stereometrica* (1914, I. L. Heiberg).

Codex Constantinopolitanus, Edition et traduction anglaise E.M. Bruins. 3 vol. Leiden, E. J. Brill, 1964.

Isocrate, *Discours*. Texte et traduction G. Mathieu et E. Brémond. 4 vol. Collection des Universités de France. Paris, Les Belles Lettres, 1929-62.

Iamblichii in Nocomachi arithmetica Introductionem Liber, ed. H. Pistelli. Leipzig, in aed. B. G. Teubner, 1894.

Nicomachi Gerasini Introductionis Arithmeticae Libri II, Ed. R. Hoche. Leipzig, in aed. B. G. Teubner, 1866. Nicomaque de Géraze, *Introduction arithmétique*. Traduction J. Bertier. Paris, Vrin, 1978.

Pappi alexandrini collectionis quae supersunt, ed. F. Hultsch, Berlin, Weidmann, 1876-1878 : I. Lib. II-V, rel.; II. Lib. VI-VII, rel.; III. 1: Lib. VIII, rel., schol. suppl.; III. 2 : Indices. Réimp. Amsterdam, A. M. Hakkert, 1965.

Pappus d'Alexandrie, *La Collection mathématique*, Traduction P. Ver Eecke. 2 vol. Bruges, Desclée de Brouwer, réimp. Paris, A. Blanchard, 1982.

Platon, *Oeuvres Complètes*, Collection des Universités de France. XIV tomes en 27 volumes. Paris, Les Belles Lettres, 1931-1965.

Platon, *Oeuvres complètes*, traduction L. Robin, 2 vol. Paris, Gallimard, Bibliothèque de la Pléiade, 1950.

Plutarque, *Les Vies parallèles*. Texte et traduction R. Flacelière et E. Chambry. Collection des Universités de France. XVI Tomes. II : Solon-Publicola. Thémistocle-Camille. 1961.

Procli Diadochi in primum Euclidis Elementorum librum Commentarii, ed. G. Friedlein. Leipzig, in aed. B. G. Teubner, 1873. réimp. Hildesheim, 1967.

Proclus de Lycie, *Les Commentaires sur le Premier Livre des Éléments d'Euclide*. Traduction P. Ver Eecke. Bruges, Desclée de Brouwer, 1948. Réimp. Paris, A. Blanchard.

Proclus, *A Commentary on the first Book of Euclid's Elements*. Traduction G. R. Morrow. Princeton University Press, 1970.

Theonis Smyrnaei Expositio rerum mathematicarum ad legendum Platonem utilium, ed. E. Hiller. Leipzig, in aed. B. G. Teubner, 1878.

Théon de Smyrne, *Exposition des connaissances mathématiques utiles à la lecture de Platon*. Texte et traduction J. Dupuis. Paris, 1892. Réimp. Bruxelles, Culture et Civilisation, 1966.

Thucydide, *Histoire de la guerre du Péloponnèse*. Collection des Universités de France. 5 tomes en 6 volumes. Paris, Les Belles Lettres, 1953-1972.

Die Fragmente der Vorsokratiker, Edition et traduction H. Diels. Rév. W. Kranz. 3 vol. 1903. Zürich, Weidmann. Réimp. Hildesheim, 1985.

Les Présocratiques, Traduction du précédent, sous la direction de J.P. Dumont. Bibliothèque de la Pléiade. Paris, Gallimard, 1988.

Thomas, I., *Greek Mathematical Works*. 2 vol. Cambridge Massachusetts, Harvard University Press & London, W. Heinemann, Loeb Classical Library, 1939.

Meiggs, R. & Lewis, D., *A Selection of Greek Historical Inscriptions to the end of the Fifth Century B.C.* Oxford, Clarendon Press, 1969.

Papyri et tablettes mathématiques

Baillet, J., Papyrus d'Akhmîm. (P. Cair. inv. 10758 ; Pack, 2306). *Mémoires de la société archéologique française au Caire*, IX, 1. Paris, Leroux, 1896.

Boyaval, B., Tablettes mathématiques du Musée du Louvre. *Revue Archéologique*, 1973, 243-260.

Boyaval, B., Le cahier de Papnouthion et les autres cahiers scolaires du Louvre. *Revue archéologique*, 1977, 215-230.

Boyaval, B., Sur quelques exercices d'arithmétique et de géométrie. *Chronique d'Égypte*, 1977, 311-315.

Brashear, W., Corrections à des tablettes arithmétiques du Louvre. *Revue des Etudes Grecques*, 97, 1984, 214-17.

Brashear, W., Neue griechische Bruchzahlentabellen. *Enchoria*, 12, 1984, 1-6.

Bruins, E. M., Sijpesteijn, P. J., et Worp, K. A., A Greek Mathematical Papyrus. (Pap. Vindobonensis Gr. inv. 26740). *Janus* LXI, 1974, 297-312.

- Bruins, E. M., Sijpesteijn, P. J., et Worp, K. A., Fragments of Mathematics on Papyrus. (Pap. Vindobonensis Gr. inv. 353 et 102). *Chronique d'Égypte*. 1977, 105-111.
- Crawford, D., A Mathematical Tablet (= Pap. Michael 62). *Aegyptus*, 33, 1953, 222-240.
- Fowler, D. H., Tables of Parts. *Zeitschrift für Papyrologie und Epigraphik*, 53, 1983, 273-4.
- Fowler, D. H., Catalogues of Tables. *Zeitschrift für Papyrologie und Epigraphik*, 75, 1988, 273-80.
- Gesting, H., & Vogel, K., Papyrus Vindobonensis 19996. *Mitteilungen aus der Nationalbibliothek in Wien*. Papyrus Erzherzog Reiner, Neue Serie 1, Wien, Österreichischen Staatsdruckerei, 1932.
- Goodspeed, E. J., Papyrus Ayer. *American Journal of Philology*, 19, 1896, 25-39.
- Parsons, J., A School-Book from the Sayce collection. *Zeitschrift für Papyrologie und Epigraphik*, 1970, 133-149.
- Robbins, F. E., Papyrus Michigan 621 (Pap. Mich. iii 146, Pack 2310). *Classical Philology*. XVIII, 1923, 328-33. Reproduit dans *Papyri in the University of Michigan Collection*, J. G. Winter éd., Vol. III, Ann Arbor, 1936, 52-9.
- Robbins, F. E., Papyrus Michigan 620. *Classical Philology*. XIV, 1929, 321-29. Avec une note de K. Vogel, 373-375.
- Robbins, F. E., Papyrus Michigan 4966 (Pap. Mich. iii 134, Pack 2309). *Isis*, 1936, 95-103.
- Shelton, J., Mathematical Problems on a papyrus from the Gent collection (SB III 6951 Verso). *Zeitschrift für Papyrologie und Epigraphik*, 1981, 91-94.
- Sijpesteijn, P. J., Table dans le pap. Vindobonensis Gr. inv. 36506 et 26012. *Zeitschrift für Papyrologie und Epigraphik*, 1975, 97-99.
- Sijpesteijn, P. J., A Wooden Tablet in the Moen Collection. *Chronique d'Égypte* III (Nouvelle série, 56), 1981, 99-101.
- Vitelli, G. (éd), *Papiri greci e latini*. P. S. I. VII 763 (Pack 2315) et 958 (Pack 2307). Societa Italiana per la ricerca dei papiri greci e latini in Egitto. Florence, 1912.
- Youtie, H. C., A table of fractions. *Zeitschrift für Papyrologie und Epigraphik*, 18, 1975, 283-284.
- B. Etudes*
- Bottéro, J., *La Mésopotamie : l'écriture, la raison et les dieux*. Paris, Gallimard, Bibliothèque des Histoires, 1987.
- Burkert, W., *Weisheit und Wissenschaft : Studien zu Pythagoras, Philolaos und Platon*. Nürnberg, Verlag Hans Carl, 1962. Traduction E.L. Minar Jr : *Lore and Science in ancient Pythagoreanism*. Harvard University Press, Cambridge (Massachusetts), 1972.
- Caveing, M., *La constitution du type mathématique de l'idéalité dans la pensée grecque*. Thèse soutenue le 29/10/77. (3 vol.) Atelier national de reproduction des thèses de Lille. 1982.
- Delatte, A., *Essai sur la politique pythagoricienne*, Paris, H. Champion, 1923. Réimp. Genève, Slatkine, 1979.
- Détienne, M., « En Grèce archaïque : Géométrie, Politique et Société ». *Annales E. S. C.* 20 (1965), pp. 425-441.
- Dijksterhuis, E. J., *Archimedes*. Amsterdam, Meulenhoff, 1938. Traduction anglaise C. Dikshoorn. Copenhagen, Munksgaard, 1956. Réed. Princeton University Press, 1987.
- Gernet, L., *Droit et Société dans la Grèce ancienne*. Paris, Recueils Sirey, 1955.
- Harvey, F. D., « Two kinds of equality ». *Classica and Medievalia* XXVI (1965), 101-146.
- Heath, T. L., *A History of Greek Mathematics*. Oxford, Clarendon Press, 1921.

- Réed. New York, Dover, 2 vol., 1981 : I. From Thales to Euclid. II. From Aristarchus to Diophantus.
- Heath, T. L., *Mathematics in Aristotle*. Oxford, Clarendon Press, 1949.
- Hilbert, D., *Grundlagen der Geometrie*. Stuttgart, B. G. Teubner Verlag.
Traduction P. Rossier : *Les fondements de la géométrie*. Paris, Dunod, 1971.
- Knorr, W. R., *The Evolution of the Euclidean Elements*. Dordrecht/ Boston. D. Reidel, 1975.
- Lasserre, F., *De Léodamas de Thasos à Philippe d'Oponite : Témoignages et Fragments*. Naples. Bibliopolis, 1987.
- Lévêque, P. & Vidal-Naquet, P., *Clisthène l'Athénien*. Essai sur la représentation de l'espace et du temps dans la pensée politique grecque de la fin du VI^e siècle à la mort de Platon.
Annales Littéraires de l'Université de Besançon, 65. Paris, Les Belles Lettres, 1973.
- Lloyd, G. E. R., *Polarity and Analogy : Two types of argumentation in early Greek Thought*.
Cambridge University Press, 1966.
- Lloyd, G. E. R., *Magic, Reason and Experience*. Cambridge University Press, 1979.
- Lloyd, G. E. R., *The Revolutions of Wisdom : Studies in the Claims and Practice of ancient Greek Science*.
Sather Classical Lectures, 52. Berkeley, University of California Press, 1987.
- Momigliano, A., *Alien Wisdom*. Cambridge University Press, 1976.
Traduction M. C. Roussel, *Sagesses barbares*, Paris, F. Maspero, 1979.
- Mugler, Ch., *Dictionnaire historique de la terminologie géométrique des Grecs*. 2 vol. Paris, Klincksiek, 1958.
- Tannery, P., *La géométrie grecque, comment son histoire nous est parvenue et ce que nous en savons*.
Paris, Gauthier-Villars, 1887. Réimp. Sceaux, J. Gabay, 1988.
- Vernant, J. P., *Les origines de la pensée grecque*. Paris, P. U. F., 1962.
- Vernant, J. P., « La formation de la pensée positive dans la Grèce archaïque », repris dans :
Mythe et pensée chez les Grecs. 1965. Réimp. Paris, Maspero, 1978, T. II, pp. 95-124.
- Vernant, J. P., « Structure géométrique et notions politiques dans la cosmologie d'Anaximandre ».
Repris dans : *Mythe et pensée chez les Grecs*. 1965, Réimp. Paris, Maspero, 1978, T. I, pp. 185-206.
- Vernant, J. P., « Géométrie et astronomie sphérique dans la première cosmologie grecque ».
Repris dans *Mythe et pensée chez les Grecs*. Réimp. Paris, Maspero, 1978, T. I, pp. 171-184.
- Vernant, J. P., *Religions, histoires, raisons*. Paris, petite collection maspero, 1979.
- Vlastos, G., « Equality and Justice in early Greek Cosmologies ». *Classical Philology* XLII (1947), 156-178.
- Will, E., « De l'aspect éthique des origines grecques de la monnaie ». *Revue historique* CCXII (1954).
- Will, E., « La Grèce archaïque » dans II^e Conférence Internationale d'Histoire Economique.
Aix-en-Provence, 1962, pp. 41-96.