

**ÉCOLE DOCTORALE SCIENCES ET TECHNOLOGIES**

**MAPMO**

**THÈSE** présentée par :

**Pierre CLARE**

soutenue le : **23 septembre 2009**

pour obtenir le grade de : **Docteur de l'université d'Orléans**

Discipline : **Mathématiques**

**$C^*$ -modules et opérateurs d'entrelacement associés à la  
série principale de groupes de Lie semi-simples**

**THÈSE dirigée par :**

**Pierre JULG**

Professeur, Université d'Orléans

**RAPPORTEURS :**

**Siegfried ECHTERHOFF**

Professeur, Université de Münster

**Alain VALETTE**

Professeur, Université de Neuchâtel

**JURY :**

**Georges SKANDALIS**

Professeur, Université Paris 7,  
Président du jury

**Siegfried ECHTERHOFF**

Professeur, Université de Münster

**Pierre JULG**

Professeur, Université d'Orléans

**Jean RENAULT**

Professeur, Université d'Orléans

**Alain VALETTE**

Professeur, Université de Neuchâtel



# Remerciements

*Sometimes I do, then again I think I don't  
Sometimes I will, then again I think I won't.*

Chuck Berry – *Reeling and rocking*

Mes premiers remerciements sont adressés à Pierre Julg, pour avoir accepté de diriger cette thèse. Son attention et ses conseils m'ont été un soutien précieux et constant tout au long de ce travail. J'ai eu le plaisir de profiter de l'impressionnante étendue de ses connaissances au cours de nombreuses discussions, pour lesquelles il s'est toujours montré très disponible. J'espère à l'avenir retrouver l'occasion d'apprendre des Mathématiques à son contact.

Georges Skandalis me fait un grand honneur en acceptant de présider le jury de cette thèse. Je lui en suis particulièrement reconnaissant, ainsi que pour certaines discussions qui m'ont aidé au début de ce travail.

Je remercie Siegfried Echterhoff et Alain Valette d'avoir accepté la tâche de rapporteurs, et plus encore pour l'attention avec laquelle ils s'en sont acquittés : leurs remarques et commentaires détaillés, m'ont été une aide précieuse. Je leur suis également reconnaissant de leurs invitations et de l'accueil qu'ils m'ont réservé à Münster et à Neuchâtel.

C'est pour moi une grande joie de remercier Jean Renault de faire partie de ce jury. Il s'est toujours montré encourageant à mon égard et j'ai eu la chance d'apprécier sa culture et de sa gentillesse à de nombreuses reprises. Les discussions, mathématiques ou non, que nous avons eues dans un certain nombre de moyens de transports, furent très souvent instructives et toujours agréables.

Enfin, la présence de Jean-Philippe Anker dans ce jury me donne l'occasion de le remercier de m'avoir permis, lorsqu'il était à la tête du MAPMO, de participer à différents colloques et écoles d'été au cours desquels j'ai beaucoup appris.

C'est le cours de DEA de Teodor Banica et Stefaan Vaes qui a décidé de mon orientation vers les algèbres d'opérateurs. Je les remercie tous deux de l'attention

qu'ils m'ont portée depuis ce moment.

Effectuer ma thèse au sein du MAPMO fut une grande chance. La première raison en est la bienveillance des membres de l'équipe *Algèbres d'Opérateurs et Applications*, et en particulier de Claire Anantharaman et Hermann Pfizner. Il a également été très enrichissant pour moi d'effectuer mon service d'enseignement en compagnie de Michèle Grillot, Carine Lucas et Roland Diel ; je les remercie de l'aide qu'ils m'ont apportée tout au long du monitorat. Le temps passé dans le bureau des thésards du laboratoire restera pour moi un excellent souvenir. Merci à tous ses occupants de m'avoir fait partager leur gentillesse, leur humour, leur hospitalité, leur talent culinaire et leurs points de vue cinématographiques discutables. Merci à Guillaume Voisin, qui fut un excellent compagnon depuis le début. Nicolas Greneche a pallié mon incurie informatique avec force patience : je les remercie. Enfin, je tiens à faire part à Anne Liger de toute ma reconnaissance : sans son aide, son efficacité et sa tolérance à mon égard, un grand nombre de choses se seraient avérées plus compliquées.

Je remercie Hervé Ménévis pour tout le soutien qu'il m'a apporté depuis que je suis arrivé dans sa classe de mathématiques supérieures, voilà maintenant dix ans. Sa rencontre a été déterminante pour moi à tous égards. Outre qu'il est un enseignant exceptionnel, il a toujours trouvé le temps de me faire découvrir des Mathématiques auxquelles je n'aurais pas eu accès sans lui. Je lui sais également gré de l'aide qu'il m'a offerte en maintes circonstances. Je lui dois enfin de m'avoir incité à assister aux conférences du CNAM en 2000, au cours desquelles j'ai entendu pour la première fois (Alain Connes) parler de Géométrie Non-Commutative. Pour cette raison et bien d'autres, cette thèse n'aurait pas vu le jour sans lui, c'est pourquoi je veux lui témoigner ici ma gratitude et mon amitié.

Je tiens également à remercier Bernard Gostiaux pour son excellent enseignement en classe de mathématiques spéciales.

Une partie de la rédaction de ce mémoire a eu lieu à l'université de Münster au cours du semestre *KK-theory and applications*. L'ambiance exceptionnelle qui y régnait a rendu cette partie du travail plus légère, et je remercie du fond du cœur Walther Paravicini et Moritz Weber pour leur accueil. Je remercie également Maria-Paula Gomez-Aparicio pour les nombreuses discussions que nous avons eues, en diverses occasions, et pour les commentaires qu'elle a pris le temps de me faire sur l'introduction de ce mémoire. Merci enfin à Nicolas Prudhon d'avoir manifesté de l'intérêt pour mon travail et de m'avoir invité à Metz. Les remarques qu'il m'a faites à cette occasion me furent utiles dans la rédaction de cette thèse.

Parce que le moral est chose fluctuante, je suis particulièrement redevable à Etienne Richard, Hélène Picot, Frédéric Albert et Pierre Rousselin. Il n'est pas

certain que nos rencontres les aient autant rassérénés que moi, aussi les en remercié-je sincèrement. Merci aussi à Julien Sohier et Karim Lounici pour leur amitié qui m'est précieuse et m'a soutenu dans mon travail.

C'est à ma famille que je dois d'avoir pu faire des études. Je remercie mon parrain Roger de m'avoir, avec ma grand-mère Hélène, donné la possibilité matérielle d'étudier pendant les premières années suivant le Baccalauréat. Le soutien que ma sœur Eve m'a témoigné de manière constante m'a toujours réconforté. Enfin, je remercie ma mère qui m'a appris à lire et à travailler.

Merci à Amandine pour sa patience.



# Table des matières

<b>Remerciements</b>	<b>i</b>
<b>Introduction</b>	<b>1</b>
<b>1 Préliminaires <math>C^*</math>-algébriques et rappels sur les groupes topologiques</b>	<b>13</b>
1.1 $C^*$ -algèbres, $C^*$ -modules et multiplicateurs . . . . .	13
1.2 Intégration dans les groupes topologiques et les espaces homogènes . .	17
1.2.1 Fonctions modulaires . . . . .	17
1.2.2 Intégration dans les espaces homogènes . . . . .	17
1.2.3 Décompositions de la mesure dans les groupes de Lie . . . . .	18
1.2.4 Intégrales à valeurs vectorielles . . . . .	19
1.3 Dual d'un groupe topologique . . . . .	19
1.3.1 Représentations unitaires . . . . .	20
1.3.2 Dual topologique . . . . .	23
1.3.3 Dual réduit . . . . .	25
1.4 $C^*$ -algèbres de groupes . . . . .	26
1.4.1 $C^*$ -algèbre pleine et $C^*$ -algèbre réduite . . . . .	27
1.4.2 Représentations de $G$ et de $C^*(G)$ . . . . .	28
1.4.3 Le cas commutatif . . . . .	30
1.4.4 Multiplicateurs de $C^*(G)$ . . . . .	30
<b>2 Induction et série principale</b>	<b>33</b>
2.1 L'induction, de Frobenius à Rieffel . . . . .	33
2.1.1 Induction pour les groupes topologiques . . . . .	33
2.1.2 Induction pour les $C^*$ -algèbres . . . . .	35
2.1.3 Imprimitivité . . . . .	38
2.2 Structure des groupes de Lie semi-simples . . . . .	39
2.2.1 Décomposition d'Iwasawa . . . . .	39
2.2.2 Sous-groupes paraboliques, décomposition de Langlands . . .	41
2.2.3 Décomposition de Bruhat . . . . .	43
2.2.4 Décompositions de la mesure associées . . . . .	43
2.3 La série principale : définitions . . . . .	44

2.3.1	Modèle induit . . . . .	45
2.3.2	Modèle compact . . . . .	46
2.3.3	Modèle ouvert . . . . .	47
2.4	Irréductibilité des représentations de la série principale . . . . .	48
2.4.1	Premiers résultats . . . . .	48
2.4.2	Opérateurs de Knapp et Stein . . . . .	50
2.4.3	Normalisation des opérateurs d'entrelacement . . . . .	53
<b>3</b>	<b><math>C^*</math>-modules d'induction généralisés</b>	<b>57</b>
3.1	Construction générale . . . . .	57
3.2	$C^*$ -modules adaptés à la série principale . . . . .	62
3.2.1	Fonctions modulaires . . . . .	62
3.2.2	Le module $\mathcal{E}(G/N)$ . . . . .	65
3.2.3	Action de $C_r^*(G)$ . . . . .	68
3.3	Autres modèles . . . . .	69
3.3.1	Modèle induit . . . . .	69
3.3.2	Modèle ouvert . . . . .	72
<b>4</b>	<b>Opérateurs d'entrelacement</b>	<b>77</b>
4.1	Fonctions homogènes et fonction norme . . . . .	77
4.1.1	Action de $A$ par dilatations . . . . .	78
4.1.2	Propriétés de la fonction norme . . . . .	80
4.2	Caractérisation de certains opérateurs bornés . . . . .	81
4.3	Opérateurs standard . . . . .	87
4.3.1	Expression dans le modèle induit . . . . .	88
4.3.2	Expression dans le modèle ouvert . . . . .	90
4.4	Existence et propriétés des opérateurs d'entrelacement . . . . .	92
4.4.1	Existence dans le modèle ouvert . . . . .	92
4.4.2	Parties densément définies . . . . .	94
4.4.3	Partie résiduelle . . . . .	97
4.4.4	Démonstration de l'existence dans les autres modèles . . . . .	99
4.5	Comparaison avec les opérateurs de Knapp et Stein . . . . .	100
4.5.1	Domaine de définition . . . . .	100
4.5.2	Normalisation des opérateurs d'entrelacement : principe . . . . .	101
<b>5</b>	<b>Etude de cas particuliers : <math>SL_2(\mathbb{R})</math> et <math>SL_2(\mathbb{C})</math></b>	<b>103</b>
5.1	Structure, intégration . . . . .	103
5.1.1	Décomposition d'Iwasawa . . . . .	103
5.1.2	Composante de Lévi et groupe de Weyl . . . . .	105
5.1.3	Décomposition de Bruhat et Langlands, fonction norme . . . . .	106
5.1.4	Intégration . . . . .	107
5.1.5	Transformée de Fourier : notations et rappels . . . . .	108
5.2	Représentations de $SL_2(\mathbb{R})$ . . . . .	112

---

5.2.1	Série discrète . . . . .	112
5.2.2	Série principale . . . . .	112
5.2.3	Série complémentaire . . . . .	113
5.2.4	Limites de la série discrète . . . . .	113
5.2.5	Opérateurs d'entrelacement . . . . .	114
5.2.6	Dual tempéré de $SL_2(\mathbb{R})$ . . . . .	117
5.3	$C^*$ -modules associés . . . . .	117
5.3.1	Fonction modulaire . . . . .	118
5.3.2	Modèle ouvert . . . . .	118
5.3.3	Le $C^*$ -module $\mathcal{E}$ comme champ continu d'espaces de Hilbert . . . . .	119
5.4	Opérateurs d'entrelacement . . . . .	120
5.4.1	Opérateur $\mathcal{I}_w$ . . . . .	120
5.4.2	Normalisation . . . . .	122
5.5	Cas de $SL_2(\mathbb{C})$ . . . . .	125
5.5.1	Structure . . . . .	125
5.5.2	Dual et $C^*$ -algèbre réduite . . . . .	125
5.5.3	Opérateur d'entrelacement et normalisation . . . . .	127
5.6	Décomposition suivant les caractères de $M$ . . . . .	128
5.6.1	Cas de $SL_2(\mathbb{R})$ . . . . .	129
5.6.2	Cas de $SL_2(\mathbb{C})$ . . . . .	130



# Introduction

Le point de départ de la théorie des représentations de groupes semble remonter à un échange épistolaire du printemps 1896 entre G. Frobenius et R. Dedekind [Cur92, Haw71], qui se préoccupaient alors de groupes finis. L'essor de la théorie au XX<sup>ème</sup> siècle fut considérable et les interactions avec d'autres domaines mathématiques ou physiques sont aujourd'hui innombrables.

Un des points de vue modernes sur cette théorie est celui de la géométrie non-commutative, où l'étude de certains objets singuliers pour lesquels les outils classiques de l'analyse sont inadéquats, est menée au moyen d'algèbres d'opérateurs. Nous nous intéressons ici au dual unitaire d'un groupe de Lie semi-simple. Plus précisément, si  $G$  est groupe topologique, on note  $\widehat{G}$  la famille des classes d'équivalence de représentations irréductibles unitaires de  $G$ . Il s'agit d'un ensemble, qui peut être muni d'une topologie naturelle, la topologie de Fell, qui en fait généralement un espace non-séparé. Lorsque  $G$  est abélien, la dualité de Pontrjagin montre que  $\widehat{G}$  est un groupe topologique. Dans ce cas les  $C^*$ -algèbres pleine et réduite du groupe s'identifient avec l'algèbre des fonctions continues nulles à l'infini sur  $\widehat{G}$  via la transformation de Fourier :

$$\mathcal{F} : C_r^*(G) \simeq C_0(\widehat{G}).$$

Cela suggère que, dans le cas général,  $\widehat{G}$  doit être compris comme un *espace non-commutatif*, qui sera mieux décrit par les  $C^*$ -algèbres associées à  $G$  que par des algèbres de fonctions.

Dans le cas des groupes de Lie semi-simples, la partie du dual unitaire associée à la représentation régulière, appelée *dual réduit* et notée  $\widehat{G}_r$ , est bien connue, notamment grâce aux travaux initiés par Harish-Chandra dès les années 1950 [HC53, HC54b, HC54c, HC55, HC56a, HC56b, HC76]. Les résultats de classification montrent que tous les éléments de  $\widehat{G}_r$  peuvent être obtenus comme sous-représentations de représentations d'un type particulier, induites de sous-groupes paraboliques cuspidaux, c'est-à-dire admettant une décomposition de Langlands de la forme  $MAN$  où  $M$  possède une série discrète. Ces représentations sont induites de représentations

de la forme  $\sigma \otimes \chi \otimes 1$ , où  $\sigma$  est une représentation de la série discrète de  $M$ , notée  $\widehat{M}_d$ , et  $\chi$  un caractère unitaire de  $A$ . Plus précisément, il existe une décomposition du dual réduit comme réunion indexée par les classes d'association de sous-groupes paraboliques cuspidaux :

$$\widehat{G}_r = \bigsqcup_{[P]} \widehat{G}_P,$$

où  $\widehat{G}_P$  désigne l'ensemble des classes d'équivalence de sous-représentations irréductibles des induites de la forme  $\text{Ind}_P^G \sigma \otimes \chi \otimes 1$ . Lorsque le sous-groupe parabolique considéré est minimal, le sous-groupe  $M$  est compact et les représentations correspondantes constituent une famille de  $\widehat{G}_r$  indexée par  $\widehat{M} \times \widehat{A}$ , appelée *série principale unitaire*. Dans le cas où  $G$  possède une série discrète, il est lui-même cuspidal et la famille correspondante n'est autre que la série discrète.

L'espace  $\widehat{G}_P$  est naturellement paramétré par  $\widehat{M}_d \times \widehat{A}$ , moyennant la reconnaissance des éléments irréductibles parmi les représentations de la forme  $\text{Ind}_P^G \sigma \otimes \chi \otimes 1$  et l'identification des équivalences unitaires entre ces éléments. Les résultats de F. Bruhat [Bru56] pour la série principale unitaire, étendus par Harish-Chandra [HC76] à des situations plus générales, établissent l'irréductibilité des représentations induites pour une grande partie de l'espace des paramètres. Les valeurs donnant éventuellement lieu à de la réductibilité sont les points fixes sous l'action du groupe de Weyl  $W_P$  défini comme quotient du normalisateur  $\tilde{L} = \mathcal{N}_G(\mathfrak{a})$  par le centralisateur  $L = \mathcal{Z}_G(\mathfrak{a})$ . Les objets permettant de résoudre la question de l'irréductibilité dans les cas restants sont les opérateurs d'entrelacement introduits par Knapp et Stein dans [KS71, KS80]. Ces opérateurs, associés aux éléments de  $W_P$ , fournissent des équivalences unitaires permettant de démontrer que des représentations induites de paramètres provenant d'une même orbite sous  $W_P$  sont équivalentes. Enfin, l'étude de leurs singularités permet de caractériser les phénomènes de réductibilité aux points fixes. On obtient finalement une surjection

$$\widehat{G}_P \longrightarrow \left( \widehat{M}_d \times \widehat{A} \right) / W_P.$$

Dans certains cas particuliers, celui des groupes complexes par exemple, ou plus généralement pour les groupes admettant une seule classe de conjugaison de sous-groupes de Cartan, cette application est bijective, et la topologie du dual réduit est alors séparée. Dans le cas général, le défaut d'injectivité est mesuré par les singularités des opérateurs de Knapp et Stein.

Dans le cadre de la géométrie non-commutative, la connaissance détaillée du dual réduit constitue une étape fondamentale dans la détermination de la  $K$ -théorie de la  $C^*$ -algèbre réduite du groupe. Plus précisément, les travaux relatifs à la conjecture de Connes-Kasparov dus à M. Penington et R. Plymen pour les groupes complexes [PP83], en rang 1 et dans le cas plus général des groupes à classe de conjugaison

de sous-groupes de Cartan unique à A. Valette [Val84, Val85], et A. Wassermann [Was87] pour les groupes de Lie linéaires connexes réductifs en général, s'appuient sur une décomposition de la  $C^*$ -algèbre réduite du groupe reflétant la structure du dual réduit. En particulier, les résultats de [Val84] montrent que la compréhension de l'induction de Dirac repose sur la description de la série discrète d'une part, et des phénomènes de réductibilité dans la série principale d'autre part. Au niveau de la  $C^*$ -algèbre réduite, A. Wassermann énonce dans [Was87] un isomorphisme

$$C_r^*(G) \simeq \bigoplus_{P, \omega} \left( C_0(\hat{A}) \otimes \mathcal{K}(\mathcal{H}_\omega) \right)^{W_\omega}. \quad (\dagger)$$

La somme directe est indexée par les classes d'équivalences  $(P, \omega)$ , où  $P = MAN$  désigne un sous-groupe parabolique cuspidal,  $\omega \in \widehat{M}_d$  une représentation de la série discrète du groupe réductif  $M$  et  $\mathcal{H}_\omega$  l'espace de la représentation  $\text{Ind}_P^G \omega \otimes 1 \otimes 1$ . L'action du stabilisateur  $W_\omega$  de  $\omega$  dans  $W$  sur  $C_0(\hat{A}) \otimes \mathcal{K}(\mathcal{H}_\omega)$  est implémentée par les opérateurs de Knapp et Stein. La détermination des représentations intervenant dans le calcul de la  $K$ -théorie repose sur l'analyse des groupes  $W_\omega$ . La théorie développée dans [KS71, KS80] montre que ces groupes s'écrivent en fonction des  $R$ -groupes comme des produits semi-directs  $W_\omega = W'_\omega \rtimes R_\omega$ . Les représentations  $\omega$  contribuant à la  $K$ -théorie sont exactement celles pour lesquelles le groupe  $W'_\omega$  est réduit à l'élément neutre. Dans les cas mentionnés plus haut où le dual réduit est séparé, la  $C^*$ -algèbre réduite est stablement isomorphe à celle des fonctions continues nulles à l'infini sur le dual réduit. L'équivalence de Morita

$$C_r^*(G) \underset{\text{Morita}}{\sim} C_0(\widehat{G}_r)$$

prolonge dans ce cas la correspondance établie dans le cas commutatif par l'analyse de Fourier<sup>1</sup>.

---

Soit  $G$  un groupe de Lie semi-simple. Les représentations de la série principale sont les induites à  $G$  de représentations unitaires irréductibles de dimension finie de sous-groupes paraboliques minimaux. Si  $P$  est un tel sous-groupe, de décomposition de Langlands  $P = MAN$ , les représentations à induire sont de la forme

$$\sigma \otimes e^\nu \otimes 1,$$

---

1. Le Théorème 2.9 de [Val85] est un résultat plus précis : il fournit un isomorphisme entre  $C_r^*(G)$  et  $C_0(\widehat{G}_r, \mathcal{K}(\mathcal{H}))$  sous des hypothèses recouvrant, outre les cas d'une unique classe de conjugaison de sous-groupes de Cartan, ceux de  $SL_3(\mathbb{R})$  et  $SO(2n, 1)$ .

avec  $\sigma \in \widehat{M}$  et  $e^\nu \in \widehat{A}$  donnée par  $\nu \in \mathfrak{a}'_{\mathbb{C}}$ . On note alors

$$\pi_P^{\sigma,\nu} = \text{Ind}_P^G \sigma \otimes e^\nu \otimes 1.$$

Cette représentation est unitaire lorsque  $\nu$  est imaginaire pur. Le Théorème 2.4.1, dû à Bruhat [Bru56] fournit une condition suffisante d'irréductibilité en donnant, à l'aide de techniques mettant en œuvre la théorie des distributions, une borne supérieure pour les nombres d'entrelacement. Il implique que  $\pi_P^{\sigma,\nu}$  est irréductible pour un ouvert dense de valeurs de  $(\sigma, \nu) \in \widehat{M} \times \widehat{A}$ , complémentaire de l'ensemble des points fixes sous l'action du groupe de Weyl  $W$ .

Les résultats de Knapp et Stein [KS71, KS80] complètent cette analyse en permettant de déterminer les cas de réductibilité aux paramètres singuliers. Ces travaux s'appuient sur les différentes réalisations possibles de la série principale unitaire. En effet, la réalisation classique des représentations induites telles qu'elles sont utilisées par Mackey [Mac49, Mac51, Mac52] et Blattner [Bla61, Bla63] définit les espaces de ces représentations comme des complétés d'espaces de sections du fibré  $G$ -équivariant

$$\begin{array}{c} G \times_{\sigma,\nu} \mathcal{H}_{\sigma,\nu} \\ \downarrow \\ G/P \end{array}$$

et la connaissance de la structure des groupes Lie semi-simple permet de décrire ces espaces en termes de sous-groupes particuliers. Ainsi, la décomposition d'Iwasawa permet, moyennant le choix d'un sous-groupe compact maximal  $K$  et l'homéomorphisme  $G/P \simeq K/M$ , de considérer les représentations de la série principale comme agissant sur des espaces de fonctions sur  $K$ . Enfin, en se restreignant à la cellule ouverte  $\overline{N}MAN$  dans la décomposition de Bruhat, l'espace de  $\pi_P^{\sigma,\nu}$  peut être réalisé comme un espace de fonctions  $L^2(\overline{N})$ . En raison des propriétés topologiques des sous-ensembles de  $G$  utilisés pour les définir, ces réalisations sont respectivement appelées *modèle compact* et *modèle ouvert* pour les représentations de la série principale.

De la définition des représentations induites, il suit que l'espace de  $\pi_P^{\sigma,\nu}$  est le complété d'un ensemble de fonctions  $N$ -invariantes. Si  $P = LN$  et  $P' = LN'$  sont deux paraboliques minimaux partageant la même composante de Levi  $L = MA$  et  $(\sigma, \nu) \in \widehat{M} \times \widehat{A}$ , un opérateur d'entrelacement entre  $\pi_P^{\sigma,\nu}$  et  $\pi_{P'}^{\sigma,\nu}$  doit transformer une fonction  $N$ -invariante en une fonction  $N'$ -invariante. On vérifie que l'intégrale

$$I^{\sigma,\nu} f(g) = \int_{\frac{N'}{N \cap N'}} f(gn') dn'$$

par laquelle la fonction  $f$  est moyennée afin de la rendre  $\overline{N}'$ -invariante, possède *formellement* les propriétés souhaitées. Cette expression ne définit cependant pas un opérateur d'entrelacement, car l'intégrale est en général non convergente.

L'analyse menée par Schiffmann dans [Sch71] permet de se restreindre au cas des groupes de rang 1 et à des opérateurs, dits *standard*, de la forme

$$I_w^{\sigma, \nu} f(g) = \int_{\overline{N}} f(gw\bar{n}) d\bar{n}$$

où  $w$  est un représentant de l'élément non trivial du groupe de Weyl et  $\overline{N}$  l'image de  $N$  par l'involution de Cartan. La technique utilisée par Knapp et Stein consiste, pour  $\sigma$  fixée, à autoriser  $\nu$  à prendre des valeurs non imaginaires pures, c'est-à-dire à considérer des représentations de la série principale non-unitaire. Pour certaines valeurs de la partie réelle de  $\nu$  les intégrales  $I_w^{\sigma, \nu} f$  sont convergentes et, vues comme des fonctions de  $\nu$ , peuvent se prolonger méromorphiquement à  $\mathfrak{a}'_{\mathbb{C}}$ , avec des pôles. L'irréductibilité fournie par le Théorème de Bruhat et le Lemme de Schur permettent alors de construire des fonctions méromorphes scalaires  $\eta_{\sigma}$  de  $\nu$ , dont l'étude des singularités permet de caractériser l'irréductibilité des représentations de la série principale, y compris dans les cas ne relevant pas du résultat de Bruhat. On en déduit également des fonctions  $\gamma_{\sigma}(\nu)$  qui normalisent les opérateurs d'entrelacement au sens où les opérateurs

$$\frac{1}{\gamma_{\sigma}(\nu)} I^{\sigma, \nu}$$

sont de véritables opérateurs d'entrelacement, réalisant des équivalences unitaires entre les représentations de la série principale. Ces résultats sont rappelés au Chapitre 2.

L'objet de ce travail est la description de la série principale unitaire d'un groupe de Lie semi-simple en termes de  $C^*$ -algèbres et de  $C^*$ -modules, et la construction d'opérateurs analogues aux intégrales d'entrelacement de Knapp et Stein et leurs normalisations. Le point de départ est la formulation de la théorie des représentations induites dans un cadre  $C^*$ -algébrique par M. A. Rieffel. Nous présentons brièvement, au Chapitre 2, la machinerie qu'il développe dans [Rie71], où sont construits les  $C^*$ -modules permettant l'induction pour les  $C^*$ -algèbres et où le théorème d'imprimitivité de Mackey est exprimé par une équivalence de Morita.

Dans le cas des  $C^*$ -algèbres de groupes, la construction de M. A. Rieffel produit, pour  $H$  sous-groupe fermé de  $G$ , un  $C^*$ -module sur  $C^*(H)$ , noté  $\mathcal{E}(G)$  et muni d'une action à gauche de  $C^*(G)$  de sorte que pour tout espace de Hilbert  $\mathcal{H}$  sur lequel  $C^*(H)$  est représentée, le produit tensoriel  $\mathcal{E}(G) \otimes_{C^*(H)} \mathcal{H}$  est un nouvel espace de Hilbert sur lequel  $C^*(G)$  agit. Le module  $\mathcal{E}(G)$  est obtenu comme complété de  $C_c(G)$  et peut être considéré comme un objet encodant globalement toutes les représentations induites de  $H$  à  $G$ . En effet, il existe, pour chaque représentation  $(\pi, \mathcal{H}_{\pi})$  une application :

$$q_{\pi} : \mathcal{E}(G) \otimes \mathcal{H}_{\pi} \longrightarrow \mathcal{H}_{\text{Ind}_H^G \pi}$$

qui spécialise  $\mathcal{E}(G)$  sur  $\text{Ind}_H^G \pi$  en réalisant un isomorphisme unitaire d'espaces de Hilbert qui entrelace les actions de  $C^*(G)$ .

Soient à présent un groupe de Lie semi-simple  $G$  et  $P = LN$  un sous-groupe parabolique minimal de composante de Levi  $L$ . Les représentations de la série principale provenant de  $P$  sont induites à partir de couples  $(\sigma, \nu) \in \widehat{M} \times \widehat{A} = \widehat{L}$ . Pour un tel couple, la représentation  $\pi_P^{\sigma, \nu}$  agit sur le complété d'un espace de sections du produit fibré  $G \times_{\sigma, \nu} \mathcal{H}_{\sigma, \nu}$  sur  $G/P$ . Afin de décrire cette famille de représentations indexée par  $\widehat{L}$ , on est donc porté à construire un  $C^*$ -module d'induction sur  $C^*(L)$ . D'autre part, le groupe  $L$  normalisant  $N$ , la variété de drapeau  $G/P$  s'identifie au quotient  $(G/N)/L$ . Une idée naturelle est de reprendre la construction de M. A. Rieffel en remplaçant  $G$  par  $G/N$  muni de l'action à droite de  $L$  provenant de celle de  $P$  et de l'action à gauche, de  $G$ . L'espace  $G/N$  n'étant pas un groupe, la construction originale doit être légèrement adaptée, et nous obtenons finalement, au Chapitre 3 un  $C^*$ -module

$${}_{C^*(G)}\mathcal{E}(G/N)_{C^*(L)}.$$

Ces modules sont liés aux modules d'induction habituels par un isomorphisme

$$\mathcal{E}(G/N) \simeq \mathcal{E}(G) \otimes_{C^*(P)} C^*(L)$$

et réalisent encore l'induction au sens où l'on dispose encore d'applications de localisation

$$\tilde{q}_{\sigma, \nu} : \mathcal{E}(G/N) \otimes \mathcal{H}_{\sigma, \nu} \longrightarrow \mathcal{H}_{\pi_P^{\sigma, \nu}}.$$

Ainsi, si l'on considère tous les sous-groupes paraboliques minimaux  $P_i = LN_i$  partageant la même composante de Levi  $L$ , les représentations de la série principale associées sont encodées par la famille des  $\mathcal{E}(G/N_i)$  qui sont tous des  $C^*(L)$ -modules.

La structure et les propriétés du groupe semi-simple  $G$  peuvent ensuite être exploitées pour décrire  $\mathcal{E}(G/N)$ . Il est ainsi possible de réaliser ce module comme un espace de sections du produit fibré

$$\begin{array}{c} G/N \times_L C^*(L) \\ \downarrow \\ G/P. \end{array}$$

Cela s'apparente à la description classique de la série principale comme famille de représentations induites, les espaces des représentations  $\sigma, \nu$  étant remplacés par l'objet global  $C^*(L)$ , et l'on parle donc de *modèle induit* pour  $\mathcal{E}(G/N)$ . D'autre part, nous établissons, en considérant l'image dans  $G/N$  de la cellule de Bruhat ouverte de  $G$ , le résultat suivant :

**Théorème.** *Le  $C^*(L)$ -module hilbertien  $\mathcal{E}(G/N)$  est isométrique au produit tensoriel*

$$L^2(\overline{N}) \otimes C^*(L).$$

Cet énoncé (Proposition 3.3.4) constitue l'analogie du modèle ouvert classique, originellement associé à chaque représentation de la série principale.

Afin de transposer dans ce cadre les résultats de Bruhat, ainsi que ceux de Knapp et Stein, considérons ensuite deux sous-groupes paraboliques  $P_1 = LN_1$  et  $P_2 = LN_2$  de  $G$  et les  $C^*(L)$ -modules  $\mathcal{E}(G/N_1)$  et  $\mathcal{E}(G/N_2)$  associés. Idéalement, les analogues des opérateurs d'entrelacement seraient des éléments de

$$\mathcal{L}_{C^*(L)}(\mathcal{E}(G/N_1), \mathcal{E}(G/N_2))$$

qui commutent aux actions à gauche respectives de  $C^*(G)$  sur ces modules. L'étude d'objets possédant des propriétés approchantes est menée au Chapitre 4.

Tout d'abord, nous caractérisons, pour les groupes de rang 1, les opérateurs bornés du  $C^*(L)$ -module hilbertien  $\mathcal{E}(G/N)$  qui commutent à l'action de  $C^*(G)$ .

**Théorème.** *Les opérateurs  $T \in \mathcal{L}_{C^*(L)}(\mathcal{E}(G/N))$  qui commutent à l'action de  $G$  sur  $\mathcal{E}(G/N)$  sont exactement les multiplicateurs centraux de  $C^*(L)$ .*

Ceci constitue un résultat d'irréductibilité analogue à celui de Bruhat, au sens où le commutant de l'action de  $C^*(G)$  sur  $\mathcal{E}(G/N)$  est réduit à ce qui tient lieu d'homothéties dans le cadre  $C^*$ -algébrique. La démonstration de ce résultat (Théorème 4.2.1) est d'ailleurs inspirée de la preuve de Bruhat : elle repose sur la caractérisation des distributions homogènes fournies par les formes d'entrelacement associées aux opérateurs considérés.

L'étape suivante consiste à essayer de construire des opérateurs analogues aux opérateurs d'entrelacement standards, *id est* à donner un sens à l'intégrale

$$I_w F(x) = \int_{\overline{N}} F(xw\bar{n}) d\bar{n}$$

pour  $F$  dans un sous-module de  $\mathcal{E}(G/N)$ . La présence des pôles dans les opérateurs de Knapp et Stein laisse supposer qu'un tel opérateur ne s'étendra pas en un opérateur borné de  $\mathcal{E}(G/N)$  dans l'analogie  $\mathcal{E}(G/N)^w$  tordu par l'action de  $w$ . Aux Paragraphes 4.3 et 4.4,  $I_w$  est exprimé dans les différents modèles de  $\mathcal{E}(G/N)$ . Nous démontrons alors la convergence de l'intégrale définissant l'opérateur noté  $\mathcal{I}_w$  dans le modèle ouvert pour des fonctions continues à support compact (Proposition

4.4.1). Il apparaît que cet opérateur ne prend pas ses valeurs dans  $L^2(\overline{N}) \otimes C^*(L)$  et ne peut donc même pas être considéré comme un opérateur densément défini entre  $C^*$ -modules.

Il est néanmoins possible d'analyser comment ce phénomène reflète les singularités des opérateurs classiques. Plus précisément, l'opérateur d'entrelacement se décompose en une somme

$$\mathcal{I}_w = \mathcal{I}_w^\infty + \mathcal{I}_w^0 + \mathcal{R}_w$$

où  $\mathcal{I}_w^\infty$  se prolonge en un opérateur (conjecturalement) borné de  $C^*$ -modules et  $\mathcal{I}_w^0$  est un opérateur densément défini entre  $C^*$ -modules. Enfin, la partie résiduelle  $\mathcal{R}_w$  est donnée par une mesure de Radon sur  $L$ , que nous calculons concrètement pour  $SL_2(\mathbb{R})$  où la commutativité de  $L$  offre des simplifications permettant de faire apparaître nettement la singularité de cet opérateur. Nous démontrons enfin au Paragraphe 4.4.4 la convergence de l'intégrale  $I_w F(x)$  pour  $F$  dans des sous-espaces de fonctions inclus dans les autres modèles. En particulier, on démontre le résultat suivant :

**Théorème.** *L'intégrale*

$$\int_{\overline{N}} F(gw\bar{n}) d\bar{n}$$

*définit une application linéaire  $I_w : C_c(G/N) \longrightarrow C(G/N)$ .*

Ce résultat constitue le Théorème 4.3.1, où  $C_c(G/N)$  est vu comme sous-espace de  $\mathcal{E}(G/N)$  dans le modèle initial, inspiré de la construction de M. A. Rieffel.

La singularité des opérateurs obtenus ne permet pas de les composer pour essayer d'appliquer le résultat d'irréductibilité et construire un analogue des fonctions  $\eta$  de Knapp et Stein. Le principe de la normalisation, exposé au Paragraphe 4.5.2 consiste alors à construire un unitaire  $\mathcal{U}$  de  $\mathcal{L}_{C^*(L)}(\mathcal{E}(G/N))$  tel que la composée  $I \circ \mathcal{U}$  agisse seulement par multiplication sur  $C^*(L)$ , où  $I$  désigne l'opérateur  $I_w$  tordu par  $w$  et donc  $C^*(L)$ -linéaire. Nous proposons une telle construction dans le modèle ouvert pour les groupes  $SL_2(\mathbb{K})$  avec  $\mathbb{K} = \mathbb{R}$  ou  $\mathbb{C}$ . Plus précisément, on obtient le résultat suivant :

**Théorème.** *Soit  $G = SL_2(\mathbb{R})$  ou  $SL_2(\mathbb{C})$ . Il existe un unitaire  $\mathcal{U}$  de la  $C^*$ -algèbre  $\mathcal{L}_{C^*(L)}(\mathcal{E}(G/N))$  et une fonction  $\gamma : L \longrightarrow \mathbb{C}$ , tels que l'on ait, pour  $f \otimes \varphi \in L^2(\overline{N}) \otimes C_c(L)$  dans le modèle ouvert,*

$$I \circ \mathcal{U}(f \otimes \varphi) = f \otimes \varphi * \gamma.$$

Cela résulte des propositions 5.4.4 et 5.5.2 où les fonctions  $\gamma$  sont explicitées, et pour la démonstration desquelles on exploite le fait que  $\overline{N}$  s'identifie à  $\mathbb{K}$  et  $L$ , commutatif, à  $\mathbb{K}^\times$ , en appliquant du calcul fonctionnel à des opérateurs différentiels sur  $\mathbb{R}$  et  $\mathbb{C} \simeq \mathbb{R}^2$  respectivement. La méthode employée laisse supposer que le procédé puisse être adapté pour les autres groupes de rang 1, en considérant des opérateurs différentiels sur une certaine sous-variété de  $L$ . Cela constituera sans doute la suite de ce travail, de même que l'extension au cas des groupes de rang supérieur des résultats obtenus ici.

La description en termes des  $C^*$ -modules  $\mathcal{E}(G/N)$  et des opérateurs d'entrelacement normalisés associés à la série principale d'un groupe de Lie devra être reliée aux résultats existants sur la structure de la  $C^*$ -algèbre réduite de ce groupe présentés dans [Val84] et [Was87], qui permettent le calcul des groupes de  $K$ -théorie de la  $C^*$ -algèbre réduite de  $G$  et sont à la base de la démonstration de la conjecture de Connes-Kasparov pour les groupes de Lie considérés. Une première étape sera l'écriture, à l'aide de nos modules d'une décomposition analogue à la formule (†). Si  $P = L \ltimes N = MAN$  désigne un parabolique cuspidal, ou plus simplement minimal, on notera  $C_P^*(G)$  l'image de  $C_r^*(G)$  dans  $\mathcal{K}_{C^*(L)}(\mathcal{E}(G/N))$ , et l'on cherchera à décomposer  $C_r^*(G)$  en somme directe indexée par les classes d'association de paraboliques cuspidaux des algèbres  $C_P^*(G)$ . La conjugaison par les opérateurs  $U^w$  doit fournir une action de  $W_P$  par automorphismes sur la  $C^*$ -algèbre des opérateurs compacts de  $\mathcal{E}(G/N)$  :

$$W_P \longrightarrow \text{Aut}(\mathcal{K}_{C^*(L)}(\mathcal{E}(G/N))).$$

Le fait que l'action de  $\mathcal{N}_G(\mathfrak{a})$  se factorise par  $W_P$  est analogue à la relation de cocycle vérifiée par les opérateurs de Knapp et Stein [Was87]. La seconde étape serait d'identifier la composante  $C_P^*(G)$  comme les points fixes sous cette action, c'est-à-dire de démontrer un isomorphisme

$$C_P^*(G) \simeq (\mathcal{K}_{C^*(L)}(\mathcal{E}(G/N)))^{W_P}.$$

Le lien avec la formule (†) sera la décomposition suivante, selon les caractères de  $M$  :

$$\mathcal{K}_{C^*(L)}(\mathcal{E}(G/N)) \simeq \bigoplus_{\omega \in \widehat{M}} C_0(\widehat{A}) \otimes \mathcal{K}(\mathcal{H}_\omega),$$

ainsi que sa généralisation au cas cuspidal, où la somme sera indexée par  $\widehat{M}_d$ .

Enfin, on cherchera à faire le lien avec « l'analogie de Mackey » déjà développée par N. Higson dans le cas des groupes complexes [Hig07], et consistant à comparer le dual réduit de  $G$  à celui du groupe  $G_0 = K \ltimes \mathfrak{g}/\mathfrak{k}$ , qui lui est associé moyennant le choix d'un sous-groupe compact maximal  $K$ . Le point de départ consistera à généraliser le Théorème 5.5.1, en s'appuyant sur la décomposition précédente de

$\mathcal{K}_{C^*(L)}(\mathcal{E}(G/N))$ . Une autre perspective serait d'étendre la construction des  $C^*$ -modules  $\mathcal{E}(G/N)$  aux produits croisés en suivant les techniques présentées dans [Gre78], et l'on peut imaginer une construction d'opérateurs d'entrelacement à coefficients dans une  $C^*$ -algèbre.

---

L'organisation de ce mémoire est la suivante :

Au premier chapitre, nous introduisons les définitions et faits basiques sur les groupes topologiques et leurs représentations. Nous présentons également certains des objets de la géométrie non-commutative,  $C^*$ -algèbres et  $C^*$ -modules hilbertiens utilisés dans la suite. Nous rappelons en outre un certain nombre de faits sur le dual unitaire d'un groupe et sa topologie.

Le début du second chapitre est consacré à la formulation de l'induction des représentations dans le cadre  $C^*$ -algébrique due à M. A. Rieffel. Nous y rappelons les faits principaux à propos des  $C^*$ -modules d'induction pour les  $C^*$ -algèbres de groupes, ainsi que la formulation du théorème d'imprimitivité en termes d'équivalence de Morita. Sont ensuite exposés certains faits liés à la structure des groupes de Lie semi-simples et de leurs sous groupes paraboliques. Nous rappelons enfin la définition de la série principale d'un groupe de Lie semi-simple et ses différentes réalisations, puis le résultat d'irréductibilité de Bruhat, ainsi que ceux de Knapp et Stein sur les opérateurs d'entrelacement et leur normalisation.

Dans le troisième chapitre, nous construisons des  $C^*$ -modules  $\mathcal{E}(X)$ , cette construction généralisant légèrement celle de [Rie71]. Nous l'appliquons ensuite à la description de la série principale d'un groupe de Lie semi-simple  $G$  en considérant le module  $\mathcal{E}(G/N)$  et démontrons que l'action à gauche de  $C^*(G)$  sur ce module se factorise par la projection sur  $C_r^*(G)$ . Cela manifeste, dans notre cadre, l'appartenance des représentations de la série principale au dual réduit  $\widehat{G}_r$ . Nous donnons ensuite deux descriptions de  $\mathcal{E}(G/N)$  correspondant aux réalisations classiques de la série principale. Le modèle induit  $\mathcal{E}_i$  fait apparaître le  $C^*$ -module comme le complété d'un espace de sections. Enfin, le modèle ouvert constitué par l'isomorphisme  $\mathcal{E}(G/N) \simeq L^2(\overline{N}) \otimes C^*(L)$  s'appuie sur la restriction de la construction à la cellule de Bruhat ouverte.

Le quatrième chapitre est consacré à la construction des opérateurs d'entrelacement. Après quelques rappels sur l'action de  $A$  sur  $\overline{N}$  par dilatations, nous démontrons, pour les groupes de rang 1, le résultat d'irréductibilité global qui consiste à caractériser les opérateurs de  $\mathcal{L}_{C^*(L)}(\mathcal{E}(G/N))$  qui commutent à l'action de  $C^*(G)$  comme des multiplicateurs centraux sur  $C^*(L)$ . Nous exprimons ensuite l'opérateur

---

d'entrelacement standard dans les différents modèles, avant de démontrer la convergence de l'intégrale dans le modèle ouvert. Nous décomposons ensuite l'opérateur standard en somme d'un opérateur borné, d'un opérateur densément défini et d'une partie résiduelle, qui consitue l'analogie des pôles dans le cas classique. Nous démontrons enfin la convergence de l'intégrale d'entrelacement pour certaines fonctions dans les autres modèles.

Le dernier chapitre est consacré à l'application de ce qui précède aux cas particuliers de  $SL_2(\mathbb{R})$  et de  $SL_2(\mathbb{C})$ . Nous décrivons tout d'abord la structure de ces groupes, leur dual réduit ainsi que les opérateurs de Knapp et Stein avec leur normalisation dans le cas de  $SL_2(\mathbb{R})$ . Nous décrivons ensuite les modules intervenant pour ces groupes comme des champs continus d'espaces de Hilbert ainsi que les opérateurs d'entrelacement correspondants. Nous construisons enfin explicitement des opérateurs unitaires sur ces modules analogues aux opérateurs normalisés et décomposons ces unitaires suivant les caractères de  $M$ .



# Chapitre 1

## Préliminaires $C^*$ -algébriques et rappels sur les groupes topologiques

Ce chapitre présente certaines définitions et résultats basiques au sujet des groupes topologiques et de leurs représentations. On y introduit également certains des objets de la géométrie non-commutative,  $C^*$ -algèbres et  $C^*$ -modules hilbertiens utilisés dans la suite ainsi qu'un certain nombre de faits sur le dual unitaire d'un groupe et sa topologie.

### 1.1 $C^*$ -algèbres, $C^*$ -modules et multiplicateurs

Les références pour cette partie sont [Dix64] et [Lan95].

#### Définition 1.1.1 [ $C^*$ -algèbres]

On appelle  $C^*$ -algèbre une algèbre de Banach  $A$  munie d'une involution isométrique, anti-multiplicative et anti-linéaire, notée  $*$ , telle que la relation

$$\|a^*a\| = \|a\|^2$$

soit vérifiée pour tout  $a$  dans  $A$ .

#### Remarque 1.1

- $\mathbb{C}$  est une  $C^*$ -algèbre.
- La construction de Gelfand-Naimark-Segal permet de réaliser toute  $C^*$ -algèbre comme une sous-algèbre involutive fermée de l'algèbre  $\mathcal{B}(\mathcal{H})$  des opérateurs bornés sur un espace de Hilbert  $\mathcal{H}$ .

- La transformée de Gelfand permet de montrer que toutes les  $C^*$ -algèbres commutatives sont de la forme  $C_0(X)$ , c'est-à-dire des algèbres de fonctions continues nulles à l'infini sur un espace localement compact  $X$ .

Soit  $A$  une  $C^*$ -algèbre. Un élément  $a \in A$  est dit *positif* s'il existe  $c \in A$  tel que  $a = c^*c$ . L'ensemble  $A_+$  des éléments positifs d'une  $C^*$ -algèbre est un cône convexe saillant et induit une relation d'ordre partiel sur  $A$  : pour  $a, b \in A$ , on dira que  $a \leq b$  si  $b - a \in A_+$ .

### Définition 1.1.2 [ $C^*$ -modules]

Soit  $A$  une  $C^*$ -algèbre. On appelle  $C^*$ -module hilbertien sur  $A$  un  $\mathbb{C}$ -espace vectoriel possédant une structure de  $A$ -module à droite compatible avec la multiplication scalaire et muni d'une application

$$\langle \cdot, \cdot \rangle : E \times E \longrightarrow A$$

linéaire à droite et vérifiant en outre, pour  $x, y \in E$  et  $a \in A$  :

- (i)  $\langle x, ya \rangle = \langle x, y \rangle a$
- (ii)  $\langle y, x \rangle = \langle x, y \rangle^*$
- (iii)  $\langle x, x \rangle \geq 0$  et  $\langle x, x \rangle = 0 \Rightarrow x = 0$
- (iv)  $E$  est complet pour la norme donnée par  $\|x\| = \|\langle x, x \rangle\|^{\frac{1}{2}}$ .

Si la condition (iv) n'est pas vérifiée, on parle de  $C^*$ -module préhilbertien ; de même, si l'algèbre  $A$  vérifie toutes les propriétés de la Définition 1.1.1 à l'exception de la complétude, on parlera de *pré- $C^*$ -module*.

### Remarque 1.2

- Les  $C^*$ -modules hilbertiens sur  $\mathbb{C}$  sont les espaces de Hilbert. Plus généralement, si  $A = C_0(X)$  est une  $C^*$ -algèbre commutative, un  $C^*$ -module sur  $A$  s'identifie aux sections continues nulles à l'infini d'un champ continu d'espaces de Hilbert sur  $X$  [Dix64].
- Une  $C^*$ -algèbre  $A$  est un  $C^*$ -module sur elle-même, en considérant  $\langle a, b \rangle = a^*b$  pour  $a, b \in A$ .

### Définition 1.1.3 [ $A$ -norme]

Soient  $A$  une  $C^*$ -algèbre et  $E$  un  $C^*$ -module sur  $A$ . Pour  $x \in E$ , on note

$$|x| = \langle x, x \rangle^{\frac{1}{2}}.$$

L'application  $|\cdot|$  est appelée  $A$ -norme sur  $E$ .

**Remarque 1.3**

- En dépit de la terminologie, cette application n'est pas à valeurs réelles. En outre, elle ne vérifie pas l'inégalité triangulaire dans  $A$ .
- Lorsque  $E = A$ , on a  $|a| = (a^*a)^{\frac{1}{2}}$ .

**Proposition 1.1.4** Soient  $A$  une  $C^*$ -algèbre et  $E$  un  $C^*$ -module sur  $A$ . L'inégalité

$$|\langle x, y \rangle| \leq \|x\| \cdot \|y\|$$

est vérifiée dans  $A$  pour tous  $x, y \in E$ .

**Définition 1.1.5 [Morphismes de  $C^*$ -modules]**

Soient  $A$  une  $C^*$ -algèbre,  $E_1$  et  $E_2$  des  $C^*$ -modules sur  $A$ . On note  $\mathcal{L}_A(E_1, E_2)$  l'ensemble des applications  $T : E_1 \longrightarrow E_2$  admettant un adjoint, *id est* une application  $T^* : E_2 \longrightarrow E_1$  telle que l'on ait

$$\langle Tx, y \rangle = \langle x, T^*y \rangle$$

pour tous  $x \in E_1, y \in E_2$ .

Une telle application est en fait nécessairement  $A$ -linéaire, bornée et son adjoint est unique.

**Proposition 1.1.6** Soient  $A$  une  $C^*$ -algèbre et  $E$  un  $C^*$ -module sur  $A$ . L'espace  $\mathcal{L}_A(E, E)$ , muni de la composition, de l'involution donnée par l'adjonction et de la norme d'opérateur continu, est une  $C^*$ -algèbre, encore notée  $\mathcal{L}_A(E)$ .

**Définition 1.1.7 [Opérateurs compacts]**

Soient  $A$  une  $C^*$ -algèbre,  $E_1$  et  $E_2$  deux  $C^*$ -modules sur  $A$ . Pour  $x_1 \in E_1, x_2 \in E_2$ , on définit un opérateur  $\theta_{x_1, x_2} : E_1 \longrightarrow E_2$  par

$$\theta_{x_1, x_2}(x) = x_2 \langle x_1, x \rangle.$$

Il s'agit d'un élément de  $\mathcal{L}_A(E_1, E_2)$ , d'adjoint  $\theta_{x_2, x_1}$  et dont la norme vérifie  $\|\theta_{x_1, x_2}\| \leq \|x_1\| \cdot \|x_2\|$ . On appelle *opérateurs compacts* les éléments du sous-espace vectoriel fermé de  $\mathcal{L}_A(E_1, E_2)$  engendré par  $\{\theta_{x_1, x_2} \mid x_1 \in E_1, x_2 \in E_2\}$ . Cet ensemble sera noté  $\mathcal{K}_A(E_1, E_2)$  ou encore  $\mathcal{K}(E_1, E_2)$ .

Lorsque  $E_1 = E_2 = E$ , l'espace vectoriel  $\mathcal{K}(E)$  est une sous- $C^*$ -algèbre de  $\mathcal{L}(E)$ . De plus lorsque  $E = A$ , la densité de l'ensemble des éléments de la forme  $ab$  dans  $A$  permet l'identification

$$\mathcal{K}(A) \simeq A$$

en associant à  $a \in A$  l'opérateur  $m_a$  de multiplication à gauche par  $a$ , d'adjoint  $m_a^* = m_{a^*}$ .

Plus généralement, lorsque  $E_1 = A$  et  $E_2 = E$ , on peut identifier

$$\mathcal{K}(A, E) \simeq E$$

en associant à  $x \in E$  l'opérateur de multiplication

$$\begin{aligned} m_x &: A \longrightarrow E \\ a &\longmapsto x.a \end{aligned}$$

dont l'adjoint est obtenu, toujours en utilisant la densité de  $E.A$  dans  $E$ , par

$$\begin{aligned} m_x^* &: E \longrightarrow A \\ y &\longmapsto \langle x, y \rangle \end{aligned}$$

La théorie des multiplicateurs de  $C^*$ -algèbres, qu'elle soit présentée en termes de doubles centralisateurs ou de complétions strictes, comme par exemple dans [WO93], s'exprime simplement dans le langage des  $C^*$ -modules.

**Définition 1.1.8** [Multiplicateurs d'un  $C^*$ -module]

Soient  $A$  une  $C^*$ -algèbre et  $E$  un  $C^*$ -module sur  $A$ . On appelle *multiplicateurs de  $E$*  les éléments de  $\mathcal{L}_A(A, E)$  et l'on note  $\mathcal{M}(E)$  cet espace.

Lorsque  $E = A$ , la Proposition 1.1.6 montre que l'on obtient une  $C^*$ -algèbre. De plus, l'application identique de  $A$  constitue une unité et  $\mathcal{M}(A)$  s'identifie à la plus grande  $C^*$ -algèbre unifère admettant  $A$ , identifiée à  $\mathcal{K}(A)$ , comme idéal essentiel.

**Proposition 1.1.9** Soient  $A$  une  $C^*$ -algèbre et  $E$  un  $C^*$ -module sur  $A$ . L'application

$$(m_1, m_2) \longmapsto \langle m_1, m_2 \rangle := m_1^* m_2$$

fait de  $\mathcal{M}(E)$  un  $C^*$ -module sur  $\mathcal{M}(A)$  et la norme associée coïncide avec la norme d'opérateur borné.

Cette construction est fonctorielle : si  $E_1$  et  $E_2$  sont deux  $C^*$ -modules sur  $A$  et  $T \in \mathcal{L}(E_1, E_2)$ , l'opérateur  $M(T) = T \circ \cdot$  de composition à gauche par  $T$  est un morphisme de  $C^*$ -modules  $\mathcal{M}(E_1) \rightarrow \mathcal{M}(E_2)$ , d'adjoint  $M(T)^* = M(T^*)$ .

Enfin, si  $x_1 \in E_1$  et  $x_2 \in E_2$ , alors

$$m_{\langle T(x_1), x_2 \rangle} = \langle M(T)(m_{x_1}), m_{x_2} \rangle,$$

les produits scalaires étant respectivement pris dans  $E_2$  et  $\mathcal{M}(E_2)$ .

## 1.2 Intégration dans les groupes topologiques et les espaces homogènes

Suivant [Wei65], on considérera les mesures de Haar invariantes à gauche.

### 1.2.1 Fonctions modulaires

Si  $G$  est un groupe topologique muni d'une mesure de Haar  $dg$ , sa fonction modulaire  $\Delta_G$  est définie par la formule suivante, valable pour toute fonction  $f$  mesurable sur  $G$  et tout élément  $g_0 \in G$  :

$$\int_G f(gg_0)dg = \Delta_G(g_0^{-1}) \int_G f(g)dg,$$

qui s'écrit encore symboliquement  $d(gg_0) = \Delta_G(g_0)dg$ .

Dans le cas où  $G$  est un groupe de Lie, la fonction modulaire se calcule en utilisant la représentation adjointe [Kna02] :

**Proposition 1.2.1** *Soit  $G$  un groupe de Lie. Alors pour  $g \in G$ ,*

$$\Delta_G(g) = |\det \text{Ad}(g)|^{-1}.$$

### 1.2.2 Intégration dans les espaces homogènes

Soient  $G$  un groupe topologique localement compact et  $H$  un sous-groupe fermé de  $G$ . Suivant [Bou63] et [BdlHV08], on indique ici des conditions d'existence pour des mesures sur l'espace homogène  $G/H$  vérifiant certaines conditions d'invariance sous l'action de  $G$ . Dans le cas où  $H$  est réduit à l'élément neutre, la mesure de Haar est une telle mesure.

Rappelons la terminologie :

**Définition 1.2.2** [Mesures quasi-invariantes et relativement invariantes]

Soit  $(X, \mu)$  un espace mesuré muni d'une action de  $G$  à gauche. La mesure  $\mu$  est dite

- *quasi-invariante à gauche* si elle est équivalente à  $g\mu$  pour tout  $g \in G$ , c'est-à-dire si les translations préservent la classe des ensembles de mesure nulle,
- *relativement invariante à gauche* s'il existe un morphisme continu  $\delta : G \rightarrow \mathbb{R}_+^*$  tel que l'on ait  $g^{-1}\mu = \delta(g)\mu$  pour tout  $g \in G$ . Le morphisme  $\delta$  est alors appelé *caractère* de la mesure  $\mu$ .

Il est clair qu'une mesure relativement invariante est quasi-invariante. Il est possible de démontrer l'existence de mesures quasi-invariantes en général sur les espaces homogènes. En ce qui concerne les mesures relativement invariantes, on dispose du résultat suivant :

**Proposition 1.2.3** *S'il existe une mesure  $\mu$  relativement invariante à gauche sur  $G/H$ , la restriction de son caractère  $\delta$  à  $H$  coïncide avec la fonction  $\frac{\Delta_H}{\Delta_G}$ . Réciproquement, s'il existe un morphisme continu  $\delta$  prolongeant  $\frac{\Delta_H}{\Delta_G}$ , alors il existe une mesure relativement invariante sur  $G/H$ , de caractère  $\delta$ , unique à une constante multiplicative strictement positive près.*

Si  $\mu$  est une mesure relativement invariante sur  $G/H$ , de caractère  $\delta$ , alors pour toute fonction  $f \in C_c(G)$  :

$$\int_G f(g)\delta(g) dg = \int_{G/H} \int_H f(gh) dh d\mu(gH).$$

La proposition précédente implique également qu'il existe une mesure  $G$ -invariante sur  $G/H$  si et seulement si  $\Delta_H$  coïncide avec la restriction de  $\Delta_G$  à  $H$ .

### 1.2.3 Décompositions de la mesure dans les groupes de Lie

Dans le cas des groupes de Lie, la structure de variété différentielle permet d'exprimer la théorie de l'intégration au moyen des formes différentielles. En particulier, aux différentes décompositions classiques de certains groupes et sous-groupes (décomposition d'Iwasawa des groupes semi-simples ou décomposition de Langlands des sous-groupes paraboliques), sont associées des décompositions de la mesure, en fonction des mesures de Haar des différentes composantes.

**Théorème 1.2.1** Soient  $G$  un groupe de Lie,  $S$  et  $T$  deux sous-groupes fermés de  $G$  tels que  $S \cap T$  soit compact, l'application  $m : (s, t) \mapsto st$  soit ouverte de  $S \times T$  dans  $G$  et que  $G \setminus m(S \times T)$  soit de mesure de Haar nulle. Alors les mesures de Haar de  $G$ ,  $S$  et  $T$  peuvent être normalisées de sorte que l'égalité

$$\int_G f(g) dg = \int_{S \times T} f(st) \frac{\Delta_G(t)}{\Delta_T(t)} ds dt$$

soit vérifiée pour toute fonction  $f$  borélienne positive sur  $G$ .

### 1.2.4 Intégrales à valeurs vectorielles

Soient  $X$  un espace localement compact, muni d'une mesure de Borel régulière  $\mu$  et  $\mathcal{H}$  un espace de Hilbert. Si  $f : X \rightarrow \mathcal{H}$  est une fonction continue à support compact,  $\int_X f(x) d\mu(x)$  désigne l'unique vecteur de  $\mathcal{H}$  vérifiant

$$\left\langle \int_X f(x) d\mu(x), v \right\rangle = \int_X \langle f(x), v \rangle d\mu(x)$$

pour tout  $v \in \mathcal{H}$ .

De même, si  $f : X \rightarrow \mathcal{B}(\mathcal{H})$  est une fonction faiblement continue à support compact, alors il existe un unique opérateur sur  $\mathcal{H}$ , noté  $\int_X f(x) d\mu(x)$ , vérifiant pour tous  $\xi, \eta \in \mathcal{H}$ , la relation

$$\left\langle \left( \int_X f(x) d\mu(x) \right) \xi, \eta \right\rangle = \int_X \langle f(x) \xi, \eta \rangle d\mu(x).$$

Si  $f$  prend ses valeurs dans une  $C^*$ -algèbre  $A$ , réalisée comme sous-algèbre de  $\mathcal{B}(\mathcal{H})$ , on montre en approchant uniformément  $f$  par des fonctions du produit tensoriel algébrique  $C_c(X) \otimes A$  à supports contenus dans un compact fixé, que l'intégrale  $\int_X f(x) d\mu(x)$  est encore un élément de  $A$ .

## 1.3 Dual d'un groupe topologique

Tout au long de ce paragraphe,  $G$  désignera un groupe topologique localement compact et  $dg$  une mesure de Haar à gauche fixée. Les références pour cette partie sont [BdlHV08] et [Dix64].

### 1.3.1 Représentations unitaires

Dans ce paragraphe, on introduit les définitions et faits généraux relatifs à la théorie des représentations unitaires des groupes qui seront utilisés dans la suite du mémoire.

#### Définition 1.3.1 [Représentations unitaires]

On appelle *représentation unitaire continue* de  $G$  tout couple  $(\pi, \mathcal{H})$  où  $\mathcal{H}$  est un espace de Hilbert complexe et

$$\pi : G \longrightarrow \mathcal{U}(\mathcal{H})$$

un morphisme fortement continu de  $G$  dans le groupe unitaire de  $\mathcal{H}$ , c'est-à-dire que pour tout  $\xi \in \mathcal{H}$ , l'application  $g \longmapsto \pi(g)\xi$  est continue de  $G$  dans  $\mathcal{H}$ .

Une représentation  $(\pi, \mathcal{H})$  sera souvent désignée par  $\pi$ , l'espace sur lequel le groupe agit étant tantôt sous-entendu, tantôt noté  $\mathcal{H}_\pi$  pour éviter d'éventuelles confusions. D'autre part, toutes les représentations considérées seront continues, aussi cette hypothèse sera-t-elle le plus souvent implicite.

#### Exemples :

- L'application constante  $\mathbf{1} : g \longmapsto \text{Id}$  de  $G$  dans  $\mathcal{H}_\mathbf{1} = \mathbb{C}$  est une représentation unitaire continue de  $G$ , appelée *représentation triviale*.
- Le groupe  $G$  admet toujours une représentation unitaire continue sur  $L^2(G, dg)$  : pour  $g \in G$  et  $f \in L^2(G)$ , on pose

$$\lambda_G(g)f : x \longmapsto f(g^{-1}x).$$

La représentation  $\lambda_G$  est appelée *représentation régulière gauche* de  $G$ .

On associe aux représentations de  $G$  des fonctions qui généralisent les coefficients des matrices associées aux opérateurs  $\pi(g)$  lorsque  $\mathcal{H}_\pi$  est de dimension finie :

#### Définition 1.3.2 [Fonctions de type positif, coefficients]

Soit  $(\pi, \mathcal{H})$  une représentation de  $G$ . On appelle *coefficient* de  $\pi$  toute fonction sur  $G$  de la forme

$$g \longmapsto \langle \pi(g)\xi, \eta \rangle$$

où  $\xi$  et  $\eta$  sont des vecteurs de  $\mathcal{H}$ . Une telle application est appelée *fonction de type positif associée à  $\pi$*  lorsque  $\xi = \eta$ .

L'étude de ces fonctions, et en particulier de leur comportement asymptotique, est un élément crucial de la théorie des représentations, comme le montre par exemple la Proposition 1.3.7 citée plus bas.

On appelle *sous-représentation* de  $(\pi, \mathcal{H})$  toute représentation  $\rho$  de  $G$  sur un sous-espace fermé  $\pi(G)$ -invariant  $\mathcal{H}'$  de  $\mathcal{H}$  telle que  $\rho(g)$  soit la restriction de  $\pi(g)$  à  $\mathcal{H}'$  pour tout  $g \in G$ . Introduisons à présent une classe de représentations unitaires « minimales » :

**Proposition 1.3.3** *Soit  $(\pi, \mathcal{H})$  une représentation unitaire continue de  $G$ . Les conditions suivantes sont équivalentes :*

- i) Les seuls sous-espaces fermés de  $\mathcal{H}$  stables par  $\pi(G)$  sont  $\mathcal{H}$  et  $\{0\}$ .*
- ii) Le commutant de  $\pi(G)$  dans  $\mathcal{H}$  est réduit aux scalaires.*
- iii) Tout vecteur  $\xi$  non nul de  $\mathcal{H}$  est totalisateur pour  $\pi(G)$ , id est  $\pi(G)\xi$  est dense dans  $\mathcal{H}$ .*

**Définition 1.3.4 [Représentations irréductibles]**

Une représentation vérifiant les conditions de la proposition précédente est dite *topologiquement irréductible*.

**Remarque 1.4** On parle d'*irréductibilité algébrique* lorsque les espaces de la condition *i)* ne sont pas supposés fermés. Les deux notions sont équivalentes pour les représentations de dimension finie. Dans la suite, les représentations dites *irréductibles* seront toujours *topologiquement irréductibles*.

Terminons ce paragraphe par la définition d'une notion d'équivalence entre représentations unitaires.

**Définition 1.3.5 [Entrelacement et équivalence unitaire]**

Soient  $(\pi_1, \mathcal{H}_1)$  et  $(\pi_2, \mathcal{H}_2)$  deux représentations unitaires de  $G$ . On appelle *opérateur d'entrelacement* entre  $\pi_1$  et  $\pi_2$  une application linéaire continue  $T : \mathcal{H}_1 \longrightarrow \mathcal{H}_2$  telle que l'égalité

$$T\pi_1(g) = \pi_2(g)T$$

soit vérifiée pour tout  $g \in G$ .

Les représentations  $\pi_1$  et  $\pi_2$  sont dites *unitairement équivalentes* s'il existe entre elles un opérateur d'entrelacement  $U$  qui soit un isomorphisme unitaire

$$U : \mathcal{H}_1 \longrightarrow \mathcal{H}_2.$$

On a alors

$$U\pi_1(g)U^* = \pi_2(g)$$

pour tout  $g \in G$ . Le cas échéant, on notera  $\pi_1 \simeq \pi_2$ .

Les classes d'équivalences de représentations unitaires peuvent être partiellement ordonnées :

**Définition 1.3.6 [Contenance]**

Soient  $\pi$  et  $\pi'$  des représentations de  $G$ . On dit que  $\pi'$  est *contenue* dans  $\pi$  et l'on note

$$\pi' \subset \pi$$

si  $\pi'$  est unitairement équivalente à une sous-représentation de  $\pi$ .

La proposition suivante [Dix61] permet de caractériser les représentations unitaires irréductibles qui sont contenues dans la représentation régulière en termes de coefficients matriciels et de fonctions de type positif associées.

**Proposition 1.3.7** *Soit  $\pi$  une représentation unitaire irréductible de  $G$ . Les assertions suivantes sont équivalentes :*

- i) *il existe une fonction de type positif associée à  $\pi$  non nulle dans  $L^2(G)$*
- ii) *tous les coefficients de  $\pi$  sont dans  $L^2(G)$*
- iii)  $\pi \subset \lambda_G$

**Définition 1.3.8 [Représentations de carré intégrable]**

Une représentation unitaire irréductible est dite *de carré intégrable* si elle satisfait aux conditions de la proposition précédente.

Il est clair que toutes les représentations irréductibles unitaires d'un groupe compact sont de carré intégrable.

Enfin, il existe une notion d'intégrabilité pour les représentations unitaires.

**Proposition 1.3.9** *Soit  $\pi$  une représentation unitaire irréductible de  $G$ . Les assertions suivantes sont équivalentes :*

- i) il existe une fonction de type positif associée à  $\pi$  non nulle dans  $L^1(G)$*
- ii) il existe un sous-espace dense  $\mathcal{H}'$  de  $\mathcal{H}_\pi$  tel que tous les coefficients de  $\pi$  de la forme  $g \mapsto \langle \pi(g)\xi, \eta \rangle$  avec  $\xi, \eta \in \mathcal{H}'$  soient dans  $L^1(G)$ .*

De manière analogue à ce qui précède pour les représentations de carré intégrable, on pose alors :

**Définition 1.3.10 [Représentations intégrables]**

Une représentation unitaire irréductible est dite *intégrable* si elle satisfait aux conditions de la proposition précédente

**Remarque 1.5** Une représentation intégrable est également de carré intégrable.

Les notions introduites ci-dessus se traduisent par des propriétés topologiques de l'« espace » des représentations unitaires irréductibles, qui fait l'objet des paragraphes suivants.

### 1.3.2 Dual topologique

Les classes d'équivalences de représentations unitaires d'un groupe  $G$  ne constituent pas un ensemble. Cependant, on peut démontrer (voir [BdlHV08]), en utilisant une construction de type GNS, que les représentations cycliques sont paramétrées, à équivalence unitaire près, par des éléments de l'ensemble des fonctions de type positif sur  $G$ . En particulier, les classes d'équivalences des représentations unitaires irréductibles de  $G$  constituent bien un ensemble, d'où la définition suivante :

**Définition 1.3.11 [Dual unitaire]**

On appelle *dual unitaire* de  $G$  l'ensemble  $\widehat{G}$  des classes d'équivalence de représentations unitaires irréductibles de  $G$ .

La dualité de Pontrjagin montre que dual unitaire d'un groupe localement compact et abélien  $G$  est l'ensemble des caractères unitaires de  $G$  : muni de la topologie de la convergence uniforme sur tout compact, il s'agit encore d'un groupe localement compact. Dans le cas général,  $\widehat{G}$  n'est pas un groupe, mais peut être muni d'une topologie qui généralise celle de la convergence uniforme sur les compacts : la topologie de Fell.

## Topologie de Fell

La définition de cette topologie repose sur la notion de contenance faible :

### Définition 1.3.12 [Contenance faible]

Soient  $\pi$  et  $\rho$  deux représentations unitaires de  $G$ . On dit que  $\pi$  est *faiblement contenue* dans  $\rho$ , et l'on note

$$\pi \prec \rho$$

si toute fonction de type positif associée à  $\pi$  peut être approchée uniformément sur tout compact de  $G$  par des sommes finies de fonctions de type positif associées à  $\rho$ .

Si  $\pi \prec \rho$  et  $\rho \prec \pi$ , alors  $\pi$  et  $\rho$  sont dites *faiblement équivalentes* et l'on note  $\pi \sim \rho$ .

Il est clair que la contenance implique la contenance faible. Les deux notions coïncident pour une représentation irréductible (faiblement) contenue dans une représentation de dimension finie. D'autre part, la relation  $\pi \prec \rho$  ne dépend que des classes d'équivalence unitaire de  $\pi$  et  $\rho$ , et s'applique donc aux éléments de  $\widehat{G}$ . Dans la suite, on commettra fréquemment l'abus de langage consistant à assimiler un élément du dual à l'un de ses représentants.

Il est alors possible de définir la topologie de Fell par ses voisinages, ou encore en décrivant l'opération de fermeture qui la caractérise :

### Définition 1.3.13 [Adhérence de Fell]

Soit  $R$  une partie de  $\widehat{G}$ . Une représentation unitaire irréductible  $\pi$  de  $G$  sera dite *adhérente* à  $R$  si et seulement si

$$\pi \prec \bigoplus_{\rho \in R} \rho.$$

### Propriétés topologiques

Avant de préciser quelques propriétés topologiques du dual unitaire d'un groupe, rappelons quelques définitions :

#### Définition 1.3.14 [Propriétés de séparation]

Un espace topologique  $X$  est appelé :

–  $T_0$ -espace si pour tous points  $x \neq y \in X$ , il existe un ouvert  $U$  tel que

$$x \in U \text{ et } y \notin U \quad \text{ou} \quad y \in U \text{ et } x \notin U$$

–  $T_1$ -espace si pour tous points  $x \neq y \in X$ , il existe des ouverts  $U$  et  $V$  tels que

$$x \in U \text{ et } y \notin U \quad \text{et} \quad y \in V \text{ et } x \notin V$$

–  $T_2$ -espace ou encore *séparé* ou *de Hausdorff* s'il est  $T_1$  et que les voisinages de la définition précédente peuvent être choisis disjoints.

**Remarque 1.6** Un espace topologique est un  $T_1$ -espace si et seulement si les singletons sont des fermés de sa topologie.

Ces propriétés, en particulier celle de  $T_0$ -espace, s'expriment de manière commode en termes des  $C^*$ -algèbres associées au groupe  $G$ , comme cela apparaîtra au Paragraphe 1.4.2.

### 1.3.3 Dual réduit

Une partie de  $\widehat{G}$  nous intéressera plus particulièrement. Il s'agit du *dual réduit*, associé à la représentation régulière.

#### Définition 1.3.15 [Support d'une représentation]

Soit  $\pi$  une représentation unitaire de  $G$ . On appelle *support* de  $\pi$  l'ensemble des éléments  $\rho \in \widehat{G}$  faiblement contenus dans  $\pi$ .

La proposition suivante exprime une sorte de complète réductibilité au sens de l'équivalence faible pour les représentation unitaires.

**Proposition 1.3.16** Soit  $\pi \in \widehat{G}$ . Alors

$$\pi \sim \bigoplus_{\rho \in \text{Supp}(\pi)} \rho.$$

On peut à présent introduire le dual réduit de  $G$  :

**Définition 1.3.17 [Dual réduit]**

On appelle *dual réduit* de  $G$  et l'on note  $\widehat{G}_r$  le support de la représentation régulière gauche :

$$\widehat{G}_r = \left\{ \pi \in \widehat{G} \mid \pi \prec \lambda_G \right\}.$$

Contrairement au dual unitaire tout entier, le dual réduit des groupes de Lie semi-simples est assez bien connu, notamment grâce aux travaux d'Harish-Chandra.

Le résultat suivant [Dix61] donne une interprétation topologique du fait qu'une représentation faiblement contenue dans la régulière soit en fait contenue dans la régulière.

**Proposition 1.3.18** *Soit  $\pi$  une représentation unitaire irréductible de  $G$  de carré intégrable. Alors  $\{\pi\}$  est fermé dans  $\widehat{G}_r$ .*

Il existe également une condition plus forte [Dix61] :

**Proposition 1.3.19** *Soit  $\pi$  une représentation unitaire irréductible et intégrable de  $G$ . Alors  $\{\pi\}$  est ouvert et fermé dans  $\widehat{G}_r$ .*

Enfin, pour les groupes séparables post-liminaires, il existe une condition nécessaire pour qu'un singleton soit ouvert dans  $\widehat{G}_r$ . En particulier,

**Proposition 1.3.20** *Soient  $G$  est un groupe de Lie semi-simple ou nilpotent et  $\pi \in \widehat{G}_r$ . Si  $\{\pi\}$  est un ouvert de  $\widehat{G}_r$ , alors  $\pi$  est de carré intégrable.*

Tous les objets de ce paragraphe s'interprètent naturellement dans le cadre de certaines  $C^*$ -algèbres associées au groupe  $G$ , qui font l'objet du paragraphe suivant.

## 1.4 $C^*$ -algèbres de groupes

Dans cette partie,  $G$  désigne toujours un groupe topologique localement compact,  $dg$  une mesure de Haar à gauche fixée,  $\Delta_G$  la fonction modulaire correspondante et  $L^p(G, dg)$  sera simplement noté  $L^p(G)$ .

### 1.4.1 $C^*$ -algèbre pleine et $C^*$ -algèbre réduite

Le produit de convolution défini par

$$(u * v)(g_0) = \int_G u(g)v(g^{-1}g_0) dg$$

pour  $u, v \in L^1(G)$  fait de  $L^1(G)$  une algèbre de Banach. D'autre part l'opération  $u \mapsto u^*$  définie par

$$u^*(g) = \Delta_G(g)^{-1} \overline{u(g^{-1})}$$

confère à  $L^1(G)$  une structure d'algèbre de Banach involutive, appelée *algèbre de convolution de  $G$* . Cette  $*$ -algèbre n'est en général pas une  $C^*$ -algèbre; elle est unifère si et seulement si  $G$  est discret.

Il existe une correspondance entre les représentations unitaires du groupe  $G$  et les  $*$ -représentations de l'algèbre de convolution de  $G$ , c'est-à-dire les  $*$ -morphisms continus  $L^1(G) \mapsto \mathcal{B}(\mathcal{H})$ , où  $\mathcal{H}$  est un espace de Hilbert. Plus précisément, si  $\pi$  est une représentation unitaire continue de  $G$ , on définit une représentation de  $L^1(G)$ , encore notée  $\pi$ , en posant

$$\pi(f) = \int_G f(g)\pi(g) dg$$

pour  $f \in L^1(G)$ . La représentation ainsi obtenue est *non-dégénérée*, c'est-à-dire qu'il n'existe aucun vecteur non nul  $\xi \in \mathcal{H}_\pi$  tel que  $\pi(L^1(G))\xi$  soit réduit à  $\{0\}$ .

Dans le cas de la représentation régulière gauche, la représentation de  $L^1(G)$  obtenue en intégrant  $\lambda_G$  associée à toute fonction intégrable l'opérateur de convolution à gauche par cette fonction :

$$\forall \xi \in L^2(G), \quad \lambda_G(f)\xi = f * \xi$$

pour  $f \in L^1(G)$ .

On montre que toutes les  $*$ -représentations non-dégénérées de  $L^1(G)$  sont obtenues en intégrant des représentations unitaires de  $G$  [Dix64].

D'autre part, il est possible, étant donnée une représentation unitaire de  $G$ , de compléter  $L^1(G)$  en une  $C^*$ -algèbre, après y avoir défini une norme vérifiant l'égalité  $C^*$ -algébrique. Ainsi l'on pose pour  $f \in L^1(G)$  :

$$\|f\|_r = \|\lambda_G(f)\|,$$

le deuxième terme désignant la norme de l'opérateur continu  $\lambda_G(f)$  agissant sur l'espace de Hilbert  $L^2(G)$ .

Une manière de prendre en compte « toutes » les représentations unitaires de  $G$  est de considérer la représentation universelle  $\pi_{max}$  définie comme la somme directe de toutes les représentations unitaires cycliques de  $G$ . On note alors

$$\|f\|_{max} = \|\pi_{max}(f)\|.$$

Pour  $f \in L^1(G)$ , les normes introduites ci-dessus vérifient les inégalités suivantes :

$$\|f\|_r \leq \|f\|_{max} \leq \|f\|_1.$$

On peut à présent introduire les  $C^*$ -algèbres associées à  $G$  :

**Définition 1.4.1** [ $C^*$ -algèbre maximale]

On appelle  $C^*$ -algèbre pleine ou maximale de  $G$  et l'on note  $C_{max}^*(G)$  ou simplement  $C^*(G)$  la  $C^*$ -algèbre obtenue en complétant  $L^1(G)$  pour la norme  $\|\cdot\|_{max}$ .

De même, il existe une  $C^*$ -algèbre associée à la représentation régulière :

**Définition 1.4.2** [ $C^*$ -algèbre réduite]

On appelle  $C^*$ -algèbre réduite de  $G$  et l'on note  $C_r^*(G)$  la  $C^*$ -algèbre obtenue en complétant  $L^1(G)$  pour la norme  $\|\cdot\|_r$ .

**Remarque 1.7** La  $C^*$ -algèbre réduite de  $G$  coïncide avec la fermeture de  $\lambda_G(L^1(G))$  dans l'algèbre  $\mathcal{B}(L^2(G))$  des opérateurs bornés sur  $L^2(G)$ .

## 1.4.2 Représentations de $G$ et de $C^*(G)$

L'intégration d'une représentation unitaire  $\pi$  de  $G$  permet de l'étendre en une représentation non-dégénérée de  $L^1(G)$ . Une représentation unitaire  $\pi$  de  $G$  pouvant s'écrire comme somme directe de représentations cycliques, l'inégalité

$$\|\pi(f)\| \leq \|f\|_{max},$$

vérifiée pour toute fonction  $f \in L^1(G)$ , montre que  $\pi$  s'étend en une représentation non-dégénérée de  $C^*(G)$ , encore notée  $\pi$ .

Dans le cas de la représentation régulière  $\lambda_G$ , on obtient ainsi un  $*$ -morphisme surjectif

$$\lambda_G : C^*(G) \longrightarrow C_r^*(G),$$

qui fait explicitement apparaître la  $C^*$ -algèbre réduite comme un quotient de la  $C^*$ -algèbre maximale. Cette application est un isomorphisme si et seulement si le groupe  $G$  est moyennable.

**Définition 1.4.3** [Noyau d'une représentation]

Soit  $\pi$  une représentation unitaire de  $G$ . On appelle *noyau de  $\pi$*  et l'on note  $\text{Ker } \pi$  le noyau de la représentation de  $C^*(G)$  obtenue à partir de  $\pi$ .

L'intégration des représentations préserve les équivalences unitaires et les vecteurs cycliques. Il s'ensuit que le dual unitaire de  $G$  est en bijection avec l'ensemble des classes d'équivalences de représentations irréductibles de  $C^*(G)$ , noté  $\widehat{C^*(G)}$  et appelé *dual de  $C^*(G)$* .

La proposition suivante caractérise la contenance faible des représentations au niveau des extensions à  $L^1(G)$  et  $C^*(G)$ .

**Proposition 1.4.4** Soient  $\pi$  et  $\rho$  des représentations unitaires de  $G$ . Les conditions suivantes sont équivalentes :

- i)  $\pi \prec \rho$
- ii)  $\text{Ker } \rho \subset \text{Ker } \pi$
- iii)  $\|\pi(f)\| \leq \|\rho(f)\|$  pour toute fonction  $f \in L^1(G)$

Cette expression de la contenance faible au niveau  $C^*$ -algébrique permet par exemple de formuler simplement la propriété de  $T_0$ -espace en termes de noyaux.

**Proposition 1.4.5** Les assertions suivantes sont équivalentes :

- i)  $\widehat{G}$  est un  $T_0$ -espace.
- ii) Deux représentations unitaires irréductibles de  $G$  ayant même noyau sont équivalentes.

**Remarque 1.8** Ces propriétés sont encore équivalentes au fait que la surjection entre  $\widehat{G}$  et l'espace  $\text{Prim}(C^*(G))$  des idéaux primitifs de  $C^*(G)$ , muni de la topologie de Jacobson soit un homéomorphisme. D'autre part, on peut démontrer que tout  $T_0$ -espace peut être réalisé comme le dual d'une certaine  $C^*$ -algèbre.

Le dual unitaire des groupes qui nous intéresseront dans la suite de ce mémoire vérifie une propriété de séparation plus forte :

**Proposition 1.4.6** Si  $G$  est un groupe de Lie semi-simple ou nilpotent, alors  $\widehat{G}$  est un  $T_1$ -espace.

Il s'agit d'un cas particulier d'un résultat plus général qui se démontre en considérant des noyaux de représentations : tous les groupes linéaires vérifient cette propriété. On peut d'autre part énoncer un résultat plus précis : si une représentation  $\pi$  est telle que pour tout  $g \in G$ , l'opérateur  $\pi(g)$  soit compact, alors  $\{\pi\}$  est un fermé de  $\widehat{G}$ . La réciproque est vraie pour un groupe séparable.

Le dual unitaire d'un groupe topologique n'est en général pas un espace séparé, comme le prouve l'exemple de  $SL_2(\mathbb{R})$ , décrit en 5.2.

D'autres propriétés topologiques sont connues pour le dual topologique d'un groupe  $G$ . Ainsi, l'espace  $\widehat{G}$  est toujours localement compact et possède la propriété de Baire. Si  $G$  est compact, alors  $\widehat{G}$  est discret. Une réciproque partielle est due à L. Baggett [Bag72] : si  $G$  est à base dénombrable et  $\widehat{G}$  est discret, alors  $G$  est compact.

### 1.4.3 Le cas commutatif

Lorsque  $G$  est commutatif, la dualité de Pontrjagin montre que le dual topologique  $\widehat{G}$  de  $G$  est un groupe localement compact, et que le dual de  $\widehat{G}$  s'identifie à  $G$ . La transformée de Gelfand prolonge alors la transformée de Fourier

$$\begin{aligned} \mathcal{F} : C_c(G) &\longrightarrow C_0(\widehat{G}) \\ f &\longmapsto \left[ \chi \mapsto \int_G f(g) \overline{\chi(g)} dg \right] \end{aligned}$$

et permet d'identifier le spectre de  $C_r^*(G)$  à  $\widehat{G}$ , ce qui incite à considérer  $\widehat{G}$  en général comme un espace non-commutatif. En effet, les phénomènes de non-séparation qui se manifestent dans le cas non-abélien rendent l'algèbre des fonctions continues sur le dual inadéquates pour l'étude de cet espace. Les différentes  $C^*$ -algèbres associées au groupe seront en revanche plus appropriées, et généralisent le cas commutatif, comme le montre la remarque précédente au sujet de la transformation de Fourier.

### 1.4.4 Multiplicateurs de $C^*(G)$

Soit  $G$  un groupe topologique. Il existe un morphisme de groupes entre  $G$  et le groupe des unitaires de la  $C^*$ -algèbre  $\mathcal{M}(C^*(G))$ . Pour  $g \in G$ , on note  $U_g$  le multiplicateur de  $C^*(G)$  associé à  $g$  par la formule

$$U_g \cdot \varphi(h) = \varphi(g^{-1}h)$$

pour  $\varphi \in C_c(G)$  et  $h \in G$ . De même, on définira  $\varphi \cdot U_g$  par  $\varphi \cdot U_g(h) = \Delta_G(h)^{-1} \varphi(gh^{-1})$ . Cette définition est compatible avec le produit de convolution sur  $G$  et pour toute

fonction  $\psi \in C_c(G)$ , il vient

$$\psi = \int_G \psi(g)U_g dg,$$

cette égalité étant valable dans  $C^*(G)$ .



# Chapitre 2

## Induction et série principale

La première partie de ce chapitre présente la machinerie permettant l'induction des représentations pour les groupes topologiques et pour les  $C^*$ -algèbres, introduite par M.A Rieffel dans [Rie71]. On rappelle ensuite certains éléments de théorie des groupes de Lie nécessaires à la construction et à l'étude de la série principale pour un groupe de Lie semi-simple, avant de résumer les résultats de Bruhat [Bru56] Knapp et Stein [KS71] relatifs à ces représentations.

### 2.1 L'induction, de Frobenius à Rieffel

Dans toute cette partie,  $G$  est un groupe topologique localement compact, muni d'une mesure de Haar à gauche  $dg$ , de fonction modulaire  $\Delta_G$  et l'on note  $L^p(G)$  pour  $L^p(G, dg)$ . Enfin,  $C^*(G)$  et  $C_r^*(G)$  désignent respectivement la  $C^*$ -algèbre pleine et la  $C^*$ -algèbre réduite de  $G$ .

#### 2.1.1 Induction pour les groupes topologiques

L'induction est un procédé de construction de représentations d'un groupe à partir de représentations de ses sous-groupes. Il fut mis en œuvre pour la première fois par F. G. Frobenius en 1898 dans le cadre des groupes finis [Fro98], avant d'être adapté aux groupes compacts par Nakayama [Nak38] et Weil [Wei65] en 1940, puis généralisé aux groupes localement compacts par G. Mackey à la fin des années 1940 [Mac49, Mac51, Mac52].

On rappelle ici les définitions et certains des faits principaux de la théorie. Les références utilisées pour cette partie sont essentiellement la thèse de F. Bruhat [Bru56]

et les appendices de [BdlHV08].

Soient  $H$  un sous-groupe fermé de  $G$ , de mesure de Haar  $dh$  et  $\sigma$  une représentation unitaire de  $H$  sur un espace de Hilbert  $\mathcal{H}_\sigma$ . On note  $p$  la surjection naturelle  $G \rightarrow G/H$ .

Soit  $\mathcal{H}_0$  l'espace des fonctions continues  $f : G \rightarrow \mathcal{H}_\sigma$ , telles que  $p(\text{Supp } f)$  soit une partie compacte de  $G/H$  et vérifiant l'égalité

$$f(gh) = \sigma(h)^{-1}f(g)$$

pour tous  $g \in G$  et  $h \in H$ .

Il existe des éléments non triviaux de  $\mathcal{H}_0$ , obtenus à partir des fonctions continues à support compact sur  $G$  : si  $a \in C_c(G)$  et  $v \in \mathcal{H}_\sigma$ , l'application définie pour  $g \in G$  par

$$f_{a,v}(g) = \int_H a(gh)\sigma(h)v \, dh$$

est uniformément continue à gauche et appartient à  $\mathcal{H}_0$ .

L'espace  $\mathcal{H}_0$  est muni d'une structure préhilbertienne : si  $f_1$  et  $f_2$  sont des éléments de  $\mathcal{H}_0$ ,  $g \in G$  et  $h \in H$ , alors

$$\langle f_1(gh), f_2(gh) \rangle = \langle \sigma(h^{-1}f_1(g)), \sigma(h^{-1}f_2(g)) \rangle = \langle f_1(g), f_2(g) \rangle,$$

ce qui permet de poser sans ambiguïté

$$\langle f_1, f_2 \rangle = \int_{G/H} \langle f_1(\dot{g}), f_2(\dot{g}) \rangle \, d\mu(\dot{g}),$$

où  $\mu$  désigne une mesure borélienne quasi-invariante sur  $G/H$ .

Ce produit scalaire est bien défini car le support de  $d\mu$  est  $G/H$  tout entier. Soit  $\mathcal{H}_\mu$  l'espace de Hilbert obtenu en complétant  $\mathcal{H}_0$  pour la norme associée. L'ensemble des fonctions de la forme  $f_{a,v}$  pour  $a \in C_c(G)$  et  $v$  parcourant une famille totale de  $\mathcal{H}_\sigma$  constitue une famille totale de  $\mathcal{H}_\mu$ .

Supposons à présent que la mesure  $\mu$  soit relativement invariante, *id est* que le morphisme  $\frac{\Delta_H}{\Delta_G}$  se prolonge continûment de  $H$  à  $G$ . Cette hypothèse sera en général vérifiée dans les cas abordés dans le reste de ce mémoire. Le prolongement de  $\sqrt{\frac{\Delta_G}{\Delta_H}}$  à  $G$  est alors noté  $\gamma$ .

La proposition suivante décrit l'action de  $G$  sur  $\mathcal{H}_\mu$ .

**Proposition 2.1.1** *L'opérateur  $\pi_\mu(g)$  donné par*

$$\pi_\mu(g)f = \gamma(g)f(g^{-1} \cdot)$$

*pour  $f \in \mathcal{H}_\mu$  et  $g \in G$ , définit une représentation unitaire de  $G$ .*

La construction précédente repose sur le choix d'une mesure quasi-invariante  $\mu$  sur  $G/H$ . La représentation obtenue est en fait indépendante de ce choix. En effet, si  $\nu$  est une autre mesure quasi-invariante sur  $G/H$ , on peut montrer que  $\mu$  et  $\nu$  sont équivalentes [BdlHV08]. Plus précisément, si  $\partial$  désigne la dérivée de Radon-Nikodym  $\frac{d\mu}{d\nu}$ , l'application définie sur  $\mathcal{H}_0$  par  $f \mapsto \sqrt{\partial}f$  s'étend en un unitaire  $u : \mathcal{H}_\mu \rightarrow \mathcal{H}_\nu$ , qui entrelace  $\pi_\mu$  et  $\pi_\nu$ .

**Définition 2.1.2 [Représentation induite]**

La représentation de  $G$  définie à équivalence unitaire près par la construction ci-dessus est appelé *représentation induite de  $\sigma$  à  $G$*  et noté

$$\text{Ind}_H^G \sigma.$$

**Remarque 2.1** La représentation obtenue en induisant la représentation triviale du sous-groupe réduit à l'élément neutre est la représentation régulière gauche :

$$\text{Ind}_{\{e\}}^G \mathbf{1} = \lambda_G.$$

Indiquons pour terminer un résultat de transitivité :

**Théorème 2.1.1 [Inductions successives]**

Soient  $H_1$  et  $H_2$  deux sous-groupes fermés de  $G$  tels que  $H_1 < H_2$  et  $\sigma$  une représentation unitaire de  $H_1$ . Alors  $\text{Ind}_{H_1}^{H_2} (\text{Ind}_{H_2}^G \sigma)$  et  $\text{Ind}_{H_1}^G \sigma$  sont unitairement équivalentes.

Ce théorème s'exprime naturellement dans la description de l'induction en termes de  $C^*$ -modules, qui fait l'objet du paragraphe suivant.

### 2.1.2 Induction pour les $C^*$ -algèbres

Dans ce paragraphe, on rappelle brièvement certains résultats de [Rie71] où est développée une théorie de l'induction pour les  $C^*$ -algèbres, exprimée en termes de  $C^*$ -modules hilbertiens et contenant le cas des représentations de groupes comme cas particulier.

Il est souvent commode d'utiliser le vocabulaire des modules pour décrire les représentations :

**Définition 2.1.3** [Modules hermitiens]

Soit  $A$  une  $C^*$ -algèbre. On appelle  $A$ -module hermitien un espace de Hilbert  $\mathcal{H}$  sur lequel  $A$  agit par une  $*$ -représentation  $A \rightarrow B(\mathcal{H})$  non dégénérée et normiquement continue.

L'intégration des représentations, qui associe à une représentation de  $G$  une représentation de  $L^1(G)$ , puis de  $C^*(G)$  préserve les opérateurs d'entrelacement et établit une équivalence de catégories entre  $G$ -modules unitaires et  $C^*(G)$ -modules hermitiens.

Dans tout ce qui suit on considère des  $C^*$ -modules hilbertiens à droite.

**Définition 2.1.4** [ $C^*$ -modules d'induction]

Soient  $A$  et  $B$  des  $C^*$ -algèbres. On appelle  $C^*$ -modules d'induction entre  $B$  et  $A$  un  $C^*$ -module hilbertien  $E$  sur  $B$  muni d'une structure de  $A$ -module à gauche donnée par un  $*$ -morphisme  $A \rightarrow L_B(E)$  tel que  $A.E$  soit dense dans  $E$ .

**Remarque 2.2** Le cas où  $B = \mathbb{C}$  redonne exactement la définition des  $A$ -modules hermitiens.

Soit  ${}_A E_B$  un  $C^*$ -module d'induction entre  $A$  et  $B$ . Le Théorème d'induction permet, étant donné un  $B$ -module hermitien  ${}_B \mathcal{H}$ , de construire un  $A$ -module hermitien en considérant un produit tensoriel de la forme

$${}_A E_B \otimes_B \mathcal{H}.$$

L'énoncé suivant est dû à M. A. Rieffel [Rie71].

**Théorème 2.1.2** Soient  $A$  et  $B$  des  $C^*$ -algèbres et  $E$  un  $C^*$ -module d'induction entre  $B$  et  $A$ . Pour tout  $B$ -module hermitien  $\mathcal{H}$ , la forme sesquilinéaire définie sur les tenseurs élémentaires de  $E \otimes_B \mathcal{H}$  par

$$\langle e \otimes v, e' \otimes v' \rangle = \langle \langle e, e' \rangle_B v, v' \rangle$$

est positive. De plus,  $L_B(E)$  agit sur  $E \otimes_B \mathcal{H}$  en posant

$$\tilde{T}(e \otimes v) = (Te) \otimes v$$

pour  $T \in L_B(E)$ . La norme d'opérateur de  $\tilde{T}$  relative à la forme bilinéaire sur  $E \otimes_B \mathcal{H}$  vérifie  $\|\tilde{T}\| \leq \|T\|$  et  $\tilde{T}^*$  agit comme un adjoint de  $\tilde{T}$ . Cette action s'étend donc en une  $*$ -représentation non dégénérée de  $L_B(E)$  sur l'espace de Hilbert  $\mathcal{H}'$  obtenu en séparant et complétant  $E \otimes_B \mathcal{H}$ . La restriction de cette représentation à l'image de  $A$  dans  $L_B(E)$  est encore non dégénérée, et fait de  $\mathcal{H}'$  un  $A$ -module hermitien.

L'induction des représentations de groupes s'inscrit dans ce cadre plus général. En effet, si  $H$  est un sous-groupe fermé de  $G$ , il est toujours possible de construire un  $C^*$ -module d'induction entre  $C^*(H)$  et  $C^*(G)$ . Plus précisément, de tels modules sont obtenus dans [Rie71] comme complétés de l'espace  $C_c(G)$  équipé d'un produit scalaire à valeurs dans la sous-algèbre  $C_c(H)$  de  $C^*(H)$ . L'action à gauche de  $C^*(G)$  est alors définie par convolution au niveau des fonctions à support compact. Les détails de cette construction seront repris au Paragraphe 3.1. Notons pour l'instant

$$\mathcal{E}_H^G(G)$$

le  $C^*$ -module hilbertien obtenu par complétion. Il s'agit d'un  $C^*$ -module d'induction entre  $C^*(H)$  et  $C^*(G)$ .

Le théorème ci-dessous explicite le lien entre ce cadre  $C^*$ -algébrique et les travaux de Mackey et Blattner [Bla61] sur l'induction des représentations de groupes. Ici encore, on suppose que  $G/H$  admet une mesure relativement invariante et l'on note encore  $\gamma$  un prolongement continu de  $\gamma = \sqrt{\frac{\Delta_G}{\Delta_H}}$  à  $G$ .

**Théorème 2.1.3** *Soient  $H$  un sous-groupe fermé d'un groupe topologique  $G$  et  $\mathcal{H}$  un  $C^*(H)$ -module hermitien associé à une représentation  $\sigma$  de  $H$ .*

*L'application  $q_\sigma : C_c(G) \times \mathcal{H}_\sigma \longrightarrow C(G, \mathcal{H}_\sigma)$  définie par*

$$q_\sigma(f, v)(g) = \int_H \gamma(gh) f(gh) \sigma(h) v \, dh$$

*s'étend en une application linéaire*

$$\mathcal{E}_H^G(G) \otimes_{C^*(H)} \mathcal{H}_\sigma \longrightarrow \mathcal{H}_{\text{Ind}_H^G \sigma}$$

*qui entrelace l'action de  $G$  sur ces deux espaces et préserve leurs produits scalaires respectifs, définissant ainsi une équivalence unitaire entre les deux représentations.*

Concluons ce paragraphe par une remarque sur la functorialité de la construction ci-dessus. Si  $A$  et  $B$  sont des  $C^*$ -algèbres,  $E$  un  $C^*$ -module comme dans le Théorème 2.1.2, et  $\rho : \mathcal{H}_1 \longrightarrow \mathcal{H}_2$  un morphisme de  $B$ -modules hermitiens, alors

$$\text{Id}_E \otimes \rho$$

définit un morphisme de  $A$ -modules hermitiens entre  $E \otimes_B \mathcal{H}_1$  et  $E \otimes_B \mathcal{H}_2$ . L'induction par le  $C^*$ -module  $E$  apparaît donc comme un foncteur entre la catégorie des  $B$ -modules hermitiens et celle des  $A$ -modules hermitiens.

On peut enfin énoncer l'analogie du Théorème 2.1.1. Ce résultat, ainsi que le précédent sont dus à Rieffel [Rie71] et furent étendus par Green [Gre78, Gre80].

**Théorème 2.1.4 [Inductions successives]**

Soient  $H_1$  et  $H_2$  deux sous-groupes fermés de  $G$  tels que  $H_1 < H_2$ . Le foncteur

$$\mathcal{E}_{H_1}^G(G) \otimes_{C^*(H_1)} \cdot$$

est canoniquement équivalent au "foncteur composé"

$$\left( \mathcal{E}_{H_2}^G(G) \otimes_{C^*(H_2)} \mathcal{E}_{H_1}^{H_2}(H_2) \right) \otimes_{C^*(H_1)} \cdot$$

Il est à noter que ce théorème ne s'applique pas en toute généralité, *id est* en remplaçant  $C^*(H_1)$ ,  $C^*(H_2)$  et  $C^*(G)$  et les modules correspondants par des algèbres et des modules d'induction vérifiant seulement les hypothèses de la Définition 2.1.4.

**2.1.3 Imprimitivité**

La question de l'imprimitivité consiste à identifier parmi les représentations d'un groupe  $G$  celles qui sont induites d'un sous-groupe  $H$  donné. Elle fut d'abord résolue par Mackey [Mac49] avant d'être reformulée et généralisée dans de multiples cadres. L'ensemble des méthodes et résultats associés à cette idée sont parfois évoqués sous le nom de *machinerie de Mackey-Rieffel-Green*. Nous nous intéresserons ici à la formulation  $C^*(G)$ -algébrique du théorème d'imprimitivité pour les groupes, due à Rieffel [Rie71]. L'extension de ce théorème aux produits croisés est due à Green [Gre78, Gre80]. On trouve dans [EKQR06] un traitement très général de ces questions et dans [Vae05] une généralisation au cas des groupes quantiques localement compacts.

Dans [Bla63], les systèmes d'imprimitivité intervenant dans le théorème de Mackey sont définis de la manière suivante : soient  $H$  un sous-groupe fermé de  $G$  et  $(\pi, \mathcal{H})$  une représentation unitaire de  $G$ .

**Définition 2.1.5 [Système d'imprimitivité]**

On appelle *système d'imprimitivité sur  $G/H$*  pour  $(\pi, \mathcal{H})$ , toute représentation  $\rho$  de  $C_0(G/H)$  sur  $\mathcal{H}$  telle que, l'égalité

$$\rho(g.F) = \pi(g)\rho(F)\pi(g)^{-1}$$

soit vérifiée pour tous  $F \in C_0(G/H)$  et  $g \in G$ , et  $g.F$  définie par  $F(g^{-1}\cdot)$ .

Le résultat de Mackey établit une correspondance entre les systèmes d'imprimitivité sur  $G/H$  et les classes d'équivalence de représentations unitaires de  $H$ .

La définition précédente montre que les systèmes d'imprimitivité sur  $G/H$  correspondent aux représentations covariantes du produit croisé  $G \ltimes C_0(G/H)$ . La théorie des équivalences de Morita entre  $C^*$ -algèbres développée dans [Rie74, Rie76] permet de donner une formulation compacte de ce résultat :

**Théorème 2.1.5** *Soient  $G$  un groupe topologique localement compact et  $H$  un sous-groupe fermé de  $G$ , alors*

$$G \ltimes C_0(G/H) \underset{\text{Morita}}{\sim} C^*(H).$$

Cette équivalence de Morita est réalisée par le module  $\mathcal{E}_H^G(G)$ .

**Remarque 2.3** Dans le cas où  $G/H$  est compact,  $C^*(G)$  s'envoie dans le produit croisé  $G \ltimes C(G/H)$  et non seulement dans les multiplicateurs de cette algèbre. Cela montre que l'action de  $C^*(G)$  à gauche sur  $\mathcal{E}_H^G(G)$  se fait par des opérateurs compacts, la situation étant résumée par le diagramme commutatif ci-dessous :

$$\begin{array}{ccc} C^*(G) & \longrightarrow & \mathcal{L}_{C^*(H)}(\mathcal{E}_H^G(G)) \\ \downarrow & & \uparrow \\ G \ltimes C(G/H) & \xrightarrow{\simeq} & \mathcal{K}_{C^*(H)}(\mathcal{E}_H^G(G)) \end{array}$$

## 2.2 Structure des groupes de Lie semi-simples

On rappelle brièvement dans cette section un certain nombre de faits relatifs à la structure des groupes de Lie semi-simples et de leurs sous-groupes paraboliques. Les preuves et détails figurent dans [Kna86] et [Kna02].

Dans tout ce qui suit,  $G$  est un groupe de Lie linéaire, connexe et semi-simple, c'est-à-dire un groupe fermé de matrices inversibles réelles ou complexes, stable par transposition et conjugaison, à centre fini dont on note  $\mathfrak{g} = \text{Lie}(G)$  l'algèbre de Lie.

### 2.2.1 Décomposition d'Iwasawa

On note respectivement  $\Theta$  l'involution de Cartan,  $\theta$  sa différentielle à l'unité et  $B_0$  la forme bilinéaire sur  $\mathfrak{g}$  donnée par  $B_0(X, Y) = \text{Tr}(XY)$ . La décomposition de Cartan de  $\mathfrak{g}$  s'écrit  $\mathfrak{g} = \mathfrak{k} \oplus \mathfrak{p}$ . On note enfin  $K$  le sous-groupe analytique de  $G$ , d'algèbre de Lie  $\mathfrak{k}$ . C'est un sous-groupe compact maximal de  $G$ ; tous les tels

sous-groupes sont conjugués dans  $G$ . Soit  $\mathfrak{a}$  un sous-espace abélien maximal de  $\mathfrak{p}$ . Les éléments de  $\text{ad}(\mathfrak{p})$  sont symétriques pour le produit scalaire donné sur  $\mathfrak{g}$  par  $\langle X, Y \rangle = -\text{Re}(B_0(X, \theta Y))$ . Par conséquent,  $\text{ad}(\mathfrak{a})$  constitue une famille d'applications linéaires symétriques qui commutent, et peuvent donc être simultanément diagonalisées, avec des valeurs propres réelles. Pour toute forme linéaire  $\lambda$  sur  $\mathfrak{a}$ , on pose :

$$\mathfrak{g}_\lambda = \{X \in \mathfrak{g} \mid \forall H \in \mathfrak{a}, [H, X] = \lambda(H)X\}.$$

Si  $\lambda \neq 0$  et  $\mathfrak{g}_\lambda \neq \{0\}$ , on dit que  $\lambda$  est une **racine restreinte**. On note  $\Delta(\mathfrak{a} : \mathfrak{g})$  l'ensemble des racines restreintes. Cet ensemble constitue un système abstrait de racines ; il est en particulier fini.

### Proposition 2.2.1 [Racines restreintes]

Les racines restreintes et les espaces radiciels correspondants possèdent les propriétés suivantes :

- $\mathfrak{g} = \mathfrak{g}_0 \oplus \sum_{\lambda \in \Delta(\mathfrak{a} : \mathfrak{g})} \mathfrak{g}_\lambda$ , cette somme directe étant orthogonale pour le produit scalaire donné par  $B_0$
- $[\mathfrak{g}_\lambda, \mathfrak{g}_\mu] \subseteq \mathfrak{g}_{\lambda+\mu}$
- $\theta \mathfrak{g}_\lambda = \mathfrak{g}_{-\lambda}$ , donc  $\lambda \in \Delta(\mathfrak{a} : \mathfrak{g})$  implique  $-\lambda \in \Delta(\mathfrak{a} : \mathfrak{g})$
- $\mathfrak{g}_0 = \mathfrak{a} \oplus \mathfrak{m}$ , où  $\mathfrak{m} = \mathcal{Z}_{\mathfrak{k}}(\mathfrak{a})$

Il existe une notion de positivité pour les racines restreintes. En effet, une base de  $\mathfrak{a}'$  étant fixée, on appelle *strictement positifs* les éléments dont la première coordonnée non nulle est strictement positive. Cela donne lieu à un ordre sur  $\mathfrak{a}'$  et l'on note alors  $\Delta(\mathfrak{a} : \mathfrak{g})^+$  l'ensemble des racines restreintes positives.

**Notation :** désormais on notera  $\rho_N$ , ou encore  $\rho$  si aucune confusion n'est à craindre, la demi-somme des racines positives comptées avec multiplicité :

$$\rho = \frac{1}{2} \sum_{\lambda \in \Delta(\mathfrak{a} : \mathfrak{g})^+} (\dim \lambda) \lambda.$$

Soit enfin

$$\mathfrak{n} = \sum_{\lambda \in \Delta(\mathfrak{a} : \mathfrak{g})^+} \mathfrak{g}_\lambda.$$

On peut à présent décrire la décomposition d'Iwasawa, au niveau de l'algèbre de Lie tout d'abord,

### Proposition 2.2.2 [Décomposition d'Iwasawa des algèbres de Lie]

Pour  $G$  linéaire, connexe et semi-simple,  $\mathfrak{g}$  s'écrit comme une somme directe

$$\mathfrak{g} = \mathfrak{k} \oplus \mathfrak{a} \oplus \mathfrak{n},$$

dans laquelle  $\mathfrak{a}$  est abélienne,  $\mathfrak{n}$  est nilpotente,  $\mathfrak{a} \oplus \mathfrak{n}$  résoluble et  $[\mathfrak{a} \oplus \mathfrak{n}, \mathfrak{a} \oplus \mathfrak{n}] = \mathfrak{n}$ .

Cela se traduit au niveau du groupe :

**Proposition 2.2.3 [Décomposition d'Iwasawa des groupes de Lie]**

Pour  $G$  linéaire, connexe et semi-simple, soient  $A$  et  $N$  les sous-groupes analytiques d'algèbres de Lie respectives  $\mathfrak{a}$  et  $\mathfrak{n}$ . Alors  $A$ ,  $N$  et  $AN$  sont des sous-groupes fermés simplement connexes de  $G$ , et le produit  $K \times A \times N \longrightarrow G$ ,

$$(k, a, n) \longmapsto kan$$

est un difféomorphisme surjectif.

**Exemple :** considérons  $G = SL_n(\mathbb{R})$ . Une décomposition d'Iwasawa est donnée par  $K = SO_n(\mathbb{R})$  compact maximal,  $A = D_n(\mathbb{R}^+)$ , le sous-groupe abélien de  $SL_n(\mathbb{R})$  constitué des matrices diagonales à coefficients positifs, et  $N = T_n(\mathbb{R})$ , le sous-groupe des matrices triangulaires supérieures à coefficients diagonaux égaux à 1.

## 2.2.2 Sous-groupes paraboliques, décomposition de Langlands

Certains sous-groupes occupent une place centrale dans la théorie : il s'agit des sous-groupes paraboliques de  $G$ . On note désormais  $A_0$  et  $N_0$  les sous-groupes notés  $A$  et  $N$  dans la décomposition d'Iwasawa de  $G$ , et l'on pose  $M_0 = \mathcal{Z}_K(A_0)$ . Les algèbres de Lie correspondantes sont notées  $\mathfrak{a}_0$ ,  $\mathfrak{n}_0$  et  $\mathfrak{m}_0$ .

**Définition 2.2.4 [Sous-groupes paraboliques]**

On a appelé *sous-groupe parabolique* de  $G$  tout sous-groupe fermé de  $G$  contenant un conjugué de  $M_0A_0N_0$ . Les conjugués de  $M_0A_0N_0$  sont appelés *sous-groupes paraboliques minimaux*. Le groupe  $P_0 = M_0A_0N_0$  est lui-même nommé *parabolique minimal standard*.

Il existe pour les sous-groupes paraboliques un résultat de décomposition, qui s'énonce, comme la décomposition d'Iwasawa, au niveau des algèbres de Lie puis au niveau des groupes.

**Proposition 2.2.5 [Décomposition de Langlands pour les algèbres de Lie]**

Soit  $S$  un sous-groupe parabolique de  $G$ , d'algèbre de Lie  $\mathfrak{s}$ . La sous-algèbre  $\mathfrak{s}$  de  $\mathfrak{g}$  se décompose en somme directe  $\mathfrak{s} = \mathfrak{m} \oplus \mathfrak{a} \oplus \mathfrak{n}$ . Cette décomposition est entièrement caractérisée par les propriétés suivantes :

- $\mathfrak{m}$ ,  $\mathfrak{a}$  et  $\mathfrak{n}$  sont mutuellement orthogonaux pour le produit scalaire donné par la forme  $B_0$
- $\mathfrak{m} \oplus \mathfrak{a} = \mathfrak{s} \cap \theta\mathfrak{s}$
- $\mathfrak{a} = \mathfrak{p} \cap \mathcal{Z}_{\mathfrak{m} \oplus \mathfrak{a}}$

Cette décomposition possède en outre les propriétés suivantes :

- $\mathfrak{m}$ ,  $\mathfrak{a}$  et  $\mathfrak{n}$  sont des sous-algèbres de Lie de  $\mathfrak{g}$ ,  $\mathfrak{a}$  est abélienne,  $\mathfrak{n}$  est nilpotente,  $\mathfrak{m}$  et  $\mathfrak{a}$  normalisent  $\mathfrak{n}$
- $\mathfrak{m} \oplus \mathfrak{a} = \mathcal{Z}_{\mathfrak{g}}(\mathfrak{a})$
- $\text{ad}(\mathfrak{a})$  agit comme une famille d'opérateurs hermitiens sur  $\mathfrak{n}$ , qui se décompose en somme directe orthogonale :

$$\mathfrak{n} = \sum_{\mu \in \Gamma_S^+} \mathfrak{g}_\mu$$

où  $\Gamma_S^+$  est une famille finie d'éléments non nuls de  $\mathfrak{a}'$  et

$$\mathfrak{g}_\mu = \{X \in \mathfrak{n} \mid \forall H \in \mathfrak{a}, [H, X] = \mu(H)X\}.$$

Soient à présent :

- $A$ , sous-groupe analytique d'algèbre de lie  $\mathfrak{a}$
- $N$ , sous-groupe analytique d'algèbre de lie  $\mathfrak{n}$
- $\tilde{M}$ , sous-groupe analytique d'algèbre de lie  $\mathfrak{m}$
- $M = \mathcal{Z}_K(\mathfrak{a})\tilde{M}$ .

La décomposition de l'algèbre de Lie se manifeste alors au niveau du groupe :

**Proposition 2.2.6 [Décomposition de Langlands des sous-groupes paraboliques]**

Soient  $S$ ,  $M$ ,  $A$  et  $N$  comme précédemment.

- Le produit  $M \times A \times N \longrightarrow S$ ,  $(m, a, n) \longmapsto man$  est un difféomorphisme surjectif.
- $\tilde{M}$  est linéaire, connexe, réductif et son centre est compact.
- $MA$  est réductif.
- $\Theta N \cap MAN = \{1\}$ .

**Notation :** le produit  $MA$  dans la décomposition de Langlands d'un sous-groupe parabolique  $P = MAN$  est appelée *composante de Levi* de  $P$  et notée  $L$ .

### 2.2.3 Décomposition de Bruhat

Cette décomposition est due à F. Bruhat et Harish-Chandra. Elle fut utilisée pour la première fois dans [Bru56] pour déterminer les équivalences parmi les représentations induites des groupes de Lie. Elle relie le double quotient d'un groupe de Lie par un sous-groupe parabolique au groupe de Weyl associé, dont on rappelle la définition :

**Définition 2.2.7 [Groupe de Weyl]**

Soit  $G = KAN$  une décomposition d'Iwasawa d'un groupe de Lie semi-simple d'algèbre de Lie  $\mathfrak{g} = \mathfrak{k} \oplus \mathfrak{a} \oplus \mathfrak{n}$ . On appelle *groupe de Weyl* le quotient

$$\mathcal{N}_K(\mathfrak{a}) / \mathcal{Z}_K(\mathfrak{a}),$$

que noté  $W(A : G)$ .

On peut alors énoncer le résultat de décomposition :

**Théorème 2.2.1 [Décomposition de Bruhat]**

Soient  $G = KAN$  une décomposition d'Iwasawa d'un groupe de Lie semi-simple d'algèbre de Lie  $\mathfrak{g} = \mathfrak{k} \oplus \mathfrak{a} \oplus \mathfrak{n}$  et  $M = \mathcal{Z}_K(\mathfrak{a})$ . Si  $P$  désigne le sous-groupe parabolique minimal standard  $MAN$ , alors le double quotient  $P \backslash G / P$  est en bijection avec le groupe de Weyl  $W(A : G)$ , via l'application  $w \mapsto P\tilde{w}P$ , où  $\tilde{w}$  est un représentant quelconque de  $w$  dans  $\mathcal{N}_K(\mathfrak{a})$ .

### 2.2.4 Décompositions de la mesure associées

Les décompositions du paragraphe précédent donnent lieu, *via* la Proposition 1.2.1 à des décompositions de la mesure de Haar sur  $G$ . En particulier, on démontre que  $dg$  peut être normalisée de sorte que l'on ait

$$dg = e^{2\rho \log a} dk da dn$$

où  $k, a, n$  et  $\rho$  sont relatifs à la décomposition d'Iwasawa de  $G$ .

De même, si  $P$  est un sous-groupe parabolique de décomposition de Langlands  $P = MAN$ , la mesure de Haar de  $G$  peut être normalisée de sorte qu'elle se décompose en

$$dg = e^{2\rho \log a} dk dm da dn$$

car la décomposition d'Iwasawa montre que  $G = KMAN$ .

Enfin, la décomposition de la mesure de  $P$  s'écrit  $dp = e^{2\rho \log a} dm da dn$  et celle de la composante de Levi  $dl = dm da$ .

## 2.3 La série principale : définitions

La proposition suivante décrit les représentations unitaires irréductibles de dimension finie des sous-groupes paraboliques :

**Proposition 2.3.1** *Soient  $P$  un sous-groupe parabolique de  $G$ , de décomposition de Langlands  $P = MAN$ . Les représentations  $\pi$  unitaires irréductibles de dimension finie de  $P$  sont exactement celles de la forme*

$$\pi = \sigma \otimes \chi \otimes 1,$$

où  $\sigma$  est une représentation unitaire irréductible de dimension finie de  $M$ ,  $\chi$  un caractère de  $A$  et  $1$  désigne la représentation triviale de  $N$ .

— *Démonstration.*

Soit  $\pi$  une représentation irréductible de  $P$ , d'espace  $\mathcal{H}_\pi$ . Le sous-groupe  $AN$  étant connexe et résoluble, le théorème de Lie (cf. l'appendice de [God52]) assure que toutes ses représentations irréductibles de dimension finie sont de dimension 1. Comme  $\mathcal{H}_\pi$  est de dimension finie, on en déduit l'existence d'un vecteur  $v \in \mathcal{H}_\pi$  non nul et d'une représentation de  $AN$  de dimension 1 telle que, pour tout  $an \in AN$  on ait  $\pi(an)v = \chi(an)v$ . Etant normalisé par  $A$ , le sous-groupe  $N$  est égal au sous-groupe dérivé de  $AN$  et tout élément  $n \in N$  s'écrit comme un produit fini de commutateurs. Pour un tel élément, de la forme  $an_0a^{-1}n_0^{-1}$ , il vient  $\chi(an_0a^{-1}n_0^{-1}) = 1$ , d'où  $\chi(n) = 1$ . Montrons à présent que le sous-espace vectoriel  $E$  de  $\mathcal{H}_\pi$  engendré par  $\pi(M)v$  est stable par  $\pi$ . En effet, soit  $man \in MAN$ , les éléments de  $A$  commutant à ceux de  $M$ , on a

$$\pi(an)\pi(m)v = \pi(m)\pi(a)\pi(m^{-1}nm)v = \chi(a)\pi(m)v,$$

la dernière égalité résultant de ce que  $M$  normalise  $N$ . Comme  $v$  est non nul et  $\pi$  irréductible,  $E = \mathcal{H}_\pi$ , d'où le résultat, avec  $\sigma = \pi|_M$ .  $\square$

Dans tout ce qui suit,  $P = MAN$  désigne le sous-groupe parabolique minimal standard du groupe  $G$  de décomposition d'Iwasawa  $G = KAN$  fixée.

### Définition 2.3.2 [Série principale unitaire]

Soit  $G$  un groupe de Lie semi-simple. On appelle *série principale unitaire* l'ensemble des représentations unitaires de  $G$  de la forme

$$\text{Ind}_P^G \sigma \otimes \chi \otimes 1$$

où  $P = MAN$  désigne le sous-groupe parabolique minimal standard,  $\sigma$  une représentation unitaire irréductible de  $M$  et  $\chi$  un caractère unitaire de  $A$ .

**Remarque 2.4** Les caractères de  $A$  peuvent s'exprimer en fonctions de formes linéaires complexifiées sur  $\mathfrak{a}$ . En effet, si  $\nu \in \mathfrak{a}' \otimes \mathbb{C}$ , l'application  $a \mapsto e^{\nu \log(a)}$  est un caractère de  $A$ , unitaire si et seulement si  $\nu$  est imaginaire pur. Tous les caractères unitaires de  $A$  s'écrivent ainsi et l'on notera désormais  $\chi = e^\nu$ .

Les représentations de la série principale unitaire peuvent être réalisées de plusieurs façons équivalentes. Dans ce qui suit,  $P = MAN$ ,  $\sigma, \nu$  sont choisis comme dans la définition et la remarque ci-dessus. Comme au paragraphe précédent,  $\rho$  désigne la demi-somme des racines positives, comptées avec multiplicité. On notera

$$\pi_P^{\sigma, \nu} = \text{Ind}_P^G \sigma \otimes e^\nu \otimes 1.$$

On omettra en général l'indice en notant  $\pi^{\sigma, \nu}$ .

**Remarque 2.5** Une famille plus générale de représentations est obtenue en considérant des sous-groupes paraboliques  $P' = M'A'N'$  non nécessairement minimaux mais tels que  $M'$  admette une série discrète  $\widehat{M}'_d$ , et en induisant les représentations de la forme  $\sigma \otimes e^\nu \otimes 1$  avec  $\sigma \in \widehat{M}'_d$ . Les représentations obtenues constituent alors une famille nommée  $P'$ -série, qui s'identifie à la série principale lorsque  $P' = P$  est le parabolique minimal standard. Ces représentations jouent un rôle central dans la théorie d'après les résultats de Harish-Chandra. Néanmoins, on se borne dans ce qui suit à l'étude la série principale.

### 2.3.1 Modèle induit

Les représentations introduites ci-dessus constituent des exemples de représentations induites, définies au Paragraphe 2.1.1. Un sous-espace dense de la représentation  $\pi_P^{\sigma, \nu}$  considérée est l'ensemble  $\mathcal{H}_0^{\sigma, \nu}$  des fonctions  $f$  continues de  $G$  dans  $\mathcal{H}_\sigma$  vérifiant l'égalité

$$f(gman) = e^{-(\rho+\nu) \log a} \sigma(m^{-1})f(g)$$

pour  $g \in G$  et  $man \in P = MAN$ . Cet espace est muni de la norme définie par

$$\|f\|^2 = \int_K |f|^2 dk$$

et l'action de  $G$  est donnée par les translations à gauche :

$$\pi_P^{\sigma, \nu}(g_0)f(g) = f(g_0^{-1}g)$$

pour  $f \in \mathcal{H}_0^{\sigma, \nu}$  et  $g_0, g \in G$ .

Le lien avec la définition des représentations induites du Paragraphe 2.1.1 repose sur le fait que les fonctions de  $\mathcal{H}_0^{\sigma,\nu}$  sont déterminées par leur restriction à  $K$  et une décomposition appropriée de la mesure de Haar de  $G$ . En effet, la décomposition d'Iwasawa montre que  $G = KMAN$ , avec  $K \cap MAN = K \cap M$  et que l'application de  $K \times MAN$  dans  $G$  donnée par le produit est ouverte. On en déduit, grâce au Théorème 1.2.1 que la mesure de Haar de  $G$  se décompose en

$$dg = e^{2\rho \log a} dk dm da dn$$

à une normalisation près. D'autre part,  $G$  est unimodulaire et  $P$  admet pour fonction modulaire  $\Delta_P(man) = e^{-2\rho \log a}$ , comme cela apparaîtra dans la démonstration de la Proposition 3.2.3. Le morphisme  $\gamma = \sqrt{\frac{\Delta_G}{\Delta_P}}$  s'étend donc à  $G$  en posant

$$\gamma(kman) = e^{\rho \log a}.$$

Ainsi, les fonctions de  $\mathcal{H}_0^{\sigma,\nu}$  vérifient la relation

$$f(gp) = \gamma(p^{-1})[\sigma \otimes e^\nu \otimes 1](p^{-1})f(g)$$

pour  $g \in G$  et  $p \in P$ , et l'application  $f \mapsto \gamma f$  envoie  $\mathcal{H}_0^{\sigma,\nu}$  dans  $\mathcal{H}_{\text{Ind}_P^G \sigma \otimes e^\nu \otimes 1}$ . Cette application s'étend en une équivalence unitaire entre  $\pi_P^{\sigma,\nu}$  et  $\text{Ind}_P^G \sigma \otimes e^\nu \otimes 1$ .

### 2.3.2 Modèle compact

Le modèle compact des représentations de la série principale unitaire consiste en la restriction des fonctions du modèle induit à  $K$ . Plus précisément, un sous-espace dense de la représentation est l'ensemble  $\mathcal{H}_0^\sigma$  des fonctions  $f$  continues de  $K$  dans  $\mathcal{H}_\sigma$  vérifiant l'égalité

$$f(km) = \sigma(m^{-1})f(k)$$

pour  $k \in K$  et  $m \in K \cap M$ . L'espace de Hilbert de la représentation est le complété de  $\mathcal{H}_0^\sigma$  pour la même norme que dans le modèle précédent.

Un élément  $g \in G$ , se décompose suivant  $KMAN$ , et l'on note :

$$g = \kappa(g)\mu(g)e^{H(g)}n.$$

L'action de  $G$  est alors donnée par :

$$\pi_P^{\sigma,\nu}(g_0)f(k) = e^{-(\nu+\rho)H(g_0^{-1}k)}\sigma(\mu(g_0^{-1}k))^{-1}f(\kappa(g_0^{-1}k)).$$

L'entrelacement entre cette action et celle du modèle induit est donnée par l'application  $f \mapsto f|_K$ .

Un aspect remarquable de ce modèle est que la dépendance en  $\nu$  ne se manifeste que dans l'action : l'espace  $\mathcal{H}_0^\sigma$  est indépendant de ce paramètre. Ce fait intervient de manière déterminante dans la construction des opérateurs d'entrelacement de Knapp et Stein, dans les travaux [KS71] et [KS80]. Il est également exploité dans [Hig07], où l'indépendance par rapport à  $\nu$  se manifeste par la trivialité locale de certain fibré.

### 2.3.3 Modèle ouvert

Cette dernière description des représentations de la série principale repose sur une conséquence de la décomposition de Bruhat. En effet,  $P = MAN$  désignant toujours le sous-groupe parabolique minimal standard de  $G$ , un élément de la décomposition de Bruhat selon  $P$  s'écrit alors

$$PwP = NwMAN = w(w^{-1}Nw)MAN$$

avec  $w \in \mathcal{N}_K(\mathfrak{a})$ . Cette classe est donc un translaté de  $(w^{-1}Nw)MAN$ . On montre en raisonnant au niveau des algèbres de Lie que  $(w^{-1}Nw)MAN$  est l'image dans  $G$  d'une variété de dimension strictement inférieure à celle de  $G$ , sauf pour une valeur particulière de  $w$ , telle que  $(w^{-1}Nw)MAN = \overline{N}MAN$ , ouvert dans  $G$ , où  $\overline{N}$  désigne le conjugué de  $N$  par l'involution de Cartan. Il s'ensuit que le complémentaire de la cellule de Bruhat ouverte  $\overline{N}MAN$  est de dimension strictement inférieure à celle de  $G$ , et donc de mesure nulle.

Une nouvelle application du Théorème 1.2.1 permet encore de décomposer la mesure de Haar de  $G$  :

$$dg = e^{2\rho \log a} d\bar{n} dm da dn.$$

L'espace du modèle ouvert pour la représentation de la série principale induite du couple  $(\sigma, \nu)$  est  $L^2(\overline{N}, \mathcal{H}_\sigma, e^{2\operatorname{Re}(\nu)H(\bar{n})} d\bar{n})$ . Presque tout élément  $g \in G$ , admet une décomposition suivant  $\overline{N}MAN$ , notée :

$$g = \bar{n}(g)\mathbf{m}(g)\mathbf{a}(g)n.$$

L'action de  $G$  est alors donnée par :

$$\pi_P^{\sigma, \nu}(g_0)f(\bar{n}) = e^{-(\nu+\rho) \log \mathbf{a}(g_0^{-1}\bar{n})} \sigma(\mathbf{m}(g_0^{-1}\bar{n}))^{-1} f(\bar{n}(g_0^{-1}\bar{n})).$$

L'équivalence entre cette action et celle du modèle induit est donnée par la restriction  $f \mapsto f|_{\overline{N}}$ .

Remarquons pour conclure ce paragraphe que les représentations de la série principale unitaire sont faiblement contenues dans la représentation régulière.

**Proposition 2.3.3** *Soit  $\pi^{\sigma,\nu}$  une représentation de la série principale de  $G$ . Alors*

$$\pi \prec \lambda_G.$$

— *Démonstration.*

C'est une conséquence de la moyennabilité des sous-groupes paraboliques minimaux : un tel groupe  $P$  est l'extension de sa composante de Levi  $L$ , moyennable comme produit direct du groupe compact  $M$  et du groupe abélien  $A$ , par sa composante nilpotente, également moyennable. On en déduit que  $\sigma \otimes e^\nu \otimes 1 \prec \lambda_P$ . Or l'induction préserve la contenance faible (voir [BdlHV08]), donc

$$\pi^{\sigma,\nu} \prec \text{Ind}_P^G \lambda_P.$$

Le théorème d'inductions successives 2.1.1 montre que

$$\text{Ind}_P^G \lambda_P = \text{Ind}_P^G \text{Ind}_{\{1\}}^P 1 \sim \text{Ind}_{\{1\}}^G 1 = \lambda_G,$$

d'où le résultat. □

Il s'ensuit que les représentations irréductibles de la série principale unitaire fournissent des éléments du dual réduit  $\widehat{G}_r$ .

## 2.4 Irréductibilité des représentations de la série principale

Décrire les éléments de  $\widehat{G}$  fournis par les représentations de la série principale d'un groupe de Lie consiste à savoir lesquelles de ces représentations  $\pi^{\sigma,\nu}$  sont irréductibles d'une part, et à déterminer d'autre part quelles sont les équivalences unitaires possibles entre deux représentations  $\pi^{\sigma,\nu}$  et  $\pi^{\sigma',\nu'}$  données.

### 2.4.1 Premiers résultats

Une condition nécessaire d'irréductibilité pour  $\pi^{\sigma,\nu}$  est fournie par le Théorème 2.4.1, dû à F. Bruhat, qui s'exprime en termes de cardinal du stabilisateur de  $(\sigma, \nu)$  dans le groupe de Weyl  $W(A : G)$ .

**Définition 2.4.1** [Stabilisateur  $W_{\sigma,\nu}$ ]

Soit  $\tilde{w}$  un élément de  $\mathcal{N}_K(\mathfrak{a})$  dont on note  $w$  la classe dans  $W(A : G)$ . Pour  $\sigma$  et  $\nu$  représentations de  $M$  et  $A$  respectivement, on note  $\tilde{w}\sigma = \sigma \circ c_{\tilde{w}}$  et  $\tilde{w}\nu = \nu \circ c_{\tilde{w}}$ . Les classes d'équivalence unitaires de  $\tilde{w}\sigma$  et  $\tilde{w}\nu$  ne dépendent que de  $w$ . Le stabilisateur du couple  $(\sigma, \nu)$  est noté

$$W_{\sigma,\nu} = \{w \in W(A : G) \mid \tilde{w}\sigma \simeq \sigma \text{ et } \tilde{w}\nu \simeq \nu\}.$$

Le théorème d'irréductibilité suivant figure dans [Bru56]. Le sous-groupe parabolique  $P = MAN$  est supposé minimal.

**Théorème 2.4.1** Soient  $\sigma$  et  $\nu$  des représentations unitaires irréductibles de  $M$  et  $A$  respectivement et  $\pi^{\sigma,\nu}$  la représentation de la série principale associée. L'espace vectoriel des opérateurs d'entrelacement de  $\pi^{\sigma,\nu}$  avec elle-même, c'est-à-dire des applications linéaires bornées  $I$  telles que

$$I\pi^{\sigma,\nu} = \pi^{\sigma,\nu}I$$

est de dimension inférieure ou égale au cardinal  $|W_{\sigma,\nu}|$  du stabilisateur de  $(\sigma, \nu)$ .

Il s'ensuit que, pour  $\sigma$  fixé,  $\pi^{\sigma,\nu}$  est irréductible pour  $\nu$  provenant d'un ouvert dense de  $\mathfrak{ia}'$ . Ce résultat a été étendu par Harish-Chandra dans [HC76] au cas où  $P$  est un parabolique cuspidal et  $\sigma$  une représentation de la série discrète de  $M$ .

**Remarque 2.6** Le théorème 2.4.1 est un cas particulier d'un résultat plus fort, également démontré dans [Bru56] : pour  $(\sigma, \nu)$  et  $(\sigma', \nu')$  dans  $\widehat{M} \times \widehat{A}$ , la dimension de l'espace des entrelacements entre  $\pi^{\sigma,\nu}$  et  $\pi^{\sigma',\nu'}$  est dominée par le cardinal de

$$\{w \in W \mid \tilde{w}\sigma \simeq \sigma' \text{ et } \tilde{w}\nu \simeq \nu'\}.$$

Enfin, Bruhat démontre également l'équivalence de  $\pi^{\sigma,\nu}$  et  $\pi^{\tilde{w}\sigma, \tilde{w}\nu}$  pour tout  $w \in W$ .

Des résultats complémentaires furent obtenus par Kostant qui démontra dans [Kos69] l'irréductibilité de  $\pi^{1_M, \nu}$  pour tout  $\nu$  et Wallach qui établit dans [Wal71] l'irréductibilité de toutes les représentations de la série principale unitaire pour les groupes possédant une seule classe de sous-groupes de Cartan, en particuliers les groupes complexes. Enfin, l'étude des cas de réductibilité dans la série principale fut complétée grâce à la construction des opérateurs d'entrelacement de Knapp et Stein et de leurs facteurs de normalisation [KS71, KS80].

### 2.4.2 Opérateurs de Knapp et Stein

Soient  $P = MAN$  et  $P' = MAN'$  deux sous-groupes paraboliques minimaux partageant la même composante de Levi  $L = MA$ . Les opérateurs entrelaçant  $\pi_P^{\sigma, \nu}$  et  $\pi_{P'}^{\sigma, \nu}$  sont des applications linéaires  $L : \mathcal{H}_P^{\sigma, \nu} \longrightarrow \mathcal{H}_{P'}^{\sigma, \nu}$  telles que l'égalité

$$L\pi_P^{\sigma, \nu} = \pi_{P'}^{\sigma, \nu}L$$

soit vérifiée pour tout  $g \in G$ . Les images respectives de  $N$  et  $N'$  par l'involution de Cartan sont désignées par  $\overline{N}$  et  $\overline{N}'$ . On note encore  $\overline{P} = MAN\overline{N}$  et  $\overline{P}' = MAN'\overline{N}'$ .

#### Opérateurs formels entre $\pi_P^{\sigma, \nu}$ et $\pi_{P'}^{\sigma, \nu}$

L'espace de  $\pi_P^{\sigma, \nu}$  vue dans le modèle induit, est le complété d'un espace de fonctions  $N$ -invariantes. Un moyen naturel pour construire une fonction  $N'$ -invariante à partir d'une fonction  $N$ -invariante est de la moyenner sur  $N'$ . Plus précisément, si  $F$  est une fonction dans  $\mathcal{H}_P^{\sigma, \nu}$ , on pose pour  $x \in G$

$$I_{P', P}^{\sigma, \nu} F(x) = \int_{\frac{N'}{N \cap N'}} F(xn') dn'$$

sans présumer de la convergence de cette intégrale.

Le quotient  $\frac{N'}{N \cap N'}$  s'identifie à  $\overline{N} \cap N'$ , l'identification préservant les mesures invariantes et un calcul formel démontre que l'opérateur défini par

$$I_{P', P}^{\sigma, \nu} F(x) = \int_{\overline{N} \cap N'} F(x\bar{n}) d\bar{n}$$

vérifie la relation d'entrelacement entre  $\pi_P^{\sigma, \nu}$  et  $\pi_{P'}^{\sigma, \nu}$ .

**Remarque 2.7** Il n'est pas nécessaire, pour poser ces définitions formelles, que les représentations considérées soient unitaires ; c'est ce qui permet dans la suite de faire varier  $\nu$  hors des éléments imaginaires purs de  $\mathfrak{a}'_{\mathbb{C}}$ .

#### Opérateurs standard

Un cas particulier fondamental, notamment lorsque  $G$  est de rang réel 1, est celui où  $N'$  est le conjugué de  $N$  par un élément  $w$  du groupe de Weyl :

$$N' = w^{-1}Nw.$$

Soit  $R(w)F$  la fonction  $x \mapsto F(xw)$ , où  $w$  désigne encore un représentant dans  $N_K(\mathfrak{a})$  de  $w$ . L'opérateur d'entrelacement standard associé à  $\pi_P^{\sigma, \nu}$  est la composée :

$$I_{P,w}^{\sigma, \nu} = R(w)I_{w^{-1}Pw, P}^{\sigma, \nu}.$$

Cet opérateur est donné par l'intégrale

$$I_{P,w}^{\sigma, \nu} F(x) = \int_{\bar{N} \cap w^{-1}Nw} F(xw\bar{n}) d\bar{n},$$

en général non convergente, comme il apparaîtra dans un cas particulier au Paragraphe 5.4.1. Il satisfait formellement l'identité :

$$I_{P,w}^{\sigma, \nu} \pi_P^{\sigma, \nu} = \pi_P^{w\sigma, w\nu} I_{P,w}^{\sigma, \nu}.$$

### Domaines de convergence

La première étape dans la méthode mise en œuvre par Knapp et Stein [KS71, KS80] pour obtenir effectivement des opérateurs d'entrelacement standard bien définis entre les représentations de la série principale unitaire consiste à considérer les formules intégrales du paragraphe précédent pour des caractères non-unitaires de  $A$ , c'est-à-dire associés à des formes  $\nu \in \mathfrak{a}'_{\mathbb{C}}$  de partie réelle non nulle. La convergence de l'intégrale

$$\int_{\bar{N} \cap w^{-1}Nw} e^{-(\nu+\rho)H(\bar{n})} d\bar{n}$$

établie dans [HC58] pour certaines valeurs de  $\nu$  permet alors de démontrer le résultat suivant :

**Proposition 2.4.2** *Soit  $\nu \in \mathfrak{a}'_{\mathbb{C}}$  telle que l'inégalité  $\langle \operatorname{Re}(\nu), \beta \rangle > 0$  soit vérifiée pour toute racine  $\beta$  positive pour  $N$  et négative pour  $N'$ , c'est-à-dire telle que  $\beta$  et  $-w\beta$  soient dans  $\Delta(\mathfrak{a} : \mathfrak{g})^+$ . Alors l'intégrale définissant l'opérateur  $I_{P, P}^{\sigma, \nu}$  est convergente pour toute fonction  $F$  continue et tout  $x \in G$ . De même, si  $\nu$  vérifie la condition précédente avec  $N' = w^{-1}Nw$ , alors l'intégrale définissant l'opérateur  $I_{P, w}^{\sigma, \nu}$  est également convergente. Le cas échéant, les relations d'entrelacement sont vérifiées par les opérateurs obtenus.*

La construction des opérateurs d'entrelacement pour les représentations de la série principale unitaire repose ensuite sur un prolongement méromorphe des intégrales précédentes, considérées comme des fonctions du paramètre complexifié  $\nu$ . On se ramène pour ce faire au cas où  $\mathfrak{a}'_{\mathbb{C}} = \mathbb{C}$ .

### Réduction au cas de rang 1

La composante de Levi  $L = MA$  et le couple  $\sigma, \nu$  étant toujours fixés, les opérateurs d'entrelacement associés à des sous-groupes paraboliques différant par les parties nilpotentes de leurs décompositions de Langlands vérifient certaines relations de composition. En effet, supposons que  $P = MAN$ ,  $P' = MAN'$  et  $P'' = MAN''$  soient tels que  $\mathfrak{n}'' \cap \mathfrak{n} \subset \mathfrak{n}' \cap \mathfrak{n}$  et que  $\nu$  vérifie les hypothèses de la Proposition 2.4.2 pour  $N$  et  $N''$ . Alors on peut démontrer que

$$I_{P'',P}^{\sigma,\nu} = I_{P'',P'}^{\sigma,\nu} I_{P',P}^{\sigma,\nu}.$$

En ce qui concerne les opérateurs standard, il est possible de se ramener au cas où  $w$  est une des symétries qui engendrent le groupe de Weyl. Soit en effet  $w$  dans  $N_K(\mathfrak{a})$ . On note  $l(w)$  la *longueur* de  $w$ , c'est-à-dire le nombre minimal de symétries par rapport aux racines simples intervenant dans une décomposition de  $w$ . Si  $w = w_1 w_2$  est une décomposition de  $w$  telle que  $l(w) = l(w_1) + l(w_2)$ , alors la formule de décomposition

$$I_{P,w}^{\sigma,\nu} = I_{P,w_1}^{w_2 \sigma, w_2 \nu} I_{P,w_2}^{\sigma,\nu}$$

est valide dès que  $\nu$  satisfait les hypothèses de la Proposition 2.4.2.

Cette formule permet, grâce à l'analyse de [Sch71], de se ramener au cas où  $G$  est de rang réel 1. En effet, il suffit à présent de considérer  $w$  parmi les réflexions relatives aux racines simples. Si  $\lambda \in \Delta(\mathfrak{a} : (g))^+$  est réduite, c'est-à-dire telle que  $\frac{1}{2}\lambda \notin \Delta(\mathfrak{a} : \mathfrak{g})^+$ , on peut considérer la sous-algèbre de Lie  $\mathfrak{g}^{(\lambda)}$  de  $\mathfrak{g}$  engendrée par  $\mathfrak{g}_\lambda$ ,  $\mathfrak{g}_{2\lambda}$ ,  $\mathfrak{g}_{-\lambda}$  et  $\mathfrak{g}_{-2\lambda}$ . Le sous-groupe analytique de  $G$  correspondant, noté  $G^{(\lambda)}$ , est semisimple connexe. La décomposition de Cartan de  $\mathfrak{g}^{(\lambda)}$  est obtenue en considérant les intersections respectives  $\mathfrak{k}^{(\lambda)}$  et  $\mathfrak{p}^{(\lambda)}$  de  $\mathfrak{k}$  et  $\mathfrak{p}$  avec  $\mathfrak{g}^{(\lambda)}$ . Il apparaît que  $\mathfrak{a}^{(\lambda)}$ , défini comme l'intersection  $\mathfrak{a} \cap \mathfrak{g}^{(\lambda)}$ , est un sous-espace abélien maximal de  $\mathfrak{p}^{(\lambda)}$  et que  $\mathfrak{a}^{(\lambda)}$  coïncide avec la droite engendrée par l'élément  $H_\lambda$  représentant  $\lambda$  pour la forme  $B_0$ , c'est-à-dire vérifiant  $\lambda(H) = B_0(H, H_\lambda)$  pour tout  $H \in \mathfrak{a}^{(\lambda)}$ . Le groupe  $G^{(\lambda)}$  est donc de rang réel 1.

D'après [Sch71], si  $w$  désigne la classe modulo  $M$  de la symétrie  $s_\lambda$  par rapport à une telle racine  $\lambda$ , l'opérateur standard  $I_{P,w}^{\sigma,\nu}$  se déduit de l'opérateur standard  $I_{P^{(\lambda)}M,w}^{\sigma,\nu|_{\mathfrak{a}^{(\lambda)}}}$  via la formule

$$I_{P,w}^{\sigma,\nu} F(k) = I_{P^{(\lambda)}M,w}^{\sigma,\nu|_{\mathfrak{a}^{(\lambda)}}} F_k(1),$$

où  $F_k$  désigne la restriction à  $G^{(\lambda)}M$  de l'application  $F(k \cdot)$  pour  $k \in K$ , qui est bien un élément de l'espace de la représentation  $\pi_{P^{(\lambda)}M,w}^{\sigma,\nu|_{\mathfrak{a}^{(\lambda)}}$ .

### Prolongement méromorphe

Grâce à l'étude menée par G. Schiffman, il suffit donc de se placer dans le cas où  $G$  est de rang réel 1. Soient  $\lambda$  la racine restreinte positive,  $p$  et  $q$  les dimensions respectives de  $\mathfrak{g}_\lambda$  et  $\mathfrak{g}_{2\lambda}$ , de sorte que  $\rho = \frac{1}{2}(p + 2q)\lambda$  et que toute forme  $\nu \in \mathfrak{a}'_{\mathbb{C}}$  s'écrive  $\nu = z\rho$  avec  $z \in \mathbb{C}$ . Enfin,  $w$  désigne l'élément non trivial du groupe de Weyl.

Le théorème ci-dessous est dû à Knapp et Stein [KS71]. Soit  $F$  une fonction de classe  $C^\infty$  dans l'espace de la représentation  $\pi_P^{\sigma, z\rho}$ , réalisée dans le modèle compact, c'est-à-dire une fonction de classe  $C^\infty$  sur  $K$ , à valeurs dans  $\mathcal{H}_\sigma$  vérifiant la relation  $F(km) = \sigma^{-1}(m)F(k)$  pour tous  $m \in M$  et  $k \in K$ . La Proposition 2.4.2 assure que l'intégrale définissant

$$I_{P,w}^{\sigma, z\rho} F(k)$$

est convergente pour  $\operatorname{Re}(z) > 0$ .

**Théorème 2.4.2** *La fonction définie pour  $\operatorname{Re}(z) > 0$  par*

$$z \longmapsto I_{P,w}^{\sigma, z\rho} F$$

*se prolonge méromorphiquement à  $\mathbb{C}$  avec des pôles d'ordre inférieur ou égal à 1 aux multiples entiers positifs de  $\frac{-1}{p+2q}$ . L'application  $(z, F) \longmapsto I_{P,w}^{\sigma, z\rho} F$  est continue en dehors de ces pôles entre  $\mathbb{C} \times C^\infty(K, \mathcal{H}_\sigma)$  et  $C^\infty(K, \mathcal{H}_\sigma)$ .*

**Remarque 2.8** Ce résultat sera illustré dans le cas particulier de  $SL_2(\mathbb{R})$  au Paragraphe 5.2.5.

L'analyse ébauchée au paragraphe précédent permet d'étendre ce résultat en rang supérieur : les expressions définissant les opérateurs d'entrelacement  $I_{P',P}^{\sigma, \nu}$  et  $I_{P,w}^{\sigma, \nu}$ , valides pour les valeurs de  $\nu$  données par la Proposition 2.4.2, se prolongent méromorphiquement à  $\mathfrak{a}'_{\mathbb{C}}$ .

### 2.4.3 Normalisation des opérateurs d'entrelacement

L'objet de ce paragraphe est de présenter la construction de certains facteurs scalaires dépendant de  $\nu$  et permettant de normaliser les opérateurs d'entrelacement obtenus plus haut par prolongement méromorphe. Les opérateurs ainsi normalisés réalisent des équivalences unitaires entre représentations de la série principale unitaire et l'étude des singularités des facteurs scalaires associés permet d'élucider les phénomènes de réductibilité non détectés par le Théorème de Bruhat. On se placera dans le cas où  $G$  est de rang réel 1.

### Facteurs de normalisation

Supposons  $\nu$  imaginaire et non nul. Les relations de commutation vérifiées par les opérateurs fournis par le Théorème 2.4.2 montrent que la composée  $I_{P,\bar{P}}^{\sigma,\nu} I_{\bar{P},P}^{\sigma,\nu}$  entrelace  $\pi_P^{\sigma,\nu}$  avec elle-même. D'après le Théorème 2.4.1 de Bruhat, cet opérateur est donc scalaire, d'où l'existence d'une fonction  $\eta$  à valeurs scalaires définie par

$$I_{P,\bar{P}}^{\sigma,\nu} I_{\bar{P},P}^{\sigma,\nu} = \eta_{\bar{P},P}^{\sigma}(\nu) \text{Id.}$$

La proposition suivante, due à Knapp et Stein [KS71, KS80], présente certaines propriétés, en particulier de symétrie, de la fonction  $\eta$ .

**Proposition 2.4.3** *La fonction  $\eta_{\bar{P},P}^{\sigma}$  est holomorphe et ses pôles sont réels. Elle vérifie en outre les relations suivantes :*

- a)  $\eta_{\bar{P},P}^{\sigma} = \eta_{P,\bar{P}}^{\sigma}$
- b)  $\eta_{\bar{P},P}^{\sigma}(\nu) \geq 0$  pour  $\nu$  imaginaire
- c)  $\eta_{\bar{P},P}^{\sigma}(\nu) = \overline{\eta_{\bar{P},P}^{\sigma}(-\bar{\nu})}$
- d)  $\eta_{\bar{P},P}^{w\sigma}(w\nu) = \eta_{\bar{P},P}^{\sigma}(\nu)$  pour tout  $w \in N_K(\mathfrak{a})$
- e)  $\eta_{\bar{P},P}^{\sigma}(\nu) = \eta_{\bar{P},P}^{\sigma}(-\nu)$

Un lemme d'analyse complexe montre qu'à une fonction méromorphe  $\eta$  non nulle sur  $\mathbb{C}$ , paire et prenant des valeurs positives sur l'axe imaginaire, on peut associer une fonction  $\gamma$  méromorphe, dont les ensembles de pôles et de zéros sont inclus dans ceux de  $\eta$ , prenant des valeurs réelles sur l'axe réel et vérifiant la relation

$$\eta(z) = \gamma(z) \overline{\gamma(-\bar{z})}$$

pour toute valeur de  $z$  où  $\eta$  est définie. La fonction  $\gamma$  est essentiellement obtenue en considérant des produits de Weierstrass.

La Proposition 2.4.3 montre que l'on peut associer une telle fonction à  $\eta_{\bar{P},P}^{\sigma}$ . On notera  $\gamma_{\bar{P},P}^{\sigma}$  cette fonction.

On peut à présent définir les opérateurs d'entrelacement normalisés :

**Définition 2.4.4 [Opérateurs normalisés]**

Soient  $P, P', \sigma$  et  $\nu$  comme précédemment. On appelle *opérateur d'entrelacement normalisé* l'opérateur

$$\mathcal{I}_{\bar{P},P}^{\sigma,\nu} = \frac{1}{\gamma_{\bar{P},P}^{\sigma}(\nu)} I_{\bar{P},P}^{\sigma,\nu}.$$

De même, on appelle *opérateur d'entrelacement normalisé standard* l'opérateur

$$\mathcal{I}_{P,w}^{\sigma,\nu} = \frac{1}{\gamma_{P,P}^{\sigma}(\nu)} I_{P,w}^{\sigma,\nu}.$$

Cette construction se généralise au rang supérieur et les opérateurs  $\mathcal{I}_{P',P}^{\sigma,\nu}$  vérifient la relation

$$\mathcal{I}_{P',P}^{\sigma,\nu} \mathcal{I}_{P,P'}^{\sigma,\nu} = \text{Id}.$$

D'autre part, si  $P_1 = MAN_1, P_2 = MAN_2$  et  $P_3 = MAN_3$  sont trois sous-groupes paraboliques de  $G$  ayant la même composante de Levi  $MA$ , les opérateurs normalisés associés vérifient la relation de composition suivante :

$$\mathcal{I}_{P_3,P_1}^{\sigma,\nu} = \mathcal{I}_{P_3,P_2}^{\sigma,\nu} \mathcal{I}_{P_2,P_1}^{\sigma,\nu}.$$

**Conséquences : équivalences et irréductibilité pour la série principale**

La proposition suivante énonce quelques propriétés des opérateurs d'entrelacement normalisés :

**Proposition 2.4.5** *Les opérateurs d'entrelacement normalisés, appliqués aux vecteurs  $K$ -finis des espaces sur lesquels ils sont définis, vérifient les propriétés suivantes :*

- a)  $\mathcal{I}_{P',P}^{\sigma,\nu} \pi_P^{\sigma,\nu} = \pi_P^{\sigma,\nu} \mathcal{I}_{P',P}^{\sigma,\nu}$
- b)  $\mathcal{I}_{P',P}^{\sigma,\nu} = R(w)^{-1} \mathcal{I}_{wP'w^{-1},wPw^{-1}}^{\sigma,\nu} R(w)$  pour tout  $w \in N_K(\mathfrak{a})$
- c)  $\mathcal{I}_{P',P}^{\sigma,\nu *} = \mathcal{I}_{P',P}^{\sigma,-\bar{\nu}}$
- d)  $\mathcal{I}_{P',P}^{\sigma,\nu}$  se prolonge holomorphiquement comme fonction de  $\nu$  pour  $\nu$  imaginaire et les opérateurs obtenus pour de tels  $\nu$  sont unitaires.

Le dernier point démontre en particulier que les représentations  $\pi_P^{\sigma,\nu}$  et  $\pi_{P'}^{\sigma,\nu}$  sont unitairement équivalentes.

Enfin, les opérateurs normalisés standard vérifient également des propriétés de composition et des relations d'entrelacement analogues.

**Proposition 2.4.6** *Les opérateurs d'entrelacement normalisés standard, appliqués aux vecteurs  $K$ -finis des espaces sur lesquels ils sont définis, vérifient les propriétés suivantes :*

- a)  $\mathcal{I}_{P,w}^{\sigma,\nu} \pi_P^{\sigma,\nu} = \pi_P^{w\sigma,w\nu} \mathcal{I}_{P,w}^{\sigma,\nu}$
- b)  $\mathcal{I}_{P,w_1 w_2}^{\sigma,\nu} = \mathcal{I}_{P,w_1}^{w_2\sigma,w_2\nu} \mathcal{I}_{P,w_2}^{\sigma,\nu}$  pour tous  $w_1, w_2$  dans  $N_K(\mathfrak{a})$
- c)  $\mathcal{I}_{P,w}^{\sigma,\nu*} = \mathcal{I}_{P,w^{-1}}^{w\sigma,-w\bar{\nu}}$
- d)  $\mathcal{I}_{P,w}^{\sigma,\nu}$  se prolonge holomorphiquement comme fonction de  $\nu$  pour  $\nu$  imaginaire et les opérateurs obtenus sont unitaires.

Comme précédemment, le dernier point démontre que les représentations  $\pi_P^{\sigma,\nu}$  et  $\pi_P^{w\sigma,w\nu}$  sont unitairement équivalentes.

Le Théorème de Bruhat donnait une majoration de la dimension de l'espace des opérateurs d'entrelacement. La normalisation des opérateurs de Knapp et Stein permet d'établir le résultat suivant, qui minore cette dimension :

**Théorème 2.4.3** *Soit  $\nu$  imaginaire dans  $\mathfrak{a}'_{\mathbb{C}}$ . On pose*

$$R'_{\sigma,\nu} = \{r \in W_{\sigma,\nu} \mid \eta_{r^{-1}P_r,P}^{\sigma} \text{ est régulière en } \nu.\}$$

*Alors pour  $r \in R'_{\sigma,\nu}$ , les opérateurs  $\sigma(r)\mathcal{I}_{P,r}^{\sigma,\nu}$  sont linéairement indépendants.*

Dans l'énoncé précédent,  $\sigma(r)$  désigne l'extension de  $\sigma$  à  $N_K(\mathfrak{a})$  appliquée à  $r$ , définie à une racine de l'unité près, c'est-à-dire au signe près dans le cas des groupes de rang 1.

Il en résulte le théorème suivant, qui relie l'irréductibilité de la représentation  $\pi_P^{\sigma,0}$  à l'existence d'un pôle en 0 pour la fonction  $\eta_{P,P}^{\sigma}$ . On suppose  $G$  de rang réel 1.

**Théorème 2.4.4** *La représentation de la série principale  $\pi_P^{\sigma,0}$  est réductible si et seulement si :*

- $w\sigma$  est équivalent à  $\sigma$
- la fonction  $\eta_{P,P}^{\sigma}$  n'a pas de pôle en 0.

**Remarque 2.9** On trouve un énoncé plus général, sans hypothèse sur le rang réel de  $G$  et sans supposer que les représentations sont induites à partir d'un parabolique minimal dans [KS80].

# Chapitre 3

## $C^*$ -modules d'induction généralisés

Nous construisons dans cette partie des  $C^*$ -modules hilbertiens  $\mathcal{E}_H^G(X)$ , où  $X$  est un espace mesuré sur lequel agissent des groupes topologiques  $G$  et  $H$ , généralisant la construction de [Rie71] qui correspond au cas  $X = G$ . On donne ensuite plusieurs descriptions de ces modules dans le cas du quotient d'un groupe de Lie semi-simple  $G$  par la composante nilpotente  $N$  d'une décomposition d'Iwasawa :  $X = G/N$ . Ces modules d'induction se spécialisent sur les représentations de la série principale unitaire et leurs différentes descriptions correspondent aux réalisations classiques de ces représentations.

### 3.1 Construction générale

Soit  $X$  un espace topologique localement compact et  $G, H$  deux groupes topologiques localement compacts munis de mesures de Haar à gauche, agissant respectivement à gauche et à droite sur  $X$ . On suppose que les deux actions commutent et que l'action de  $H$  est propre, ce qui implique que  $X/H$  est localement compact. Dans les situations étudiées par la suite,  $X/H$  sera compact, donc *a fortiori* paracompact. On suppose enfin que  $X$  est muni d'une mesure  $\mu$ , invariante sous l'action de  $G$  et relativement invariante sous celle de  $H$ . Les données sont donc résumées par

$$G \curvearrowright (X, \mu) \curvearrowleft H,$$

où la relative invariance de la mesure  $\mu$  sous l'action de  $H$  se traduit par l'existence d'un morphisme de groupes  $\delta_X : H \rightarrow \mathbb{R}_+^*$  tel que l'on ait, pour  $f \in L^1(H)$  et  $h \in H$  :

$$\int_X f(x.h) d\mu(x) = \delta_X(h^{-1}) \int_X f(x) d\mu(x).$$

**Notation :** les fonctions modulaires de  $G$  et  $H$  sont notées  $\Delta_G$  et  $\Delta_H$  et l'on pose

$$\gamma = \sqrt{\frac{\delta_X}{\Delta_H}}.$$

Considérons à présent l'espace  $C_c(X)$  des fonctions continues à support compact sur  $X$ . Les actions de  $G$  et  $H$  respectivement définies par

$$(g.f)(x) = f(g^{-1}.x) \quad \text{et} \quad (f.h)(x) = \frac{\gamma(h)}{\delta_X(h)} f(x.h^{-1})$$

pour  $g \in G$ ,  $h \in H$ ,  $f \in C_c(X)$  et  $x \in X$  donnent lieu à des actions de  $C_c(G)$  et  $C_c(H)$  données par

$$(\varphi.f)(x) = \int_G \varphi(g) f(g^{-1}.x) dg \quad \text{et} \quad (f.\psi)(x) = \int_H \frac{\gamma(h)}{\delta_X(h)} f(x.h^{-1}) \psi(h) dh$$

pour  $\varphi \in C_c(G)$ ,  $\psi \in C_c(H)$  et  $f \in C_c(X)$ . Il est clair que ces deux actions commutent.

L'espace  $C_c(X)$  peut être muni d'un produit scalaire à valeurs dans  $C^*(H)$ .

**Proposition 3.1.1** *L'application  $C_c(X) \times C_c(X) \longrightarrow C_c(H)$  donnée par*

$$\langle f, g \rangle(h) = \gamma(h) \int_X \overline{f(x)} g(x.h) d\mu(x)$$

*pour  $f, g \in C_c(X)$  est  $C_c(H)$ -sesquilinéaire, définie et positive.*

— *Démonstration.*

Soient  $f, g \in C_c(X)$  et  $h \in H$ . Vérifions que  $\langle f, g \rangle^* = \langle g, f \rangle$  dans  $C^*(H)$  :

$$\begin{aligned} \langle f, g \rangle^*(h) &= \Delta_H(h^{-1}) \gamma(h^{-1}) \int_X f(x) \overline{g(x.h^{-1})} d\mu(x) \\ &\stackrel{x \leftrightarrow x.h}{=} \Delta_H^{-1} \gamma^{-1} \delta_X(h) \int_X f(x.h) \overline{g(x)} d\mu(x) = \langle g, f \rangle(h) \end{aligned}$$

On vérifie également la sesquilinearité attendue :

$$\langle f, g.\psi \rangle = \langle f, g \rangle \psi.$$

En effet, si  $\psi \in C_c(H)$  et  $h \in H$ , alors

$$\begin{aligned} \langle f, g \cdot \psi \rangle(h) &= \gamma(h) \int_X f(x) \overline{g \cdot \psi(xh)} d\mu(x) \\ &= \gamma(h) \int_X \int_H \frac{\gamma(t)}{\delta_X(t)} f(x) g(xht^{-1}) \psi(t) dt d\mu(x) \end{aligned}$$

D'autre part,

$$\begin{aligned} \langle f, g \rangle \cdot \psi(h) &= \int_H \langle f, g \rangle(t) \psi(ht^{-1}) dt = \int_H \int_X \gamma(t) f(x) \overline{g(xt)} \psi(ht^{-1}) d\mu(x) dt \\ \stackrel{(t \leftrightarrow ht)}{=} &= \int_H \int_X \gamma(ht) f(x) \overline{g(xht)} \psi(t^{-1}) d\mu(x) dt \\ \stackrel{(t \leftrightarrow t^{-1})}{=} &= \int_H \int_X \gamma(ht^{-1}) \Delta_H(t^{-1}) f(x) \overline{g(xht^{-1})} \psi(t) d\mu(x) dt, \end{aligned}$$

et l'égalité résulte du fait que  $\gamma(ht^{-1}) \Delta_H(t^{-1}) = \gamma(h) \frac{\gamma(t)}{\delta_X(t)}$ .

Il reste à s'assurer que la condition de positivité est vérifiée, *id est* que  $\langle f, f \rangle$  est un élément positif de  $C^*(H)$ . On s'appuie pour cela sur un lemme similaire à celui dû à Blattner et cité dans [Rie71]. Rappelons d'abord une propriété topologique, démontrée dans [Bou63] :

**Lemme 3.1.2** *Supposons  $X/H$  paracompact. Il existe alors une fonction  $b$ , continue, positive et bornée sur  $X$ , dont le support a une intersection compacte avec le saturé  $CH$  de toute partie compacte  $C$  de  $X$ , et telle que  $\int_H b(x \cdot t) dt = 1$  pour tout  $x \in X$ .*

**Remarque 3.1** Une telle fonction est parfois appelée *section transverse* ou encore *section de Bruhat*.

La positivité de la forme définie plus haut se déduit alors du lemme précédent :

**Lemme 3.1.3** *Si  $f$  est une fonction continue à support compact sur  $X$ , alors  $\langle f, f \rangle$  est un élément positif de  $C_c(H)$ . Plus précisément, si  $H$  agit sur un espace de Hilbert  $\mathcal{H}$  par une représentation unitaire continue, alors pour  $u, v \in \mathcal{H}$  et  $f, g \in C_c(X)$ ,*

$$\langle \langle f, g \rangle \cdot u, v \rangle_{\mathcal{H}} = \int_X b(x) \langle \gamma_{g_x} \cdot u, \gamma_{f_x} \cdot v \rangle dx$$

où  $f_x = f(x \cdot \cdot)$ .

— *Démonstration.*

Soient  $f$  et  $g$  dans  $C_c(X)$  et  $\nu$  une mesure de Radon sur  $H$ .

$$\begin{aligned}
\int_H \gamma(h) \int_X \overline{f(x)} g(xh) d\mu(x) d\nu(h) &= \int_H \gamma(h) \int_X \overline{f(x)} g(xh) \int_H b(xt) dt d\mu(x) d\nu(h) \\
&\stackrel{(x \leftrightarrow xt^{-1})}{=} \int_H \gamma(h) \int_H \int_X \overline{f(xt^{-1})} g(xt^{-1}h) b(x) \delta_X(t^{-1}) d\mu(x) dt d\nu(h) \\
&= \int_X b(x) \int_{H \times H} \overline{f(xt^{-1})} \gamma(t^{-1}h) g(xt^{-1}h) \frac{dt d\nu(h)}{\gamma(t) \Delta_H(t)} d\mu(x) \\
&= \int_X \int_{H \times H} (\gamma f_x)^*(t) (\gamma g_x)(t^{-1}h) \Delta_H(t^{-1}) dt d\nu(h) d\mu(x)
\end{aligned}$$

La troisième ligne résulte de l'égalité  $\gamma(h) \delta_X(t^{-1}) = \gamma(h) \gamma(t)^{-2} \Delta_H(t^{-1})$ .

On conclut en considérant  $f = g$ , la mesure  $\nu$  de type positif, et en choisissant enfin  $d\nu(h) = \langle h.u, v \rangle dh$ .  $\square$

On déduit également de ce lemme que pour  $f \in C_c(X)$ , la condition  $\langle f, f \rangle = 0$  implique  $f = 0$ , ce qui achève la preuve de la Proposition 3.1.1.  $\square$

**Remarque 3.2** Dans le cas particulier où  $H = \{e\}$ , le résultat de la construction précédente est l'espace de Hilbert des fonctions de carré sommable sur  $X$  :

$$\mathcal{E}(X) = L^2(X, \mu).$$

La proposition suivante décrit les modules associés à certains espaces en les identifiant à des produits tensoriels d'espaces  $L^2$  par la  $C^*$ -algèbre du groupe agissant à droite.

**Proposition 3.1.4** *Soit  $(B, db)$  un espace mesuré. Supposons que  $X$  est de la forme  $B \times H$ , muni de l'action de  $H$  donnée par  $(x, h).h_0 = (x, hh_0)$ , et d'une mesure de la forme  $d\mu(b, h) = \eta(h) db dh$ , où  $\eta$  est un morphisme continu de  $H$  dans  $\mathbb{R}_+$ . Alors le  $C^*$ -module  $\mathcal{E}(X)$  s'identifie à  $L^2(B) \otimes C^*(H)$ .*

— *Démonstration.*

La forme de l'action de  $H$  sur  $X$  implique que  $\delta_X = \eta \Delta_H$ , d'où  $\gamma = \sqrt{\eta}$ . Soient

$f \in C_c(B)$  et  $g \in C_c(H)$ . L'application  $P$  définie par  $P(f, g) : (b, h) \mapsto \eta^{-\frac{1}{2}} f(b)g(h)$  se factorise en une application sur le produit tensoriel  $P : C_c(B) \otimes C_c(H) \rightarrow C_c(X)$ . On montre au moyen d'une partition de l'unité de  $B$  que tous les éléments de  $C_c(X)$  sont des limites uniformes d'éléments de  $P(C_c(B) \otimes C_c(H))$ . Montrons que  $P$  est  $C^*(H)$ -linéaire : soient  $\varphi \in C_c(H)$ ,  $b \in B$  et  $h_0 \in H$ ,

$$\begin{aligned} P(f \otimes g \cdot \varphi)(b, h_0) &= \eta^{-\frac{1}{2}}(h_0) f(b) (g * \varphi)(h_0) = \eta^{-\frac{1}{2}}(h_0) f(b) \int_H g(h) \varphi(h^{-1} h_0) dh \\ (h \leftrightarrow h^{-1}) &= \eta^{-\frac{1}{2}}(h_0) f(b) \int_H \Delta_H^{-1}(h) g(h^{-1}) \varphi(h h_0) dh \\ (h \leftrightarrow h h_0^{-1}) &= f(b) \int_H \Delta_H^{-1}(h) g(h_0 h^{-1}) \varphi(h) dh \\ &= \int_H \Delta_H^{-1}(h) \eta^{-\frac{1}{2}}(h) P(f, g)(b, h_0 h^{-1}) \varphi(h) dh \\ &= P(f \otimes g) \cdot \varphi(b, h_0), \end{aligned}$$

car  $\gamma \delta_X^{-1} = \Delta_H^{-1} \eta^{-\frac{1}{2}}$ .

Calculons à présent  $\|P(f \otimes g)\|^2$  dans  $C_c(H) \subset C^*(H)$  :

$$\begin{aligned} \|P(f \otimes g)\|_{C^*(H)}^2(h_0) &= \gamma(h_0) \int_{B \times H} \overline{f(b)g(h)\eta^{-\frac{1}{2}}(h)} f(b)g(h h_0)\eta^{-\frac{1}{2}}(h h_0)\eta(h) db dh \\ &= \|f\|_2^2 \int_H \overline{g(h)} g(h h_0) dh = \|f\|_2^2 g^* g. \end{aligned}$$

Cette égalité montre que  $P$  préserve les normes à valeurs dans  $C^*(H)$ , et se prolonge donc en une isométrie entre les  $C^*(H)$ -modules  $L^2(B) \otimes C^*(H)$  et  $\mathcal{E}(X)$ , d'image dense, d'où le résultat.  $\square$

L'isomorphisme de la proposition précédente est une isométrie entre modules hilbertiens sur  $C^*(H)$ . L'action à gauche de  $C^*(G)$  sur  $\mathcal{E}(X)$  peut-être transportée sur  $L^2(B) \otimes C^*(H)$  via  $P$ .

**Remarque 3.3** Le résultat ci-dessus s'étend au cas où  $B \times H$  est un sous-ensemble de  $X$  dont le complémentaire est de mesure nulle. Dans ce cas,  $G$  n'agit pas en général sur  $B \times H$ , mais le  $C^*(H)$ -module obtenu est tout de même muni d'une action de  $C^*(G)$  à gauche. Cette situation se présente en particulier dans le cas de la cellule ouverte de la décomposition de Bruhat d'un groupe de Lie semi-simple.

## 3.2 $C^*$ -modules adaptés à la série principale

Les représentations de la série principale unitaire obtenues à partir de sous-groupes paraboliques partageant la même composante de Levi  $L$  sont induites de représentations agissant trivialement sur les parties nilpotentes qui, seules, distinguent ces sous-groupes. Il est donc naturel d'essayer de réaliser l'induction de ces représentations au moyen de  $C^*$ -modules sur  $C^*(L)$  plutôt que sur les  $C^*$ -algèbres des différents paraboliques intervenant. La situation est donc la suivante :  $G$  est un groupe de Lie linéaire connexe semi-simple, à centre fini,  $P = MAN = L \rtimes N$  est le sous-groupe parabolique minimal de  $G$  de composante de Lévi  $L$  avec  $M = \mathcal{Z}_K(A)$ . Le module étudié est

$${}_{C^*G}\mathcal{E}(G/N)_{C^*L}.$$

L'action à droite  $G/N \curvearrowright L$  provient de celle de  $P$  sur  $G$ , car  $L$  normalise  $N$ . Les propriétés de la décomposition d'Iwasawa permettent de montrer que cette action est libre et propre. L'existence d'une mesure  $G$ -invariante sur  $G/N$  résulte de l'égalité de  $\Delta_G|_N$  et  $\Delta_N$ , les groupes  $G$  et  $N$  étant unimodulaires. Cette mesure est unique à une constante près [Bou63]; plus précisément, la décomposition d'Iwasawa permet d'identifier l'espace topologique  $G/N$  à l'espace  $KA$  et la décomposition correspondante de la mesure de Haar  $dg = e^{2\rho \log(a)} dk da dn$  donnée au paragraphe 2.2.4 montre que la mesure  $d\mu$  à considérer sur  $G/N$  s'identifie à

$$d\mu(ka) = e^{2\rho \log(a)} dk da$$

où  $\rho$  désigne la demi-somme des racines positives de  $\Delta(\mathfrak{a} : \mathfrak{g})$ .

### 3.2.1 Fonctions modulaires

Calculons les fonctions  $\delta_X$  qui caractérisent la relative invariance sous l'action de  $G$  des mesures sur les espaces  $X$  intervenant. Soient  $P_1 = MAN_1$  et  $P_2 = MAN_2$  deux sous-groupes paraboliques minimaux de même composante de Lévi  $L = MA$ , les parties nilpotentes  $N_1$  et  $N_2$  correspondant à des choix d'ordres différents sur le système de racines  $\Delta(\mathfrak{a} : \mathfrak{g})$ , pour lesquels les ensembles de racines positives seront respectivement notés  $\Delta_1(\mathfrak{a} : \mathfrak{g})^+$  et  $\Delta_2(\mathfrak{a} : \mathfrak{g})^+$ . Enfin, pour  $i \in \{1, 2\}$ , on notera  $\rho_i$  la demi-somme des éléments de  $\Delta_i(\mathfrak{a} : \mathfrak{g})^+$ .

Suivant [Bou63], si  $\Gamma$  est un groupe topologique et  $\sigma \in \text{Aut}(\Gamma)$ , la fonction modulaire de  $\sigma$ , notée  $\text{mod}^\Gamma(\sigma)$ , ou encore  $\text{mod}(\sigma)$  si aucune confusion ne peut en résulter, est définie par la formule suivante, valide pour toute fonction  $f$  intégrable sur  $\Gamma$  :

$$\int_{\Gamma} f \circ \sigma = \text{mod}(\sigma)^{-1} \int_{\Gamma} f.$$

**Notation :** si  $L$  normalise un sous-groupe  $H$  de  $G$ , l'automorphisme de  $H$  donné par la conjugaison par  $l \in L$  sera noté  $c_l$ . Ainsi, pour  $h \in H$ , on note  $c_l(h) = l^{-1}hl$ .

Dans le cas d'un automorphisme intérieur  $c_\gamma$  de  $\Gamma$ , il procède des définitions que

$$\text{mod}^\Gamma(c_\gamma) = \Delta_\Gamma(\gamma).$$

Avec les notations ci-dessus,  $L$  normalise  $N_1 \cap N_2$ , d'où une action à droite de  $L$  sur  $X = G/(N_1 \cap N_2)$ , provenant encore de celle de  $P$  sur  $G$ .

**Lemme 3.2.1** *Soit  $Q = L \times (N_1 \cap N_2)$ . Alors, pour  $l \in L$ ,  $\text{mod}(c_l) = \frac{\Delta_Q(l)}{\Delta_L(l)} = \Delta_Q(l)$ .*

— *Démonstration.*

D'après le Théorème 1.2.1, pour  $f$  borélienne positive,

$$\int_Q f(q) dq = \int_{L \times (N_1 \cap N_2)} f(ln) \frac{\Delta_{N_1 \cap N_2}(n)}{\Delta_Q(n)} dl dn.$$

Or,  $N_1 \cap N_2$  est nilpotent donc unimodulaire et  $N_1 \cap N_2 \triangleleft Q$ , ce qui implique que  $\Delta_Q(n) = \Delta_{N_1 \cap N_2}(n)$  pour  $n \in N_1 \cap N_2$ . Par conséquent,

$$\int_Q f(q) dq = \int_{L \times (N_1 \cap N_2)} f(ln) dl dn.$$

Soit à présent  $l_0 \in L$ .

$$\begin{aligned} \int_Q f(q l_0) dq &= \Delta_Q(l_0)^{-1} \int_Q f(q) dq = \int_L \int_{N_1 \cap N_2} f(ln l_0) dl dn \\ &= \int_L \int_{N_1 \cap N_2} f(ll_0 c_{l_0}(n)) dl dn = \text{mod}(c_{l_0})^{-1} \int_L \int_{N_1 \cap N_2} f(ll_0 n) dl dn \\ &= \Delta_L(l_0^{-1}) \text{mod}(c_{l_0})^{-1} \int_Q f(q) dq, \end{aligned}$$

d'où la relation  $\Delta_Q(l) = \Delta_L(l) \text{mod}(c_l)$  pour  $l \in L$ . La dernière égalité résulte du fait que  $L$  est réductif donc unimodulaire.  $\square$

Ce résultat est relié au calcul de la fonction modulaire de l'action de  $L$  sur  $G/(N_1 \cap N_2)$  par le résultat suivant :

**Lemme 3.2.2** *Avec les notations précédentes, on a pour  $l \in L$ ,*

$$\delta_{G/(N_1 \cap N_2)}(l) = \text{mod}(c_l)^{-1}.$$

— *Démonstration.*

Soient  $l \in L$  et  $f \in L^1(G)$ . Comme  $N_1 \cap N_2$  et  $G$  sont unimodulaires, les mesures peuvent être normalisées de sorte que l'on ait

$$\int_G f(g) dg = \int_{G/(N_1 \cap N_2)} F(\dot{g}) d\mu(\dot{g})$$

où, par définition,  $F(\dot{g}) = \int_{N_1 \cap N_2} f(gn) dn$ .

Il vient alors :

$$\begin{aligned} \int_G f(g) dg &= \int_{G/(N_1 \cap N_2)} F(\dot{g}) d\mu(\dot{g}) = \delta_{G/(N_1 \cap N_2)}(l) \int_{G/(N_1 \cap N_2)} F(\dot{gl}) d\mu(\dot{g}) \\ &= \delta_{G/(N_1 \cap N_2)}(l) \int_{G/(N_1 \cap N_2)} \int_{N_1 \cap N_2} f(gln) dnd\mu(\dot{g}) \\ &= \delta_{G/(N_1 \cap N_2)}(l) \text{mod}(c_l) \int_{G/(N_1 \cap N_2)} \int_{N_1 \cap N_2} f(gnl) dnd\mu(\dot{g}) \\ &= \delta_{G/(N_1 \cap N_2)}(l) \text{mod}(c_l) \int_G f(gl) dg \\ &= \delta_{G/(N_1 \cap N_2)}(l) \text{mod}(c_l) \int_G f(g) dg, \end{aligned}$$

d'où l'égalité. □

On en déduit le calcul de  $\delta_{G/(N_1 \cap N_2)}$  :

**Proposition 3.2.3** *Pour  $l = ma \in L$ ,*

$$\delta_{G/(N_1 \cap N_2)}(l) = e^{(\rho_1 + \rho_2) \log(a)}.$$

— *Démonstration.*

D'après les deux lemmes précédents, il suffit de calculer  $\Delta_Q$  pour  $Q = L \rtimes (N_1 \cap N_2)$ . En notant  $\mathfrak{q}$  l'algèbre de Lie de  $Q$ , l'égalité  $\Delta_Q(ma) = |\det(\text{Ad}_{\mathfrak{q}}(ma))|^{-1}$  résulte de la Proposition 1.2.1. La compacité de  $M$ , sous-groupe fermé de  $K$  implique que  $\Delta_Q(m) = 1$  pour tout  $m \in M$ . D'autre part, tout élément  $a \in A$  agit trivialement sur  $\mathfrak{m}$  et  $\mathfrak{a}$ , donc  $\Delta_Q(ma) = |\det(\text{Ad}_{\mathfrak{n}_1 \cap \mathfrak{n}_2}(a))|^{-1}$ . Or, si  $\mathfrak{g}_\lambda$  est le sous-espace associé à la racine restreinte  $\lambda$ , l'élément  $a$  agit sur  $\mathfrak{g}_\lambda$  par  $e^{\lambda \log(a)}$  donc  $\det(\text{Ad}_{\mathfrak{n}_1 \cap \mathfrak{n}_2}(a)) = e^{\Lambda \log(a)}$ , où

$$\Lambda = \sum_{\lambda \in \Delta_1(\mathfrak{a}; \mathfrak{g})^+ \cap \Delta_2(\mathfrak{a}; \mathfrak{g})^+} \lambda.$$

Or

$$\begin{aligned}
 2\rho_1 + 2\rho_2 &= \sum_{\lambda \in \Delta_1(\mathfrak{a}:\mathfrak{g})^+} \lambda + \sum_{\lambda \in \Delta_2(\mathfrak{a}:\mathfrak{g})^+} \lambda \\
 &= 2\Lambda + \sum_{\lambda \in \Delta_1(\mathfrak{a}:\mathfrak{g})^+ \cap \Delta_2(\mathfrak{a}:\mathfrak{g})^-} \lambda + \sum_{\lambda \in \Delta_1(\mathfrak{a}:\mathfrak{g})^- \cap \Delta_2(\mathfrak{a}:\mathfrak{g})^+} \lambda \\
 &= 2\Lambda
 \end{aligned}$$

car les racines de  $\Delta_1(\mathfrak{a}:\mathfrak{g})^+ \cap \Delta_2(\mathfrak{a}:\mathfrak{g})^-$  sont exactement les opposées de celles de  $\Delta_1(\mathfrak{a}:\mathfrak{g})^- \cap \Delta_2(\mathfrak{a}:\mathfrak{g})^+$ . Par conséquent,  $\Delta_Q(ma) = e^{-(\rho_1 + \rho_2)\log(a)}$ , d'où le résultat.  $\square$

Le calcul de  $\delta_{G/N}$  s'en déduit alors :

**Corollaire 3.2.4** *Pour  $l = ma \in L$ ,  $\delta_{G/N}(l) = e^{2\rho \log(a)}$ .*

— *Démonstration.*

Cela résulte en fait de la définition de la mesure sur  $G/N$  identifié à  $KA$  donnée au début du paragraphe. Il suffit sinon d'appliquer la proposition précédente dans le cas  $N_1 = N_2 = N$ .  $\square$

### 3.2.2 Le module $\mathcal{E}(G/N)$

Le  $C^*$ -module  $\mathcal{E}(G/N)$  associé ci-dessus à l'espace  $X = G/N$  peut être considéré comme un module d'induction adapté à la description de la série principale unitaire. Le résultat suivant explicite le lien entre ce module et ceux de [Rie71].

**Proposition 3.2.5** *Le  $C^*$ -module  $\mathcal{E}(G/N)$  est isométriquement isomorphe au produit tensoriel  $\mathcal{E}(G) \otimes_{C^*(P)} C^*(L)$ . Cet isomorphisme est un isomorphisme de  $C^*$ -bimodules.*

— *Démonstration.*

Pour toute fonction  $f$  définie sur  $G$  ou sur  $P$ , on note  $M_N(f) = \int_N f(\cdot n) dn$ . L'application  $M_N$  s'étend en une surjection  $\varepsilon_N : C^*(P) \longrightarrow C^*(L)$  et vérifie, pour  $f \in C_c(G) \subset \mathcal{E}(G)$  et  $\alpha \in C_c(P) \subset C^*(P)$ ,

$$(*) \quad M_N(f.\alpha) = M_N(f).M_N(\alpha) = M_N(f).\varepsilon_N(\alpha)$$

les actions de  $\alpha$  et  $M_N(\alpha)$  étant celles de  $C^*(P)$  et  $C^*(L)$  sur  $\mathcal{E}(G)$  et  $\mathcal{E}(G/N)$  respectivement. En effet, si  $g \in G$  admet pour décomposition d'Iwasawa  $kan_0$ , il vient, en choisissant  $ka$  comme représentant de  $\dot{g} \in G/N$  :

$$M_N(f.\alpha)(\dot{g}) = \int_N f.\alpha(kan_0n) dn = \int_N \int_P \Delta_P^{-\frac{1}{2}}(p) f(kanp^{-1}) \alpha(p) dp dn.$$

D'autre part, la mesure de Haar de  $P$  se décomposant en  $dp = dldn$ , on a

$$\begin{aligned} M_N(f).M_N(\alpha)(\dot{g}) &= \int_L \Delta_P^{\frac{1}{2}}(l) M_N(f)(\dot{g}l^{-1}) M_N(\alpha)(l) dl \\ &= \int_L \int_N \int_N \Delta_P^{\frac{1}{2}}(l) f(\dot{g}l^{-1}n) \alpha(l\nu) dn d\nu dl \\ &= \int_L \int_N \int_N \Delta_P^{\frac{1}{2}}(l) \text{mod}(c_{l^{-1}}) f(kanl^{-1}) \alpha(l\nu) dn d\nu dl \\ (\nu \leftrightarrow n\nu^{-1}) &= \int_P \int_N \Delta_P^{\frac{1}{2}}(l) \text{mod}(c_{l^{-1}}) f(kanp^{-1}) \alpha(p) dn dp \\ &= M_N(f.\alpha)(\dot{g}) \end{aligned}$$

en écrivant  $dp = dld\nu$  et en utilisant le Lemme 3.2.1.

L'application  $M_N$  vérifie d'autre part la propriété d'isométrie suivante : pour  $f, g \in C_c(G)$

$$(**) \quad \langle M_N(f), M_N(g) \rangle_{\mathcal{E}(G/N)} = M_N(\langle f, g \rangle_{\mathcal{E}(G)}) = \varepsilon_N(\langle f, g \rangle_{\mathcal{E}(G)}).$$

En effet, pour  $l \in L$ , on a

$$M_N(\langle f, g \rangle)(l) = \Delta_P^{-\frac{1}{2}}(l) \int_N \int_G \overline{f(\gamma)} g(\gamma ln) d\gamma dn,$$

car  $\Delta_P$  est  $N$ -invariante. D'autre part,

$$\begin{aligned} \langle M_N(f), M_N(g) \rangle(l) &= \Delta_P^{-\frac{1}{2}}(l) \int_{G/N} \overline{M_N(f)(\dot{\gamma})} M_N(g)(\dot{\gamma}l) d\mu(\dot{\gamma}) \\ &= \Delta_P^{-\frac{1}{2}}(l) \int_{G/N} \int_N \overline{f(\dot{\gamma}n)} dn \int_N g(\dot{\gamma}l\nu) d\nu d\mu(\dot{\gamma}) \\ (l\nu \leftrightarrow n\nu l) &= \Delta_P^{-\frac{1}{2}}(l) \text{mod}(c_l) \int_{G/N} \int_N \overline{f(\dot{\gamma}n)} dn \int_N g(\dot{\gamma}n\nu l) d\nu d\mu(\dot{\gamma}) \\ &= \Delta_P^{-\frac{1}{2}}(l) \text{mod}(c_l) \int_N \int_G \overline{f(\gamma)} g(\gamma\nu l) d\nu d\gamma \\ (\nu l \leftrightarrow l\nu) &= M_N(\langle f, g \rangle)(l) = \varepsilon_N(\langle f, g \rangle)(l). \end{aligned}$$

Le produit scalaire sur  $\mathcal{E}(G) \otimes C^*(L)$  à valeurs dans  $C^*(L)$  est défini sur les tenseurs élémentaires, en utilisant la surjection naturelle  $\varepsilon_N$ , par la formule suivante :

$$\langle f \otimes \varphi, g \otimes \psi \rangle = \langle \varphi, \varepsilon_N(\langle f, g \rangle_{\mathcal{E}(G)}) \cdot \psi \rangle = \varphi^* \langle f, g \rangle_{\mathcal{E}(G)} \psi.$$

Considérons à présent l'application  $A : C_c(G) \times C_c(L) \longrightarrow \mathcal{E}(G/N)$  définie par

$$A(f, \varphi) = M_N(f) \cdot \varphi.$$

L'égalité (\*) montre que  $A$  se factorise par  $C_c(G) \otimes C^*(L)$ . Cette application est en outre isométrique : pour  $f, g \in C_c(G)$  et  $\varphi, \psi \in C^*(L)$ , il vient

$$\begin{aligned} \langle A(f \otimes \varphi), A(g \otimes \psi) \rangle_{\mathcal{E}(G/N)} &= \langle M_N(f) \cdot \varphi, M_N(g) \cdot \psi \rangle \\ &= \varphi^* \langle M_N(f), M_N(g) \rangle \psi \\ &= \varphi^* \varepsilon_N(\langle f, g \rangle) \psi && \text{d'après l'égalité (**)} \\ &= \langle f \otimes \varphi, g \otimes \psi \rangle_{\mathcal{E}(G) \otimes C^*(L)} \end{aligned}$$

Enfin,  $A$  est d'image dense dans  $\mathcal{E}(G/N)$ . En effet, soit  $m \in C_c(N)$  est telle que  $\int_N m = 1$ . Associons à  $f \in C_c(G/N)$ , vue comme fonction sur  $K \times A$  grâce à la décomposition d'Iwasawa, la fonction  $f_0$  définie sur  $G = KAN$  par la formule  $f_0(kan) = f(ka)m(n)$  : cette fonction est un antécédent pour  $f$  par  $M_N$ . Par ailleurs, la théorie élémentaire des modules hilbertiens montre que si  $E$  est un  $C^*$ -module sur une  $C^*$ -algèbre  $B$ , alors  $E \cdot B$  est dense dans  $E$  [Lan95]. L'application  $A$  fournit donc l'isomorphisme isométrique attendu.  $\square$

**Remarque 3.4** Les  $C^*$ -modules  $\mathcal{E}(G/N)$  sont introduits et utilisés dans [Pie01] sous la forme des produits tensoriels intervenant dans la proposition précédente.

Le résultat précédent permet d'écrire les applications de localisation du Théorème 2.1.3 au niveau de  $\mathcal{E}(G/N)$ . En reprenant les notations du paragraphe 2.3, ces applications

$$q_{\sigma, \nu} : \mathcal{E}_P^G(G) \otimes_{C^*(P)} \mathcal{H}_{\sigma \otimes e^\nu \otimes 1} \longrightarrow \mathcal{H}_P^{\sigma, \nu}$$

entrelacent les actions de  $G$  sur ces deux espaces de Hilbert, le second étant par définition l'espace de la représentation  $\pi_P^{\sigma, \nu} = \text{Ind}_P^G \sigma \otimes e^\nu \otimes 1$ , et spécialisent donc l'action globale de  $G$  sur  $\mathcal{E}(G)$  sur chacun des espaces induits.

**Proposition 3.2.6** *Pour tout  $(\sigma, \nu) \in \widehat{M} \times \widehat{A}$ , il existe une application de localisation*

$$\tilde{q}_{\sigma, \nu} : \mathcal{E}_L^G(G/N) \otimes_{C^*(L)} \mathcal{H}_{\sigma \otimes e^\nu} \longrightarrow \mathcal{H}_P^{\sigma, \nu}$$

*réalisant une équivalence unitaire entre les actions de  $G$  sur ces deux espaces de Hilbert.*

— *Démonstration.*

Il s'agit essentiellement d'un corollaire de la proposition précédente et d'une conséquence de l'associativité du produit tensoriel. En effet, si  $\mathcal{H}$  désigne l'espace de Hilbert  $\mathcal{H}_{\sigma \otimes e^\nu} = \mathcal{H}_{\sigma \otimes e^\nu \otimes 1}$ , la Proposition 3.2.5 se traduit par un isomorphisme

$$\mathcal{E}_L^G(G/N) \otimes_{C^*(L)} \mathcal{H} \simeq (\mathcal{E}_P^G(G) \otimes_{C^*(P)} C^*(L)) \otimes \mathcal{H}.$$

Comme l'action de  $N$  sur  $\mathcal{H}$  est triviale, on en déduit un isomorphisme

$$\mathcal{E}_L^G(G/N) \otimes_{C^*(L)} \mathcal{H} \simeq \mathcal{E}_P^G(G) \otimes_{C^*(P)} \mathcal{H}.$$

Cet isomorphisme, composé avec les applications du Théorème 2.1.3 fournit les  $\tilde{q}_{\sigma,\nu}$  cherchés.  $\square$

**Remarque 3.5** Il est également possible de construire explicitement les applications  $\tilde{q}_{\sigma,\nu}$  en les définissant par la même formule que celle du Théorème 2.1.3, en remplaçant  $\gamma$  par  $\gamma_{G/N}$ .

Il apparaît donc que les modules  $\mathcal{E}(G/N)$  encodent globalement la série principale. En effet, les applications de localisation permettent de garder la trace du procédé d'induction en spécialisant l'action de  $C^*(G)$  sur chaque espace induit. D'autre part, des modules  $\mathcal{E}(G/N_1)$  et  $\mathcal{E}(G/N_2)$  provenant de paraboliques  $P_1 = LN_1$  et  $P_2 = LN_2$  partageant la même composante de Levi  $L$  seront des  $C^*$ -bimodules sur les mêmes  $C^*$ -algèbres  $C^*(L)$  et  $C^*(G)$ . Cela traduit le fait que les représentations que l'on induit pour construire la série principale agissent trivialement sur la composante nilpotente et permet d'envisager les opérateurs d'entrelacement entre des représentations de la série principale associées à ces modules comme des opérateurs  $C^*(L)$ -linéaires entre  $\mathcal{E}(G/N_1)$  et  $\mathcal{E}(G/N_2)$ , commutant à l'action à gauche de  $C^*(G)$ .

### 3.2.3 Action de $C_r^*(G)$

Comme l'indique la Proposition 2.3.3, les classes d'équivalence de représentations irréductibles de la série principale apparaissent dans le dual réduit  $\hat{G}_r$  de  $G$ , la raison en étant la moyennabilité des paraboliques minimaux. Ce fait doit se traduire au niveau  $C^*$ -algébrique par le fait que l'action à gauche sur  $\mathcal{E}(G/N)$ , initialement définie pour  $C^*(G)$  se factorise par la  $C^*$ -algèbre réduite  $C_r^*(G)$ . Ce résultat est obtenu ci-dessous comme conséquence du Théorème 2.1.5 d'imprimitivité dû à Rieffel et de la moyennabilité de  $P$ .

**Proposition 3.2.7** *L'action de  $C^*(G)$  sur  $\mathcal{E}(G/N)$  se factorise par  $C_r^*(G)$ .*

— *Démonstration.*

Soient  $\varepsilon_N$  la surjection canonique  $C^*(P) \twoheadrightarrow C^*(L)$  et  $\tau$  l'application

$$\mathbb{C} \rtimes G \simeq C^*(G) \longrightarrow C(G/P) \rtimes G \simeq \mathcal{K}(\mathcal{E}(G))$$

considérée à la Remarque 2.3 ( $G/P$  est une variété compacte). Considérons à présent  $\tau_N = \tau \otimes_{\varepsilon_N} 1$ . Alors

$$\tau_N : C^*(G) \longrightarrow \mathcal{K}(\mathcal{E}(G/N)).$$

Comme le groupe  $P$  est moyennable, toutes ses actions le sont également. Le théorème d'imprimitivité implique que l'action de  $G$  sur  $G/P$  est Morita-équivalente à celle de  $P$  sur  $G/G$  [AD02] et donc aussi moyennable [ADR00]. Il s'ensuit que  $C(G/P) \rtimes G$  est isomorphe à  $C(G/P) \rtimes_r G$  où  $C_r^*(G)$  agit naturellement.

$$\begin{array}{ccccc} \tau_N : C^*(G) & \longrightarrow & C(G/P) \rtimes G & \longrightarrow & \mathcal{K}(\mathcal{E}(G/N)) \\ \lambda_G \downarrow & & \simeq \downarrow & & \\ C_r^*(G) & \longrightarrow & C(G/P) \rtimes_r G & & \end{array}$$

□

## 3.3 Autres modèles

L'existence des applications de localisation de la Proposition 3.2.6 montre que les modules  $\mathcal{E}(G/N)$  encodent globalement la série principale unitaire. Les paragraphes suivants ont pour but de donner des descriptions de  $\mathcal{E}(G/N)$  qui traduisent à ce niveau global les différents modèles exposés pour ces représentations au Paragraphe 2.3.

### 3.3.1 Modèle induit

Le  $C^*$ -module  $\mathcal{E}(G/N)$  s'apparente par sa construction, à l'interprétation  $C^*$ -algébrique des représentations induites qui fait l'objet de [Rie71], et la Proposition 3.2.5 précise cette relation. L'objet de ce paragraphe est de réaliser  $\mathcal{E}(G/N)$  comme le complété d'un espace de fonctions à valeurs dans  $C^*(L)$  vérifiant certaines conditions de compatibilité sous l'action de  $C^*(L)$ , à l'instar du modèle induit classique de la série principale unitaire décrit au paragraphe 2.3 et obtenu en complétant, pour chaque donnée  $(\sigma, \nu)$ , un espace de fonctions soumises à des relations dépendant

de ce couple. Dans ce qui suit, les groupes  $G$  et  $P = L \times N$ , ainsi que la forme  $\rho$  vérifient les mêmes hypothèses que précédemment.

Soit  $\mathcal{E}_i^0$  l'espace des fonctions  $F : G/N \longrightarrow C_c(L)$  continues vérifiant la relation

$$F(xl) = e^{-\rho \log a} U_{l^{-1}}.F(x),$$

pour  $x \in G/N$  et  $l = ma \in L$ . La composante de Levi  $L$  agit naturellement sur  $\mathcal{E}_i^0$  par  $F.l(x) = F(x).U_l$ , d'où une action de  $C_c(L) \subset C^*(L)$  par convolution à droite.

Soit  $\psi$  une section transverse sur  $G/N$ . D'après le Lemme 3.1.2, l'existence d'une telle fonction est garantie par la compacité du quotient  $(G/N)/L \simeq G/P \simeq K/M$ .

L'espace  $\mathcal{E}_i^0$  est muni d'une forme bilinéaire à valeurs dans  $C^*(L)$  définie par

$$\langle F_1, F_2 \rangle_\psi = \int_{G/N} F_1(x)^* F_2(x) \psi(x) d\mu(x)$$

pour  $f, g \in \mathcal{E}_i^0$ .

**Proposition 3.3.1** *L'application  $\langle \cdot, \cdot \rangle_\psi$  définie ci-dessus est indépendante du choix de  $\psi$ .*

— *Démonstration.*

Soient  $\psi_1$  et  $\psi_2$  deux sections transverses sur  $G/N$  et  $u = \psi_1 - \psi_2$ . Pour  $F_1, F_2 \in \mathcal{E}_i^0$ ,  $x \in G/N$  et  $l_0 = m_0 a_0 \in L$ , Il vient  $F_1(xl_0)^* F_2(xl_0) = e^{-2\rho \log a_0} F_1(x)^* F_2(x)$ , d'où en décomposant  $x \in G/N$  sur  $KMA$  de sorte que  $x = kma$ ,

$$F_1(kma)^* F_2(kma) = e^{-2\rho \log a} F_1(k)^* F_2(k).$$

Il s'ensuit, en vertu de la décomposition de la mesure associée à la décomposition  $G = KMAN$  au paragraphe 2.2.4 que

$$\begin{aligned} \int_{G/N} F_1(x)^* F_2(x) u(x) d\mu(x) &= \int_{K \times MA} F_1(kma)^* F_2(kma) u(kma) e^{2\rho \log a} dk dm da \\ &= \int_K F_1(k)^* F_2(k) \int_L u(kl) dk dl. \end{aligned}$$

Cette dernière quantité est nulle car  $\int_L u(kl) dl = 0$  pour tout  $k \in K$  par définition de  $\psi_1$  et  $\psi_2$ . Il s'ensuit que  $\langle F_1, F_2 \rangle_{\psi_1} = \langle F_1, F_2 \rangle_{\psi_2}$ .  $\square$

La proposition précédente permet de noter sans ambiguïté  $\langle \cdot, \cdot \rangle_i$  la forme associée à une section transverse, indépendamment du choix de cette section.

**Proposition 3.3.2** *L'application  $f \mapsto \tilde{f}$  définie sur  $C_c(G/N)$  par*

$$\tilde{f}(x)(l) = e^{\rho \log a} f(xl) = f.l^{-1}(x)$$

*pour  $x \in G/N$  et  $l = ma \in L$ , prend ses valeurs dans  $\mathcal{E}_i^0$ . Elle est  $C_c(L)$ -linéaire et préserve les normes à valeurs dans  $C^*(L)$ .*

— *Démonstration.*

Soient  $f \in C_c(G/N)$ ,  $x \in G/N$  et  $l_0 = m_0 a_0, l = ma$  des éléments de  $L$ . Alors  $\tilde{f}(xl)(l_0) = e^{\rho \log a_0} f(xll_0)$ . Or  $[U_{l^{-1}} \tilde{f}(x)](l_0) = \tilde{f}(x)(ll_0) = e^{\rho \log a a_0} f(gll_0)$ , d'où l'expression attendue :

$$\tilde{f}(xl) = e^{-\rho \log a} U_{l^{-1}} \tilde{f}(g)$$

qui montre que  $\tilde{f} \in \mathcal{E}_i^0$ . Il suffit, pour vérifier la  $C_c(L)$ -linéarité de l'application  $f \mapsto \tilde{f}$  de montrer que  $\tilde{f}.l(x) = \tilde{f}(x)U_l$ . Or

$$\begin{aligned} \widetilde{f.l}(x)(l_0) &= e^{\rho \log a_0} f.l(xl_0) = e^{\rho \log a_0 a^{-1}} f(xl_0 l^{-1}) \\ &= \tilde{f}(x)(l_0 l^{-1}) = [\tilde{f}(x)U_l](l_0) \end{aligned}$$

ce qui montre bien l'égalité annoncée. Vérifions à présent que cette application préserve le produit scalaire : pour  $f_1, f_2 \in C_c(G/N)$ ,

$$\begin{aligned} \langle \tilde{f}_1, \tilde{f}_2 \rangle_i(l_0) &= e^{\rho \log a_0} \int_{G/N} (\tilde{f}_1(x)^* \tilde{f}_2(x))(l_0) \psi(x) d\mu(x) \\ &= e^{\rho \log a_0} \int_{G/N} \int_L \overline{\tilde{f}_1(x)(l)} \tilde{f}_2(x)(ll_0) dl \psi(x) d\mu(x) \\ &= e^{\rho \log a_0} \int_{G/N} \int_L e^{2\rho \log a} \overline{f_1(xl)} f_2(xll_0) \psi(x) dl d\mu(x) \\ \stackrel{(x \leftrightarrow xl^{-1})}{=} &= e^{\rho \log a_0} \int_{G/N} \overline{f_1(x)} f_2(xl_0) \int_L \psi(xl^{-1}) dl d\mu(x) \\ &= \langle f_1, f_2 \rangle_{\mathcal{E}(G/N)}(l_0) \int_L \psi(xl) dl = \langle f_1, f_2 \rangle_{\mathcal{E}(G/N)}(l_0) \end{aligned}$$

où  $\psi$  désigne une section transverse quelconque sur  $G/N$ .  $\square$

La positivité et la  $C^*(L)$ -sesquilinearité de  $\langle \cdot, \cdot \rangle_i$  sont des corollaires de cette proposition.

**Définition 3.3.3 [Modèle induit]**

On note  $\mathcal{E}_i$  le  $C^*$ -module sur  $C^*(L)$  obtenu en étendant l'action de  $C_c(L)$  et en complétant  $\mathcal{E}_i^0$  pour la norme associée au produit scalaire de la Proposition 3.3.1.

La proposition précédente montre que  $\mathcal{E}_i$  est isomorphe à  $\mathcal{E}(G/N)$  en tant que  $C^*(L)$ -module. Cet isomorphisme commutant à l'action de  $C^*(G)$ , il fournit bien une autre réalisation de  $\mathcal{E}(G/N)$  comme  $C^*$ -module d'induction généralisé, interprété comme espace de sections du fibré  $G$ -équivariant suivant :

$$\begin{array}{c} G/N \times_L C^*(L) \\ \downarrow \\ G/P \end{array}$$

L'utilisation des sections transverses permet de pallier au défaut d'intégrabilité de ces sections.

L'action à gauche de  $C^*(G)$  sur le module  $\mathcal{E}_i$  peut être transportée par l'isomorphisme de  $C^*(L)$ -modules avec  $\mathcal{E}(G/N)$ , ou définie directement sur la sous-algèbre  $C_c(G)$  agissant par convolution.

### 3.3.2 Modèle ouvert

Il est enfin possible de réaliser  $\mathcal{E}(G/N)$  comme un espace de fonctions de carré sommable sur un espace euclidien, à valeurs dans  $C^*(L)$ . Comme dans le cas classique, où la série principale unitaire apparaît comme une famille de représentations agissant sur  $L^2(\overline{N})$ , cette description du module  $\mathcal{E}(G/N)$  repose, moyennant l'application de la Proposition 3.1.4, sur le fait que le complémentaire de la cellule de Bruhat ouverte  $\overline{NMAN}$  est de mesure nulle dans  $G$ .

Rappelons la notation suivante : pour  $g \in \overline{NL} = \overline{NMA}$ , on écrit

$$g = \overline{n}(g)\mathbf{l}(g) = \overline{n}(g)\mathbf{m}(g)\mathbf{a}(g).$$

D'autre part,  $\overline{N}_g$  désigne l'ensemble des éléments de  $g\overline{N}$  admettant une décomposition suivant  $\overline{NMAN}$ .

Enfin, la Proposition 1.2.1 fournit la décomposition suivante de la mesure de Haar de  $G$  :

$$dg = e^{2\rho \log a} d\overline{n} dm da dn$$

Si  $G$  est de rang réel 1, le groupe de Weyl est d'ordre 2 et  $G = P \sqcup PwP$  où  $w$  désigne un représentant de l'élément non trivial de  $W$ . Si  $g \in G$ , l'élément  $g\nu$  se décompose suivant  $\overline{NMAN}$  sauf pour une seule valeur de  $\nu$ . En effet, si  $g\nu_1$  et  $g\nu_2$  sont tous deux dans  $G \setminus \overline{NMAN} = w^{-1}NwMAN$ , alors ni  $wg\nu_1$ , ni  $wg\nu_2$  n'appartiennent à  $PwP$ . Ce sont donc des éléments de  $P = MAN$  et

$$\nu_1^{-1}\nu_2 = (wg\nu_1)^{-1}(wg\nu_2) \in MAN \cap \overline{N} = \{1\}.$$

Enfin, toujours dans le cas de rang réel 1, on a  $\overline{N}_w = \overline{N} \setminus \{1\}$ .

La proposition suivante permet de réaliser  $\mathcal{E}(G/N)$  dans le modèle ouvert.

**Proposition 3.3.4** *Le  $C^*(L)$ -module hilbertien  $\mathcal{E}(G/N)$  est isométrique au produit tensoriel*

$$L^2(\overline{N}) \otimes C^*(L).$$

— *Démonstration.*

Il s'agit d'une conséquence de la Proposition 3.1.4 appliquée au module  $\mathcal{E}(X)$  avec  $X = \overline{N} \times MA$  qui est isomorphe à  $\mathcal{E}(G/N)$  comme  $C^*(L)$ -module car  $G/N$  privé de  $\overline{N}MA$  est de mesure nulle. Plus précisément, les fonctions de la forme

$$F : \overline{n}ma \mapsto e^{-\rho \log(a)} f(\overline{n})\varphi(ma)$$

avec  $f \in C_c(\overline{N})$  et  $\varphi \in C_c(L)$  constituent un sous-module dense de  $\mathcal{E}(G/N)$ . Pour une telle fonction  $F$  et  $l_0 = m_0a_0$ , on a

$$F.l_0(\overline{n}ma) = e^{-\rho \log(a)} f(\overline{n})\varphi(mal_0^{-1}).$$

□

La structure de  $C^*(G)$ -module n'est pas donnée automatiquement lors de la construction de  $\mathcal{E}(\overline{N}MA)$  car  $G$  n'agit pas sur  $\overline{N}MA$ . La situation est celle de la remarque 3.3 et l'action de  $C^*(G)$  sur  $L^2(\overline{N}) \otimes C^*(L)$  est donc définie *via* l'isomorphisme de la proposition précédente. Il est toutefois possible d'expliciter l'action sur  $L^2(\overline{N}) \otimes C^*(L)$  des multiplicateurs associés à certains éléments de  $G$ . La décomposition de Bruhat indique qu'il est suffisant de décrire les actions respectives des éléments de  $P$  et de  $w$ .

**Proposition 3.3.5** *Soient  $f \otimes \varphi \in L^2(\overline{N}) \otimes C^*(L)$ ,  $\overline{n}_0 \in \overline{N}$  et  $l_0 = m_0a_0 \in MA$ . Alors,*

- $\overline{n}_0.(f \otimes \varphi) = \lambda_{\overline{N}}(\overline{n}_0)(f) \otimes \varphi$
- $l_0.(f \otimes \varphi) = e^{\rho \log(a_0)} f \circ c_{l_0} \otimes U_{l_0}.\varphi$
- Pour tout  $\overline{v}\lambda \in \overline{N}L$ ,

$$w.(f \otimes \varphi) = \frac{1}{|\overline{v}|} f(\overline{n}(w^{-1}\overline{v})) (U_{l(w^{-1}\overline{v})}\varphi)(\lambda)$$

où l'on note  $|\overline{v}| = e^{\rho \log \mathbf{a}(w^{-1}\overline{v})}$ .

— *Démonstration.*

C'est une conséquence immédiate du fait que  $L$  normalise  $\overline{N}$  et de la définition de l'application réalisant l'isomorphisme de la Proposition 3.3.4. La dernière formule a un sens pour  $\bar{\nu} \neq 1$ . La notation  $|\bar{\nu}|$  sera justifiée au chapitre suivant.  $\square$

La décomposition de Bruhat fait apparaître l'importance d'un élément particulier  $w$  de  $W$ , qui conjugue  $N$  en  $\overline{N}$ . La connaissance de la transformation induite par cet élément sur  $\overline{N}$  vu comme sous-ensemble dense de  $G/P$  constitue une étape cruciale dans l'expression des opérateurs d'entrelacement classiques. Nous l'interprétons ici dans le cadre du module  $\mathcal{E}(G/N)$ , où le comportement de cette transformation vis-à-vis des dilatations par les éléments de  $A$  ou des translations de  $\overline{N}$  apparaît directement, sans privilégier de représentation particulière de  $L$ .

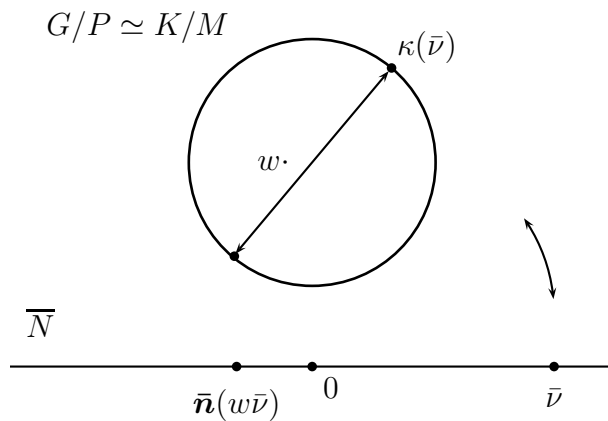


FIGURE 3.1 – Action de  $w$  sur  $\overline{N}$

Les formules du lemme suivant précisent l'action de  $w$  sur  $\overline{N}$ . Cet élément agit naturellement sur la variété compacte  $K/M \simeq G/P$ , qui s'envoie sur  $\overline{N}$  par la « projection stéréographique » fournie par la décomposition de Bruhat et rappelée au début de ce paragraphe. La transformation de la mesure associée à cette projection est décrite par la formule  $(\star)$  suivante, valable pour toute fonction  $f$  continue sur  $K$  et  $M$ -invariante :

$$\int_K f(k) dk = \int_{\overline{N}} f(\kappa(\bar{n})) e^{-2\rho H(\bar{n})} d\bar{n}, \quad (\star)$$

où  $H$  est la fonction logarithmique associée à la décomposition d'Iwasawa.

**Lemme 3.3.6** Soient  $g \in G$ ,  $\bar{v}_0 \in \overline{N}_g$  et  $\bar{v} \in \overline{N} \setminus \{1\}$ . Soit  $\mu = w^2 \in M$ . Alors,

- (i)  $\bar{\mathbf{n}}(g^{-1}\bar{\mathbf{n}}(g\bar{v}_0)) = \bar{v}_0$
- (ii)  $\bar{\mathbf{n}}(w\bar{\mathbf{n}}(w\bar{v})) = c_\mu^{-1}(\bar{v})$
- (iii)  $\mathbf{m}(w\bar{\mathbf{n}}(w\bar{v})) = \mu \mathbf{m}(w\bar{v})^{-1}$
- (iv)  $\mathbf{a}(w\bar{\mathbf{n}}(w\bar{v})) = \mathbf{a}(w\bar{v})^{-1}$
- (v)  $\mathbf{l}(w\bar{\mathbf{n}}(w\bar{v})) = \mu \mathbf{l}(w\bar{v})^{-1}$

— *Démonstration.*

Si  $g\bar{v}_0$  se décompose suivant  $\overline{N}MAN$  en  $g = \bar{\mathbf{n}}(g\bar{v}_0)p$ , alors

$$g^{-1}\bar{\mathbf{n}}(g\bar{v}_0) = g^{-1}\bar{\mathbf{n}}(g\bar{v}_0)pp^{-1} = g^{-1}g\bar{v}_0p^{-1}.$$

L'égalité (i) résulte alors de l'unicité de la décomposition suivant  $\overline{N}MAN$ . La seconde égalité s'en déduit en remarquant que, si  $g \in G$  est tel que  $\bar{\mathbf{n}}(g)$  existe, et  $m \in M$ , alors  $\bar{\mathbf{n}}(gm) = \bar{\mathbf{n}}(g)$ . En effet,

$$\bar{\mathbf{n}}(w\bar{\mathbf{n}}(w\bar{v})) = \bar{\mathbf{n}}(w\bar{\mathbf{n}}(w^{-1}\mu\bar{v})) = \bar{\mathbf{n}}(w\bar{\mathbf{n}}(w^{-1}c_\mu^{-1}(\bar{v}))),$$

d'où le résultat. Enfin, si  $w\bar{v} = \bar{n}_0p_0$  où la décomposition de Langlands de  $p_0$  est  $p_0 = m_0a_0n_0 \in P$  et  $w\bar{n}_0 = \bar{n}_1m_1a_1n_1 = \bar{n}_1p_1$ , alors

$$\bar{n}_0 = w^{-1}\bar{n}_1p_1 = w\mu^{-1}\bar{n}_1p_1 = wc_\mu(\bar{n}_1)\mu^{-1}p_1$$

d'où

$$w\bar{v} = wc_\mu(\bar{n}_1)\mu^{-1}p_1p_0 = wc_\mu(\bar{n}_1)\mu^{-1}m_1m_0a_1a_0n',$$

avec  $n' \in N$ . Comme  $\mathbf{m}(w\bar{\mathbf{n}}(w\bar{v})) = m_1$  et  $\mathbf{a}(w\bar{\mathbf{n}}(w\bar{v})) = a_1$ , les égalités (iii) et (iv) s'en déduisent et impliquent (v).  $\square$

L'effet de la transformation du lemme précédent sur la mesure de  $\overline{N}$  est donnée par le résultat suivant :

**Proposition 3.3.7** Pour  $f \in L^2(\overline{N})$ ,

$$\int_{\overline{N}} f(\bar{\mathbf{n}}(w\bar{v}))e^{-2\rho \log \mathbf{a}(w\bar{v})} d\bar{v} = \int_{\overline{N}} f(\bar{v}) d\bar{v}.$$

— *Démonstration.*

Comme  $w \in K$ , l'application  $L_w : f \mapsto f(w\cdot)$  préserve la  $C^*(L)$ -norme de  $\mathcal{E}(G/N)$ ,

isométrique à  $L^2(\overline{N}) \otimes C^*(L)$  via l'application  $P$  de la Proposition 3.3.4 qui envoie  $f \otimes \varphi \in C_c(\overline{N}) \otimes C_c(L)$  sur

$$P(f \otimes \varphi) : \bar{n}ma \mapsto e^{-\rho \log a} f(\bar{n})\varphi(ma).$$

Soit  $f \otimes \varphi \in C_c(\overline{N}) \otimes C_c(L)$ . Pour tout  $x \in \overline{NMA}$  et  $l_0 \in L$ , on a  $\bar{\mathbf{n}}(xl_0) = \bar{\mathbf{n}}(x)$  et  $\mathbf{l}(xl_0) = \mathbf{l}(x)l_0$ , donc pour  $\bar{n}ma \in \overline{NMA}$ ,

$$P(f \otimes \varphi)(w\bar{n}ma) = e^{-\rho \log a} e^{-\rho \log \mathbf{a}(w\bar{n})} f(\bar{\mathbf{n}}(w\bar{n}))\varphi(\mathbf{l}(w\bar{n})ma),$$

et l'expression de  $L_w$  au niveau de  $L^2(\overline{N}) \otimes C^*(L)$  est donnée par

$$L_w(f \otimes \varphi)(\bar{n}ma) = e^{-\rho \log \mathbf{a}(w\bar{n})} f(\bar{\mathbf{n}}(w\bar{n}))\lambda_L(\mathbf{l}(w\bar{n}))(\varphi)(ma).$$

La  $C^*(L)$ -norme étant donnée dans le modèle ouvert par  $|f \otimes \varphi|^2 = \|f\|_2 \varphi^* \varphi$ , et préservée par  $L_w$ , il vient, en notant  $f_w(\bar{n}) = e^{-\rho \log \mathbf{a}(w\bar{n})} f(\bar{\mathbf{n}}(w\bar{n}))$ ,

$$\|f_w\|_2^2 = \|f\|_2^2,$$

car l'action de  $\lambda_L(\mathbf{l}(w\bar{n}))$  ne change pas la norme. La dernière égalité établit la proposition pour les fonctions positives, et le résultat s'en déduit par combinaisons linéaires.  $\square$

Terminons ce chapitre en montrant que la conjugaison des éléments de  $L$  par  $w$  s'étend à la  $C^*$ -algèbre  $C^*(L)$  :

**Proposition 3.3.8** *L'application  $\varphi \mapsto \varphi^w$  définie par  $\varphi^w = \varphi \circ c_w$  pour toute fonction  $\varphi \in C_c(L) \subset C^*(L)$  s'étend en un automorphisme de  $C^*(L)$ .*

— *Démonstration.*

Soient  $\varphi_1, \varphi_2 \in C_c(L)$ . Les égalités  $(\varphi_1^*)^w = (\varphi_1^w)^*$  et  $(\varphi_1 \varphi_2)^w = \text{mod}^L(c_w) \varphi_1^w \varphi_2^w$  sont immédiates. Comme la mesure de Haar de  $L = M \times A$  s'écrit  $dl = dm da$  et que la conjugaison par  $w$  inverse les éléments de  $A$ , il apparaît que  $\text{mod}^A(c_w) = 1$ , d'où  $\text{mod}^L(c_w) = \text{mod}^M(c_w)$ . Enfin,  $(\text{mod}^M(c_w))^2 = \text{mod}^M(c_\mu)$ . Or  $\mu \in M$  compact, ce qui implique que  $\text{mod}^M(c_\mu) = 1$ . Pour montrer que l'application  $\varphi \mapsto \varphi^w$  préserve la norme,  $L$  étant moyennable, il suffit de montrer que  $\|\lambda_G(\varphi^w)\| = \|\lambda_G(\varphi)\|$ . Or si  $f \in L^2(L)$ , ce qui précède montre que  $\|f^w\|_2 = \|f\|_2$ . Enfin, un calcul montre que  $\lambda_L(\varphi^w)(f) = \left( \lambda_L(\varphi)(f^{w^{-1}}) \right)^w$ , et donc

$$\|\lambda_L(\varphi^w)(f)\| = \|\lambda_L(\varphi^w)(f^{w^{-1}})\|.$$

L'application  $\varphi \mapsto \varphi^w$  se prolonge donc isométriquement à  $C^*(L)$  en un automorphisme.  $\square$

# Chapitre 4

## Opérateurs d'entrelacement

Ce chapitre est consacré à la construction et l'étude d'opérateurs analogues aux intégrales d'entrelacement de Knapp et Stein au niveau des  $C^*$ -modules du chapitre précédent. Nous caractérisons tout d'abord les opérateurs bornés commutant à l'action à gauche de  $C^*(G)$  comme des multiplicateurs centraux, ce qui s'interprète comme un résultat d'irréductibilité semblable à celui de Bruhat. Nous introduisons ensuite un opérateur d'entrelacement standard dans les différents modèles de  $\mathcal{E}(G/N)$ , avant de démontrer la convergence de l'intégrale le définissant dans le modèle ouvert. Nous décomposons ensuite l'opérateur standard en somme d'un opérateur borné, d'un opérateur densément défini et d'une partie résiduelle, qui consitue l'analogie des pôles dans le cas classique. Nous démontrons enfin la convergence de l'intégrale d'entrelacement pour certaines fonctions dans les autres modèles.

### 4.1 Fonctions homogènes et fonction norme

Dans ce qui suit, le groupe  $G$  est supposé de rang réel 1, et l'on note  $G = KAN$  une décomposition d'Iwasawa. On considère en outre un sous groupe parabolique  $P = MAN$  fixé avec  $M = \mathcal{Z}_K(A)$ , et  $w$  désigne l'élément non trivial du groupe de Weyl  $W(A : G) = M'/M$  où  $M' = \mathcal{N}_K(A)$ . Enfin, le parabolique opposé à  $P$  sera noté  $\overline{P}$ , et sa décomposition de Langlands  $\overline{P} = M\overline{A}\overline{N}$ . Les autres notations sont celles du Paragraphe 2.2 :

- $\alpha$  désigne la plus petite racine restreinte de  $(\mathfrak{g} : \mathfrak{a})$
- $\overline{\mathfrak{n}} = \mathfrak{g}_{-\alpha} \oplus \mathfrak{g}_{-2\alpha}$
- $p$  et  $q$  sont les dimensions respectives de  $\mathfrak{g}_{-\alpha}$  et  $\mathfrak{g}_{-2\alpha}$
- $\rho = \frac{1}{2}(p + 2q)\alpha$
- les conjugaisons sur  $\overline{N}$  par les éléments de  $A$  sont appelées *dilatations*.

### 4.1.1 Action de $A$ par dilatations

Le sous-groupe abélien  $A$  agit sur  $\overline{N}$  identifié à son algèbre de Lie par des homothéties sur les différents espaces radiciels. Nous rappelons dans ce paragraphe comment cette action se manifeste sur les différentes composantes de  $G$ , avant que d'introduire certaines fonctions ayant des propriétés d'invariance sous les dilatations.

La proposition suivante précise le comportement sous les dilatations de la décomposition suivant  $\overline{N}MAN$  des éléments de  $w^{-1}\overline{N}$ .

**Proposition 4.1.1** *Soient  $l_0 = m_0a_0 \in L$  et  $\bar{\nu} \in \overline{N}$ . Alors,*

- (i)  $\mathbf{m}(w^{-1}c_{l_0}(\bar{\nu})) = c_w(m_0)^{-1}\mathbf{m}(w^{-1}\bar{\nu})m_0$
- (ii)  $\mathbf{a}(w^{-1}c_{l_0}(\bar{\nu})) = a_0^2\mathbf{a}(w^{-1}\bar{\nu})$
- (iii)  $\mathbf{l}(w^{-1}c_{l_0}(\bar{\nu})) = c_w(m_0)^{-1}\mathbf{l}(w^{-1}\bar{\nu})l_0a_0$

— *Démonstration.*

Il est clair que la dernière égalité résulte des deux premières. Pour celles-ci,

$$\begin{aligned} w^{-1}l_0^{-1}\bar{\nu}l_0 &= c_w(l_0^{-1})w^{-1}\bar{\nu}l_0 = c_w(l_0^{-1})\bar{n}'\mathbf{l}(w^{-1}\bar{\nu})n'l_0 \\ &= \bar{n}''c_w(l_0^{-1})\mathbf{l}(w^{-1}\bar{\nu})l_0n'', \end{aligned}$$

avec  $n \in N$  et  $\bar{n}' \in \overline{N}$ . L'identification des composantes selon  $M$  donne (i). L'égalité (ii) résulte de l'identification des composantes selon  $A$ , compte tenu du fait que la conjugaison par  $w$  inverse les éléments de  $A$  : pour tout  $a \in A$ , on a  $c_w(a) = a^{-1}$ .  $\square$

Certaines fonctions présentent un comportement particulier sous les dilatations :

#### Définition 4.1.2 [Fonctions $\alpha$ -homogènes]

Une fonction  $f$  définie sur  $\overline{N}$  est dite  $\alpha$ -homogène de degré  $d$  si l'égalité

$$f(a\bar{n}a^{-1}) = e^{-d\alpha(\log(a))}f(\bar{n})$$

est vérifiée pour tous  $\bar{n} \in \overline{N}$  et  $a \in A$ .

**Exemple :** l'assertion (i) de la Proposition 4.1.1 montre que l'application définie sur  $\overline{N} \setminus \{1\}$  par  $\bar{n} \mapsto m(w^{-1}\bar{n})$  est invariante sous les dilatations, c'est-à-dire  $\alpha$ -homogène de degré 0.

D'autres exemples de fonctions  $\alpha$ -homogènes sont fournis par les *polynômes homogènes* sur  $\overline{N}$ , définis comme suit. On identifie  $\overline{\mathfrak{n}}$  et  $\overline{N}$  via l'application exponentielle. Soient  $(X_1, \dots, X_p)$  et  $(Y_1, \dots, Y_q)$  des bases de  $\mathfrak{g}_{-\alpha}$  et  $\mathfrak{g}_{-2\alpha}$  respectivement. On note  $(x_1, \dots, x_p, y_1, \dots, y_q)$  les coordonnées de  $\overline{n} \in \overline{N}$  dans  $\overline{\mathfrak{n}}$  relativement à ces bases.

**Proposition 4.1.3** *Soient  $(a_1, \dots, a_p)$  et  $(b_1, \dots, b_q)$  des nombres entiers. La fonction*

$$f : \overline{n} \mapsto \prod_{i,j} x_i^{a_i} y_j^{b_j}$$

*est  $\alpha$ -homogène de degré  $\sum_i a_i + 2 \sum_j b_j$ .*

— *Démonstration.*

Soient  $a = e^T$  et  $\overline{n} = e^X$ . Alors  $a\overline{n}a^{-1} = e^{\text{Ad}(a)X}$  et  $f(a\overline{n}a^{-1}) = \prod_{i,j} r_i^{a_i} s_j^{b_j}$ , où les nombres  $r_i, s_j$  désignent les coordonnées de  $\text{Ad}(a)X$  dans la base de  $\overline{\mathfrak{n}}$  choisie. D'autre part  $\text{Ad}(a) = e^{\text{ad}(T)}$ , et  $\text{ad}(T) = [T, X] = -\alpha(T)(X_{-\alpha} + 2X_{-2\alpha})$  où  $X_\alpha$  et  $X_{-2\alpha}$  désignent les composantes de  $X$  suivant la décomposition  $\overline{\mathfrak{n}} = \mathfrak{g}_{-\alpha} \oplus \mathfrak{g}_{-2\alpha}$ . Il s'ensuit que  $\text{Ad}(a)(X) = e^{-\alpha(T)}X_{-\alpha} + e^{-2\alpha(T)}X_{-2\alpha}$ , soit  $r_i = e^{-\alpha(T)}x_i$  et  $s_j = e^{-2\alpha(T)}y_j$ . On en déduit donc que

$$\begin{aligned} f(a\overline{n}a^{-1}) &= \prod_{i,j} e^{-a_i\alpha(T)} x_i^{a_i} e^{-2b_j\alpha(T)} y_j^{b_j} \\ &= e^{-(\sum_i a_i + 2\sum_j b_j)\alpha(T)} \prod_{i,j} x_i^{a_i} y_j^{b_j} \\ &= e^{-(\sum_i a_i + 2\sum_j b_j)\alpha \log(a)} f(\overline{n}) \end{aligned}$$

□

Le résultat suivant est une conséquence immédiate de l'égalité (ii) de la Proposition 4.1.1 et de la définition de  $\rho$ .

**Proposition 4.1.4** *L'application  $\overline{n} \mapsto e^{\rho \log \mathbf{a}(w^{-1}\overline{n})}$  est  $\alpha$ -homogène de degré  $p+2q$ .*

Cette fonction revêt une importance particulière dans l'analyse sur  $\overline{N}$  considéré comme un sous-ensemble de  $G/P$ . Ses propriétés font l'objet du paragraphe suivant.

### 4.1.2 Propriétés de la fonction norme

Suivant [KS71], ce paragraphe présente une généralisation de la norme sur un espace euclidien pour les groupes nilpotents intervenant dans la décomposition d'Iwasawa d'un groupe de Lie semi-simple, ou plus généralement les groupes de Lie nilpotents munis d'un groupe à un paramètre de dilatations.

#### Définition 4.1.5 [Fonction norme sur $\overline{N}$ ]

On appelle *fonction norme sur  $\overline{N}$*  la fonction définie sur  $\overline{N}_w = \overline{N} \setminus \{1\}$  par

$$|\overline{n}| = e^{\rho \log \mathbf{a}(w^{-1}\overline{n})}.$$

La Proposition 4.1.4 montre que la fonction norme est  $\alpha$ -homogène. Elle est de classe  $C^\infty$  sur  $\overline{N} \setminus \{1\}$ , se prolonge par 0 pour  $\overline{n} = 1$  et possède également les propriétés suivantes :

**Proposition 4.1.6** *Soit  $\overline{n} \in \overline{N} \setminus \{1\}$ .*

- (i)  $|\overline{n}^{-1}| = |\overline{n}|$
- (ii) la mesure  $\frac{d\overline{n}}{|\overline{n}|}$  est invariante sous les dilatations.

— *Démonstration.*

Décomposons  $w^{-1}\overline{n} = \overline{n}_0man$ . Il vient alors  $w^{-1}\overline{n}^{-1} = w^{-1}n^{-1}a^{-1}m^{-1}\overline{n}_0^{-1}w^{-1}$ . L'élément  $w$  conjugue  $N$  en  $\overline{N}$  et agit comme l'inversion sur  $A$ , donc

$$w^{-1}\overline{n}^{-1} = c_w(n^{-1})c_w(a^{-1})c_w(m^{-1})c_w(\overline{n}_0^{-1}) = c_w(n^{-1})ac_w(m^{-1})c_w(\overline{n}_0^{-1})$$

est la décomposition de  $w^{-1}\overline{n}^{-1}$  suivant  $\overline{N}MAN$  et  $\mathbf{a}(w^{-1}\overline{n}^{-1}) = \mathbf{a}(w^{-1}\overline{n})$ , ce qui prouve (i). Le second point est résulte du calcul de  $\text{mod}^{\overline{N}}(c_a)$  pour  $a \in A$ .  $\square$

La terminologie est justifiée par le fait que la fonction norme sur un groupe de Lie nilpotent muni d'un groupe à un paramètre d'automorphismes possède des propriétés analogues à celles de la norme d'un espace euclidien. On vérifie par exemple qu'il existe une constante  $c \geq 1$  telle que l'on ait  $|\overline{n} + \overline{n}'| \leq c(|\overline{n}| + |\overline{n}'|)$  où l'addition est celle de l'algèbre de Lie  $\overline{\mathfrak{n}}$  à laquelle l'application exponentielle identifie  $\overline{N}$ . D'autre part, elle coïncide respectivement avec la valeur absolue et le module dans

le cas de  $SL_2(\mathbb{K})$  où  $\overline{N} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ \mathbb{K} & 1 \end{bmatrix}$  avec  $\mathbb{K} = \mathbb{R}$  ou  $\mathbb{C}$ , comme on le verra au dernier chapitre.

Dans le cas général, on peut comparer la fonction norme à une norme euclidienne sur l'algèbre de Lie  $\overline{\mathfrak{n}}$  :

**Proposition 4.1.7** *Pour  $\overline{n} \in \overline{N}$  identifié à son algèbre de Lie on note  $\|\overline{n}\|$  la norme euclidienne de  $\overline{n}$  vu dans  $\overline{\mathfrak{n}}$ , obtenue dans une base compatible avec la décomposition radicielle de  $\overline{\mathfrak{n}}$ . Alors il existe des constantes  $c > 0$  et  $d > 0$  telles que l'on ait*

$$\|\overline{n}\| \leq c \cdot |\overline{n}|^d$$

pour tout  $\overline{n} \in \overline{N}$  tel que  $|\overline{n}| \leq 1$ .

La propriété fondamentale suivante, démontrée dans [KS71] constitue une sorte de passage en coordonnées polaires pour les intégrales sur  $\overline{N}$ .

**Proposition 4.1.8** *Soit  $\mathcal{H}$  un espace de Hilbert séparable. Soit  $\Omega$  une fonction continue sur  $\overline{N} \setminus \{1\}$  à valeurs dans  $\mathcal{B}(\mathcal{H})$ ,  $\alpha$ -homogène de degré 0. Alors il existe un opérateur  $M(\Omega) \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$  tel que l'on ait*

$$\int_{\overline{N}} \Omega(\overline{n}) f(|\overline{n}|) d\overline{n} = M(\Omega) \int_0^{+\infty} f(t) dt$$

pour toute fonction  $f$  continue sur  $\mathbb{R}_+^*$  à valeurs complexes telle que l'une des deux quantités soient définies.

## 4.2 Caractérisation de certains opérateurs bornés

L'objet de ce paragraphe est de caractériser les éléments de  $\mathcal{L}_{C^*(L)}(\mathcal{E}(G/N))$  qui commutent à l'action à gauche de  $C^*(G)$ . La méthode qui consiste à associer à un tel opérateur une forme bilinéaire sur un sous-module de fonctions test, et à étudier les propriétés du noyau distributionnel ainsi obtenu, est inspirée de [Bru56].

Le lemme suivant caractérise les distributions possédant certaines propriétés d'invariance. Dans tout ce qui suit, les distributions considérées sont à valeurs dans des espaces de Banach. La théorie générale concernant ces objets est présentée dans [Bru56].

**Lemme 4.2.1** Soient  $M$  une variété différentiable et  $\Gamma$  un groupe de Lie de mesure de Haar  $d\gamma$ . Soit  $T$  une distribution sur  $M \times \Gamma$  à valeurs dans un espace de Banach  $E$ . Si  $T$  est invariante sous les transformations  $(m, \gamma) \mapsto (m, \gamma_0\gamma)$ , alors il existe une distribution  $S$  sur  $M$  à valeurs dans  $E$  telle que l'on ait

$$\langle T, \varphi \rangle = \int_{\Gamma} \langle S, \varphi_{\gamma} \rangle d\gamma$$

où  $\varphi_{\gamma}$  désigne la fonction  $\varphi(\cdot, \gamma)$  pour  $\varphi \in C_c^{\infty}(M \times \Gamma)$ .

— *Démonstration.*

Soit  $\varphi$  une fonction test sur  $M \times \Gamma$  de la forme  $(m, \gamma) \mapsto \alpha(m)\beta(\gamma)$  avec  $\alpha \in C_c^{\infty}(M)$  et  $\beta \in C_c^{\infty}(\Gamma)$ . Lorsque  $\alpha$  est fixée, l'application  $T_{\alpha} : \beta \mapsto \langle T, \varphi \rangle = \langle T, \alpha\beta \rangle$  est une distribution sur  $\Gamma$  à valeurs dans  $E$ , invariante sous les translations. Pour toute fonction test  $\psi \in C_c^{\infty}(\Gamma)$ , la convolée  $T_{\alpha} * \psi$  est une fonction de classe  $C^{\infty}$  sur  $\Gamma$  à valeurs dans  $E$ , invariante sous les translations à gauche, donc constante. Or  $T_{\alpha}$  est adhérente dans  $L(C_c^{\infty}(\Gamma), E)$  à l'ensemble des  $T_{\alpha} * \psi$ , donc  $T_{\alpha}$  est une constante. Notons  $k(\alpha)$  cet élément de  $E$ . Choisissons  $\beta$  telle que  $\int_{\Gamma} \beta = 1$ ; il apparaît que l'application  $\alpha \mapsto k(\alpha)$  est une distribution sur  $M$  à valeurs dans  $E$  et l'on a

$$\langle T, \alpha\beta \rangle = k(\alpha) \int_{\Gamma} \beta(\gamma) d\gamma,$$

d'où, par continuité, en notant  $S$  la distribution  $\alpha \mapsto k(\alpha)$ ,

$$\langle T, \varphi \rangle = \int_{\Gamma} \langle S, \varphi_{\gamma} \rangle d\gamma,$$

pour toute fonction test  $\varphi \in C_c^{\infty}(M \times \Gamma)$ . □

**Remarque 4.1** Un cas particulier du lemme précédent, traité dans le courant de la démonstration est celui des distributions sur un groupe de Lie à valeurs dans un espace de Banach et invariante par les translations à gauche. Il s'agit des multiples de la mesure de Haar sur le groupe.

Le théorème suivant caractérise les « entrelacements bornés » de  $\mathcal{E}(G/N)$  dans lui-même, dans le cas où  $G$  est de rang 1 :

**Théorème 4.2.1** Les opérateurs  $T \in \mathcal{L}_{C^*(L)}(\mathcal{E}(G/N))$  qui commutent à l'action de  $G$  sur  $\mathcal{E}(G/N)$  sont exactement les multiplicateurs centraux de  $C^*(L)$ .

— *Démonstration.*

Soit  $M \in \mathcal{M}(C^*(L))$  vérifiant

$$M(ab) = aM(b) \quad (\#)$$

pour tous  $a, b \in C^*(L)$ . L'action de  $C^*(L)$  définissant la structure de  $C^*$ -module sur  $\mathcal{E}(G/N)$  s'étend à  $\mathcal{M}(C^*(L))$ , et l'on pose

$$T_M(x) = x.M,$$

pour  $x \in \mathcal{E}(G/N)$ . La condition (#) étant vérifiée,  $T_M$  est  $C^*(L)$ -linéaire, d'adjoint  $T_M^* = T_{M^*}$ .

Réciproquement, soit  $T \in \mathcal{L}_{C^*(L)}(\mathcal{E}(G/N))$  vérifiant

$$T(g.x) = g.T(x)$$

pour tous  $x \in \mathcal{E}(G/N)$ ,  $g \in G$ .

Considérons le modèle ouvert de  $\mathcal{E}(G/N)$  : le module  $\mathcal{M}(\mathcal{E}(G/N))$  contient  $L^2(\overline{N}) \otimes \mathcal{M}(C^*(L))$  d'où une injection

$$L^2(\overline{N}) \hookrightarrow \mathcal{M}(\mathcal{E}(G/N)),$$

via laquelle  $f \in L^2(\overline{N})$  s'identifie au multiplicateur  $f \otimes 1_{\mathcal{M}(C^*(L))}$ , encore noté  $m_f$ , de sorte que  $m_{f \otimes a} = m_f m_a$ , pour  $a \in C^*(L)$ , en conservant les notations du Paragraphe 1.1. Il vient également :

$$M(T)(m_{f \otimes a}) = M(T)(m_f) m_a$$

d'où, pour  $f_1 \otimes a_1, f_2 \otimes a_2 \in \mathcal{E}(G/N)$ ,

$$\langle M(T)(m_{f_1 \otimes a_1}), m_{f_2 \otimes a_2} \rangle = m_{a_1}^* \langle M(T)(m_{f_1}), m_{f_2} \rangle m_{a_2}.$$

Considérons à présent l'application linéaire  $B_T : C_c(\overline{N}) \times C_c(\overline{N}) \longrightarrow \mathcal{M}(C^*(L))$  définie par

$$B_T(f_1, f_2) = \langle M(T)(m_{\overline{f_1}}), m_{f_2} \rangle.$$

Montrons que  $B_T$  est une mesure de Radon sur  $\overline{N} \times \overline{N}$ . Soient  $K$  une partie compacte de  $\overline{N} \times \overline{N}$ , et  $f_1, f_2 \in C_c(\overline{N})$  des fonctions dont les supports vérifient  $\text{Supp}(f_1) \times \text{Supp}(f_2) \subset K$ . On a, d'après la Proposition 1.1.4, l'inégalité suivante dans  $\mathcal{M}(C^*(L))$  :

$$|B_T(f_1, f_2)| \leq \|M(T)(m_{f_1})\| \cdot |m_{f_2}|.$$

On en déduit, en notant  $\|T\|$  la norme d'opérateur de  $T$ ,

$$\|B_T(f_1, f_2)\| \leq \|T\| \cdot \|f_1\|_2 \cdot \|f_2\|_2,$$

d'où la continuité pour la topologie de la convergence uniforme sur  $K$ . La forme  $B_T$  définit donc une distribution sur  $\overline{N} \times \overline{N}$  dont on note  $k_T$  le noyau, de sorte que  $B_T$  s'écrit symboliquement

$$B_T(f_1, f_2) = \int_{\overline{N} \times \overline{N}} f_1(\overline{n}_1) f_2(\overline{n}_2) k_T(\overline{n}_1, \overline{n}_2) d\overline{n}_1 d\overline{n}_2.$$

L'action à gauche de  $G$  sur  $\mathcal{E}(G/N)$  étant isométrique, la commutation de  $T$  à cette action implique que  $B_T(\overline{n}_0 \cdot f_1, \overline{n}_0 \cdot f_2) = B_T(f_1, f_2)$ . En considérant, comme dans [Bru56], le difféomorphisme  $(\overline{n}_1, \overline{n}_2) \mapsto (\overline{n}_1^{-1} \overline{n}_2, \overline{n}_2)$  de  $\overline{N} \times \overline{N}$ , les distributions  $\overline{N}$ -invariantes sur  $\overline{N}$  étant des multiples de la mesure de Haar, il apparaît, d'après le Lemme 4.2.1 que le noyau distributionnel  $k_T$  vérifie l'équation

$$k_T(\overline{n}_1, \overline{n}_2) = k_T(1, \overline{n}_1^{-1} \overline{n}_2).$$

Soit à présent  $c_T(\overline{n}) = k_T(1, \overline{n})$ . La distribution  $c_T$  sur  $\overline{N}$ , satisfait l'égalité

$$k_T(\overline{n}_1, \overline{n}_2) = c_T(\overline{n}_1^{-1} \overline{n}_2).$$

L'invariance sous l'action de  $A$  permet à présent de caractériser cette distribution. En effet, l'action d'un élément  $l = ma \in L$  sur  $f \otimes \varphi \in L^2(\overline{N}) \otimes C^*(L)$  est donnée par la formule

$$l \cdot f \otimes \varphi = e^{\rho \log(a)} f \circ c_l \otimes U_l \cdot \varphi.$$

La commutation de  $T$  à l'action de  $L$  implique que  $B_T(a \cdot f_1, a \cdot f_2) = B_T(f_1, f_2)$  pour tout  $a \in A$ . Il s'ensuit que

$$\begin{aligned} e^{2\rho \log(a)} \int_{\overline{N} \times \overline{N}} f_1(c_a(\overline{n}_1)) f_2(c_a(\overline{n}_2)) k_T(\overline{n}_1, \overline{n}_2) d\overline{n}_1 d\overline{n}_2 \\ = e^{-2\rho \log(a)} \int_{\overline{N} \times \overline{N}} f_1(\overline{n}_1) f_2(\overline{n}_2) k_T(c_a^{-1}(\overline{n}_1), c_a^{-1}(\overline{n}_2)) d\overline{n}_1 d\overline{n}_2 \\ = \int_{\overline{N} \times \overline{N}} f_1(\overline{n}_1) f_2(\overline{n}_2) k_T(\overline{n}_1, \overline{n}_2) d\overline{n}_1 d\overline{n}_2, \end{aligned}$$

la première égalité résultant de ce que  $\text{mod}^{\overline{N}}(c_a) = e^{2\rho \log(a)}$ , d'après le Lemme 3.2.1 appliqué au cas  $N_1 = N_2 = \overline{N}$ .

La distribution  $c_T$  vérifie donc la propriété d'invariance suivante :

$$c_T(c_a(\overline{n})) = e^{2\rho \log(a)} c_T(\overline{n}).$$

Cela s'écrit encore, pour  $\varphi$  une fonction test sur  $\overline{N}$ ,

$$\langle c_T, \varphi \circ c_a \rangle = \langle c_T, \varphi \rangle. \quad (*)$$

**Proposition 4.2.2** *Si  $G$  est de rang réel 1, les mesures de Radon sur  $\overline{N}$  vérifiant la relation (\*) sont exactement les multiples de la mesure de Dirac.*

— *Démonstration.*

Le groupe  $\overline{N}$  s'identifie via l'application exponentielle à son algèbre de Lie

$$\overline{\mathfrak{n}} = \mathfrak{g}_\alpha \oplus \mathfrak{g}_{2\alpha} \simeq \mathbb{R}^p \oplus \mathbb{R}^q.$$

Comme  $\overline{N}$  est connexe et simplement connexe, l'espace des fonctions test (resp. des distributions) sur  $\overline{N}$  s'identifie à celui des fonctions test (resp. des distributions) sur  $\overline{\mathfrak{n}}$  [Sch68]. Sous ces identifications, les conjugaisons par les éléments de  $A$  agissent par dilatations : pour  $\overline{n}$  identifié à  $(u, v)$ , on a

$$c_a(\overline{n}) \simeq (\alpha(a)u, \alpha(a)^2v).$$

On notera  $a.(u, v)$  cette dernière expression.

Dans le cas particulier où  $q = 0$ , la distribution  $c_T$  est homogène de degré  $-p$ . Lorsque  $G = SL_2(\mathbb{R})$ , par exemple,  $p = 1$ , le problème se ramène à l'équation d'Euler sur  $\mathbb{R}$  et les solutions sont des combinaisons linéaires de la mesure de Dirac  $\delta_0$  et de la distribution  $V_p(\frac{1}{x})$ . Cette dernière, étant d'ordre 1, n'est pas une mesure de Radon, donc

$$c_T = \delta_0$$

à une constante multiplicative près.

Considérons la restriction  $c_T^0$  de  $c_T$  à l'ouvert  $\overline{N} \setminus \{1\}$ . Pour  $(u, v) \in \mathbb{R}^p \oplus \mathbb{R}^q$ , on pose

$$r(u, v) = (\|u\|^4 + \|v\|^2)^{\frac{1}{4}}.$$

Cette fonction est l'analogue au niveau de l'algèbre de Lie de la fonction norme introduite en 4.1.5. Pour  $t \in \mathbb{R}_+$ , on note  $S_t$  la surface d'équation  $r(u, v) = t$ . On a alors, pour  $a \in A \simeq \mathbb{R}_+^*$ ,

$$r(a.(u, v)) = a r(u, v),$$

et l'application

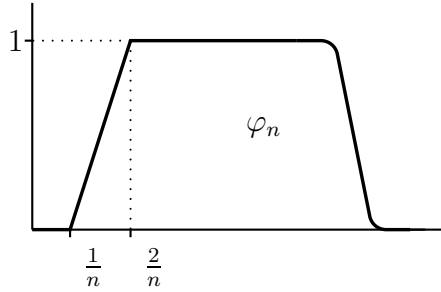
$$(u, v) \longmapsto \left( r(u, v), \frac{(u, v)}{r(u, v)} \right)$$

est un difféomorphisme entre  $\overline{N} \setminus \{1\}$  et  $\mathbb{R}_+^* \times S_1$ .

Soit  $\psi_0 \in C_c^\infty(S_1)$  fixée. Si  $\varphi$  est une fonction test sur  $\mathbb{R}_+^*$ , alors  $\varphi \otimes \psi_0$  est un élément de  $C_c^\infty(\mathbb{R}_+^*) \otimes C_c^\infty(S_1) \subset C_c^\infty(\overline{N} \setminus \{1\})$  et l'application  $\varphi \longmapsto \langle c_T, \varphi \otimes \psi_0 \rangle$  est une distribution homogène sur  $\mathbb{R}_+^*$ . D'après 4.2.1,  $\langle c_T, \varphi \otimes \psi_0 \rangle$  est de la forme

$$c(\psi_0) \int_0^{+\infty} \varphi(r) \frac{dr}{r},$$

et ne peut donc pas être la restriction d'une mesure de Radon. En effet, si  $K$  désigne un compact de  $\overline{N}$  contenant 1, et  $M_K$  une constante positive telle que l'inégalité  $\|\langle c_T, \varphi \otimes \psi \rangle\| \leq M_K \|\varphi \otimes \psi\|_\infty^K$  soit vérifiée pour  $\varphi \otimes \psi \in C_K(\overline{N})$ , on montre, en considérant la suite  $\varphi_n \otimes \psi_0$ , avec  $\psi_0$  telle que  $c(\psi_0) \neq 0$  et  $\varphi_n$  comme ci-dessous, que  $M_K$  ne saurait être fini.



Par conséquent, le support de  $c_T$  est réduit à  $\{1\}$ , et  $c_T$  est donc une combinaison linéaire de dérivées au sens des distributions de la mesure de Dirac  $\delta$ . La condition d'homogénéité montre que

$$c_T = \delta_1 \cdot 1_{\mathcal{M}(C^*(L))},$$

à une constante près. □

D'après la proposition ci-dessus, il existe un multiplicateur  $U \in \mathcal{M}(C^*(L))$  tel que  $c_T = U\delta_1$ . On en déduit l'expression du noyau distributionnel :

$$k_T(\overline{n}_1, \overline{n}_2) = U \cdot \delta_1(\overline{n}_1^{-1} \overline{n}_2)$$

et donc de la forme bilinéaire :

$$B_T(f_1, f_2) = \langle f_1, f_2 \rangle_{L^2} U$$

pour  $f_1, f_2 \in L^2(\overline{N})$ .

Par conséquent, pour  $a_1, a_2 \in C^*(L)$ , on a

$$\begin{aligned} \langle M(T)(m_{f_1} \otimes m_{a_1}), m_{f_2} \otimes m_{a_2} \rangle &= \langle f_1, f_2 \rangle_{L^2} m_{a_1}^* U m_{a_2} \\ &= \langle f_1 \otimes U^*(a_1), f_2 \otimes a_2 \rangle \end{aligned}$$

dans  $\mathcal{M}(C^*(L))$ , et  $M(T)$  s'identifie à la composition à droite par  $U^*$ . Cette application est  $C^*(L)$ -linéaire seulement si  $U$  vérifie la condition  $(\sharp)$ , ce qui termine la preuve de la proposition. □

**Remarque 4.2** L'hypothèse sur le rang réel de  $G$  n'est pas nécessaire pour démontrer que la distribution  $c_T$  vérifie la propriété (\*). Il est vraisemblable que le Théorème 4.2.1 soit vrai en rang supérieur. En effet, ce résultat est analogue au théorème de Bruhat 2.4.1 qui établit l'irréductibilité de la plupart des représentations de la série principale. Cette analogie sera précisée au Paragraphe 5.3.3 dans le cas particulier de  $SL_2(\mathbb{R})$ .

### 4.3 Opérateurs standard

L'objet des paragraphes suivants est la construction au niveau du  $C^*$ -module  $\mathcal{E}(G/N)$  d'opérateurs analogues aux opérateurs standard introduits en 2.4.2.

L'expression primitive définissant l'opérateur d'entrelacement standard  $I_w$  est, pour une fonction  $N$ -invariante  $F$  définie sur  $G$  :

$$I_w F(g) = \int_{\bar{N}} F(gw\bar{n}) d\bar{n}.$$

De même que les travaux de Knapp et Stein [KS71] permettent de donner un sens à cette expression pour  $F$  appartenant à un espace  $\mathcal{H}^{\sigma,\nu}$ , de sorte que l'opérateur ainsi construit entrelace les représentations  $\pi^{\sigma,\nu}$  et  $\pi^{w\sigma,w\nu}$ , notre but est ici de donner un sens à  $I_w$  sur (un sous-module de)  $\mathcal{E}(G/N)$ . Sur le plan formel, c'est-à-dire sans présumer de la convergence de l'intégrale, ni du type de la fonction éventuellement obtenue,  $I_w$  commute à l'action de  $C^*(G)$  et vérifie une propriété de  $C^*(L)$ - $w$ -linéarité, du type  $I_w(F.\varphi) = I_w(F).\varphi^w$ . C'est donc dans ce sens qu'il faut considérer  $I_w$  comme un opérateur d'entrelacement au niveau de  $\mathcal{E}(G/N)$ .

On démontre dans la suite que cette intégrale est bien définie pour les fonctions à support compact sur  $G/N$  :

**Théorème 4.3.1** *L'intégrale*

$$\int_{\bar{N}} F(gw\bar{n}) d\bar{n}$$

défini une application linéaire  $I_w : C_c(G/N) \longrightarrow C(G/N)$ .

Ce résultat, qui sera démontré en étudiant  $I_w$  dans le modèle ouvert du module hilbertien  $\mathcal{E}(G/N)$ , contraste avec la théorie classique de Knapp et Stein [KS71], où les intégrales d'entrelacement, considérées représentation par représentation, sont données par des noyaux non localement intégrables.

### 4.3.1 Expression dans le modèle induit

Rappelons quelques notations relatives aux décompositions de  $G$  et de  $P$  : pour  $g \in G$ , la décomposition d'Iwasawa s'écrit  $g = \kappa(g)\alpha(g)\nu(g) = \kappa(g)e^{H(g)}\nu(g)$ . Si de plus  $g$  appartient à  $\overline{N}L = \overline{N}MA$ , dont le complémentaire est de mesure de Haar nulle, on écrit  $g = \bar{\mathbf{n}}(g)\mathbf{l}(g) = \bar{\mathbf{n}}(g)\mathbf{m}(g)\mathbf{a}(g)$ . Enfin, l'on note  $\mathcal{E}_i^0$  l'espace des fonctions  $F : G/N \mapsto C_c(L)$  continues à support compact et vérifiant, pour  $x \in G/N$  et  $l = ma \in L$  la relation

$$F(xl) = e^{-\rho \log a} U_{l^{-1}}.F(x).$$

Cet espace est muni d'un produit scalaire à valeurs dans  $C^*(L)$  défini en 3.3.1 par :

$$\langle F, G \rangle_i = \int_{G/N} F(x)^* G(x) \psi(x) d\mu(x)$$

où  $\psi$  désigne une section transverse quelconque sur  $G/N$ .

Le lemme suivant précise les relations entre les deux décompositions d'un élément de  $\overline{N}$ .

**Proposition 4.3.1** *Soient  $\bar{n} \in \overline{N}$  et  $\bar{n} = \kappa(\bar{n})\alpha(\bar{n})n$  sa décomposition d'Iwasawa. Alors*

- $\mathbf{m}(\kappa(\bar{n})) = 1$
- $\mathbf{a}(\kappa(\bar{n})) = \alpha(\bar{n})^{-1}$
- si  $\bar{n} \neq 1$ ,  $\mathbf{a}(w^{-1}\kappa(\bar{n})) = \mathbf{a}(w^{-1}\bar{n})\alpha(\bar{n})^{-1}$

— *Démonstration.*

L'égalité  $\bar{n} = \kappa(\bar{n})\alpha(\bar{n})n$  implique que  $\kappa(\bar{n}) = \bar{n}1\alpha(\bar{n})^{-1}n'$  avec  $n' \in N$ . On en déduit les deux premières égalités, par unicité de la décomposition sur  $\overline{N}MAN$ . Remarquons à présent que  $\mathbf{a}(w^{-1}\kappa(\bar{n})) = \mathbf{a}(\kappa(w^{-1}\bar{n}))$  car  $w \in K$ . D'autre part,  $\mathbf{a}(w^{-1}\bar{n}) = \mathbf{a}(\kappa(w^{-1}\bar{n})\alpha(w^{-1}\bar{n})) = \mathbf{a}(\kappa(w^{-1}\bar{n}))\alpha(w^{-1}\bar{n})$ , et  $\alpha(w^{-1}\bar{n}) = \alpha(\bar{n})$  car  $w \in K$ , d'où le résultat.  $\square$

Les formules ci-dessus et la transformation de la mesure ( $\star$ ) associée au Paragraphe 3.3.4 à la projection stéréographique de  $\overline{N}$  sur  $K$  permettent de donner les expressions formelles suivantes de l'opérateur standard  $I_w$  : si  $F \in \mathcal{E}_i^0$  et  $x \in G/N$ , alors

$$\begin{aligned}
\int_{\bar{N}} F(xw\bar{n}) d\bar{n} &= \int_{\bar{N}} F(xw\kappa(\bar{n})\alpha(\bar{n})) d\bar{n} \\
&= \int_{\bar{N}} e^{-\rho \log \alpha(\bar{n})} U_{\alpha(\bar{n})^{-1}} F(xw\kappa(\bar{n})) d\bar{n} \\
&= \int_{\bar{N}} e^{\rho \log \mathbf{a}(\kappa(\bar{n}))} U_{\mathbf{a}(\kappa(\bar{n}))} F(xw\kappa(\bar{n})) e^{2\rho H(\bar{n})} e^{-2\rho H(\bar{n})} d\bar{n} \\
&= \int_{\bar{N}} e^{-\rho \log \mathbf{a}(\kappa(\bar{n}))} U_{\mathbf{I}(\kappa(\bar{n}))} F(xw\kappa(\bar{n})) e^{-2\rho H(\bar{n})} d\bar{n}
\end{aligned}$$

L'égalité (★) du Paragraphe 3.3.2 donne

$$\begin{aligned}
\int_{\bar{N}} F(xw\bar{n}) d\bar{n} &= \int_K e^{-\rho \log \mathbf{a}(k)} U_{\mathbf{I}(k)} F(xwk) dk \\
&= \int_K e^{-\rho \log \mathbf{a}(w^{-1}k)} U_{\mathbf{I}(w^{-1}k)} F(xk) dk \\
(\text{par } \star) &= \int_{\bar{N}} e^{-\rho \log \mathbf{a}(w^{-1}\kappa(\bar{n}))} U_{\mathbf{I}(w^{-1}\kappa(\bar{n}))} F(x\kappa(\bar{n})) e^{-2\rho H(\bar{n})} d\bar{n} \\
&= \int_{\bar{N}} e^{-\rho \log \mathbf{a}(w^{-1}\bar{n})} e^{-\rho H(\bar{n})} U_{\mathbf{I}(w^{-1}\kappa(\bar{n}))} F(x\kappa(\bar{n})\alpha(\bar{n})\alpha(\bar{n})^{-1}) d\bar{n} \\
&= \int_{\bar{N}} e^{-\rho \log \mathbf{a}(w^{-1}\bar{n})} U_{\mathbf{I}(w^{-1}\kappa(\bar{n}))\alpha(\bar{n})} F(x\bar{n}) d\bar{n} \\
&= \int_{\bar{N}} U_{\mathbf{I}(w^{-1}\bar{n})} F(x\bar{n}) \frac{d\bar{n}}{|\bar{n}|}
\end{aligned}$$

Les calculs précédents sont légitimés par la proposition suivante :

**Théorème 4.3.2** Soit  $F \in \mathcal{E}_i^0$ . Pour tout  $x \in G/N$ , l'intégrale

$$I_w F(x) = \int_{\bar{N}} U_{\mathbf{I}(w^{-1}\bar{n})} F(x\bar{n}) \frac{d\bar{n}}{|\bar{n}|}$$

est bien définie.

Cet énoncé est une reformulation dans le modèle induit du Théorème 4.3.1 et sera démontré en même temps, dans le modèle ouvert. Il apparaît que les fonctions obtenues en appliquant  $I_w$  ne vérifient pas l'équation définissant  $\mathcal{E}_i^0(G/N)$ . Plus précisément, l'égalité

$$I_w F(xl) = e^{-\rho \log(a)} U_{c_{w^{-1}}(l)} \cdot I_w F(x),$$

est formellement vérifiée pour  $F \in C_c(G/N, C_c(L))$ ,  $x \in G/N$  et  $l = ma \in L$ , en étendant l'action de  $U_l$  à des fonctions à support non compact sur  $L$ . Cette manifestation de l'action de  $w$  peut s'interpréter algébriquement en considérant que  $I_w$  prend ses valeurs dans un module de fonctions contenant l'espace  $\mathcal{E}_i^0(G/N)^w$  défini par la relation précédente. Cependant,  $I_w$  prend ses valeurs dans un espace strictement plus grand que le  $C^*$ -module obtenu en complétant  $\mathcal{E}_i^0(G/N)^w$ . Ce phénomène sera étudié au paragraphe suivant en considérant les supports des fonctions obtenues en appliquant  $I_w$  dans le modèle ouvert, et dans un cas particulier au Chapitre 5.

### 4.3.2 Expression dans le modèle ouvert

Etudions à présent l'intégrale définissant l'opérateur d'entrelacement standard dans le modèle ouvert.

Soit  $F$  définie sur  $\overline{NMA}$  par  $\bar{n}ma \mapsto e^{-\rho \log(a)} f(\bar{n})\varphi(ma)$  où  $f \in L^2(\overline{N})$  et  $\varphi \in C_c(L)$ .

On pose, pour  $f \otimes \varphi \in C_c(\overline{N}) \otimes C_c(L)$  et  $x_0 = \bar{n}_0 m_0 a_0$ ,

$$\mathcal{I}_w(f \otimes \varphi)(x_0) = e^{\rho \log a_0} \int_{\overline{N}} e^{-\rho \log \mathbf{a}(x_0 w \bar{v})} f(\bar{n}(x_0 w \bar{v})) \varphi(l(x_0 w \bar{v})) d\bar{v}.$$

**Proposition 4.3.2** Soient  $f \otimes \varphi \in C_c(\overline{N}) \otimes C_c(L)$  et  $x_0 = \bar{n}_0 m_0 a_0 = \bar{n}_0 l_0 \in \overline{NMA}$ . Alors

$$\mathcal{I}_w(f \otimes \varphi)(x_0) = \int_{\overline{N}} f(\bar{n}_0 \bar{v}) [U_{l(w^{-1} \bar{v})} \varphi]^w(l_0) \frac{d\bar{v}}{|\bar{v}|},$$

sous réserve de la convergence de l'intégrale.

— *Démonstration.*

Il est clair que

$$\begin{aligned} \mathbf{m}(x_0 w \bar{v}) &= m_0 \mathbf{m}(w \bar{v}) \\ \mathbf{a}(x_0 w \bar{v}) &= a_0 \mathbf{a}(w \bar{v}) \\ \bar{\mathbf{n}}(x_0 w \bar{v}) &= \bar{n}_0 c_{l_0^{-1}}(\bar{\mathbf{n}}(w \bar{v})) = \bar{n}_0 l_0 \bar{\mathbf{n}}(w \bar{v}) l_0^{-1} \end{aligned}$$

d'où l'expression

$$\mathcal{I}_w(f \otimes \varphi)(x_0) = \int_{\overline{N}} e^{-\rho \log \mathbf{a}(w \bar{v})} f(\bar{n}_0 c_{l_0^{-1}}(\bar{\mathbf{n}}(w \bar{v}))) \varphi(l_0 \mathbf{l}(w \bar{v})) d\bar{v}.$$

D'après les formules du Lemme 3.3.6 et la formule intégrale associée par la Proposition 3.3.7, le changement de variables  $\bar{\nu} \leftrightarrow \bar{\mathbf{n}}(w\bar{\nu})$  donne :

$$\begin{aligned} \mathcal{I}_w(f \otimes \varphi)(x_0) &= \int_{\bar{N}} e^{-\rho \log(\mathbf{a}(w\bar{\mathbf{n}}(w\bar{\nu}))\mathbf{a}(w\bar{\nu})^2)} f [\bar{n}_0 c_{l_0}^{-1}(\bar{\mathbf{n}}(w\bar{\mathbf{n}}(w\bar{\nu})))] \varphi [l_0 \mathbf{l}(w\bar{\mathbf{n}}(w\bar{\nu}))] d\bar{\nu} \\ &= \int_{\bar{N}} e^{-\rho \log \mathbf{a}(w\bar{\nu})} f [\bar{n}_0 c_{l_0}^{-1}(c_\mu^{-1}(\bar{\nu}))] \varphi [l_0 \mu \mathbf{l}(w\bar{\nu})^{-1}] d\bar{\nu} \end{aligned}$$

L'effet des conjugaisons de  $\bar{N}$  par les éléments de  $L$ , se traduit au niveau de la mesure par la fonction modulaire

$$\text{mod}^{\bar{N}} c_l = e^{2\rho \log a}$$

pour  $l = ma \in L$ , d'après le Lemme 3.2.1. D'autre part, la définition de  $\mu = w^2 \in M$  implique que  $wc_\mu(\bar{\nu}) = w\mu^{-1}\bar{\nu}\mu = w^{-1}\bar{\nu}$  pour  $\bar{\nu} \in \bar{N}$  d'où

$$\begin{aligned} \mathbf{a}(wc_\mu(\bar{\nu})) &= \mathbf{a}(w^{-1}\bar{\nu}), \\ \mathbf{m}(wc_\mu(\bar{\nu})) &= \mathbf{m}(w^{-1}\bar{\nu})\mu, \end{aligned}$$

d'où

$$\mathbf{l}(wc_\mu(\bar{\nu})) = \mathbf{l}(w^{-1}\bar{\nu})\mu.$$

On déduit des remarques précédentes et de la Proposition 4.1.1 que :

$$\begin{aligned} \mathcal{I}_w(f \otimes \varphi)(x_0) &= \int_{\bar{N}} e^{-\rho \log \mathbf{a}(wc_\mu(\bar{\nu}))} f [\bar{n}_0 c_{l_0}^{-1}(\bar{\nu})] \varphi [l_0 \mu \mathbf{l}(wc_\mu(\bar{\nu}))^{-1}] d\bar{\nu} \\ &= \int_{\bar{N}} e^{-\rho \log \mathbf{a}(w^{-1}\bar{\nu})} f [\bar{n}_0 c_{l_0}^{-1}(\bar{\nu})] \varphi [l_0 \mathbf{l}(w^{-1}\bar{\nu})^{-1}] d\bar{\nu} \\ &= \text{mod}^{\bar{N}}(c_{l_0}) \int_{\bar{N}} e^{-\rho \log \mathbf{a}(w^{-1}c_{l_0}(\bar{\nu}))} f(\bar{n}\bar{\nu}) \varphi [l_0 \mathbf{l}(w^{-1}c_{l_0}(\bar{\nu}))^{-1}] d\bar{\nu} \\ &= \text{mod}^{\bar{N}}(c_{l_0}) e^{-2\rho \log a_0} \int_{\bar{N}} e^{-\rho \log \mathbf{a}(w^{-1}\bar{\nu})} f(\bar{n}\bar{\nu}) \varphi [a_0^{-1} \mathbf{l}(w^{-1}\bar{\nu})^{-1} c_w(m_0)] d\bar{\nu} \end{aligned}$$

Comme  $c_w(a_0) = a_0^{-1}$  et que  $|\bar{\nu}|$  est défini pour  $\bar{\nu} \neq 1$  par

$$|\bar{\nu}| = e^{\rho \log \mathbf{a}(w^{-1}\bar{\nu})},$$

il s'ensuit que

$$\mathcal{I}_w(f \otimes \varphi)(x_0) = \int_{\bar{N}} \frac{f(\bar{\nu})}{|\bar{n}^{-1}\bar{\nu}|} \varphi [\mathbf{l}(w^{-1}\bar{n}^{-1}\bar{\nu})^{-1} c_w(l_0)] d\bar{\nu}.$$

Les notations introduites dans la Proposition 3.3.8 permettent enfin d'écrire l'opérateur standard sous la forme compacte de l'énoncé :

$$\mathcal{I}_w(f \otimes \varphi)(x_0) = \int_{\bar{N}} f(\bar{n}_0 \bar{\nu}) [U_{\mathbf{l}(w^{-1}\bar{\nu})}\varphi]^w(l_0) \frac{d\bar{\nu}}{|\bar{\nu}|}.$$

□

Il apparaît alors que  $\mathcal{I}_w$  possède formellement la propriété de  $C^*(L)$ - $w$ -linéarité

$$\mathcal{I}_w(\xi.a) = \mathcal{I}_w(\xi).a^w.$$

Cette propriété est seulement formelle, au sens où les objets obtenus en appliquant  $\mathcal{I}_w$  n'appartiennent pas au  $C^*$ -module  $L^2(\bar{N}) \otimes C^*(L)$ . Le paragraphe suivant sera consacré à l'étude de ces fonctions.

## 4.4 Existence et propriétés des opérateurs d'entrelacement

On se place dans le modèle ouvert, afin d'étudier la convergence des intégrales définissant les opérateurs des paragraphes précédents et les propriétés des fonctions obtenues en les appliquant.

### 4.4.1 Existence dans le modèle ouvert

L'intégrale définissant  $\mathcal{I}_w$  est convergente pour certaines fonctions à support compact.

**Proposition 4.4.1** *Soient  $f \otimes \varphi \in C_c(\bar{N}) \otimes C_c(L)$  et  $x_0 = \bar{n}_0 l_0 = \bar{n}_0 m_0 a_0$ . L'intégrale*

$$\mathcal{I}_w(f \otimes \varphi)(x_0) = \int_{\bar{N}} f(\bar{n}_0 \bar{\nu}) [U_{\mathbf{l}(w^{-1}\bar{\nu})}\varphi]^w(l_0) \frac{d\bar{\nu}}{|\bar{\nu}|}$$

*est convergente.*

— *Démonstration.*

La compacité du support de  $f$  implique que l'intégrale porte sur une partie compacte

de  $\overline{N}$ . Ainsi,  $f$  et  $\varphi$  étant continues, il suffit d'étudier l'intégrabilité au voisinage de 1, où le facteur  $\frac{1}{|\bar{n}|}$  est susceptible d'introduire une singularité. Or,  $l_0$  étant fixé,  $\mathbf{l}(w^{-1}\bar{\nu})^{-1}l_0^{-1}$  sort de tout compact de  $L$  lorsque  $\bar{\nu} \rightarrow 1$ . En effet, en identifiant  $A$  à  $\mathbb{R}_+^*$  via  $a \mapsto e^{\rho \log(a)}$ , il apparaît que  $\mathbf{a}(w^{-1}\bar{\nu}) \rightarrow 0$  lorsque  $\bar{\nu} \rightarrow 1$ . Il s'ensuit que  $[U_{\mathbf{l}(w^{-1}\bar{\nu})\varphi}]^w(l_0) = \varphi(\mathbf{l}(w^{-1}\bar{\nu})^{-1}c_w(l_0))$  est nul au voisinage de  $\bar{\nu} = 1$ , et que l'intégrale est bien définie.  $\square$

L'argument assurant, dans la démonstration précédente, l'intégrabilité au voisinage de  $\bar{\nu} = 1$  à  $l_0$  fixé met en évidence le phénomène qui empêche  $\mathcal{I}_w$ , même restreint à  $C_c(\overline{N}) \otimes C_c(L)$  de prendre ses valeurs dans  $\mathcal{E}(G/N)$ . En effet, moyennant l'identification entre  $A \simeq \mathbb{R}_+^*$ , l'ensemble des  $a \in \mathbb{R}_+^*$  tels que  $\mathbf{a}(w^{-1}\bar{\nu})^{-1}a$  demeure dans un intervalle compact prescrit de  $\mathbb{R}_+^*$  lorsque  $\bar{\nu}$  est voisin de 1 est de la forme  $]0, m]$ , avec  $m > 0$  et n'est donc pas compact. Ce phénomène sera analysé plus en détail dans les paragraphes suivants.

Rappelons que la conjugaison par  $w$  inverse les éléments de  $A$ . La définition suivante permet de décrire le support des fonctions obtenues en appliquant  $\mathcal{I}_w$  aux fonctions de  $C_c(\overline{N}) \otimes C_c(L)$ .

**Définition 4.4.2 [Fonctions à support semi-compact]**

Soit  $k \in \mathbb{N} \cup \{\infty\}$ . On dit qu'une fonction de classe  $C^k$  sur  $L$  est à support *semi-compact* si son support est contenu dans un ensemble de la forme  $M \times [m, +\infty[$  et l'on note  $C_+^k(L)$  l'ensemble de ces fonctions.

La proposition suivante précise le comportement des images par  $\mathcal{I}_w$  de certains éléments de  $C_c(\overline{N}) \otimes C_c(L)$ .

**Proposition 4.4.3** Soient  $l_0 \in L$  et  $\bar{n}_0 \in \overline{N}$  fixés.

- i) Pour  $f \in C_c(\overline{N})$ , l'application  $\varphi \mapsto \mathcal{I}_w(f \otimes \varphi)(\bar{n}_0 \cdot)$  envoie  $C_c(L)$  dans  $C_+(L)$ .
- ii) Pour  $\varphi \in C_c^\infty(L)$ , l'application

$$f \mapsto \mathcal{I}_w(f \otimes \varphi)(\cdot l_0)$$

s'étend en un opérateur borné de  $L^2(\overline{N})$ .

— *Démonstration.*

Le premier point est une reformulation des remarques précédant l'énoncé, en utilisant les notations de la Définition 4.4.2. Pour le second, la Proposition 4.3.2 fait

apparaître  $\mathcal{I}_w$  comme une convolution sur  $\overline{N}$ . Plus précisément,  $\varphi$  étant fixée, l'application  $\omega_\varphi : \bar{n} \mapsto [U_{\mathbf{l}(w^{-1}\bar{n})}\varphi]^w(l_0) = \varphi(\mathbf{l}(w^{-1}\bar{n})^{-1}c_w(l_0))$  est de classe  $C^\infty$ , à support compact sur  $\overline{N} \setminus \{1\}$ , en particulier nulle au voisinage de  $\bar{n} = 1$ . L'identification de  $\overline{N}$  à l'espace euclidien  $\bar{\mathfrak{n}}$  par la fonction exponentielle préservant la mesure, la convolution par  $\bar{n} \mapsto \frac{\omega_\varphi(\bar{n})}{|\bar{n}|}$  s'étend en un opérateur borné de  $L^2(\overline{N})$ .  $\square$

Le fait que cet opérateur d'entrelacement ne s'applique pas au  $C^*$ -module  $\mathcal{E}(G/N)$  peut être mis en parallèle avec le fait que les opérateurs de la théorie de Knapp et Stein sont obtenus par prolongement méromorphe et présentent des pôles. De même qu'il est possible de localiser ces pôles lors de la construction de l'opérateur classique de la Proposition 2.4.2, l'opérateur  $\mathcal{I}_w$  peut être décomposé afin de faire apparaître une partie bornée et à isoler ce qui tient lieu de singularité dans ce modèle.

Plus précisément, soient

$$\begin{aligned}\mathcal{I}_w^\infty(f \otimes \varphi)(x_0) &= \int_{|\bar{\nu}| > 1} f(\bar{n}_0 \bar{\nu}) [U_{\mathbf{l}(w^{-1}\bar{\nu})}\varphi]^w(l_0) \frac{d\bar{\nu}}{|\bar{\nu}|} \\ \mathcal{I}_w^0(f \otimes \varphi)(x_0) &= \int_{|\bar{\nu}| < 1} (f(\bar{n}_0 \bar{\nu}) - f(\bar{n}_0)) [U_{\mathbf{l}(w^{-1}\bar{\nu})}\varphi]^w(l_0) \frac{d\bar{\nu}}{|\bar{\nu}|} \\ \mathcal{R}_w(f \otimes \varphi)(x_0) &= f(\bar{n}_0) \int_{|\bar{\nu}| < 1} [U_{\mathbf{l}(w^{-1}\bar{\nu})}\varphi]^w(l_0) \frac{d\bar{\nu}}{|\bar{\nu}|}\end{aligned}$$

de sorte que

$$\mathcal{I}_w = \mathcal{I}_w^0 + \mathcal{I}_w^\infty + \mathcal{R}_w.$$

Les différents termes de cette décomposition seront étudiés séparément au cours des paragraphes suivants.

#### 4.4.2 Parties densément définies

Considérons tout d'abord  $\mathcal{I}_w^\infty$  : soit  $f \otimes \varphi \in C_c(\overline{N}) \otimes C_c(L)$ . La troncature du domaine d'intégration et la compacité des supports de  $f$  et  $\varphi$  impliquent que l'intégrale porte sur une partie compacte de  $\overline{N} \setminus \{1\}$ . L'analyse menée au paragraphe précédent montre que si  $\bar{n}_0$  est fixé, le support de l'application

$$l \mapsto \mathcal{I}_w^\infty(f \otimes \varphi)(\bar{n}_0 l)$$

est compact.

La troncature du domaine d'intégration permet en fait d'exclure complètement la singularité. Ce résultat s'énonce en tenant compte de l'action de  $w$  sur  $C^*(L)$ . En effet, si  $E$  est un  $C^*$ -module hilbertien sur une  $C^*$ -algèbre  $B$  et  $\beta$  un automorphisme de  $B$ , on définit un  $C^*$ -module  $E_\beta$  en munissant  $E$  de l'action  $\xi \cdot_\beta b = \xi \cdot \beta(b)$  et du produit scalaire  $\langle \xi, \eta \rangle_\beta = \beta^{-1}(\langle \xi, \eta \rangle_E)$ . Ici, on notera  $\mathcal{E}(G/N)^w$  le  $C^*$ -module hilbertien obtenu ainsi en considérant  $\beta(\varphi) = \varphi^w$  pour  $\varphi \in C^*(L)$ .

Ceci donne un sens précis à la  $C^*(L)$ - $w$ -linéarité évoquée à la fin du Paragraphe 4.3 et permet d'énoncer le résultat suivant, qui montre que l'opérateur, convenablement tronqué, prend bien ses valeurs dans le  $C^*$ -module  $\mathcal{E}(G/N)^w$ .

**Proposition 4.4.4** *L'application  $\mathcal{I}_w^\infty$  est définie sur une partie dense de  $\mathcal{E}(G/N)$  et prend ses valeurs dans  $\mathcal{E}(G/N)^w$ .*

— *Démonstration.*

Soit  $F$  une combinaison linéaire de tenseurs élémentaires du modèle induit  $C_c(\overline{N}) \otimes C_c(L)$ , considérée comme une fonction de  $\overline{N}$  dans  $C_c(L)$ . Pour une telle fonction, l'expression de  $\mathcal{I}_w^\infty F$  est la suivante :

$$\mathcal{I}_w^\infty F(\bar{n})(l) = \int_{|\bar{\nu}|>1} [U_{\mathbf{I}(w^{-1}\bar{\nu})} F(\bar{n}\bar{\nu})]^w(l) \frac{d\bar{\nu}}{|\bar{\nu}|}.$$

Il suffit de montrer que  $\langle \mathcal{I}_w^\infty F, \mathcal{I}_w^\infty F \rangle$  est un élément de  $C^*(L)$ . Pour ce faire, on domine la norme par l'inégalité suivante :

$$\|\langle \mathcal{I}_w^\infty F, \mathcal{I}_w^\infty F \rangle\| \leq \int_{\overline{N}} \int_{|\bar{\nu}_1|>1} \int_{|\bar{\nu}_2|>1} \|F(\bar{n}\bar{\nu}_1)\| \cdot \|F(\bar{n}\bar{\nu}_2)\| \frac{d\bar{\nu}_1}{|\bar{\nu}_1|} \frac{d\bar{\nu}_2}{|\bar{\nu}_2|} d\bar{n}.$$

L'application

$$\bar{\nu} \longmapsto \int_{|\bar{\nu}|>1} \|F(\bar{n}\bar{\nu})\| \frac{d\bar{\nu}}{|\bar{\nu}|}$$

est de carré sommable car il s'agit de la convolée de la fonction à support compact  $\bar{\nu} \longmapsto \|F(\bar{n}\bar{\nu})\|$  avec la fonction  $\bar{\nu} \longmapsto \frac{\mathbf{1}_{|\bar{\nu}|>1}}{|\bar{\nu}|}$ , qui est de carré sommable en vertu de la Proposition 4.1.8. Il s'ensuit que la quantité  $\langle \mathcal{I}_w^\infty F, \mathcal{I}_w^\infty F \rangle$  est finie, ce qui établit que  $\mathcal{I}_w^\infty$  envoie bien  $C_c(\overline{N}) \otimes C_c(L)$  dans  $\mathcal{E}(G/N)^w$ .  $\square$

**Remarque 4.3** Bien que nous ne soyons pas parvenu à l'établir ici, il nous semble que l'opérateur  $\mathcal{I}_w^\infty$  se prolonge en un opérateur borné de  $C^*$ -modules entre  $\mathcal{E}(G/N)$  et  $\mathcal{E}(G/N)^w$ . L'opérateur défini par l'expression

$$\int_{|\bar{\nu}|>1} f(\bar{n}_0\bar{\nu}) U_{\mathbf{I}(w^{-1}\bar{\nu}^{-1})}^{-1} \varphi^{w^{-1}} \frac{d\bar{\nu}}{|\bar{\nu}|}$$

est également densément défini sur  $\mathcal{E}(G/N)^w$ , prend ses valeurs dans  $\mathcal{E}(G/N)$  et vérifie formellement la relation d'ajonction avec  $\mathcal{I}_w^\infty$ .

Considérons à présent l'opérateur  $\mathcal{I}_w^0$ . Le domaine d'intégration est tel que cet opérateur ne s'étend pas en un opérateur borné entre  $C^*$ -modules. Il existe cependant un sous-espace dense de  $\mathcal{E}(G/N)$  envoyé dans  $\mathcal{E}(G/N)$  par  $\mathcal{I}_w^0$ .

**Proposition 4.4.5** *Soit  $x_0 = n_0 l_0 \in \overline{N}L$ . L'expression*

$$\mathcal{I}_w^0(f \otimes \varphi)(x_0) = \int_{|\bar{\nu}| < 1} (f(\bar{n}_0 \bar{\nu}) - f(\bar{n}_0)) [U_{\mathbf{I}(w^{-1}\bar{\nu})} \varphi]^w(l_0) \frac{d\bar{\nu}}{|\bar{\nu}|}$$

définit un opérateur sur un sous-espace dense de  $L^2(\overline{N}) \otimes C^*(L)$  à valeurs dans  $L^2(\overline{N}) \otimes C^*(L)^w$ .

— *Démonstration.*

Soit  $f \otimes \varphi \in C_c^1(\overline{N}) \otimes C_c(L)$ . Démontrons que  $\mathcal{I}_w^0(f \otimes \varphi)$  est un élément du produit tensoriel  $L^2(\overline{N}) \otimes C^*(L)$ . On identifie  $\overline{N}$  à son algèbre de Lie  $\bar{\mathfrak{n}}$  munie d'une base compatible avec la décomposition  $\bar{\mathfrak{n}} = \mathfrak{g}_{-\alpha} + \mathfrak{g}_{-2\alpha}$ . La formule de Taylor à l'ordre 1 montre que  $f(\bar{n}_0 \bar{\nu}) - f(\bar{n}_0) = O(\|\bar{\nu}\|)$  où la norme  $\|\cdot\|$  est la norme euclidienne sur  $\bar{\mathfrak{n}}$ . D'après la Proposition 4.1.7, cela signifie encore que

$$f(\bar{n}_0 \bar{\nu}) - f(\bar{n}_0) = O(|\bar{\nu}|^d), \quad (\diamond)$$

avec  $d > 0$ . Posons, pour  $\bar{n}_0 \in \overline{N}$ ,

$$\begin{aligned} F(\bar{n}_0) &= \int_{|\bar{\nu}| < 1} (f(\bar{n}_0 \bar{\nu}) - f(\bar{n}_0)) U_{\mathbf{I}(w^{-1}\bar{\nu})} \frac{d\bar{\nu}}{|\bar{\nu}|} \\ &= \int_{|\bar{\nu}| < 1} \frac{f(\bar{n}_0 \bar{\nu}) - f(\bar{n}_0)}{|\bar{\nu}|^d} U_{\mathbf{I}(w^{-1}\bar{\nu})} \frac{d\bar{\nu}}{|\bar{\nu}|^{1-d}} \end{aligned}$$

D'après  $(\diamond)$ , la quantité  $\frac{f(\bar{n}_0 \bar{\nu}) - f(\bar{n}_0)}{|\bar{\nu}|^d}$  est bornée sur le domaine d'intégration.

D'autre part, l'application

$$\bar{\nu} \longmapsto \frac{U_{\mathbf{I}(w^{-1}\bar{\nu})}}{|\bar{\nu}|^{1-d}}$$

est intégrable car  $\|U_{\mathbf{I}(w^{-1}\bar{\nu})}\|_{\mathcal{M}(C^*(L))} = 1$ . Il s'ensuit que  $F(\bar{n}_0)$  est un multiplicateur de  $C^*(L)$  et le produit scalaire à évaluer s'écrit

$$\langle \mathcal{I}_w^0(f \otimes \varphi), \mathcal{I}_w^0(f \otimes \varphi) \rangle = \varphi^* \int_{\overline{N}} F(\bar{n}_0)^* F(\bar{n}_0) d\bar{n}_0 \varphi.$$

L'inégalité  $F(\bar{n}_0)^*F(\bar{n}_0) \leq \|F(\bar{n}_0)\|^2$  montre qu'il suffit de démontrer que l'application  $\bar{n}_0 \mapsto \|F(\bar{n}_0)\|^2$  est de carré sommable. Le support de la fonction  $F$  est compact car le support de  $f$  et l'adhérence du domaine d'intégration le sont. Elle est en outre bornée. En effet, l'inégalité des accroissements finis montre que la constante dominante  $\left| \frac{f(\bar{n}_0\bar{\nu}) - f(\bar{n}_0)}{|\bar{\nu}|^d} \right|$  est uniforme en  $\bar{n}_0$  sur le support de  $F$  car  $f$  est de classe  $C^1$  et  $\bar{\nu}$  varie dans un compact. Cette fonction est donc de carré sommable et il vient

$$\langle \mathcal{I}_w^0(f \otimes \varphi), \mathcal{I}_w^0(f \otimes \varphi) \rangle \leq \varphi^* \varphi \int_{\bar{N}} \|F(\bar{n}_0)\|^2 d\bar{n}_0,$$

d'où le résultat.  $\square$

### 4.4.3 Partie résiduelle

Le dernier terme dans la décomposition de l'opérateur standard  $\mathcal{I}_w$  agit par définition uniquement sur  $C_c(L)$ . Il est responsable de la transformation des supports compacts en parties non compactes de  $L$ . La proposition suivante fait apparaître  $\mathcal{R}_w$  comme un opérateur de convolution par une certaine distribution.

**Proposition 4.4.6** *Soit  $T_{\bar{\nu}}$  la distribution définie sur  $L$  par*

$$T_{\bar{\nu}}(\lambda) = \delta_1(c_{w^{-1}}(\mathbf{l}(w^{-1}\bar{\nu})^{-1})\lambda).$$

Alors l'intégrale

$$T = \int_{|\bar{\nu}| < 1} T_{\bar{\nu}} \frac{d\bar{\nu}}{|\bar{\nu}|}$$

définit une mesure de Radon sur  $L$ . De plus, l'opérateur  $\mathcal{R}_w$  est donné par  $T$  sur  $L^2(\bar{N}) \otimes C_c(L)$  au sens où l'on a, pour  $f \otimes \varphi$  dans cet espace,

$$\mathcal{R}_w(f \otimes \varphi) = f \otimes (T * \varphi^w).$$

— *Démonstration.*

Soit  $\varphi = \varphi_M \otimes \varphi_A \in C_c^\infty(M) \otimes C_c^\infty(A)$ . Par définition de  $T_{\bar{\nu}}$ ,

$$\begin{aligned} T_{\bar{\nu}}(\varphi) &= \varphi_M(c_w(\mathbf{m}(w^{-1}\bar{\nu}))) \varphi_A(c_w(\mathbf{a}(w^{-1}\bar{\nu}))) \\ &= \varphi_M(c_w(\mathbf{m}(w^{-1}\bar{\nu}))) \varphi_A(\mathbf{a}(w^{-1}\bar{\nu})^{-1}) \end{aligned}$$

La Proposition 4.1.1 montre que le premier facteur est  $\alpha$ -homogène de degré 0, cependant que le second ne dépend que de  $|\bar{\nu}|$ , d'après la définition même de la

fonction norme. Plus précisément,  $\varphi_A(\mathbf{a}(w^{-1}\bar{\nu})^{-1}) = \varphi_A(|\bar{\nu}|^c)$  où  $c$  est une constante positive dépendant de l'identification entre choisie entre  $\mathbf{a}$  et  $\mathbb{R}$ .

La Proposition 4.1.8 s'applique donc, et il vient

$$T(\varphi) = C.M_w(\varphi_M) \int_0^{+\infty} \varphi_A(r) \frac{dr}{r}$$

où  $C$  est une constante et  $M_w(\varphi_M)$  désigne la valeur moyenne associée par  $M$  à la fonction  $\bar{\nu} \mapsto \varphi_M(c_w(\mathbf{m}(w^{-1}\bar{\nu})))$ . Cette valeur moyenne définit bien une mesure de Radon sur  $M$ . En effet, si  $\psi$  est une fonction continue à support compact sur  $\mathbb{R}_+^*$  telle que l'on ait

$$\int_0^{+\infty} \psi(r) dr = 1,$$

la Proposition 4.1.8 implique que

$$\begin{aligned} M_w(\varphi_M) &= \int_{\bar{N}} \varphi_M(c_w(\mathbf{m}(w^{-1}\bar{\nu}))) \psi(|\bar{\nu}|) d\bar{\nu} \\ &\leq \|\psi\|_\infty \int_{\text{Supp}(\psi)} \varphi_M(c_w(\mathbf{m}(w^{-1}\bar{\nu}))) d\bar{\nu} \end{aligned}$$

d'où

$$|M_w(\varphi_M)| \leq C' \cdot \|\varphi_M\|_\infty$$

où  $C'$  est une constante positive. La distribution  $T$  agit sur  $\varphi_A$  comme la mesure de Haar, d'où le résultat.  $\square$

Nous calculerons explicitement la distribution  $T$  dans les cas particuliers de  $SL_2(\mathbb{R})$  et  $SL_2(\mathbb{C})$  au Chapitre 5. Il apparaît déjà que cette mesure est en général supportée par la sous-variété de  $L$  déterminée par l'image de  $\bar{N} \setminus \{1\}$  sous l'application

$$\bar{n} \mapsto \mathbf{l}(w^{-1}\bar{n}).$$

**Remarque 4.4** La partie résiduelle  $\mathcal{R}_w$  de l'opérateur  $\mathcal{I}_w$  agit trivialement sur  $L^2(\bar{N})$  et comme une mesure de Radon sur  $M$ . La singularité est donc concentrée dans l'action sur  $C_c(A)$ , que l'on peut identifier en rang 1 à  $C_c(\mathbb{R})$ . Sur cette partie,  $T$  agit comme la convolution par la fonction indicatrice  $\chi_{[0,+\infty[}$ . Cette convolution est un opérateur  $C_c(\mathbb{R}) \rightarrow C(\mathbb{R})$  qui ne prend pas ses valeurs dans  $C^*(A)$  et ne peut donc pas même définir un opérateur densément défini. Sous l'identification, par la transformée de Fourier, de  $C^*(A)$  à  $C_0(\mathbb{R})$ , cette convolution consiste en la multiplication par une distribution combinaison de la mesure de Dirac en 0 et de la valeur principale de  $\frac{1}{x}$  et n'est donc pas un multiplicateur, même non borné, de  $C_0(\mathbb{R})$ . Cette distribution peut encore être obtenue comme prolongement méromorphe, qui présente les mêmes pôles que les opérateurs obtenus par Knapp et Stein.

#### 4.4.4 Démonstration de l'existence dans les autres modèles

On établit à présent les théorèmes 4.3.1 et 4.3.2 énoncés plus haut, qui affirment que l'opérateur d'entrelacement standard  $I_w$ , donné dans le modèle initial et le modèle induit par la même formule intégrale

$$I_w F(x) = \int_{\overline{N}} F(xw\bar{n}) d\bar{n}$$

est bien défini pour  $F \in C_c(G/N) \subset \mathcal{E}(G/N)$  et  $F \in \mathcal{E}_i^0$ .

Soit  $F$  une fonction à support compact sur  $G/N$ . Le groupe  $G$  étant de rang réel 1, la décomposition de Bruhat  $G = PwP \sqcup P$  permet d'écrire  $G$  comme la réunion

$$\overline{N}P \sqcup w^{-1}P,$$

le second terme étant de dimension inférieure et donc de mesure nulle. On note  $p$  la projection

$$\begin{array}{c} G/N \\ \downarrow \\ G/P. \end{array}$$

Supposons d'abord que le support de  $F$  se projette sur une partie de  $G/P$  ne contenant pas la classe  $[w^{-1}] = [w]$  de  $w^{-1}$ . La fonction  $F$  est donc supportée par un compact de  $\overline{N} \times L$  et peut alors être vue comme une fonction sur  $\overline{N}$  à valeurs dans  $C_c(L)$ . L'expression de l'opérateur appliqué à  $F$  est alors identique à celle obtenue dans le modèle ouvert :

$$I_w F(\bar{n}_0) = \int_{\overline{N}} U_{U(w^{-1}\bar{n})} F(\bar{n}_0\bar{n}) \frac{d\bar{n}}{|\bar{n}|},$$

à la séparation des variables près. On remarque en outre que cette expression coïncide avec la restriction à  $\overline{N}$  de celle calculée au Paragraphe 4.3.1 dans le modèle induit : cela procède de ce que l'on considère  $F$  comme une fonction de  $\overline{N}$  dans  $C_c(L)$ .

La démonstration de la Proposition 4.4.1 s'applique alors en considérant, au lieu des deux constituants d'un tenseur élémentaire, les applications partielles obtenues en fixant la composante suivant  $\overline{N}$  et celle suivant  $L$ , et établit la convergence de l'intégrale définissant  $I_w F$ .

Traitons à présent le cas général : soit  $u$  une fonction continue à support compact sur  $G/P$ , valant 1 sur un voisinage de  $[w]$  et nulle au voisinage de  $[1]$ , de sorte que  $(u, 1-u)$  soit une partition de l'unité. On peut alors relever cette partition sur  $G/N$  via  $p$  et décomposer  $F$  en

$$F = p^* u F + p^*(1-u)F.$$

Le cas de  $p^*(1-u)F$  relève de la remarque précédente. Considérons enfin  $p^*uF$  : la composée de cette application avec la translation  $L(w)$  à gauche par  $w$ , vérifie la même condition de support que  $p^*(1-u)F$ . On peut donc, d'après ce qui précède, appliquer  $I_w$  à  $L(w)p^*(1-u)F$ . Or, on a vu que  $I_w$  commute à l'action à gauche de  $G$ , donc  $I_w$  s'applique bien au second terme de la somme, et finalement à  $F$ .

Le Théorème 4.3.2 se démontre de la même manière ou se déduit de ce qui précède en composant  $I_w$  par l'application  $F \mapsto \tilde{F}$  de la Proposition 3.3.2 qui réalise l'équivalence entre le modèle induit de  $\mathcal{E}(G/N)$  et le modèle de la construction initiale.

## 4.5 Comparaison avec les opérateurs de Knapp et Stein

L'idée originale des intégrales d'entrelacement, telles qu'elle sont présentées dans [KS71] et [KS80] consiste à obtenir des fonctions  $N_2$ -invariantes à partir de fonctions  $N_1$ -invariantes en moyennant sur  $N_2/(N_1 \cap N_2)$ . Le travail accompli dans [Sch71] montre que l'on peut se ramener au cas des groupes de rang 1 et aux opérateurs d'entrelacement standard, donnés par l'intégrale

$$\int_{\overline{N}} F(xw\bar{n}) d\bar{n},$$

où  $\overline{N}$  désigne l'image de  $N$  par l'involution de Cartan.

### 4.5.1 Domaine de définition

Dans la théorie classique, on essaie d'appliquer, pour un couple  $(\sigma, \nu)$  fixé, les intégrales d'entrelacement à des sections du fibré

$$\begin{array}{c} G/N \times_{\sigma, \nu} \mathcal{H}_\sigma \\ \downarrow \\ G/P \end{array}$$

Les intégrales considérées sont alors données par des noyaux qui ne sont pas localement intégrables, et nécessitent alors d'être définies par prolongement méromorphe.

Au contraire, l'approche globale au niveau du  $C^*$ -module  $\mathcal{E}(G/N)$  permet de considérer des fonctions à support compact sur  $G/N$ , pour lesquelles le Théorème 4.3.1 montre que l'intégrale est convergente.

### 4.5.2 Normalisation des opérateurs d'entrelacement : principe

Comme on l'a vu au Paragraphe 2.4.3, il est possible de construire des fonctions scalaires  $\gamma$  destinées à compenser les singularités des opérateurs obtenus par prolongement méromorphe, afin de rendre ces derniers unitaires. Ces fonctions sont obtenues à partir des fonctions  $\eta$ , elles-mêmes fournies par l'application du lemme de Schur aux représentations de la série principale dont le théorème de Bruhat montre l'irréductibilité.

Les opérateurs d'entrelacement construits au niveau de  $C_c(G/N)$  ne se composant pas en raison des problèmes de support décrits plus haut, il n'est pas possible *a priori* de construire l'analogie des fonctions  $\eta$  pour définir des opérateurs normalisés, c'est-à-dire des unitaires  $C^*(L)$ -linéaires et  $C^*(G)$ -invariants définis au niveau de  $\mathcal{E}(G/N)$ . En reprenant et en simplifiant les notations du Paragraphe 2.4.3, il apparaît donc difficile de fournir un analogue à la relation  $I^*I = \eta$ , ou à la définition  $\mathcal{I} = \frac{1}{\gamma}I$ . En revanche, l'expression

$$\mathcal{I}^*I = \gamma$$

invite à tenter de définir un unitaire  $\mathcal{U}^w$  de  $\mathcal{E}(G/N)$  au niveau de  $C_c(G/N)$  tel que la composée

$$\mathcal{I}_w \circ \mathcal{U}^w$$

soit définie sur  $C_c(G/N)$  et se comporte comme un scalaire, dans le sens où elle n'agisse que sur  $C^*(L)$ .

Le but de la construction de tels opérateurs normalisés est de décrire l'action du groupe de Weyl intervenant dans la formule (†) de Wassermann, citée dans l'introduction et permettant d'analyser la  $C^*$ -algèbre réduite de  $G$  en termes des classes d'association de sous-groupes paraboliques de  $G$ . On présente une telle construction au chapitre suivant, dans les cas particuliers de  $SL_2(\mathbb{R})$  et  $SL_2(\mathbb{C})$ , pour lesquels le groupe  $M$  intervenant dans la décomposition de Langlands du parabolique minimal est abélien.



# Chapitre 5

## Etude de cas particuliers : $SL_2(\mathbb{R})$ et $SL_2(\mathbb{C})$

Nous étudions ici en détail les objets présentés dans le reste de ce mémoire dans le cas de groupes de Lie semi-simples particuliers, de rang réel 1 : les groupes des matrices carrées réelles d'ordre 2, de déterminant 1, à coefficients respectivement réels et complexes, d'algèbres de Lie  $\mathfrak{sl}_2(\mathbb{R})$  et  $\mathfrak{sl}_2(\mathbb{C})$  composées des matrices carrées d'ordre 2, de trace nulle. Nous décrivons explicitement le dual réduit de ces groupes, ainsi que les opérateurs d'entrelacement de Knapp et Stein pour  $SL_2(\mathbb{R})$ . La normalisation envisagée au dernier paragraphe du chapitre précédent est présentée pour ces deux groupes, et décrite en exploitant la commutativité de la composante de Levi.

### 5.1 Structure, intégration

#### 5.1.1 Décomposition d'Iwasawa

Le groupe  $K = SO_2(\mathbb{R})$  des rotations du plan est un sous-groupe compact maximal de  $SL_2(\mathbb{R})$ . La rotation plane d'angle  $\theta \in \mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z}$  sera désignée par

$$R_\theta = \begin{bmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{bmatrix}.$$

Soit  $A$  le sous-groupe abélien de  $SL_2(\mathbb{R})$  constitué des matrices diagonales de

déterminant 1 à coefficients strictement positifs :

$$A = \left\{ \begin{bmatrix} a & 0 \\ 0 & a^{-1} \end{bmatrix}, a \in \mathbb{R}_+^* \right\} = \left\{ \begin{bmatrix} e^t & 0 \\ 0 & e^{-t} \end{bmatrix}, t \in \mathbb{R} \right\}.$$

Son algèbre de Lie  $\mathfrak{a}$  est l'algèbre des matrices réelles diagonales de trace nulle.

Enfin,  $N$  et  $\overline{N}$  désignent respectivement les sous-groupes nilpotents de  $SL_2(\mathbb{R})$  constitués des matrices triangulaires supérieures et inférieures à coefficients diagonaux égaux à 1 :

$$N = \left\{ \begin{bmatrix} 1 & x \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, x \in \mathbb{R} \right\},$$

$$\overline{N} = \left\{ \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ y & 1 \end{bmatrix}, y \in \mathbb{R} \right\}.$$

Les décompositions d'Iwasawa d'un élément  $g \in SL_2(\mathbb{R})$  suivant  $KAN$  et  $K\overline{A}\overline{N}$  seront respectivement notées  $\kappa(g)\alpha(g)\nu(g)$  et  $\overline{\kappa}(g)\overline{\alpha}(g)\overline{\nu}(g)$ . Plus précisément, on a pour  $g = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$  dans  $SL_2(\mathbb{R})$ ,

$$\kappa(g) = \frac{1}{\sqrt{a^2 + c^2}} \begin{bmatrix} a & -c \\ c & a \end{bmatrix} = R_{\text{Arctg}(\frac{c}{a})}, \quad \alpha(g) = \begin{bmatrix} \sqrt{a^2 + c^2} & 0 \\ 0 & \sqrt{a^2 + c^2}^{-1} \end{bmatrix}$$

$$\nu(g) = \begin{bmatrix} 1 & \frac{ab+cd}{a^2+c^2} \\ 0 & 1 \end{bmatrix},$$

et

$$\overline{\kappa}(g) = \frac{1}{\sqrt{b^2 + d^2}} \begin{bmatrix} d & b \\ -b & d \end{bmatrix} = R_{\text{Arctg}(\frac{-b}{d})}, \quad \overline{\alpha}(g) = \begin{bmatrix} \sqrt{b^2 + d^2}^{-1} & 0 \\ 0 & \sqrt{b^2 + d^2} \end{bmatrix}$$

$$\overline{\nu}(g) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ \frac{ab+cd}{b^2+d^2} & 1 \end{bmatrix}.$$

On commettra fréquemment l'abus de notation correspondant aux isomorphismes  $A \simeq \mathbb{R}_+^* \simeq \mathbb{R}$ ,  $N \simeq \mathbb{R}$  et  $\overline{N} \simeq \mathbb{R}$  consistant à identifier une matrice avec le coefficient qui la caractérise, par exemple

$$\begin{bmatrix} a & 0 \\ 0 & a^{-1} \end{bmatrix} := a \quad \text{ou} \quad \begin{bmatrix} e^t & 0 \\ 0 & e^{-t} \end{bmatrix} := t$$

ou encore

$$\begin{bmatrix} 1 & t \\ 0 & 1 \end{bmatrix} := t \quad \text{et} \quad \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ s & 1 \end{bmatrix} := s.$$

On aura ainsi, avec les notations ci-dessus,

$$R_{\theta.a.t} = \begin{bmatrix} a \cos \theta & at \cos \theta - \frac{\sin \theta}{a} \\ a \sin \theta & at \sin \theta + \frac{\cos \theta}{a} \end{bmatrix}$$

et

$$R_{\theta.a.s} = \begin{bmatrix} a \cos \theta - \frac{s}{a} \sin \theta & -\frac{\sin \theta}{a} \\ a \sin \theta + \frac{s}{a} \cos \theta & \frac{\cos \theta}{a} \end{bmatrix}.$$

### 5.1.2 Composante de Lévi et groupe de Weyl

Soient  $M'$  et  $M$  respectivement le normalisateur et le centralisateur de  $A$  dans  $K$ . Le groupe  $M$  est réduit à  $\{-I_2, I_2\} \simeq \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ .

On note  $L$  le produit direct  $M \times A$  et  $P$  le sous-groupe parabolique minimal  $L \ltimes N$ . Le groupe  $L$  est isomorphe au groupe multiplicatif  $\mathbb{R}^*$ , agissant sur  $N \simeq \mathbb{R}$  par

$$a.t = a^{-2}t$$

et  $P$  est le groupe des matrices triangulaires supérieures de  $SL_2(\mathbb{R})$ . Le groupe de Weyl de  $SL_2(\mathbb{R})$ ,  $W = M'/M = \mathcal{N}_K(A)/\mathcal{Z}_K(A)$ , est d'ordre deux. Un représentant dans  $\mathcal{N}_K(A)$  de l'élément non trivial de  $W$  est

$$w = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}.$$

Il vérifie  $w^2 = -I_2$  donc  $w^2 = 1$  dans  $W$  et conjugue  $N$  en  $\overline{N}$  :  $w^{-1}Nw = \overline{N}$ .

L'action de  $L \simeq \mathbb{R}^*$  sur  $\overline{N} \simeq \mathbb{R}$  est donnée par

$$a.s = a^2s.$$

Enfin, la conjugaison des éléments de  $L$  par  $w$  vérifie  $w^{-1}lw = l^{-1}$  pour  $l \in L$ . L'automorphisme de  $C^*(L)$  correspondant est donc donné par

$$\varphi^w(l) = \varphi(l^{-1})$$

pour  $\varphi \in C_c(L)$ .

### 5.1.3 Décomposition de Bruhat et Langlands, fonction norme

La décomposition de Bruhat relative à  $P$  s'écrit :

$$SL_2(\mathbb{R}) = P \sqcup PwP$$

d'où

$$\begin{aligned} w^{-1}G &= w^{-1}P \sqcup w^{-1}PwP = w^{-1}P \sqcup w^{-1}NwP \\ &= w^{-1}P \sqcup \overline{N}MAN. \end{aligned}$$

Or  $w^{-1}P = \begin{bmatrix} 0 & * \\ * & * \end{bmatrix}$  est une sous-variété de codimension 1 de  $SL_2(\mathbb{R})$ , donc l'ensemble  $G \setminus \overline{N}MAN$  est de mesure nulle dans  $SL_2(\mathbb{R})$ . Ainsi, presque tout élément de  $SL_2(\mathbb{R})$  se décompose suivant  $\overline{N}MAN$ .

Pour  $g = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$  avec  $a \neq 0$ , on note

$$g = \overline{\mathbf{n}}(g)\mathbf{m}(g)\mathbf{a}(g)n_g,$$

avec

$$\overline{\mathbf{n}}(g) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ \frac{c}{a} & 1 \end{bmatrix} = \frac{c}{a},$$

$$\mathbf{m}(g) = \begin{bmatrix} \operatorname{sgn}(a) & 0 \\ 0 & \operatorname{sgn}(a) \end{bmatrix} = \operatorname{sgn}(a),$$

$$\mathbf{a}(g) = \begin{bmatrix} |a| & 0 \\ 0 & |a|^{-1} \end{bmatrix} = |a|,$$

$$n_g = \begin{bmatrix} 1 & \frac{b}{a} \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \frac{b}{a}.$$

Cette décomposition est unique pour les éléments qui en admettent une. On notera parfois  $\mathbf{l}(g) = \mathbf{m}(g)\mathbf{a}(g)$ . D'après ce qui précède,

$$\mathbf{l}(g) = \begin{bmatrix} a & 0 \\ 0 & a^{-1} \end{bmatrix} = a.$$

Soit enfin  $\bar{\nu} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ s & 1 \end{bmatrix}$  identifié à  $s \in \mathbb{R}$ . On a alors  $w^{-1}\bar{\nu} = \begin{bmatrix} -s & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$ , d'où

$$\mathbf{a}(w^{-1}\bar{\nu}) = |s|,$$

$$\mathbf{l}(w^{-1}\bar{\nu}) = -s,$$

et la fonction norme coïncide avec la valeur absolue sur  $\mathbb{R}$ .

#### 5.1.4 Intégration

L'algèbre de Lie  $\mathfrak{a}$  de  $A$  est l'algèbre des matrices réelles diagonales de trace nulle :

$$\mathfrak{a} = \left\{ \begin{bmatrix} x & 0 \\ 0 & -x \end{bmatrix}, x \in \mathbb{R} \right\}.$$

On choisit un ordre sur les racines restreintes, si bien que la demi-somme des racines positives est la forme linéaire  $\rho : \mathfrak{a} \rightarrow \mathbb{R}$  définie par

$$\rho\left(\begin{bmatrix} x & 0 \\ 0 & -x \end{bmatrix}\right) = x.$$

Ainsi, pour  $a \in A$  identifié à son coefficient de la première ligne et de la première colonne, le réel  $e^{\rho \log(a)}$  est exactement  $a$ . Par conséquent, en notant  $d\lambda$  des mesures de Lebesgue sur la droite réelle, le cercle  $\mathbb{S}^1$  ou leurs restrictions à des ouverts, la décomposition de la mesure de Haar de  $SL_2(\mathbb{R})$ ,

$$d(kan) = e^{2\rho \log(a)} dk da dn$$

relative à la décomposition d'Iwasawa s'écrit à une constante près :

$$\int_{SL_2(\mathbb{R})} f(g) dg = \int_{\mathbb{S}^1} \int_0^{+\infty} \int_{\mathbb{R}} f(\theta, a, t) d\lambda(\theta) a d\lambda(a) d\lambda(t)$$

pour toute fonction  $f$  mesurable sur  $SL_2(\mathbb{R})$ .

Comme  $SL_2(\mathbb{R})$  est semi-simple, il est unimodulaire : la mesure de Haar à gauche est également invariante à droite. Il n'en va pas de même pour le sous-groupe parabolique  $P$  : la composante de Lévi  $L = M \times A$  est un groupe réductif donc unimodulaire mais le produit semi-direct  $L \ltimes N$  ne l'est pas. La décomposition de la mesure de Haar de  $P$  relative à sa décomposition de Langlands est

$$d(man) = dm da dn,$$

et la fonction modulaire associée est

$$\Delta_P(man) = e^{-2\rho \log(a)} = a^{-2}.$$

### 5.1.5 Transformée de Fourier : notations et rappels

On fixe ici les notations pour la transformée de Fourier sur  $\mathbb{R}^n$ . Les références utilisées sont les ouvrages [SW71] et [SS03], ainsi que [RS72] et [RS75]. Soit enfin  $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_n) \in \mathbb{N}^n$  un multi-indice.

Alors,

- si  $f$  est une fonction sur  $\mathbb{R}^n$ , on note  $\tilde{f}$  la fonction  $x \mapsto f(2\pi x)$
- on note  $|\alpha|$  la *longueur* de  $\alpha$ , définie par  $|\alpha| = \alpha_1 + \dots + \alpha_n$
- pour  $x = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$ , on note  $x^\alpha = x_1^{\alpha_1} \dots x_n^{\alpha_n}$
- on définit de même  $P(x)$  pour  $P \in \mathbb{R}[X_1, \dots, X_n]$
- l'opérateur différentiel  $D_\alpha$  est défini par

$$D_\alpha = \left( \frac{\partial}{\partial x_1} \right)^{\alpha_1} \cdots \left( \frac{\partial}{\partial x_n} \right)^{\alpha_n} = \frac{\partial^{|\alpha|}}{\partial x_1^{\alpha_1} \dots \partial x_n^{\alpha_n}}$$

#### Définition 5.1.1 [Espace de Schwartz]

On appelle *espace de Schwartz* sur  $\mathbb{R}^n$  l'ensemble  $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$  des fonctions de classe  $C^\infty$  à décroissance rapide, *id est* telles que

$$\sup_{x \in \mathbb{R}^n} |x^\alpha D_\beta f(x)| < \infty$$

pour tous multi-indices  $\alpha$  et  $\beta$ .

On rappelle enfin qu'une *distribution tempérée* sur  $\mathbb{R}^n$  est une forme linéaire continue sur  $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$  et que l'espace de ces fonctionnelles est noté  $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$ .

### Définitions et propriétés élémentaires

Soit  $f$  dans  $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ . La transformée de Fourier de  $f$  est la fonction, notée  $\hat{f}$  et définie, pour  $\xi \in \mathbb{R}^n$  par

$$\hat{f}(\xi) = \int_{\mathbb{R}^d} f(x) e^{-2i\pi x \cdot \xi} dx.$$

L'application  $\mathcal{F} : f \mapsto \hat{f}$  est une bijection de  $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ , dont la réciproque est donnée par  $f \mapsto \check{f}$ , où

$$\check{f}(x) = \int_{\mathbb{R}^d} f(\xi) e^{2i\pi x \cdot \xi} d\xi,$$

et s'étend, grâce à la formule de Plancherel, en une isométrie de  $L^2(\mathbb{R}^n)$ .

**Notation** : il sera parfois plus lisible de noter  $\check{f} = \mathcal{F}^*(f)$ .

La transformée de Fourier possède la propriété d'envoyer les produits de convolution sur des produits ponctuels :

$$\widehat{f * g}(\xi) = \hat{f}(\xi) \hat{g}(\xi),$$

pour  $f, g \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$  et  $\xi \in \mathbb{R}^n$ . L'opérateur  $\mathcal{F}$  s'étend aux distributions tempérées en posant

$$\hat{T}(\varphi) = T(\hat{\varphi})$$

pour  $T \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$  et  $\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ .

### Multiplicateurs de Fourier

Soit  $A$  un opérateur linéaire défini sur une classe de fonctions sur  $\mathbb{R}^n$  contenant  $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ , par exemple  $L^p(\mathbb{R}^n)$ . Supposons qu'il existe une distribution tempérée  $T$  telle que l'on ait

$$Af = T * f$$

pour toute fonction  $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ . Le cas échéant, on a

$$\widehat{Af} = \hat{T} \hat{f},$$

et la distribution tempérée  $\hat{T}$  est appelée *multiplicateur associé* à  $A$ . Par exemple, si  $A$  est un opérateur borné de  $L^2(\mathbb{R}^n)$  dans lui-même qui commute aux translations,

alors  $A$  agit sur  $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$  comme la convolution par une certaine distribution  $T_A$  et le multiplicateur associé  $\widehat{T_A}$  est une fonction mesurable bornée.

Pour les opérateurs différentiels, on se ramène au cas des dérivées partielles. On montre ainsi que le multiplicateur associé à  $\frac{\partial}{\partial x_i}$  est l'application  $\xi \mapsto 2i\pi\xi_i$ . Il s'ensuit que si  $D$  est l'opérateur différentiel associé au polynôme  $P \in \mathbb{R}[X_1, \dots, X_n]$ , le multiplicateur associé à  $D$  est  $\tilde{P}(i\cdot)$ , c'est-à-dire

$$\xi \mapsto P(2i\pi\xi).$$

Plus généralement, on définit à l'aide des multiplicateurs les images du gradient par calcul fonctionnel borné :

**Définition 5.1.2 [Calcul fonctionnel pour  $-i\nabla$ ]**

Soient  $u \in L^\infty(\mathbb{R}^n)$  et  $f \in L^2(\mathbb{R}^n)$ . On pose

$$u(-i\nabla)f = \mathcal{F}^*(\tilde{u}f).$$

La proposition ci-dessous permet, moyennant certaines conditions sur  $u$ , d'exprimer  $u(-i\nabla)$  comme une convolution.

**Proposition 5.1.3** *Soient  $u \in L^\infty(\mathbb{R}^n)$  et  $f \in L^2(\mathbb{R}^n)$ . Si en outre  $u \in L^2(\mathbb{R}^n)$  ou  $\tilde{u} \in L^1(\mathbb{R}^n)$ , alors*

$$u(-i\nabla)f(x) = \int_{\mathbb{R}^n} \tilde{u}(x-y)f(y) dy$$

*l'intégrale étant convergente pour tout  $x$  dans le premier cas et pour presque tout  $x$  dans le second.*

### Puissances du Laplacien

On désigne par  $\Delta$  le Laplacien habituel sur  $\mathbb{R}^n$  :

$$\Delta f = \sum_{i=1}^n \frac{\partial^2}{\partial x_i^2}.$$

On peut démontrer [RS75] que  $-\Delta$  s'étend en un opérateur auto-adjoint positif sur le domaine

$$D = \{f \in L^2(\mathbb{R}^n) \mid \Delta f \in L^2(\mathbb{R}^n) \text{ au sens des distributions}\}.$$

Soit  $a > 0$ . On pose, pour  $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$  et  $x \in \mathbb{R}^n$ ,

$$(-\Delta)^a f(x) = \int_{\mathbb{R}^n} (2\pi|\xi|)^{2a} \hat{f}(\xi) e^{2i\pi x \cdot \xi} d\xi.$$

Les considérations du paragraphe précédent au sujet des opérateurs différentiels montrent que l'opérateur ainsi défini coïncide avec le  $a$ -ième itéré de  $-\Delta$  lorsque  $a$  est un entier naturel. On vérifie également que  $(-\Delta)^a f$  est toujours de classe  $C^\infty$ , mais pas nécessairement à décroissance rapide lorsque  $a$  n'est pas entier.

L'énoncé ci-dessous précise le calcul fonctionnel mesurable pour l'opérateur  $(-\Delta)^{\frac{1}{2}}$ . Il s'agit d'une version « radiale » des opérateurs introduits au paragraphe précédent.

**Définition 5.1.4 [Calcul fonctionnel pour  $(-\Delta)^{\frac{1}{2}}$ ]**

Soient  $u \in L^\infty(\mathbb{R}_+)$  et  $f \in L^2(\mathbb{R}^n)$ . On pose

$$u((-\Delta)^{\frac{1}{2}})f = \mathcal{F}^*(\tilde{u}_r \hat{f}),$$

où  $\tilde{u}_r$  désigne la fonction  $x \mapsto u(2\pi\|x\|)$ .

Comme précédemment,  $u((-\Delta)^{\frac{1}{2}})$  est un opérateur borné bien défini sur  $L^2(\mathbb{R}^n)$ , car la multiplication par  $\tilde{u}$  est bornée.

**Transformée de Hilbert**

Il s'agit de l'opérateur de convolution par la distribution *valeur principale* de  $\frac{1}{\pi x}$  :

**Définition 5.1.5 [Transformée de Hilbert]**

Pour  $f \in C_c^\infty(\mathbb{R})$ , on pose

$$Hf(x) = \text{v.p.} \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{f(y)}{x-y} dy = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{1}{\pi} \int_{|x-y|>\varepsilon} \frac{f(y)}{x-y} dy.$$

On montre que le multiplicateur associé à cette distribution est l'application

$$\xi \mapsto -i \operatorname{sgn}(\xi).$$

## 5.2 Représentations de $SL_2(\mathbb{R})$

On décrit ci-dessous les représentations unitaires irréductibles faiblement contenues dans la représentation régulière de  $SL_2(\mathbb{R})$ , ainsi que les équivalences unitaires entre elles, et donc leurs classes dans l'espace dual  $\widehat{SL_2(\mathbb{R})}$ .

### 5.2.1 Série discrète

Dans ce qui suit,  $\mathbb{H}$  désigne le demi-plan de Poincaré, c'est-à-dire l'ensemble des nombres complexes de partie imaginaire strictement positive. Soit  $n \geq 2$  un entier. On considère l'espace des fonctions  $f$  analytiques sur  $\mathbb{H}$  et telles que

$$\|f\|^2 = \int \int_{\mathbb{H}} |f(z)|^2 y^{n-2} dx dy < +\infty,$$

où  $z = x + iy$ . Cet espace n'est pas réduit à 0 : il contient en particulier la fonction  $\xi_n : z \mapsto \frac{1}{(z+i)^n}$  et la formule ci-dessus définit une norme qui en fait un espace de Hilbert sur lequel  $SL_2(\mathbb{R})$  agit par

$$\mathcal{D}_n^+ \left( \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \right) f(z) = \frac{1}{(-bz + d)^n} f\left(\frac{az - c}{-bz + d}\right).$$

Pour  $n \geq 2$ , les représentations  $\mathcal{D}_n^+$  sont unitaires et irréductibles. D'autre part, ces représentations sont de carré intégrable : le coefficient

$$g \mapsto \langle \mathcal{D}_n^+(g)\xi_n, \xi_n \rangle$$

est un élément de  $L^2(G)$ . D'après [Dix61] tous les coefficients de  $\mathcal{D}_n^+$  sont de carré intégrable et les classes d'équivalence de ces représentations sont des points isolés du dual réduit  $\widehat{SL_2(\mathbb{R})}_r$ .

On définit de même une famille de représentations  $(\mathcal{D}_n^-)_{n \geq 2}$  en conjuguant l'action précédente. Cette famille vérifie les mêmes propriétés que  $(\mathcal{D}_n^+)_{n \geq 2}$ .

### 5.2.2 Série principale

Il s'agit des représentations induites à partir de représentations unitaires irréductibles de dimension finie de  $P = MAN \simeq (\mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \times \mathbb{R}_+^*) \ltimes \mathbb{R}$ . Une telle représentation de  $P$  est nécessairement de la forme  $\sigma \otimes e^{i\nu} \otimes 1$  où  $\sigma \in \{\mathbf{1}, \varepsilon\}$ ,  $\varepsilon$  désignant le caractère non trivial de  $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$  et  $\nu$  est une forme linéaire sur l'algèbre de Lie de  $\mathbb{R}_+^*$ , identifiée à  $\mathbb{R}$ , de sorte que  $i\nu$  est un nombre imaginaire pur.

On note respectivement

$$\mathcal{P}_{i\nu}^+ = \text{Ind}_P^{SL_2(\mathbb{R})} \mathbf{1} \otimes e^{i\nu} \otimes \mathbf{1} \quad \text{et} \quad \mathcal{P}_{i\nu}^- = \text{Ind}_P^{SL_2(\mathbb{R})} \varepsilon \otimes e^{i\nu} \otimes \mathbf{1}.$$

Ces représentations agissent toutes sur l'espace de Hilbert  $L^2(\mathbb{R})$ , par

$$\mathcal{P}_{i\nu}^+ \left( \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \right) f(x) = \frac{1}{(-bx + d)^{1+i\nu}} f\left(\frac{ax - c}{-bx + d}\right)$$

et

$$\mathcal{P}_{i\nu}^- \left( \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \right) f(x) = \frac{\text{sgn}(-bx + d)}{(-bx + d)^{1+i\nu}} f\left(\frac{ax - c}{-bx + d}\right).$$

On dispose donc ainsi d'une famille de représentations unitaires de  $SL_2(\mathbb{R})$ , indexée par  $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ . On montre en utilisant l'analyse de Fourier, ou les travaux généraux de Bruhat, Knapp et Stein présentés au Chapitre 2, que ces représentations sont irréductibles, à l'exception de  $\mathcal{P}_0^-$ . On décrira aux paragraphes suivants les éléments de  $\widehat{SL_2(\mathbb{R})}$  associés à ces représentations, c'est-à-dire leurs classes d'équivalence unitaire.

### 5.2.3 Série complémentaire

La construction précédente est encore possible en remplaçant  $i\nu$  par un nombre complexe quelconque  $u + i\nu$ , mais fournit des représentations non unitaires lorsque  $u \neq 0$ . On montre cependant que ces représentations peuvent être unitarisées lorsque  $0 < u < 1$ . Les représentations ainsi obtenues constituent la *série complémentaire* de  $SL_2(\mathbb{R})$ . Ces représentations ne sont pas faiblement contenues dans la régulière et n'apparaissent donc pas dans le dual réduit.

### 5.2.4 Limites de la série discrète

Comme au Paragraphe 5.2.1,  $\mathbb{H}$  désigne le demi-plan de Poincaré. On considère l'espace des fonctions  $f$  analytiques sur  $\mathbb{H}$  et telles que

$$\|f\|^2 = \sup_{x+iy \in \mathbb{H}} \int_{-\infty}^{+\infty} |f(x+iy)|^2 dx < +\infty.$$

L'espace de la représentation  $\mathcal{D}_1^+$  est le complété obtenu pour cette norme, sur lequel  $SL_2(\mathbb{R})$  agit par

$$\mathcal{D}_1^+ \left( \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \right) f(z) = \frac{1}{-bz + d} f\left(\frac{az - c}{-bz + d}\right).$$

On définit de manière analogue une représentation  $\mathcal{D}_-^1$  sur le même espace. Ces représentations sont irréductibles et faiblement contenues dans la régulière, mais leurs coefficients ne sont pas de carré intégrable comme les éléments de la série discrète indexés par  $n \geq 2$ .

On peut montrer que

$$\mathcal{P}_0^- \simeq \mathcal{D}_1^+ \oplus \mathcal{D}_1^-,$$

ce qui constitue un cas particulier de l'égalité de Schmid [Sch75, Sch77].

### 5.2.5 Opérateurs d'entrelacement

Les notations sont celles du Paragraphe 5.2.2. Les équivalences entre représentations de la série principale de  $SL_2(\mathbb{R})$ , interprétées dans le modèle ouvert sont données par les intégrales suivantes :

$$I_{iv}^+ f(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x-y) \frac{1}{|y|^{1-iv}} dy$$

et

$$I_{iv}^- f(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x-y) \frac{\operatorname{sgn}(y)}{|y|^{1-iv}} dy$$

où  $f \in L^2(\mathbb{R})$ . Il s'agit des intégrales définissant les opérateurs standard : formellement, elles entrelacent respectivement  $\mathcal{P}_{iv}^+$  avec  $\mathcal{P}_{-iv}^+$  et  $\mathcal{P}_{iv}^-$  avec  $\mathcal{P}_{-iv}^-$ . On constate cependant que les noyaux définissant ces intégrales ne sont pas localement intégrables. Ces objets ne sont donc pas bien définis par les expressions ci-dessus, mais sont obtenus par prolongement méromorphe. On fixe désormais  $\sigma = \mathbf{1}$ .

Soit  $T_z^+$  la distribution définie par

$$T_z^+(x) = |x|^{-1+z}$$

lorsque  $\operatorname{Re}(z) > 0$ . Cette expression se prolonge méromorphiquement à  $\mathbb{C}$  tout entier, avec des pôles simples aux entiers pairs négatifs. L'opérateur  $I_{iv}^+$  apparaît donc comme une convolution :

$$I_{iv}^+(f) = T_{iv}^+ * f$$

pour  $f$  dans l'espace de la représentation  $\mathcal{P}_{iv}^+$  identifié à  $L^2(\mathbb{R})$ , à valeurs dans l'espace de  $\mathcal{P}_{-iv}^+$  également identifié à  $L^2(\mathbb{R})$ .

On peut considérer, pour  $\nu \neq 0$ , la composée  $I_{-i\nu}^+ I_{i\nu}^+$  qui entrelace  $\mathcal{P}_{i\nu}^+$  avec elle-même. Le Théorème 2.4.1 de Bruhat assurant que cette représentation est irréductible, il s'ensuit que

$$I_{-i\nu}^+ I_{i\nu}^+ = \eta_+(i\nu),$$

où  $\eta_+$  est une fonction à valeurs scalaires.

L'étude des zéros et des pôles de cette fonction et de son analogue  $\eta_-$  pour le cas  $\sigma = \varepsilon$  permet de déterminer la réductibilité des représentations de la série principale induites de  $(\sigma, 0)$ . Ces fonctions sont en outre liées à la formule de Plancherel : l'inverse de  $\eta_\sigma$  est un multiple de la densité associée à  $\sigma$  figurant dans la mesure de Plancherel.

### Normalisation

La méthode permettant de ramener l'étude de la réductibilité de certaines représentations à celle de la fonction  $\eta_\pm$  consiste à normaliser les opérateurs d'entrelacement. Comme on l'a vu au Paragraphe 2.4.2, il s'agit de construire une fonction  $\gamma_\pm$  liée à  $\eta_\pm$  par la relation

$$\eta_\pm(z) = \gamma_\pm(z) \overline{\gamma_\pm(-\bar{z})}.$$

On vérifie alors que l'opérateur

$$\frac{1}{\gamma_\pm(z)} I_z^\pm$$

est unitaire pour  $z$  imaginaire pur et fournit l'équivalence unitaire attendue entre  $\mathcal{P}_{i\nu}^\pm$  et  $\mathcal{P}_{-i\nu}^\pm$ , lorsque  $\nu \neq 0$ .

**Remarque 5.1** L'opérateur  $I_z^\pm$  correspond à celui noté  $\mathcal{S}_{P,w}^{\sigma,\nu}$  au Paragraphe 2.4.2 avec  $\nu = z\rho$  et  $\sigma$  désigné par l'indice  $\pm$  selon qu'il s'agit ou non du caractère trivial de  $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ .

Lorsque  $\nu = 0$ , on montre par l'absurde que si  $\eta_\pm$  admet un pôle en 0, alors  $\mathcal{P}_0^\pm$  est irréductible. D'autre part, si  $\eta_\pm$  n'admet ni pôle ni zéro pour  $z = 0$  il en va de même pour  $\gamma_\pm$  et l'opérateur normalisé est un multiple de  $I_0^\pm$ . Ce dernier n'étant pas scalaire, la représentation  $\mathcal{P}_0^\pm$  est réductible. Enfin,  $\eta_\pm$  ne saurait s'annuler en 0. En effet, cela impliquerait que  $I_z^{\pm*} I_z^\pm$  et donc  $I_z^\pm$  s'annulent également en 0, et donc que  $I_0^\pm$  soit scalaire.

Il reste donc à calculer les fonctions  $\eta_+$  et  $\eta_-$  intervenant. Il est possible de les déduire de la formule de Plancherel, ou de déterminer directement les facteurs de normalisation  $\gamma_+$  et  $\gamma_-$ . En effet, l'opérateur  $I_z^\pm$  étant donné par la convolution par la distribution  $T_z^\pm$ , on peut déterminer le multiplicateur associé.

En l'occurrence,

$$\widehat{T}_z^+(\xi) = 2 \cos\left(\frac{\pi z}{2}\right) \Gamma(z) |\xi|^{-z} = \sqrt{\pi} 2^z \frac{\Gamma\left(\frac{z}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{1-z}{2}\right)} |\xi|^{-z}$$

et

$$\widehat{T}_z^-(\xi) = 2i \sin\left(\frac{\pi z}{2}\right) \Gamma(z) \operatorname{sgn}(\xi) |\xi|^{-z}.$$

Il s'ensuit que l'on normalise les opérateurs  $I_z^+$  et  $I_z^-$  en posant

$$\gamma_+(z) = \cos\left(\frac{\pi z}{2}\right) \Gamma(z) \quad \text{et} \quad \gamma_-(z) = \sin\left(\frac{\pi z}{2}\right) \Gamma(z).$$

Les expressions des fonctions  $\eta_{\pm}$  associées s'en déduisent à une constante multiplicative près :

$$\eta_+(z) = \left( \cos\left(\frac{\pi z}{2}\right)^2 \Gamma(z) \Gamma(-z) \right).$$

Or la fonction  $\Gamma$  vérifie les relations suivantes

$$\Gamma(z) \Gamma(1-z) = \frac{\pi}{\sin(\pi z)} \quad \text{et} \quad \Gamma(z+1) = z \Gamma(z).$$

Il vient donc :

$$\eta_+(z) = \frac{\pi}{z \tan\left(\frac{\pi z}{2}\right)}.$$

On montre de même que

$$\eta_-(z) = \frac{\pi z}{\tan\left(\frac{\pi z}{2}\right)}.$$

Il apparaît donc que  $\eta_+$  a un pôle double en 0. En revanche,  $\eta_-$  n'y admet ni pôle ni zéro. L'analyse présentée plus haut montre que  $\mathcal{P}_0^+$  est irréductible, au contraire de  $\mathcal{P}_0^-$ , qui se décompose en somme directe des limites de la série discrète.

Du point de vue de la topologie, ce phénomène se traduit par le fait que le dual de  $SL_2(\mathbb{R})$  n'est pas séparé. En effet, les limites suivantes ont lieu pour la topologie de Fell :

$$\lim_{\nu \rightarrow 0} \mathcal{P}_{i\nu}^- = \mathcal{D}_1^+ \quad \text{et} \quad \lim_{\nu \rightarrow 0} \mathcal{P}_{i\nu}^- = \mathcal{D}_1^-.$$

Les limites de la série discrètes n'étant pas unitairement équivalentes, il s'ensuit que  $\widehat{SL_2(\mathbb{R})}$  n'est pas un  $T_2$ -espace. Notons que ce genre de phénomène ne se produit pas dans le cas des groupes complexes. Le topologie du dual réduit des groupes considérés ici fut décrite par Lipsman dans [Lip70].

### 5.2.6 Dual tempéré de $SL_2(\mathbb{R})$

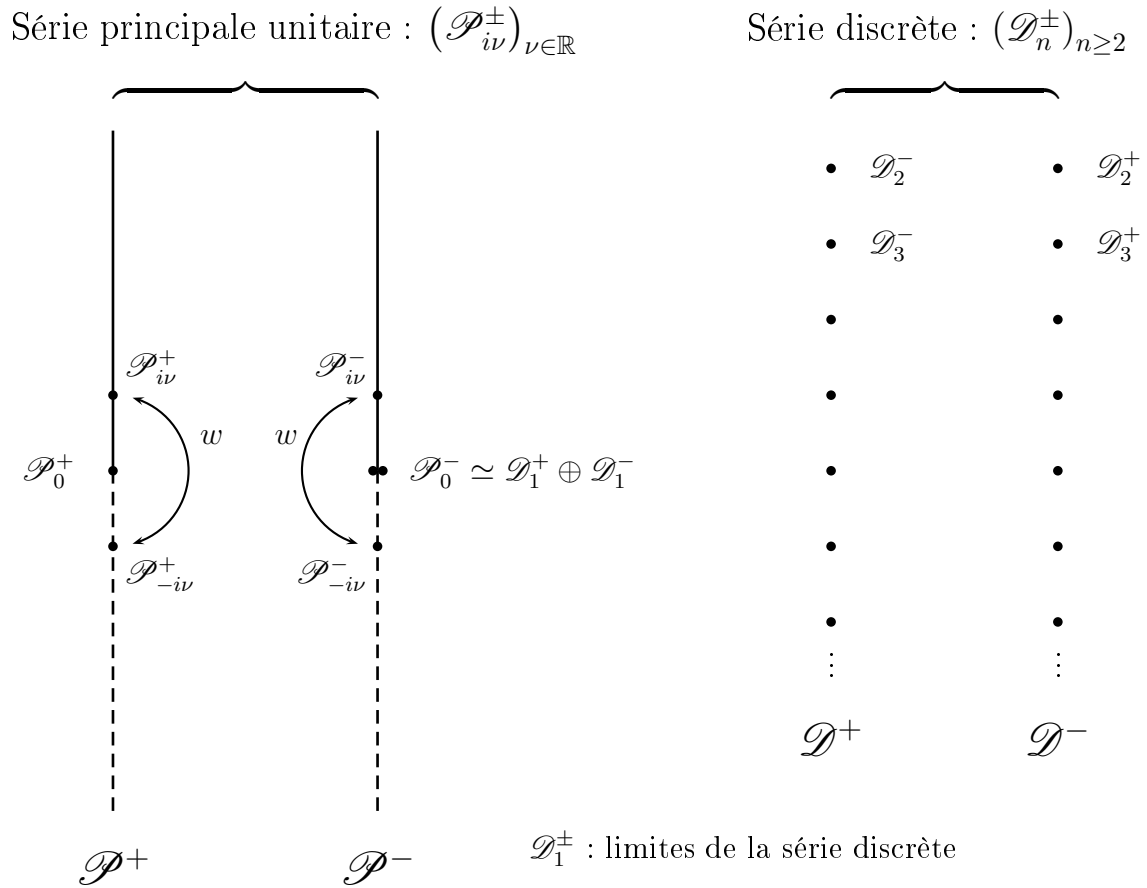


FIGURE 5.1 – Dual réduit de  $SL_2(\mathbb{R})$

### 5.3 $C^*$ -modules associés

Ce paragraphe est consacré à la description des différents modèles pour le module hilbertien  $\mathcal{E}(G/N)$  lorsque  $G = SL_2(\mathbb{R})$ . On notera  $\mathcal{E}$  ce module dans tout le reste de ce chapitre.

### 5.3.1 Fonction modulaire

D'après la décomposition d'Iwasawa, l'espace  $X = G/N$  s'identifie topologiquement au produit  $K \times A$ , *id est* à un cylindre  $\mathbb{S}^1 \times \mathbb{R}_+^*$ . La mesure  $d\mu$  considérée,

$$d\mu(ka) = e^{2\rho \log(a)} dk da$$

s'écrit alors explicitement

$$d\mu(\theta, x) = x d\lambda(\theta) d\lambda(x).$$

La fonction modulaire  $\delta_{G/N}$  associée vaut donc

$$\delta_{G/N}(ma) = a^2$$

pour  $ma \in MA$ , et le facteur de normalisation du produit scalaire est

$$\gamma_{G/N}(ma) = a.$$

On en déduit les expressions du produit scalaire et des actions de  $SL_2(\mathbb{R})$  et  $L$  à gauche et à droite respectivement : pour  $f_1, f_2 \in C_c(K \times A) = C_c(\mathbb{S}^1 \times \mathbb{R}_+^*)$  et  $l = (\varepsilon, a) \in L \simeq \{-1, 1\} \times \mathbb{R}_+^*$  :

$$\langle f_1, f_2 \rangle(\varepsilon, a) = a \int_{\mathbb{S}^1} \int_0^{+\infty} \overline{f_1(\theta, x)} f_2(\varepsilon\theta, ax) x d\lambda(\theta) d\lambda(x).$$

Enfin, l'action du multiplicateur  $U_l$  sur  $f \in C_c(\mathbb{S}^1 \times \mathbb{R}_+^*)$  est donnée par

$$f.U_l(\theta, x) = \frac{1}{a} f(\varepsilon\theta, ax).$$

### 5.3.2 Modèle ouvert

Les décompositions décrites dans les paragraphes précédents, indiquent que les matrices  $\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$  de  $SL_2(\mathbb{R})$  admettant une décomposition dans  $\overline{N}MAN$  sont celles pour lesquelles le coefficient  $a$  est non nul, *id est* dont la composante suivant  $\mathbb{S}^1$  dans la décomposition d'Iwasawa est une rotation d'angle différent de  $\pm \frac{\pi}{2}$ . L'ouvert du cylindre  $\mathbb{S}^1 \times \mathbb{R}_+^*$  correspondant s'identifie donc topologiquement à la réunion des deux demi-plans

$$\left] -\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2} \right[ \times \mathbb{R}_+^* \sqcup \left] \frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2} \right[ \times \mathbb{R}_+^*$$

que la décomposition de Langlands identifie à

$$\overline{NMA} \simeq \mathbb{R} \times \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \times \mathbb{R}_+^* \simeq \mathbb{R} \times \mathbb{R}_+^* \sqcup \mathbb{R} \times \mathbb{R}_+^*.$$

La Proposition 3.1.4 montre que  $\mathcal{E}(G/N)$  est isomorphe à  $L^2(\overline{N}) \otimes C^*(L)$ . Dans le cas de  $SL_2(\mathbb{R})$ , ce module s'identifie à

$$\boxed{\mathcal{E} \simeq L^2(\mathbb{R}) \otimes C^*(\mathbb{R}^*)}.$$

Plus précisément un sous-module dense de  $\mathcal{E}$  est constitué par les fonctions sur  $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^*$  de la forme

$$(t, x) \longmapsto \frac{1}{|x|} f(t) \varphi(x)$$

avec  $f \in L^2(\mathbb{R})$  et  $\varphi \in C_c(\mathbb{R}^*)$ .

D'autre part,  $\mathbb{R}^* \simeq \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \times \mathbb{R}_+^*$  via  $x \longmapsto (\text{sgn}(x), |x|)$  et  $C^*(\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}) \simeq \mathbb{C} \oplus \mathbb{C}$  via l'application  $f \longmapsto (\hat{f}(\mathbf{1}), \hat{f}(\varepsilon)) = (f(1) + f(-1), f(1) - f(-1))$ . On en déduit la décomposition  $C_c(\mathbb{R}^*) = C_c(\mathbb{R}_+^*) \oplus C_c(\mathbb{R}_+^*)$  correspondant à la décomposition des fonctions sur  $\mathbb{R}^*$  comme somme d'une fonction paire et d'une fonction impaire.

On considérera parfois les sous-modules suivants de  $\mathcal{E}$  :

$$\mathcal{E}_+^0 = \{f \otimes \varphi \mid f \in L^2(\mathbb{R}), \varphi \in C_c(\mathbb{R}_+^*) \text{ paire}\}$$

et

$$\mathcal{E}_-^0 = \{f \otimes \varphi \mid f \in L^2(\mathbb{R}), \varphi \in C_c(\mathbb{R}_+^*) \text{ impaire}\},$$

ou encore  $\mathcal{E}_+^0 \oplus \mathcal{E}_-^0$ , dense dans  $\mathcal{E}$ .

### 5.3.3 Le $C^*$ -module $\mathcal{E}$ comme champ continu d'espaces de Hilbert

Le cas de  $SL_2(\mathbb{R})$ , bien qu'il permette d'illustrer un certain nombre de propriétés générales des groupes de Lie semi-simples, présente une particularité simplificatrice : les sous-groupes  $K$ ,  $M$  et donc  $L$  sont abéliens. La théorie des  $C^*$ -modules hilbertiens et la caractérisation des  $C^*$ -algèbres commutatives par la transformée de Gelfand impliquent donc que  $\mathcal{E}$  peut être réalisé comme l'espace des sections continues nulles à l'infini d'un champ continu d'espaces de Hilbert sur le spectre de  $C^*(L)$ . Celui-ci consiste en la réunion de deux droites, indexées par les caractères  $\mathbf{1}$  et  $\varepsilon$  de  $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ , chacune correspondant à l'espace des formes linéaires imaginaires pures  $\nu$  sur  $\mathfrak{a} \simeq \mathbb{R}$ .

Il apparaît, dans modèle induit de  $\mathcal{E}$ , que les fibres s'identifient toutes à  $L^2(\mathbb{R})$ . D'autre part, l'action de  $SL_2(\mathbb{R})$  sur chaque fibre, notée  $L^2(\mathbb{R})_\nu$ , se fait par les opérateurs  $\mathcal{P}_{i\nu}^\sigma(g)$  présentés au Paragraphe 5.2.2.

Dans ce cadre, le résultat 4.2.1 s'interprète comme une version globale du théorème de Bruhat 2.4.1 : en effet, fibre par fibre, les entrelacements bornés se spécialisent en des opérateurs scalaires, car ils sont tous implémentés par des multiplicateurs de  $\mathcal{M}(C^*(L))$ , c'est-à-dire des fonctions bornées sur le spectre de  $C^*(L)$ . L'étude de  $\mathcal{E}$  dans le modèle ouvert, et en particulier dans ce cas commutatif, contribue donc à faire apparaître 4.2.1 comme un théorème d'irréductibilité.

De même que le théorème de Bruhat fournit seulement une condition suffisante d'irréductibilité, la formulation globale au niveau de  $\mathcal{E}$  ne permet pas de détecter la réductibilité de  $\mathcal{P}_0^-$ .

**Remarque 5.2** Une autre approche globale de la série comme fibré sur  $\widehat{L}$  est utilisée dans la description de la  $C^*$ -algèbre réduite des groupes étudiés dans [BM76], ainsi que dans [Hig07], où les fibres sont des espaces  $L^2$  sur le sous-groupe compact maximal  $K$  qui est un compactifié de  $\overline{N}$ .

## 5.4 Opérateurs d'entrelacement

### 5.4.1 Opérateur $\mathcal{I}_w$

L'expression générique de l'opérateur d'entrelacement étudié est la suivante :

$$I_w(f) = \int_{\overline{N}} f(\cdot w \overline{n}) d\overline{n},$$

où  $f$  désigne, par exemple dans les travaux de Knapp et Stein [KS71, KS80], une fonction dans l'espace d'une représentation de la série principale. Dans le but de définir un opérateur d'entrelacement sur  $\mathcal{E}$  dans le modèle ouvert, appliquons  $I_w$  à une fonction de la forme

$$(t, x) \mapsto \frac{1}{|x|} f(t) \varphi(x)$$

avec  $f \in L^2(\mathbb{R})$  et  $\varphi \in C_c(\mathbb{R})$ . Soit  $(t, x) \in \overline{N}L \simeq \mathbb{R} \rtimes \mathbb{R}^*$ , pour  $\overline{n} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ s' & 1 \end{bmatrix}$ , on a

$$txw\overline{n} = \begin{bmatrix} xs' & x \\ xts' - \frac{1}{x} & xt \end{bmatrix}.$$

D'après les formules du Paragraphe 5.1.3,

$$\overline{n}(txw\overline{n}) = t - \frac{1}{x^2 s'}$$

et

$$\mathbf{l}(txw\bar{n}) = xs'.$$

On en déduit l'expression d'un opérateur d'entrelacement dans le modèle ouvert  $L^2(\mathbb{R}) \otimes C^*(\mathbb{R}^*)$  :

$$\mathcal{I}_w(f \otimes \varphi)(t, x) = \int_{\mathbb{R}} \frac{1}{|xs'|} f\left(t - \frac{1}{x^2 s'}\right) \varphi(xs') ds'.$$

Le changement de variables  $s = t - \frac{1}{x^2 s'}$  donne enfin

$$\mathcal{I}_w(f \otimes \varphi)(t, x) = \int_{\mathbb{R}} \frac{f(s)}{|t-s|} \varphi\left(\frac{1}{x(t-s)}\right) ds.$$

**Notation** : suivant la Définition 4.4.2 on note  $C_+$  l'ensemble des fonctions continues sur  $\mathbb{R}^*$  dont le support est inclus dans une partie de la forme  $] -\infty, -A] \cup [A, +\infty[$ , avec  $A > 0$ .

**Proposition 5.4.1** Soient  $x_0 \in \mathbb{R}^*$  et  $t_0 \in \mathbb{R}$  fixés.

- i) Pour  $f \in C_c(\mathbb{R})$ , l'application  $\varphi \mapsto \mathcal{I}_w(f \otimes \varphi)(t_0 \cdot)$  envoie  $C_c(\mathbb{R}^*)$  dans  $C_+(\mathbb{R}^*)$ .
- ii) Pour  $\varphi$  dans l'espace de Schwartz  $\mathcal{S}(\mathbb{R}^*)$ , l'application

$$f \mapsto \mathcal{I}_w(f \otimes \varphi)(\cdot x_0)$$

s'étend en un opérateur borné de  $L^2(\mathbb{R})$ .

— *Démonstration.*

C'est un cas particulier de la Proposition 4.4.3. La dernière expression de l'opérateur  $\mathcal{I}_w$  le fait apparaître,  $x$  et  $\varphi$  étant fixés, comme l'opérateur de convolution par la fonction  $u \mapsto \frac{1}{|u|} \varphi\left(\frac{1}{u}\right)$ , ne contenant pas 0 dans son support.  $\square$

Explicitons enfin la partie résiduelle  $\mathcal{R}_w$  de l'opérateur d'entrelacement en calculant la distribution qui la définit. Rappelons que cette distribution a été définie à la Proposition 4.4.6 par la formule

$$T(\lambda) = \int_{|\bar{\nu}| < 1} \delta_1(c_w(\mathbf{l}(w^{-1}\bar{\nu})^{-1}) \lambda) \frac{d\bar{\nu}}{|\bar{\nu}|}.$$

**Proposition 5.4.2** Pour  $SL_2(\mathbb{R})$ , la distribution  $T$  définissant la partie résiduelle  $\mathcal{R}_w$  de l'opérateur d'entrelacement  $\mathcal{I}_w$  est la fonction indicatrice du sous-ensemble  $] -\infty, -1] \cup [1, +\infty[$ .

— *Démonstration.*

Les formules de la partie 5.1 montrent que  $T$  vérifie

$$T(\varphi) = \int_{|s|<1} \varphi\left(-\frac{1}{s}\right) \frac{ds}{|s|}$$

pour toute fonction test  $\varphi$  sur  $\mathbb{R}^*$ . Le résultat attendu s'en déduit par un changement de variables.  $\square$

On constate sur cet exemple que la distribution  $T$  reflète la singularité de l'opérateur d'entrelacement, au sens où son comportement asymptotique non décroissant fait que l'opérateur de convolution associé envoie le sous-module  $L^2(\mathbb{R}) \otimes C_c(\mathbb{R}^*)$  dans un espace qui n'est pas inclus dans le  $C^*$ -module  $\mathcal{E}$ . On peut encore décrire la distribution  $T$  dans le cas de  $SL_2(\mathbb{C})$  : un calcul similaire montre qu'elle coïncide avec l'indicatrice de  $\mathbb{C} \setminus D$  où  $D$  désigne le disque unité. Ces deux résultats précisent la Remarque 4.4, dans les cas particuliers où  $\overline{N} \simeq \mathbb{K}$  et  $\mathfrak{l}(w^{-1}\overline{N} \setminus \{1\}) = L \simeq \mathbb{K}^\times$ .

### 5.4.2 Normalisation

Bien qu'il ne soit pas à valeurs dans le  $C^*$ -module  $\mathcal{E}$ , l'opérateur  $\mathcal{I}_w$  possède la propriété de  $C^*(L)$ - $w$ -linéarité au sens où il vérifie, pour  $f \otimes \varphi \in L^2(\overline{N}) \otimes C_c(L)$ , l'égalité  $\mathcal{I}_w(f \otimes \varphi \cdot U_l) = \mathcal{I}_w(f \otimes \varphi) \cdot U_{c_w(l)}$ , en définissant, pour  $l \in \mathbb{R}^*$ , l'action à droite de  $U_l$  sur  $L^2(\mathbb{R}) \otimes C_+(\mathbb{R}^*)$  comme celle sur  $\mathcal{E}$  dans le modèle ouvert, c'est-à-dire par translation à droite.

Soit à présent  $\mathcal{I}$ , analogue  $C^*(L)$ -linéaire de  $\mathcal{I}_w$  défini par la relation

$$\mathcal{I}_w = \mathcal{I} \circ (1 \otimes c_w).$$

L'opérateur  $\mathcal{I}$  est donné par

$$\mathcal{I}(f \otimes \varphi)(t, x) = \int_{\mathbb{R}} f(t-s) \varphi(xs) \frac{ds}{|s|}$$

pour  $f \otimes \varphi \in L^2(\mathbb{R}) \otimes C_c(\mathbb{R}^*)$  et  $(t, x) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^*$ , soit encore

$$\mathcal{I} = \int_{\mathbb{R}} \lambda(s) \otimes U_{s^{-1}} \frac{ds}{|s|},$$

où  $\lambda$  désigne la représentation régulière.

Identifions le sous-espace  $C_c^\infty(\mathbb{R}) \otimes C_c(\mathbb{R}^*)$  de  $\mathcal{E}$  avec  $C_c(\mathbb{R}^*, C_c^\infty(\mathbb{R}))$ . Pour  $\varphi_1, \varphi_2$  dans  $C_c(\mathbb{R}^*, C_c^\infty(\mathbb{R}))$ , l'expression du produit scalaire à valeurs dans  $C_c(\mathbb{R}^*)$  est la suivante :

$$\langle \varphi_1, \varphi_2 \rangle(y) = \int_{\mathbb{R}^*} \langle \varphi_1(x), \varphi_2(xy) \rangle_{L^2} \frac{dx}{|x|}$$

pour tout  $y \in \mathbb{R}^*$ . On note encore  $\mathcal{I}$  l'opérateur sur cet espace.

La comparaison des multiplicateurs de Fourier montre que l'opérateur s'écrit alors

$$\mathcal{I}(\varphi)(x) = \int_{\mathbb{R}} e^{-isD} \varphi(sx) \frac{ds}{|s|}$$

où l'on note

$$D = -i \frac{d}{ds}. \quad (\dagger)$$

Introduisons à présent l'analogie des opérateurs d'entrelacement normalisés du Paragraphe 5.2.5. Soient  $f \otimes \varphi \in L^2(\mathbb{R}) \otimes C_c(\mathbb{R}^*)$ . On pose

$$U(f \otimes \varphi)(x) = \varphi(xD)f,$$

pour tout  $x \in \mathbb{R}^*$ .

**Lemme 5.4.3** *L'application  $U$  s'étend en un opérateur unitaire  $\mathcal{U}$  du  $C^*$ -module  $L^2(\mathbb{R}) \otimes C^*(\mathbb{R}^*)$ .*

— *Démonstration.*

Soit  $f \otimes \varphi \in L^2(\mathbb{R}) \otimes C_c(\mathbb{R}^*)$ . Alors, pour  $y \in \mathbb{R}^*$

$$\begin{aligned} \langle U(f \otimes \varphi), U(f \otimes \varphi) \rangle_{C^*(\mathbb{R}^*)}(y) &= \int_{\mathbb{R}^*} \langle \varphi(xD)f, \varphi(xyD)f \rangle_{L^2} \frac{dx}{|x|} \\ &= \int_{\mathbb{R}^*} \langle \tilde{\varphi}(x)\hat{f}, \tilde{\varphi}(xy)\hat{f} \rangle_{L^2} \frac{dx}{|x|} \quad \text{d'après 5.1.2} \\ &= \int_{\mathbb{R}^*} \overline{\varphi(x)}\varphi(xy) \frac{dx}{|x|} \|f\|_2^2 \\ &= \langle f \otimes \varphi, f \otimes \varphi \rangle_{C^*(\mathbb{R}^*)}(y), \end{aligned}$$

d'où le résultat,  $U$  étant d'image dense dans  $L^2(\mathbb{R}) \otimes C^*(\mathbb{R}^*)$ .  $\square$

Contrairement au cas classique, on ne construit pas directement de facteur de normalisation comparable aux fonctions  $\gamma_\sigma$  introduites au Paragraphe 5.2.5 : celui-ci est obtenu en composant l'opérateur d'entrelacement par l'unitaire construit ci-dessus.

**Proposition 5.4.4** *Soit  $f \otimes \varphi \in L^2(\mathbb{R}) \otimes C_c(\mathbb{R}^*)$ . Alors*

$$\mathcal{I} \circ \mathcal{U}(f \otimes \varphi) = f \otimes \gamma * \varphi,$$

où  $\gamma$  est la fonction définie sur  $\mathbb{R}^*$  par  $\gamma(x) = e^{-ix^{-1}}$ .

— *Démonstration.*

Soient  $f \otimes \varphi \in L^2(\mathbb{R}) \otimes C_c(\mathbb{R}^*)$  et  $(x, t) \in \mathbb{R}^* \times \mathbb{R}$ . Alors

$$\begin{aligned} \mathcal{I} \circ \mathcal{U}(f \otimes \varphi)(x, t) &= \int_{\mathbb{R}} e^{-isD} (\varphi(sxD)f)(t) \frac{ds}{|s|} \\ &= \int_{\mathbb{R}} e^{-is} \varphi(sx)f(t) \frac{ds}{|s|} \end{aligned}$$

Comme dans la démonstration du lemme précédent, le « changement de variables »  $s \leftrightarrow sD$  est rendu licite en passant aux multiplicateurs de Fourier, ce qui revient à considérer la décomposition spectrale de  $D$  et à appliquer le changement de variables  $s \leftrightarrow \lambda$  pour chaque valeur propre  $\lambda$ .  $\square$

L'unitaire  $\mathcal{U}$  est un véritable opérateur borné du  $C^*(\mathbb{R}^*)$ -module  $\mathcal{E}$ , mais ne commute pas à l'action à gauche de  $SL_2(\mathbb{R})$ . La proposition précédente le met en relation avec  $\mathcal{I}$ . Considérons à présent

$$\mathcal{U}^w = (1 \otimes c_w)\mathcal{U},$$

qui est au contraire  $C^*(\mathbb{R}^*)$ - $w$ -linéaire mais commute à l'action de  $SL_2(\mathbb{R})$  à gauche. C'est en ce sens qu'il peut être considéré comme un opérateur d'entrelacement standard, et manifeste l'action du groupe de Weyl au niveau du  $C^*$ -module  $\mathcal{E}$ .

Enfin, la Proposition 5.4.4 montre que l'on a

$$\mathcal{I}_w \circ \mathcal{U}^w = \gamma$$

où  $\gamma$  agit par convolution sur  $C_c(\mathbb{R}^*)$ . Cette égalité constitue l'analogie pour  $\mathcal{I}_w$  de la normalisation des opérateurs standards dans le cas classique, pour lesquels la relation

$$I_\sigma^* \left( \frac{1}{\gamma_\sigma} I_\sigma \right) = \gamma_\sigma,$$

est vérifiée pour chaque représentation  $\sigma$ .

## 5.5 Cas de $SL_2(\mathbb{C})$

On étudie dans ce paragraphe l'opérateur d'entrelacement et sa normalisation pour le groupe  $SL_2(\mathbb{C})$ .

### 5.5.1 Structure

Les formules algébriques du Paragraphe 5.1 donnant les décompositions d'Iwasawa de  $SL_2(\mathbb{C})$  et de Langlands des sous-groupes paraboliques des matrices triangulaires sont encore valables pour les matrices à coefficients complexes. On conserve donc les mêmes notations. Le sous-groupe compact maximal  $K$  considéré est désormais  $SU_2$ . La composante abélienne  $A$  de la décomposition d'Iwasawa est inchangée. Les groupes nilpotents intervenant sont à présent

$$N = \begin{bmatrix} 1 & \mathbb{C} \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \simeq \mathbb{C} \quad \text{et} \quad \bar{N} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ \mathbb{C} & 1 \end{bmatrix} \simeq \mathbb{C},$$

le centralisateur dans  $K$  de  $A$  est le groupe

$$M = \left\{ \begin{bmatrix} e^{it} & 0 \\ 0 & e^{-it} \end{bmatrix}, t \in \mathbb{R} \right\} \simeq \mathbb{S}^1$$

et la composante de Levi  $L$  s'identifie donc à  $\mathbb{C}^*$ .

Les fonctions  $\bar{\mathbf{n}}$ ,  $\mathbf{m}$ ,  $\mathbf{a}$  et  $\mathbf{l}$  sont identiques à celles du cas réel, en remplaçant la valeur absolue sur  $\mathbb{R}$  par le module sur  $\mathbb{C}$  et la fonction  $x \mapsto \text{sign}(x) = \frac{x}{|x|}$  par l'analogie complexe  $z = \rho e^{i\theta} \mapsto e^{i\theta} = \frac{z}{|z|}$ .

### 5.5.2 Dual et $C^*$ -algèbre réduite

Le fait que  $SL_2(\mathbb{C})$  soit un groupe complexe simplifie la description de son dual. En effet, pour un tel groupe  $G$ , on sait d'une part que toutes les représentations de la série principale sont irréductibles [Zel68, Wal71] et d'autre part que toute représentation unitaire irréductible faiblement contenue dans la représentation régulière est unitairement équivalente à une représentation de la série principale. La formule de Plancherel démontrée dans [HC54a] montre que la représentation régulière se décompose entièrement sur la série principale. L'étude du dual réduit se ramène donc à considérer les classes d'équivalence d'éléments de  $\widehat{M} \times \widehat{A}$  sous l'action par conjugaison du groupe de Weyl, et l'on a :

$$\widehat{G}_r \simeq (\widehat{M} \times \widehat{A})/W.$$

Dans le cas de  $SL_2(\mathbb{C})$ , il vient  $\widehat{M} \simeq \mathbb{Z}$  et  $\widehat{A} \simeq \mathbb{R}$ , l'action de l'élément non trivial  $w = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}$  du groupe de Weyl sur ces espaces étant respectivement donnée par  $n \mapsto -n$  et  $\nu \mapsto -\nu$ . On en déduit la figure suivante de  $\widehat{SL_2(\mathbb{C})}_r$ .

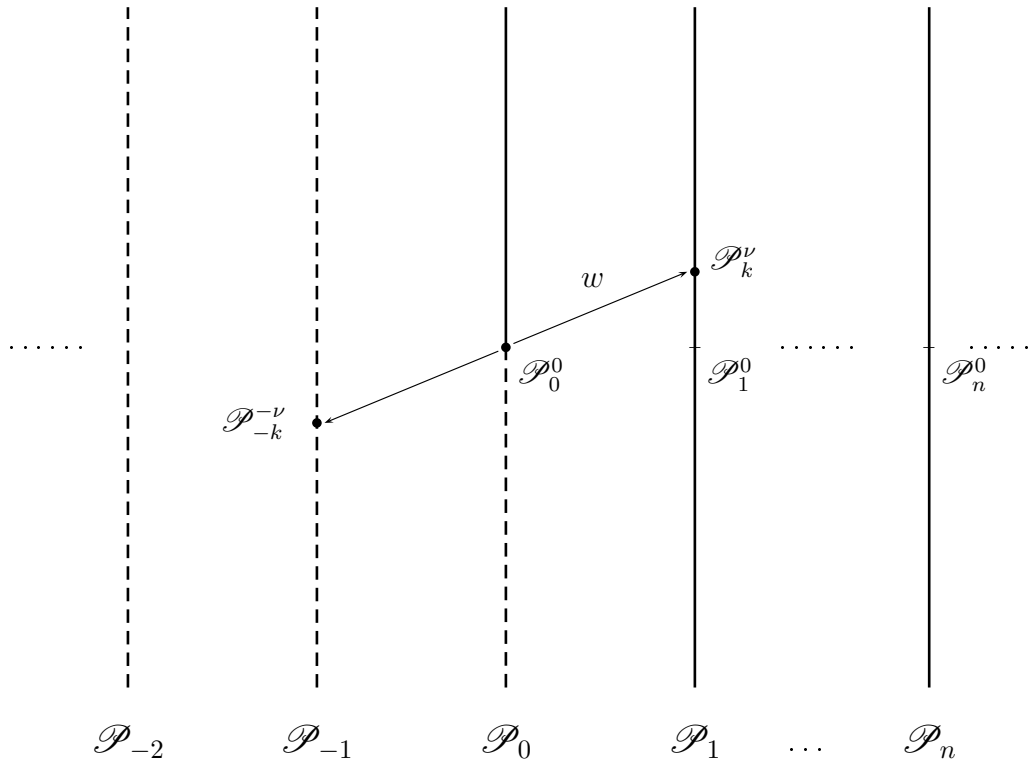


FIGURE 5.2 – Dual réduit de  $SL_2(\mathbb{C})$

Notons à présent  $\mathcal{E}_{\mathbb{C}}$  le module  $\mathcal{E}(G/N)$  associé à  $SL_2(\mathbb{C})$ . Le modèle ouvert de ce module est donné par l'isomorphisme

$$\mathcal{E}_{\mathbb{C}} \simeq L^2(\mathbb{C}) \otimes C^*(\mathbb{C}^*).$$

Le même argument de commutativité que dans le cas de  $SL_2(\mathbb{R})$  permet de voir  $\mathcal{E}_{\mathbb{C}}$  comme l'espace des sections d'un champ continu  $\widetilde{\mathcal{E}}_{\mathbb{C}}$  d'espaces de Hilbert sur  $\widehat{M} \times \widehat{A}$ .

Il est alors possible de reformuler, dans ce cas particulier, le Théorème 1.2 de [Val84], sous sa forme adaptée aux groupes complexes, tel qu'il est énoncé dans [Hig07] (Théorème 3.3).

**Théorème 5.5.1** *Supposons  $G = SL_2(\mathbb{C})$ . Soit  $\pi$  l'action de  $C_r^*(G)$  définie sur chaque fibre de  $\tilde{\mathcal{E}}_{\mathbb{C}}$  par la représentation de la série principale associée. Alors  $\pi$  définit un  $*$ -isomorphisme*

$$C_r^*(G) \longrightarrow C_0(\widehat{M} \times \widehat{A}, \mathcal{K}(\tilde{\mathcal{E}}_{\mathbb{C}}))^W$$

où  $C_0(\widehat{M} \times \widehat{A}, \mathcal{K}(\tilde{\mathcal{E}}_{\mathbb{C}}))^W$  désigne l'algèbre des points fixes sous l'action de  $W$  de  $C_0(\widehat{M} \times \widehat{A}, \mathcal{K}(\tilde{\mathcal{E}}_{\mathbb{C}}))$ .

L'action du groupe de Weyl  $W$  est donnée dans les fibres par les opérateurs d'entrelacement normalisés de Knapp et Stein. Les opérateurs  $\mathcal{U}$ , introduit au paragraphe précédent, et  $\mathcal{V}$  analogue pour  $SL_2(\mathbb{C})$  qui fait l'objet du paragraphe suivant transportent donc cette action au niveau du  $C^*$ -module  $\mathcal{E}(G/N)$ .

### 5.5.3 Opérateur d'entrelacement et normalisation

D'après ce qui précède, le modèle ouvert du module  $\mathcal{E}(SL_2(\mathbb{C})/N)$  est donc  $L^2(\mathbb{R}^2) \otimes C^*(\mathbb{C}^*)$ . L'expression de l'opérateur d'entrelacement standard dans ce modèle est similaire à celle du Paragraphe 5.4.2 :

$$\mathcal{I} = \int_{\mathbb{C}} \lambda(s) \otimes U_{s^{-1}} \frac{ds}{|s|}$$

et l'on procède de la même manière pour normaliser cet opérateur. On introduit cette fois l'opérateur

$$D = \frac{\partial}{\partial \bar{z}} = \frac{\partial}{\partial x} + i \frac{\partial}{\partial y}$$

avec l'identification usuelle  $\mathbb{C} \simeq \mathbb{R}^2$  donnée par  $z = x + iy$ , sous laquelle le produit scalaire est donné par  $(x, y) \cdot (x', y') = \operatorname{Re}(\bar{z}z')$ .

Le multiplicateur de Fourier associé à  $\lambda_{\mathbb{C}}(z) = \lambda_{\mathbb{R}^2}(x, y)$  étant  $\xi \mapsto e^{2i\pi(x,y) \cdot \xi}$ , on en déduit l'identification

$$\lambda(u, v) = e^{u \frac{\partial}{\partial x} + v \frac{\partial}{\partial y}}.$$

Or, le calcul fonctionnel pour  $D$  montre que

$$\begin{aligned} 2i\operatorname{Im}(\bar{s}D) &= (\bar{s}D - sD^*) \\ &= \bar{s}\left(\frac{\partial}{\partial x} + i\frac{\partial}{\partial y}\right) + s\left(\frac{\partial}{\partial x} - i\frac{\partial}{\partial y}\right) \\ &= (s + \bar{s})\frac{\partial}{\partial x} - i(s - \bar{s})\frac{\partial}{\partial y}. \end{aligned}$$

d'où l'égalité

$$\lambda(s) = e^{-i\text{Im}(sD)},$$

pour  $s \in \mathbb{C}$ , et une expression analogue à (†) pour  $\mathcal{I}$  :

$$\mathcal{I}(\varphi)(x) = \int_{\mathbb{C}} e^{-i\text{Im}(sD)} \varphi(sx) \frac{ds}{|s|} \quad (\ddagger)$$

valable pour  $\varphi \in C_c(\mathbb{C}^*, L^2(\mathbb{C}))$ .

Soit à présent  $V$  défini sur  $L^2(\mathbb{C}) \otimes C_c(\mathbb{C}^*)$  par

$$V(f \otimes \varphi)(x) = \varphi(xD)f,$$

pour  $x \in \mathbb{C}^*$ .

**Lemme 5.5.1** *L'application  $V$  s'étend en un opérateur unitaire  $\mathcal{V}$  du  $C^*$ -module  $L^2(\mathbb{C}) \otimes C^*(\mathbb{C}^*)$ .*

La démonstration est exactement la même que celle du Lemme 5.4.3. On peut enfin normaliser l'opérateur  $\mathcal{I}$  sur  $SL_2(\mathbb{C})$  :

**Proposition 5.5.2** *Soit  $f \otimes \varphi \in L^2(\mathbb{C}) \otimes C_c(\mathbb{C}^*)$ . Alors*

$$\mathcal{I} \circ \mathcal{V}(f \otimes \varphi) = f \otimes \gamma * \varphi,$$

où  $\gamma$  est la fonction définie sur  $\mathbb{R}^*$  par  $\gamma(x) = e^{-i\text{Im}(x^{-1})}$ .

La démonstration est identique à celle de la Proposition 5.4.4 : il s'agit essentiellement d'effectuer le changement de variables  $s \leftrightarrow sD$ .

On introduit, de même que pour  $SL_2(\mathbb{R})$ , l'opérateur  $\mathcal{V}^w = (1 \otimes c_w)\mathcal{V}$ , qui est  $C^*(\mathbb{C}^*)$ - $w$ -linéaire et commute à l'action de  $SL_2(\mathbb{C})$  à gauche. La Proposition 5.5.2 montre que cet opérateur vérifie l'égalité  $\mathcal{I}_w \circ \mathcal{V}^w = \gamma$ , où  $\gamma$  agit par convolution sur  $C_c(\mathbb{C}^*)$ .

## 5.6 Décomposition suivant les caractères de $M$

On exploite ici le fait que  $\widehat{M} \simeq \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$  dans le cas de  $SL_2(\mathbb{R})$  et  $\widehat{M} \simeq \mathbb{Z}$  dans le cas de  $SL_2(\mathbb{C})$ .

### 5.6.1 Cas de $SL_2(\mathbb{R})$

La proposition suivante décrit l'opérateur  $\mathcal{I}$  en le décomposant suivant les caractères de  $M$ , c'est-à-dire en fonction de la parité des fonctions sur  $\mathbb{R}^*$ .

**Proposition 5.6.1** *Soient  $\varphi \in C_c(\mathbb{R}^*)$  et  $x \in \mathbb{R}^*$ . L'opérateur  $f \mapsto \mathcal{I}(f \otimes \varphi)(x)$  coïncide sur  $C_c^\infty(\mathbb{R})$  avec*

$$\int_0^{+\infty} \left( \cos(s(-\Delta)^{\frac{1}{2}}) - H \sin(s(-\Delta)^{\frac{1}{2}}) \right) \varphi(sx) \frac{ds}{s}$$

où  $H$  est l'opérateur de transformée de Hilbert.

— *Démonstration.*

Supposons d'abord  $\varphi$  paire. Alors,

$$\mathcal{I}(f \otimes \varphi)(t, x) = \int_0^{+\infty} \varphi(sx) [\lambda(s) + \lambda(-s)] f(t) \frac{ds}{s},$$

c'est-à-dire, en considérant  $\varphi$  à valeurs dans  $L^2(\mathbb{R})$ ,

$$\mathcal{I}(\varphi)(x) = \int_0^{+\infty} [\lambda(s) + \lambda(-s)] (\varphi(sx)) \frac{ds}{s}.$$

D'après le Paragraphe 5.1.5, le multiplicateur de Fourier associé à  $\lambda(s)$  est l'application  $\xi \mapsto e^{2i\pi s\xi}$ . On en déduit, conformément à 5.1.4,

$$\mathcal{I}(\varphi)(x) = \int_0^{+\infty} 2 \cos(s(-\Delta)^{\frac{1}{2}}) \varphi(sx) \frac{ds}{s}.$$

Supposons à présent  $\varphi$  impaire. Il vient alors

$$\mathcal{I}(\varphi)(x) = \int_0^{+\infty} [\lambda(s) - \lambda(-s)] (\varphi(sx)) \frac{ds}{s}.$$

Or,

$$\mathcal{F}((\lambda(s) - \lambda(-s))f)(\xi) = 2i \sin(2\pi s\xi) \hat{f}(\xi) = 2i \operatorname{sgn}(\xi) \sin(2\pi s|\xi|),$$

et l'on reconnaît le multiplicateur associé à la transformée de Hilbert, introduit au Paragraphe 5.1.5, d'où l'on déduit l'égalité

$$\mathcal{I}(\varphi)(x) = -2 \int_0^{+\infty} H \sin(s(-\Delta)^{\frac{1}{2}}) \varphi(sx) \frac{ds}{s}.$$

Ce résultat se déduit également de la formule (†) en exploitant la décomposition polaire  $D = iH(-\Delta)^{\frac{1}{2}}$  et la décomposition de  $\varphi$  en somme de sa partie paire  $\varphi_p$  vérifiant  $\varphi_p(x) = \varphi_p(|x|)$ , et de sa partie impaire  $\varphi_i$  vérifiant  $\varphi_i(x) = \text{sign}(x)\varphi_i(|x|)$ .  $\square$

On décompose également l'opérateur  $\mathcal{U}$  de la même manière.

**Proposition 5.6.2** *Soient  $\varphi \in C_c(\mathbb{R}^*)$  et  $x \in \mathbb{R}^*$ . Si  $\varphi = \varphi_p + \varphi_i$ , avec  $\varphi_p$  paire et  $\varphi_i$  impaire, l'opérateur  $f \mapsto \mathcal{U}(f \otimes \varphi)(x)$  coïncide sur  $C_c^\infty(\mathbb{R})$  avec*

$$\varphi_p(|x|(-\Delta)^{\frac{1}{2}}) + iH \text{sign}(x)\varphi_i(|x|(-\Delta)^{\frac{1}{2}}).$$

— *Démonstration.*

C'est une application du calcul fonctionnel, appliqué séparément à  $\varphi_p$  et  $\varphi_i$  sur la décomposition polaire  $D = iH(-\Delta)^{\frac{1}{2}}$ .  $\square$

**Remarque 5.3** Cette somme constitue la décomposition de  $\mathcal{U}$  correspondant à la somme directe  $\mathcal{E}_+^0 \oplus \mathcal{E}_-^0$  introduite à la fin du Paragraphe 5.3.2 et correspondant à la décomposition

$$\mathcal{E} = L^2(\mathbb{R}) \otimes C^*(\mathbb{R}_+^*) \oplus L^2(\mathbb{R}) \otimes C^*(\mathbb{R}_+^*),$$

le premier terme étant associé à la représentation triviale de  $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ , et le second au caractère  $\varepsilon$ .

### 5.6.2 Cas de $SL_2(\mathbb{C})$

Introduisons tout d'abord l'analogie sur  $\mathbb{R}^2 \simeq \mathbb{C}$  de la transformée de Hilbert. Comme on l'a vu plus haut, le multiplicateur de Fourier associé à  $D$  est l'application  $(\xi_1, \xi_2) \mapsto 2i\pi(\xi_1 + i\xi_2)$ , où  $\xi_1$  et  $\xi_2$  sont les composantes de la variable duale sur  $\mathbb{R}^2$ . On note encore, abusivement,  $\xi$  la variable complexe associée :  $\xi = \xi_1 + i\xi_2$ . Cela permet de considérer que le multiplicateur de Fourier associé à  $D$  est l'application

$\xi \mapsto 2i\pi\xi$ . Celui de la racine carrée du laplacien  $(-\Delta)^{\frac{1}{2}}$  s'écrit encore  $\xi \mapsto 2\pi|\xi|$ . On introduit donc l'opérateur  $H_{\mathbb{C}}$  donné par le multiplicateur de Fourier

$$\xi \mapsto i \frac{\xi}{|\xi|}.$$

Cet opérateur est unitaire et  $D$  se décompose en  $D = H_{\mathbb{C}}(-\Delta)^{\frac{1}{2}}$ .

Pour  $\varphi$  définie sur  $\mathbb{C}^*$ , on décompose  $\varphi$  suivant les caractères de  $M \simeq U(1)$  en  $\varphi = \sum_{n \in \mathbb{Z}} \varphi_n$  où  $\varphi_n$  vérifie la relation

$$\varphi_n(\rho e^{i\theta}) = e^{in\theta} \varphi_n(\rho),$$

pour tout  $\rho e^{i\theta}$  non nul dans  $\mathbb{C}$ .

On peut à présent écrire  $\mathcal{U}$  suivant la décomposition

$$\mathcal{E} = \bigoplus_{n \in \mathbb{Z}} L^2(\mathbb{R}) \otimes C^*(R_+^*):$$

**Proposition 5.6.3** Soient  $\varphi = \sum_{n \in \mathbb{Z}} \varphi_n \in C_c(\mathbb{C}^*)$  et  $x = \rho e^{i\theta} \in \mathbb{C}^*$ . L'opérateur  $f \mapsto \mathcal{V}(f \otimes \varphi)(x)$  coïncide sur  $C_c^\infty(\mathbb{C})$  avec

$$\sum_{n \in \mathbb{Z}} e^{in\theta} H_{\mathbb{C}}^n \varphi_n(\rho(-\Delta)^{\frac{1}{2}}).$$

Comme dans le cas de  $SL_2(\mathbb{R})$ , la démonstration de ce résultat consiste en l'application du calcul fonctionnel à l'opérateur normal  $D$ .



# Bibliographie

- [AD02] C. ANANTHARAMAN-DELAROCHE – « Amenability and exactness for dynamical systems and their  $C^*$ -algebras », *Trans. Amer. Math. Soc.* (2002), no. 354, p. 4153–4178.
- [ADR00] C. ANANTHARAMAN-DELAROCHE et J. RENAULT – *Amenable groupoids*, Monographies de l'enseignement supérieur, Genève, no. 36, 2000.
- [Bag72] L. BAGGETT – « A separable group having a discrete dual space is compact », *J. Funct. Anal.* (1972), no. 10, p. 131–148.
- [BdlHV08] B. BEKKA, P. DE LA HARPE et A. VALETTE – *Kazhdan's property (T)*, New mathematical monographs, Cambridge University Press, 2008.
- [Bla61] R. J. BLATTNER – « On induced representations », *Amer. J. Math.* (1961), no. 83.
- [Bla63] — , « On induced representations », *Proc. Amer. Math. Soc.* (1963), no. 14, p. 423–428.
- [BM76] R. BOYER et R. MARTIN – « The regular group  $C^*$ -algebra for real-rank one groups », *Proc. Amer. Math. Soc.* (1976), no. 59, p. 371–376.
- [Bou63] N. BOURBAKI – *Eléments de mathématique, livre VI : Intégration*, vol. XXIX, Hermann, 1963.
- [Bru56] F. BRUHAT – « Sur les représentations induites des groupes de Lie », *Bull. Soc. Math. France* (1956), no. 84, p. 97–205.
- [Cur92] C. W. CURTIS – « Representation theory of finite groups : from Frobenius to Brauer », *Math. Intelligencer* **14** (1992), no. 4, p. 48–57.
- [Dix61] J. DIXMIER – « Points isolés dans le dual d'un groupe localement compact », *Bull. Soc. Math.* (1961), no. 85.
- [Dix64] J. DIXMIER – *Les  $C^*$ -algèbres et leurs représentations*, Gauthier-Villars, 1964.
- [EKQR06] S. ECHTERHOFF, S. KALISZEWSKI, J. QUIGG et I. RAEBURN – *A categorical approach to imprimitivity theorems for  $C^*$ -dynamical systems*, vol. 180, Memoirs of the AMS, no. 850, 2006.

- [Fro98] G. FROBENIUS – « Über relationen zwischen den characteren einer gruppe und denen ihrer untergruppen », *Sitzber. Preuss. Akad. Wiss* (1898), p. 501–515.
- [God52] R. GODEMENT – « A theory of spherical functions i », *Trans. Amer. Math. Soc.* (1952), no. 73.
- [Gre78] P. GREEN – « The local structure of twisted covariance algebras », *Acta Mathematica* (1978), no. 140, p. 191–250.
- [Gre80] — , « The structure of imprimitivity algebras », *J. Funct. Anal.* (1980), no. 36, p. 88–104.
- [Haw71] T. HAWKINS – « The origins of the theory of group characters », *Archive for History of Exact Science* **7** (1971), no. 2, p. 142–170.
- [HC53] HARISH-CHANDRA – « Representations of semisimple Lie groups on a banach space I », *Trans. Amer. Math. Soc.* (1953), no. 75, p. 185–243.
- [HC54a] — , « The Plancherel formula for complex semi-simple Lie groups », *Trans. Amer. Math. Soc.* (1954), no. 76, p. 485–528.
- [HC54b] — , « Representations of semisimple Lie groups II », *Trans. Amer. Math. Soc.* (1954), no. 76, p. 26–65.
- [HC54c] — , « Representations of semisimple Lie groups III », *Trans. Amer. Math. Soc.* (1954), no. 76, p. 234–253.
- [HC55] — , « Representations of semisimple Lie groups IV », *Amer. J. Math.* (1955), no. 77, p. 743–777.
- [HC56a] — , « Representations of semisimple Lie groups V », *Amer. J. Math.* (1956), no. 78, p. 1–41.
- [HC56b] — , « Representations of semisimple Lie groups VI », *Amer. J. Math.* (1956), no. 78, p. 564–628.
- [HC58] — , « Spherical functions on a semisimple Lie group I », *Amer. J. Math.* (1958), no. 80, p. 241–310.
- [HC76] — , « Harmonic analysis on real reductive groups III. the Maaß-Selberg relations and the Plancherel formula », *Ann. of Math.* (1976), no. 104, p. 117–201.
- [Hig07] N. HIGSON – « The Mackey analogy and K-theory », Internet address : <http://www.math.psu.edu/higson/Papers/mackey.pdf>, 2007.
- [Kna86] A. W. KNAPP – *Representation theory of semisimple groups*, Princeton Landmarks in Mathematics, Princeton University Press, 1986.
- [Kna02] — , *Lie groups, beyond an introduction, second edition*, Progress in Mathematics, no. 140, Birkhäuser, 2002.

- [Kos69] B. KOSTANT – « On the existence and irreducibility of certain series of representations », *Bull. Amer. Math. Soc.* (1969), no. 75, p. 627–642.
- [KS71] A. W. KNAPP et E. M. STEIN – « Intertwining operators for semisimple groups », *Ann. of Math.* (1971), no. 93, p. 489–578.
- [KS80] — , « Intertwining operators for semisimple groups II », *Invent. Math.* (1980), no. 60, p. 9–84.
- [Lan95] E. C. LANCE – *Hilbert  $C^*$ -modules*, LMS Lecture Note Series, Cambridge University Press, 1995.
- [Lip70] R. L. LIPSMAN – « The dual topology for the principal and discrete series on semi-simple groups », *Trans. Amer. Math. Soc.* (1970), no. 152, p. 399–417.
- [Mac49] G. W. MACKEY – « Imprimitivity for representations of locally compact groups I », *Proc. Nat. Acad. Sci. USA* (1949), no. 35, p. 537–545.
- [Mac51] — , « On induced representations of groups », *Amer. J. Math.* (1951), no. 73, p. 576–592.
- [Mac52] — , « Induced representations of locally compact groups I », *Ann. Math.* (1952), no. 55, p. 101–139.
- [Nak38] T. NAKAYAMA – « A remark on representations of groups », *Bull. Amer. Math. Soc.* (1938), no. 44, p. 233–235.
- [Pie01] F. PIERROT – « Induction parabolique et  $K$ -théorie de  $C^*$ -algèbres maximales », *C. R. Acad. Sci. Paris* (2001), no. 9, p. 805–808.
- [PP83] M. G. PENINGTON et R. J. PLYMEN – « The Dirac operator and the principal series for complex semisimple Lie groups », *J. Funct. Anal.* (1983), no. 53, p. 269–286.
- [Rie71] M. A. RIEFFEL – « Induced representations of  $C^*$ -algebras », *Advances in Mathematics* (1971), no. 13, p. 176–257.
- [Rie74] — , « Morita equivalence for  $C^*$ -algebras and  $W^*$ -algebras », *J. Pure Appl. Algebra* (1974), no. 5, p. 51–96.
- [Rie76] — , « Strong morita equivalence of certain transformation group  $C^*$ -algebras », *Math. Ann.* (1976), no. 222, p. 7–22.
- [RS72] M. REED et B. SIMON – *Methods of modern mathematical analysis I : Functionnal analysis*, Academic press, 1972.
- [RS75] — , *Methods of modern mathematical analysis II : Fourier analysis, self-adjointness*, Academic press, 1975.
- [Sch68] G. SCHIFFMAN – « Distributions centrales de type positif sur un groupe de Lie nilpotent », *Bulletin de la société mathématique de France* (1968), no. 96, p. 347–355.

- [Sch71] — , « Intégrales d'entrelacement et fonctions de Whittaker », *Bulletin de la société mathématique de France* (1971), no. 99, p. 3–72.
- [Sch75] W. SCHMID – « On the characters of discrete series : the hermitian symmetric case », *Invent. Math.* (1975), no. 30, p. 47–144.
- [Sch77] — , « Two characters identities for semisimple Lie groups », *Lecture Notes in Math* (1977), no. 587, p. 196–225.
- [SS03] E. M. STEIN et R. SHAKARCHI – *Fourier analysis, an introduction*, Princeton university press, 2003.
- [SW71] E. M. STEIN et G. WEISS – *Fourier analysis on euclidean spaces*, Princeton university press, 1971.
- [Vae05] S. VAES – « A new approach to induction and imprimitivity results », *J. Funct. Anal.* (2005), no. 229, p. 317–374.
- [Val84] A. VALETTE – « K-theory for the reduced  $C^*$ -algebra of a semi-simple Lie group with real rank 1 and finite center », *Quart. J. Math. Oxford* **35** (1984), no. 2, p. 341–359.
- [Val85] — , « Dirac induction for semi-simple Lie groups having one conjugacy class of Cartan subgroups », *Lecture Notes in Mathematics* **1132** (1985), p. 526–555.
- [Wal71] N. WALLACH – « Cyclic vectors and irreducibility for principal series representations », *Trans. Amer. Math. Soc.* **18** (1971), no. 158, p. 107–113.
- [Was87] A. WASSERMANN – « Une démonstration de la conjecture de Connes-Kasparov pour les groupes de Lie linéaires connexes réductifs », *C. R. Acad. Sci. Paris* **18** (1987), no. 304, p. 559–562.
- [Wei65] A. WEIL – *L'intégration dans les groupes topologiques et ses applications*, Hermann, 1965.
- [WO93] N. E. WEGGE-OLSEN – *K-theory and  $C^*$ -algebras*, Oxford Science Publications, 1993.
- [Zel68] D. P. ZELOBENKO – « The analysis of irreducibility in the class of elementary representations of a complex semisimple Lie group », *Izv. Akad. Nauk SSSR Ser. Mat.* (1968), no. 32, p. 108–133.



Pierre CLARE

## $C^*$ -modules et opérateurs d'entrelacement associés à la série principale de groupes de Lie semi-simples

Cette thèse est consacrée à l'étude de la série principale unitaire de certains groupes de Lie semi-simples, du point de vue de la géométrie non-commutative. Pour une famille de sous-groupes paraboliques minimaux de composante de Levi  $L$  fixée, nous décrivons la famille des représentations de la série principale unitaire associées au moyen de  $C^*$ -modules sur  $C^*(L)$ . Cette construction s'inspire de celle des modules d'induction de M. A. Rieffel et nous proposons plusieurs modèles pour les  $C^*$ -modules obtenus, qui reflètent à ce niveau global les réalisations classiques des représentations de la série principale. En rang réel 1, nous caractérisons certains opérateurs bornés sur ces modules, obtenant ainsi un résultat d'irréductibilité analogue à celui de F. Bruhat dans le cas classique. Nous démontrons ensuite la convergence, sur des sous-modules, d'intégrales d'entrelacement analogues à celles définissant les opérateurs de Knapp et Stein. Ces intégrales peuvent être décomposées en somme d'un opérateur densément défini et vraisemblablement borné, d'un opérateur densément défini et d'un terme résiduel, étudiés séparément. Nous indiquons enfin, dans certains cas particuliers, une procédure de normalisation aboutissant à la construction d'opérateurs d'entrelacement unitaires entre  $C^*$ -modules. Ces opérateurs manifestent l'action du groupe de Weyl régissant les équivalences entre représentations de la série principale au niveau de la  $C^*$ -algèbre réduite du groupe.

**Mots-clefs** : groupes de Lie semi-simples, représentations unitaires, série principale, opérateurs d'entrelacement, dual réduit,  $C^*$ -algèbres de groupes,  $C^*$ -modules hilbertiens,  $C^*$ -modules d'induction.

## Hilbert $C^*$ -modules and intertwining operators associated to the principal series of semisimple Lie groups

This thesis is devoted to the study of the unitary principal series of certain semisimple Lie groups, within the framework of non-commutative geometry. For a family of minimal parabolic subgroups sharing the same Levi component  $L$ , we describe the associated unitary principal series representations by means of  $C^*(L)$ -Hilbert modules. This construction is inspired from the work of M. A. Rieffel and we provide different realisations for the modules that it yields, thus translating at a global level the classical pictures of the principal series. For real-rank 1 groups, we characterise a certain class of bounded operators on those modules, and obtain an irreducibility result, analogous to Bruhat's classical one. We then establish the convergence, on certain submodules, of intertwining integrals close to the ones defining Knapp and Stein operators. Those integrals can be written as the sum of a densely defined and likely bounded operator, a densely defined unbounded operator and a residual term. We finally indicate, in special cases, a normalisation process which yields unitary intertwining operators between Hilbert modules. Those operators implement the Weyl group action related to unitary equivalences among the principal series at the level of the group reduced  $C^*$ -algebra.

**Keywords** : semisimple Lie groups, unitary representations, principal series representations, intertwining operators, reduced dual, group  $C^*$ -algebras, Hilbert  $C^*$ -modules, induction Hilbert modules.



MAPMO, Route de Chartres B.P. 6759  
45067 Orléans cedex 2 FRANCE

