

# Propriétés asymptotiques de l'estimateur des moindres carrés d'un processus autorégressif gaussien par une méthode de moyennisation logarithmique

Hamdi Fathallah \*

6 février 2010

## Résumé

On considère un modèle autorégressif gaussien à temps continu non nécessairement *stable*. On établit, pour l'estimateur des moindres carrés  $\hat{\theta}$ , un théorème de la limite centrale presque-sûre (TLCPS), une loi forte quadratique associée au TLCPS (LFQ) et un théorème de la limite centrale logarithmique (TLCL). Dans le cas *stable*, on propose d'utiliser l'estimateur des moindres carrés pondéré  $\tilde{\theta}$  de  $\theta$  pour améliorer les vitesses de convergences logarithmique dans les théorèmes obtenus. Dans le cas *instable*, on établit pour l'estimateur des moindres carrés  $\hat{\theta}$ , les même type des propriétés asymptotiques avec une vitesse de convergence arithmétique.

**Mots Clés :** Martingales quasi-continues, théorème de la limite centrale presque-sûre, loi forte quadratique, l'estimateur des moindres carrés, l'estimateur des moindres carrés pondéré moyennisé.

**Classification Mathématique.** 60G46, 60G51, 60F05.

## 1 Introduction

Soit  $W = (W_t, t \geq 0)$  un mouvement brownien réel standard. On définit le processus  $X = (X^1, \dots, X^p)^*$  avec  $X_0 = 0$  par

$$dX_t = B_\theta X_t dt + b dW_t, \quad t \geq 0, \quad (1)$$

où  $b^* = (0, \dots, 0, \sigma) \in \mathbb{R}^p$  et

$$B_\theta = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \ddots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \ddots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 \\ \theta_1 & \theta_2 & \theta_3 & \cdots & \theta_{p-1} & \theta_p \end{pmatrix}.$$

Ce modèle a été étudié par exemple dans [5, 6, 7, 12]. Le processus  $X = (X_t, t \geq 0)$  défini par (1) est un processus gaussien dont la  $p$ -ième composante  $X^p$  est un processus autorégressif d'ordre  $p$  ( $AR(p)$ ) vérifiant l'équation différentielle stochastique suivante :

$$dX_t^p = \theta^* X_t dt + \sigma dW_t, \quad t \geq 0, \quad (2)$$

où  $\theta = (\theta_1, \dots, \theta_p) \in \mathbb{R}^p$ . Notons que le processus  $X = (X_t, t \geq 0)$  n'est autre que le processus d'Ornstein-Uhlenbeck multidimensionnel et estimer la matrice drift  $B_\theta$  revient à estimer le paramètre  $\theta$  du modèle  $AR(p)$  donné par (2), vu que

$$B_\theta = e_p \theta + T,$$

\*Laboratoire LMV, Université de Versailles Saint-Quentin-En-Yvelines, 45 Avenue des Etats-Unis Bâtiment Fermat 78035 Versailles (France). Tel :+33139253629; Fax :+33139254645, E-mail address :hfathallah@math.uvsq.fr

où  $e_p$  est le  $p$ -ième vecteur de la base canonique de  $\mathbb{R}^p$  et  $T$  une matrice triangulaire donnée par

$$T = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \ddots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \ddots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Le polynôme caractéristique de la matrice drift  $B_\theta$  est donné par

$$P(z) = z^p - \theta_p z^{p-1} - \theta_{p-1} z^{p-2} - \cdots - \theta_2 z - \cdots - \theta_1.$$

Désignons par  $\mathfrak{m}$  (resp.  $\mathfrak{M}$ ) la plus petite (resp. la plus grande) partie réelle des racines du polynôme  $P$ . Le processus  $X$  défini par (2) est dit stable ou régulier (resp. instable ou explosif) si  $\mathfrak{M}$  est strictement négative (resp.  $\mathfrak{m}$  est strictement positive).

Soit  $\hat{\theta}$  l'estimateur des moindres carrés de  $\theta$  défini par

$$\hat{\theta}_t = \left[ \int_0^t X_s X_s^* ds \right]^{-1} \int_0^t X_s dX_s^p. \quad (3)$$

Cet estimateur a fait l'objet de plusieurs études donnant sa consistance forte et sa normalité asymptotique (voir par exemple [5], [8], [11], [12]). Dans [12], Le Breton et Musiela, en utilisant une loi forte des grands nombres pour les martingales locales continues multidimensionnelles, ont montré que cet estimateur converge presque-sûrement. Plus précisément, on a

1. Dans le cas stable,

$$\|\hat{\theta}_t - \theta\| = \mathcal{O}\left(\sqrt{\frac{\log t}{t}}\right) \quad p.s. \quad (4)$$

2. Dans le cas instable,

$$\|\hat{\theta}_t - \theta\| = \mathcal{O}\left(\sqrt{t} e^{-mt}\right) \quad p.s. \quad (5)$$

Dans [5], Darwich a établi une loi du logarithme itéré (LLI) pour des martingales locales cadlag multidimensionnelles et a précisé l'ordre de la convergence de ce même estimateur dans le cas stable, à savoir

$$\limsup_{t \rightarrow \infty} \frac{\|\hat{\theta}_t - \theta\| \sqrt{t}}{\sqrt{\log \log t}} < +\infty \quad p.s. \quad (6)$$

Les théorèmes limites par moyennisation logarithmique pour les martingales à temps continu dont il est question ici ont fait l'objet de quelques publications. On cite en particulier les travaux de Chaâbane [2] pour des martingales continues, Chaâbane et Kebaier [4] dans le cas des martingales quasi-continues à gauche, à croissance régulière et plus récemment Fathallah et Kebaier [9] dans le cas des martingales quasi-continues à gauche, à croissance explosive et mixte (régulière et explosive). Dans ce travail, on applique ces résultats au processus autorégressif gaussien dans les deux cas stable et instable. Dans le premier cas, afin d'améliorer les vitesses de convergence associées au théorème de la limite centrale presque-sûre (TLCPS), à la loi forte quadratique associée au TLCPS (LFQ) et au théorème de la limite centrale logarithmique (TLCL) vérifiés par l'estimateur des moindres carrés  $\hat{\theta}_t$  de  $\theta$ , on utilise comme dans [3] et [4] la méthode de pondération. Dans le cas instable, les mêmes propriétés asymptotiques sont établies pour l'estimateur des moindres carrés  $\hat{\theta}$  de  $\theta$  et les vitesses de convergence associées à ces propriétés sont arithmétiques. Ces résultats restent toujours liés aux propriétés classiques associées aux martingales telles que la loi forte des grands nombre (LFGN), le théorème de la limite centrale (TLC) ou encore la loi du logarithme itéré (LLI). L'exploitation des théorèmes limites par moyennisation logarithmique, en particulier le théorème de la limite centrale presque-sûre, la loi forte quadratique ou le théorème de la limite centrale logarithmique pour les martingales à temps continu, a permis de dégager d'autres propriétés de l'estimateur des moindres

carrés  $\hat{\theta}_t$  de  $\theta$ . Dans [3], l'étude du modèle de régression unidimensionnel dans le cas stable a permis entre autres de dégager une région de confiance asymptotique du couple  $(\theta, \sigma^2)$ . En effet, pour un mouvement brownien standard réel  $B = (B_t, t \geq 0)$ , on considère le processus d'Ornstein-Uhlenbeck  $X = (X_t, t \geq 0)$  défini par l'équation différentielle stochastique suivante :

$$dX_t = \theta X_t dt + \sigma dB_t, \quad t \geq 0, \quad (7)$$

où  $\sigma > 0$  et  $\theta < 0$  sont des paramètres inconnus et l'état initial  $X_0$  étant choisi indépendamment de  $B$ . L'estimateur des moindres carrés  $\hat{\theta}_t$  de  $\theta$  et l'estimateur  $\hat{\sigma}_t$  de  $\sigma$  donné par  $\hat{\sigma}_t^2 := -2\hat{\theta}_t I_t$  avec  $I_t = \frac{1}{t} \int_0^t X_s^2 ds$  vérifient des propriétés asymptotiques de type :

- Un théorème de la limite centrale presque-sûre

$$(TLCPS) \quad \frac{1}{\log t} \int_1^t \frac{ds}{s} \delta_{\{\sqrt{s}(\hat{\theta}_s - \theta)\}} \implies \mathcal{N}(0, 2|\theta|) \quad p.s.,$$

où "  $\implies$  " désigne la convergence en loi ou la convergence étroite des mesures.

- Une loi forte quadratique

$$(LFQ) \quad \frac{1}{\log t} \int_1^t (\hat{\theta}_s - \theta)^2 ds \longrightarrow 2|\theta| \quad p.s., \quad (t \longrightarrow \infty).$$

- Indépendance asymptotique pour le couple  $(\theta, \sigma^2)$

$$\left( \sqrt{t}(\hat{\theta}_t - \theta), t(\sigma^2 - \hat{\sigma}_t^2) \right) \implies \mathcal{N}(0, 2|\theta|) \otimes \left( \frac{\sigma^2}{2|\theta|} \mathcal{X}^2(1) * \nu \right),$$

où  $\nu$  est la loi de la variable aléatoire  $-X_0^2$ .

Dans [9], ces mêmes théorèmes limites ont été appliqués au modèle Ornstein-Uhlenbeck bivarié. Plus précisément, pour  $\Gamma = (\Gamma_t = (B_t, W_t), t \geq 0)$  un mouvement brownien plan nul en zéro, on considère le modèle d'Ornstein-Uhlenbeck bivarié suivant :

$$\begin{cases} dX_t = \theta_1 X_t dt + \theta_2 Y_t dt + dB_t, & X_0 = x, \\ dY_t = \theta_3 Y_t dt + dW_t, & Y_0 = y, \end{cases} \quad (8)$$

où  $\theta = (\theta_1, \theta_2, \theta_3) \in \mathbb{R}^3$  avec  $0 < \theta_3 < \theta_1$ . Ces théorèmes limites ont permis de montrer que l'estimateur du maximum de vraisemblance  $\hat{\theta}$  de  $\theta$  vérifie les propriétés asymptotiques suivantes : pour  $V_t = \text{Diag}(e^{t\theta_1}, e^{t\theta_3}, e^{t\theta_3})$  et

$$I_t = \begin{pmatrix} e^{-2t\theta_1} \int_0^t X_s^2 ds & e^{-t(\theta_1+\theta_3)} \int_0^t X_s Y_s ds & 0 \\ e^{-t(\theta_1+\theta_3)} \int_0^t X_s Y_s ds & e^{-2t\theta_3} \int_0^t Y_s^2 ds & 0 \\ 0 & 0 & e^{-2t\theta_3} \int_0^t Y_s^2 ds \end{pmatrix},$$

- Un théorème de la limite centrale presque-sûre

$$(TLCPS) \quad t^{-1} \int_0^t \delta_{\{I_s V_s (\hat{\theta}_s - \theta)\}} ds \implies \mathcal{N}(0, I_\infty) \quad p.s.,$$

où  $I_\infty$  est la limite presque-sûre de  $I_t$ .

- Une loi forte quadratique

$$(LFQ) \quad t^{-1} \int_0^t I_s V_s (\hat{\theta}_s - \theta) (\hat{\theta}_s - \theta)^* V_s^* I_s^* ds \longrightarrow I_\infty \quad p.s., \quad (t \longrightarrow \infty).$$

Pour  $\tilde{D}_s = I_s V_s (\hat{\theta}_s - \theta) (\hat{\theta}_s - \theta)^* V_s^* I_s^* - I_s$  et  $U$  une matrice telle que

$$V_t^{-1} \frac{dV_t}{dt} \longrightarrow U, \quad (t \longrightarrow \infty), \quad \text{avec } U + U^* \text{ inversible,}$$

on a

- Un théorème de la limite centrale logarithmique

$$(TLCL) \quad t^{-1/2} \int_0^t (U\tilde{D}_s + \tilde{D}_s U) ds \implies \nu_\infty,$$

où conditionnellement à  $I_\infty$ ,  $\nu_\infty$  est une gaussienne matricielle centrée, indépendante de la v.a.  $I_\infty$ .

## 2 Énoncés des principaux résultats

Dans la suite, on note  $\|\cdot\|$  la norme euclidienne sur  $\mathbb{R}^p$ . Pour une matrice réelle carrée  $A$ ,  $A^*$  et  $\text{tr}A$  désignent respectivement la matrice transposée et la trace de la matrice  $A$ .  $\mathcal{I}_p$  désigne la matrice identité  $p \times p$ . La norme de la matrice  $A$  est définie par :  $\|A\| = \sqrt{\text{tr}(AA^*)}$  et on désigne par  $\lambda_m(A)$  (resp.  $\lambda_M(A)$ ) la plus petite (resp. la plus grande) valeur propre de la matrice  $A$ . On note  $\text{Vect}(A)$  le vecteur obtenu en empilant les vecteurs colonnes de la matrice  $A$  et on note  $[\text{Vect}(A)\text{Vect}(A)^*]^\perp$  la matrice à blocs dont le bloc d'indice  $1 \leq i, j \leq d$  est  $A_j A_i^*$  où  $A_1, \dots, A_d$  sont les vecteurs colonnes de  $A$ . Le symbole  $\otimes$  désigne le produit tensoriel de mesures ou de matrices.

### 2.1 Résultats relatifs au cas stable

Considérons  $\tilde{\theta}_t$  l'estimateur des moindres carrés pondéré de  $\theta$ , défini par

$$\tilde{\theta}_t = P_t^{-1} \int_0^t \omega_s X_s dX_s, \quad (9)$$

correspondant au poids  $(\omega_s)$  donné par

$$\omega_s = (1+s)^{-\frac{\alpha+\gamma}{2}} \exp\left\{\frac{2}{1-\alpha}(1+s)^{1-\alpha}\right\}, \quad \text{avec } \frac{1}{2} < \alpha < \gamma < 1, \quad (10)$$

où

$$P_t = \int_0^t \omega_s X_s X_s^* ds$$

et on note  $\bar{\theta}_t$  son moyennisé donné par

$$\bar{\theta}_t = \frac{1}{t} \int_0^t \tilde{\theta}_s ds. \quad (11)$$

Posons

$$u_t = \int_0^t \omega_s ds, \quad v_t = \left(\int_0^t \omega_s^2 ds\right)^{\frac{1}{2}}, \quad a_t = v_t^{-1} \frac{dv_t}{dt}$$

et introduisons le processus  $I_1 = (I_{t,1}, t \geq 0)$  défini par

$$I_{t,1} := \frac{1}{t} \int_0^t X_s X_s^* ds,$$

dont le comportement asymptotique est donné par (voir Le Breton [12])

$$I_{t,1} \longrightarrow I_{\infty,1} \quad p.s., \quad (t \longrightarrow \infty), \quad (12)$$

où  $I_{\infty,1}$  est une matrice symétrique définie positive donnée par

$$I_{\infty,1} = \sigma^2 \int_0^{+\infty} e^{B_\theta s} e_d e_d^* e^{B_\theta^* s} ds, \quad (13)$$

où  $e_d$  est le  $d$ -ième vecteur de la base canonique de  $\mathbb{R}^d$ .

Dans la suite, on suppose que le processus autorégressif gaussien stable  $X$  vérifie l'hypothèse suivante :

$$(\mathcal{H}_1) \quad \|I_{t,1} - I_{\infty,1}\| = \mathbf{o}(t^{-(1-\alpha')}) \quad p.s., \quad (t \longrightarrow \infty), \quad \text{pour } 1/2 \leq \alpha' < \alpha < 1.$$

**Théorème 2.1.1** Soit  $X = (X_t, t \geq 0)$  le processus autorégressif gaussien stable à temps continu défini par l'équation (2). Si on suppose que l'hypothèse  $(\mathcal{H}_1)$  est vérifiée, alors l'estimateur des moindres carrés pondéré  $\tilde{\theta}_t$  de  $\theta$  donné par la relation (9) ainsi que son moyennisé  $\bar{\theta}_t$  convergent au sens presque-sûr. De façon plus précise, on a les propriétés suivantes :

1. Consistance forte et normalité asymptotique de  $\tilde{\theta}_t$

$$\|\tilde{\theta}_t - \theta\| = \mathcal{O}\left(\sqrt{\frac{\log t}{t^\alpha}}\right) \quad p.s. \quad \text{et} \quad t^{\alpha/2}(\tilde{\theta}_t - \theta) \Longrightarrow \sigma I_{\infty,1}^{-1/2} G,$$

où  $G$  est un vecteur gaussien standard, indépendant de  $I_{\infty,1}$ .

2. Consistance forte et normalité asymptotique de  $\bar{\theta}_t$

Si  $1/2 \leq \alpha' < 3\alpha/2 - 1/2$  et  $\alpha < 3/4$ , alors on a

$$\|\bar{\theta}_t - \theta\| = \mathcal{O}\left(\sqrt{\frac{\log \log t}{t}}\right) \quad p.s. \quad \text{et} \quad t^{1/2}(\bar{\theta}_t - \theta) \Longrightarrow \sigma I_{\infty,1}^{-1/2} G,$$

où  $G$  est un vecteur gaussien standard, indépendant de  $I_{\infty,1}$ .

**Théorème 2.1.2** On se place dans le cadre du théorème précédent, on a les résultats suivants :

1. Théorème de la limite centrale presque-sûre

$$(TLCPS) \quad \frac{1-\alpha}{t^{1-\alpha}} \int_1^t \frac{ds}{s^\alpha} \delta_{\{s^{\alpha/2}(\tilde{\theta}_s - \theta)\}} \Longrightarrow \mu_\infty \quad p.s.,$$

où  $\mu_\infty$  est la loi de la variable aléatoire  $\sigma I_{\infty,1}^{-1/2} G$  où  $G$  est un vecteur gaussien standard, indépendant de la v.a.  $I_{\infty,1}$ .

2. La loi forte quadratique

$$(LFQ) \quad \frac{1-\alpha}{t^{1-\alpha}} \int_0^t (\tilde{\theta}_s - \bar{\theta}_t)(\tilde{\theta}_s - \bar{\theta}_t)^* ds \longrightarrow \sigma^2 I_{\infty,1}^{-1} \quad p.s., \quad (t \longrightarrow \infty).$$

3. Théorème de la limite centrale logarithmique

$$(TLCL) \quad \left(\frac{t^{1-\alpha}}{1-\alpha}\right)^{1/2} \left(\frac{1-\alpha}{t^{1-\alpha}} \int_0^t (\tilde{\theta}_s - \bar{\theta}_t)(\tilde{\theta}_s - \bar{\theta}_t)^* ds - \sigma^2 I_{\infty,1}^{-1}\right) \Longrightarrow \nu_\infty,$$

où conditionnellement à  $I_{\infty,1}$ ,  $\nu_\infty$  est une loi gaussienne matricielle centrée indépendante de  $I_{\infty,1}$  et de covariance

$$\mathcal{C} = \sigma^{-12} I_{\infty,1}^{-2} \{2I_{\infty,1} \otimes I_{\infty,1} + 2[(\text{Vect}(I_{\infty,1}))(\text{Vect}(I_{\infty,1}))^*]^{\perp}\} I_{\infty,1}^{-2}.$$

## 2.2 Résultats relatifs au cas instable

On introduit le processus  $I_2 = (I_{t,2}, t \geq 0)$  défini par

$$I_{t,2} := e^{-B_\theta t} \int_0^t X_s X_s^* ds e^{-B_\theta^* t}.$$

Son comportement asymptotique est donné par (voir Le Breton [10])

$$I_{t,2} \longrightarrow I_{\infty,2} \quad p.s., \quad (t \longrightarrow \infty), \quad (14)$$

où  $I_{\infty,2}$  est la matrice symétrique définie positive donnée par

$$I_{\infty,2} := \sigma^4 \int_0^{+\infty} e^{-B_\theta s} Z Z^* e^{-B_\theta^* s} ds \quad (15)$$

et  $Z$  désigne le vecteur aléatoire gaussien centré donné par

$$Z = \int_0^{+\infty} e^{-B_\theta s} dW_s.$$

Dans la suite, on suppose que le processus autorégressif gaussien instable  $X$  vérifie l'hypothèse suivante :

$$(\mathcal{H}_2) \quad \|I_{t,2} - I_{\infty,2}\| = \mathbf{o}(t^{-\beta}) \quad p.s., \quad (t \rightarrow \infty), \quad \text{pour } \beta > 1/2.$$

**Théorème 2.2.1** *Soit  $X = (X_t, t \geq 0)$  le processus autorégressif gaussien instable à temps continu défini par l'équation (2). Si on suppose que le processus autorégressif gaussien  $X$  vérifie l'hypothèse  $(\mathcal{H}_2)$ , alors on obtient les résultats suivants :*

1. *Normalité asymptotique de  $\hat{\theta}_t$*

$$e^{B_\theta^* t} (\hat{\theta}_t - \theta) \implies \sigma I_{\infty,2}^{-1/2} G,$$

où  $G$  est un vecteur gaussien standard, indépendant de  $I_{\infty,2}$ .

2. *Théorème de la limite centrale presque-sûre*

$$(TLCPS) \quad \frac{1}{t} \int_0^t ds \delta_{\{e^{B_\theta^* s} (\hat{\theta}_s - \theta)\}} \implies \mu_\infty \quad p.s.,$$

où  $\mu_\infty$  est la loi de la variable aléatoire  $\sigma I_{\infty,2}^{-1/2} G$  où  $G$  est un vecteur gaussien standard, indépendant de la v.a.  $I_{\infty,2}$ .

De plus, si l'hypothèse  $(\mathcal{H}_2)$  est vérifiée avec  $\beta > 1$ , alors on obtient

3. *La loi forte quadratique*

$$(LFQ) \quad \frac{1}{t} \int_0^t e^{B_\theta^* s} (\hat{\theta}_s - \theta) (\hat{\theta}_s - \theta)^* e^{B_\theta s} ds \longrightarrow \sigma^2 I_{\infty,2}^{-1} \quad p.s., \quad (t \rightarrow \infty).$$

Si l'hypothèse  $(\mathcal{H}_2)$  est vérifiée avec  $\beta > 3/2$ , alors on obtient

4. *Théorème de la limite centrale logarithmique*

$$(TLCL) \quad 2t^{-1/2} \text{tr} \left\{ \frac{1}{t} \int_0^t e^{B_\theta^* s} (\hat{\theta}_s - \theta) (\hat{\theta}_s - \theta)^* e^{B_\theta s} ds - \sigma^2 I_{\infty,2}^{-1} \right\} \implies \nu_\infty \quad p.s.,$$

où conditionnellement à  $I_{\infty,2}$ ,  $\nu_\infty$  est une loi gaussienne matricielle centrée indépendante de  $I_{\infty,2}$  et de covariance

$$\mathcal{C} = \sigma^{-12} \text{tr} \left\{ (2\text{tr}(B_\theta))^{-1} I_{\infty,2}^{-2} \left\{ 2I_{\infty,2} \otimes I_{\infty,2} + 2[(\text{Vect}(I_{\infty,2}))(\text{Vect}(I_{\infty,2}))^*]^+ \right\} I_{\infty,2}^{-2} \right\}.$$

### 3 Preuves des résultats

#### 3.1 Preuves des résultats relatifs au cas stable

Dans la suite, on introduit la martingale vectorielle continue  $\tilde{M}$  définie par

$$\tilde{M}_t = \sigma \int_0^t \omega_s X_s dW_s, \quad (16)$$

dont sa variation quadratique prévisible est donnée par

$$\langle \tilde{M} \rangle_t = \sigma^2 \int_0^t \omega_s^2 X_s X_s^* ds. \quad (17)$$

D'après (2) et (9), on obtient la relation-cl suivante :

$$\tilde{M}_t = P_t(\tilde{\theta}_t - \theta), \quad (18)$$

où

$$P_t = \int_0^t \omega_s X_s X_s^* ds.$$

Le lemme suivant donne des propriétés asymptotiques vérifiées par le poids  $(\omega_t)$  introduit dans (10).

**Lemme 3.1** *Le poids  $(\omega_t)$ , défini dans (10), satisfait les propriétés suivantes :*

$$P_1) \quad t^\alpha \frac{\omega_t}{u_t} = 2 + \mathcal{O}(t^{-(1-\alpha)}), \quad (t \rightarrow \infty).$$

$$P_2) \quad t^\alpha \frac{\omega_t^2}{v_t^2} = 4 + \mathcal{O}(t^{-(1-\alpha)}), \quad (t \rightarrow \infty).$$

$$P_3) \quad t^{-\alpha/2} \frac{u_t}{v_t} = 1 + \mathcal{O}(t^{-(1-\alpha)}), \quad (t \rightarrow \infty).$$

$$P_4) \quad t^{\alpha/2} a_t^{1/2} = \sqrt{2} + \mathcal{O}(t^{-(1-\alpha)}), \quad (t \rightarrow \infty).$$

La preuve de ce lemme est donnée dans [3].

Dans le lemme suivant, on donne le comportement asymptotique de la variation quadratique prévisible de la martingale  $\tilde{M}$  ainsi que celui du processus  $P$ .

**Lemme 3.2** *Sous l'hypothèse  $(\mathcal{H}_1)$ , on obtient*

$$i) \quad \frac{\langle \tilde{M} \rangle_t}{v_t^2} - \sigma^2 I_{\infty,1} = \mathbf{o}(t^{-(\alpha-\alpha')}) \quad p.s., \quad (t \rightarrow \infty).$$

$$ii) \quad \frac{P_t}{u_t} - I_{\infty,1} = \mathbf{o}(t^{-(\alpha-\alpha')}) \quad p.s., \quad (t \rightarrow \infty).$$

**Preuve du lemme 3.2**

i) D'après la relation (17), on a

$$\begin{aligned} \langle \tilde{M} \rangle_t &= \sigma^2 \int_0^t \omega_s^2 d(sI_{s,1}) = \sigma^2 \int_0^t \omega_s^2 I_{s,1} ds + \sigma^2 \int_0^t s \omega_s^2 dI_{s,1} \\ &= \sigma^2 v_t^2 I_{\infty,1} + \sigma^2 \int_0^t \omega_s^2 (I_{s,1} - I_{\infty,1}) ds + \sigma^2 \int_0^t s \omega_s^2 dI_{s,1}. \end{aligned}$$

Grâce à une intégration par parties, on obtient l'égalité suivante :

$$\langle \tilde{M} \rangle_t = \sigma^2 v_t^2 I_{\infty,1} + \sigma^2 \int_0^t \omega_s^2 (I_{s,1} - I_{\infty,1}) ds + \sigma^2 t \omega_t^2 (I_{t,1} - I_{\infty,1}) - \sigma^2 \int_0^t (I_{s,1} - I_{\infty,1}) d(s \omega_s^2).$$

Par suite, il vient

$$\left\| \frac{\langle \tilde{M} \rangle_t}{v_t^2} - \sigma^2 I_{\infty,1} \right\| \leq \sigma^2 \sup_{s \leq t} \|I_{s,1} - I_{\infty,1}\| \left( 1 + 2t \frac{\omega_t^2}{v_t^2} \right).$$

Compte tenu de la propriété  $(P_2)$  du lemme 3.1, on obtient

$$\left\| \frac{\langle \tilde{M} \rangle_t}{v_t^2} - \sigma^2 I_{\infty,1} \right\| = \sigma^2 \sup_{s \leq t} \|I_{s,1} - I_{\infty,1}\| \left( 1 + \mathcal{O}(t^{(1-\alpha)}) \right).$$

La première assertion du lemme 3.2 découle alors de l'hypothèse  $(\mathcal{H}_1)$  et du fait que  $1 - \alpha - \beta < -(\alpha - \alpha')$ .

ii) D'après l'expression de  $P_t$ , on a

$$P_t = \int_0^t w_s d(sI_{s,1}) = \int_0^t w_s I_{s,1} ds + \int_0^t s w_s dI_{s,1}.$$

Une intégration par parties donne

$$P_t - u_t I_{\infty,1} = t w_t (I_{t,1} - I_{\infty,1}) + \int_0^t w_s (I_{s,1} - I_{\infty,1}) ds - \int_0^t (I_{s,1} - I_{\infty,1}) d(s w_s),$$

ce qui implique

$$\left\| \frac{P_t}{u_t} - I_{\infty,1} \right\| \leq \sup_{s \leq t} \|I_{s,1} - I_{\infty,1}\| \left( 1 + 2t \frac{w_t}{u_t} \right).$$

En utilisant la propriété  $(P_1)$  du lemme 3.1, il vient

$$\left\| \frac{P_t}{u_t} - I_{\infty,1} \right\| = \sup_{s \leq t} \|I_{s,1} - I_{\infty,1}\| \left( 1 + \mathcal{O}(t^{(1-\alpha)}) \right).$$

De même, la seconde assertion du lemme découle de l'hypothèse  $(\mathcal{H}_1)$ , ce qui achève la preuve du lemme 3.2.

**Lemme 3.3** *La martingale vectorielle continue  $\tilde{M}$  définie par la relation (16) vérifie les propriétés asymptotiques suivantes :*

1. *Théorème de la limite centrale*

$$(TLC) \quad \frac{\tilde{M}_t}{v_t} \Longrightarrow \sigma I_{\infty,1}^{1/2} G,$$

où  $G$  est un vecteur gaussien standard, indépendant de  $I_{\infty,1}$ .

2. *Théorème de la limite centrale presque-sûre*

$$(TLCPS) \quad \frac{1 - \alpha}{t^{1-\alpha}} \int_1^t \frac{ds}{s^\alpha} \delta_{\{\tilde{M}_s/v_s\}} \Longrightarrow \mu_\infty \quad p.s.,$$

où  $\mu_\infty$  est la loi de la variable aléatoire  $\sigma I_{\infty,1}^{1/2} G$  où  $G$  est un vecteur gaussien standard, indépendant de  $I_{\infty,1}$ .

3. *La loi forte quadratique*

$$(LFQ) \quad \frac{1 - \alpha}{t^{1-\alpha}} \int_0^t s^{-\alpha} \frac{\tilde{M}_s}{v_s} \frac{\tilde{M}_s^*}{v_s} ds \longrightarrow \sigma^2 I_{\infty,1} \quad p.s., \quad (t \longrightarrow \infty).$$

4. *Théorème de la limite centrale logarithmique*

$$(TLCL) \quad \left( \frac{t^{1-\alpha}}{1-\alpha} \right)^{-1/2} \int_1^t s^{-\alpha} \left( \frac{\tilde{M}_s}{v_s} \frac{\tilde{M}_s^*}{v_s} - \sigma^2 I_{\infty,1} \right) ds \Longrightarrow \nu_\infty,$$

où conditionnellement à  $I_{\infty,1}$ ,  $\nu_\infty$  est une loi gaussienne matricielle centrée indépendante de  $I_{\infty,1}$  et de covariance

$$\mathcal{C} = \sigma^4 \{ 2I_{\infty,1} \otimes I_{\infty,1} + 2[(\text{Vect}(I_{\infty,1}))(\text{Vect}(I_{\infty,1}))^*]^\perp \}.$$

### Preuve du lemme 3.3

1. Vu la première assertion du lemme précédent, on a

$$\frac{\langle \tilde{M} \rangle_t}{v_t^2} \longrightarrow \sigma^2 I_{\infty,1} \quad p.s., \quad (t \longrightarrow \infty).$$

En appliquant le TLC à la martingale continue  $\tilde{M}$ , on obtient la première assertion du lemme, à savoir

$$\frac{\tilde{M}_t}{v_t} \Longrightarrow \sigma I_{\infty,1}^{1/2} G,$$

où  $G$  est un vecteur gaussien standard, indépendant de  $I_{\infty,1}$ .

2. En appliquant le théorème de la limite centrale presque-sûre (voir théorème 1 dans [1]) pour le couple  $(\tilde{M}, v)$  où  $\tilde{M}$  est la martingale continue à croissance régulière donnée par (16) et normalisée par  $v_t = \left( \int_0^t \omega_s^2 ds \right)^{1/2}$ , on obtient

$$(\log v_t^2)^{-1} \int_1^t \delta_{\{\tilde{M}_s/v_s\}} d(\log v_s^2) \Longrightarrow \mu_\infty \quad p.s.,$$

où  $\mu_\infty$  est la loi de la variable aléatoire  $\sigma I_{\infty,1}^{1/2} G$ .

Par ailleurs, la propriété  $(P_2)$  du lemme 3.1 implique

$$\log v_t^2 \sim \frac{4}{1-\alpha} t^{1-\alpha} \quad (t \rightarrow \infty). \quad (19)$$

Combiné avec la convergence précédente, on déduit

$$\frac{1-\alpha}{t^{1-\alpha}} \int_1^t \delta_{\{\tilde{M}_s/v_s\}} \frac{ds}{s^\alpha} \Longrightarrow \mu_\infty \quad p.s.$$

3. La LFQ1 (voir théorème 3 dans [1]) appliquée à la martingale continue  $\tilde{M}$ , normalisée par le processus  $v_t = \left( \int_0^t \omega_s^2 ds \right)^{1/2}$ , donne

$$(\log v_t^2)^{-1} \int_1^t \frac{\tilde{M}_s}{v_s} \frac{\tilde{M}_s^*}{v_s} d(\log v_s^2) \longrightarrow \sigma^2 I_{\infty,1} \quad p.s., \quad (t \rightarrow \infty). \quad (20)$$

La troisième assertion du lemme découle de l'équivalence (19).

4. D'après le corollaire 2.2 dans [4] appliqué au couple  $(\tilde{M}, v)$ , on a

$$(\log v_t^2)^{-1/2} \int_1^t \left( \frac{\tilde{M}_s}{v_s} \frac{\tilde{M}_s^*}{v_s} - \frac{\langle \tilde{M} \rangle_s}{v_s^2} \right) d(\log v_s^2) \Longrightarrow \nu_\infty,$$

où conditionnellement à  $I_{\infty,1}$ ,  $\nu_\infty$  est une loi gaussienne matricielle centrée indépendante de  $I_{\infty,1}$  et de covariance

$$\mathcal{C} = \sigma^4 \{ 2I_{\infty,1} \otimes I_{\infty,1} + 2[(\text{Vect}(I_{\infty,1}))(\text{Vect}(I_{\infty,1}))^*]^\perp \}.$$

En tenant compte de l'équivalence (19), à savoir

$$\log v_t^2 \sim \frac{4}{1-\alpha} t^{1-\alpha} \quad (t \rightarrow \infty),$$

on obtient

$$\left( \frac{t^{1-\alpha}}{1-\alpha} \right)^{-1/2} \int_1^t s^{-\alpha} \left( \frac{\tilde{M}_s}{v_s} \frac{\tilde{M}_s^*}{v_s} - \frac{\langle \tilde{M} \rangle_s}{v_s^2} \right) ds \Longrightarrow \nu_\infty. \quad (21)$$

Par ailleurs, on a

$$\left( \frac{t^{1-\alpha}}{1-\alpha} \right)^{-1/2} \int_1^t s^{-\alpha} \left( \frac{\tilde{M}_s}{v_s} \frac{\tilde{M}_s^*}{v_s} - \frac{\langle \tilde{M} \rangle_s}{v_s^2} \right) ds$$

$$\begin{aligned}
&= \left( \frac{t^{1-\alpha}}{1-\alpha} \right)^{-1/2} \int_1^t s^{-\alpha} \left( \frac{\tilde{M}_s}{v_s} \frac{\tilde{M}_s^*}{v_s} - \sigma^2 I_{\infty,1} \right) ds \\
&\quad - \left( \frac{t^{1-\alpha}}{1-\alpha} \right)^{-1/2} \int_1^t s^{-\alpha} \left( \frac{\langle \tilde{M} \rangle_s}{v_s^2} - \sigma^2 I_{\infty,1} \right) ds. \tag{22}
\end{aligned}$$

Vu la première assertion du lemme 3.2, à savoir

$$\frac{\langle \tilde{M} \rangle_t}{v_t^2} - \sigma^2 I_{\infty,1} = \mathbf{o}(t^{-(\alpha-\alpha')}) \quad p.s., \quad (t \rightarrow \infty),$$

on obtient

$$\left( \frac{t^{1-\alpha}}{1-\alpha} \right)^{-1/2} \int_1^t s^{-\alpha} \left( \frac{\langle \tilde{M} \rangle_s}{v_s^2} - \sigma^2 I_{\infty,1} \right) ds = \mathbf{o}(t^{\alpha'-3\alpha/2+1/2}) \quad p.s., \quad (t \rightarrow \infty).$$

Comme par hypothèse on a  $\alpha' < (3\alpha - 1)/2$ , alors

$$\left( \frac{t^{1-\alpha}}{1-\alpha} \right)^{-1/2} \int_1^t s^{-\alpha} \left( \frac{\langle \tilde{M} \rangle_s}{v_s^2} - \sigma^2 I_{\infty,1} \right) ds = \mathbf{o}(1) \quad p.s., \quad (t \rightarrow \infty). \tag{23}$$

La dernière assertion du lemme 3.3 est établie en combinant (21), (22) et (23).

Le lemme 3.3 est ainsi établi.

### Preuve du théorème 2.1.1

1. D'après Le Breton et Musiela (voir lemme 3.3 dans [12]), on a

$$\lambda_m(\langle \tilde{M} \rangle_t) \rightarrow +\infty \quad p.s., \quad (t \rightarrow \infty).$$

Le comportement asymptotique du processus  $\langle \tilde{M} \rangle^{-1} \tilde{M}$  est donné par Darwich (voir théorème 1 dans [5]). En effet, on a

$$\limsup_{t \rightarrow \infty} \frac{v_t \left| [\langle \tilde{M} \rangle_t^{-1} \tilde{M}_t]_i \right|}{\sqrt{2 \log \log v_t^2}} < +\infty \quad p.s., \quad i = 1, \dots, d. \tag{24}$$

On en déduit

$$\begin{aligned}
v_t \left| [\langle \tilde{M} \rangle_t^{-1} \tilde{M}_t]_i \right| &= \left| [\langle \tilde{M} \rangle_t^{-1} v_t P_t(\tilde{\theta}_t - \theta)]_i \right| \\
&= \left| [\langle \tilde{M} \rangle_t^{-1} v_t^2 \frac{u_t}{v_t} \frac{P_t}{u_t}(\tilde{\theta}_t - \theta)]_i \right|, \quad \text{pour } i = 1, \dots, d. \tag{25}
\end{aligned}$$

En utilisant la propriété  $(P_4)$  du lemme 3.1 et le lemme (3.2), on déduit pour  $i = 1, \dots, d$ ,

$$v_t \left| [\langle \tilde{M} \rangle_t^{-1} \tilde{M}_t]_i \right| \sim \sigma^{-2} t^{\frac{\alpha}{2}} \left| [\tilde{\theta}_t - \theta]_i \right| \quad (t \rightarrow \infty). \tag{26}$$

Vu l'équivalence (19) et en combinant les relations (24) et (26), on obtient

$$\limsup_{t \rightarrow \infty} \sqrt{\frac{\sigma^{-4} t^\alpha}{2 \log \frac{4t^{1-\alpha}}{1-\alpha}}} \left| [\tilde{\theta}_t - \theta]_i \right| < +\infty \quad p.s., \quad i = 1, \dots, d.$$

Donc

$$\limsup_{t \rightarrow \infty} \sqrt{\frac{t^\alpha}{\log t}} \left| [\tilde{\theta}_t - \theta]_i \right| < +\infty \quad p.s., \quad i = 1, \dots, d,$$

ce que implique

$$[\tilde{\theta}_t - \theta]_i = \mathcal{O}\left(\sqrt{\frac{\log t}{t^\alpha}}\right), \quad i = 1, \dots, d.$$

Par conséquent, on déduit la première propriété de la consistance forte de l'estimateur  $\tilde{\theta}_t$  de  $\theta$ , à savoir

$$\|\tilde{\theta}_t - \theta\| = \mathcal{O}\left(\sqrt{\frac{\log t}{t^\alpha}}\right) \quad p.s.$$

Par ailleurs, l'hypothèse  $(\mathcal{H}_1)$ , la propriété  $(P_3)$  du lemme 3.1 et l'assertion ii) du lemme 3.2 impliquent

$$v_s^{-1}P_s = I_{\infty,1} s^{\frac{\alpha}{2}} + \mathbf{o}\left(s^{\alpha' - \frac{\alpha}{2}}\right) \quad p.s., \quad (27)$$

ce qui donne, combiné avec le TLC du lemme 3.3 et la relation (18), la normalité asymptotique de l'estimateur  $\tilde{\theta}$  de  $\theta$ . Ainsi on a établi la première partie du théorème 2.1.1.

2. Posons  $\tilde{Z}_s = \tilde{M}_s/v_s$ . D'après les relations (11) et (18), on a

$$\sqrt{t}(\tilde{\theta}_t - \theta) = \frac{1}{\sqrt{t}} \int_0^t P_s^{-1} \tilde{M}_s ds = \frac{1}{\sqrt{t}} \int_0^t v_s P_s^{-1} \tilde{Z}_s ds.$$

En combinant la propriété  $(P_4)$  du lemme 3.1 et l'assertion ii) du lemme 3.2, on obtient

$$\begin{aligned} v_s P_s^{-1} &= \frac{v_s}{u_s} u_s P_s^{-1} = (s^{-\frac{\alpha}{2}} + \mathbf{o}(s^{\frac{\alpha}{2}-1})) \left( I_{\infty,1}^{-1} + \mathbf{o}(s^{\alpha' - \alpha}) \right) \quad p.s., \\ &= I_{\infty,1}^{-1} s^{-\frac{\alpha}{2}} + \mathbf{o}(s^{\alpha' - 3\alpha/2}) + \mathbf{o}(s^{\alpha/2-1}) + \mathbf{o}(s^{\alpha' - \alpha/2 - 1}) \quad p.s. \end{aligned}$$

Or  $\alpha < 3/4$  et  $\alpha' \geq 1/2$ , donc  $\alpha' - 3\alpha/2 > \alpha/2 - 1$  et  $\alpha' - 3\alpha/2 > \alpha' - \alpha/2 - 1$  et on en déduit

$$v_s P_s^{-1} = I_{\infty,1}^{-1} s^{-\frac{\alpha}{2}} + \mathbf{o}(s^{\alpha' - 3\alpha/2}) \quad p.s.$$

Il en résulte que

$$\sqrt{t}(\tilde{\theta}_t - \theta) = \frac{I_{\infty,1}^{-1}}{\sqrt{t}} \int_0^t s^{-\frac{\alpha}{2}} \tilde{Z}_s ds + \mathbf{o}\left(\frac{1}{\sqrt{t}} \int_0^t s^{\alpha' - \frac{3}{2}\alpha} \tilde{Z}_s ds\right) \quad p.s. \quad (28)$$

Par suite, on a

$$\sqrt{t}\|\tilde{\theta}_t - \theta\| \leq \|I_{\infty,1}\|^{-1} \frac{1}{\sqrt{t}} \int_0^t s^{-\frac{\alpha}{2}} \|\tilde{Z}_s\| ds + \mathbf{o}\left(\frac{1}{\sqrt{t}} \int_0^t s^{\alpha' - \frac{3}{2}\alpha} \|\tilde{Z}_s\| ds\right). \quad (29)$$

La relation (18) combinée avec la propriété  $(P_4)$  du lemme 3.1 et l'assertion ii) du lemme 3.2 impliquent

$$\tilde{Z}_s \sim I_{\infty,1} s^{\frac{\alpha}{2}} (\tilde{\theta}_s - \theta) \quad (s \rightarrow \infty). \quad (30)$$

Grâce à la première assertion du théorème, à savoir

$$\|\tilde{\theta}_t - \theta\| = \mathcal{O}\left(\sqrt{\frac{\log t}{t^\alpha}}\right) \quad p.s.$$

et à l'équivalence (30), on obtient

$$\|\tilde{Z}_t\| = \mathcal{O}\left(\sqrt{\log t}\right) \quad p.s. \quad (31)$$

Par ailleurs, on a

$$a_s \tilde{Z}_s ds = -d\tilde{Z}_s + v_s^{-1} d\tilde{M}_s, \quad (32)$$

ce qui implique

$$\int_0^t a_s^{1/2} \tilde{Z}_s ds = - \int_0^t a_s^{-1/2} d\tilde{Z}_s + \int_0^t a_s^{-1/2} v_s^{-1} d\tilde{M}_s.$$

Grâce à la propriété  $(P_4)$  du lemme 3.1, on obtient les équivalences suivantes :

$$\int_0^t a_s^{1/2} \tilde{Z}_s ds \sim \sqrt{2} \int_0^t s^{-\alpha/2} \tilde{Z}_s ds \quad (t \rightarrow \infty),$$

$$\int_0^t a_s^{-1/2} d\tilde{Z}_s \sim \frac{1}{\sqrt{2}} \int_0^t s^{\alpha/2} d\tilde{Z}_s \quad (t \rightarrow \infty)$$

et

$$\int_0^t a_s^{-1/2} v_s^{-1} d\tilde{M}_s \sim \frac{1}{\sqrt{2}} \int_0^t s^{\alpha/2} v_s^{-1} d\tilde{M}_s \quad (t \rightarrow \infty).$$

D'où

$$\int_0^t s^{-\alpha/2} \tilde{Z}_s ds \sim L_t - K_t \quad (t \rightarrow \infty), \quad (33)$$

où  $L = (L_t, t \geq 0)$  est la martingale vectorielle continue définie par

$$L_t = \frac{1}{2} \int_0^t s^{\frac{\alpha}{2}} v_s^{-1} d\tilde{M}_s$$

et  $K = (K_t, t \geq 0)$  est le processus donné par

$$K_t = \frac{1}{2} \int_0^t s^{\frac{\alpha}{2}} d\tilde{Z}_s.$$

Par conséquent, on obtient l'inégalité suivante :

$$\frac{1}{\sqrt{t}} \int_0^t s^{-\alpha/2} \|\tilde{Z}_s\| ds \leq \frac{\|L_t\|}{\sqrt{t}} - \frac{\|K_t\|}{\sqrt{t}}. \quad (34)$$

En vue d'étudier le comportement asymptotique du membre de gauche de la relation (34) qui nous permettra de donner le comportement asymptotique de  $\sqrt{t}\|\hat{\theta}_t - \theta\|$  via l'inégalité (29), on étudiera ceux de  $K$  et  $L$ .

### Comportement asymptotique du processus $K$

Grâce à une intégration par parties, on obtient

$$K_t = \frac{t^{\alpha/2}}{2} \tilde{Z}_t - \frac{\alpha}{4} \int_0^t s^{\frac{\alpha}{2}-1} \tilde{Z}_s ds. \quad (35)$$

D'où l'inégalité suivante :

$$\|K_t\| \leq t^{\frac{\alpha}{2}} \|\tilde{Z}_t\| + \int_0^t s^{\frac{\alpha}{2}-1} \|\tilde{Z}_s\| ds,$$

qui donne, combinée avec la relation (31)

$$\|K_t\| = \mathcal{O}\left(\sqrt{t^\alpha \log t}\right) \quad p.s. \quad (36)$$

### Comportement asymptotique du processus $L$

La variation quadratique prévisible de la martingale vectorielle continue  $L$  s'écrit

$$\langle L \rangle_t = \frac{1}{4} \int_0^t s^\alpha \frac{d\langle \tilde{M} \rangle_s}{v_s^2}. \quad (37)$$

En tenant compte de la relation (17), à savoir

$$\langle \tilde{M} \rangle_t = \sigma^2 \int_0^t \omega_s^2 X_s X_s^* ds,$$

il vient

$$\langle L \rangle_t = \frac{\sigma^2}{4} \int_0^t s^\alpha \frac{\omega_s^2}{v_s^2} X_s X_s^* ds.$$

Vu la propriété ( $P_2$ ) du lemme 3.1, on obtient

$$\frac{\langle L \rangle_t}{t} = \sigma^2 I_{t,1} + \mathcal{O}\left(\frac{1}{t} \int_0^t s^{-(1-\alpha)} X_s X_s^* ds\right),$$

et grâce au lemme de Toeplitz, on obtient la convergence suivante :

$$\frac{\langle L \rangle_t}{t} \longrightarrow \sigma^2 I_{\infty,1} \quad p.s., \quad (t \longrightarrow \infty).$$

Par conséquent, on a

$$\langle L \rangle_t = \mathcal{O}(t) \quad p.s.$$

Par ailleurs, en utilisant la relation (37) et la propriété ( $P_2$ ) du lemme 3.1, on obtient l'équivalence suivante :

$$\langle L \rangle_t \sim \int_0^t w_s^{-2} d\langle \tilde{M} \rangle_s \quad (t \longrightarrow \infty).$$

En tenant compte de la relation (17), on obtient

$$\langle L \rangle_t \sim \langle M \rangle_t = \sigma^2 \int_0^t X_s X_s^* ds \quad (t \longrightarrow \infty),$$

où  $M$  est la martingale vectorielle continue donnée par la relation (56). Par conséquent et vu le lemme 3.3 dans [12], il vient

$$\lambda_m(\langle L \rangle_t) \longrightarrow +\infty \quad p.s., \quad (t \longrightarrow +\infty).$$

Grâce à la LLI (voir théorème 1 dans [5]), on a le comportement asymptotique du processus  $\langle L \rangle^{-1} L$

$$\limsup_{t \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{t} |[\langle L \rangle_t^{-1} L_t]_i|}{\sqrt{2 \log \log t}} < +\infty \quad p.s., \quad i = 1, \dots, d. \quad (38)$$

Il en résulte que la norme de la martingale  $L$  vérifie

$$\|L_t\| = \mathcal{O}\left(\sqrt{t \log \log t}\right) \quad p.s. \quad (39)$$

En insérant (36) et (39) dans (34), on obtient le comportement asymptotique du premier terme du membre de droite de la relation (29), à savoir

$$\begin{aligned} \|I_{\infty,1}\|^{-1} \frac{1}{\sqrt{t}} \int_0^t s^{-\alpha/2} \|\tilde{Z}_s\| ds &= \mathcal{O}\left(\sqrt{\log \log t}\right) + \mathcal{O}\left(\sqrt{t^{\alpha-1} \log t}\right) \quad p.s. \\ &= \mathcal{O}\left(\sqrt{\log \log t}\right) \quad p.s. \end{aligned}$$

Vu que le second terme du membre de droite de la relation (29) s'écrit

$$\mathfrak{o}\left(\frac{1}{\sqrt{t}} \int_0^t s^{\alpha' - \frac{3}{2}\alpha} \|\tilde{Z}_s\| ds\right) \sim \mathfrak{o}\left(t^{\alpha' - \frac{3}{2}\alpha + \frac{1}{2}} \sqrt{\log t}\right) \quad p.s., \quad (t \longrightarrow \infty),$$

on en déduit

$$\|\bar{\theta}_t - \theta\| = \mathcal{O}\left(\sqrt{\frac{\log \log t}{t}}\right) + \mathbf{o}\left(t^{\alpha' - \frac{3}{2}\alpha} \sqrt{\log t}\right) \quad p.s.$$

Comme  $\alpha' < (3\alpha - 1)/2$ , on obtient

$$\|\bar{\theta}_t - \theta\| = \mathcal{O}\left(\sqrt{\frac{\log \log t}{t}}\right) \quad p.s.,$$

et donc la propriété de la consistance forte de l'estimateur  $\bar{\theta}_t$  de  $\theta$ . Pour achever la preuve du théorème 2.1.1, il reste à prouver que l'estimateur  $\bar{\theta}_t$  de  $\theta$  vérifie un TLC.

En utilisant l'équivalence (33), il vient

$$\frac{1}{\sqrt{t}} \int_0^t s^{-\alpha/2} \tilde{Z}_s ds \sim \frac{L_t}{\sqrt{t}} - \frac{K_t}{\sqrt{t}} \quad (t \rightarrow \infty). \quad (40)$$

Or, d'après la relation (35), on a

$$\frac{K_t}{\sqrt{t}} = \frac{t^{\frac{\alpha-1}{2}}}{2} \tilde{Z}_t - \frac{\alpha}{4\sqrt{t}} \int_0^t s^{\alpha/2-1} \tilde{Z}_s ds. \quad (41)$$

En tenant compte de la relation (28), à savoir

$$\sqrt{t}(\bar{\theta}_t - \theta) = \frac{I_{\infty,1}^{-1}}{\sqrt{t}} \int_0^t s^{-\frac{\alpha}{2}} \tilde{Z}_s ds + \mathbf{o}\left(\frac{1}{\sqrt{t}} \int_0^t s^{\alpha'-3\alpha/2} \tilde{Z}_s ds\right), \quad p.s.,$$

du fait que

$$\mathbf{o}\left(\frac{1}{\sqrt{t}} \int_0^t s^{\alpha'-3\alpha/2} \tilde{Z}_s ds\right) = \mathbf{o}\left(t^{\alpha'-3\alpha/2+1/2} \sqrt{\log t}\right) = \mathbf{o}(1) \quad p.s.,$$

(car  $\alpha' < 3\alpha/2 - 1/2$ ) et des deux relations (40) et (41), on obtient presque sûrement

$$\sqrt{t}(\bar{\theta}_t - \theta) \sim -\frac{I_{\infty,1}^{-1}}{2} t^{\frac{\alpha-1}{2}} \tilde{Z}_t + I_{\infty,1}^{-1} \frac{L_t}{\sqrt{t}} + \frac{\alpha I_{\infty,1}^{-1}}{4\sqrt{t}} \int_0^t s^{\alpha/2-1} \tilde{Z}_s ds \quad (t \rightarrow \infty). \quad (42)$$

Le premier terme du membre de droite de cette dernière équivalence tend vers 0 vu que  $\tilde{Z}_s$  converge en loi, et de même le dernier terme car

$$\frac{\alpha I_{\infty,1}^{-1}}{4\sqrt{t}} \int_0^t s^{\alpha/2-1} \tilde{Z}_s ds = \mathcal{O}\left(\sqrt{t^{\alpha-1} \log t}\right) = \mathbf{o}(1) \quad p.s.$$

Quant au second terme, comme

$$\frac{\langle L \rangle_t}{t} \rightarrow \sigma^2 I_{\infty,1} \quad p.s., \quad (t \rightarrow \infty),$$

alors d'après le TLC appliqué à la martingale continue  $L$ , on obtient

$$I_{\infty,1}^{-1} \frac{L_t}{\sqrt{t}} \Rightarrow \sigma I_{\infty,1}^{-1/2} G, \quad (43)$$

où  $G$  est un vecteur gaussien standard, indépendant de la v.a.  $I_{\infty,1}$ . On obtient le dernier résultat en insérant la relation (43) dans (42). Cela achève la preuve du théorème 2.1.1.

## Preuve du théorème 2.1.2

1. Rappelons d'abord les relations (18) et (27), à savoir

$$\tilde{M}_t = P_t(\tilde{\theta}_t - \theta)$$

et

$$\frac{P_s}{v_s} = I_{\infty,1} s^{\frac{\alpha}{2}} + \mathbf{o}\left(s^{\alpha' - \frac{\alpha}{2}}\right) \quad p.s.$$

Posons

$$F_t = \frac{1}{t^{1-\alpha}} \int_1^t \varphi\left(\frac{P_s}{v_s}(\tilde{\theta}_s - \theta)\right) \frac{ds}{s^\alpha} - \frac{1}{t^{1-\alpha}} \int_1^t \varphi\left(I_{\infty,1} s^{\alpha/2}(\tilde{\theta}_s - \theta)\right) \frac{ds}{s^\alpha},$$

où  $\varphi$  est une fonction lipschitzienne continue bornée, alors

$$\|F_t\| \leq C t^\epsilon t^{-(1-\alpha)} \int_1^t s^{-\alpha} \left\| \frac{P_s}{v_s} - I_{\infty,1} s^{\alpha/2} \right\| \|\tilde{\theta}_s - \theta\| ds.$$

En tenant compte de la relation (27) et du fait que

$$\|\tilde{\theta}_t - \theta\| = \mathcal{O}\left(\sqrt{\frac{\log t}{t^\alpha}}\right) \quad p.s.,$$

on obtient

$$\|F_t\| = \mathbf{o}\left(t^{\alpha' - 2\alpha + 1} \sqrt{\log t}\right) \quad p.s., \quad (t \rightarrow \infty).$$

Vu que  $\alpha < 3/4$ , il vient

$$F_t \rightarrow 0 \quad p.s., \quad (t \rightarrow \infty).$$

La première assertion du lemme 3.3 et la relation (18) impliquent

$$\frac{1-\alpha}{t^{1-\alpha}} \int_1^t \frac{ds}{s^\alpha} \delta\left\{\frac{P_s}{v_s}(\tilde{\theta}_s - \theta)\right\} \Longrightarrow \mu_\infty \quad p.s.,$$

où  $\mu_\infty$  est la loi de la variable aléatoire  $\sigma I_{\infty,1}^{1/2} G$  où  $G$  est un vecteur gaussien standard indépendant de la v.a.  $I_{\infty,1}$ .

Par conséquent

$$\frac{1-\alpha}{t^{1-\alpha}} \int_1^t \frac{ds}{s^\alpha} \delta_{\{s^{\alpha/2} I_{\infty,1}(\tilde{\theta}_s - \theta)\}} \Longrightarrow \mu_\infty \quad p.s.$$

Cela donne la première assertion du théorème 2.1.2.

2. Posons

$$\tilde{\delta}_s = (\tilde{\theta}_s - \theta)(\tilde{\theta}_s - \theta)^*$$

et

$$\tilde{\delta}_{s,t} = (\tilde{\theta}_s - \bar{\theta}_t)(\tilde{\theta}_s - \bar{\theta}_t)^*.$$

On a

$$\begin{aligned} \frac{1-\alpha}{t^{1-\alpha}} \left\| \int_1^t s^{-\alpha} \frac{P_s}{v_s} \tilde{\delta}_s \frac{P_s}{v_s} ds - I_{\infty,1} \int_1^t \tilde{\delta}_s ds I_{\infty,1} \right\| \\ \leq t^{-(1-\alpha)} \left( \|\tilde{J}_{t,1}\| + \|\tilde{J}_{t,2}\| + \|\tilde{J}_{t,3}\| \right), \end{aligned} \quad (44)$$

avec

$$\tilde{J}_{t,1} = \int_1^t s^{-\alpha} \left( \frac{P_s}{v_s} - s^{\alpha/2} I_{\infty,1} \right) \tilde{\delta}_s \left( \frac{P_s}{v_s} - s^{\alpha/2} I_{\infty,1} \right) ds,$$

$$\tilde{J}_{t,2} = \int_1^t s^{-\alpha/2} \left( \frac{P_s}{v_s} - s^{\alpha/2} I_{\infty,1} \right) \tilde{\delta}_s ds I_{\infty,1},$$

$$\tilde{J}_{t,3} = \int_1^t s^{-\alpha/2} \tilde{\delta}_s \left( \frac{P_s}{v_s} - s^{\frac{\alpha}{2}} I_{\infty,1} \right) ds.$$

D'une part, le processus  $(\tilde{J}_{t,1})$  est majoré par

$$t^{-(1-\alpha)} \|\tilde{J}_{t,1}\| \leq t^{-(1-\alpha)} \int_1^t s^{-\alpha} \left\| \frac{P_s}{v_s} - s^{\alpha/2} I_{\infty,1} \right\|^2 \|\tilde{\theta}_s - \theta\|^2 ds.$$

D'autre part, on a

$$\|\tilde{\theta}_s - \theta\|^2 = \mathcal{O} \left( \frac{\log s}{s^\alpha} \right) \quad p.s.,$$

et de la relation (27), on obtient

$$\left\| \frac{P_s}{v_s} - s^{\alpha/2} I_{\infty,1} \right\|^2 = \mathbf{o} \left( s^{-(\alpha-2\alpha')} \right) \quad p.s.$$

On en déduit

$$t^{-(1-\alpha)} \|\tilde{J}_{t,1}\| = \mathbf{o} \left( t^{2(\alpha'-\alpha)} \log t \right) = \mathbf{o}(1) \quad p.s., \quad (t \rightarrow \infty). \quad (45)$$

De même, les deux processus  $(\tilde{J}_{t,2})$  et  $(\tilde{J}_{t,3})$  sont majorés par

$$\begin{aligned} t^{-(1-\alpha)} \|\tilde{J}_{t,2}\| &= t^{-(1-\alpha)} \|\tilde{J}_{t,3}\| \\ &\leq \|I_{\infty,1}\| t^{-(1-\alpha)} \int_1^t s^{-\alpha/2} \left\| \frac{P_s}{v_s} - s^{\alpha/2} I_{\infty,1} \right\| \|\tilde{\theta}_s - \theta\|^2 ds. \end{aligned}$$

il vient

$$t^{-(1-\alpha)} \|\tilde{J}_{t,2}\| = \mathbf{o} \left( t^{\alpha'-\alpha} \log t \right) = \mathbf{o}(1) \quad p.s., \quad (t \rightarrow \infty). \quad (46)$$

Par conséquent, vu que  $I_{\infty,1}$  est inversible et en tenant compte du lemme 3.3 et des deux relations (18) et (44), on obtient

$$\frac{1-\alpha}{t^{1-\alpha}} \int_1^t \tilde{\delta}_s ds \rightarrow \sigma^2 I_{\infty,1}^{-1} \quad p.s., \quad (t \rightarrow \infty). \quad (47)$$

Par ailleurs, on a

$$\frac{1-\alpha}{t^{1-\alpha}} \left\| \int_1^t \tilde{\delta}_s - \tilde{\delta}_{s,t} ds \right\| \leq t^{-(1-\alpha)} \left( \|\tilde{K}_{t,1}\| + \|\tilde{K}_{t,2}\| + \|\tilde{K}_{t,3}\| \right), \quad (48)$$

avec

$$\tilde{K}_{t,1} = \int_1^t (\tilde{\theta}_s - \bar{\theta}_t) ds (\bar{\theta}_t - \theta)^*,$$

$$\tilde{K}_{t,2} = (\bar{\theta}_t - \theta) \int_1^t (\tilde{\theta}_s - \bar{\theta}_t)^* ds,$$

$$\tilde{K}_{t,3} = (t-1)(\bar{\theta}_t - \theta)(\bar{\theta}_t - \theta)^*.$$

Vu que les deux processus  $(\tilde{K}_{t,1})$  et  $(\tilde{K}_{t,2})$  sont majorés par

$$\begin{aligned} t^{-(1-\alpha)} \|\tilde{K}_{t,1}\| &= t^{-(1-\alpha)} \|\tilde{K}_{t,2}\| \\ &\leq t^{-(1-\alpha)} \|\bar{\theta}_t - \theta\| \int_1^t \|\tilde{\theta}_s - \theta\| ds + (t-1)t^{-(1-\alpha)} \|\bar{\theta}_t - \theta\|^2, \end{aligned} \quad (49)$$

et en tenant compte du fait que

$$\|\tilde{\theta}_t - \theta\| = \mathcal{O}\left(\sqrt{\frac{\log t}{t^\alpha}}\right) \quad p.s. \quad \text{et} \quad \|\bar{\theta}_t - \theta\| = \mathcal{O}\left(\sqrt{\frac{\log \log t}{t}}\right) \quad p.s.,$$

on en déduit

$$\begin{aligned} t^{-(1-\alpha)} \|\tilde{K}_{t,1}\| &= t^{-(1-\alpha)} \|\tilde{K}_{t,2}\| \\ &= \mathcal{O}\left(t^{-(1-\alpha)/2} \sqrt{\log t} \sqrt{\log \log t}\right) \\ &= \mathcal{O}\left(t^{-(1-\alpha)} \log \log t\right). \end{aligned}$$

Il en résulte que

$$t^{-(1-\alpha)} \|\tilde{K}_{t,1}\| \longrightarrow 0 \quad p.s. \quad \text{et} \quad t^{-(1-\alpha)} \|\tilde{K}_{t,2}\| \longrightarrow 0 \quad p.s., \quad (t \longrightarrow \infty). \quad (50)$$

Le processus  $(\tilde{K}_{t,3})$  est majoré par

$$t^{-(1-\alpha)} \|\tilde{K}_{t,3}\| \leq (t-1)t^{-(1-\alpha)} \|\bar{\theta}_t - \theta\|^2.$$

Donc, on a

$$t^{-(1-\alpha)} \|\tilde{K}_{t,3}\| = \mathcal{O}\left(t^{-(1-\alpha)} \log \log t\right) \quad p.s., \quad (t \longrightarrow \infty).$$

Par conséquent, on obtient

$$t^{-(1-\alpha)} \|\tilde{K}_{t,3}\| \longrightarrow 0 \quad p.s., \quad (t \longrightarrow \infty). \quad (51)$$

Enfin, en insérant les relations (50) et (51) dans l'inégalité (48), il vient

$$\frac{1-\alpha}{t^{1-\alpha}} \left\| \int_1^t \tilde{\delta}_s - \tilde{\delta}_{s,t} ds \right\| \longrightarrow 0 \quad p.s., \quad (t \longrightarrow \infty). \quad (52)$$

La seconde assertion du théorème découle des propriétés (47) et (52).

3. Notons que

$$\begin{aligned} \left(\frac{t^{1-\alpha}}{1-\alpha}\right)^{-1/2} \int_1^t s^{-\alpha} \left(\frac{\tilde{M}_s}{v_s} \frac{\tilde{M}_s^*}{v_s} - \sigma^2 I_{\infty,1}\right) ds \\ = \left(\frac{t^{1-\alpha}}{1-\alpha}\right)^{-1/2} \int_1^t s^{-\alpha} \frac{\tilde{M}_s}{v_s} \frac{\tilde{M}_s^*}{v_s} ds - \left(\frac{t^{1-\alpha}}{1-\alpha}\right)^{1/2} \sigma^2 I_{\infty,1}. \end{aligned}$$

De la relation (18), on a

$$\tilde{M}_s \tilde{M}_s^* = P_s \tilde{\delta}_s P_s. \quad (53)$$

Par suite, grâce à la quatrième assertion du lemme 3.3, on a

$$\left(\frac{t^{1-\alpha}}{1-\alpha}\right)^{-1/2} \int_1^t s^{-\alpha} \frac{P_s}{v_s} \tilde{\delta}_s \frac{P_s}{v_s} ds - \left(\frac{t^{1-\alpha}}{1-\alpha}\right)^{1/2} \sigma^2 I_{\infty,1} \implies \nu_\infty.$$

Par ailleurs, notons que

$$\begin{aligned} \left(\frac{t^{1-\alpha}}{1-\alpha}\right)^{-1/2} \left\| \int_1^t s^{-\alpha} \frac{P_s}{v_s} \tilde{\delta}_s \frac{P_s}{v_s} ds - I_{\infty,1} \int_1^t \tilde{\delta}_s ds I_{\infty,1} \right\| \leq \\ t^{-(1-\alpha)/2} \left( \|\tilde{J}_{t,1}\| + \|\tilde{J}_{t,2}\| + \|\tilde{J}_{t,3}\| \right), \end{aligned} \quad (54)$$

où les processus  $(\tilde{J}_{t,i})$ ,  $i \in \{1, 2, 3\}$ , sont définis par la relation (44). De la relation (45), on obtient

$$t^{-(1-\alpha)/2} \|\tilde{J}_{t,1}\| = \mathbf{o} \left( t^{2\alpha' - 5\alpha/2 + 1/2} \right) \quad p.s., \quad (t \rightarrow \infty).$$

De la relation (46), on obtient

$$t^{-(1-\alpha)/2} \|\tilde{J}_{t,2}\| = t^{-(1-\alpha)/2} \|\tilde{J}_{t,3}\| = \mathbf{o} \left( t^{\alpha' - 3\alpha/2 + 1/2} \right) \quad p.s., \quad (t \rightarrow \infty).$$

Vu que  $\alpha' < (3\alpha - 1)/2$ , on a

$$t^{-(1-\alpha)/2} \|\tilde{J}_{t,1}\| = \mathbf{o}(1) \quad p.s., \quad (t \rightarrow \infty)$$

et

$$t^{-(1-\alpha)/2} \|\tilde{J}_{t,2}\| = t^{-(1-\alpha)/2} \|\tilde{J}_{t,3}\| = \mathbf{o}(1) \quad p.s., \quad (t \rightarrow \infty).$$

Par conséquent, en tenant compte de la relation (54), on obtient quand  $t$  tend vers l'infini,

$$\left( \frac{t^{1-\alpha}}{1-\alpha} \right)^{-1/2} \left\| \int_1^t s^{-\alpha} \frac{P_s}{v_s} \tilde{\delta}_s \frac{P_s}{v_s} ds - I_{\infty,1} \int_1^t \tilde{\delta}_s ds I_{\infty,1} \right\| \rightarrow 0 \quad p.s. \quad (55)$$

Par suite, on en déduit

$$\left( \frac{t^{1-\alpha}}{1-\alpha} \right)^{1/2} \left( \frac{1-\alpha}{t^{1-\alpha}} \int_1^t \tilde{\delta}_s ds - \sigma^2 I_{\infty,1}^{-1} \right) \Rightarrow \nu_{\infty},$$

où conditionnellement à  $\sigma^2 I_{\infty,1}$ ,  $\nu_{\infty}$  est une loi gaussienne matricielle centrée indépendante de  $I_{\infty,1}$  et de covariance

$$\mathcal{C} = \sigma^4 I_{\infty,1}^{-2} \left\{ 2I_{\infty,1} \otimes I_{\infty,1} + 2[(\text{Vect}(I_{\infty,1}))(\text{Vect}(I_{\infty,1}))^*]^\perp \right\} I_{\infty,1}^{-2}.$$

Le résultat découle de la convergence (52), ce qui achève la preuve du théorème 2.1.2.

### 3.2 Preuves des résultats relatifs au cas instable

Dans la suite, on introduit la martingale vectorielle continue  $M$  définie par

$$M_t = \sigma \int_0^t X_s dW_s. \quad (56)$$

Sa variation quadratique est donnée par

$$\langle M \rangle_t = \sigma^2 \int_0^t X_s X_s^* ds,$$

dont le comportement asymptotique est donné par (voir relation (14))

$$e^{-B_\theta t} \langle M \rangle_t e^{-B_\theta^* t} \rightarrow \sigma^2 I_{\infty,2} \quad p.s., \quad (t \rightarrow \infty).$$

D'après (2) et (3), on obtient la relation-cl suivante :

$$M_t = \sigma^{-2} \langle M \rangle_t (\hat{\theta}_t - \theta). \quad (57)$$

**Lemme 3.4** *La martingale vectorielle continue  $M$  définie par (56) vérifie les propriétés asymptotiques suivantes :*

1. *Théorème de la limite centrale*

$$(TLC) \quad e^{-B_\theta t} M_t \Rightarrow \sigma I_{\infty,2}^{1/2} G,$$

où  $G$  est un vecteur gaussien standard, indépendant de la v.a.  $I_{\infty,2}$ .

2. Théorème de la limite centrale presque-sûre

$$(TLCPS) \quad \frac{1}{t} \int_0^t ds \delta_{\{e^{-B_\theta s} M_s\}} \Longrightarrow \mu_\infty \quad p.s.,$$

où  $\mu_\infty$  est la loi de la variable aléatoire  $\sigma I_{\infty,2}^{1/2} G$  où  $G$  est un vecteur gaussien standard, indépendant de la v.a.  $I_{\infty,2}$ .

3. La loi forte quadratique

$$(LFQ) \quad \frac{1}{t} \int_0^t e^{-B_\theta s} M_s M_s^* e^{-B_\theta^* s} ds \longrightarrow \sigma^2 I_{\infty,2} \quad p.s., \quad (t \longrightarrow \infty).$$

4. Théorème de la limite centrale logarithmique

$$(TLCL) \quad t^{-1/2} \int_0^t \{B_\theta \tilde{D}_s + \tilde{D}_s B_\theta^*\} ds \Longrightarrow \nu_\infty,$$

où  $\tilde{D}_s = e^{-B_\theta s} (M_s M_s^* - \langle M \rangle_s) e^{-B_\theta^* s}$ , et conditionnellement à  $I_{\infty,2}$ ,  $\nu_\infty$  est une loi gaussienne matricielle centrée, indépendante de la variable aléatoire  $I_{\infty,2}$  et de covariance

$$\mathcal{C} = \sigma^4 (2\text{tr}(B_\theta))^{-1} \{2I_{\infty,2} \otimes I_{\infty,2} + 2[(\text{Vect}(I_{\infty,2}))(\text{Vect}(I_{\infty,2}))^*]^\perp\}.$$

**Preuve du lemme 3.4**

1. La variation quadratique prévisible de la martingale  $M$  vérifie

$$e^{-B_\theta t} \langle M \rangle_t e^{-B_\theta^* t} \longrightarrow \sigma^2 I_{\infty,2} \quad p.s., \quad (t \longrightarrow \infty),$$

et le TLC appliqué à la martingale continue  $M$  implique

$$e^{-B_\theta t} M_t \Longrightarrow \sigma I_{\infty,2}^{1/2} G,$$

où  $G$  est un vecteur gaussien standard, indépendant de la v.a.  $I_{\infty,2}$ , d'où la première assertion du lemme 3.4.

2. Le théorème de la limite centrale presque-sûre (voir théorème 2.1.1 dans [9]), appliqué au couple  $(M, V)$  où  $M$  est la martingale continue donnée par (56) et normalisée par  $V_t = e^{B_\theta t}$ , implique

$$\frac{1}{t} \int_0^t ds \delta_{\{V_s^{-1} M_s\}} \Longrightarrow \mu_\infty \quad p.s.,$$

où  $\mu_\infty$  est la loi de la variable aléatoire  $\sigma I_{\infty,2}^{1/2} G$  et  $G$  est un vecteur gaussien standard, indépendant de la v.a.  $I_{\infty,2}$ . La seconde assertion du lemme 3.4 est établie.

3. La LFQ (voir théorème 2.1.1 dans [9]), appliquée à la martingale continue  $M$  normalisée par le processus  $V_t = e^{B_\theta t}$ , donne

$$\frac{1}{t} \int_1^t e^{-B_\theta s} M_s M_s^* e^{-B_\theta^* s} \longrightarrow \sigma^2 I_{\infty,2} \quad p.s., \quad (t \longrightarrow \infty),$$

d'où la troisième assertion du lemme 3.4.

4. En appliquant le TLC de la LFQ (voir théorème 2.1.1 dans [9]) au couple  $(M, V)$ , où  $M$  est la martingale continue donnée par (56) et normalisée par  $V_t = e^{B_\theta t}$ , on obtient

$$t^{-1/2} \int_0^t \{B_\theta \tilde{D}_s + \tilde{D}_s B_\theta^*\} ds \Longrightarrow \nu_\infty \quad (t \longrightarrow \infty), \quad (58)$$

où  $\tilde{D}_s = e^{-B_\theta s} (M_s M_s^* - \langle M \rangle_s) e^{-B_\theta^* s}$ , et conditionnellement à  $I_{\infty,2}$ ,  $\nu_\infty$  est une loi gaussienne matricielle centrée, indépendante de la variable aléatoire  $I_{\infty,2}$  et de covariance

$$\mathcal{C} = \sigma^4 (2\text{tr}(B_\theta))^{-1} \{2I_{\infty,2} \otimes I_{\infty,2} + 2[(\text{Vect}(I_{\infty,2}))(\text{Vect}(I_{\infty,2}))^*]^\perp\}.$$

Cela achève la preuve du lemme 3.4.

## Preuve du théorème 2.2.1

1. Vu la relation (57), à savoir

$$M_t = \sigma^{-2} \langle M \rangle_t (\hat{\theta}_t - \theta),$$

on a

$$\begin{aligned} e^{-B_\theta t} M_t &= I_{t,2} e^{B_\theta^* t} (\hat{\theta}_t - \theta) \\ &= (I_{t,2} - I_{\infty,2}) e^{B_\theta^* t} (\hat{\theta}_t - \theta) + I_{\infty,2} e^{B_\theta^* t} (\hat{\theta}_t - \theta). \end{aligned} \quad (59)$$

En écrivant

$$\|(I_{t,2} - I_{\infty,2}) e^{B_\theta^* t} (\hat{\theta}_t - \theta)\| \leq \|I_{t,2} - I_{\infty,2}\| \|e^{B_\theta^* t}\| \|\hat{\theta}_t - \theta\|,$$

et en tenant compte de la propriété (5), à savoir

$$\|\hat{\theta}_t - \theta\| = \mathcal{O}\left(\sqrt{t} e^{-mt}\right) \quad p.s.,$$

et du fait que

$$\|e^{B_\theta^* t}\| \sim e^{mt}, \quad (t \rightarrow \infty), \quad (60)$$

il vient, de l'hypothèse ( $\mathcal{H}_2$ ),

$$\begin{aligned} \|(I_{t,2} - I_{\infty,2}) e^{B_\theta^* t} (\hat{\theta}_t - \theta)\| &= \mathbf{o}(t^{\frac{1}{2}-\beta}) \\ &= \mathbf{o}(1) \quad p.s., \quad (t \rightarrow \infty), \quad \text{car } \beta > 1/2. \end{aligned} \quad (61)$$

La première assertion du théorème 2.2.1 découle de la première assertion du lemme 3.4 et des deux relations (59) et (61).

2. Soit  $\varphi$  une fonction lipschitzienne continue bornée. Posons

$$G_t = t^{-1} \int_0^t \varphi(I_{s,2} e^{B_\theta^* s} (\hat{\theta}_s - \theta)) ds - t^{-1} \int_0^t \varphi(I_{\infty,2} e^{B_\theta^* s} (\hat{\theta}_s - \theta)) ds.$$

Alors on a

$$\|G_t\| \leq C^{te} t^{-1} \int_0^t \|I_{s,2} - I_{\infty,2}\| \|e^{B_\theta s}\| \|\hat{\theta}_s - \theta\| ds.$$

En tenant compte de l'hypothèse ( $\mathcal{H}_2$ ) et de la propriété (5), on en déduit

$$\|G_t\| = \mathbf{o}(t^{\frac{1}{2}-\beta}) = \mathbf{o}(1) \quad p.s., \quad (t \rightarrow \infty), \quad \text{car } \beta > 1/2. \quad (62)$$

D'après la deuxième assertion du lemme 3.4 et la relation (57), on obtient

$$t^{-1} \int_0^t ds \delta_{\{I_{s,2} e^{B_\theta^* s} (\hat{\theta}_s - \theta)\}} \Longrightarrow \mu_\infty \quad p.s., \quad (63)$$

où  $\mu_\infty$  est la loi de la variable aléatoire  $\sigma I_{\infty,2}^{1/2} G$  et  $G$  est un vecteur gaussien standard, indépendant de la v.a.  $I_{\infty,2}$ .

Grâce aux propriétés (62) et (63), la seconde assertion du théorème 2.2.1 est établie.

3. Vu que

$$e^{-B_\theta t} M_t = I_{t,2} e^{B_\theta^* t} (\hat{\theta}_t - \theta) \quad (64)$$

et d'après la troisième assertion du lemme 3.4, on a

$$t^{-1} \int_0^t e^{-B_\theta s} M_s M_s^* e^{-B_\theta^* s} ds \longrightarrow \sigma^2 I_{\infty,2} \quad p.s., \quad (t \rightarrow \infty).$$

Ainsi pour établir la troisième assertion du théorème, il suffit de montrer que, quand  $t$  tend vers l'infini, on a

$$t^{-1} \left\| \int_0^t I_{s,2} e^{B_\theta^* s} \hat{\delta}_s e^{B_\theta s} I_{s,2}^* ds - I_{\infty,2} \int_0^t e^{B_\theta^* s} \hat{\delta}_s e^{B_\theta s} ds I_{\infty,2} \right\| \longrightarrow 0 \quad p.s., \quad (65)$$

où  $\hat{\delta}_s = (\hat{\theta}_s - \theta)(\hat{\theta}_s - \theta)^*$ . Pour ce faire, considérons l'inégalité suivante :

$$\begin{aligned} t^{-1} \left\| \int_0^t I_{s,2} e^{B_\theta^* s} \hat{\delta}_s e^{B_\theta s} I_{s,2}^* ds - I_{\infty,2} \int_0^t e^{B_\theta^* s} \hat{\delta}_s e^{B_\theta s} ds I_{\infty,2} \right\| \\ \leq t^{-1} \left( \|\hat{J}_{t,1}\| + \|\hat{J}_{t,2}\| + \|\hat{J}_{t,3}\| \right), \end{aligned} \quad (66)$$

avec

$$\hat{J}_{t,1} = \int_0^t (I_{s,2} - I_{\infty,2}) e^{B_\theta^* s} \hat{\delta}_s e^{B_\theta s} (I_{s,2} - I_{\infty,2}) ds,$$

$$\hat{J}_{t,2} = \int_0^t (I_{s,2} - I_{\infty,2}) e^{B_\theta^* s} \hat{\delta}_s e^{B_\theta s} ds I_{\infty,2},$$

$$\hat{J}_{t,3} = I_{\infty,2} \int_0^t e^{B_\theta^* s} \hat{\delta}_s e^{B_\theta s} (I_{s,2} - I_{\infty,2}) ds.$$

Le processus  $(\hat{J}_{t,1})$  est majoré par

$$t^{-1} \|\hat{J}_{t,1}\| \leq t^{-1} \int_0^t \|I_{s,2} - I_{\infty,2}\|^2 \|e^{B_\theta s}\|^2 \|\hat{\theta}_s - \theta\|^2 ds.$$

En tenant compte de la propriété (5), de l'hypothèse  $(\mathcal{H}_2)$  et de l'équivalence (60), on obtient

$$t^{-1} \|\hat{J}_{t,1}\| = \mathbf{o}(t^{1-2\beta}) = \mathbf{o}(1) \quad p.s., \quad (t \longrightarrow \infty), \quad \text{car } \beta > 1/2. \quad (67)$$

De même, les deux processus  $(\hat{J}_{t,2})$  et  $(\hat{J}_{t,3})$  sont majorés par

$$\begin{aligned} t^{-1} \|\hat{J}_{t,2}\| &= t^{-1} \|\hat{J}_{t,3}\| \\ &\leq \|I_{\infty,2}\| t^{-1} \int_0^t \|I_{s,2} - I_{\infty,2}\| \|e^{B_\theta s}\|^2 \|\hat{\theta}_s - \theta\|^2 ds. \end{aligned}$$

Grâce à la propriété (5), l'hypothèse  $(\mathcal{H}_2)$  avec  $\beta > 1$  et l'équivalence (60), il vient

$$t^{-1} \|\hat{J}_{t,2}\| = t^{-1} \|\hat{J}_{t,3}\| = \mathbf{o}(t^{1-\beta}) = \mathbf{o}(1) \quad p.s., \quad (t \longrightarrow \infty). \quad (68)$$

Par conséquent, la convergence (65) est établie en vertu des deux propriétés (67) et (68).

4. Notons que

$$t^{-1/2} \int_0^t \{B_\theta \tilde{D}_s + \tilde{D}_s B_\theta^*\} ds = H_t + H_t^*,$$

où

$$H_t = B_\theta t^{-1/2} \int_0^t \tilde{D}_s ds = B_\theta t^{-1/2} \int_0^t \left( e^{-B_\theta s} M_s M_s^* e^{-B_\theta^* s} - \sigma^2 I_{s,2} \right) ds.$$

De la relation

$$H_t = B_\theta t^{-1/2} \int_0^t \left( e^{-B_\theta s} M_s M_s^* e^{-B_\theta^* s} - \sigma^2 I_{\infty,2} \right) ds - \sigma^2 B_\theta t^{-1/2} \int_0^t (I_{s,2} - I_{\infty,2}) ds$$

et l'hypothèse  $(\mathcal{H}_2)$ , on en déduit

$$t^{-1/2} \int_0^t (I_{s,2} - I_{\infty,2}) ds = \mathbf{o}(t^{\frac{1}{2}-\beta}) = \mathbf{o}(1) \quad p.s., \quad (t \longrightarrow \infty).$$

Par conséquent,

$$H_t \sim B_\theta t^{-1/2} \int_0^t \left( e^{-B_\theta s} M_s M_s^* e^{-B_\theta^* s} - \sigma^2 I_{\infty,2} \right) ds \quad (t \rightarrow \infty).$$

Rappelons que  $\hat{\delta}_s = (\hat{\theta}_s - \theta)(\hat{\theta}_s - \theta)^*$  et d'après la relation (64), on a

$$e^{-B_\theta s} M_s M_s^* e^{-B_\theta^* s} = I_{s,2} e^{B_\theta^* s} \hat{\delta}_s e^{B_\theta s} I_{s,2}.$$

Pour établir le résultat annoncé, il suffit donc de montrer que, quand  $t$  tend vers l'infini, on a

$$t^{-1/2} \left\| \int_0^t I_{s,2} e^{B_\theta^* s} \hat{\delta}_s e^{B_\theta s} I_{s,2} ds - I_{\infty,2} \int_0^t e^{B_\theta^* s} \hat{\delta}_s e^{B_\theta s} ds I_{\infty,2} \right\| \rightarrow 0 \quad p.s. \quad (69)$$

Pour ce faire, remarquons que

$$t^{-1/2} \left\| \int_0^t I_{s,2} e^{B_\theta^* s} \hat{\delta}_s e^{B_\theta s} I_{s,2} ds - I_{\infty,2} \int_0^t e^{B_\theta^* s} \hat{\delta}_s e^{B_\theta s} ds I_{\infty,2} \right\| \leq t^{-1/2} \left( \|\hat{J}_{t,1}\| + \|\hat{J}_{t,2}\| + \|\hat{J}_{t,3}\| \right), \quad (70)$$

où les processus  $(\hat{J}_{t,i})$ ,  $i \in \{1, 2, 3\}$ , sont ceux définis par la relation (66).

En tenant compte de la relation (67), on déduit

$$t^{-1/2} \|\hat{J}_{t,1}\| = \mathbf{o}(t^{\frac{3}{2}-2\beta}) = \mathbf{o}(1) \quad p.s., \quad (t \rightarrow \infty). \quad (71)$$

Vu la relation (68), on obtient

$$\begin{aligned} t^{-1/2} \|\hat{J}_{t,2}\| &= t^{-1/2} \|\hat{J}_{t,2}\| \\ &= \mathbf{o}(t^{\frac{3}{2}-\beta}) = \mathbf{o}(1) \quad p.s., \quad (t \rightarrow \infty) \text{ car } \beta > 3/2. \end{aligned} \quad (72)$$

Ainsi la convergence (69) est établie grâce aux propriétés (70), (71) et (72). La dernière assertion du théorème 2.2.1 découle de la convergence (58). Le théorème 2.2.1 est donc établi.

## Références

- [1] F. Chaâbane. Invariance principles with logarithmic averaging for martingales. *Studia Sci. Math. Hungar.*, 37(1-2) :21–52, 2001.
- [2] F. Chaâbane. Invariance principles with logarithmic averaging for continuous local martingales. *Statist. Probab. Lett.*, 59(2) :209–217, 2002.
- [3] F. Chaâbane and H. Fathallah. Identification of a stable Gaussian autoregressive process by an averaging method. *J. Appl. Probab. Stat.*, 2(2) :211–226, 2007.
- [4] F. Chaâbane and A. Kebaier. Théorèmes limites avec poids pour les martingales vectorielles à temps continu. *ESAIM Probab. Stat.*, 12 :464–491, 2008.
- [5] A. R. Darwich. Une loi du logarithme itéré pour les martingales locales multidimensionnelles et son application en régression linéaire stochastique. *C. R. Acad. Sci. Paris Sér. I Math.*, 309(6) :387–390, 1989.
- [6] A. R. Darwich. About the asymptotic behaviour of continuous vector-valued local martingales and application in multiple linear regression models. *Stoch. Stoch. Rep.*, 74(1-2) :393–409, 2002.
- [7] A. R. Darwich and A. Le Breton. About the asymptotic behaviour of multidimensional Gaussian martingales and estimates in normal linear regression. *Statist. Probab. Lett.*, 12(4) :317–321, 1991.

- [8] M. Duflo, R. Senoussi, and A. Touati. Almost sure asymptotic properties of the least-squares estimator of a vector-valued autoregressive model. *Ann. Inst. H. Poincaré Probab. Statist.*, 27(1) :1–25, 1991.
- [9] H. Fathallah and A. Kebaier. Weighed limit theorems for continuous-time vector martingales with explosive and mixed growth and statistical applications. *Prépublication de l'université de Versailles*, 2009.
- [10] A. Le Breton. Propriétés asymptotiques et estimation des paramètres pour les diffusions gaussiennes homogènes hypoelliptiques dans le cas purement explosif. *C. R. Acad. Sci. Paris Sér. I Math.*, 299(6) :185–188, 1984.
- [11] A. Le Breton and M. Musiela. Some parameter estimation problems for hypoelliptic homogeneous Gaussian diffusions. In *Sequential methods in statistics*, volume 16 of *Banach Center Publ.*, pages 337–356. PWN, Warsaw, 1985.
- [12] A. Le Breton and M. Musiela. Une loi des grands nombres pour les martingales locales continues vectorielles et son application en régression linéaire stochastique. *C. R. Acad. Sci. Paris Sér. I Math.*, 303(9) :421–424, 1986.