

## **L'impact du vieillissement démographique sur les mécanismes macroéconomiques**

Mars 2003

Antoine d'AUTUME<sup>\*</sup>, EUREQua

Etude réalisée pour le compte de la Direction de la Prévision du  
Ministère de l'Economie, des Finances et de l'Industrie

- EUREQua, UMR 8594 CNRS-Université Paris I, Maison des Sciences Economiques, 106-112 boulevard de l'Hôpital, 75647 Paris Cedex 13. [dautume@univ-paris1.fr](mailto:dautume@univ-paris1.fr)

**Résumé :** Cette étude a deux objectifs. Le premier est de présenter une synthèse de l'analyse des retraites dans le cadre du modèle à générations. Nous négligeons toute hétérogénéité individuelle et nous mettons donc l'accent sur les arbitrages intertemporels. Le modèle de Diamond met en évidence un effet négatif du système de retraites par répartition sur l'épargne et donc sur l'accumulation du capital. En outre, dans le cas le plus vraisemblable, le taux de rendement de la capitalisation est supérieur à celui de la répartition. Mais la nécessité d'assurer la retraite de la génération âgée initiale ne permet pas d'en déduire la supériorité de la capitalisation. L'approche intertemporelle montre au contraire que le choix du système de retraite optimal dépend de manière cruciale du taux d'escompte social. Elle met aussi en évidence une propriété de neutralité de la dette publique. Un passage instantané à la capitalisation, s'accompagnant de la mise en place d'un endettement public destiné à assurer les retraites initiales, se révèle équivalent à une disparition progressive du système de répartition. Des sections sur l'altruisme et le risque complètent cette analyse générale.

Le second objectif de ce travail est de traiter des effets du vieillissement. Le modèle à générations usuel - à deux périodes - ne peut traiter du vieillissement individuel puisque sa seule variable démographique est le taux de natalité. Nous modifions donc ce modèle en supposant que les agents ne vivent pas l'intégralité de leur seconde période de vie potentielle. Ceci nous permet de distinguer les effets du vieillissement de ceux de la baisse de la natalité. Nous mettons aussi l'accent sur le libre choix de l'âge de la retraite. Nous étudions un système de retraite mixte, relevant de la répartition, mais permettant aux agents de choisir librement leur âge de retraite dans le cas d'un système actuariellement neutre sur la seconde période de vie. Des simulations numériques permettent d'examiner les réponses possibles au choc démographique. Un report de l'âge de la retraite y apparaît comme un élément inévitable.

**Abstract :** The first aim of this report is to present a synthesis of the analysis of pension schemes. We neglect any individual heterogeneity and focus on intertemporal trade-offs. The Diamond model shows that a pay-as-you-go pension scheme exerts a negative effect on saving and capital accumulation. Moreover, it is likely that the rate of return of a fully-funded system will be higher than the one of a pay-as-you-go system. The necessity to provide for the pensions of the current old generation does not allow us to infer the optimality of the fully-funded system however. An intertemporal approach demonstrates that the optimal system depends very much on the social rate of discount. Moreover, this approach also demonstrates a neutrality property of public debt. An instantaneous switch to a fully-funded scheme, supported by public debt in order to provide for initial pensions, is shown to be equivalent to a gradual phasing-out of a pay-as-you-go system. Sections on altruism and risk complete this synthesis.

The second part of the paper is devoted to an analysis of the consequences of ageing. The standard two-period overlapping-generation model is of no help as its sole demographic parameter is the birth rate. We therefore modify this model to distinguish the effects of individual ageing from changes in the birth rate. To this end, we simply assume that the agents do not live out their entire second period of life. We also focus on a mixed pension scheme that is fully funded, but offers agents an actuarially fair choice on their retirement age. Numerical simulations describe possible responses to the dilemmas France currently faces. A deferring of the retirement age appear an unavoidable element.

**Mots-clés :** Retraites, vieillissement, modèle à générations

**Key-words :** Pensions, ageing, Overlapping-Generation-Model

**J. E. L. classification :** J26, H3

## **Plan**

### **1 Le comportement individuel**

- 1.1 Les rendements de la répartition et de la capitalisation
- 1.2 Le cas de contraintes d'endettement

### **2 Le modèle de Diamond avec retraites par répartition**

- 2.1 Economie fermée
- 2.2 Economie ouverte : le cas d'un petit pays

### **3 Efficacité et règle d'or**

- 3.1 La règle d'or avec progrès technique
- 3.2 Y a-t-il un free lunch ?
- 3.3 La caractérisation de l'optimum
- 3.4 Le cas d'une petite économie ouverte
- 3.5 Caractérisation géométrique

### **4 L'altruisme**

### **5 Dette publique et neutralité**

- 5.1 La gestion des actifs et de l'endettement des caisses de retraite
- 5.2 La comptabilisation des droits acquis
- 5.3 La neutralité de la dette publique

### **6 Le risque**

### **7 La prise en compte du vieillissement**

- 7.1 Une structure démographique de référence
- 7.2 Le vieillissement dans un modèle à deux générations
- 7.3 Le comportement individuel
- 7.4 La dynamique d'équilibre
- 7.5 Caractérisation de l'optimum
- 7.6 Simulation d'un choc démographique

Le premier<sup>1</sup> objectif de ce travail est de présenter une synthèse de l'analyse des retraites dans le cadre du modèle à générations. L'analyse n'est certes pas exhaustive, et elle vient compléter de nombreuses études de ce type - comme par exemple l'ouvrage d'Artus-Legros (1999). Mais elle met l'accent sur un certain nombre d'aspects théoriques qui jouent un rôle important dans la modélisation des effets dynamiques de la réforme des retraites et dans l'évaluation de leurs propriétés d'optimalité. Elle peut ainsi servir d'introduction à des travaux de simulation et d'évaluation des systèmes de retraite.

Nous n'introduisons dans cette synthèse aucun élément d'hétérogénéité entre agents. L'accent est donc mis sur les transferts intergénérationnels plutôt que sur les transferts interindividuels entre agents d'une même génération. Le choix d'un système de retraite, par répartition ou par capitalisation, et celui du taux de cotisation et du montant des pensions se traduit implicitement par des transferts entre générations qu'il convient de caractériser et d'évaluer. Ce choix, d'autre part, affecte les comportements d'épargne et d'accumulation du capital. En économie fermée, les taux d'intérêt se modifient. L'analyse économique doit alors aller bien au-delà de la simple vérification comptable de l'équilibre financier des caisses de retraites.

Un modèle macroéconomique d'équilibre est donc nécessaire. Le modèle à générations de Diamond (1965) remplit très bien ce rôle. Simplifié à l'extrême, il ne fait coexister à chaque instant que deux générations - les jeunes et les vieux - Mais il met l'accent sur les mécanismes fondamentaux et peut assez facilement être généralisé.

Comment caractériser un système de retraite optimal ? La comparaison des rendements de la capitalisation et de la répartition constitue un point de départ naturel mais qui se révèle très insuffisant. Les taux d'intérêt se modifient au cours du temps de manière endogène. Surtout, la nécessité d'assurer les pensions de la génération âgée actuelle empêche de reprendre le problème à zéro. Elle impose une approche intertemporelle arbitrant entre les intérêts des différentes générations. Différents niveaux de cotisation à la répartition correspondent alors à des arbitrages différents, qui conduisent à des profils différents d'accumulation du capital mais doivent tous être considérés comme optimaux. Ils correspondent simplement à des niveaux différents du taux d'escompte social.

La possibilité d'un endettement des caisses de retraites, et plus généralement l'intervention de la dette publique, viennent en apparence élargir le domaine de choix des autorités. Cet élargissement est pourtant en grande

---

<sup>1</sup>\* Je remercie Hippolyte d'Albis, Amandine Brun, Michèle Debonneuil, Bruno Decreuse, Cecilia Garcia-Penalosa, Philippe Michel, Alain Quinet, Bertrand Wigniolle, Laurent Ménard et Jean-Luc Schneider pour des discussions et des commentaires.

partie illusoire. Une analyse précise montre en effet que seuls comptent en définitive les transferts nets imposés aux agents. Peu importe qu'ils résultent de cotisations et de pensions ou d'impôts et d'emprunts publics. La question du choix entre répartition et capitalisation perd alors toute pertinence. Ce résultat théorique négatif est bien sûr tributaire de nombreuses hypothèses : substitution parfaite entre dette publique et privée ; possibilité de mettre en oeuvre des transferts forfaitaires... Il constitue pourtant une référence qui doit conduire à éviter des conclusions trop hâtives.

Des sections sur l'altruisme et le le risque viennent compléter cette analyse générale.

Le second objectif de notre travail est de traiter des effets du vieillissement. Le modèle à générations usuel - à deux périodes - ne peut traiter du vieillissement individuel. Sa seule variable démographique est le taux de croissance de la population et il ne prend en compte qu'un vieillissement global, traduisant les effets à long terme d'une baisse de la natalité. Nous présentons donc un moyen simple d'introduire le vieillissement individuel dans le modèle à générations usuel. Il suffit de considérer que les agents ne vivent pas l'intégralité de la seconde période de vie potentielle. Nous pouvons ainsi étudier les effets du vieillissement en les distinguant de ceux de la baisse de la natalité.

Nous mettons aussi l'accent sur le libre choix de l'âge de la retraite. Reprenant des idées souvent avancées dans le débat actuel, nous étudions les effets d'un système de retraite mixte, relevant de manière générale de la répartition, mais permettant aux agents de choisir librement leur âge de retraite. Les agents font face dans leur seconde partie de vie à un barème actuariellement neutre, où le montant des pensions perçues dépend des cotisations supplémentaires versées. Notre cadre d'analyse se révèle particulièrement adéquat pour étudier les effets d'un tel système qui se révèle optimal.

Des simulations numériques permettent enfin d'examiner les réponses possibles au choc démographique - vieillissement et baisse de la natalité - que connaît actuellement l'économie française. Un allongement de la période d'activité y apparaît comme un élément inévitable de cette réponse.

# 1 Le comportement individuel

## 1.1 Les rendements de la répartition et de la capitalisation

Nous nous plaçons dans un premier temps dans le cadre du modèle à générations le plus standard. Les agents vivent deux périodes. Ils travaillent pendant leur première période de vie et sont retraités pendant la seconde. L'âge de retraite est ainsi fixé par construction. Nous introduisons un système de retraites et examinons en quoi il affecte les choix de consommation et d'épargne des agents. Ce comportement individuel servira de base, dans la section suivante, à l'étude du modèle macroéconomique de référence, celui de Diamond (1965).

Le comportement d'un agent est représenté par le programme suivant

$$\max U(c_t, d_{t+1})$$

$$c_t + s_t = (1 - \theta_t) w_t \quad (1)$$

$$d_{t+1} = R_{t+1} s_t + \lambda_{t+1} w_{t+1} \quad (2)$$

L'agent né à la date  $t$  consomme une quantité  $c_t$  pendant sa première période de vie et une quantité  $d_{t+1}$  pendant sa deuxième période de vie. Il travaille pendant sa première période de vie et gagne un salaire réel  $w_t$ . Celui-ci est amputé d'une cotisation-retraite au taux  $\theta_t$ . Il épargne une somme  $s_t$ . Son revenu de seconde période est constitué du rendement de cette épargne, représenté par le facteur d'intérêt  $R_{t+1} = 1 + r_{t+1}$ , et d'une pension définie comme une proportion  $\lambda_{t+1}$  du salaire courant.  $\lambda_{t+1}$  constitue le taux de remplacement, rapport entre la pension touchée par un retraité et le salaire versé au même moment aux travailleurs.

La fonction d'utilité dépend des consommations des deux périodes. Elle a les propriétés habituelles. Nous la supposons en outre homogène pour rendre possible des sentiers de croissance à taux constants.

Appelons  $N_t$  la population qui vit et travaille à la date  $t$ . Les retraités sont les agents nés la période précédente et sont donc au nombre de  $N_{t-1}$ . Le taux de croissance  $n$  de la population est tel que

$$N_t = (1 + n_t) N_{t-1}$$

Considérons d'abord un système de retraites par capitalisation. La pension reçue est égale au montant rapporté par le placement de la cotisation, soit

$$\lambda_{t+1}w_{t+1} = R_{t+1}\theta_t w_t$$

L'institution d'une cotisation obligatoire a pour seul effet de diminuer d'autant l'épargne spontanée. Elle ne modifie pas les choix de consommation des agents. Une épargne forcée remplace une épargne volontaire. Dans ce cadre simplifié, où un taux d'intérêt unique rémunère aussi bien les placements privés que ceux d'une caisse de retraites, la retraite par capitalisation se confond avec le comportement volontaire d'épargne.

On saisit déjà que l'instauration d'un régime par capitalisation n'affectera pas l'évolution macroéconomique. Le placement des cotisations par la caisse de retraite compense exactement la réduction des placements privés. L'accumulation du capital est inchangée. Nous pouvons donc faire abstraction du système de retraite par capitalisation.

Explicitons la traduction formelle de cette idée simple.

L'agrégation des contraintes budgétaires des deux périodes donne la contrainte budgétaire actualisée de vie entière

$$c_t + \frac{d_{t+1}}{R_{t+1}} = (1 - \theta_t) w_t + \frac{\lambda_{t+1}w_{t+1}}{R_{t+1}}$$

Dans le cas d'une retraite par capitalisation, elle prend la forme

$$c_t + \frac{d_{t+1}}{R_{t+1}} = w_t$$

La richesse actualisée de l'agent se réduit au salaire. Elle n'est pas affectée par le système de retraite. Le comportement de consommation y est donc insensible.

On peut préciser encore l'argument en réécrivant les contraintes budgétaires sous la forme

$$c_t + (s_t + \theta_t w_t) = w_t$$

$$d_{t+1} = R_{t+1} (s_t + \theta_t w_t)$$

Il apparaît clairement que seule compte pour l'agent son épargne totale  $s_t + \theta_t w_t$ , somme de son épargne spontanée  $s_t$  et de l'épargne forcée que représentent ses cotisations  $\theta_t w_t$ .

Plaçons maintenant dans le cas d'un système de pure répartition, où les sommes prélevées sont immédiatement et intégralement redistribuées. La

contrainte budgétaire de la caisse de retraite impose la contrainte suivante aux deux paramètres  $\theta$  et  $\lambda$

$$\theta_t = \frac{1}{1 + n_t} \lambda_t \quad (3)$$

Nous obtenons ainsi une forme particulièrement simple de la relation générale

$$\text{taux de cotisation} = \text{taux de dépendance} \times \text{taux de remplacement}$$

où le taux de dépendance est défini comme le rapport entre le nombre de retraités et le nombre d'actifs. Dans notre cadre très simple, il prend la forme  $N_{t-1}/N_t = 1/(1 + n_t)$ .

La contrainte budgétaire de seconde période devient

$$d_{t+1} = R_{t+1}s_t + (1 + n_{t+1})\theta_{t+1}w_{t+1} \quad (4)$$

Le rapprochement de cette relation avec la contrainte budgétaire de première période fait apparaître les rendements respectifs de l'épargne financière, c'est-à-dire de la capitalisation, et de la répartition. Le premier est, par définition, le taux d'intérêt. Le second est

$$\frac{(1 + n_{t+1})\theta_{t+1}w_{t+1}}{\theta_t w_t}$$

Pour fixer les idées, plaçons dans un régime permanent où les salaires augmentent à un taux  $\gamma$  représentant les gains de productivité, alors que  $n$  et  $\theta$  restent constants. Le taux de rendement implicite de la répartition est alors

$$(1 + n)(1 + \gamma) - 1 \simeq n + \gamma$$

Le taux de rendement de la répartition est la somme du taux de croissance de la population et du taux de croissance de la productivité. Un nombre plus élevé de jeunes permet de financer des pensions plus importantes, à taux de cotisations donnés. Les gains de productivité augmentent aussi le rendement individuel de la répartition puisque les pensions sont assises sur les salaires courants, qui croissent au rythme de la productivité.

Il faut souligner fortement que cet effet de la productivité ne joue qu'à un niveau diachronique, alors qu'il est absent de la relation synchronique 3 décrivant l'équilibre financier du système par répartition. Les gains de productivité permettent d'augmenter le ratio entre les salaires qu'un individu touche pendant sa vie active et les pensions qu'il touchera plus tard. Ils

ne permettent pas d'augmenter le ratio entre les revenus des retraités et les revenus touchés au même moment par les travailleurs. En ce sens, les gains de productivité ne constituent nullement une réponse aux problèmes posés par les évolutions démographiques.

La contrainte budgétaire actualisée prend maintenant la forme

$$c_t + \frac{d_{t+1}}{R_{t+1}} = (1 - \theta_t) w_t + \frac{w_{t+1}(1 + n_{t+1})\theta_{t+1}}{R_{t+1}} \quad (5)$$

Plaçons-nous en régime permanent où le taux de croissance de la population et le taux d'intérêt sont constants, alors que les salaires croissent au taux  $\gamma$ . Les taux de cotisation et de remplacement sont constants. La contrainte actualisée devient

$$c_t + \frac{d_{t+1}}{R} = w_t + \frac{[(1 + n)(1 + \gamma) - (1 + r)] \theta w_t}{R}$$

On voit apparaître la différence entre le taux de rendement de la répartition et celui de la capitalisation.

En situation de règle d'or<sup>2</sup>, les deux rendements sont égaux et on a  $(1 + r) = (1 + n)(1 + \gamma)$ . Une variation de  $\theta$  n'a aucun effet sur la contrainte actualisée des agents. Elle n'affecte donc pas leurs choix de consommation. La hausse des cotisations se traduit alors par une diminution de même montant de l'épargne. Comme en capitalisation, la cotisation représente une épargne forcée qui se substitue à l'épargne volontaire.

Il en va différemment en dehors de la règle d'or. Le système de retraite par répartition affecte alors les choix de consommation. Il engendre un effet-revenu positif si  $n + \gamma > r$ . Le taux de rendement de la répartition est alors supérieur au taux d'intérêt et les agents gagnent à une extension du système de répartition. Ceci les amène à consommer plus en première période (si la consommation de première période est un bien normal), et donc à épargner moins. A taux d'intérêt donné, une augmentation d'un euro des cotisations se traduit par une diminution de plus d'un euro de l'épargne volontaire.

Dans le cas contraire, considéré comme plus vraisemblable, où  $r > n + \gamma$ , l'effet-revenu est négatif. La consommation de première période diminue. L'épargne diminue très probablement, mais d'un montant inférieur à l'augmentation de la cotisation.

La définition précise des comportements de consommation et d'épargne sera faite dans la section suivante, lors de l'étude du modèle de Diamond. Nous supposons alors que les agents forment des prévisions parfaites sur

---

<sup>2</sup>Voir ci-dessous § 3.1

leur environnement, mais aussi sur leurs préférences futures. Ce dernier aspect mériterait discussion car l'un des rôles des systèmes de retraite obligatoires est de protéger les agents des conséquences néfastes de leur myopie. On peut craindre en effet que les agents fassent preuve de myopie en n'attachent pas assez d'importance à la nécessité d'épargner pour leurs vieux jours. Le système de retraite joue alors un rôle tutélaire en les forçant à épargner. Peu importe d'ailleurs à ce niveau qu'il s'agisse de retraite par répartition ou par capitalisation. L'important est son caractère obligatoire.

D'un point de vue théorique, le problème relève de l'incohérence temporelle des choix individuels. Bien qu'il s'agisse sans doute d'une question importante en matière de retraites, nous n'en traiterons pas, suivant en cela la littérature.

## 1.2 Le cas de contraintes d'endettement

On peut aussi supposer que les marchés sont imparfaits et que les agents subissent une contrainte qui leur interdit de s'endetter.

$$s_t \geq 0 \quad \Longleftrightarrow \quad c_t \leq (1 - \theta_t) w_t$$

Les agents contraints sont ceux qui désirent s'endetter en première période, sur leur retraite. Ce sont des agents ayant une forte préférence pour le présent. Leur comportement est alors

$$c_t = (1 - \theta_t) w_t, \quad d_{t+1} = w_{t+1}(1 + n_{t+1})\theta_{t+1} \quad (6)$$

La figure 1 représente le domaine des possibles pour un consommateur soumis à une contrainte de non-endettement. On néglige les gains de productivité pour alléger la présentation. On a représenté plusieurs domaines correspondant à plusieurs choix du taux de cotisation  $\theta$  et du taux de remplacement  $\lambda$ , pour une valeur donnée du taux de croissance de la population  $n$ .

La contrainte budgétaire est a priori

$$c + \frac{d}{1+r} = w(1-\theta) + \frac{\lambda w(1+n)}{1+r}$$

Elle a une pente  $1+r$  et passe par le point  $c = w(1-\theta)$ ,  $d = \theta(1+n)w$  correspondant à la situation où la contrainte mord. Quel que soit  $\theta$ , ce point appartient à la droite

$$c + \frac{d}{1+n} = w$$

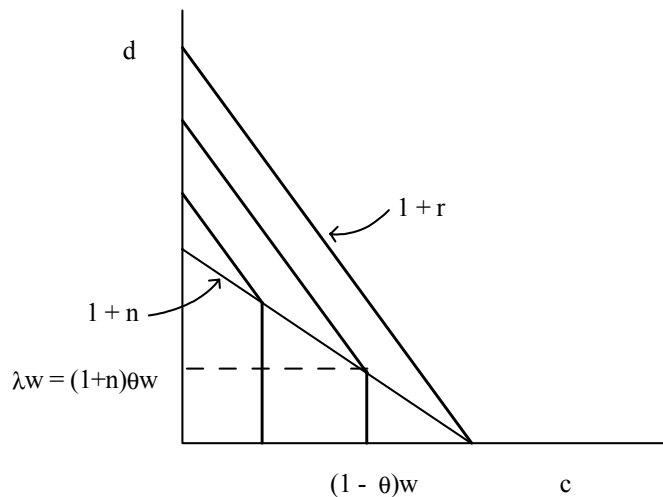


Figure 1: L'ensemble des choix individuels

qui a une pente  $1 + n$  et que l'on a représentée sur la figure.

On se place dans le cas  $r > n$ . Le domaine des possibles se réduit alors quand la cotisation à la répartition  $\theta$  augmente. Le consommateur, qu'il soit contraint ou pas, perd donc à une augmentation de la répartition. En effet, pour le consommateur non-contraint, le taux de rendement de la répartition est inférieur au taux de rendement de la capitalisation. Le consommateur contraint, quant à lui, souhaiterait transférer plus de pouvoir d'achat vers sa première période de vie. Il gagne donc à une baisse du taux de cotisation.

La prise en compte de contraintes financières accroîtrait sans doute le réalisme de l'analyse. Mais elle compliquerait beaucoup la modélisation. Elle prendrait tout son sens dans un modèle à agents hétérogènes, se distinguant notamment par leurs possibilités d'accès au marché financier. Elle rendrait aussi beaucoup plus difficile l'analyse des questions d'optimalité sociale. Nous nous en tiendrons donc au cadre classique de marchés financiers parfaits.

Nous pouvons pourtant évoquer ici le travail de Hairault-Langot (2002) qui étudient les conséquences de la réforme des retraites en matière d'inégalités. L'existence de contraintes d'endettement est alors l'un des canaux possibles d'augmentation des inégalités.

La modélisation ci-dessus en donne une intuition.

Une baisse de  $\theta$ , c'est-à-dire un passage à la capitalisation, a en effet des conséquences différentes selon que l'agent subit ou non une contrainte financière. :

Dans le cas d'un agent non-contraint, la baisse de  $\theta$  se traduit par une augmentation de richesse qui conduit l'agent à augmenter ses consommations des deux périodes :  $c$  et  $d$  augmentent

Au contraire, dans le cas d'un agent contraint,  $c$  augmente tandis que  $d$  diminue.

L'inégalité des consommations des agents âgés augmente donc.

## 2 Le modèle de Diamond avec retraites par répartition

### 2.1 Economie fermée

Après avoir étudié l'influence du système de retraite sur l'épargne, il convient de boucler le modèle en étudiant les effets de l'épargne sur l'accumulation du capital et la croissance. Le taux d'intérêt est alors endogénéisé, et exerce une influence en retour sur les comportements d'épargne. Nous sommes amenés ainsi à nous placer dans une véritable perspective macroéconomique où tous les comportements interagissent.

Le modèle de référence est le modèle de Diamond (1965), qui conserve une structure à deux générations.

Comme l'offre de travail est exogène, les cotisations-retraites peuvent être considérées comme des impôts forfaitaires. Nous élargissons donc légèrement notre point de vue en étudiant le modèle de Diamond avec un système général de transferts forfaitaires. Soit  $X_{1,t}$  et  $X_{2,t}$  les transferts forfaitaires reçus respectivement par les agents jeunes et vieux à la date  $t$ .

On suppose que l'Etat ne s'endette pas et équilibre son budget à chaque période. Il finance un niveau exogène  $G_t$  de dépenses publiques. En définissant les dépenses publiques par tête  $g_t = G_t/N_t$ , sa contrainte budgétaire s'écrit

$$g_t + X_{1,t} + \frac{X_{2,t}}{1 + n_t} = 0 \quad (7)$$

Dans le cas d'un système pur de retraites par répartition, et en l'absence de dépenses publiques, on a simplement

$$X_{1,t} = -\theta_t w_t, \quad X_{2,t} = \theta_t (1 + n_t) w_t \quad (8)$$

Le comportement d'un agent est représenté par le programme suivant

$$\max U(c_t, d_{t+1})$$

$$c_t + s_t = w_t + X_{1,t} \quad (9)$$

$$d_{t+1} = R_{t+1}s_t + X_{2,t+1} \quad (10)$$

Les deux contraintes peuvent être remplacées par la contrainte budgétaire actualisée

$$c_t + \frac{d_{t+1}}{R_{t+1}} = w_t + X_{1,t} + \frac{X_{2,t+1}}{R_{t+1}}$$

La condition d'optimalité est

$$\frac{U_c(c_t, d_{t+1})}{U_d(c_t, d_{t+1})} = 1 + r_{t+1} \quad (11)$$

On obtient ainsi les fonctions de demande qui ont pour arguments le taux d'intérêt et la richesse intertemporelle de l'agent. L'hypothèse de préférences homothétiques implique des demandes proportionnelles à la richesse intertemporelle. La consommation de première période, en particulier, prend la forme

$$c_t = \mathcal{C}(r_{t+1}) \left[ w_t + X_{1,t} + \frac{X_{2,t+1}}{1 + r_{t+1}} \right] \quad (12)$$

La production est décrite par une fonction de production à rendements constants, à progrès technique portant sur le travail :  $Y = F(K, AN)$ . On introduit un taux de dépréciation  $\mu$  qui sera pris égal à l'unité, hypothèse raisonnable dans un modèle à la durée de la période est élevée.

Il sera commode d'utiliser alternativement des variables par tête, désignées par des minuscules, et des variables par unités efficaces, désignées par un tilda. Nous posons donc

$$y_t = F(k_t, A_t), \quad y_t = \frac{Y_t}{N_t}, \quad k_t = \frac{K_t}{N_t}$$

$$\tilde{y}_t = F\left(\frac{k_t}{A_t}, 1\right) = f\left(\frac{k_t}{A_t}\right) = f(\tilde{k}_t), \quad \tilde{y}_t = \frac{Y_t}{A_t N_t} = \frac{y_t}{A_t}, \quad \tilde{k}_t = \frac{K_t}{A_t N_t} = \frac{k_t}{A_t}$$

Le taux d'intérêt et le salaire concurrentiels sont donnés par les relations suivantes.

$$1 + r_t = F'_1(k_t, A_t), \quad w_t = F(k_t, A_t) - k_t F'_1(k_t, A_t) \quad (13)$$

ou encore

$$r_t = f'(\tilde{k}_t) - 1 = r(\tilde{k}_t), \quad w_t = A_t \tilde{w}_t = A_t \left[ f(\tilde{k}_t) - \tilde{k}_t f'(\tilde{k}_t) \right] \quad (14)$$

Dans ce modèle à deux générations, tout le capital est détenu par les jeunes agents. La relation fondamentale du modèle indique donc que les jeunes agents utilisent leur épargne pour acheter tout le capital de l'économie.

$$s_t = (1 + n_{t+1})k_{t+1} \quad (15)$$

Une autre relation centrale, qui nous servira par la suite, est l'égalité emplois-ressources. Elle peut être recouvrée à partir des contraintes budgétaires. Sommons les contraintes budgétaires (9) et (10) des jeunes et des vieux, en décalant temporellement la seconde pour décrire la contrainte des agents qui sont vieux à la date  $t$  et non à la date  $t + 1$ , et en la multipliant par  $1/(1 + n_t)$  pour tenir compte du fait que les vieux sont moins nombreux que les jeunes. On obtient

$$c_t + s_t + \frac{1}{1 + n_t}d_t = w_t + X_{1,t} + \frac{1}{1 + n_t}((1 + r_t)s_{t-1} + X_{2,t})$$

soit, en tenant compte de (7) et (15),

$$c_t + (1 + n_{t+1})k_{t+1} + \frac{1}{1 + n_t}d_t = w_t - g_t + (1 + r_t)k_t$$

Comme  $F(k_t, A_t) = (1 + r_t)k_t + w_t$ , on obtient l'égalité emplois-ressources

$$(1 + n_{t+1})k_{t+1} + c_t + \frac{1}{1 + n_t}d_t = F(k_t, A_t) - g_t \quad (16)$$

L'équation d'évolution du capital (15) permet de décrire la dynamique du système. On obtient

$$(1 + n_{t+1})k_{t+1} = w_t + X_{1,t} - \mathcal{C}(r_{t+1}) \left[ w_t + X_{1,t} + \frac{X_{2,t+1}}{1 + r_{t+1}} \right] \quad (17)$$

Nous faisons l'hypothèse de prévision parfaite. Comme le taux d'intérêt et le salaire sont des fonctions de l'intensité capitalistique, nous obtenons une équation dynamique ne faisant intervenir que les valeurs courante et future,  $k_t$  et  $k_{t+1}$ , de l'intensité capitalistique. Les transferts  $X_{1,t}$  et  $X_{2,t+1}$  ainsi que  $n_t$  peuvent être traités comme des fonctions exogènes du temps.

Restreignons-nous maintenant au cas d'un système de retraite par répartition. Nous supposons constants le taux de croissance de la population et le taux de cotisation. L'équation d'évolution devient

$$(1 + n)k_{t+1} = (1 - \theta)w_t - \mathcal{C}(r_{t+1}) \left[ (1 - \theta)w_t + \frac{(1 + n)\theta w_{t+1}}{1 + r_{t+1}} \right] \quad (18)$$

Cette équation fait intervenir le temps. On peut l'éliminer en passant en unités intensives. On se ramène alors à l'équation

$$(1+n)(1+\gamma)\tilde{k}_{t+1} = (1-\theta)\tilde{w}_t - \mathcal{C}(r_{t+1}) \left[ (1-\theta)\tilde{w}_t + \frac{(1+n)(1+\gamma)\theta\tilde{w}_{t+1}}{1+r_{t+1}} \right] \quad (19)$$

où le taux d'intérêt et le salaire sont des fonctions  $r_t = r(\tilde{k}_t)$  et  $\tilde{w}_t = \tilde{w}(\tilde{k}_t)$  de l'intensité capitaliste efficace.

La valeur de  $\tilde{k}_{t+1}$  intervient dans le membre de droite à travers  $r_{t+1}$  et  $\tilde{w}_{t+1}$ . On ne peut donc obtenir une expression explicite de  $\tilde{k}_{t+1}$  en fonction de  $\tilde{k}_t$ . Mais on peut considérer, en général, que cette équation définit implicitement une fonction

$$\tilde{k}_{t+1} = \psi(\tilde{k}_t) \quad (20)$$

qui résume la dynamique du modèle.

Il est utile de préciser la manière dont les anticipations sont traitées dans le modèle. Le comportement des épargnants dépend du taux d'intérêt et du salaire anticipés et donc du niveau anticipé de capital. Mais en faisant l'hypothèse de prévision parfaite, nous admettons que les agents se rendent compte que le niveau anticipé de capital dépend de leur comportement courant. Ils peuvent donc en principe le prévoir parfaitement. On est ainsi conduit à un modèle totalement *backward*, ne faisant intervenir qu'une variable prédéterminée.

L'équation (19) montre qu'une valeur stationnaire du capital par unité efficace est solution de l'équation

$$\tilde{k} = \frac{1}{(1+n)(1+\gamma)} \left\{ (1-\theta)\tilde{w}(\tilde{k}) - \mathcal{C}(r(\tilde{k})) \left[ (1-\theta)\tilde{w}(\tilde{k}) + \frac{(1+n)(1+\gamma)\theta\tilde{w}(\tilde{k})}{1+r(\tilde{k})} \right] \right\} \stackrel{\text{déf}}{=} \phi(\tilde{k}) \quad (21)$$

Le point stationnaire est aussi solution de l'équation  $\tilde{k} = \psi(\tilde{k})$ . Les fonctions  $\psi(\tilde{k})$  et  $\phi(\tilde{k})$ , pourtant, ne doivent pas être confondues. La seconde représente la fonction d'épargne dans un cadre stationnaire. La première est adaptée à un cadre non-stationnaire et est plus complexe car elle prend en compte les effets de rétroaction tenant à la présence de  $\tilde{k}_{t+1}$  dans le membre de droite de (19).

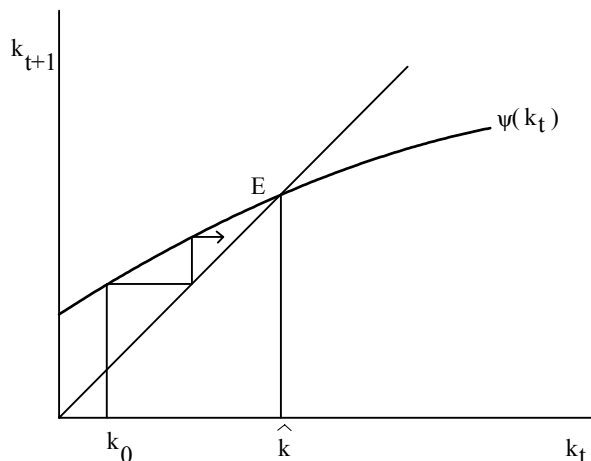


Figure 2: La dynamique du modèle de Diamond

Nous supposons pourtant qu'elles ont la même allure. Sous des hypothèses raisonnables, la fonction d'épargne stationnaire  $\phi(\tilde{k})$  est croissante et a une pente inférieure à l'unité au voisinage du point stationnaire que nous supposons unique. Nous supposons qu'il en va de même de la fonction  $\psi(\tilde{k})$ , en admettant que les effets de rétroaction sont dominés.

Nous sommes ainsi amenés à la figure 2, où est représentée la fonction  $\psi(\tilde{k})$  qui permet de caractériser la dynamique. La figure représente la trajectoire suivie par l'économie lorsque l'on part d'un niveau  $\tilde{k}_0$  de capital par tête. Elle montre que l'économie converge vers le point stationnaire  $\hat{k}$ .

Nous pouvons maintenant étudier les effets macroéconomiques du système de retraite. Comme l'avait notamment expliqué Feldstein (1974), un système de retraite revient à imposer une épargne forcée aux ménages. On peut a priori s'attendre à ce qu'une augmentation des cotisations conduise les agents à diminuer d'autant leur épargne spontanée, sans changement de l'épargne totale. Mais ce qui est vrai au niveau individuel ne l'est pas nécessairement au niveau macroéconomique.

Dans le cas d'un système de retraite par capitalisation, une augmentation des cotisations n'a effectivement aucune influence sur l'épargne macroéconomique. Elle n'affecte pas l'accumulation du capital.

Il en va différemment dans le cas d'un système d'épargne par répartition. L'épargne forcée individuelle n'engendre alors aucune épargne macroéconomique puisque les cotisations prélevées sont immédiatement redistribuées sous la forme de pensions. Aucun fonds de capital n'est alimenté par les co-

tisations. On doit donc s'attendre à ce que la mise en place de retraites par répartition conduise à une baisse du même ordre de l'épargne macroéconomique.

La relation (21) confirme les grandes lignes de cette analyse. Une hausse du taux de cotisations-retraites  $\theta$  exerce un effet négatif direct sur l'épargne, qui apparaît dans le terme  $(1 - \theta)\tilde{w}$ . Mais un effet de revenu s'ajoute à cet effet de substitution. Le rendement des cotisations d'un système à répartition est égal au taux de croissance de la population alors que le rendement général de l'épargne est égal au taux d'intérêt. Augmenter les cotisations est donc bénéfique pour les agents si le taux de croissance de la population est supérieur au taux d'intérêt. Formellement, la richesse intertemporelle de l'agent, c'est-à-dire son revenu de cycle de vie, augmente. Ceci conduit très probablement à une hausse de la consommation et donc à une baisse de l'épargne. Ce deuxième effet vient renforcer l'effet direct de substitution. Dans le cas contraire d'un taux d'intérêt supérieur au taux de croissance de la population, l'effet-revenu s'oppose à l'effet direct de substitution. Il est fort peu probable pourtant qu'il puisse l'inverser. Nous admettons donc que la hausse du taux de cotisation se traduit toujours par une baisse de l'épargne macroéconomique.

Ce raisonnement a été effectué à  $r$  et  $\tilde{w}$  donné, sur la base de la relation (21). Nous pouvons pourtant admettre qu'il s'étend aux relations (19) et (20) en admettant que les effets supplémentaires de rétroaction sont dominés.

La hausse du taux de cotisation se traduit alors par un déplacement vers le bas de la courbe représentée sur la figure 2. Elle engendre un processus de diminution du capital par tête, qui converge vers un nouveau point stationnaire.

Il est utile aussi, pour référence ultérieure, de caractériser l'équilibre stationnaire de manière plus explicite. Pour un niveau donné  $\theta$  de la cotisation-retraite, les valeurs stationnaires de  $\tilde{k}$ ,  $\tilde{c}$  et  $\tilde{d}$  sont solution du système suivant

$$(1 + n)(1 + \gamma)\tilde{k} = (1 - \theta)\tilde{w}(\tilde{k}) - \tilde{c} \quad (22)$$

$$\frac{U_c(\tilde{c}, (1 + \gamma)\tilde{d})}{U_d(\tilde{c}, (1 + \gamma)\tilde{d})} = 1 + r(\tilde{k}) \quad (23)$$

$$\tilde{c} + \frac{1}{1 + n}\tilde{d} = f(\tilde{k}) - (1 + n)(1 + \gamma)\tilde{k} \quad (24)$$

La première relation indique que la contrainte budgétaire de première période détermine l'épargne et donc le stock de capital. La seconde décrit implicitement le comportement d'épargne. On notera que le taux de croissance

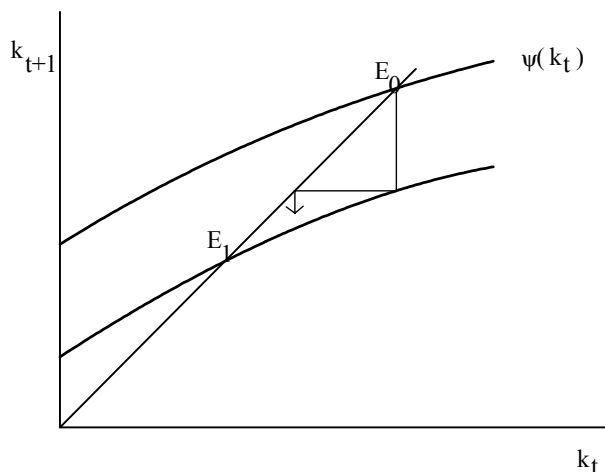


Figure 3: Hausse de la répartition

de la productivité s'introduit dans la fonction d'utilité puisque  $U(c_t, d_{t+1}) = U(A_t \tilde{c}_t, A_{t+1} \tilde{d}_{t+1}) = U(A_t \tilde{c}_t, A_t(1 + \gamma) \tilde{d}_{t+1})$ . L'homogénéité des préférences fait ensuite disparaître le terme de progrès technique du taux marginal de substitution. Enfin, la troisième relation représente l'égalité emplois-ressources sur le marché des biens.

## 2.2 Economie ouverte : le cas d'un petit pays

Plutôt que de considérer une économie fermée, nous pouvons étudier le cas d'une économie échangeant des biens et des actifs financiers avec le reste du monde. Si cette économie est petite, on peut considérer qu'elle n'a pas d'influence sur le reste du monde et notamment sur le niveau du taux d'intérêt mondial. Celui-ci constitue une donnée.

L'analyse du comportement individuel d'épargne suffit à dégager les principales conséquences macroéconomiques du système de retraite. Par définition, les modifications de ce système n'affectent ni le taux d'intérêt, ni l'accumulation du capital. Elles affectent l'épargne, mais ceci se solde sur le compte extérieur, sans effet sur les grandeurs économiques internes. Un supplément d'épargne amène simplement l'économie à accumuler des actifs étrangers et s'accompagne d'un excédent commercial.

Appelons  $b^e$  le montant d'actifs étrangers détenus par un agent jeune. L'épargne des agents jeunes leur permet maintenant d'acheter le capital

physique qui sera utilisé la période suivante ou à acheter des titres étrangers. L'équation (15) devient

$$s_t = (1 + n_{t+1}) (k_{t+1} + b_{t+1}^e) \quad (25)$$

Ecrite en variables par tête (de jeune), la contrainte budgétaire de l'étranger est

$$(1 + n_{t+1}) b_{t+1}^e = (1 + r_t) b_t^e + x_t \quad (26)$$

$x_t$  représente ici l'excédent commercial, c'est-à-dire - dans un modèle à un bien - le montant des biens vendus par le pays à l'étranger. Aussi bien  $b_t^e$  que  $x_t$  peuvent être négatifs. Ils représentent alors une dette extérieure et un déficit commercial, c'est-à-dire un montant d'importations.

Cette relation représente la balance des paiements, ce que l'on peut faire apparaître plus clairement en introduisant le niveau absolu d'actifs étrangers  $B_t^e = N_t b_t^e$ . La contrainte s'écrit alors

$$N_t x_t + r_t B_t^e - (B_{t+1}^e - B_t^e) = 0$$

La balance courante est la somme de l'excédent commercial et des intérêts reçus de l'étranger. L'excédent de balance des capitaux est égal à la diminution du stock d'actifs étrangers détenus par le pays.

Les contraintes budgétaires individuelles (1) et (2) sont inchangées. L'égalité emplois-ressources fait maintenant intervenir le solde extérieur et devient

$$(1 + n_{t+1}) k_{t+1} + c_t + \frac{1}{1 + n_t} d_t + x_t = F(k_t, A_t) \quad (27)$$

Le taux d'intérêt est exogène. Comme le capital physique et les actifs étrangers sont de parfaits substituts pour les agents individuels, ils doivent avoir le même taux de rendement et on a nécessairement

$$F'_1(k_{t+1}, A_{t+1}) - 1 = r_{t+1}$$

où  $r_{t+1}$  désigne maintenant le taux d'intérêt étranger. Celui-ci détermine à chaque période l'intensité capitalistique et par conséquent la production par tête et le niveau des salaires. L'épargne individuelle est également déterminée. Le montant d'actifs étrangers détenus par les jeunes agents en résulte :

$$(1 + n_{t+1}) b_{t+1}^e = (1 - \theta) w_t - \mathcal{C}(r_{t+1}) \left[ (1 - \theta) w_t + \frac{(1 + n) \theta w_{t+1}}{1 + r_{t+1}} \right] - (1 + n_{t+1}) k_{t+1}$$

Le solde extérieur  $x_t$ , enfin, s'ajuste pour permettre l'équilibre global du marché des biens.

Une petite économie partant de niveaux donnés de capital physique et d'actifs étrangers peut ainsi ajuster en une période son stock de capital physique au niveau du taux d'intérêt mondial. Si le taux d'intérêt mondial est constant, elle atteint ainsi en une période son équilibre stationnaire.

Précisons la détermination de l'équilibre stationnaire en passant en unités efficaces. L'intensité capitalistique efficace est constante. Le niveau d'actifs étrangers par unité efficace vérifie

$$(1+n)(1+\gamma)\tilde{b}^e = (1-\theta)\tilde{w}$$

$$-\mathcal{C}(r) \left[ \tilde{w} + \frac{(1+n)(1+\gamma) - (1+r)\theta\tilde{w}}{1+r} \right] - (1+n)(1+\gamma)\tilde{k} \quad (28)$$

Nous avons déjà supposé pour tracer la figure 1 que le membre de droite de cette équation est une fonction décroissante de  $\tilde{k}$ . Cette relation détermine donc le niveau d'actif étranger par unité efficace  $\tilde{b}^e$  qui est, lui aussi, constant.

Le modèle se boucle par la détermination du solde extérieur

$$\tilde{x} = [(1+n)(1+\gamma) - (1+r)]b^e \quad (29)$$

Pour interpréter ces résultats, il faut situer le taux d'intérêt mondial par rapport au taux d'intérêt stationnaire qui se serait établi dans le pays en économie fermée, et par rapport à la règle d'or.

En économie fermée, l'intensité capitalistique se fixe à long terme à la valeur, disons  $\tilde{k}^f$ , qui annule le membre de droite de l'équation (28). Il lui est associé un taux d'intérêt  $r^f$ . En économie ouverte le taux d'intérêt  $r$  détermine une intensité capitalistique  $\tilde{k}^*$ .

Le membre de droite de (28) étant une fonction décroissante de  $\tilde{k}$ , on en déduit les équivalences suivantes

$$r \geq r^f \quad \iff \quad \tilde{k}^* \leq \tilde{k}^f \quad \iff \quad b^e \geq 0$$

Ceci est naturel. Un taux d'intérêt étranger plus élevé que le taux national spontané incite le pays à exporter des capitaux. La situation inverse l'amène à s'endetter.

Il reste à situer  $r$  par rapport à  $n + \gamma$ , pour déterminer le signe de  $x$ . Supposons par exemple  $1+r \geq 1+r^f \geq (1+n)(1+\gamma)$ . Dans ce cas  $b^e$  est positif et  $x$  négatif. Les intérêts reçus suffisent pour financer l'accumulation d'actifs financiers proportionnellement à l'augmentation de la population et au progrès technique. L'excédent sert à importer des biens.

Nous avons alors affaire à un pays rentier. Les revenus des actifs étrangers qu'il détient lui permettent de financer un flux d'importations de biens.

## 3 Efficacité et règle d'or

### 3.1 La règle d'or avec progrès technique

La problématique de la règle d'or consiste à n'étudier que des sentiers homothétiques, à taux de croissance exogène. Sur ce sentier, le niveau d'utilité des générations successives croît à un taux constant. La règle d'or sélectionne parmi ces sentiers celui qui assure à toutes les générations le niveau d'utilité le plus élevé.

On est ainsi amené au programme suivant

$$\max U(\tilde{c}, (1 + \gamma)\tilde{d})$$
$$\tilde{c} + \frac{\tilde{d}}{1 + n} = f(\tilde{k}) - (1 + \gamma)(1 + n)\tilde{k}$$

Les conditions d'optimalité sont

$$f'(\tilde{k}) = (1 + \gamma)(1 + n) \quad (30)$$

$$\frac{U_c(\tilde{c}, (1 + \gamma)\tilde{d})}{U_d(\tilde{c}, (1 + \gamma)\tilde{d})} = f'(\tilde{k}) \quad (31)$$

La première exprime la règle d'or. Elle nous dit que le taux d'intérêt de régime permanent doit être (approximativement) égal à la somme du taux de croissance de la population et du taux de progrès technique, soit  $1 + r = (1 + \gamma)(1 + n)$ .

La seconde condition traduit le choix d'un profil optimal de consommation et indique que le taux marginal de substitution doit être égal au facteur d'intérêt.

Par définition, la règle d'or ne s'intéresse qu'aux caractéristiques du régime permanent, sans prendre en compte la transition vers ce régime. En particulier, elle ne s'intéresse pas au sort de la génération actuelle de vieux. Ceci est très gênant, puisque toute modification du système de retraites par répartition affecte de manière particulière cette génération. Il nous faut donc nous tourner vers une analyse dynamique de l'efficacité.

### 3.2 Y a-t-il un free lunch ?

Dans notre cadre d'analyse, où l'offre de travail est inélastique, les cotisations et les retraites représentent des transferts forfaitaires. Elles ne sont donc pas

source d'inefficacité à horizon fini. La seule inefficacité tient au comportement à l'infini, cad à la possibilité de suraccumulation. Pour introduire à cette question, on peut examiner l'ensemble des transferts intergénérationnels, et se demander s'il est possible de servir un free lunch.

Nous reprenons le cadre considéré précédemment en définissant des transferts forfaitaires en faveur des jeunes et des vieux, qui s'équilibrent sur la période. Nous excluons les dépenses publiques.

$$X_{1,t} + \frac{X_{2,t}}{1+n} = 0$$

On peut considérer que ces transferts sont assis sur les salaires et constituent ainsi un système de retraites par répartition.

$$X_{1,t} = -\theta_t w_t, \quad X_{2,t} = \theta_t (1+n_t) w_t, \quad \theta \geq 0$$

Supposons le taux d'intérêt constant pour alléger les notations. La valeur actualisée des transferts effectués à partir de la date  $t$  en faveur des  $i$  premières générations est

$$S_t(i) = N_{t-1}X_{2,t} + N_t \left( X_{1,t} + \frac{X_{2,t+1}}{1+r} \right) + \dots + \frac{1}{(1+r)^i} N_{t+i} \left( X_{1,t+i} + \frac{X_{2,t+i+1}}{1+r} \right) \quad (32)$$

Cette expression distingue le total des transferts dont bénéficie chaque génération. En regroupant au contraire les transferts par date, on obtient

$$S_t(i) = (N_{t-1}X_{2,t} + N_t X_{1,t}) + \dots + \frac{1}{(1+r)^i} (N_{t+i-1}X_{2,t+i} + N_{t+i}X_{1,t+i}) + \frac{N_{t+i}X_{2,t+i+1}}{(1+r)^{i+1}} = \frac{N_{t+i}X_{2,t+i+1}}{(1+r)^{i+1}}$$

L'expression se réduit à son dernier terme puisque les transferts correspondant à chaque date s'annulent.

Pour fixer les idées, supposons que le taux de cotisation est constant et que les salaires croissent au taux  $\gamma$ . Les vieux de la première générations reçoivent un transfert

$$X_{2,t} = \theta(1+n)w_t > 0$$

Le transfert total dont bénéficie la génération  $t+i$  est

$$X_{1,t+i} + \frac{X_{2,t+i+1}}{1+r} = \frac{(1+n)(1+\gamma) - (1+r)}{1+r} \theta w_{t+i} \geq 0$$

tandis que la valeur actualisée des transferts en faveur des  $i$  premières générations est

$$S_t(i) = \left( \frac{(1+n)(1+\gamma)}{1+r} \right)^{i+1} \theta w_t N_t > 0$$

Nous pouvons alors distinguer deux cas.

**Cas**  $1+r > (1+n)(1+\gamma)$ .

$S_t(i)$  tend vers 0 quand  $i$  tend vers l'infini. La première génération reçoit un transfert positif. Toutes les autres subissent un transfert négatif, c'est-à-dire un prélèvement. La valeur actualisée de ce qui est donné par les générations nouvelles est égale à ce qui reçoivent les vieux de la génération actuelle

Le bilan intergénérationnel est donc parfaitement clair et il est équilibré. La relation (32) représente ainsi le squelette d'une comptabilité intergénérationnelle. Ces comptabilités offrent un cadre permettant d'évaluer les gains ou les pertes réalisés par chacune des générations, lors de la mise en oeuvre d'une nouvelle politique. Elles apportent donc un regard nouveau sur les questions fiscales et budgétaires.

Il faut pourtant reconnaître que leur utilisation pose un problème pratique. Le calcul actualisé nécessite en effet le choix d'un taux d'intérêt de référence, et les bilans ainsi dressés sont assez sensibles au choix de ce taux d'actualisation.

Notons au passage que la même contrainte budgétaire intertemporelle s'applique aux transferts sociaux dans le cas d'une petite économie ouverte. La valeur actualisée des prélèvements opérés sur les générations futures reste égale au transfert en faveur de la génération âgée. Le fait de pouvoir emprunter à l'extérieur n'assouplit évidemment pas cette contrainte. La détention par le pays (et en fait par les agents jeunes) d'actifs étrangers permet seulement de financer un flux d'importations, c'est-à-dire permet au pays de consommer plus qu'il ne produit.

Revenons maintenant à l'économie fermée pour examiner de plus près la contrainte de solvabilité de l'Etat.

Dans une situation où le taux d'intérêt est supérieur au taux de croissance de la population, l'Etat ne gagne-t-il pas à prélever sur les jeunes, placer les sommes ainsi obtenues et rétablir l'utilité des agents en accordant une subvention aux vieux ? Une telle politique ne lui permet-elle pas de dégager un surplus tout en maintenant les niveaux d'utilité de toutes les générations ? En tirant parti de la structure générationnelle, l'Etat peut-il ainsi échapper à toute contrainte de solvabilité ?

Pour répondre à cette question, supposons que l'on opère un prélèvement  $T_{1,t} > 0$  sur les jeunes et que l'on accorde une subvention  $X_{2,t} > 0$  aux vieux.

La question est de savoir si les deux conditions suivantes peuvent être vérifiées simultanément pour toutes les dates.

$$T_{1,t}L_t - X_{2,t}L_{t-1} > 0$$

$$-T_{1,t} + \frac{X_{2,t+1}}{1+r} > 0$$

La première indique que l'Etat opère à chaque période un prélèvement positif. La seconde que chaque génération bénéficie au cours de sa vie d'un transfert actualisé positif.

La première condition s'écrit

$$X_{2,t} < (1+n)T_{1,t}$$

En supposant constant le ratio  $X_2/T_1$  on peut poser

$$X_{2,t} = \lambda(1+n)T_{1,t}, \quad \lambda < 1$$

La seconde condition impose alors

$$T_{1,t} - \frac{\lambda(1+n)T_{1,t+1}}{1+r} < 0$$

soit

$$\frac{T_{1,t+1}}{T_{1,t}} > \frac{1+r}{\lambda(1+n)} > \frac{1+\gamma}{\lambda} > 1+\gamma$$

La combinaison recherchée semble a priori possible. L'Etat peut prélever sur les jeunes, en compensant quand ils sont vieux tout en opérant un prélèvement net. Mais ceci n'est possible que si les prélèvements sur les jeunes augmentent sans limite, à un taux supérieur à celui de la productivité. On se heurterait donc inévitablement aux contraintes physiques. Cette politique n'est pas soutenable.

**Cas**  $1+r < (1+n)(1+\gamma)$ .

Dans ce cas, toutes les générations reçoivent un transfert positif et  $S_t(i)$  tend vers  $+\infty$  quand  $i$  tend vers l'infini. La valeur actualisée de ces subventions est donc infinie. L'Etat peut servir un free lunch. Il n'a aucun problème pour être solvable.

Ceci suggère que la situation, dans ce dernier cas, n'est pas Pareto optimale. La trajectoire d'équilibre spontané ne constitue pas un optimum de Pareto.

### 3.3 La caractérisation de l'optimum

Plutôt que d'étudier l'ensemble des optimum, nous nous intéressons maintenant aux optimum particuliers associés à la maximisation d'une somme actualisée des utilités individuelles. Le paramètre essentiel est alors le facteur social d'escompte. Ce facteur  $\beta = 1/(1 + \rho)$  est lié négativement au taux de préférence pour le présent  $\rho$ . Il caractérise le poids que la société attache au bien-être des générations futures.

En recherchant ainsi une trajectoire optimale, on arbitre entre les intérêts des vieux de la période présente et ceux des jeunes et des générations suivantes. Mais on ne tient nullement compte de droits acquis. Le montant des cotisations que les vieux ont versé antérieurement n'intervient pas dans la détermination de la solution optimale. L'optimisation s'opère pour ainsi dire sur une table rase, en ne prenant en compte que les données physiques et comptables du moment. C'est la volonté d'arbitrage intergénérationnel, représentée notamment par le paramètre  $\beta$ , qui protège les vieux, et non pas un principe de respect de droits acquis.

On peut en outre penser que cet arbitrage n'est pas représenté de manière très satisfaisante, puisqu'il repose sur une fonction d'utilité collective additive par rapport aux utilités individuelles. Des formes plus générales du type des fonctions d'Atkinson utilisées en économie publique permettraient de prendre en compte un degré de concernement collectif et non pas seulement un taux de préférence pour les générations actuelles. Nous nous en tenons pourtant à la formulation habituelle d'une somme d'utilités.

Le problème est

$$\max U(c_{-1}, d_0) + \sum_{t=0}^{\infty} \beta^{t+1} U(c_t, d_{t+1})$$

$$(1+n)k_{t+1} + c_t + \frac{1}{1+n}d_t = F(k_t, A_t), \quad t = 0, \dots \quad (33)$$

$k_0$  et  $c_{-1}$  donnés

On se place a priori dans le cas général d'une fonction d'utilité instantanée non-séparable. Les choix de  $c_t$  et  $d_t$  à la date  $t$  dépendent alors du niveau  $c_{t-1}$  choisi à la date  $t-1$ . Ce niveau de consommation constitue donc une variable d'état, et c'est pour rendre plus clair cet aspect que l'on a singularisé le premier terme dans la somme des utilités.

On obtient les conditions d'optimalité suivantes :

$$U_c(c_t, d_{t+1}) = x_t \quad (34)$$

$$U_d(c_{t-1}, d_t) = \frac{\beta}{1+n} x_t \tag{35}$$

$$U_d(c_t, d_{t+1}) = \frac{\beta}{1+n} x_{t+1} \tag{36}$$

$$(1+n)x_t = \beta F'_1(k_{t+1}, A_{t+1})x_{t+1} \tag{37}$$

Les 5 équations (33) à (37) permettent de déterminer  $k_{t+1}$ ,  $x_{t+1}$ ,  $c_t$  ainsi que  $d_t$  et  $d_{t+1}$  en fonction de  $k_t$ ,  $x_t$ ,  $c_{t-1}$ . On se ramène ainsi à un système dynamique d'ordre 3. La consommation passée des jeunes  $c_{t-1}$ , qui influence l'utilité courante des vieux, joue le rôle d'une variable d'état qui vient s'ajouter au stock de capital et à la variable adjointe. Dans le même esprit, l'agent maximisateur doit anticiper la valeur de  $d_{t+1}$  pour pouvoir évaluer l'utilité de la consommation courante. Ceci impose d'introduire la relation (36), qui n'est autre que la forme anticipée de la relation (35).

Ce système se simplifie lorsque la fonction d'utilité est séparable. On se ramène alors à un système d'ordre deux. Les deux relations (34) et (35) prennent la forme

$$U_c(c_t) = x_t, \quad U_d(d_t) = \frac{\beta}{1+n} x_t$$

Elles permettent d'exprimer  $c_t$  et  $d_t$  en fonction de  $x_t$ . Les relations (33) et (37) fournissent alors un système dynamique d'ordre deux dont les inconnues sont l'intensité capitalistique et la variable adjointe.

Etudions la croissance régulière de long terme. Pour qu'elle existe il est nécessaire que la fonction d'utilité soit homogène. Supposons donc qu'elle est homogène de degré  $1 - 1/\sigma$ . Le paramètre  $\sigma$  représente l'élasticité intertemporelle de substitution. En posant  $\tilde{x}_t = x_t A_t^{1/\sigma}$ , les relations (34), (36) et (37) prennent la forme

$$U_c(\tilde{c}_t, (1+\gamma)\tilde{d}_{t+1}) = \tilde{x}_t$$

$$U_d(\tilde{c}_t, (1+\gamma)\tilde{d}_{t+1}) = \frac{\beta}{1+n} (1+\gamma)^{-1/\sigma} \tilde{x}_{t+1}$$

$$(1+n)\tilde{x}_t = \beta f'(\tilde{k}_{t+1}) (1+\gamma)^{-1/\sigma} \tilde{x}_{t+1}$$

L'optimum stationnaire est caractérisé par les relations suivantes :

$$1+r = \frac{(1+n)(1+\gamma)^{1/\sigma}}{\beta} \tag{38}$$

$$\frac{U_c(\tilde{c}, (1 + \gamma)\tilde{d})}{U_d(\tilde{c}, (1 + \gamma)\tilde{d})} = 1 + r \quad (39)$$

$$\tilde{c} + \frac{1}{1 + n}\tilde{d} = f(\tilde{k}) - (1 + n)(1 + \gamma)\tilde{k} \quad (40)$$

Les deux relations (39) et (40) caractérisaient déjà l'équilibre stationnaire du modèle de Diamond. La relation (38) en revanche remplace la contrainte budgétaire de première période qui intervenait dans cette caractérisation.

Elle exprime la règle d'or modifiée et s'écrit, au premier ordre près,

$$r \simeq n + \rho + \gamma/\sigma$$

On comprend mieux l'origine de cette formule en l'écrivant sous la forme

$$1 + \gamma = \left( \frac{\beta(1 + r)}{1 + n} \right)^\sigma$$

Le membre de droite représente le taux de croissance des consommations individuelles, tel qu'il découle du comportement individuel des consommateurs. A long terme, ce taux de croissance doit être égal au taux de progrès technique.

On éclaire aussi la formule en notant que la fonction-objectif peut s'écrire

$$\sum_{t=0}^{\infty} \beta^t U(c_t, d_{t+1}) = \sum_{t=0}^{\infty} (\beta(1 + \gamma)^{1-1/\sigma})^t U(\tilde{c}_t, (1 + \gamma)\tilde{d}_{t+1})$$

Il faut donc que le facteur d'escompte adapté  $\beta(1 + \gamma)^{1-1/\sigma}$  soit inférieur à l'unité. La règle d'or modifiée implique alors

$$\frac{(1 + n)(1 + \gamma)}{(1 + r)} = \beta(1 + \gamma)^{1-1/\sigma} < 1$$

On retrouve ici la condition d'efficacité intertemporelle qui impose que le taux d'intérêt soit supérieur au taux de croissance de l'économie.

La règle d'or modifiée détermine ainsi le taux d'intérêt, l'intensité capitalistique et la production par tête. Celle-ci détermine la quantité disponible pour la consommation totale  $c + d/(1 + n)$ , dont le partage dépend du taux d'intérêt. L'optimum de long terme est illustré sur la figure 3 où l'on a, pour simplifier, négligé le progrès technique.

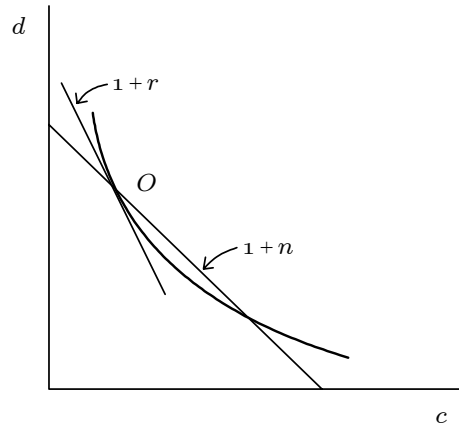


Figure 4:

Cette trajectoire optimale peut être mise en oeuvre par l'Etat en utilisant des impôts et transferts forfaitaires ou encore en mettant en place un système de retraites par répartition, dont les taux de cotisation devraient a priori évoluer au cours du temps. Nous l'étudierons en détail ci-dessous, après avoir analysé les relations entre système de retraites et endettement public.

### 3.4 Le cas d'une petite économie ouverte

Examinons maintenant l'optimum d'une petite économie ouverte.

Le problème est le suivant :

$$\begin{aligned} \max U(c_{-1}, d_0) + \sum_{t=0}^{\infty} \beta^{t+1} U(c_t, d_{t+1}) \\ (1+n)k_{t+1} + c_t + \frac{1}{1+n}d_t + x_t = F(k_t, A_t) \\ (1+n)b_{t+1}^e = (1+r)b_t^e + x_t \\ k_0, b_0^e \text{ et } c_{-1} \text{ donnés} \end{aligned} \tag{41}$$

Définissons la richesse totale

$$a_t = k_t + b_t^e$$

Les deux contraintes peuvent être remplacées par la contrainte unique

$$(1+n)a_{t+1} = (1+r)a_t + F(k_t, A_t) - (1+r)k_t - c_t - \frac{1}{1+n}d_t$$

Le problème peut alors être résolu en deux temps.

Le premier temps consiste à maximiser le revenu net que le pays peut tirer de l'utilisation du capital productif. Il choisit à chaque instant l'intensité capitaliste  $k_t$  qui maximise  $F(k_t, A_t) - (1+r)k_t$  et choisit ainsi une intensité capitaliste adaptée au niveau mondial du taux d'intérêt. Le revenu ainsi obtenu constitue sa masse salariale.

Ces choix productifs effectués, il décide dans un second temps de son comportement d'épargne et de consommation, c'est-à-dire de la manière dont il finance ses investissements. En présence de marchés financiers parfaits, les choix d'investissement et d'épargne se séparent donc complètement.

Le comportement d'épargne optimal du pays dépend cruciallement des niveaux du taux d'intérêt mondial et du taux de préférence pour le présent. Conformément au modèle standard de cycle de vie, un taux d'intérêt  $r$  supérieur au taux de préférence pour le présent  $\rho$  conduit le pays à faire croître sans limite sa consommation et, pour cela son niveau d'actifs étrangers. Le désir du pays de profiter d'un taux d'intérêt mondial élevé l'amène à sacrifier les générations présentes pour accumuler et accroître le bien-être des générations futures.

La trajectoire optimale en économie ouverte est ainsi très différente de la trajectoire d'équilibre, qui conduisait en une période à un état stationnaire. La trajectoire optimale conduit au contraire à une évolution explosive de la dette, mais aussi des niveaux d'utilité individuelle.

De manière plus précise, le facteur de croissance de la consommation est

$$\left( \frac{\beta(1+r)}{1+n} \right)^\sigma$$

où le taux d'intérêt est maintenant fixé de manière exogène. Si ce facteur est supérieur au facteur de progrès technique  $1+\gamma$ , les niveaux de consommation et d'actif étranger, mesurés en unités efficaces, explosent.

L'interprétation du modèle en termes de système de retraites n'est alors pas très intéressante. Elle conduirait typiquement, lorsque le taux d'intérêt mondial est élevé, à prélever des cotisations sur les premières générations, pour financer les retraites de la génération âgée initiale, mais à faire décroître ensuite ces cotisations en les rendant rapidement négatives pour permettre aux agents jeunes d'effectuer des placements plus rémunérateurs sur le marché financier mondial.

Formellement, la contrainte budgétaire des agents jeunes est

$$c_t + (1+n)a_{t+1} = w_t(1-\theta_t)$$

Pour que la consommation et la richesse croissent plus vite que le progrès technique, alors que le salaire croît au rythme du progrès technique, il faudrait que le taux de cotisation décroisse de manière exponentielle.

### 3.5 Caractérisation géométrique

On peut utiliser une représentation géométrique dans le plan  $(c, d)$  pour illustrer la détermination de l'optimum stationnaire et des transferts qui le sous-tendent. Nous nous plaçons pour simplifier dans un cadre sans progrès technique, mais nous introduisons des dépenses publiques exogènes.

Considérons d'abord l'équilibre stationnaire associé à des transferts forfaitaires. Ces transferts équilibrent la contrainte budgétaire instantanée de l'Etat :

$$X_1 + \frac{X_2}{1+n} + g = 0 \quad (42)$$

L'équilibre stationnaire est décrit par les relations suivantes :

$$(1+n)k = w(k) + X_1 - c \quad (43)$$

$$\frac{U_c(c, d)}{U_d(c, d)} = 1 + r(k) \quad (44)$$

$$c + \frac{1}{1+n}d = f(k) - (1+n)k - g \quad (45)$$

L'optimum stationnaire associé à un facteur d'escompte social  $\beta$  satisfait aussi les relations (44) et (45). La seule différence est que la relation (43), qui décrit la formation de l'épargne d'équilibre, doit être remplacée par la règle d'or, qui détermine directement l'intensité capitaliste. Soit

$$1 + r(k) = \frac{1+n}{\beta} \quad (46)$$

Les relations (44) et (45) déterminent implicitement deux fonctions  $c_0(k)$  et  $d_0(k)$  et définissent ainsi dans le plan  $(c, d)$  une courbe paramétrée par le niveau de  $k$ . Cette courbe n'est autre que l'ensemble des optimums de Pareto associés à des facteurs d'escompte social constants. Chaque point de la courbe est associé à un niveau de  $k$  c'est-à-dire, d'après (46), à un niveau donné du facteur d'escompte  $\beta$ .

L'allure générale de cette courbe  $\Gamma_0$  peut être précisée. Appelons  $k^G$  l'intensité capitaliste de la règle d'or, qui maximise  $f(k) - (1+n)k$ . Définissons dans le plan  $(c, d)$  la droite  $D_G$  de pente  $1+n$  et d'équation

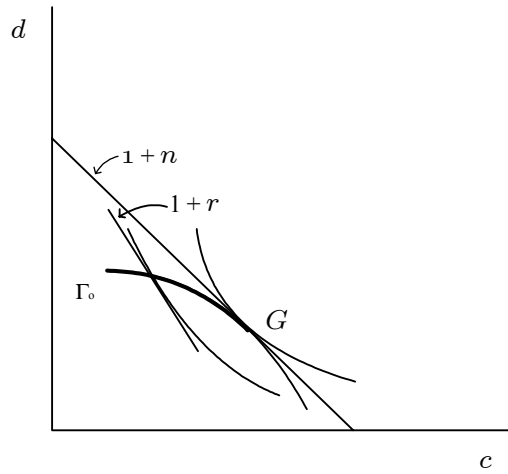


Figure 5: Optimums de Pareto

$$c + d/(1+n) = f(k^G) - (n + \mu)k^G - g \quad (47)$$

La règle d'or revient à chercher sur cette droite le couple de consommations qui maximise l'utilité du consommateur représentatif. Elle est représentée par le point  $G$  où la droite  $D_G$  est tangente à une courbe d'indifférence.

La courbe  $\Gamma_0$  est tangente au point  $G$  à la droite  $D_G$  et est située en-dessous de cette droite. En effet, la définition de la règle d'or implique que  $c + d/(1+n)$  atteint un maximum au point  $G$  de la règle d'or. De manière plus précise, l'ensemble des optimum de Pareto est constitué de la demi-courbe  $\Gamma_0$  située au dessus du point  $G$ . La raison en est que le facteur d'intérêt, égal à la pente de la tangente à la courbe d'indifférence passant par un point de la courbe, doit être supérieur à  $1+n$ . L'ensemble des optimums de Pareto est en définitive la partie en trait gras de la courbe  $\Gamma_0$  représentée sur la figure 5.

Définissons maintenant une deuxième courbe  $\Gamma_1$  par les relations

$$c = w - (1+n)k - g \quad (48)$$

$$d = (1+r(k))(1+n)k \quad (49)$$

Ces relations impliquent

$$c + d/(1+n) = w + r(k)k - nk - g = f(k) - (1+n)k - g$$

La somme  $c + d/(1 + n)$  est donc maximum pour  $k^G$  et la courbe  $\Gamma_1$  est donc tangente elle aussi à la droite  $D_G$  en un point  $A$ , qui peut se situer aussi bien en-dessous qu'au-dessus du point  $G$  de la règle d'or.

L'intersection de ces deux courbes représente l'équilibre de Diamond, sans autre transfert qu'un prélèvement forfaitaire sur les jeunes servant à financer les dépenses publiques. Bien entendu, en l'absence de dépenses publiques, ce point correspond à l'équilibre traditionnel de Diamond, sans transferts.

Deux cas de figure doivent être distingués.

Dans le cas de la figure 6, l'équilibre de Diamond est un optimum de Pareto, caractérisé par un taux d'intérêt supérieur au taux de croissance démographique. Ce cas est celui de la sous-capitalisation.

Considérons alors un optimum de Pareto quelconque représenté par un point  $M$  de la courbe  $\Gamma_0$ . Cet optimum peut être décentralisé comme équilibre de Diamond associé à des transferts  $X_1$  et  $X_2$  tels que

$$c = w - (1 + n)k + X_1 = w - (1 + n)k - g + (X_1 + g)$$

$$d = (1 + r(k))(1 + n)k + X_2$$

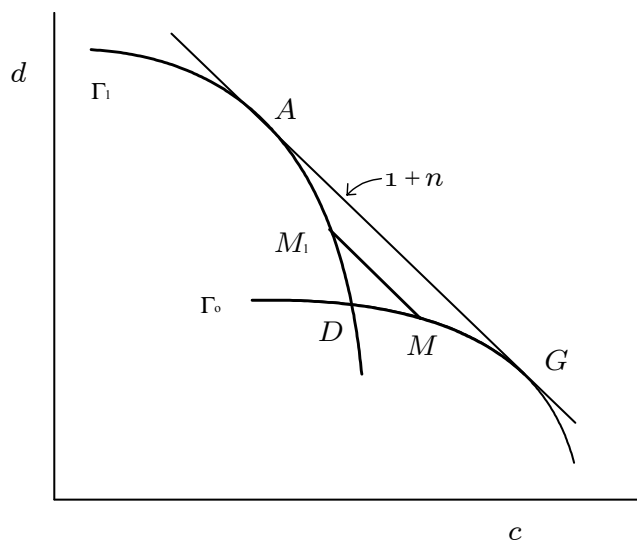


Figure 6: Sous-capitalisation

Ceci signifie qu'on peut associer au point  $M$  de la courbe  $\Gamma_0$  un point  $M_1$  de la courbe  $\Gamma_1$  tel que le vecteur  $M_1M$  ait pour coordonnées  $X_1 + g$  et  $X_2$ . Comme

$$X_1 + g = \frac{-X_2}{1 + n}$$



## 4 Altruisme

Le modèle à générations habituel suppose des agents égoïstes qui ne se préoccupent pas de leurs descendants et ne leur laissent donc pas d'héritage. Il convient de voir en quoi l'altruisme modifie l'analyse.

Appelons  $h_t$  l'héritage versé à chaque jeune. Les contraintes budgétaires deviennent

$$c_t + s_t = w_t(1 - \theta_t) + h_t \quad (50)$$

$$d_{t+1} + (1 + n_{t+1})h_{t+1} = (1 + r_{t+1})s_t + \theta_{t+1}(1 + n_{t+1})w_{t+1} \quad (51)$$

$$h_{t+1} \geq 0 \quad (52)$$

L'agent jeune reçoit un héritage  $h_t$ . Quand il sera âgé, il versera un héritage  $h_{t+1}$  à chacun de ses  $1 + n_{t+1}$  héritiers. On suppose en outre que le legs est nécessairement positif. Il n'est pas possible d'imposer à un agent de prendre à son compte les dettes de ses parents.

Nous retenons l'hypothèse standard d'un altruisme à la Barro (1984). Chaque agent prend en compte l'utilité de son descendant immédiat. Le paramètre  $\beta$  s'interprète comme un degré de concernement pour son héritier.

$$V_t = U(c_t, d_{t+1}) + \beta V_{t+1}$$

Par récurrence, l'utilité de l'agent né à la date 0 peut s'écrire sous la forme

$$\sum_{t=0}^{\infty} \beta^{t+1} U(c_t, d_{t+1})$$

A travers ses enfants, eux-mêmes altruistes, l'agent initial est amené à se soucier de ses descendants de toutes les générations. On retrouve ainsi, avec une interprétation différente, la fonction d'utilité collective que nous avons utilisée dans la section précédente.

En définitive, le problème de l'agent dynastique de la date 0 qui dispose d'un capital initial  $s_{-1}$  est de choisir  $d_0, h_0, c_0, s_0, \dots$  solution du problème suivant

$$\max U(c_{-1}, d_0) + \sum_{t=0}^{\infty} \beta^{t+1} U(c_t, d_{t+1})$$

$$c_t + s_t = w_t(1 - \theta_t) + h_t, \quad t \geq 0 \quad (53)$$

$$d_t + (1 + n_t)h_t = (1 + r_t)s_{t-1} + \theta_t(1 + n_t)w_t, \quad t \geq 0 \quad (54)$$

$$h_t \geq 0, \quad t \geq 0$$

Négligeons les contraintes de positivité des legs et posons

$$h'_t = h_t - \theta_t w_t$$

Les contraintes de la date  $t$  peuvent s'écrire

$$c_t + s_t = w_t + h'_t \quad (55)$$

$$d_t + (1 + n_t) h'_t = (1 + r_t) s_{t-1} \quad (56)$$

Il est clair que le système de retraite n'a aucune influence. Le retraite ne fait que se substituer au don et n'affecte pas les choix de consommation et d'accumulation. Une cotisation retraite supplémentaire de 100 a pour seul effet d'amener les agents à diminuer leur legs de 100. Seul compte le transfert net  $h'_t$  qui s'opère, à une date donnée, entre jeunes et vieux.

Posons d'autre part

$$a_t = s_{t-1}/(1 + n_t)$$

On peut ajouter les contraintes de la date  $t$  (en multipliant la seconde par  $1/(1 + n_t)$ ) pour obtenir l'unique contrainte

$$(1 + n_{t+1})a_{t+1} = (1 + r_t)a_t + w_t - c_t - \frac{d_t}{1 + n_t}$$

Le problème fondamental de l'agent dynastique est de déterminer l'évolution temporelle de son actif  $a_t$ . L'héritage et la retraite n'interviennent qu'après un second temps, une fois les choix d'épargne faits. Ils ne servent qu'à répartir entre vieux et jeunes la consommation globale de la date  $t$ . L'analyse au niveau dynastique montre ainsi que l'héritage ne doit pas être considéré comme un transfert intertemporel. Il ne représente qu'un transfert contemporain entre deux catégories d'agents.

On peut alors passer à l'analyse de l'équilibre général. On retrouve, dans une version décentralisée, l'analyse de l'optimum. L'actif  $a_t$  s'identifie au capital par tête  $k_t$  tandis que le revenu national brut  $(1 + r_t)a_t + w_t$  s'identifie à la production.

Sous réserve d'admettre la positivité des legs, on retrouve l'analyse de l'optimum. Ceci nous montre clairement que l'instauration ou la modification du système de retraites n'a aucun effet lorsque les agents sont altruistes. La retraite représente un substitut parfait à l'héritage.

## 5 Dette publique et neutralité

### 5.1 La gestion des actifs et de l'endettement des caisses de retraite

Nous quittons le domaine de la pure répartition en supposant que la Caisse de retraites peut détenir des actifs ou s'endetter. Dans notre cadre d'analyse, il n'y a pas de raison a priori de distinguer la Caisse de retraites d'un État qui procède à des transferts et accumule des actifs. Nous commençons donc en reprenant l'analyse traditionnelle, déjà entreprise par Diamond (1965) du rôle de la dette publique dans le modèle à générations.

L'État émet une dette qui constitue un parfait substitut au capital physique. On désigne par  $b_t = B_t/L_t$  le montant de dette publique par tête. L'État effectue également des transferts  $X_{1,t}$  et  $X_{2,t}$  aux deux générations. Sa contrainte budgétaire, exprimée en variables par tête, est

$$(1 + n_{t+1})b_{t+1} = (1 + r_t)b_t + g_t + X_{1,t} + \frac{X_{2,t}}{1 + n_t} \quad (57)$$

L'épargne des jeunes est détenue sous la forme de capital ou de titres publics, soit

$$s_t = (1 + n_{t+1})(k_{t+1} + b_{t+1}) \quad (58)$$

L'équation d'évolution est alors

$$(1 + n_{t+1})k_{t+1} = w_t + X_{1,t} - \mathcal{C}(r_{t+1}) \left[ w_t + X_{1,t} + \frac{X_{2,t+1}}{1 + r_{t+1}} \right] - (1 + n_{t+1})b_{t+1} \quad (59)$$

Pour des conditions initiales données et des politiques de transferts données, les équations (57) et (59) déterminent l'évolution de  $k_t$  et  $b_t$ .

Appliquons maintenant ce modèle aux retraites, en considérant plusieurs systèmes de gestion. Nous omettons donc les dépenses publiques  $g_t$ .

Considérons d'abord le cas d'une caisse de retraites par répartition qui décide de passer à la capitalisation. Les pensions sont dorénavant égales au revenu des cotisations et on a donc

$$X_{1,t} = -\theta w_t, \quad X_{2,t} = (1 + r_t) \theta w_{t-1}$$

La contrainte budgétaire (57) de la caisse peut être écrite sous la forme

$$\left( b_{t+1} + \frac{\theta w_t}{1 + n_{t+1}} \right) = \frac{1 + r_t}{1 + n_{t+1}} \left( b_t + \frac{\theta w_{t-1}}{1 + n_t} \right)$$

Plaçons-nous dans le cas normal, sans suraccumulation, où le taux d'intérêt de long terme est supérieur à la somme du taux de croissance de la population

et du taux de progrès technique. La somme  $b_{t+1} + \theta w_t / (1 + n_{t+1})$  doit croître à un taux supérieur au taux du progrès technique. Ceci n'est pas soutenable. Ou bien la valeur initiale  $b_1 + \theta w_0 / (1 + n_1)$  est positive et l'endettement de la caisse explose. Ou bien elle est négative, et le capital de la caisse croît plus vite que l'économie, ce qui finira par être impossible physiquement.

Le seul cas où cette politique est soutenable est donc celui où  $b_1 + \theta w_0 / (1 + n_1) = 0$ . Cette condition serait remplie dans le cas où la caisse aurait toujours fonctionné sous le régime de la capitalisation. L'actif initial  $-b_1$  de la caisse est la contrepartie des premières cotisations, et la caisse maintient ultérieurement cette égalité. On retrouve aussi le fait que le système de retraite n'a alors aucun effet réel puisque l'équation d'évolution du capital (59) devient

$$\begin{aligned} (1 + n)k_{t+1} &= w_t - \mathcal{C}(r_{t+1})[w_t] - [\theta w_t + (1 + n_{t+1})b_{t+1}] \\ &= w_t - \mathcal{C}(r_{t+1})[w_t] \end{aligned}$$

et est identique à celle du modèle sans retraites.

Une caisse ayant un actif initial insuffisant et voulant passer à un régime de capitalisation doit donc prévoir des cotisations exceptionnelles. C'est le cas d'une caisse qui abandonne la répartition et doit s'endetter pour financer les pensions correspondant aux droits acquis dans le système ancien de répartition.

Elle peut choisir un dispositif du type suivant

$$X_{1,t} = -\theta w_t - \delta b_t, \quad X_{2,t} = (1 + r_t) \theta w_{t-1} - \delta b_t$$

La caisse effectue des prélèvements supplémentaires, pour le remboursement de la dette sociale, qui sont représentés par les termes  $\delta b_{t-1}$ . Ces cotisations sont proportionnelles au montant de la dette, ce qui constitue évidemment une force de rappel. Un coefficient  $\delta$  plus élevé signifie un ajustement plus rapide. Il doit être assez haut pour empêcher la dette d'exploser et assurer la soutenabilité du dispositif.

L'évolution de la dette devient en effet

$$(1 + n_{t+1})b_{t+1} = \left[ 1 + r_t - \left( 1 + \frac{1}{1 + n_t} \right) \delta \right] b_t - \theta w_t + \frac{(1 + r_t) \theta w_{t-1}}{1 + n_t}$$

Pour la stabiliser, il convient grosso modo de rendre inférieur à l'unité le coefficient de  $b_t$

Des situations analogues se présentent lorsque la caisse fait face à des changements non anticipés d'ordre démographique ou financiers et tente de maintenir les montants antérieurs des pensions.

Le cas d'une caisse de répartition faisant face à une baisse de natalité peut être géré selon le dispositif suivant

$$X_{1,t} = -\theta w_t - \delta b_t, \quad X_{2,t} = (1 + \bar{n}) \theta w_t - \delta b_t$$

La caisse souhaite maintenir un rendement des cotisations correspondant au taux de natalité antérieur  $\bar{n}$ , alors que le véritable taux est maintenant plus bas. Ceci n'est possible qu'en effectuant des prélèvements supplémentaires plus ou moins étalés dans le temps.

On peut aussi imaginer une caisse mettant en place un système de capitalisation, où les cotisations seraient rémunérées à un taux conventionnel  $\bar{r}$  déconnecté des taux de marché. On aurait alors

$$X_{1,t} = -\theta w_t - \delta b_t, \quad X_{2,t} = (1 + \bar{r}) \theta w_{t-1} - \delta b_t$$

De nouveau, des prélèvements (ou des ristournes) supplémentaires sont nécessaires pour stabiliser l'évolution de la dette de la caisse.

## 5.2 La comptabilisation des droits acquis

Nous nous sommes placé jusqu'à présent dans un cadre de prestations non définies. Nous avons en effet considéré que le paiement de cotisations par les agents ne s'accompagnait pas d'un engagement à verser ultérieurement des pensions au montant défini précisément par contrat. Le montant des pensions dépendait du montant des cotisations perçues au même moment et la politique de la caisse consistait à redistribuer passivement et instantanément les montants prélevés.

Envisageons maintenant le cas où le montant de la pension reçue par un agent est explicitement lié au montant des cotisations versées. La pension que touchera un agent est donc

$$p_{t+1} = \mu_{t+1} \theta_t w_t \tag{60}$$

où  $\mu_{t+1}$  représente le facteur de rendement des cotisations, déterminé à la date  $t$ . Bien entendu un tel système requiert l'intervention d'un actif financier, ou d'une dette, pour absorber les chocs non-anticipés.

La loi d'évolution de cet actif reste la même que précédemment. En l'écrivant en montants absolus pour clarifier l'argumentation on a ainsi

$$B_{t+1} = (1 + r_t) B_t - \theta_t w_t N_t + p_t N_{t-1} \tag{61}$$

Le montant total des engagements de la Caisse est la somme de sa dette - engagement vis-à-vis des marchés - et de ses engagements vis-à-vis de ses

cotisants c'est-à-dire la valeur actualisée de leurs pensions futures. Il prend donc la forme

$$H_{t+1} = B_{t+1} + \frac{p_{t+1}N_t}{R_{t+1}} \quad (62)$$

En combinant (61) et (62) la contrainte budgétaire de la Caisse devient

$$\begin{aligned} H_{t+1} &= (1 + r_t)H_t + \left( \frac{p_{t+1}}{R_{t+1}} - \theta_t w_t \right) N_t \\ &= (1 + r_t)H_t + \left( \frac{\mu_{t+1}}{R_{t+1}} - 1 \right) \theta_t w_t N_t \end{aligned} \quad (63)$$

Le montant total des engagements de la Caisse augmente selon le solde entre les pensions qu'elle s'engage à verser et les cotisations qu'elle prélève.

Le cas de la capitalisation est celui où le taux de rendement des cotisations est égal au taux d'intérêt, soit  $\mu_{t+1} = R_{t+1}$ , et où on a donc  $H = 0$ . Le total des engagements de la caisse reste nul et l'on retrouve l'analyse du paragraphe précédent.

Considérons donc un système différent, quel qu'il soit. La situation normale, en sous-capitalisation, est celle où le taux de croissance des engagements  $H_t$  est inférieur au taux d'intérêt. La relation (63) montre que  $\mu_{t+1}/R_{t+1}$  doit être inférieur à l'unité. Le montant courant  $L_t$  de la population exerce donc une influence négative sur l'évolution des engagements de la caisse. Une baisse non anticipée du nombre des cotisants accélère leur croissance. Ceci met bien en évidence la sensibilité du système aux chocs démographiques.

### 5.3 La neutralité de la dette publique

Nous avons vu que la dynamique de l'économie en présence de dette publique se ramène aux deux équations (57) et (59) qui décrivent l'évolution de la dette publique et du capital.

Il n'est pas véritablement utile, pourtant, d'étudier ce système dynamique. Comme l'ont montré en substance Belan-Pestieau (1999), l'évolution de l'économie privée est largement indépendante de celle de la dette publique. Seuls comptent les transferts nets réalisés à chaque période par les autorités. Nous en donnons une démonstration simple et synthétique.

Les consommations des deux types d'agents respectent toujours les deux contraintes budgétaires (9) et (10). Compte tenu de (58), elles peuvent s'écrire de la manière suivante :

$$c_t = w_t - (1 + n_{t+1})k_{t+1} + X_{1,t} - (1 + n_{t+1})b_{t+1}$$

$$d_{t+1} = (1 + r_{t+1})(1 + n_{t+1})k_{t+1} + X_{2,t+1} + (1 + r_{t+1})(1 + n_{t+1})b_{t+1}$$

Définissons des transferts nets

$$\bar{X}_{1,t} = X_{1,t} - (1 + n_{t+1})b_{t+1} \quad (64)$$

$$\bar{X}_{2,t} = X_{2,t} + (1 + r_t)(1 + n_t)b_t \quad (65)$$

La valeur actualisée des transferts nets est égale à celle des transferts effectifs

$$\bar{X}_{1,t} + \frac{\bar{X}_{2,t+1}}{1 + r_{t+1}} = X_{1,t} + \frac{X_{2,t+1}}{1 + r_{t+1}}$$

tandis que la contrainte budgétaire de l'Etat (57) devient

$$g_t + \bar{X}_{1,t} + \frac{\bar{X}_{2,t}}{1 + n_t} = 0 \quad (66)$$

En définitive, la dynamique se ramène à l'équation

$$(1 + n)k_{t+1} = w_t + \bar{X}_{1,t} - \mathcal{C} \left( w_t + \bar{X}_{1,t} + \frac{\bar{X}_{2,t+1}}{1 + r_{t+1}}, r_{t+1} \right) \quad (67)$$

tandis que les consommations sont

$$c_t = w_t - (1 + n_{t+1})k_{t+1} + \bar{X}_{1,t}$$

$$d_{t+1} = (1 + r_{t+1})(1 + n_{t+1})k_{t+1} + \bar{X}_{2,t+1}$$

On retrouve formellement l'équation d'évolution du modèle initial, sans dette publique. La seule différence est que les transferts nets  $\bar{X}_1$  et  $\bar{X}_2$  ont pris la place des transferts effectifs  $X_1$  et  $X_2$ . La possibilité d'utiliser la dette publique n'élargit donc pas le domaine des possibles. Tout se passe donc comme si l'Etat recourait directement à des transferts forfaitaires, sans utiliser la dette.

Ce résultat fondamental a une incidence évidente sur la question du choix du régime de retraites. Comme l'ont souligné Belan-Pestieau(1999) les systèmes de retraites par répartition et par capitalisation sont en fait équivalents dès lors que l'Etat peut utiliser librement dette publique et transferts forfaitaires.

Cette propriété générale de neutralité conduit ainsi à mettre l'accent sur les transferts générationnels nets qui affectent les agents. Elle se situe ainsi dans l'esprit des méthodes de comptabilité générationnelle. Elle nous montre aussi que la meilleur méthodologie consiste à étudier les trajectoires optimales - comme nous l'avons fait ci-dessus - avant de se soucier de la manière dont

elles peuvent être mises en oeuvre par un système de retraites particulier ou par des transferts.

### Un exemple de neutralité

Pour fixer les idées, prenons l'exemple d'un gouvernement choisissant de passer à un système de répartition et décidant d'accompagner ce passage de prélèvements supplémentaires destinés à assurer les pensions de la génération âgée initiale.

Pour simplifier la présentation, nous excluons la croissance de la population et nous supposons que le taux d'intérêt reste constant. La contrainte budgétaire de l'Etat est donc

$$b_{t+1} = (1 + r)b_t + X_{1,t} + X_{2,t}$$

La nécessité d'assurer le paiement des retraites à la génération initiale se traduit pour l'Etat par un besoin de financement initial  $P_0$ . Pour l'Etat ceci est équivalent à avoir une dette initiale  $b_0$  telle que  $P_0 = (1 + r)b_0$ . A chaque période, l'Etat prélève des impôts forfaitaires égaux sur les deux catégories d'agents. Le montant du prélèvement est fixé en proportion du niveau de dette, et est supérieur aux intérêts à payer sur la dette publique. Ceci assure une diminution progressive de la dette, et par voie de conséquence, du prélèvement

Formellement, on suppose  $X_{1,t} = X_{2,t} = -mb_t$ , avec un coefficient  $m$  tel que  $2m > r$ . L'évolution de la dette publique est alors décrite par la relation  $b_{t+1} = (1 + r - 2m)b_t$ .

Prenons

$$r = 10\%, \quad P_0 = 2000, \quad m = 8\%$$

L'évolution de la dette et des prélèvements est représentée sur le tableau ci-contre. L'une et l'autre baissent au taux de 6% par an. Un endettement temporaire a ainsi permis de résoudre le problème de transition à la capitalisation.

$t$	$b$	$(1 + r)b$	$X_1$	$X_2$	$\bar{X}_1$	$\bar{X}_2$
0	1818	2000	-145.5	-145.5	-1854.5	1854.5
1	1709	1880	-137	-137	-1743.5	1743
2	1606.5	1767	-128.5	-128.5	-1638.5	1638.5
3	1510	1661	-121	-121	-1540	1540
...						
$\infty$	0	0	0	0	0	0

Le tableau décrit également les transferts nets  $\bar{X}_{1,t} = X_{1,t} - b_{t+1}$  et  $\bar{X}_{2,t} = X_{2,t} + (1+r)b_t$  dont bénéficient les deux générations. Par construction, ces deux transferts nets s'équilibrent;

Il est possible de reproduire la même évolution globale, dans toutes ses dimensions, en mettant en oeuvre directement ces transferts nets sans recourir à aucun endettement. En pratique, ceci peut être opéré en conservant un système de retraites par répartition dont on diminue progressivement la taille. La pension touchée par les vieux passe de 2000 à 1854.5 dès la première période, puisqu'on les fait participer à l'effort nécessaire, puis poursuit sa décroissance régulière tandis que les cotisations sont fixées de manière à assurer le finacement des retraites.

Le passage à la capitalisation rendait nécessaire une épargne supplémentaire des jeunes agents qui devaient détenir la dette émise par l'Etat. Le maintien de la répartition conduit ces mêmes jeunes agents à cotiser pour un montant du même ordre. Dans les deux cas, leur consommation est inchangée ce qui rend possible en définitive la même accumulation réelle de capital. L'évolution des taux d'intérêt n'est alors pas affectée. Nous avons supposé a priori dans cet exercice que le taux d'intérêt restait constant sur tout l'horizon temporel, mais ceci ne constitue qu'une simplification qui n'altère pas le message général.

## 6 Le risque

Un argument usuel dans le débat sur les systèmes de retraites concerne les risques auxquels ils sont soumis. Comment réagissent-ils aux aléas qui frappent l'économie ? Les systèmes par répartition ne sont-ils pas particulièrement exposés aux risques de chocs démographiques ? Les systèmes par capitalisation aux risques boursiers ? Une façon naturelle d'aborder la question consiste à introduire des chocs stochastiques dans le modèle. Nous introduisons donc un choc démographique et un choc technologique.

La population  $L_t$  et le niveau de progrès technique  $A_t$  sont des variables aléatoires. Elles peuvent avoir une tendance déterministe ou une tendance stochastique. Nous précisons plus tard les processus qu'elles suivent.

L'utilisation d'une fonction d'utilité logarithmique et d'une fonction de production de Cobb-Douglas à dépréciation unitaire permet une résolution explicite. Les résultats seront très particuliers puisqu'ils montrent que la capacité de répondre aux chocs ne constitue pas un critère de choix entre répartition et capitalisation. Ce résultat n'a évidemment pas de validité générale, mais il constitue une référence utile<sup>3</sup>.

Nous conservons le cadre précédent en supposant notamment un régime de retraites stable, caractérisé par un taux de cotisation  $\theta$  constant.

L'objectif des consommateurs est de maximiser leur espérance d'utilité sous les contraintes usuelles, soit

$$\begin{aligned} \max U(c_t) + \beta_i E_t U(d_{t+1}) \\ c_t + s_t &= (1 - \theta)w_t \\ d_{t+1} &= R_{t+1}s_t + w_{t+1}(1 + n_{t+1})\theta \end{aligned}$$

La condition d'optimalité est

$$U'(c_t) = \beta_i E_t [R_{t+1}U'(d_{t+1})]$$

soit, dans le cas spécifique d'une fonction d'utilité logarithmique  $U = \ln c_t + \beta_i E_t \ln d_{t+1}$ ,

$$\frac{1}{c_t} = \beta_i E_t \left[ \frac{R_{t+1}}{d_{t+1}} \right] \quad (68)$$

La fonction de production est

$$F(K_t; A_t N_t) = A_t N_t f(\tilde{k}_t) = A_t N_t \tilde{k}_t^\alpha, \quad \tilde{k}_t = K_t / (A_t N_t)$$

<sup>3</sup>Cet exemple est étudié notamment dans Demange-Laroque (2000)

Cette fonction de Cobb-Douglas assure un rapport constant entre salaires et profits,

$$\frac{w_{t+1}N_{t+1}}{R_{t+1}K_{t+1}} = \frac{1-\alpha}{\alpha}$$

Ceci implique que les chocs affectent de la même façon les rendements de la répartition et de la capitalisation.

On a alors

$$d_{t+1} = R_{t+1} \frac{K_{t+1}}{N_t} + \theta \frac{w_{t+1}N_{t+1}}{N_t} = R_{t+1} \frac{K_{t+1}}{N_t} \left( 1 + \frac{1-\alpha}{\alpha} \theta \right)$$

Comme  $K_{t+1}$  est prédéterminé, ceci montre que  $d_{t+1}/R_{t+1}$  l'est aussi. La condition d'optimalité (68) devient

$$\frac{1}{c_t} = \beta_i \frac{R_{t+1}}{d_{t+1}} \quad (69)$$

Il est alors possible de résoudre explicitement. On a en effet

$$\begin{aligned} c_t &= \frac{1}{1+\beta_i} \left[ (1-\theta)w_t + \frac{w_{t+1}(1+n_{t+1})\theta}{1+r_{t+1}} \right] \\ &= \frac{1}{1+\beta_i} \left[ (1-\theta)w_t + \frac{1-\alpha}{\alpha} \frac{K_{t+1}\theta}{N_t} \right] \end{aligned}$$

et par ailleurs

$$K_{t+1} = N_t s_t = N_t [(1-\theta)w_t - c_t]$$

Ceci permet d'obtenir

$$K_{t+1} = \frac{\beta'_i(\theta)}{1+\beta'_i(\theta)} (1-\theta)w_t N_t \quad (70)$$

et

$$c_t = \frac{1}{1+\beta'_i(\theta)} (1-\theta)w_t \quad (71)$$

avec

$$\beta'(\theta) = \frac{\beta}{1+\theta \frac{1-\alpha}{\alpha}} \quad (72)$$

Le choix du partage entre consommation et épargne est ainsi indépendant de la loi des aléas  $N_1$  et  $A_t$ . Cette propriété n'est vraie qu'à l'équilibre général de l'économie. Elle ne s'appliquerait pas au niveau du comportement individuel, où l'aversion au risque et les propriétés stochastiques des rendements interviendraient.

Les rémunérations des facteurs sont

$$w_t = A_t (1 - \alpha) \left( \frac{K_t}{A_t N_t} \right)^\alpha \quad (73)$$

$$R_t = \alpha \left( \frac{K_t}{A_t N_t} \right)^{\alpha-1} \quad (74)$$

et on a enfin

$$d_t = \left( \frac{\alpha}{1 - \alpha} + \theta \right) w_t \frac{N_t}{N_{t-1}} \quad (75)$$

A la date  $t$  le stock de capital  $K_t$  est prédéterminé, tandis que se réalisent les variables aléatoires  $A_t$  et  $N_t$ .

Le tableau ci-contre résume les effets instantanés des chocs stochastiques sur les variables d'intérêt, telles qu'elles ressortent des relations (71) à (75).

	$w_t$	$R_t$	$c_t$	$d_t$	$E_t u_t$
$N_t$	-	+	-	+	-
$A_t$	+	+	+	+	+

Un choc démographique positif diminue l'intensité capitaliste, diminue le salaire réel et augmente le taux d'intérêt. Dans notre contexte, la baisse de salaire courant s'accompagne, pour les jeunes, d'une baisse proportionnelle de leur revenu de vie entière. Elle implique une baisse de leur consommation actuelle  $c_t$ . En revanche les vieux gagnent à ce qu'un nombre plus élevé de jeunes financent les retraites et donc leur consommation  $d_t$ .

De son côté, un choc de productivité n'a que des effets positifs.

Le tableau illustre aussi les effets du choc instantané sur l'espérance d'utilité de la génération jeune.

Leur consommation future  $d_{t+1}$  sera proportionnelle à  $w_{t+1} N_{t+1} / N_t$  soit  $(A_{t+1} N_{t+1})^{1-\alpha} K_{t+1}^\alpha / N_t$ . Or  $K_{t+1}$  est proportionnel à  $w_t N_t$  c'est-à-dire à  $(A_t N_t)^{1-\alpha} K_t^\alpha$ . En définitive,  $d_{t+1}$  sera proportionnel à

$$(A_{t+1} N_{t+1})^{1-\alpha} A_t^{\alpha(1-\alpha)} N_t^{-[1-\alpha(1-\alpha)]} K_t^{\alpha^2}$$

Elle augmente avec  $A_{t+1}$  et  $N_{t+1}$  puisque tous deux augmentent les cotisations perçues et donc les retraites distribuées. Elle augmente aussi avec les niveaux courants de  $A_t$  et  $K_t$  qui encouragent l'accumulation du capital. Elle décroît en revanche avec le nombre de jeunes actuels, qui représente le nombre d'ayant-droit aux retraites futures.

Il convient pour aller plus loin d'explicitier la manière dont les valeurs futures  $A_{t+1}$  et  $N_{t+1}$  sont influencées par les valeurs courantes  $A_t$  et  $N_t$  et peuvent ainsi être anticipées. Il est probable pourtant que la corrélation avec les valeurs passées est positive. L'espérance d'utilité de la consommation future  $d_{t+1}$  est alors influencée positivement par  $A_t$  mais négativement par  $N_t$ . Comme il en va de même de la consommation courante  $c_t$ , on obtient les signes déterminés du tableau. Les agents ont donc intérêt à appartenir à une génération peu nombreuse, contemporaine d'un choc technologique positif.

Ces résultats nous permettent aussi de caractériser le processus stochastique suivi par les variables macroéconomiques.

Les relations (73) et (70) permettent d'écrire, en logarithmes, l'évolution de l'intensité capitaliste sous la forme

$$\ln \tilde{k}_{t+1} = \alpha \ln \tilde{k}_t + B_1(\theta) - \ln(1 + n_{t+1}) - \ln(1 + \gamma_{t+1})$$

où  $B_1(\theta)$  est un terme constant dépendant de  $\theta$ . Cette relation décrit un processus autorégressif qui est stationnaire dès lors que  $n$  et  $\gamma$  le sont. .

Les autres variables peuvent être exprimées en fonction de l'intensité capitaliste. L'espérance d'utilité d'une génération est ainsi de la forme

$$E_t u_t = (1 + \alpha\beta_i) \alpha \ln \tilde{k}_t + B_2(\theta) + (1 + \beta_i) \ln A_t + \\ + \beta_i (1 - \alpha) E_t \ln [(1 + n_{t+1})(1 + \gamma_{t+1})]$$

Ces relations permettent d'étudier les propriétés stochastiques des variables du modèle.

Le plus important est pourtant de remarquer que le taux de cotisation  $\theta$  n'intervient que dans les termes constants de ces relations. Il affecte donc l'évolution moyenne du stock de capital, comme nous l'avons constaté dans la version déterministe du modèle, mais n'a pas d'influence sur la composante stochastique de cette évolution.

Dans ce cadre simplifié, les considérations de risque n'amènent pas d'éléments pour choisir entre répartition et capitalisation. Ce résultat décevant tient à la spécification logarithmique que nous avons retenue. On ne doit donc pas lui attacher une trop grande importance. Il montre pourtant que les effets des chocs apparaissent plus complexes lorsque l'on prend en compte le bouclage macroéconomique du modèle. Les chocs démographiques ont une influence qui va bien au delà des effets immédiats d'équilibre financier du système de retraite. Ils affectent les salaires ainsi que l'accumulation et la rémunération du capital. Les chocs technologiques n'affectent pas seulement la rentabilité du capital, c'est-à-dire le rendement de la capitalisation. Ils affectent aussi les salaires et le rendement de la répartition.

## 7 Prise en compte du vieillissement

### 7.1 Une structure démographique de référence

Une manière naturelle de représenter la structure démographique est de spécifier des taux de natalité et des taux de mortalité par âge.

Considérons  $n$  classes d'âge et appelons  $P_t$  la matrice-colonne décrivant la répartition de la population par classes d'âge. On peut alors définir une matrice de passage

$$M = \begin{pmatrix} a_1 & a_2 & a_3 & \dots & a_n \\ \lambda_1 & 0 & \dots & \dots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 & \dots & 0 \\ & & \dots & \dots & \\ 0 & \dots & 0 & \lambda_{n-1} & 0 \end{pmatrix}$$

elle que

$$P_{t+1} = MP_t$$

$a_j$  est le taux de natalité de la  $j$ -ième classe d'âge, et  $\lambda_j$  le taux de survie de cette classe d'âge.

Ce modèle n'est pas le plus général. On suppose notamment que le taux de natalité d'un agent d'âge donné est indépendant du nombre des enfants qu'il a eu auparavant. Mais il fournit un cadre suffisamment riche pour représenter la croissance de la population et les modifications de la pyramide des âges qui l'accompagnent.

Le facteur de croissance de long terme - c'est-à-dire de régime permanent - est égal à la valeur-propre dominante de la matrice  $M$ . Si  $I$  désigne la matrice-identité, il est solution de l'équation

$$\text{Dét}(M - gI) = 0$$

La pyramide des âges de long terme est décrite par le vecteur-propre  $V$  associé à cette valeur-propre.

Les taux globaux de natalité et de mortalité de long terme sont alors

$$\text{taux}_{\text{natalité}} = \frac{a_1 v_1 + a_2 v_2 + \dots}{v_1 + v_2 + \dots}$$
$$\text{taux}_{\text{mortalité}} = \frac{(1 - \lambda_1)v_1 + (1 - \lambda_2)v_2 + \dots}{v_1 + v_2 + \dots}$$

On peut vérifier que le taux de croissance de la population est égal à la différence entre ces deux taux<sup>4</sup>. Il faut pourtant souligner que ces taux globaux ne sont que des indicateurs qui ne jouent pas de rôle dans la dynamique du modèle. Les véritables paramètres sont les taux de natalité et de mortalité des différentes classes d'âge.

On peut aussi remarquer que le taux de croissance de long terme ne dépend pas des taux de survie des classes d'âge qui ne sont plus fécondes. Ces taux de survie affectent la pyramide des âges de long terme, mais non le taux de croissance de la population<sup>5</sup>. Leur augmentation traduit un pur vieillissement de la population, sans changement du taux de croissance global.

La pyramide des âges de long terme, c'est-à-dire l'ensemble des composantes du vecteur-propre  $V$ , est solution du système

$$\begin{pmatrix} a_1 - g & a_2 & a_3 & \dots & a_n \\ \lambda_1 & -g & \dots & \dots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & -g & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & \dots & 0 & \lambda_{n-1} & -g \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \\ \dots \\ v_n \end{pmatrix} = 0$$

Les  $n - 1$  dernières équations fournissent directement la solution. En posant  $v_1 = 1$ , comme normalisation, on obtient

$$v_2 = \frac{\lambda_1}{g}, \quad v_3 = \frac{\lambda_1 \lambda_2}{g^2}, \quad v_4 = \frac{\lambda_1 \lambda_2 \lambda_3}{g^3}, \dots$$

On remarque que la pyramide des âges de régime permanent dépend directement des coefficients de mortalité, mais qu'elle ne dépend des taux de natalité que par l'intermédiaire du taux de croissance global de la population.

Bien entendu, ces propriétés ne valent que pour le régime permanent, atteint à long terme. A court terme, tout changement des paramètres démographiques affecte au moins temporairement le taux de croissance de la population et la pyramide des âges.

Ce type de structure démographique peut servir à développer un modèle à générations beaucoup plus réaliste que le modèle à deux générations que

<sup>4</sup>Appelons  $e$  la matrice-ligne dont tous les éléments sont égaux à l'unité. On a

$$eM = ((a_1 + \lambda_1), \dots, (a_{n-1} + \lambda_{n-1}), a_n)$$

et donc

$$\begin{aligned} eMV &= ((a_1 + \lambda_1)v_1 + \dots, (a_{n-1} + \lambda_{n-1})v_{n-1} + a_nv_n) \\ &= (1 + \text{taux}_{\text{natalité}} - \text{taux}_{\text{mortalité}}) eV \end{aligned}$$

Comme, par définition,  $MV = gV$  et donc  $eMV = geV$ , on obtient la relation recherchée.

<sup>5</sup>Il suffit de considérer la matrice  $M - gI$  en supposant  $a_j = 0$  pour  $j > j_{\max}$ .

nous avons étudié ci-dessus. Des exemples en sont donnés par Auerbach-Kotlikoff(1987), Docquier-Liégeois-Loupas-Crettez (2000), Mercenier(2002) Mais le traitement de ces modèles est très lourd. La complexité des choix d'épargne et l'hétérogénéité des agents, qui découlent simultanément de la considération d'une structure démographique plus fine, rendent difficile l'analyse du comportement d'épargne.

C'est pour cette raison qu'un modèle alternatif, celui de Gertler (2000), a été avancé. Il s'inspire du modèle de Blanchard (1985), où l'hypothèse d'un taux de mortalité indépendant de l'âge simplifie beaucoup l'analyse et engendre un modèle flexible et maniable. Gertler enrichit ce modèle en distinguant deux états - celui d'actif et celui de retraité- et suppose que les agents ont une probabilité constante de changer d'état, c'est-à-dire de devenir retraité puis de mourir.

Une version du modèle a notamment été appliquée à la France par Hairault-Langot (2002)

Nous proposons ci-dessous une voie complémentaire consistant à introduire la durée de vie dans un modèle conservant le cadre élémentaire du modèle à deux générations<sup>6</sup>.

## 7.2 Le vieillissement dans un modèle à deux générations

Nous conservons la structure du modèle à générations usuel, où la durée de vie des agents est divisée a priori en deux périodes de longueur normalisée à l'unité. Mais nous supposons que les agents ne vivent qu'une partie  $T$  de la seconde période.

$N_t$  désigne le nombre de jeunes agents nés à la date  $t$ . Les jeunes agents sont les seuls à avoir des enfants. Si  $n_t$  désigne leur taux de natalité, on a donc  $N_t = (1 + n_t)N_{t-1}$ . Le nombre moyen d'agents âgés vivant pendant la période  $t$  est  $T_t N_{t-1}$ , et la population totale est donc

$$(1 + n_t + T_t) N_{t-1}$$

Conformément aux remarques faites dans le paragraphe précédent, le taux de croissance de long terme de la population est égal à  $n$  et est donc indépendant de  $T$ . Ce dernier paramètre décrit ainsi un vieillissement individuel, indépendant du taux de natalité. Il joue aussi un rôle analogue à la probabilité de mort du modèle de Gertler.

---

<sup>6</sup>Voir d'Autume (2002).

Introduisons maintenant l'âge de la retraite noté  $z$ . Contrairement à  $T$ , cette variable a souvent été introduite dans le modèle à générations, en particulier dans Artus-Legros (1999) et Michel-Pestieau(2000).

Les agents choisissent de travailler une partie  $z_t \leq T_t$  de leur seconde période de vie. L'emploi pendant la période  $t$  est alors

$$L_t = (1 + n_t + z_t) N_{t-1} \quad (76)$$

tandis que le nombre de retraités est

$$(T_t - z_t) N_{t-1}$$

Le taux de dépendance est défini comme le rapport entre retraités et employés, soit

$$\frac{T_t - z_t}{1 + n_t + z_t}$$

Considérons un système de retraite par répartition où le taux de cotisation est  $\theta$  et le taux de remplacement  $\lambda$ . L'équilibre de la caisse de retraite est maintenant décrit par la relation suivante

$$\theta_t = \frac{T_t - z_t}{1 + n_t + z_t} \lambda_t \quad (77)$$

Le taux de cotisation doit être le produit du taux de dépendance et du taux de remplacement.

Introduisons maintenant la paramétrisation que nous utiliserons.

### **Etalonnage du modèle**

La durée de la période est de 35 ans. La première court de 20 à 55 ans. La seconde de 55 à 90 ans.

La population croît au taux de 0.4% par an. La durée de vie est  $55 + 23 = 78$  ans. L'âge de la retraite est  $55 + 5 = 60$  ans. Soit, formellement,

$$n = 0.14, \quad T = 23/35, \quad z = 5/35$$

Le taux de dépendance est

$$\frac{18}{35 \times 1.14 + 5} = 40\%$$

Si le taux de remplacement est  $\lambda = 50\%$ , le taux de cotisation doit être  $\theta = 20\%$ .

Nous supposons que le changement démographique conduit à un taux de croissance nul de la population et à une durée de vie de 88 ans. Si l'âge de la retraite ne change pas, les nouvelles données sont

$$n = 0, \quad T = 33/35, \quad z = 5/35$$

Le taux de dépendance devient

$$\frac{28}{35 + 5} = 70\%$$

Ceci correspond schématiquement aux données du rapport Charpin. Si l'âge de la retraite ne change pas, et que l'on maintient le taux de remplacement, il faut que le taux de cotisation passe à 35%. Alternativement, si l'on maintient le taux de cotisation, le taux de remplacement tombe à 29%.

Une possibilité intermédiaire, plus sensée d'ailleurs, est de maintenir constant un taux de remplacement calculé par rapport au salaire net. L'objectif est maintenant de maintenir le rapport  $\lambda^{net} = \lambda/(1 - \theta)$  à son niveau initial  $\lambda_{net} = .625$ . Ceci requiert un taux de cotisation  $\theta$  tel que  $\theta/(1 - \theta) = \lambda^{net} \times .7$ , soit  $\theta = .30$ . Le taux de remplacement calculé par rapport aux salaires bruts tombe à  $\lambda = .43$ .

### 7.3 Le comportement individuel

Nous considérons d'abord un système de retraite par répartition, à pensions fixes. Chaque agent reçoit pendant sa retraite un flux de pensions dont il considère le montant comme donné. Par commodité, ce montant est déterminé par l'intermédiaire d'un taux de remplacement  $\lambda$ , reliant comme précédemment le montant de la pension au niveau des salaires courants.

Le comportement individuel est décrit par le programme suivant :

$$\begin{aligned} \max U(c_t, d_{t+1}, z_{t+1}) \\ c_t + s_t = (1 - \theta_t)w_t \end{aligned} \quad (78)$$

$$d_{t+1} = (1 + r_{t+1})s_t + (1 - \theta_{t+1})w_{t+1}z_{t+1} + (T - z_{t+1})\lambda_{t+1}w_{t+1} \quad (79)$$

L'agent consomme des montants totaux  $c_t$  et  $d_{t+1}$  pendant ses deux périodes de vie. Il décide de son âge de retraite  $z_{t+1}$ . Sa fonction d'utilité  $U$  dépend positivement de ses deux consommations, et négativement de son âge de retraite. La forme de cette fonction sera discutée et précisée ultérieurement.

L'agent âgé gagne des salaires en proportion de sa durée d'activité  $z_{t+1}$  et des retraites en proportion de sa durée de retraite  $(T - z_{t+1})$ .

La contrainte actualisée de cycle de vie est

$$c_t + \frac{d_{t+1}}{R_{t+1}} = (1 - \theta_t)w_t + \frac{\lambda_{t+1}w_{t+1}T + (1 - \theta_{t+1} - \lambda_{t+1})w_{t+1}z_{t+1}}{R_{t+1}} \quad (80)$$

Les conditions d'optimalité sont les suivantes

$$\frac{U_d(c_t, d_{t+1}, z_{t+1})}{U_c(c_t, d_{t+1}, z_{t+1})} = \frac{1}{R_{t+1}} \quad (81)$$

$$\frac{U_z(c_t, d_{t+1}, z_{t+1})}{U_c(c_t, d_{t+1}, z_{t+1})} = \frac{-(1 - \theta_{t+1} - \lambda_{t+1})w_{t+1}}{R_{t+1}} \quad (82)$$

Comme l'ont noté de nombreux auteurs, le gain marginal d'un report de l'âge de la retraite est réduit à la fois par les cotisations payées si l'agent prolonge son activité et les retraites reçues s'il la cesse. Il s'élève ainsi à  $(1 - \theta - \lambda)w$ . Dans un tel cadre, les agents seraient visiblement incités à prendre leur retraite trop tôt, s'ils en avaient la possibilité.

Nous nous tournons donc vers un système où le montant des pensions reçues dépend des cotisations que l'agent a versé et donc de l'âge auquel il prend sa retraite. Une possibilité est évidemment de retenir un système actuariellement neutre. Mais ce système revient par définition au système de capitalisation.

Nous préférons retenir un système différent qui conserve un caractère de répartition, mais offre aux agents la possibilité de modifier leur âge de retraite dans le cadre d'un mécanisme qui n'est actuariellement neutre que sur la seconde partie de leur vie.

Le système de retraites combine ainsi deux éléments. L'Etat décide dans un premier temps du taux de rendement global qui s'appliquera aux cotisations versées pendant la première période de vie des agents. Mais les agents sont libres de prolonger leur activité, en sachant que cette prolongation aura pour eux des conséquences actuariellement justes. D'une certaine façon les cotisations versées par les agents à un système par répartition leur ouvre le droit à une prestation donnée qu'ils peuvent étaler dans le temps comme ils le souhaitent.

Formellement, nous posons

$$(T - z_{t+1})\lambda_{t+1}w_{t+1} - \theta_{t+1}w_{t+1}z_{t+1} = \mu_{t+1}\theta_t w_t \quad (83)$$

Le membre de gauche de cette relation est le solde des pensions et cotisations de la seconde période de vie. Comme nous n'actualisons pas à l'intérieur des périodes, ceci se réduit dans notre cadre à une simple différence. Ce solde représente le rendement des cotisations  $\theta_t w_t$  versées pendant la première période de vie. Le taux de rendement  $\mu_{t+1}$  de ces cotisations est un choix de politique économique.

Les agents tiennent compte du fait que le taux de remplacement  $\lambda_{t+1}$  dont ils bénéficieront dépend de leur âge de retraite  $z_{t+1}$  et est déterminé implicitement par la relation ci-dessus.

Dans le cas d'un pur système (obligatoire) de capitalisation, le taux de rendement s'identifie au taux d'intérêt et on a donc  $\mu_{t+1} = R_{t+1}$ . La contrainte budgétaire de deuxième période (79) devient

$$d_{t+1} = (1 + r_{t+1}) s_t + w_{t+1} z_{t+1} + R_{t+1} \theta_t w_t$$

et la contrainte actualisée de cycle de vie (80) se réduit à

$$c_t + \frac{d_{t+1}}{R_{t+1}} = w_t + \frac{w_{t+1} z_{t+1}}{R_{t+1}}$$

Le système de retraite est actuariellement neutre sur la vie entière. Il n'affecte pas le comportement d'épargne. En particulier, le coût d'opportunité de la retraite s'identifie au salaire courant.

Dans le cas d'un système par répartition, en revanche, les transferts aux agents âgés doivent évaluer les cotisations versées par les jeunes. Le paramètre  $\mu_{t+1}$  est tel que

$$\mu_{t+1} \theta_t w_t = (1 + n_{t+1}) \theta_{t+1} w_{t+1} \quad (84)$$

La contrainte de seconde période est

$$d_{t+1} = (1 + r_{t+1}) s_t + w_{t+1} z_{t+1} + (1 + n_{t+1}) \theta_{t+1} w_{t+1} \quad (85)$$

Du point de vue des agents, tout se passe comme s'ils ne versaient pas de cotisations sur leurs salaires de seconde période et comme s'ils recevaient une pension totale indépendante de leur âge de retraite.

Leur contrainte budgétaire actualisée est

$$\begin{aligned} c_t + \frac{d_{t+1}}{R_{t+1}} &= w_t (1 - \theta_t) + \frac{w_{t+1} z_{t+1} + (1 + n_{t+1}) \theta_{t+1} w_{t+1}}{R_{t+1}} \quad (86) \\ &= w_t + \frac{w_{t+1} z_{t+1}}{R_{t+1}} + \left[ (1 + n_{t+1}) \frac{\theta_{t+1} w_{t+1}}{\theta_t w_t} - R_{t+1} \right] \frac{\theta_t w_t}{R_{t+1}} \end{aligned}$$

Le coût d'opportunité de la retraite reste égal au salaire. Il en résulte que le choix de l'âge de la retraite n'est pas biaisé. Les agents bénéficient pourtant, comme dans un système par répartition, d'un transfert net qui peut être positif ou négatif. Ce transfert résulte de la différence entre les rendements de la répartition et de la capitalisation. Le premier est égal au taux de croissance de la population, augmenté du taux de croissance des salaires et, éventuellement, du taux de hausse des cotisations. Le second est le taux d'intérêt réel.

Nous retenons désormais ce système de retraite.

La condition d'optimalité (81) tient toujours, mais la condition (82) est remplacée par la suivante

$$\frac{U_z(c_t, d_{t+1}, z_{t+1})}{U_c(c_t, d_{t+1}, z_{t+1})} = \frac{-w_{t+1}}{R_{t+1}} \quad (87)$$

Spécifions maintenant la fonction d'utilité.

Une forme générale naturelle est la suivante :

$$U = V(c) + \beta_i T V\left(v\left(\frac{d}{T}, \frac{(T-z)}{T}\right)\right) \quad (88)$$

L'utilité dérive des flux de consommation. Pendant sa seconde période de vie, l'agent consomme un flux  $d/T$ . Il bénéficie d'une durée de retraite  $T-z$  que l'on suppose appréciée en proportion de sa durée de vie  $T$ . La fonction  $v$  est un indice du flux d'utilité de seconde période. La fonction  $V$  décrit l'arbitrage intertemporel entre les deux périodes.  $\beta_i$  est le facteur d'escompte.

Un problème se pose pourtant. Les préférences doivent être compatibles avec l'existence du progrès technique et la croissance des salaires. Le régime permanent est caractérisé par une croissance tendancielle de la consommation de biens. La "consommation" de loisir en revanche ne peut pas être affectée d'une tendance croissante. L'âge de la retraite doit donc être constant en régime permanent.

On retrouve ici le problème bien connu, identifié par King-Plosser-Rebelo(1988). Dans un modèle de croissance avec progrès technique et loisir, où  $c$  désigne la consommation et  $L$  le loisir, la fonction d'utilité doit être du type

$$\sum_t \beta_i^t \frac{[c_t v(L_t)]^{1-1/\sigma}}{1-1/\sigma}$$

ou encore, dans le cas d'une élasticité de substitution intertemporelle  $\sigma$  unitaire,

$$\sum_t \beta_i^t [\text{Log } c_t + \text{Log } v(L_t)]$$

Dans le cas présent, le problème est particulier car le choix de loisir à chaque instant est binaire : travailler à plein temps ou être en retraite. En outre, ce choix n'est pas réversible : une fois en retraite, l'agent ne peut reprendre son activité. Enfin, le choix de prendre sa retraite n'est pas ouvert pendant la première période de vie.

L'application de ce principe général conduirait à retenir la fonction

$$\frac{[cv_0]^{1-1/\sigma}}{1-1/\sigma} + \beta_i \left\{ z \frac{[(d/T)v_0]^{1-1/\sigma}}{1-1/\sigma} + (T-z) \frac{[(d/T)v_1]^{1-1/\sigma}}{1-1/\sigma} \right\}$$

où  $v_0$  représente le flux d'utilité associé à un loisir nul, c'est-à-dire à la période de travail, et  $v_1$  celui associé à la période de retraite. Cette fonction d'utilité est linéaire en  $z$ , comme dans le modèle de Hansen (1985).

Nous avons préféré retenir la forme (88) en prenant une fonction  $V$  logarithmique. Notre fonction d'utilité est donc la suivante :

$$U = \text{Log } c + \beta_i T [m \text{Log } d + (1-m) \text{Log}(T-z) - \text{Log } T] \quad (89)$$

La contrainte de cycle de vie (86) peut être écrite sous la forme

$$\begin{aligned} c_t + \frac{d_{t+1}}{R_{t+1}} + \frac{w_{t+1}(T-z_{t+1})}{R_{t+1}} &= \\ = w_t(1-\theta_t) + \frac{w_{t+1}T + (1+n_{t+1})\theta_{t+1}w_{t+1}}{R_{t+1}} &\stackrel{\text{def}}{=} \Omega_t \end{aligned}$$

Elle conduit aux fonctions de demande suivantes

$$c_t = \frac{1}{1+\beta_i T} \Omega_t \quad (90)$$

$$d_{t+1} = \frac{m\beta_i T R_{t+1}}{1+\beta_i T} \Omega_t \quad (91)$$

$$T - z_{t+1} = \frac{(1-m)\beta_i T R_{t+1}}{(1+\beta_i T) w_{t+1}} \Omega_t \quad (92)$$

Nous pouvons vérifier qu'elles ont des propriétés satisfaisantes par rapport au progrès technique. Si  $w_t$  et  $w_{t+1}$  doublent simultanément,  $\Omega_t$ ,  $c_t$  et  $d_{t+1}$  doublent aussi tandis que  $T - z_{t+1}$  est inchangé.

Nous pouvons aussi examiner l'influence du vieillissement. Toutes choses égales par ailleurs, l'élasticité de la consommation par rapport à  $T$  peut être exprimée de la façon suivante :

$$\frac{dc_t}{c_t} = \left( -\frac{\beta_i T}{1+\beta_i T} + \frac{\frac{w_{t+1}T}{(1-\theta_t)w_t R_{t+1} + (1+n_{t+1})\theta_{t+1}w_{t+1}}}{1 + \frac{w_{t+1}T}{(1-\theta_t)w_t R_{t+1} + (1+n_{t+1})\theta_{t+1}w_{t+1}}} \right) \frac{dT}{T}$$

Une augmentation de la durée de vie  $T$  se traduit à la fois par une augmentation de la consommation désirée et du revenu de seconde période. On s'attend donc à ce que son effet sur l'épargne soit ambigu. C'est ce que confirme l'analyse formelle.

L'élasticité de la consommation de première période dépend du rapport entre le facteur d'escompte, qui mesure les utilités relatives des deux périodes, et le rapport des revenus associés aux deux périodes ou, plus précisément, ceux qui dépendent de  $T$  et ceux qui n'en dépendent pas. On aurait ainsi  $dc/c = 0$  dans le cas où les salaires seraient constants, les retraites inexistantes et le taux d'intérêt égal au taux d'escompte, soit  $R_{t+1} = \beta_i$ .

Nous avons d'autre part

$$\frac{d(T - z)}{T - z} = \frac{dT}{T} + \frac{dc}{c}$$

et donc

$$\frac{dz}{z} = \frac{dT}{T} - \frac{T - z}{z} \frac{dc}{c}$$

Si  $c$  restait constant, l'âge de la retraite  $z$  augmenterait dans la même proportion que la durée de vie  $T$ . Dans nos simulations, un taux d'intérêt élevé diminue l'influence du revenu de seconde période. La consommation diminue et l'âge de la retraite augmente donc plus que proportionnellement à la durée de vie. Mais cette augmentation s'applique à un niveau initial plus faible. En définitive, l'augmentation absolue de  $z$  est environ les deux tiers de celle de  $T$ .

## 8 La dynamique d'équilibre

La production est modélisée comme précédemment, avec un terme de progrès technique croissant au taux exogène  $\gamma$ .

L'emploi est

$$L_t = N_t \left( 1 + \frac{z}{1+n} \right)$$

où  $N_t$  est le nombre de jeunes agents. L'intensité capitalistique est notée  $\tilde{k}$  et on a

$$\tilde{y} = f(\tilde{k}), \quad \tilde{y} = \frac{Y}{AL}, \quad \tilde{k} = \frac{K}{AL} \quad (93)$$

Comme l'emploi est endogène, il est utile de définir une seconde notion d'intensité capitaliste, rapportée au nombre de jeunes agents :

$$\tilde{k}^n = \frac{K}{AN} = \tilde{k} \left( 1 + \frac{z}{1+n} \right) \quad (94)$$

L'épargne des jeunes agents est détenue sous forme de capital et on a donc  $K_{t+1} = N_t s_t$ , soit

$$(1 + n_{t+1})(1 + \gamma)\tilde{k}_{t+1}^n = \tilde{s}_t$$

Le système de retraite est le système mixte décrit par l'équation (85). L'Etat fixe le taux de cotisation  $\theta$  et ajuste les retraites de manière à équilibrer à chaque période les comptes de la Sécurité Sociale.

Les agents âgés choisissent leur âge de retraite. La maximisation de l'utilité de seconde période sous la contrainte (85) donne

$$w_t(T_t - z_t) = (1 - m)[R_t s_{t-1} + w_t T_t + (1 + n_t)\theta_t w_t]$$

Sur le sentier d'équilibre,  $\tilde{s}_{t-1} = (1 + n_t)\tilde{k}_t^n = \tilde{k}_t(1 + z_t + n_t)$  et nous obtenons

$$T_t - z_t = (1 - m) \left[ \frac{\tilde{k}_t f'(\tilde{k}_t)}{f(\tilde{k}_t) - \tilde{k}_t f'(\tilde{k}_t)} (1 + z_t + n_t) + T_t + (1 + n_t)\theta_t \right]$$

On constate que l'âge de la retraite dépend seulement de  $\tilde{k}_t$  et de paramètres courants.

L'hypothèse d'une fonction de production de Cobb-Douglas implique une part du capital constante égale à  $\alpha$ . On obtient alors une valeur explicite de  $z_t$ .

$$z_t = \frac{mT_t - (1 - m)(1 + n_t)(\theta_t + \alpha/(1 - \alpha))}{1 + (1 - m)\alpha/(1 - \alpha)} \quad (95)$$

L'âge de la retraite ne dépend que de paramètres démographiques courants. Il reste constant si l'environnement l'est. De manière naturelle, une augmentation de la durée de vie  $T$  conduit à une élévation de l'âge de la retraite. En revanche, une augmentation du taux de natalité  $n$  ou du taux de cotisation  $\theta$  se traduit par une augmentation des retraites qui incite les agents à prendre leur retraite plus tôt.

En définitive, la dynamique est décrite par l'équation suivante

$$(1 + n_{t+1})(1 + \gamma)\tilde{k}_{t+1}^n =$$

$$= (1 - \theta_t)\tilde{w}_t - \frac{1}{1 + \beta_i T_{t+1}} \left[ (1 - \theta_t)\tilde{w}_t + \frac{(1 + \gamma)\tilde{w}_{t+1} [T_{t+1} + (1 + n)\theta_{t+1}]}{R_{t+1}} \right] \quad (96)$$

où

$$R_t = f' \left[ \tilde{k}_t^n / \left( 1 + \frac{z_t}{1 + n_t} \right) \right], \quad \tilde{w}_t = \tilde{w} \left[ \tilde{k}_t^n / \left( 1 + \frac{z_t}{1 + n_t} \right) \right]$$

et  $z_t$  est déterminé par (95).

On vérifie facilement que l'économie converge vers un point stationnaire quand l'environnement est constant.

Il est facile également de voir que la propriété de neutralité de la dette publique, mise en évidence ci-dessus, reste valide quand l'âge de la retraite est endogène mais est choisi dans le cadre du système actuariellement neutre que nous considérons.

## 8.1 Caractérisation de l'optimum

Commençons par adapter l'analyse de la règle d'or au cas d'un âge de retraite endogène.

Le problème devient

$$\max U \left( \tilde{c}, (1 + \gamma)\tilde{d}, z \right)$$

$$\tilde{c} + \frac{\tilde{d}}{1 + n} = \left( 1 + \frac{z}{1 + n} \right) \left[ f(\tilde{k}) - (1 + n)(1 + \gamma)\tilde{k} \right]$$

La solution consiste d'abord à choisir  $\tilde{k}$  de manière à maximiser  $f(\tilde{k}) - (1 + n)(1 + \gamma)\tilde{k}$ . On obtient ainsi la règle d'or habituelle, égalisant le taux d'intérêt au taux de croissance de l'économie.

$$f'(\tilde{k}) = (1 + n)(1 + \gamma) \quad (97)$$

Ceci détermine l'intensité capitaliste de la règle d'or  $\tilde{k}^G$ . On note que

$$f(\tilde{k}^G) - (1 + n)(1 + \gamma)\tilde{k}^G = f(\tilde{k}^G) - f'(\tilde{k}^G)\tilde{k}^G = \tilde{w} \left( \tilde{k}^G \right)$$

ce qui traduit l'épuisement du produit entre salaires et profit.

Dans un second temps, l'optimisation par rapport à  $\tilde{c}$ ,  $d$  et  $z$  donne les conditions suivantes

$$\frac{U_d(\tilde{c}, (1+\gamma)\tilde{d}, z)}{U_c(\tilde{c}, (1+\gamma)\tilde{d}, z)} = \frac{1}{f'(\tilde{k}^G)} \quad (98)$$

$$\frac{U_z(\tilde{c}, (1+\gamma)\tilde{d}, z)}{U_c(\tilde{c}, (1+\gamma)\tilde{d}, z)} = \frac{-(1+\gamma)\tilde{w}(\tilde{k}^G)}{f'(\tilde{k}^G)} \quad (99)$$

La nouveauté est la seconde condition qui égalise le taux de substitution entre loisir de retraite et consommation de première période à la valeur actualisée du salaire. Comme nous l'avons noté dans la discussion de la fonction d'utilité, ceci fait intervenir le taux de progrès technique qui biaise cet arbitrage.

Le sentier de croissance optimal est décrit par le programme suivant :

$$\begin{aligned} & \max U(c_{-1}, d_0, z_0) + \sum_{t=0}^{\infty} \beta^{t+1} U(c_t, d_{t+1}, z_{t+1}) \\ (1+n)(1+\gamma)k_{t+1}^n + \frac{c_t}{A_t} + \frac{1}{1+n} \frac{d_t}{A_t} &= \left(1 + \frac{z_t}{1+n}\right) f\left(\frac{k_t^n}{1 + \frac{z_t}{1+n}}\right), \quad t = 0, \dots \end{aligned} \quad (100)$$

$$k_0^n \quad \text{et} \quad c_{-1} \quad \text{donné}$$

Les conditions d'optimalité sont :

$$U_c(c_t, d_{t+1}, z_{t+1}) = x_t/A_t \quad (101)$$

$$\frac{U_d(c_t, d_{t+1}, z_{t+1})}{U_c(c_t, d_{t+1}, z_{t+1})} = \frac{1}{f'(k_{t+1})} \quad (102)$$

$$\frac{U_z(c_t, d_{t+1}, z_{t+1})}{U_d(c_t, d_{t+1}, z_{t+1})} = -A_{t+1}\tilde{w}(k_{t+1}) \quad (103)$$

$$(1+n)(1+\gamma)x_t = \beta f'(k_{t+1})x_{t+1} \quad (104)$$

Avec une utilité logarithmique, ces relations prennent la forme suivante :

$$\frac{(1+\gamma)\tilde{d}_{t+1}}{\tilde{c}_t} = m\beta_i T_{t+1} R_{t+1} \quad (105)$$

$$\frac{(1-m)\tilde{d}_{t+1}}{m(T_{t+1}-z_{t+1})} = \tilde{w}(k_{t+1}) \quad (106)$$

$$\frac{\tilde{c}_{t+1}}{\tilde{c}_t} = \frac{\beta f'(k_{t+1})}{(1+n_{t+1})(1+\gamma)} \quad (107)$$

Si les paramètres démographiques sont constants, il existe une croissance régulière où la production, le capital et les consommations croissent au même taux, tandis que l'âge de la retraite est constant. Ce point stationnaire est caractérisé par la règle d'or augmentée. Le taux d'intérêt est tel que

$$1+r = f'(\tilde{k}) = \frac{(1+n)(1+\gamma)}{\beta} \quad (108)$$

soit

$$r \simeq n + \gamma - \rho$$

où  $\rho$  désigne le taux de préférence pour le présent.

Cette croissance optimale peut être décentralisée en utilisant le système de sécurité sociale que nous avons défini. Face à un système de retraite actuariellement juste, les agents âgés choisissent leur âge de retraite de manière à satisfaire la condition (103). Le profil de consommation d'équilibre vérifie (81), qui est identique à (102). Des cotisations et pensions forfaitaires permettent d'atteindre les niveaux optimaux de consommation et donc d'acululation de capital.

Il suffit pour cela de choisir un taux de cotisation  $\theta_t$  tel que

$$(1-\theta_t)\tilde{w}_t = \tilde{c}_t + \tilde{s}_t =$$

$$\tilde{c}_t + (1+\gamma)(1+n_{t+1}+z_{t+1})k_{t+1} \quad (109)$$

où toutes les variables sont fixées à leurs valeurs optimales.

Par ailleurs, le choix d'une fonction d'utilité logarithmique et d'une technologie de Cobb-Douglas à dépréciation complète permet d'obtenir une solution explicite quand l'environnement est constant. Le résultat bien connu de Long-Plosser(1983) s'étend donc au cas d'un âge de la retraite endogène. Les consommations optimales sont des proportions constantes de la production. Mais surtout, l'âge optimal de retraite et le taux optimal de cotisation restent constants sur le sentier de transition.

On peut ainsi vérifier que la trajectoire optimale est décrite par le système suivant :

$$\tilde{k}_{t+1} = \frac{\alpha\beta}{(1+n)(1+\gamma)} f(\tilde{k}_t) \quad (110)$$

$$\tilde{c}_t = \xi \left( 1 + \frac{z}{1+n} \right) f(\tilde{k}_t), \quad \text{with } \xi = \frac{1 - \alpha\beta}{1 + m\beta_i T/\beta} \quad (111)$$

$$\frac{\tilde{d}_t}{\tilde{c}_t} = \frac{(1+n)m\beta_i T}{\beta} \quad (112)$$

$$1 + \frac{z}{1+n} = \frac{1 - \alpha}{1 - \alpha + (1-m)\xi T\beta_i/\beta} \left( 1 + \frac{T}{1+n} \right) \quad (113)$$

$$\theta = 1 - \frac{\xi + \alpha\beta}{1 - \alpha} \left( 1 + \frac{z}{1+n} \right) \quad (114)$$

L'âge de retraite  $z$  décroît avec le taux de natalité  $n$  et, pour des valeurs plausibles des paramètres, croît avec la durée de vie  $T$ . Le taux de cotisation requis  $\theta$  croît avec  $n$  et  $T$ . Ces propriétés seront clarifiées dans la section suivante.

## 9 Simulation d'un choc démographique

Nous utilisons ce modèle pour analyser les conséquences des chocs démographiques décrits ci-dessus. Quelles marges de manoeuvre existent lorsque l'on prévoit une hausse de 40% à 70% du taux de dépendance ?

Rappelons que la situation initiale est la suivante :

$$n = 0.14, \quad T = 23/35, \quad z = 5/35, \quad \theta = 0.2, \quad \lambda = 0.5$$

Un choc démographique à la date 0 diminue la natalité et augmente la durée de vie. On passe à :

$$n = 0, \quad T = 33/35$$

Les paramètres du modèle sont les suivants :

$$\alpha = 0.3, \quad \gamma = 0.7$$

$$\beta_i = 1.6405, \quad m = 0.6417, \quad \beta = 0.4845$$

La fonction de production est de Cobb-Douglas, avec dépréciation complète. L'élasticité du capital est  $\alpha$ .

Comme la durée de la période est 35 ans, les taux de croissance de la population et du progrès technique  $n = 0.14$  et  $\gamma = 0.7$  correspondent à des

taux annuels de 0.375% et 1.5%. Les paramètres  $m$ ,  $\beta_i$  et  $\beta$  sont choisis de manière à obtenir un taux d'intérêt de long terme égal à 3, soit 4% par an, et à assurer que le système initial de sécurité sociale est optimal. L'âge de la retraite est alors fixé à 60 ans, soit  $z = 5/35$ , tandis que le taux de cotisation est  $\theta = 20\%$  et le taux de remplacement  $\lambda = 50\%$ .

Un élément reste insatisfaisant dans la calibration. Le rapport  $d_t/c_t$  entre les consommations des deux périodes s'élève à 1,6 ce qui signifie que le rapport  $(d_t/T)/c_t$  entre les flux instantanés est aux alentours de 2,5, alors qu'on aimerait un taux proche de l'unité. Le problème est qu'il est difficile d'assurer une épargne suffisante dans le modèle. Les trois modifications apportées au modèle usuel de Diamond vont toutes dans le sens d'une réduction de l'épargne, qu'il s'agisse du fait que les agents ne vivent pas toute la seconde période, qu'ils travaillent en seconde période et, enfin, qu'ils perçoivent une pension. Nous sommes donc obligés d'exagérer le désir de consommation en seconde période de vie et de choisir des valeurs élevées pour  $\beta_i$  et  $m$  - ou plutôt pour le produit  $\beta_i m$  - pour obtenir une accumulation du capital et un taux d'intérêt satisfaisants.

Comme nous l'avons déjà indiqué nous avons aussi effectué des simulations sur la base d'une fonction d'utilité CES, en supposant que le progrès technique affecte l'utilité du loisir. Il s'est révélé que ces modifications ne permettaient guère d'améliorer la représentation du profil individuel de consommation.

Le tableau 1 décrit notre situation de référence et examine l'influence du taux d'escompte social sur les allocations optimales de long terme.

Nous sommes dans une situation de sous-capitalisation. Le taux d'intérêt  $r = 3$  est supérieur à  $\gamma + n = .84$ . La solution de référence est associée à un facteur d'escompte social  $\beta = .48$ . Elle est caractérisée par des pensions et des cotisations positives.

Les autres lignes du tableau 1 montrent qu'un poids plus important sur le futur (une hausse de  $\beta$ ) conduit à une baisse du taux d'intérêt, c'est-à-dire à une élévation du capital par tête. L'économie se rapproche de la règle d'or. Ceci requiert une diminution de l'importance de la retraite par répartition, puisque celle-ci défavorise l'épargne. Elles s'annulent lorsque le facteur d'escompte prend la valeur  $\beta = .66$ . On est alors à l'équilibre de Diamond. Des cotisations et des pensions négatives sont nécessaires pour se rapprocher encore plus de la règle d'or, atteinte par définition pour  $\beta = 1$ .

Il ne faut pas perdre de vue que toutes ces allocations - et non pas seulement la règle d'or - sont optimales. La société peut évidemment choisir de mettre en place des retraites positives. Elle le fait si elle met suffisamment de poids sur le présent, ce qui l'amène à préserver la situation de la génération âgée du moment, mais la conduit aussi à moins accumuler.

Le tableau 1 montre aussi qu'une hausse du taux d'escompte social conduit à repousser l'âge de la retraite. La raison en est simplement que l'augmentation de l'intensité capitaliste s'accompagne d'une augmentation des salaires, c'est-à-dire du coût d'opportunité du loisir de retraite. Les agents choisissent donc de travailler moins pendant leur seconde partie de vie.

Le tableau 2 décrit les réponses optimales de long terme aux chocs démographiques, lorsque le taux d'escompte social est celui qui rendait optimale la situation avant choc. La baisse de la natalité et le vieillissement ont des effets assez différents.

Conformément à la règle d'or, la baisse de la natalité conduit à une baisse du taux d'intérêt c'est-à-dire à une accumulation de capital. Ceci augmente les salaires et induit une baisse modérée de l'âge de la retraite, qui peut s'accompagner d'une réduction de l'importance des retraites. Du point de vue de l'utilité individuelle, la baisse de la natalité se révèle en définitive une bonne chose. Elle rend certes plus difficile le financement des retraites. Mais elle permet aussi une augmentation du capital par travailleur.

Le vieillissement, quant à lui, ne change pas le taux d'intérêt de long terme. Il induit à la fois un recul de l'âge de la retraite et une augmentation des cotisations et des pensions. Les comparaisons d'utilité deviennent un peu problématiques, puisque  $T$  est un paramètre de la fonction d'utilité individuelle. L'hypothèse faite est pourtant assez raisonnable puisqu'on admet que le vieillissement signifie un flux d'utilité plus long et augmente donc le niveau total d'utilité !

Les lignes suivantes décrivent les effets combinés des deux chocs. Le résultat peu surprenant est ici qu'un allongement de 10 ans de la durée de vie rend souhaitable un recul de 6,8 années de l'âge de la retraite. En son absence, la société devrait accepter d'augmenter le taux de cotisation jusqu'à 31%, et de baisser à 44% le taux de remplacement.

	$\beta$	$\theta$	$\lambda$	$z$	$r$	$c$	$d$	$d/T$	$u$
situation de référence	.48	.2	.5	5/35	3	5.28	8.60	13.08	3.72
	.54	.13	.35	5.9/35	2.59	5.88	8.59	13.07	3.80
	.6	.065	.18	6.6/35	2.23	6.50	8.54	13.00	3.88
Diamond	.66	0	0	7.3/35	1.94	7.08	8.46	12.87	3.94
Règle d'or	1	-.31	-1.35	11.2/35	.94	9.66	7.62	11.60	4.07

Table 1 : Influence du facteur d'escompte social ( $n = .14$ ,  $T = 23/35$ )

	$n$	$T$	$\theta$	$\lambda_r$	$z$	$r$	$c$	$d$	$d/T$	$u$
Référence	.14	23/35	.2	.5	5/35	3	5.28	8.60	13.08	3.72
baisse de la natalité	0	23/35	.16	.40	6.4/35	2.51	5.87	8.39	12.77	3.77
vieillessement	.14	33/35	.24	.52	10.4/35	3	4.68	10.94	11.60	4.30
choc combiné $z$ libre	0	33/35	.19	.41	11.8/35	2.51	5.27	10.79	11.44	4.37
choc combiné $z$ fixé	0	33/35	.31	.44	5/35	2.51	4.52	9.26	9.82	4.21

Table 2 : Réponses optimales de long terme aux chocs démographiques  
( $\beta = .48$ )

Le tableau 3 et la figure 8 décrivent les réponses optimales au choc démographique. La figure reproduit notamment les niveaux d'utilité individuelle atteints par les générations successives. Nous comparons quatre sentiers différents. Toutes les données sont déflatées du progrès technique.

Le premier sentier décrit l'évolution spontanée, lorsque l'âge de la retraite reste fixé à 60 ans et le taux de cotisation à 20%. Le choc démographique non-anticipé a deux effets principaux. La baisse du nombre des jeunes agents force à réduire les pensions et donc la consommation de la génération âgée initiale (génération  $-1$ ). Leur consommation est  $d = 8.050$  alors qu'elle aurait été de 8.598 en l'absence de chocs. En termes de flux instantanés, elle n'est plus que  $d/T = 8.538$  au lieu de 13.083 en l'absence de chocs. Le second effet du choc démographique est que le niveau d'emploi est plus bas que prévu puisqu'il y a moins de jeunes travailleurs. L'intensité capitalistique augmente. Les salaires font de même tandis que le taux d'intérêt baisse. La baisse du taux d'intérêt devrait inciter les jeunes agents de la première génération à moins épargner. Mais cet effet négatif est largement dominé par l'effet direct de l'allongement de la durée de vie, qui pousse les jeunes agents à épargner plus pour assurer leur vieux jours. La consommation des agents jeunes de la génération initiale se réduit donc, passant de 5.282 à 4.879.

L'effet initial du choc est donc de diminuer les consommations des deux générations. L'utilité des deux générations augmente pourtant, puisqu'elles cumulent leur flux d'utilité sur une durée plus longue. Les deux niveaux d'utilité passent de 3.716 à 4.229 mais cette valeur commune cache des profils de consommation différents. En outre cette comparaison avec le niveau

d'utilité antérieure au choc est sujette à caution, comme nous l'avons indiqué, puisque la durée de vie représente un paramètre de la fonction d'utilité.

L'essentiel est pourtant que la baisse de la natalité n'a pas que des effets négatifs puisqu'elle rend plus facile l'augmentation du capital par tête. Celle-ci va permettre une amélioration progressive de la situation des agents.

Le second sentier décrit l'évolution optimale, quand l'âge de la retraite reste fixé à 60 ans. Le souci de justice conduit à mieux préserver l'utilité de la première génération âgée. Mais le haut niveau des retraites par répartition limite l'accumulation du capital et finalement la croissance de l'utilité.

La troisième décrit l'évolution optimale, quand l'âge de la retraite est libre. Cet âge saute à son nouveau niveau stationnaire de 66,8 ans. L'évolution traduit un meilleur compromis entre les utilités de la première génération âgée et celles des générations futures.

Une quatrième trajectoire intéressante serait la trajectoire d'équilibre lorsque le taux de cotisation reste fixé à 20% mais les agents sont libres de choisir leur âge de retraite en respectant le système actuariel. Cette trajectoire est en fait très proche de la trajectoire optimale. Elle s'en distingue seulement par le fait que le taux de cotisation reste fixé à 20% au lieu de prendre sa valeur optimale de 19%. Nous n'avons donc pas représenté cette trajectoire sur la figure.

On remarque que tous les profils d'utilité atteignent un minimum pour la génération zéro, celle qui est jeune au moment du choc. La génération âgée bénéficie d'une période antérieure où elle a relativement peu épargné et donc beaucoup consommé. D'autre part, la fonction d'utilité collective est additive et n'incorpore donc pas d'aversion pour l'inégalité. Ceci permet à cette première génération de conserver des pensions relativement élevées. Les générations ultérieures, pour leur part, bénéficient de l'accumulation du capital. C'est donc la génération jeune initiale qui se trouve défavorisée.

Par définition, ces quatre sentiers sont ordonnés en termes de bien-être. Les niveaux d'utilité sociale sont respectivement 4.257, 4.3082, 4.272 et 4.3083. Comme il est fréquent dans ce genre d'analyse, les niveaux d'utilité sociale sont proches. Ils correspondent néanmoins à des sentiers individuels très différents.

Cette analyse a été conduite pour un taux d'escompte social donné, celui qui rendait optimale la situation initiale. Bien entendu, la Société aurait pu faire d'autres choix. Il convient, pour décrire le domaine des possibles, de faire varier le taux d'escompte social.

Le tableau 4 et la figure 9 décrivent les sentiers optimaux, dans le cas d'un âge de retraite constant, pour différents taux d'escompte social. Augmenter le facteur d'escompte signifie mettre plus de poids sur les générations futures. Ceci conduit à la fois à diminuer les pensions de la génération âgée et à

accumuler plus de capital.

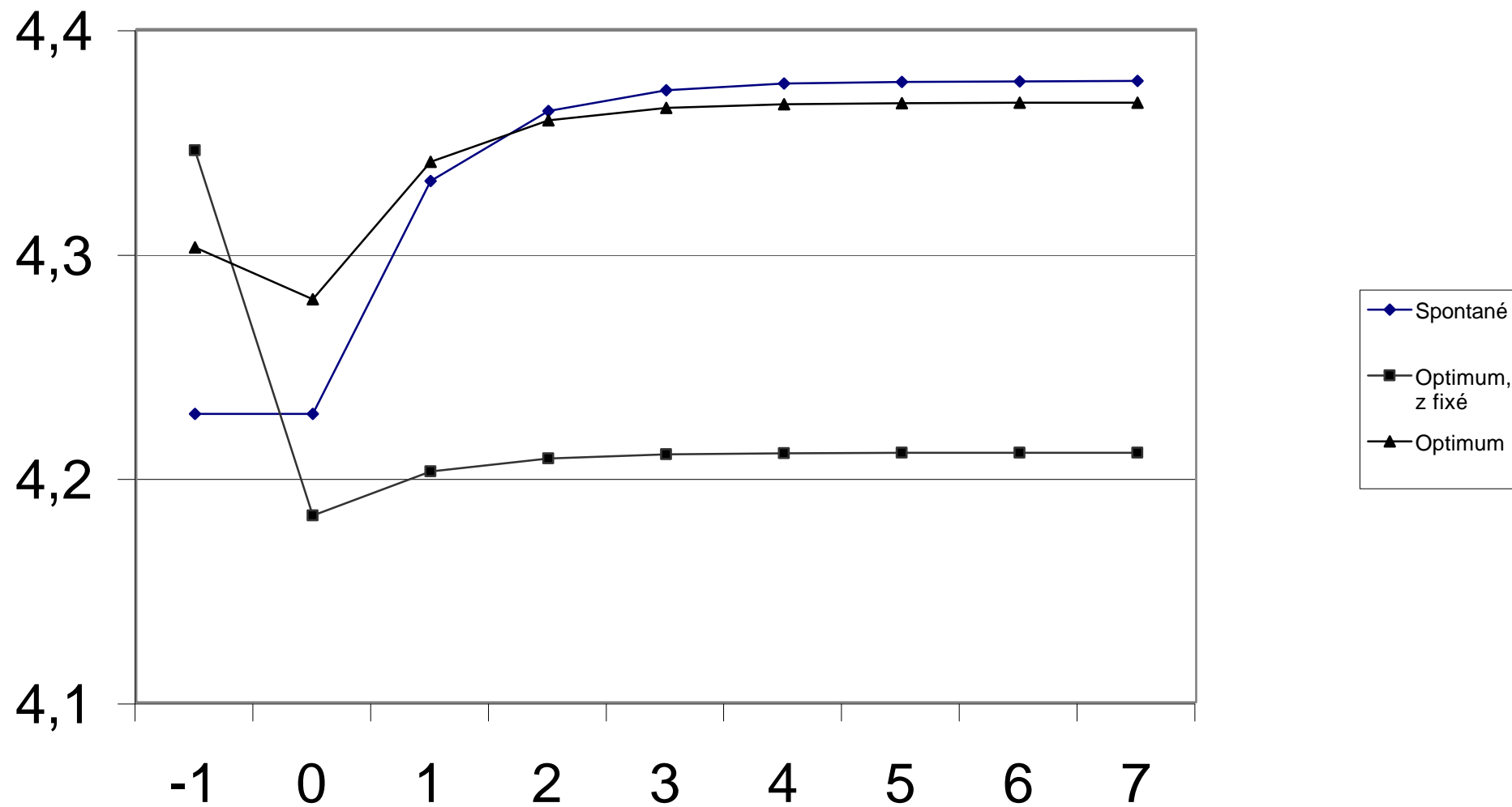
L'examen des transferts intergénérationnels aide ainsi à mieux comprendre les arbitrages auquel la Société est confrontée. Dans le cas de sous-capitalisation où nous nous situons, le taux d'intérêt est supérieur au taux de croissance. Le rendement de la capitalisation est donc supérieur à celui de la répartition. Le système de sécurité sociale repose alors sur un transfert négatif, au détriment de toutes les générations et à l'avantage de la seule génération âgée actuelle, qui reçoit un transfert positif. La valeur actualisée de tous ces transferts est nulle. Le problème fondamental est simplement de savoir combien l'on doit prélever sur les générations futures. La réponse dépend évidemment du taux d'escompte social.

$\beta$	$n$	$T$	$\theta$	$\lambda_r$	$z$	$r$	$c$	$d$	$d/T$	$u$
.48	0	33/35	.31	.44	5/35	2.51	4.52	9.26	9.82	4.21
.54	0	33/35	.25	.36	5/35	2.15	4.99	9.16	9.72	4.30
.6	0	33/35	.20	.29	5/35	1.83	5.48	9.03	9.58	4.38
1	0	33/35	-.06	-.09	5/35	.7	7.72	7.67	8.13	4.56

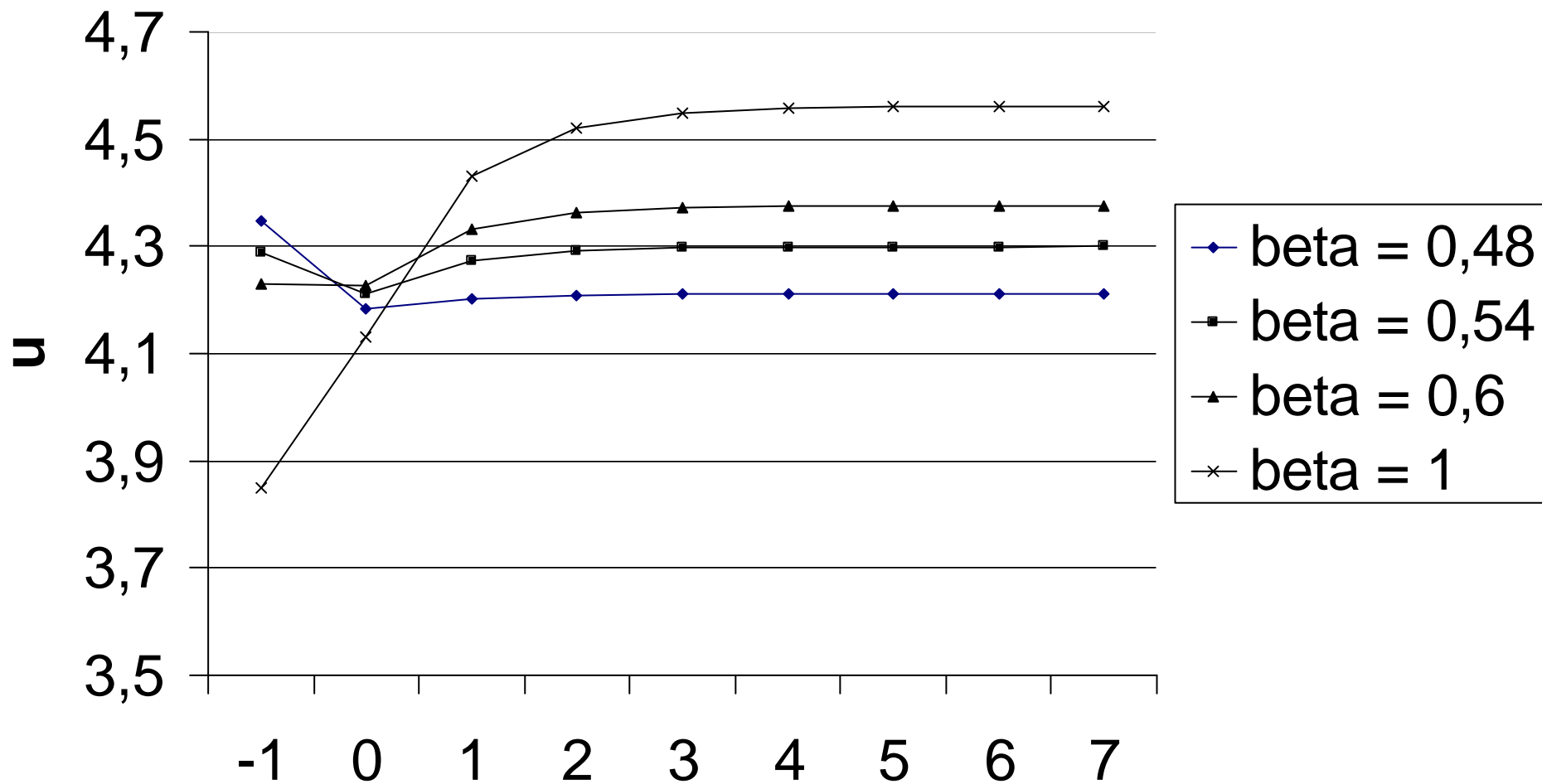
Tableau 4 : Réponses optimales de long terme aux chocs démographiques.  
Age de la retraite donné. Influence du taux d'escompte social.

Ces simulations de retraites optimales ont été effectuées en économie fermée, avec un taux d'intérêt endogène. Comme nous l'avons déjà suggéré, il n'est guère intéressant d'effectuer une étude comparative à taux d'intérêt donné, c'est-à-dire en petite économie ouverte. Les trajectoires d'équilibre se traduisent par des niveaux stationnaires des consommations et des utilités individuelles, alors que les trajectoires optimales sont caractérisées par une croissance ou une décroissance permanente de ces consommations et de ces utilités. Ce caractère explosif des trajectoires tient à la permanence d'un écart entre taux d'intérêt et taux de préférence pour le présent. Il s'accompagnerait d'une évolution également explosive des taux de cotisation et de remplacement, ainsi que de la dette ou de l'actif extérieurs. C'est peut-être la représentation des préférences collectives, avec un taux constant de préférence pour le présent, qu'il faudrait ici remettre en cause.

# Figure 8 : profils d'utilité



### Figure 9 : Influence du taux d'escompte social



période	teta	kn	r	c	d	d/T	z	u
-2	0,200	1,125	3,000	5,282	8,598	13,083	0,143	3,716
-1	0,200	1,125	3,000	5,282	8,598	13,083	0,143	4,229
0	0,200	1,283	2,689	4,879	8,050	8,538	0,143	4,229
1	0,200	1,675	2,061	5,285	8,720	9,249	0,143	4,332
2	0,200	1,814	1,895	5,413	8,932	9,473	0,143	4,363
3	0,200	1,858	1,846	5,452	8,996	9,542	0,143	4,373
4	0,200	1,872	1,832	5,464	9,016	9,562	0,143	4,376
5	0,200	1,876	1,828	5,468	9,022	9,568	0,143	4,376
6	0,200	1,877	1,826	5,469	9,023	9,570	0,143	4,377
7	0,200	1,877	1,826	5,469	9,024	9,571	0,143	4,377
							ucoll :	4,257

**Equilibre spontané, âge de la retraite et taux de cotisation inchangés**

période	teta	kn	r	c	d	d/T	z	u
-2	0,200	1,125	3,000	5,282	8,598	13,083	0,143	3,716
-1	0,200	1,125	3,000	5,282	8,598	13,083	0,143	4,346
0	0,305	1,283	2,689	4,422	9,060	9,609	0,143	4,183
1	0,305	1,349	2,562	4,489	9,198	9,755	0,143	4,203
2	0,305	1,369	2,525	4,510	9,239	9,799	0,143	4,209
3	0,305	1,375	2,514	4,516	9,252	9,812	0,143	4,210
4	0,305	1,377	2,510	4,518	9,255	9,816	0,143	4,211
5	0,305	1,378	2,509	4,518	9,257	9,818	0,143	4,211
6	0,305	1,378	2,509	4,518	9,257	9,818	0,143	4,211
7	0,305	1,378	2,509	4,518	9,257	9,818	0,143	4,211
							ucoll :	4,272

**Optimum, âge de la retraite fixé**

période	teta	kn	r	c	d	d/T	z	u
-2	0,2	1,125	3,000	5,282	8,598	13,083	0,143	3,716
-1	0,2	1,125	3,000	5,282	8,598	13,083	0,143	4,303
0	0,190	1,283	3,108	4,924	10,088	10,700	0,332	4,279
1	0,190	1,502	2,679	5,163	10,577	11,218	0,332	4,341
2	0,190	1,575	2,559	5,236	10,728	11,378	0,332	4,359
3	0,190	1,597	2,524	5,259	10,773	11,426	0,332	4,365
4	0,190	1,604	2,513	5,265	10,787	11,441	0,332	4,366
5	0,190	1,606	2,510	5,267	10,791	11,445	0,332	4,367
6	0,190	1,607	2,509	5,268	10,793	11,447	0,332	4,367
7	0,190	1,607	2,509	5,268	10,793	11,447	0,332	4,367
							ucoll :	4,308

**Optimum, âge de la retraite libre**

période	teta	kn	r	c	d	d/T	z	u
-2	0,200	1,125	3,000	5,282	8,598	13,083	0,143	3,716
-1	0,200	1,125	3,000	5,282	8,598	13,083	0,143	4,311
0	0,200	1,283	-1,000	4,878	10,148	10,763	0,329	4,274
1	0,200	1,476	-1,000	5,088	10,585	11,226	0,329	4,328
2	0,200	1,540	-1,000	5,152	10,720	11,369	0,329	4,345
3	0,200	1,560	-1,000	5,172	10,760	11,412	0,329	4,350
4	0,200	1,565	-1,000	5,178	10,773	11,425	0,329	4,351
5	0,200	1,567	-1,000	5,180	10,776	11,429	0,329	4,352
6	0,200	1,568	-1,000	5,180	10,777	11,431	0,329	4,352
7	0,200	1,568	-1,000	5,180	10,778	11,431	0,329	4,352
							ucoll :	4,308

**Equilibre, âge de la retraite libre, taux de cotisation inchangé**

Tableau 3 : Réponses dynamiques au choc démographique

## Bibliographie

- Artus P. et F. Legros (1999) *Le choix du système de retraite*, Economica.
- Auerbach A.J. et Kotlikoff L. J. (1987) *Dynamic Fiscal Policy*, Cambridge University Press
- d'Autume A., [2002], " Ageing and Retirement Age. What can we Learn from the Overlapping Generation Model ?", mimeo, EUREQua, Université Paris I.
- Belan P. and P. Pestieau (1999) Privatizing Social Security : a Critical Assesment, *The Geneva Papers on Risk and Insurance*, 24, 1, 114-130.
- Blanchard O. J. (1985) Debt, Deficits and Finite Horizons, *Journal of Political Economy*, 93, 223-247.
- Blanchet D. and L. P. Pelé (1999) Social Security and Retirement in France , in Gruber-Wise (1999)
- Blanchet D. and L. Caussat (2000), Le libre choix de l'âge de la retraite, approche économique, in *Retraites choisies et progressives*, D. Taddei ed., Rapport du Conseil d'Analyse Economique, La Documentation française, Paris.
- Blondel S. et S. Scarpetta (1997) La retraite anticipée dans les pays de l'OCDE. Le rôle des systèmes de sécurité sociale, *Revue Economique de l'OCDE*, 29, 7-59.
- Charpin J.-M. (1999) *L'avenir de nos retraites*, Rapport au Premier ministre, La Documentation Française.
- Cremer H., J-M Lozachmeur and P. Pestieau (2002) Social Security, Retirement Age and Optimal Income Taxation, mimeo, GREMAQ.
- de la Croix D. and P. Michel (2001) *A Theory of Economic Growth. Dynamics and Policy in Overlapping Generations*, forthcoming Cambridge university Press.
- Demange G. et Laroque G. (2000) Social Security, Optimality, and Equilibria in a Stochastic Overlapping Generations Economy, *Journal of Public Economic Theory*, 2000,1.
- Diamond P.A. (1965) National Debt in a Neoclassical Model , *American Economic Review*, 55, 1126-1150.
- Docquier F., Liégeois P., Loupias C. et Crettez B. (2000) The Consequences of Demographic Changes on the French Economy, mimeo.
- Equipe INGENUE (1999), INGENUE. Une modélisation intergénérationnelle et universelle. Document CEPII-OFCE.
- Gertler M. (1999) Government Debt and Social Security in a Life-Cycle Economy, *Carnegie Rochester Conference Series on Public Policy*, 50, -1-110.

Gruber G and D. Wise (1999) *Social Security and retirement around the World*, Chicago University Press.

Hairault J-O et F. Langot (2002), "Inégalités et réforme des retraites", *Revue Française d'Economie*, 2.

Hansen G. (1985) , "Indivisible Labor and the Business Cycle", *Journal of Monetary Economics*, 16, 3, 309-327.

Long J. and C. Plosser (1983) Real Business Cycles, *Journal of Political Economy*, 91, 1,39-69.

Mercenier J. (2002) Université de Cergy-Pontoise

Michel P. et P. Pestieau (2000) Retraite par répartition et âge de la retraite, *Revue Economique*, 15-30

Samuelson P. A. (1958) An Exact Consumption Loan Model with or without the Social Contrivance of Money, *Journal of Political Economy*, 66, 467-482.