

CALCULS D'ESPERANCE PAR SIMULATION

Nicolas BOULEAU

sept 1992

Les méthodes que nous allons discuter sont les suivantes:

- la méthode de Monte Carlo,
- les méthodes de quasi-Monte Carlo,
- des méthodes mixtes,
- la méthode de décalage.

Les critères de comparaison sont multiples : — champ d'application — vitesses de convergence suivant les situations — critères d'arrêt. Nous verrons, comme on peut s'y attendre, que ces méthodes ne sont pas meilleures les unes que les autres dans l'absolu et on s'attachera à faire ressortir leurs caractéristiques propres.

I La méthode de Monte Carlo

- A. Elle consiste, pour calculer $\mathbb{E}X$ où X est une variable aléatoire réelle
- 1) à représenter X comme variable aléatoire sur l'espace de probabilité $([0, 1]^s, \mathcal{B}[0, 1]^s, dx)$ avec s fini ou infini,
 - 2) à imiter des tirages indépendants de points de $[0, 1]^s$

$$U_1, U_2, \dots, U_n, \dots$$

et à appliquer la loi des grands nombres

$$\mathbb{E}X = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N} \sum_{n=1}^N X(U_n).$$

L'étape 1) est l'opération de simulation.

Théoriquement, il est toujours possible de se ramener l'espace $[0, 1]^s$ avec $s = 1$. Pratiquement, la dimension s , finie ou non, s'impose assez naturellement et on ne peut pas la réduire facilement. Il est à noter qu'on sait réaliser cette opération de simulation dans des situations beaucoup plus générales que celles pour lesquelles on sait calculer les lois par des formules finies explicites

(cf L. Devroye 1986). Cela est dû, en outre, à la *méthode de rejet* qui permet de simuler exactement une variable aléatoire même si on ne connaît qu'une suite d'approximations de sa densité.

L'étape 2) est la génération de nombres pseudo-aléatoires.

Théoriquement cette imitation du hasard est impossible. Cela a été précisé par les logiciens et notamment par Martin-Löf. Logiquement le problème est de même nature pour une suite de réels de $[0, 1]$ ou pour une suite de digits binaires. Dire qu'une suite de digits binaires est au hasard c'est dire qu'elle vérifie les théorèmes presque sûrs de la théorie des probabilités qui s'appliquent aux suites indépendantes de loi $\frac{1}{2}\delta_0 + \frac{1}{2}\delta_1$ c'est à dire qu'elle est hors de la famille dénombrable des négligeables effectifs. Comme les suites fournies par des algorithmes définissent des singletons effectifs, elles ne peuvent être au hasard.

Pratiquement on dispose de très bons générateurs de période extrêmement longue. Ils sont obtenus en soumettant les algorithmes producteurs à des tests statistiques et en éliminant ceux dont le comportement est mauvais. Les tests proposés sont très nombreux (cf Niederreiter 1978, Knuth 1981, Marsaglia 1985, Ripley 1987, Fushimi 1988, Altman 1988, Anderson 1990, etc.)

B. La classe des fonctions auxquelles elle s'applique est théoriquement toutes les fonctions de $\mathcal{L}^1([0, 1]^s, dx)$. Pratiquement il est imprudent de ne pas se limiter aux fonctions bornées. Mais on peut espérer ne pas être gêné par une régularité de type borélienne, nous reviendrons sur ce point.

C. La vitesse de convergence est gouvernée pour X dans L^2 , donc pour X bornée, par la loi du logarithme itéré

$$\lim_n \frac{X(U_1) + \dots + X(U_n) - n\mathbb{E}X}{\sigma\sqrt{2n \log \log n}} = 1 \quad \sigma^2 = \text{var} X.$$

On a aussi des estimées globales du type Cramer-Chernov (X bornée)

$$\mathbb{P}\left(\frac{1}{N} \sum_{n=1}^N X(U_n) \geq \mathbb{E}X + \varepsilon\right) \leq e^{-n\psi(\varepsilon)}.$$

Cela a fait l'objet de bien des approfondissements.

II. Méthodes de quasi-Monte Carlo

A. Elles consistent à conserver la première étape

- 1) simulation de X sur $[0, 1]^s$ fini ou infini,
- et à remplacer 2) par
- 2) choisir une suite $\xi = \xi_n$ équirépartie sur $[0, 1]^s$ relativement à dx et poser

$$\mathbb{E}X = \lim \frac{1}{N} \sum_{n=1}^N X(\xi_n)$$

B. Ceci n'est valide que si la variable aléatoire peut être représentée par une fonction Riemann-intégrable c'est à dire bornée et dont l'ensemble des points de discontinuité est négligeable ou encore bornée et telle que $\forall \varepsilon > 0, \exists u, v$ continues telles que $u \leq X \leq v, \int (u - v) dx \leq \varepsilon$.

C'est théoriquement toujours possible (pour X bornée dont la loi est connue de façon effective).

Pratiquement, cela rend l'étape 1) plus difficile: Il y a des cas où les objets mathématiques naturels ne sont pas des fonctions Riemann-intégrables et où on ne sait pas faire l'étape 1).

C. Equirépartition. Donnons quelques définitions sur les suites équiréparties et leur qualité. Nous prenons ici $s < +\infty$ quoique certaines propriétés s'étendent à la dimension infinie.

Pour $x = (x_1, \dots, x_s) \in [0, 1]^s$ on note $\pi(x) = x_1 \cdots x_s$ et $[[0, x]] = \{y = (y_1, \dots, y_s) \mid y_i \leq x_i \forall i\}$. Les *discrédances* de la suite $\xi = (\xi_n)$ à valeurs $[0, 1]^s$ sont

$$D_p^*(\xi, N) = \left\| \pi(x) - \frac{1}{N} \sum_{n=1}^N 1_{[[0, x]]}(\xi_n) \right\|_{L^p([0, 1]^s, dx)} \quad p \in [1, \infty].$$

Les conditions suivantes sont équivalentes (cf Kuipers-Niederreiter 1974)

1. ξ est équirépartie sur $[0, 1]^s$ i.e.

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N} \sum_{n=1}^N 1_{[[0, x]]}(\xi_n) \rightarrow \pi(x) \quad \forall x \in [0, 1]^s$$

2. $\forall p \in [1, \infty] \quad D_p^*(\xi, N) \rightarrow 0$ quand $N \uparrow \infty$

3. $\exists p \in [1, \infty] \quad D_p^*(\xi, N) \rightarrow 0$ quand $N \uparrow \infty$

4. la mesure $\mu_N = \frac{1}{N} \sum_{n=1}^N \delta_{\xi_n}$ converge vers $dx|_{[0, 1]^s}$ étroitement,

5. (H. Weyl 1926) $\forall m \in \mathbb{Z}^s \quad m \neq (0, \dots, 0)$

$$\frac{1}{N} \sum_{n=1}^N \exp\{2i\pi \langle m, \xi_n \rangle\} \rightarrow 0 \quad \text{quand } N \uparrow \infty$$

6. $\forall f : [0, 1]^s \rightarrow \mathbb{R}$ Riemann-intégrable,

$$\frac{1}{N} \sum_{n=1}^N f(\xi_n) \rightarrow \int f(x) dx$$

7. (Koksma-Hlawka) $\forall f : [0, 1]^s \rightarrow \mathbb{R}$ à variation finie

$$\left| \int f(x) dx - \frac{1}{N} \sum_{n=1}^N f(\xi_n) \right| \leq V(f) D_\infty^*(\xi, N).$$

Le fait qu'on n'exige plus que la suite imite le hasard et satisfasse tous les théorèmes de la théorie des probabilités mais uniquement la propriété d'équirépartition

permet d'engendrer de telles suites par des algorithmes effectifs.

D. Exemples de suites équiréparties à discrédance faible

Suites de Halton d'après une idée initiale de van der Corput, améliorées par Lapeyre-Pagès (1989).

Soient p un entier ≥ 2 , $n = a_0 + a_1p + \dots + a_kp^k$ $0 \leq a_i \leq p - 1$ le développement de l'entier n en base p . On pose $\varphi_p(n) = \frac{a_0}{p} + \dots + \frac{a_k}{p^{k+1}}$.

Soient p_1, \dots, p_s les s premiers nombres premiers, la suite de Halton est

$$\xi_n = (\varphi_{p_1}(n), \dots, \varphi_{p_s}(n))$$

sa discrédance vérifie

$$D_\infty^*(\xi, N) \leq K(s) \frac{(1 + \log N)^s}{N}$$

$K(s)$ est explicite (cf Borel-Pagès-Xiao (1992))

Suites de Faure d'après une idée initiale de Sobol' (1967) améliorées par Niederreiter (1987).

Soit p un nombre premier ≥ 3 et $\geq s$. Si x un réel p -adique : $x = \frac{a_0}{p} + \dots + \frac{a_k}{p^{k+1}}$ on définit le réel p -adique $C(x)$ par

$$C(x) = \frac{b_0}{p} + \dots + \frac{b_k}{p^{k+1}} \quad b_j = \sum_{i=j}^k \binom{i}{j} a_i \pmod p$$

(avec $\binom{i}{j} = 0$ si $j > i$) la suite de Faure est

$$\xi_n = (\varphi_p(n), C(\varphi_p(n)), \dots, C^{s-1}(\varphi_p(n))).$$

Pour N de la forme p^k on a

$$D_\infty^*(\xi, N) \leq \left(\frac{p-1}{2}\right)^{s-1} \frac{(s + \log_p N)^{s-1}}{N(s-1)!}.$$

Translations irrationnelle du tore. Soit $\{x\}$ la partie fractionnaire du réel x . Soient $(\alpha_1, \dots, \alpha_s)$ des réels tels que $(1, \alpha_1, \dots, \alpha_s)$ soient linéairement indépendants sur \mathbb{Q} . La suite

$$\xi_n = (\{n\alpha_1\}, \dots, \{n\alpha_s\})$$

vérifie

$$\forall \varepsilon > 0, \exists C(\alpha_1, \dots, \alpha_s, \varepsilon), \quad D_\infty^*(\xi, N) \leq \frac{C}{N^{1-\varepsilon}}.$$

Ces suites ont un comportement pas trop mauvais en grande dimension. Leur discrédance est très liée aux propriétés arithmétiques des α_i (cf Xiao 1990)

Une façon agréable de programmer de telles suites est d'utiliser le groupe des points du cercle unité à coordonnées rationnelles. En utilisant l'unicité de la décomposition en facteurs premiers dans l'anneau $Z[i]$ des entiers de Gauss on peut montrer par exemple que si

$$\zeta_1 = \frac{3}{5} + i\frac{4}{5}, \quad \zeta_2 = \frac{5}{13} + i\frac{12}{13}, \quad \zeta_3 = \frac{8}{17} + i\frac{15}{17},$$

alors $(\zeta_1^n, \zeta_2^n, \zeta_3^n)$ est équirépartie sur $(C_1)^3$.

Pour d'autres suites à discrédance faible cf Hua Loo Keng et Wang Yuan (1981).

A titre de comparaison les suites (U_n) de variables aléatoires indépendantes de loi uniforme sur $[0, 1]^s$ ont une discrédance qui vérifie (théorème de Chung-Kiefer)

$$\overline{\lim} D_\infty^*(N) \sqrt{\frac{N}{2 \log \log N}} = \frac{1}{2} \quad \text{p.s.}$$

hal-00451820, version 1 - 31 Jan 2010

3. Méthodes mixtes

L'idée est de randomiser légèrement une suite équirépartie pour conserver une discrédance intéressante et augmenter la classe des fonctions qu'on peut intégrer. Il s'agit plus d'une direction de recherche que de méthodes éprouvées.

Soit $\xi = (\xi_n)$ une suite équirépartie sur $[0, 1]^s$ et V_n une suite de variables aléatoires indépendantes de même loi ν ayant une densité sur \mathbb{R}^s . Alors la suite $X_n = \{\xi_n + V_n\}$ est telle que

$$\forall f \text{ borélienne bornée} \quad \left(\frac{1}{N} \sum_{n=1}^N f(X_n) \rightarrow \int_{[0,1]^s} f dx \quad \text{p.s.} \right).$$

Autrement dit avec X_n on peut intégrer les boréliennes bornées. Le résultat est faux si ν n'est pas absolument continue mais si ν ne charge pas ensembles de capacité newtonienne nulle, X_n permet d'intégrer les versions quasi-continues des fonctions bornées de H^1 .

Si le support de ν est petit les qualités de discrédance de ξ sont conservées par la suite X_n assez longtemps.

IV. Cas de la dimension infinie

La dimension dont il est question ici est celle de l'espace sur lequel est définie la variable aléatoire que l'on veut intégrer.

On est très souvent en dimension infinie : Dès qu'on utilise la méthode de rejet dans l'étape de simulation 1), mais aussi pour des variables aléatoires liées à des processus, temps d'atteinte des chaînes de Markov etc.

La dimension grande ou infinie intervient en particulier pour les quantités liées aux solutions d'équations différentielles stochastiques calculées par simulation après discrétisation (cf Clark 1982, Platen 1986, Talay 1986, Newton 1986, Kloeden-Platen, etc.)

Notons quelques particularités de la dimension infinie:

A. On y rencontre souvent et de façon mathématiquement naturelle des v.a. non Riemann-intégrables.

Exemple. Si (B_t^1, B_t^2) est un mouvement brownien bidimensionnel, la v.a.

$$Y = \int_0^1 B_s^1 dB_s^2$$

ne possède aucune version borélienne qui soit Riemann-intégrable (relativement à la mesure de Wiener) même après troncature. On peut montrer (Sugita 1991) que ce phénomène subsiste pour une large classe de topologies sur l'espace de Wiener.

Il n'est donc a priori pas possible de calculer $\mathbb{E}[F(Y)]$, F continue bornée, en tirant des points dans l'espace de Wiener et en moyennant. Sauf si on a un moyen de calculer la loi de Y ou d'en avoir une représentation Riemann-intégrable. C'est par exemple le cas pour l'aire de Lévy $S(t) = \frac{1}{2}[\int_0^t B_s^1 dB_s^2 - \int_0^t B_s^2 dB_s^1]$ dont la loi a pour densité

$$\frac{1}{\text{tch} \frac{\pi x}{t}}$$

par une belle application de la formule de Cameron-Martin. Ceci confirme, si besoin était, l'intérêt des travaux consistant à calculer les lois des v.a. issues du calcul stochastique, voir notamment à ce sujet les travaux de M. Yor (1992).

B. Ces v.a. sur l'espace de Wiener (ou fonctionnelles de Wiener) souvent possèdent des versions, ou sont elles-mêmes, quasi-continues. Par exemple Feyel-la Pradelle (1991) ont montré que si f est borélienne bornée $P_t f(\omega) = \mathbb{E}'[f(\sqrt{e^{-t}\omega} + \sqrt{1 - e^{-t}\omega'})]$ est elle-même quasi-continue.

Cependant on ne sait pas étendre, à ce jour, les méthodes mixtes à la dimension infinie.

C. Les suites sur $[0, 1]^\infty$ réparties selon la probabilité produit ont, pour celles qu'on connaît explicitement en pratique, des qualités très médiocres. Ceci est dû au caractère de plus en plus tardif des propriétés asymptotiques des suites connues sur $[0, 1]^s$ lorsque s augmente.

Remplir un cube de volume 1 mais dont la dimension augmente est de plus en plus long.

Il convient donc de tenter d'utiliser avantageusement les spécificités de la dimension infinie. C'est ce que fait la méthode du décalage.

V. La méthode du décalage

A. Principe. En dimension infinie, par exemple pour calculer l'espérance d'une fonctionnelle d'une chaîne de Markov simulée sous la forme $F(U_1, \dots, U_n, \dots)$ où les U_n sont uniformes i.i.d. sur $[0, 1]$ la méthode de Monte Carlo classique nécessite un grand nombre d'appels à la fonction random : on a besoin d'une suite double i.i.d. selon la formule

$$\mathbb{E}F = \lim \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} F(U_{n,0}, U_{n,1}, \dots, U_{n,k}, \dots) \quad \text{p.s.}$$

Une autre idée bien naturelle consiste à utiliser le théorème ergodique ponctuel de Birkhoff

$$\mathbb{E}F = \lim \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} F \circ \theta^n \quad \text{ou} \quad \mathbb{E}F = \lim \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} F \circ \tau^n$$

avec $\omega = (U_0, U_1, \dots, U_n, \dots)$ $\theta(\omega) = (U_1, U_2, \dots, U_{n+1}, \dots)$ et $\tau(\omega) = (U_{-1}, U_0, \dots, U_{n-1}, \dots)$.

L'implémentation informatique est particulièrement avantageuse :

une part significative des tirages peut être réutilisée entre ω et $\theta(\omega)$ ou $\tau(\omega)$,

une part significative *des calculs* liés à ces tirages peuvent être réutilisés aussi (implémentation par pointeurs cf Bouleau 1990)

Mais un inconvénient apparaît, il n'y a plus de vitesse asymptotique presque sûre standard du type logarithme itéré. On peut montrer (Halász 1976, Krengel 1978) que

i) aussi lentement que la suite $\alpha_n > 0$ tende vers zéro, il existe $f \in L^2$ telle que $\overline{\lim} \left| \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} f \circ \theta^n - \mathbb{E}f \right| / \alpha_n = +\infty$ p.s.

ii) et de même $\forall \varepsilon > 0 \exists f \in L^2$ $f \neq 0$ telle que $\frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} f \circ \theta^n - \mathbb{E}f = o\left(\frac{1}{N^{1-\varepsilon}}\right)$.

De telles fonctions sont obtenues par application du lemme de Halmos-Rohlin qui ne les fournit pas de façon constructive, et, en pratique, on a des estimations de vitesse de convergence intéressantes pour les fonctionnelles de temps d'arrêt (Ben Alaya 1992) et une loi du logarithme itéré est valide pour une large classe de fonctions comprenant les plus usuelles :

B. Loi du logarithme itéré pour le décalage.

Notations: (E, \mathcal{E}, μ) est un espace de probabilité, $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P}) = (E^{\mathbb{Z}}, \mathcal{E}^{\otimes \mathbb{Z}}, \mu^{\otimes \mathbb{Z}})$ les coordonnées sont X_n , on travaille pour la commodité des énoncés avec le shift rétrograde τ défini par $X_n \circ \tau = X_{n-1}$, pour $-\infty \leq m \leq n \leq +\infty$ on pose $\mathcal{F}_m^n = \sigma(X_m, \dots, X_n)$, on définit l'opérateur T par $Tf = \mathbb{E}[f | \mathcal{F}_1^\infty] \circ \tau$.

On appelle *classe de Gordin* et on note \mathcal{G} l'ensemble des $f \in L^2(\mathcal{F}_0^\infty)$ vérifiant les conditions équivalentes suivantes (Bouleau 1991) :

- i) $\sum_{n=0}^N T^n(f - \mathbb{E}f)$ reste borné dans L^2 ,
- ii) cette somme converge faiblement dans $L^2(\mathcal{F}_0^\infty)$,
- iii) cette somme converge fortement,
- iv) $\exists g \in L^2(\mathcal{F}_0^\infty)$ telle que $f - \mathbb{E}f = (I - T)g$
- v) $\exists \tilde{g}, h \in L^2(\mathcal{F}_0^\infty)$ vérifiant $\mathbb{E}[\tilde{g}|\mathcal{F}_1^\infty] = 0$, $\mathbb{E}h = 0$ telles que

$$f - \mathbb{E}f = \tilde{g} + h \circ \tau^{-1} - h.$$

Si elle existe la décomposition du v) est unique. Posons $S_N = \sum_{n=0}^N (f - \mathbb{E}f) \circ \tau^n$, alors pour $f \in \mathcal{G}$ par application du théorème du logarithme itéré de Heyde-Scott (1973) sur les sommes d'accroissements de martingales on a

$$\text{a) } \lim \frac{1}{\sqrt{N}} \|S_N\|_{L^2} = \|\tilde{g}\|_{L^2}$$

$$\text{b) } \overline{\lim} \frac{|S_N|}{\sqrt{2N \log \log N}} = \|\tilde{g}\|_{L^2}.$$

Remarques 1. La méthode du décalage est intéressante aussi en dimension finie. Si $f = F(X_1, \dots, X_k)$, avec F mettons bornée, alors $f \in \mathcal{G}$ et la quantité $\|\tilde{g}\|$ est soit plus grande soit plus petite que l'écart type σ . Si s est une permutation en appliquant le décalage à $F(X_{s(1)}, \dots, X_{s(k)})$ on obtient $k!$ méthodes de vitesses différentes en général. On peut aussi décaler de 2 rangs ou de 3...la méthode de Monte Carlo classique consiste à décaler de k rangs.

2. Il n'est pas bon d'appliquer la méthode du shift le long des trajectoires d'un processus à temps continu : L'idée qui consiste, pour calculer l'espérance d'une fonctionnelle d'un processus à temps continu, à discrétiser le processus par le choix d'un pas de temps, puis sur le processus à temps discret obtenu appliquer un décalage qui translate le temps d'un pas, est possible. C'est une méthode convenable pour un pas de temps fixé et imposé. Mais lorsque le pas de temps tend vers zéro elle devient de plus en plus inopérante car si les trajectoires sont continues (ou seulement càd) le décalage asymptotiquement ne modifie plus les trajectoires. La méthode du décalage peut en revanche être appliquée directement à des processus à temps continu à condition de les représenter sur un espace produit, ainsi qu'on va voir maintenant sur l'exemple du mouvement brownien.

3. A bien des égards il semble que l'espace le plus fondamental en dimension infinie n'est pas exactement $[0, 1]^{\mathbb{N}}$ mais plutôt $[0, 1]^B$ où B est un arbre binaire. Notamment par l'importance de la simulation récursive (cf Faure et Faure-Gaines 1992) pour la simulation des diffusions lorsqu'une simulation trajectorielle est possible (cf Talay 1983 Pardoux-Talay 1985). Voir aussi l'exemple en C. ci-après.

C. Application à l'espace de Wiener. Soit χ_n une base orthonormée de $L^2(\mathbb{R}_+)$, et $\varphi_n(t) = \int_0^t \chi_n(s) ds$. Soit g_n une suite de variables gaussiennes réduites indépendantes prises comme les coordonnées de

$$(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P}) = (E^{\mathbb{Z}}, \mathcal{E}^{\otimes \mathbb{Z}}, \mu^{\otimes \mathbb{Z}}).$$

La série $B = \sum_{n=0}^{\infty} g_n \varphi_n$ converge dans $\mathcal{C}[0, T]$ p.s. et dans $L^p(\Omega, \mathcal{C}[0, T])$ $p \in [1, \infty[$.

Le décalage défini par $\tau(B) = \sum_{n=0}^{\infty} g_{n-1} \varphi_n$ donne lieu à diverses transformations sur l'espace de Wiener suivant le choix de la base χ_n et l'indexation choisie.

Par exemple, avec les fonctions de Haar dont l'indexation naturelle est double:

$$\chi_{n,k}(t) = 2^{\frac{m}{2}} \chi(2^m t - k) \quad \varphi_{m,k}(t) = \int_0^t \chi_{m,k}(s) ds$$

$B(\omega, t) = \sum_{m=-\infty}^{+\infty} \sum_{k=0}^{\infty} \varphi_{m,k}(t) g_{m,k}(\omega)$ est un brownien sur \mathbb{R}_+ et la transformation qui à la famille

$$(g_{m,k}(\omega))_{m,k}$$

substitue la famille $(g_{m-1,k}(\omega))_{m,k}$ est le changement d'échelle $B_t \circ \tau = \frac{1}{\sqrt{2}} B_{2t}$. Pour cette transformation on peut montrer que les solutions d'équations différentielle stochastiques d'Ito à coefficients lipschitziens sont dans la classe de Gordin ainsi que les intégrales multiples de Wiener

$$f = \int_{0 < t_1 < \dots < t_m} h(t_1, \dots, t_m) dB_{t_1}^{i_1} \dots dB_{t_m}^{i_m}$$

sous des conditions nécessaires et suffisantes sur le noyau h .

Insistons sur le fait qu'il y a de multiples façons de représenter concrètement l'espace de Wiener comme espace produit qui donnent lieu à une méthode de décalage plus ou moins adaptée au problème posé.

V.1. Points génériques pour le décalage

Soit $x = (x_0, x_1, \dots, x_n \dots) \in [0, 1]^{\mathbb{N}}$ on dit que x est complètement répartie si

$$\frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} \delta_{\theta^n x} \rightarrow dx^{\mathbb{N}} \text{ étroitement}$$

i.e. si
$$\frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} F(x_n, x_{n+1}, \dots, x_{n+k}) \rightarrow \int_{[0,1]^k} F(x_0, x_1, \dots, x_n) dx_0 \dots dx_k$$

$\forall F$ continue bornée.

Si cette propriété est vraie non pour toute fonction cylindrique, mais pour celles d'ordre k seulement, on dit que la suite est k -répartie.

On connaît des suites k -réparties : Si $P(x) = \alpha x^k + \dots$ est un polynome de degré k dont le coefficient de plus haut degré α est irrationnel, alors si on pose $x_n = P(n) \bmod 1$, la suite x_n est k -répartie. C'est grâce à des suites 2-réparties que Bass (1984) construit les fonctions pseudo-aléatoires qui sont des imitations déterministes de processus stationnaires à spectre continu.

On connaît des suites complètement réparties (Rauzy 1981).

Si on remplace $([0, 1], dx)$ par $(\{0, 1\}, \frac{1}{2}\delta_0 + \frac{1}{2}\delta_1)$ on a les mêmes notions et on connaît aussi des suites complètement réparties. La suite de Champernowne (cf Dellacherie 1978) en est aussi un exemple. Elles correspondent aux nombres réels *normaux* en base 2. Mais les suites actuellement connues sont lentes et d'après un résultat de Flajolet-Kirchenhofer-Tichy (1988) les suites au hasard ne sont pas loin d'être, en un certain sens, les meilleures possibles.

Revenons à $([0, 1]^N, dx^N)$. Peut-on étudier la grosseur de l'ensemble G des x complètement répartis c'est à dire des points x génériques pour le décalage ? On peut montrer que $C(G^c) = 0$ pour une large classe de capacités sur $([0, 1]^N, dx^N)$ et cela illustre le fait que G est plus gros que l'ensemble des suites dont les coordonnées sont tirées au hasard.

Une façon imagée de voir cela est de considérer l'espace de Wiener muni de la capacité d'Ornstein-Uhlenbeck. Par un résultat de Kôno (1984) l'ensemble des trajectoires récurrentes est de capacité > 0 en dimension 3. Or les trajectoires *au hasard* sont transientes. Par représentation du brownien en série comme en V.C ci-dessus et simulation des gaussiennes g_n , cela induit une capacité sur $([0, 1]^N, dx^N)$ qui est telle que $C(G^c) = 0$, il en résulte que G contient des points correspondant à des trajectoires récurrentes et qui ne sont donc pas *au hasard*.

De telles suites, si on en connaissait de rapides, joueraient pour le décalage un rôle analogue aux suites à discrétance faible en dimension finie.

Remarques conclusives.

La méthode de Monte Carlo est une méthode non rigoureuse. Cela n'est absolument pas gênant pour la plupart des applications classiques, les générateurs, on l'a dit, sont bons et encore perfectibles. Cependant cela peut le devenir pour les modèles intermédiaires où il y a à la fois du hasard au sens de la théorie des probabilités et des équations non linéaires (ou des récurrences, des propriétés arithmétiques, etc.) engendrant des phénomènes chaotiques qu'on veut précisément étudier par simulation. On ne sait pas à ce jour dire avec précision ce que signifie " l'indépendance " du générateur pseudo-aléatoire par rapport au modèle étudié.

D'où l'importance croissante des méthodes de quasi-Monte Carlo et l'intérêt de les développer en dimension infinie.

Bibliographie

- Altman N.S., Bit-wise behavior of random numbers generators, SIAM J. Sci. Stat. Comp. 9, No5, 941-949, (1988)
- Anderson S., Random number generators on super-computers and other advanced architectures, SIAM Review 33, n 2, 221-251, (1990)

- Bass J., *Fonctions de corrélation, fonctions pseudo-aléatoires et applications*, Masson (1984)
- Ben Alaya M., Sur la méthode du décalage en simulation, in *Probabilités numériques*, Bouleau N. and Talay D. eds, 61-72, INRIA (1992)
- Borel J.P., Pagès G. et Xiao Y., Suites à discrepancy faible et intégration numérique, in *Probabilités numériques*, Bouleau N. and Talay D. eds, 7-22, INRIA (1992)
- Bouleau N., On effective computation of expectations in large or infinite dimension, *J. of Computational and App. Math.* 31,23-24, (1990)
- Bouleau N., On numerical integration by the shift and application to Wiener space, *Acta Applic. Math.* 25, 201-220,(1991)
- Bouleau N. et Lépingle D., *Numerical methods in probability theory*, Wiley (à paraître)
- Clark J.M.C., An efficient approximation scheme for a class of stochastic differential equations, *Advances in filtering and optimal stochastic control*, Lect. notes in Control and inf. Sc. 42, Springer (1982)
- Dellacherie C., Nombres au hasard de Borel à Martin Löf, *Gazette des Math.* No11, (1978)
- Devroye L., *Non-uniform random variate generation*. Springer (1986)
- Faure H., Discrepance de suites associées à un système de numération (en dimension s), *Acta Arithm.* 41, 337-351, (1982)
- Faure O., *Simulation du mouvement brownien et des diffusions*, Thèse ENPC, Paris (1992)
- Faure O. and Gaines J., Simulation trajectorielle des diffusions, in *Probabilités numériques* N. Bouleau and D. Talay eds, INRIA (1992)
- Feyel D. and A. de la Pradelle, Capacités gaussiennes, *Ann. Inst. Fourier* 41, 1, 49-76, (1991)
- Glažolet P., Kirchenhofer P. et Tichy R.F., Deviation from normality in random strings, *Prob. Th. Rel. Fields*, 80, 139-150, (1988)
- Hoshimi M., Designing a uniform random number generator whose subsequences are k -distributed, *SIAM J. Comput.* 17, No1, 89-99, (1988)
- Malász G., Remarks on the remainder in Birkhoff's ergodic theorem, *Acta Math. Acad. Hungar.* 28,389-395, (1976)
- Meyde C.C. and D.J. Scott, Invariance principles for the law of iterated logarithm for martingales and processes with stationary increments, *Ann. Prob.* vol 1, n3, 428-436, (1973)
- Hua Loo Keng et Wang Yuan, *Applications of number theory to numerical analysis*, Springer (1981)
- Kloeden P.E. and Platen E., *The numerical solution of stochastic differential equations*. Springer (to appear)
- Knuth D., *The art of computer programming vol. 2, semi-numerical algorithms*, Addison-Wesley, (1981)
- Kôno N., 4-dimensional Brownian motion is recurrent with positive capacity, *Proc. Japan Acad.* 60, 57-59, (1984)
- Krengel U., On the speed of convergence in the ergodic theorem, *Monatsh. Math.* 86, 3-6, (1978)
- Kuipers L. et H. Niederreiter, *Uniform distribution of sequences*, Wiley (1974)
- Lapeyre B. et Pagès G., Familles de suites à discrepancy faible obtenues par itération de transformations de $[0, 1]$, *C. R. Acad. Sci.* t308, sI, 507-509, (1989)
- Marsaglia G., A current view of random numbers generators, in *Computer Sci. and Stat.: the interface* 3-10, Elsevier Sci. Publ. (1985)

- Newton N.J., An asymptotic efficient difference formula for solving Ito stochastic differential equations, *Stochastics* 19, 178-206, (1986)
- Niederreiter H., Quasi-Monte Carlo methods and pseudo-random numbers, *Bull. Amer. Math. Soc.* 84, 957-1041, (1978)
- Niederreiter H., Point sets and sequences with small discrepancy, *Mh. Math.* 104, 273-337, (1987)
- Pardoux E. and Talay D., Approximation and simulation of solutions of SDE, *Acta Applicandae Math.* 3, 23-47, (1985)
- Platen E., Derivative free numerical methods for stochastic differential equations, *Lect. notes in Control and inf. Sc.* 95, 187-193, Springer (1986)
- Rauzy G., Discrépance d'une suite complètement équirépartie, *Ann. Fac. Sci. Toulouse Math.* 3, 105-112, (1981)
- Ripley B.D., *Stochastic simulation*. Wiley (1987)
- Sobol' J.M., The distribution of points in a cube and approximate evaluation of integrals, *Zh Vichisl. Mat. i Mat. Fiz.* 7, 784-802, (1967)
- Sugita H., Various topologies in the Wiener space and Lévy's stochastic area, *Prob. Th. rel. Fields*, (1991)
- Talay D., Résolution trajectorielle et analyse numérique des équations différentielles stochastiques, *Stochastics* 9, 275-306, (1983)
- Talay D., Discrétisation d'une équation différentielle stochastique et calcul approché d'espérance de fonctionnelles de la solution, *M²AN* 20,141-179, (1986)
- Xiao Y., Contribution aux méthodes numériques pour la simulation accélérée, Thèse ENPC Paris (1990)
- Yor M., Some aspects of Brownian motion, *Notes de Cours, Zürich* (Oct 1991-Fév 1992) Prépublication du Laboratoire de Probabilités Univ. Paris VI (1992).