

Problème de la somme coloration d'un graphe

Yu Li¹, Corinne Lucet¹, Aziz Moukrim², Kaoutar Sghiouer²

¹ Laboratoire MIS/Pôle Sciences, 33 rue St Leu, 80000 Amiens
{Yu.Li, Corinne.Lucet}@u-picardie.fr

² Université de Technologie de Compiègne, Laboratoire HEUDIASYC UMR CNRS 6599,
BP 20529, 60205 Compiègne
{Aziz.Moukrim, Kaoutar.Sghiouer}@hds.utc.fr

1 Introduction

Le problème de la coloration de graphe (GCP) est l'un des problèmes NP-difficiles en optimisation combinatoire. Il existe plusieurs problèmes dérivés du GCP ou constituant une généralisation du GCP, nous nous sommes intéressés plus particulièrement au problème de la somme coloration minimale de graphe (MCS). Les algorithmes gloutons jouent un rôle important dans la pratique : d'une part, ils peuvent être utilisés pour obtenir une solution dans le cas où l'exigence du temps de calcul est beaucoup plus importante que celle de la qualité de la solution et d'autre part, ils peuvent également être intégrés dans des méthodes exactes ou approchées. Nous procédons à l'élaboration d'une nouvelle famille d'algorithmes gloutons pour MCS.

Dans la section 2, nous rappelons le problème de la coloration de graphe ainsi que le problème de la somme coloration minimale de graphe, puis nous introduisons dans la section 3 des bornes inférieures pour MCS. Enfin nous étudions une nouvelle variante des heuristiques DSATUR [2] et RLF [3] pour traiter ces problèmes.

2 Définition

2.1 Problème de la coloration de graphe

Une *coloration valide* d'un graphe $G = (V, E)$ est une fonction $c : v \mapsto c(v)$ associant à tout sommet $v \in V$ une couleur $c(v)$, en s'assurant que $c(v) \neq c(u)$ pour toute arête $[u, v] \in E$. Le nombre *chromatique* $\chi(G)$ d'un graphe G est le nombre minimum de couleurs à utiliser pour colorier G . La résolution du problème de la coloration de graphe consiste à trouver une coloration valide utilisant $\chi(G)$ couleurs.

2.2 Problème de la somme coloration d'un graphe

Soit $G = (V, E)$ un graphe, le problème de la somme coloration minimale de G (MCS) consiste à trouver une coloration valide telle que $\sum_{v \in V} c(v)$ soit minimale. Cette somme coloration minimale est notée $\sum(G)$. Le plus petit nombre de couleurs utilisées pour colorier le graphe G dans une solution optimale pour MCS est appelé *force* du graphe, et noté $s(G)$.

3 Bornes Inférieures

Nous considérons une clique de taille k , il existe une façon unique de la colorier qui nécessite k couleurs et la somme associée est $\sum_1^k i = k(k+1)/2$. Nous nous sommes basés sur cette observation pour fournir une borne inférieure issue de la décomposition du graphe G en cliques. Dans un premier temps, nous avons utilisé un algorithme glouton qui fournit une clique X_i , la supprime du graphe initial G et recherche une autre clique dans le nouveau graphe $G \setminus X_i$ et ainsi de suite jusqu'à l'élimination de tous les sommets de G . Cet algorithme simple est basé sur un ordre de traitement des sommets dans la construction des cliques (degrés croissants, degrés décroissants, etc.) Nous avons amélioré cette approche en considérant le graphe plus globalement : en construisant le graphe complémentaire G' du graphe d'origine G , puis en le coloriant par un algorithme glouton qui fournit des stables de G' , on obtient alors une décomposition du graphe G en cliques. Le problème de coloration associé ne consiste plus alors à minimiser le nombre chromatique, ni à minimiser la somme associée, mais à maximiser $\sum k_i(k_i + 1)/2$, avec k_i la taille du stable de couleur i , fourni par la coloration de G' .

4 Nouvelle variante de DSATUR et RLF

Le problème MCS a été introduit par Kubicka et Schwenk [1]. Depuis, plusieurs travaux théoriques ont été réalisés. Le seul travail à notre connaissance qui présente des résultats numériques date de 2007 [4]. Nous proposons une nouvelle variante de DSATUR et RLF. Ces algorithmes gloutons sont les plus cités dans la littérature, ils ont été élaborés par Brélaz [2] et Leighton [3] en 1979.

Le principe de cette variante est similaire à celui de DSATUR ou RLF au sens où à chaque itération, on affecte la plus petite couleur disponible au sommet vérifiant un certain critère. Cette variante prend en compte l'influence de la coloration d'un sommet sur son voisinage avant une coloration définitive.

Les résultats numériques montrent que cette nouvelle variante est plus efficace à la fois pour la borne supérieure et la borne inférieure de MCS. La complexité de cette variante est en $O(n^3)$.

Références

1. Kubicka, E. and Schwenk, A. : An introduction to chromatics sum. Proc.17th Annual ACM Computer Science Conf (1989)
2. Brélaz, D. : New methods to color the vertices of a graph. ACM, Volume 22, Number 4 (1979)
3. Leighton, FT. : A graph Coloring Algorithm for Large Scheduling Problems. Journal of research of the national institute of standards and technology, Volume 84, Number 6 (1979)
4. Kokosinski, Z. and Kwarciany, K. : On Sum Coloring of Graphs with Parallel Genetic Algorithms. ICANNGA 2007, Part I, LNCS 4431, pp. 211-219 (2007)