

Représentations irréductibles de certaines algèbres  
d'opérateurs différentiels  
Irreducible representations of some differential  
operator algebras

Alexis TCHOUDJEM

Institut Camille Jordan

Université Claude Bernard Lyon I

Boulevard du Onze Novembre 1918

69622 Villeurbanne

FRANCE

tchoudjem@math.univ-lyon1.fr

Villeurbanne, le 22 janvier 2010

**Abstract :** For a projective variety  $X$  and a line bundle  $L$  over  $X$ , one considers the  $L$ -twisted global differential operator algebra  $\mathcal{D}_L(X)$  which naturally operates on the space of global sections  $H^0(X, L)$ . In the case where  $X$  is the wonderful compactification of the group  $\mathrm{PGL}_3$ , one proves that the space  $H^0(X, L)$  is an irreducible representation of the algebra  $\mathcal{D}_L(X)$  or zero. For that, one introduces a 2-order differential operator which is defined over whole  $X$  but which does not arise from the infinitesimal action of the automorphism group  $\mathrm{Aut}(X)$ .

## Introduction

According to the famous Borel-Weil theorem, if  $X$  is a flag variety and if  $L$  is a line bundle over  $X$ , then the space  $H^0(X, L)$  is an irreducible representation of the Lie algebra of the automorphism group of  $X$ , or 0. If  $\overline{G}$  is the wonderful compactification of an adjoint semisimple algebraic group  $G$ , then all the line bundles over  $\overline{G}$  are  $\widehat{G} \times \widehat{G}$ -linearized ( $\widehat{G}$  being the universal covering of  $G$ ) and the space of global sections  $H^0(\overline{G}, L)$  is a representation of  $\widehat{G} \times \widehat{G}$  which is reducible in general. Now, the algebra  $\mathcal{D}_L(\overline{G})$  operates on  $H^0(\overline{G}, L)$  too; that algebra is the global section algebra of a sheaf of algebras defined from  $L$  and the sheaf of differential operators over  $\overline{G}$ . In the case where  $G$  is  $\mathrm{PGL}_3$ , one gives a 2-order differential operator defined over whole  $\overline{G}$  ( *cf.* théorème 8.4). Then, by using this operator, one proves that the space  $H^0(\overline{G}, L)$  is irreducible (or zero) as a  $\mathcal{D}_L(\overline{G})$ -module, for all line bundles  $L$  over  $\overline{G}$ . One finishes with a similar result over the « complete conic variety » ( *cf.* théorème 10.1).

**Résumé :** À une variété projective  $X$  et à un fibré en droites  $L$  sur  $X$ , on peut associer une algèbre  $\mathcal{D}_L(X)$ , l'algèbre des  $L$ -opérateurs différentiels globaux sur  $X$ , qui opère naturellement sur l'espace des sections globales  $H^0(X, L)$ . On montre ici que dans le cas particulier où  $X$  est la compactification magnifique du groupe  $\mathrm{PGL}_3$ , l'espace  $H^0(X, L)$  est soit nul soit une représentation irréductible de l'algèbre  $\mathcal{D}_L(X)$ . On introduit pour cela un opérateur différentiel d'ordre 2 défini sur tout  $X$  mais qui ne provient pas de l'action infinitésimale sur  $X$  du groupe d'automorphismes  $\mathrm{Aut}X$ .

## Table des matières

<b>Introduction</b>	<b>3</b>
<b>1 Opérateurs différentiels sur une variété</b>	<b>4</b>
1.1 Opérateurs différentiels tordus par un faisceau inversible . . .	4
1.2 Action de groupes . . . . .	5
<b>2 Compactifications magnifiques des groupes adjoints</b>	<b>6</b>
<b>3 Immersion dans un produit d'espaces projectifs</b>	<b>6</b>
3.1 Notations . . . . .	6
<b>4 La grosse cellule</b>	<b>7</b>
<b>5 Le groupe de Picard</b>	<b>8</b>
<b>6 Sections des faisceaux inversibles</b>	<b>8</b>
6.1 sur la grosse cellule . . . . .	8
6.2 sections globales . . . . .	8
<b>7 Cas particulier</b>	<b>9</b>
<b>8 Formules de changement de variables</b>	<b>10</b>
8.1 Fonctions . . . . .	10
8.2 Dérivations issues de l'action de l'algèbre de Lie . . . . .	11
8.3 Un opérateur différentiel d'ordre 2 . . . . .	13
8.4 Opérateurs différentiels tordus . . . . .	16
<b>9 Irréductibilité des espaces de sections globales</b>	<b>18</b>
<b>10 Autre cas</b>	<b>24</b>
<b>Références</b>	<b>24</b>

Soit  $k$  un corps algébriquement clos de caractéristique nulle.

## Introduction

D'après le célèbre théorème de Borel-Weil, si  $X$  est une variété de drapeaux et si  $L$  est un fibré en droites sur  $X$ , alors, lorsqu'il est non nul, l'espace  $H^0(X, L)$  est une représentation irréductible de l'algèbre de Lie du groupe des automorphismes de  $X$ . Si  $\overline{G}$  est la compactification magnifique d'un groupe algébrique semi-simple adjoint  $G$ , alors tout fibré en droites  $L$  sur  $\overline{G}$  est  $\widehat{G} \times \widehat{G}$ -linéarisé ( $\widehat{G}$  est le revêtement universel de  $G$ ) et l'espace des sections globales  $H^0(\overline{G}, L)$  est une représentation de  $\widehat{G} \times \widehat{G}$  qui

est réductible en général. Mais sur  $H^0(\overline{G}, L)$ , l'anneau  $\mathcal{D}_L(\overline{G})$  opère aussi ; c'est l'algèbre des sections globales d'un faisceau d'algèbres défini à partir de  $L$  et du faisceau des opérateurs différentiels sur  $\overline{G}$ . On donne ici dans le cas particulier où  $G = \mathrm{PGL}_3$  un opérateur différentiel d'ordre 2 défini sur tout  $\overline{G}$  (cf. le théorème 8.4). Puis on démontre en utilisant cet opérateur que l'espace  $H^0(\overline{G}, L)$  est irréductible (ou nul) comme  $\mathcal{D}_L(\overline{G})$ -module pour tout fibré en droites  $L$  sur  $\overline{G}$ . On termine par un résultat analogue sur la variété des « coniques complètes » (cf. le théorème 10.1).

## 1 Opérateurs différentiels sur une variété

Soit  $X$  une variété algébrique lisse.

On rappelle ici la définition du faisceau  $\mathcal{D}_X$  des opérateurs différentiels sur  $X$ .

On note  $\mathcal{E}nd_{\mathbf{k}}(\mathcal{O}_X)$  le faisceau des  $\mathbf{k}$ -endomorphismes locaux de  $\mathcal{O}_X$ . On identifiera  $\mathcal{O}_X$  à un sous-faisceau  $\mathcal{E}nd_{\mathbf{k}}(\mathcal{O}_X)$ .

On pose :  $\mathcal{D}_X^{(0)} := \mathcal{O}_X$  et pour tout  $n \geq 0$  et tout ouvert  $U$  de  $X$  :

$$\Gamma(U, \mathcal{D}_X^{(n+1)}) :=$$

$$\left\{ d \in \mathrm{End}_{\mathbf{k}}(\mathcal{O}_U) : \forall V \subseteq U \text{ ouvert}, \forall a \in \mathcal{O}_X(U), [d|_V, a] \in \mathcal{D}_X^{(n)}(V) \right\} .$$

### Définition 1

$$\mathcal{D}_X := \cup_{n \geq 0} \mathcal{D}_X^{(n)} .$$

On notera  $\mathcal{D}(X)$  l'anneau  $\Gamma(X, \mathcal{D}_X)$  des opérateurs différentiels globaux sur  $X$ .

EXEMPLE : Si  $\mathbb{P}^1 = \{[x_0 : x_1] : (x_0, x_1) \in \mathbf{k}^2 \setminus \{(0, 0)\}\}$ , alors :

$$\mathcal{D}(\mathbb{P}^1) = \mathbf{k}[x_0 \partial_{x_0}, x_0 \partial_{x_1}, x_1 \partial_{x_0}]$$

(avec  $x_1 \partial_{x_1} = -x_0 \partial_{x_0}$ ).

### 1.1 Opérateurs différentiels tordus par un faisceau inversible

Soit  $\mathcal{L}$  un faisceau inversible sur  $X$ . On rappelle que le faisceau d'algèbres des opérateurs différentiels tordus par  $\mathcal{L}$ , noté  $\mathcal{D}_{\mathcal{L}}$ , est un sous-faisceau de  $\mathcal{E}nd_{\mathbf{k}}(\mathcal{L})$  défini comme le faisceau  $\mathcal{D}_X$ , par récurrence :

On pose  $\mathcal{D}_{\mathcal{L}}^{(0)} := \mathcal{O}_X$  et pour tout  $n \geq 0$  et tout  $U$  ouvert de  $X$  :

$$\Gamma(U, \mathcal{D}_{\mathcal{L}}^{(n+1)}) :=$$

$$\left\{ d \in \mathrm{End}_{\mathbf{k}}(\mathcal{L}|_U) : \forall V \subseteq U \text{ ouvert}, \forall a \in \mathcal{O}_X(V), [d|_V, a] \in \mathcal{D}_{\mathcal{L}}^{(n)}(V) \right\} .$$

## Définition 2

$$\mathcal{D}_{\mathcal{L}} := \cup_{n \geq 0} \mathcal{D}_{\mathcal{L}}^{(n)} .$$

EXEMPLE : Soient  $n \in \mathbb{Z}$  et  $\mathcal{L}_n := \mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}(n)$  le faisceau inversible des fonctions  $n$ -homogènes. On a :

$$\mathcal{D}_{\mathcal{L}_n}(\mathbb{P}^1) = \mathbf{k}[x_0 \partial_{x_0}, x_0 \partial_{x_1}, x_1 \partial_{x_0}]$$

(avec  $x_1 \partial_{x_1} = n - x_0 \partial_{x_0}$ ).

### Remarques :

1) On a un isomorphisme de faisceaux d'algèbres :

$$\mathcal{D}_{\mathcal{L}} \simeq \mathcal{L} \otimes_{\mathcal{O}_X} \mathcal{D}_X \otimes_{\mathcal{O}_X} \mathcal{L}^{-1} .$$

2) L'algèbre  $\mathcal{D}_{\mathcal{L}}(X)$  opère naturellement sur tous les groupes de cohomologie  $H^i(U, \mathcal{L})$ , pour tout  $i \geq 0$  et tout  $U$  ouvert de  $X$ .

## 1.2 Action de groupes

Si  $G$  est un groupe algébrique qui agit algébriquement sur  $X$  et si  $\mathcal{L}$  est un faisceau inversible  $G$ -linéarisé sur  $X$ , alors l'action infinitésimale de l'algèbre de Lie de  $G$ ,  $\mathfrak{g}$ , sur  $X$  (cf. [2][§1]) induit un morphisme naturel d'algèbres associatives :

$$U(\mathfrak{g}) \rightarrow \mathcal{D}_{\mathcal{L}}(X)$$

(où  $U(\mathfrak{g})$  est l'algèbre enveloppante de  $\mathfrak{g}$ ).

EXEMPLE : — Si  $X = \mathbb{P}^1$  et  $G = SL_2$ ,  $\mathfrak{sl}_2$  son algèbre de Lie, alors on a un morphisme surjectif :

$$U(\mathfrak{sl}_2) \rightarrow \mathcal{D}_{\mathcal{L}_n}(\mathbb{P}^1)$$

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \mapsto -x_1 \partial_{x_0}, -x_0 \partial_{x_1}, -x_0 \partial_{x_0} + x_1 \partial_{x_1} .$$

— En revanche, si  $X$  est l'éclatement de  $\mathbb{P}^2$  en  $0 := [1 : 0 : 0]$ , si

$$G := \text{Aut} X = \left\{ \begin{bmatrix} * & * & * \\ 0 & * & * \\ 0 & * & * \end{bmatrix} \in \text{PGL}_3(\mathbf{k}) \right\}, \text{ le morphisme :}$$

$$U(\mathfrak{g}) \rightarrow \mathcal{D}(X)$$

n'est pas surjectif.

## 2 Compactifications magnifiques des groupes adjoints

Soit  $G$  un groupe algébrique linéaire semi-simple et adjoint. On notera  $R : \widehat{G} \rightarrow G$  son revêtement universel ( $\widehat{G}$  est semi-simple simplement connexe et  $\ker R$  est le centre de  $\widehat{G}$ ). On notera  $\mathfrak{g}$  l'algèbre de Lie de  $G$ .

Les multiplications à gauche et à droite définissent une action de  $G \times G$  sur  $G$ . D'après [1, §2], il existe une compactification magnifique de  $G$  *c-à-d* une variété projective, lisse et connexe, notée  $\overline{G}$  qui contient  $G$  telle que :

- i)  $G \times G$  agit sur  $\overline{G}$  et cette action prolonge l'action sur  $G$ ;
- ii)  $G$  est ouvert dans  $\overline{G}$ ;
- iii) si on note  $Z_1, \dots, Z_r$  les composantes irréductibles de  $\overline{G} \setminus G$  (les *diviseurs limitrophes*), alors  $\overline{G} \setminus G = Z_1 \cup \dots \cup Z_r$  est un diviseur à croisements normaux et  $r$  est le rang de  $G$ ;
- iv) chaque adhérence de  $G \times G$ -orbite de  $\overline{G}$  est l'intersection (transverse) des  $Z_i$  qui la contiennent;
- v) l'intersection  $Z_1 \cap \dots \cap Z_r$  est l'unique orbite fermée de  $\overline{G}$ .

## 3 Immersion dans un produit d'espaces projectifs

Soient  $\widehat{T} \subseteq \widehat{B}$  un tore maximal et un sous-groupe de Borel de  $\widehat{G}$ . On pose  $T := R(\widehat{T}), B := R(\widehat{B})$ . Soient  $\alpha_1, \dots, \alpha_r$  la base correspondante du système de racines de  $(G, T)$  (les  $\alpha_i$  sont en fait des caractères de  $T$ ). Soient  $\omega_1, \dots, \omega_r$  les poids fondamentaux correspondant à cette base (ce sont des caractères de  $\widehat{T}$ ). Notons  $\rho_1 : \widehat{G} \rightarrow \mathrm{GL}(V_{\omega_1}), \dots, \rho_r : \widehat{G} \rightarrow \mathrm{GL}(V_{\omega_r})$  les représentations irréductibles de  $\widehat{G}$  associées.

Posons aussi pour tout  $i : E_{\omega_i} := \mathrm{End}(V_{\omega_i})$ .

Considérons

$$i : G \rightarrow \mathbb{P}(E_{\omega_1}) \times \dots \times \mathbb{P}(E_{\omega_r})$$

$$g \mapsto ([\rho_1(g)], \dots, [\rho_r(g)]) .$$

Le morphisme  $i$  est une immersion et on peut identifier  $\overline{G}$  à  $\overline{i(G)}$ .

On notera pour tous  $g, g' \in G, x \in \overline{G}, g x g' := (g, g'^{-1}).x$ .

### 3.1 Notations

Fixons quelques notations.

Soient  $\widehat{B}^-$  (resp.  $B^-$ ) le sous-groupe de Borel opposé à  $\widehat{B}$  relativement à  $\widehat{T}$  (resp. opposé à  $B$  relativement à  $T$ ).

On notera aussi  $U$  et  $U^-$  les radicaux unipotents de  $B$  et  $B^-$ ,  $\mathfrak{n}$  et  $\mathfrak{n}^-$  les algèbres de Lie de  $U$  et  $U^-$ .

La variété  $\overline{G}$  possède un unique point fixe pour  $B^- \times B$ . Notons le  $\mathbf{z}$ . Pour tout caractère  $\lambda$  de  $\widehat{T}$  dominant (par rapport à  $\widehat{B}$ ), on note  $V_\lambda$  le  $\widehat{G}$ -module

irréductible de plus haut poids  $\lambda$  et  $\lambda^*$  le plus haut poids du  $\widehat{G}$ -module irréductible dual  $V_\lambda^*$ . On choisit  $v_\lambda \in V_\lambda$  et  $v_{-\lambda}^* \in V_\lambda^*$  un  $\widehat{B}$ -vecteur propre de poids  $\lambda$  et un  $\widehat{B}^-$ -vecteur propre de poids  $-\lambda$  tels que  $\langle v_{-\lambda}^*, v_\lambda \rangle = 1$ . De même, on choisit un  $\widehat{B}^-$ -vecteur propre  $v_{-\lambda^*} \in V_\lambda$  et un  $\widehat{B}$ -vecteur propre  $v_{\lambda^*}^* \in V_\lambda^*$ . Si on considère  $\overline{G}$  comme une sous-variété fermée de  $\mathbb{P}(E_{\omega_1}) \times \dots \times \mathbb{P}(E_{\omega_r})$  et compte tenu de l'identification :

$$E_{\omega_i} = V_{\omega_i} \otimes V_{\omega_i}^*$$

on a :

$$\mathbf{z} = ([v_{-\omega_1^*} \otimes v_{\omega_1^*}^*], \dots, [v_{-\omega_r^*} \otimes v_{\omega_r^*}^*]) .$$

## 4 La grosse cellule

Il existe un ouvert (unique) de  $\overline{G}$ , noté  $(\overline{G})_0$  et appelé la *grosse cellule*, qui est  $B \times B^-$  invariant et isomorphe à un espace affine.

De plus,  $\overline{G} = (G \times G) \cdot (\overline{G})_0$  et  $BB^- = (\overline{G})_0 \cap G$ .

De plus, la décomposition  $BB^- = UTU^- \simeq U \times T \times U^-$  se « prolonge » à  $(\overline{G})_0$ . En effet, si on pose  $(\overline{T})_0 := \overline{T} \cap (\overline{G})_0$ , on a un isomorphisme :

$$U \times (\overline{T})_0 \times U^- \rightarrow (\overline{G})_0$$

$$(u, x, u') \mapsto uxu' .$$

Ajoutons que pour tout  $1 \leq i \leq r$ , le caractère  $\alpha_i : T \rightarrow \mathbb{G}_m$  se prolonge en un morphisme, encore noté  $\alpha_i : (\overline{T})_0 \rightarrow \mathbb{A}^1$  et que l'on a aussi un isomorphisme :

$$(\overline{T})_0 \rightarrow \mathbb{A}^r$$

$$x \mapsto (\alpha_1(x), \dots, \alpha_r(x)) .$$

Pour simplifier, on notera encore  $\alpha_i$  les morphismes :

$$(\overline{G})_0 \rightarrow \mathbb{A}^1$$

$$uxu' \mapsto \alpha_i(x)$$

(pour tout  $u \in U$  et tout  $u' \in U^-$ ).

En particulier,  $\mathbf{k}[(\overline{G})_0] = \mathbf{k}[U \times U^-][\alpha_1, \dots, \alpha_r]$ .

En fait, on a aussi :

$$(\overline{G})_0 = \left\{ ([A_1], \dots, [A_r]) \in \overline{G} \subseteq \mathbb{P}(E_{\omega_1}) \times \dots \times \mathbb{P}(E_{\omega_r}) : \forall 1 \leq i \leq r, f_i(A_i) \neq 0 \right\} .$$

où pour tout  $i$ ,  $f_i$  est la forme linéaire :

$$f_i : E_{\omega_i} \rightarrow \mathbf{k}, A \mapsto \langle v_{\omega_i^*}^*, Av_{-\omega_i^*} \rangle .$$

De plus, les diviseurs limitrophes  $Z_i$  vérifient :

$$Z_i \cap (\overline{G})_0 = \left\{ x \in (\overline{G})_0 : \alpha_i(x) = 0 \right\} .$$

## 5 Le groupe de Picard

Rappelons la description des fibrés en droites (ou des faisceaux inversibles) sur  $\overline{G}$ .

Tous les faisceaux inversibles sur  $\overline{G}$  sont  $\widehat{G} \times \widehat{G}$ -linéarisés de manière unique de plus :

**Proposition 5.1** (cf. [1, §8]) *On a un isomorphisme :*

$$\begin{aligned} \mathbb{Z}^r &\rightarrow \text{Pic}(\overline{G}) \\ (n_1, \dots, n_r) &\mapsto \left( \mathcal{O}_{\mathbb{P}(E_{\omega_1})}(n_1) \boxtimes \dots \boxtimes \mathcal{O}_{\mathbb{P}(E_{\omega_r})}(n_r) \right) |_{\overline{G}} . \end{aligned}$$

Si  $\lambda = n_1\omega_1 + \dots + n_r\omega_r$  est un caractère de  $\widehat{T}$ , on posera :

$$\mathcal{L}_\lambda := \left( \mathcal{O}_{\mathbb{P}(E_{\omega_1})}(n_1) \boxtimes \dots \boxtimes \mathcal{O}_{\mathbb{P}(E_{\omega_r})}(n_r) \right) |_{\overline{G}} .$$

En particulier, sur la fibre  $\mathcal{L}_\lambda|_{\mathbf{z}}$ , le tore  $\widehat{T} \times \widehat{T}$  agit avec le poids  $(\lambda^*, -\lambda^*)$  où si l'on note  $W$  le groupe de Weyl de  $(G, T)$  et  $w_0$  l'élément le plus long de  $W$ ,  $\lambda^* := -w_0\lambda$ .

**Remarque :** si on note  $\mathcal{O}_{\overline{G}}(Z_i)$  le faisceau inversible associé au diviseur  $Z_i$ , on a un isomorphisme de faisceaux  $G \times G$ -linéarisés :

$$\mathcal{O}_{\overline{G}}(Z_i) \simeq \mathcal{L}_{\alpha_i^*} .$$

## 6 Sections des faisceaux inversibles

### 6.1 sur la grosse cellule

La grosse cellule  $(\overline{G})_0$  est isomorphe à un espace affine donc pour tout caractère  $\lambda$  de  $\widehat{T}$ ,  $\Gamma((\overline{G})_0, \mathcal{L}_\lambda)$  est un  $k[(\overline{G})_0]$ -module libre de rang 1. Si  $\lambda = n_1\omega_1 + \dots + n_r\omega_r$ , alors :

$$\Gamma((\overline{G})_0, \mathcal{L}_\lambda) = \mathbf{k}[(\overline{G})_0]f_\lambda$$

où  $f_\lambda := (f_1^{n_1} \boxtimes \dots \boxtimes f_r^{n_r}) |_{(\overline{G})_0}$ .

### 6.2 sections globales

Rappelons que l'on considère les caractères  $\alpha_i$ , ( $1 \leq i \leq r$ ), comme des fonctions régulières  $U \times U^-$ -invariantes sur la grosse cellule  $(\overline{G})_0$  (cf. §4).

**Théorème 6.1** (cf. [1, §8.2]) *Pour tout caractère  $\lambda$  de  $\widehat{T}$ , on a un isomorphisme de  $U(\mathfrak{g} \times \mathfrak{g})$ -modules :*

$$\Gamma(\overline{G}, \mathcal{L}_\lambda) \simeq \bigoplus_{\substack{m_1, \dots, m_r \geq 0 \\ \lambda^* - m_1\alpha_1 - \dots - m_r\alpha_r \text{ dominant}}} U(\mathfrak{g} \times \mathfrak{g})\alpha_1^{m_1} \dots \alpha_r^{m_r} f_\lambda .$$

## 7 Cas particulier

On suppose maintenant que  $G = \mathrm{PGL}_3(\mathbf{k})$ . Dans ce cas :

$$\widehat{G} = \mathrm{SL}_3(\mathbf{k}), r = 2$$

Les sous-groupes  $\widehat{T}, T, \widehat{B}, B, \widehat{B}^-, B^-$  sont respectivement les sous-groupes des matrices diagonales, triangulaires supérieures et inférieures. Si on note  $\epsilon_i$  le caractère :

$$\begin{pmatrix} t_1 & & \\ & t_2 & \\ & & t_3 \end{pmatrix} \mapsto t_i$$

on a :  $\omega_1 = \epsilon_1, \omega_2 = \epsilon_1 + \epsilon_2, \alpha_1 = \epsilon_1 - \epsilon_2, \alpha_2 = \epsilon_2 - \epsilon_3$ .

On a avec ces notations :

$$E_{\omega_1} = \mathrm{End}(\mathbf{k}^3) \text{ et } E_{\omega_2} = \mathrm{End}(\bigwedge^2 \mathbf{k}^3) \simeq \mathrm{End}(\mathbf{k}^3) .$$

Donc si l'on prend pour base de  $\mathbf{k}^3$  la base canonique  $e_1, e_2, e_3$  et pour base de  $\bigwedge^2 \mathbf{k}^3$  la base canonique duale :  $e_2 \wedge e_3, e_3 \wedge e_1, e_1 \wedge e_2$ , on a  $E_{\omega_1} \simeq E_{\omega_2} \simeq M_3(\mathbf{k})$ .

En particulier, le plongement de  $G$  dans  $\overline{G}$  est donné par :

$$G \rightarrow \mathbb{P}^8(\mathbf{k}) \times \mathbb{P}^8(\mathbf{k})$$

$$[g] \mapsto ([g], [\mathrm{Com}(g)])$$

où  $\mathrm{Com}(g)$  est la comatrice de  $g$ .

On en déduit une description explicite de  $\overline{\mathrm{PGL}_3(\mathbf{k})}$  avec des équations :

**Proposition 7.1** *Si  $G = \mathrm{PGL}_3(\mathbf{k})$ , alors :*

$$\overline{G} = \left\{ ([g], [g']) \in \mathbb{P}(M_3(\mathbf{k})) \times \mathbb{P}(M_3(\mathbf{k})) : g^t g' \in \mathbf{k}I_3 \right\}$$

où  $I_3$  est la matrice identité  $3 \times 3$ .

De plus, si on note  $g_{i,j}$  le  $(i, j)$ -ième coefficient d'une matrice  $g$ , on a :

$$(\overline{G})_0 = \left\{ ([g], [g']) \in \overline{G} : g_{3,3} g'_{1,1} \neq 0 \right\}$$

$$(\overline{T})_0 = \left\{ \left( \left( \begin{bmatrix} t_2 t'_2 & & \\ & t_2 & \\ & & 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & & \\ & t'_2 & \\ & & t_2 t'_2 \end{bmatrix} \right) : t_2, t'_2 \in \mathbf{k} \right\} .$$

Soit  $a := \left( \begin{bmatrix} t_1 \\ t_2 \\ t_3 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} t'_1 \\ t'_2 \\ t'_3 \end{bmatrix} \right) \in (\overline{T})_0$ . Pour tout

$$u = \begin{bmatrix} 1 & u_{1,2} & u_{1,3} \\ & 1 & u_{2,3} \\ & & 1 \end{bmatrix} \in U, \text{ tout } u' = \begin{bmatrix} 1 & & \\ u_{2,1} & 1 & \\ u_{3,1} & u_{3,2} & 1 \end{bmatrix} \in U^-,$$

on a :

$$\alpha_1(uau') = \frac{t'_2}{t'_1}, \alpha_2(uau') = \frac{t_2}{t_3}$$

et on pose  $U_{i,j}(uau') := u_{i,j}$  si  $1 \leq i \neq j \leq 3$ .

Ainsi,  $\mathbf{k}[(\overline{G})_0] = k[U_{i,j} : 1 \leq i \neq j \leq 3][\alpha_1, \alpha_2]$ .

On remarque enfin que dans ce cas particulier, les diviseurs  $Z_1$  et  $Z_2$  sont définis par :

$$Z_1 = \{([g], [g']) \in \overline{G} : \text{rg}(g) = 1\}, \quad Z_2 = \{([g], [g']) \in \overline{G} : \text{rg}(g') = 1\}.$$

## 8 Formules de changement de variables

### 8.1 Fonctions

Puisque

$$G \cap (\overline{G})_0 = BB^- = \{[g] \in G : g_{3,3} \neq 0, g_{2,2}g_{3,3} - g_{2,3}g_{3,2} \neq 0\}$$

les fonctions  $\alpha_1, \alpha_2, U_{i,j}, 1 \leq i \neq j \leq 3$  sont régulières sur  $BB^-$ . On peut donc les exprimer en fonction des coordonnées  $g_{i,j}$  de la matrice  $g$ . En posant  $\Delta_{i,j}(g) := (-1)^{i+j} \text{Com}(g)_{i,j}$  et  $\Delta(g) := \det(g)$ , on trouve :

**Proposition 8.1** *Pour tout  $g \in BB^-$ ,*

$$\alpha_1(g) = \frac{g_{3,3}\Delta(g)}{\Delta_{1,1}^2(g)}$$

$$\alpha_2(g) = \frac{\Delta_{1,1}(g)}{g_{3,3}^2}$$

$$U_{1,2}(g) = \frac{\Delta_{2,1}(g)}{\Delta_{1,1}(g)}$$

$$U_{2,1}(g) = \frac{\Delta_{1,2}(g)}{\Delta_{1,1}(g)}$$

$$U_{1,3}(g) = \frac{g_{1,3}}{g_{3,3}}$$

$$U_{3,1}(g) = \frac{g_{3,1}}{g_{3,3}}$$

$$U_{2,3}(g) = \frac{g_{2,3}}{g_{3,3}}$$

$$U_{3,2}(g) = \frac{g_{3,2}}{g_{3,3}}$$

et réciproquement :

$$\frac{g_{1,1}}{g_{3,3}} = \alpha_1 \alpha_2 + \alpha_2 U_{1,2} U_{2,1} + U_{1,3} U_{3,1}$$

$$\frac{g_{1,2}}{g_{3,3}} = \alpha_2 U_{1,2} + U_{1,3} U_{3,2}$$

$$\frac{g_{1,3}}{g_{3,3}} = U_{1,3}$$

$$\frac{g_{2,1}}{g_{3,3}} = \alpha_2 U_{2,1} + U_{2,3} U_{3,1}$$

$$\frac{g_{2,2}}{g_{3,3}} = \alpha_2 + U_{2,3} U_{3,2}$$

$$\frac{g_{2,3}}{g_{3,3}} = U_{2,3}$$

$$\frac{g_{3,1}}{g_{3,3}} = U_{3,1}$$

$$\frac{g_{3,2}}{g_{3,3}} = U_{2,3}$$

## 8.2 Dérivations issues de l'action de l'algèbre de Lie

On choisit la base suivante de  $\mathfrak{g} = \mathfrak{sl}_3$  :

$$X_1 := \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad X_2 := \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad X_3 := \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$Y_1 := \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad Y_2 := \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad Y_3 := \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$H_1 := \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad H_2 := \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

Pour tout  $\xi \in U(\mathfrak{g})$ , on note  $\xi^{(g)}$  l'image de  $(\xi, 0) \in U(\mathfrak{g} \times 0)$  dans  $U(\mathfrak{g} \times \mathfrak{g})$ . Soit  $\Phi_0$  le morphisme d'algèbres :

$$\Phi_0 : U(\mathfrak{g} \times \mathfrak{g}) \rightarrow \mathcal{D}(\overline{G})$$

induit par l'action de  $\mathfrak{g} \times \mathfrak{g}$  sur  $\mathcal{O}_{\overline{G}}$ .

Comme  $\mathcal{D}(\overline{G}) \subseteq \Gamma(G, \mathcal{D}_{\overline{G}}) \cap \Gamma((\overline{G})_0, \mathcal{D}_{\overline{G}})$ , on peut exprimer les  $\Phi_0(\xi^{(g)})$ ,  $\xi \in \mathfrak{g}$ , en fonction des coordonnées de  $G$  et en fonction des coordonnées de  $(\overline{G})_0$  :

**Proposition 8.2** *Dans l'anneau  $\Gamma(G, \mathcal{D}_{\overline{G}})$ , on a :*

$$\begin{aligned} \Phi_0(Y_1^{(g)}) &= -g_{1,1} \frac{\partial}{\partial g_{2,1}} - g_{1,2} \frac{\partial}{\partial g_{2,2}} - g_{1,3} \frac{\partial}{\partial g_{2,3}}, \\ \Phi_0(Y_2^{(g)}) &= -g_{2,1} \frac{\partial}{\partial g_{3,1}} - g_{2,2} \frac{\partial}{\partial g_{3,2}} - g_{2,3} \frac{\partial}{\partial g_{3,3}}, \\ \Phi_0(Y_3^{(g)}) &= -g_{3,1} \frac{\partial}{\partial g_{2,1}} - g_{1,2} \frac{\partial}{\partial g_{3,2}} - g_{1,3} \frac{\partial}{\partial g_{3,3}}, \\ \Phi_0(X_1^{(g)}) &= -g_{2,1} \frac{\partial}{\partial g_{1,1}} - g_{2,2} \frac{\partial}{\partial g_{1,2}} - g_{2,3} \frac{\partial}{\partial g_{1,3}}, \\ \Phi_0(X_2^{(g)}) &= -g_{3,1} \frac{\partial}{\partial g_{2,1}} - g_{3,2} \frac{\partial}{\partial g_{2,2}} - g_{3,3} \frac{\partial}{\partial g_{2,3}}, \\ \Phi_0(X_3^{(g)}) &= -g_{3,1} \frac{\partial}{\partial g_{1,1}} - g_{3,2} \frac{\partial}{\partial g_{1,2}} - g_{3,3} \frac{\partial}{\partial g_{1,3}}, \\ \Phi_0(H_1^{(g)}) &= -g_{1,1} \frac{\partial}{\partial g_{1,1}} - g_{1,2} \frac{\partial}{\partial g_{1,2}} - g_{1,3} \frac{\partial}{\partial g_{1,3}} + g_{2,1} \frac{\partial}{\partial g_{2,1}} + g_{2,2} \frac{\partial}{\partial g_{2,2}} + g_{2,3} \frac{\partial}{\partial g_{2,3}}, \\ \Phi_0(H_2^{(g)}) &= -g_{2,1} \frac{\partial}{\partial g_{2,1}} - g_{2,2} \frac{\partial}{\partial g_{2,2}} - g_{2,3} \frac{\partial}{\partial g_{2,3}} + g_{3,1} \frac{\partial}{\partial g_{3,1}} + g_{3,2} \frac{\partial}{\partial g_{3,2}} + g_{3,3} \frac{\partial}{\partial g_{3,3}}. \end{aligned}$$

*Dans l'anneau  $\Gamma((\overline{G})_0, \mathcal{D}_{\overline{G}})$ , on a :*

$$\begin{aligned} \Phi_0(Y_1^{(g)}) &= 2U_{1,2}\alpha_1 \frac{\partial}{\partial \alpha_1} - U_{1,2}\alpha_2 \frac{\partial}{\partial \alpha_2} \\ &\quad - U_{1,3} \frac{\partial}{\partial U_{2,3}} - U_{1,2}^2 \frac{\partial}{\partial U_{1,2}} \\ &\quad - \alpha_1 \frac{\partial}{\partial U_{2,1}}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\Phi_0(Y_2^{(g)}) &= -U_{2,3}\alpha_1 \frac{\partial}{\partial \alpha_1} + 2U_{2,3}\alpha_2 \frac{\partial}{\partial \alpha_2} \\
&\quad + (U_{1,3} - U_{1,2}U_{2,3}) \frac{\partial}{\partial U_{1,2}} + U_{2,3}^2 \frac{\partial}{\partial U_{2,3}} - U_{1,3}U_{2,3} \frac{\partial}{\partial U_{1,3}} \\
&\quad - \alpha_2 (U_{2,1} \frac{\partial}{\partial U_{3,1}} + \frac{\partial}{\partial U_{3,2}}), \\
\Phi(Y_3^{(g)}) &= (U_{1,3} - 2U_{1,3}U_{3,2})\alpha_1 \frac{\partial}{\partial \alpha_1} + (U_{1,3} + U_{1,2}U_{2,3})\alpha_2 \frac{\partial}{\partial \alpha_2} \\
&\quad + (U_{1,3} - U_{1,2}U_{2,3})U_{1,2} \frac{\partial}{\partial U_{1,2}} + U_{1,3}U_{2,3} \frac{\partial}{\partial U_{2,3}} + U_{1,3}^2 \frac{\partial}{\partial U_{1,3}} \\
&\quad + \alpha_1 U_{2,3} \frac{\partial}{\partial U_{2,1}} - \alpha_2 (U_{1,2} \frac{\partial}{\partial U_{3,2}} + U_{1,2}U_{2,1} \frac{\partial}{\partial U_{3,1}}) - \alpha_1 \alpha_2 \frac{\partial}{\partial U_{3,1}}, \\
\Phi_0(X_1^{(g)}) &= -\frac{\partial}{\partial U_{1,2}} - U_{2,3} \frac{\partial}{\partial U_{1,3}}, \\
\Phi_0(X_2^{(g)}) &= -\frac{\partial}{\partial U_{2,3}}, \\
\Phi_0(X_3^{(g)}) &= -\frac{\partial}{\partial U_{1,3}}.
\end{aligned}$$

**Démonstration** : Par exemple, pour la deuxième liste de formules, on utilise que :

$$\Phi_0(\xi^{(g)}) = (\xi^{(g)}.\alpha_1) \frac{\partial}{\partial \alpha_1} + (\xi^{(g)}.\alpha_2) \frac{\partial}{\partial \alpha_2} + \sum_{1 \leq i \neq j \leq n} (\xi^{(g)}.U_{i,j}) \frac{\partial}{\partial U_{i,j}}$$

pour tout  $\xi \in \mathfrak{g}$ .

Q.e.d.

### 8.3 Un opérateur différentiel d'ordre 2

Comme  $(\overline{G})_0$  est isomorphe à un espace affine,

$$\Gamma((\overline{G})_0, \mathcal{D}_{\overline{G}}) = \mathbf{k}[\alpha_1, \alpha_2, U_{i,j} : 1 \leq i \neq j \leq 3][\partial_{\alpha_1}, \partial_{\alpha_2}, \partial_{U_{i,j}} : 1 \leq i \neq j \leq 3].$$

De plus, comme  $BB^-$  est un ouvert de  $G$ ,

$$\Gamma((\overline{G})_0, \mathcal{D}_{\overline{G}}) \subseteq \Gamma(BB^-, \mathcal{D}_{\overline{G}}) \subseteq \mathbf{k}(g_{i,j} : 1 \leq i, j \leq 3)[\partial_{g_{k,l}} : 1 \leq k, l \leq 3].$$

On peut donc exprimer en particulier  $\partial_{\alpha_1}$  et  $\partial_{\alpha_2}$  en fonction des fonctions coordonnées  $g_{i,j}$  et des dérivées partielles  $\partial_{g_{k,l}}$  :

**Proposition 8.3** *On a :*

$$\begin{aligned}
\partial_{\alpha_1} &= \frac{\Delta_{1,1}}{g_{3,3}} \partial_{g_{1,1}} \\
\partial_{\alpha_2} &= \frac{g_{3,3}}{\Delta_{1,1}} (\Delta_{2,2} \partial_{g_{1,1}} + \Delta_{1,1} \partial_{g_{2,2}} + \Delta_{2,1} \partial_{g_{1,2}} + \Delta_{1,2} \partial_{g_{2,1}}).
\end{aligned}$$

**Démonstration** : Posons  $(F_1, \dots, F_8) := (\alpha_1, \alpha_2, U_{1,2}, \dots, U_{3,2})$   
 et  $(x_1, \dots, x_8) := (\frac{g_{1,1}}{g_{3,3}}, \dots, \frac{g_{3,2}}{g_{3,3}})$ . Les coefficients de l'inverse de la matrice jacobienne :

$$\left( \frac{\partial F_i}{\partial x_j} \right)_{1 \leq i, j \leq 8}$$

donnent les coefficients des dérivations  $\partial_{\alpha_1}, \dots$  en fonction des dérivations  $\frac{\partial_{g_{i,j}}}{g_{3,3}} = g_{3,3} \partial_{g_{i,j}}, 1 \leq i, j \leq 3, (i, j) \neq (3, 3)$ . **Q.e.d.**

On remarque en particulier que :

$$\partial_{\alpha_1} \partial_{\alpha_2} = \partial_{g_{1,1}} (\Delta_{2,2} \partial_{g_{1,1}} + \Delta_{1,1} \partial_{g_{2,2}} + \Delta_{2,1} \partial_{g_{1,2}} + \Delta_{1,2} \partial_{g_{2,1}}) \in \Gamma(G, \mathcal{D}_{\overline{G}}) .$$

On en déduit :

**Théorème 8.4** *L'opérateur différentiel*

$$D_0 := \partial_{\alpha_1} \partial_{\alpha_2} = \partial_{g_{1,1}} (\Delta_{2,2} \partial_{g_{1,1}} + \Delta_{1,1} \partial_{g_{2,2}} + \Delta_{2,1} \partial_{g_{1,2}} + \Delta_{1,2} \partial_{g_{2,1}})$$

est défini sur  $\overline{G}$  tout entier.

**Remarques** :

- Les opérateurs différentiels  $\partial_{\alpha_i}$  ( $i = 1$  ou  $2$ ) ne sont pas dans  $\mathcal{D}(\overline{G})$  ;
- on peut vérifier que l'opérateur différentiel  $D_0$  n'est pas l'image d'un élément de  $U(\mathfrak{g} \times \mathfrak{g})$  car, par exemple, il ne commute pas avec l'élément de Casimir standard de  $U(\mathfrak{g} \times 0)$  (ou  $U(0 \times \mathfrak{g})$ ).

**Démonstration** : Puisque  $D_0$  appartient au  $G \times G$ -module rationnel  $\Gamma(G, \mathcal{D}_{\overline{G}})$ ,  $D_0$  est  $U(\mathfrak{n}^- \times \mathfrak{n}^-)$ -fini et  $U(\mathfrak{n} \times \mathfrak{n})$ -fini. Donc d'après le lemme de prolongement 8.5 qui suit, il existe un ouvert  $\Omega$ , contenant  $(\overline{G})_0$ ,  $U^- \times U^-$  et  $U \times U$ -stable, tel que  $D_0 \in \Gamma(\Omega, \mathcal{D}_{\overline{G}})$ . Or, comme  $G$  est engendré par  $U$  et  $U^-$ ,  $\Omega$  est  $G \times G$ -stable et  $\Omega = (G \times G) \cdot (\overline{G})_0 = \overline{G}$ .

**Q.e.d.**

Pour le lemme suivant, on note  $\mathfrak{g}_a$  l'algèbre de Lie du groupe  $\mathbb{G}_a$  et pour tout  $i \geq 0$ ,  $\mathfrak{g}_a^i$  le sous-espace  $\mathbf{k}d^i$  de l'algèbre enveloppante  $U(\mathfrak{g}_a)$  (pour un générateur quelconque  $d$  de  $\mathfrak{g}_a$ ).

**Lemme 8.5 (de prolongement)** *Soit  $Y$  une  $\mathbb{G}_a$ -variété. Soit  $\mathcal{F}$  un faisceau localement libre de  $\mathcal{O}_Y$ -modules et  $\mathbb{G}_a$ -linéarisé sur  $Y$ . Soit  $\Omega$  un ouvert de  $Y$ . Alors la  $\mathbb{G}_a$ -linéarisation de  $\mathcal{F}$  induit une structure de  $U(\mathfrak{g}_a)$ -module sur  $\Gamma(\Omega, \mathcal{F})$ .*

*Soit  $\sigma \in \Gamma(\Omega, \mathcal{F})$ . Si pour un certain  $n_0 \geq 0$   $\mathfrak{g}_a^{n_0} \cdot \sigma = 0$ , alors il existe  $\tilde{\Omega}$  un ouvert  $\mathbb{G}_a$ -stable de  $Y$  et  $\tilde{\sigma} \in \Gamma(\tilde{\Omega}, \mathcal{F})$  tel que :*

$$\tilde{\sigma}|_{\Omega} = \sigma$$

*(autrement dit  $\sigma$  se prolonge en une section définie sur un ouvert  $\mathbb{G}_a$ -stable).*

**Démonstration** : Notons  $\mu : \mathbb{G}_a \times Y \rightarrow Y$  le morphisme défini par l'action :  $(g, y) \mapsto g.y$  et  $p : \mathbb{G}_a \times Y \rightarrow Y$  la projection sur  $Y$ . Le faisceau  $\mathcal{F}$  est  $\mathbb{G}_a$ -linéarisé : cela signifie qu'il existe un isomorphisme de faisceaux de  $\mathcal{O}_{\mathbb{G}_a \times Y}$ -modules :

$$\Phi : \mu^* \mathcal{F} \xrightarrow{\sim} p^* \mathcal{F}$$

qui vérifie les conditions de [3, 1 §3 def. 1.6].

Pour tout  $n > 0$ , soit  $\mathbb{G}_{a,n} := \text{Spec}(\mathbf{k}[T]/(T^n))$  le  $n$ -ième voisinage infinitésimal de 0 dans  $\mathbb{G}_a$ . La restriction  $\Phi_n$  de  $\Phi$  à  $\mathbb{G}_{a,n} \times \Omega$  donne un isomorphisme :

$$\Phi_n : \mu^* \mathcal{F}|_{\mathbb{G}_{a,n} \times \Omega} \xrightarrow{\sim} p^* \mathcal{F}|_{\mathbb{G}_{a,n} \times \Omega}$$

or,  $p^* \mathcal{F}|_{\mathbb{G}_{a,n} \times \Omega} \simeq \mathbf{k}[T]/(T^n) \otimes_{\mathbf{k}} \mathcal{F}|_{\Omega}$ .

Notons  $\mu^* \sigma$  l'image de  $\sigma$  dans  $\Gamma(\mu^{-1}\Omega, \mu^* \mathcal{F})$  par le morphisme naturel  $\mathcal{F} \rightarrow \mu_* \mu^* \mathcal{F}$ .

On a pour tout  $n > 0$ ,  $\Phi_n(\mu^* \sigma) \in \mathbf{k}[T]/(T^n) \otimes_{\mathbf{k}} \Gamma(\Omega, \mathcal{F})$  (et  $\Phi_n(\mu^* \sigma) = \Phi_{n+1}(\mu^* \sigma) \bmod (T^n)$ ).

Notons  $d : \mathbf{k}[T] \rightarrow \mathbf{k}$ ,  $P(T) \mapsto P'(0)$ . On a  $\mathfrak{g}_a = \mathbf{k}d$  et pour tout  $n$ ,  $\mathfrak{g}_a^n = \mathbf{k}d^n$  où  $d^n : \mathbf{k}[T] \rightarrow \mathbf{k}$ ,  $P(T) \mapsto P^{(n)}(0)$ .

L'action de  $U(\mathfrak{g}_a)$  sur  $\Gamma(\Omega, \mathcal{F})$  est telle que :

$$d^n . \sigma = (d^n \otimes 1)(\Phi_n(\mu^* \sigma))$$

pour tout  $n > 0$ .

On a alors par hypothèse :

$$\forall n \geq n_0, (d^n \otimes 1)(\Phi_n(\mu^* \sigma)) = d^n . \sigma = 0 .$$

Donc il existe  $\sigma_1, \dots, \sigma_{n_0} \in \Gamma(\Omega, \mathcal{F})$  tels que :

$$\Phi_n(\mu^* \sigma) = 1 \otimes \sigma_1 + \dots + T^{n_0-1} \otimes \sigma_{n_0} \bmod (T^n)$$

pour tout  $n \geq n_0$  (il suffit de poser  $\sigma_i := (i-1)!d^{i-1}\sigma$  pour  $1 \leq i \leq n_0$ ).

Posons :

$$\sigma' := 1 \otimes \sigma_1 + T \otimes \sigma_2 + \dots + T^{n_0-1} \otimes \sigma_{n_0} \in \mathbf{k}[T] \otimes_{\mathbf{k}} \Gamma(\Omega, \mathcal{F}) = \Gamma(\mathbb{G}_a \times \Omega, p^* \mathcal{F}) .$$

Comme  $\Phi_n(\mu^* \sigma) = \sigma'|_{\mathbb{G}_{a,n} \times \Omega}$  pour tout  $n \geq n_0$ , comme  $\Phi$  est un isomorphisme de faisceaux et comme  $p^* \mathcal{F}$  est un faisceau localement libre, on a :

$$\mu^* \sigma \Big|_{\mu^{-1}\Omega \cap \mathbb{G}_a \times \Omega} = \Phi^{-1}(\sigma') \Big|_{\mathbb{G}_a \times \Omega \cap \mu^{-1}\Omega}$$

et donc (comme  $\mu^* \mathcal{F}$  est un faisceau), si l'on pose  $W := \mu^{-1}\Omega \cup \mathbb{G}_a \times \Omega$ , il existe  $\hat{\sigma} \in \Gamma(W, \mu^* \mathcal{F})$  tel que :  $\mu^* \sigma = \hat{\sigma} \Big|_{\mu^{-1}\Omega}$ .

Soit  $g \in \mathbb{G}_a$ . On pose  $i : Y \rightarrow \mathbb{G}_a \times Y$ ,  $y \mapsto (g, g^{-1}y)$ . On a :

$$\Omega \cup g\Omega \subseteq i^{-1}W \text{ et } \mu \circ i = \text{Id}_Y .$$

On a donc :

$$i^* \mu^* \sigma = \sigma ;$$

$$i^* \hat{\sigma} \in \Gamma(i^{-1}W, \mathcal{F}) ;$$

$$\sigma = i^* \hat{\sigma}|_{\Omega} .$$

En particulier, on a prolongé  $\sigma$  à l'ouvert  $\Omega \cup g\Omega$ . Puisqu'on peut le faire pour tout  $g \in \mathbb{G}_a$ ,  $\sigma$  se prolonge à l'ouvert  $\cup_{g \in \mathbb{G}_a} g\Omega$  qui est stable par  $\mathbb{G}_a$ .

**Q.e.d.**

#### 8.4 Opérateurs différentiels tordus

Soit  $\lambda = \lambda_1 \omega_1 + \lambda_2 \omega_2$  un caractère de  $\hat{T}$ . On notera  $\mathcal{D}_\lambda$  le faisceau d'opérateurs différentiels sur  $\overline{G}$  tordu par le faisceau inversible  $\mathcal{L}_\lambda$  :

$$\mathcal{D}_\lambda = \mathcal{L}_\lambda \otimes_{\mathcal{O}_{\overline{G}}} \mathcal{D}_{\overline{G}} \otimes_{\mathcal{O}_{\overline{G}}} \mathcal{L}_\lambda^{-1} .$$

Rappelons les notations du paragraphe 6.1 :

$$f_\lambda := f_1^{\lambda_1} \boxtimes f_2^{\lambda_2} \Big|_{(\overline{G})_0} \in \Gamma((\overline{G})_0, \mathcal{L}_\lambda) .$$

Notons  $\Phi_\lambda$  le morphisme d'algèbres :

$$\Phi_\lambda : U(\mathfrak{g} \times \mathfrak{g}) \rightarrow \mathcal{D}_\lambda(\overline{G})$$

induit par l'action de  $\mathfrak{g} \times \mathfrak{g}$  sur  $\mathcal{L}_\lambda$ . En utilisant les formules de changement de variables de la proposition 8.1, on obtient :

**Proposition 8.6** *Dans l'anneau  $\Gamma((\overline{G})_0, \mathcal{D}_\lambda)$ , on a :*

$$\begin{aligned} \Phi_\lambda(Y_1^{(g)}) &= f_\lambda \otimes \Phi_0(Y_1^{(g)}) \otimes f_\lambda^{-1} - \lambda_2 U_{1,2} , \\ \Phi_\lambda(Y_2^{(g)}) &= f_\lambda \otimes \Phi_0(Y_2^{(g)}) \otimes f_\lambda^{-1} - \lambda_1 U_{2,3} , \\ \Phi_\lambda(Y_3^{(g)}) &= f_\lambda \otimes \Phi_0(Y_3^{(g)}) \otimes f_\lambda^{-1} - \lambda_1 U_{1,3} + \lambda_2 (U_{1,2} U_{2,3} - U_{1,3}) , \\ \Phi_\lambda(X_1^{(g)}) &= f_\lambda \otimes \Phi_0(X_1^{(g)}) \otimes f_\lambda^{-1} , \\ \Phi_\lambda(X_2^{(g)}) &= f_\lambda \otimes \Phi_0(X_2^{(g)}) \otimes f_\lambda^{-1} , \\ \Phi_\lambda(X_3^{(g)}) &= f_\lambda \otimes \Phi_0(X_3^{(g)}) \otimes f_\lambda^{-1} . \end{aligned}$$

**Démonstration** : Si  $a \in \Gamma((\overline{G})_0, \mathcal{O}_{\overline{G}})$  et si  $\xi \in \mathfrak{g}$ , alors :

$$\xi^{(g)}.(af_\lambda) = (\xi^{(g)}.a + \frac{\xi^{(g)}.f_\lambda}{f_\lambda})f_\lambda .$$

**Q.e.d.**

On a aussi un opérateur différentiel tordu d'ordre 2 particulier :

**Lemme 8.7** Pour tout caractère  $\lambda$  de  $\widehat{T}$ ,

$$f_\lambda \otimes \partial_{\alpha_1} \partial_{\alpha_2} \otimes f_\lambda^{-1} \in \Gamma(\overline{G}, \mathcal{D}_\lambda) .$$

**Démonstration** : Posons  $D_\lambda := f_\lambda \otimes \partial_{\alpha_1} \partial_{\alpha_2} \otimes f_\lambda^{-1}$ . Comme pour le théorème 8.4, il suffit de vérifier que  $D_\lambda$  est  $U(\mathfrak{n}^- \times \mathfrak{n})$  et  $U(\mathfrak{n} \times \mathfrak{n}^-)$ -fini. Puisque  $D_\lambda \in \Gamma((\overline{G})_0, \mathcal{D}_\lambda)$  et que  $(\overline{G})_0$  est  $B \times B^-$ -stable, on sait déjà que  $D_\lambda$  est  $U(\mathfrak{n} \times \mathfrak{n}^-)$ -fini. Pour le côté  $U(\mathfrak{n}^- \times \mathfrak{n})$ -fini, nous allons montrer que  $D_\lambda \in \Gamma(B^-B, \mathcal{D}_\lambda)$ .

Remarquons que  $B^-B = \{[g] \in G : g_{1,1}\Delta_{3,3} \neq 0\}$ .

On pose :

$$f_\lambda^* : (g, g') \mapsto (g_{1,1})^{\lambda_1} (g'_{3,3})^{\lambda_2}$$

c'est une application définie sur un ouvert de  $M_3(\mathbf{k}) \times M_3(\mathbf{k})$ . Si on pose  $(\overline{G})_\infty := \{([g], [g']) \in \overline{G} : g_{1,1}g'_{3,3} \neq 0\}$ ,  $f_\lambda^*$  définit un élément de  $\Gamma((\overline{G})_\infty, \mathcal{L}_\lambda)$ .

Dans l'espace  $\Gamma(BB^- \cap B^-B, \mathcal{L}_\lambda)$ , on a l'égalité :

$$\begin{aligned} f_\lambda &= \begin{pmatrix} g_{3,3} \\ g_{1,1} \end{pmatrix}^{\lambda_1} \begin{pmatrix} g'_{1,1} \\ g'_{3,3} \end{pmatrix}^{\lambda_2} f_\lambda^* \\ &= \begin{pmatrix} g_{3,3} \\ g_{1,1} \end{pmatrix}^{\lambda_1} \begin{pmatrix} \Delta_{1,1} \\ \Delta_{3,3} \end{pmatrix}^{\lambda_2} f_\lambda^* . \end{aligned}$$

Donc en notant  $h$  la fraction rationnelle sur  $G$  :

$$\begin{pmatrix} g_{3,3} \\ g_{1,1} \end{pmatrix}^{-\lambda_1} \begin{pmatrix} \Delta_{1,1} \\ \Delta_{3,3} \end{pmatrix}^{-\lambda_2}$$

on a :

$$D_\lambda = f_\lambda^* \otimes h^{-1} D_0 h \otimes f_\lambda^{*-1} .$$

Calculons dans l'anneau  $\Gamma(BB^- \cap B^-B, \mathcal{D}_{\overline{G}})$  :

$$\begin{aligned} h^{-1} D_0 h &= h^{-1} \partial_{\alpha_1} \partial_{\alpha_2} h \\ &= h^{-1} \partial_{\alpha_1} h \partial_{\alpha_2} + h^{-1} \partial_{\alpha_1} \partial_{\alpha_2} (h) \\ &= h^{-1} h \partial_{\alpha_1} \partial_{\alpha_2} + h^{-1} \partial_{\alpha_1} (h) \partial_{\alpha_2} + h^{-1} \partial_{\alpha_1} (\partial_{\alpha_2} (h)) + h^{-1} \partial_{\alpha_2} (h) \partial_{\alpha_1} \end{aligned}$$

$$(1) \quad \begin{aligned} &= D_0 + h^{-1}\partial_{\alpha_1}(h)\partial_{\alpha_2} + h^{-1}\partial_{\alpha_2}(h)\partial_{\alpha_1} \\ &+ (h^{-1}\partial_{\alpha_1}(h))(h^{-1}\partial_{\alpha_2}(h)) + \partial_{\alpha_1}(h^{-1}\partial_{\alpha_2}(h)) \end{aligned}$$

Or :

$$\partial_{\alpha_1} = \frac{\Delta_{1,1}}{g_{3,3}}\partial_{g_{1,1}}$$

donc :

$$\begin{aligned} h^{-1}\partial_{\alpha_1}(h) &= -\lambda_1 \frac{\partial_{\alpha_1}(g_{3,3})}{g_{3,3}} - \lambda_2 \frac{\partial_{\alpha_1}(\Delta_{1,1})}{\Delta_{1,1}} + \frac{\partial_{\alpha_1}((g_{1,1})^{\lambda_1}(\Delta_{3,3})^{\lambda_2})}{(g_{1,1})^{\lambda_1}(\Delta_{3,3})^{\lambda_2}} \\ &= \frac{\partial_{\alpha_1}((g_{1,1})^{\lambda_1}(\Delta_{3,3})^{\lambda_2})}{(g_{1,1})^{\lambda_1}(\Delta_{3,3})^{\lambda_2}} \end{aligned}$$

$$(2) \quad \in \frac{\Delta_{1,1}}{g_{3,3}}\mathbf{k}[g_{i,j}, (g_{1,1})^{-1}, (\Delta_{3,3})^{-1}] .$$

De même, comme  $\partial_{\alpha_2} = \frac{g_{3,3}}{\Delta_{1,1}}(\Delta_{2,2}\partial_{g_{1,1}} + \Delta_{1,1}\partial_{g_{2,2}} + \Delta_{2,1}\partial_{g_{1,2}} + \Delta_{1,2}\partial_{g_{2,1}})$ , on a :

$$\begin{aligned} h^{-1}\partial_{\alpha_2}(h) &= -\lambda_1 \frac{\partial_{\alpha_2}(g_{3,3})}{g_{3,3}} - \lambda_2 \frac{\partial_{\alpha_2}(\Delta_{1,1})}{\Delta_{1,1}} + \frac{\partial_{\alpha_2}((g_{1,1})^{\lambda_1}(\Delta_{3,3})^{\lambda_2})}{(g_{1,1})^{\lambda_1}(\Delta_{3,3})^{\lambda_2}} \\ &= -\lambda_2 \frac{g_{3,3}^2}{\Delta_{1,1}} + \frac{\partial_{\alpha_2}((g_{1,1})^{\lambda_1}(\Delta_{3,3})^{\lambda_2})}{(g_{1,1})^{\lambda_1}(\Delta_{3,3})^{\lambda_2}} \end{aligned}$$

$$(3) \quad \in \frac{g_{3,3}}{\Delta_{1,1}}\mathbf{k}[g_{i,j}, (g_{1,1})^{-1}, (\Delta_{3,3})^{-1}] .$$

On déduit donc de (1), (2) et (3) que  $h^{-1}D_0h$  est de la forme :

$$a_{1,1}\partial_{g_{1,1}} + a_{2,2}\partial_{g_{2,2}} + a_{1,2}\partial_{g_{1,2}} + a_{2,1}\partial_{g_{2,1}}$$

où  $a_{1,1}, a_{2,2}, a_{1,2}, a_{2,1} \in \mathbf{k}[g_{i,j}, (g_{1,1})^{-1}, (\Delta_{3,3})^{-1}]$ .

En conséquence :  $h^{-1}D_0h \in \Gamma(B^{-1}B, \mathcal{D}_{\overline{G}})$ .

**Q.e.d.**

## 9 Irréductibilité des espaces de sections globales

**Théorème 9.1** *Pour tout caractère  $\lambda$  de  $\widehat{T}$ , le  $\mathcal{D}_{\lambda}(\overline{G})$ -module  $\Gamma(\overline{G}, \mathcal{L}_{\lambda})$  est nul ou irréductible.*

**Démonstration** : Soient  $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{Z}$  tels que  $\lambda = \lambda_1\omega_1 + \lambda_2\omega_2$  (d'où :  $\lambda^* = \lambda_2\omega_1 + \lambda_1\omega_2$ ).

Rappelons que

$$\Gamma(\overline{G}, \mathcal{L}_\lambda) = \bigoplus_{\substack{m_1, m_2 \geq 0 \\ \lambda^* - m_1\alpha_1 - m_2\alpha_2 \text{ dominant}}} U(\mathfrak{g} \times \mathfrak{g}) \cdot \alpha_1^{m_1} \alpha_2^{m_2} f_\lambda .$$

On note  $L(\nu)$  le  $\mathfrak{g}$ -module simple de plus haut poids  $\nu$  (pour tout caractère de  $\widehat{T}$ ,  $\nu$ , dominant). On a un isomorphisme de  $\mathfrak{g} \times \mathfrak{g}$ -modules irréductibles :

$$U(\mathfrak{g} \times \mathfrak{g}) \cdot \alpha_1^{m_1} \alpha_2^{m_2} f_\lambda \simeq \text{End}_{\mathbf{k}} L(\nu)$$

pour tout  $\nu = \lambda^* - m_1\alpha_1 - m_2\alpha_2$  dominant. En effet, la section  $\alpha_1^{m_1} \alpha_2^{m_2} f_\lambda$  est un  $\widehat{B} \times \widehat{B}^-$ -vecteur propre de poids  $(\nu, -\nu)$ .

Posons  $\sigma_\nu := \alpha_1^{m_1} \alpha_2^{m_2} f_\lambda \in \Gamma(BB^-, \mathcal{L}_\lambda)$  pour tout caractère  $\nu = \lambda^* - m_1\alpha_1 - m_2\alpha_2$  de  $\widehat{T}$ . Lorsque  $m_1, m_2 \geq 0$ ,  $\sigma_\nu \in \Gamma((\overline{G})_0, \mathcal{L}_\lambda)$  et lorsque, de plus,  $\nu$  est dominant,  $\sigma_\nu \in \Gamma(\overline{G}, \mathcal{L}_\lambda)$ .

Comme

$$\Gamma(\overline{G}, \mathcal{L}_\lambda) = \bigoplus_{\nu} U(\mathfrak{g} \times \mathfrak{g}) \cdot \sigma_\nu$$

(somme sur les caractères  $\nu$  dominants de  $\lambda^* - \mathbb{Z}_{\geq 0}\alpha_1 - \mathbb{Z}_{\geq 0}\alpha_2$ ), comme  $U(\mathfrak{g} \times \mathfrak{g})$  agit sur  $\Gamma(\overline{G}, \mathcal{L}_\lambda)$  via un morphisme d'algèbres  $U(\mathfrak{g} \times \mathfrak{g}) \rightarrow \mathcal{D}_\lambda(\overline{G})$  et comme les  $\mathfrak{g} \times \mathfrak{g}$ -modules  $U(\mathfrak{g} \times \mathfrak{g}) \cdot \sigma_\nu$  sont irréductibles, il suffit de montrer que

$$\sigma_{\nu'} \in \mathcal{D}_\lambda(\overline{G}) \cdot \sigma_\nu$$

pour tous  $\nu, \nu' \in \lambda^* - \mathbb{Z}_{\geq 0}\alpha_1 - \mathbb{Z}_{\geq 0}\alpha_2$  dominants.

Soient  $m_1, m_2, m'_1, m'_2$  des entiers positifs tels que  $\nu = \lambda^* - m_1\alpha_1 - m_2\alpha_2$ ,  $\nu' = \lambda^* - m'_1\alpha_1 - m'_2\alpha_2$ .

Soient  $\nu_1, \nu_2 \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$  tels que  $\nu = \nu_1\omega_1 + \nu_2\omega_2$ .

On a donc :

$$(4) \quad \nu_1 = \lambda_2 - 2m_1 + m_2 \text{ et } \nu_2 = \lambda_1 + m_1 - 2m_2 .$$

**1-er cas** :  $\nu' = \nu + \alpha_1 + \alpha_2$ .

Dans ce cas,  $m_1 = m'_1 + 1 > 0$  et  $m_2 = m'_2 + 1 > 0$ .

D'après le lemme 8.7, l'opérateur  $D_\lambda := f_\lambda \otimes D_0 \otimes f_\lambda^{-1}$  est dans  $\mathcal{D}_\lambda(\overline{G})$ .

Or :

$$\begin{aligned} D_\lambda \cdot \sigma_\nu &= (f_\lambda \otimes D_0 \otimes f_\lambda^{-1}) \cdot \alpha_1^{m_1} \alpha_2^{m_2} f_\lambda \\ &= D_0(\alpha_1^{m_1} \alpha_2^{m_2}) f_\lambda \\ &= m_1 m_2 \alpha_1^{m_1-1} \alpha_2^{m_2-1} f_\lambda \\ &= m_1 m_2 \sigma_{\nu'} \end{aligned}$$

et  $\sigma_{\nu'} \in \mathcal{D}_\lambda(\overline{G}) \cdot \sigma_\nu$ .

Pour les cas suivants, on va utiliser des opérateurs différentiels de  $\mathcal{D}_\lambda(\overline{G})$  particuliers.

Comme le faisceau  $\mathcal{L}_\lambda$  est  $\widehat{G} \times \widehat{G}$ -linéarisé, l'algèbre  $\mathcal{D}_\lambda(\overline{G})$  est un  $\widehat{G} \times \widehat{G}$ -module. Si  $w \in \widehat{G}$ , on note :

$$\tilde{w} := (w, w) \in \widehat{G} \times \widehat{G}$$

et on pose :  $D_\lambda^w := \tilde{w}.D_\lambda = \tilde{w}.(D_\lambda(\tilde{w}^{-1}.\cdot)) \in \mathcal{D}_\lambda(\overline{G})$ .

Soit

$$c := \frac{1}{3}(H_1 + H_2) + \frac{1}{9}(H_1^2 + H_2^2 + H_1H_2) + \frac{1}{3}(Y_1X_1 + Y_2X_2 + Y_3X_3) \in U(\mathfrak{g}) .$$

L'élément  $c$  est dans  $Z(\mathfrak{g})$  le centre de l'algèbre enveloppante  $U(\mathfrak{g})$  et, pour tout caractère  $\mu = \mu_1\omega_1 + \mu_2\omega_2$ , agit comme une homothétie sur le  $\mathfrak{g}$ -module irréductible  $L(\mu)$  de plus haut poids  $\mu$  :

$$\forall v \in L(\mu), c.v = \chi_\mu(c)v$$

où  $\chi_\mu(c) = \frac{\mu_1 + \mu_2}{3} + \frac{\mu_1^2 + \mu_1\mu_2 + \mu_2^2}{9}$ .

Identifions l'élément  $c \in Z(\mathfrak{g})$  avec l'élément  $(c, 0)$  du centre  $Z(\mathfrak{g} \times \mathfrak{g})$  de l'algèbre enveloppante de  $\mathfrak{g} \times \mathfrak{g}$ .

**Lemme 9.2** Soit  $f \in \mathbf{k}[U_{i,j} : 1 \leq i \neq j \leq 3] \subseteq \mathbf{k}[(\overline{G})_0]$ . Pour tout caractère  $\nu$  de  $\widehat{T}$  qui appartient à l'ensemble :

$$\lambda^* - \mathbb{Z}_{\geq 0}\alpha_1 - \mathbb{Z}_{\geq 0}\alpha_2 ,$$

on a l'égalité suivante dans  $\Gamma((\overline{G})_0, \mathcal{L}_\lambda)$  :

$$(5) \quad (c - \chi_\nu(c))(f\sigma_\nu)$$

$$(6) \quad = \frac{1}{3} \left( \alpha_1 \partial_{U_{1,2}} \partial_{U_{2,1}} \right.$$

$$(7) \quad \left. + \alpha_2 (\partial_{U_{2,3}} + U_{1,2} \partial_{U_{1,3}}) (\partial_{U_{3,2} + U_{2,1}} \partial_{U_{3,1}}) \right.$$

$$(8) \quad \left. + \alpha_1 \alpha_2 \partial_{U_{1,3}} \partial_{U_{3,1}} \right) (f)\sigma_\nu$$

**Démonstration** : Notons  $F := Z_1 \cap Z_2$  l'unique  $G \times G$ -orbite fermée de  $\overline{G}$  et  $\mathcal{I}_F := \mathcal{I}_{Z_1} + \mathcal{I}_{Z_2}$  son idéal de définition dans  $\mathcal{O}_{\overline{G}}$ .

On remarque que pour tout caractère  $\mu$  de  $\widehat{T}$ , on a un isomorphisme de  $\mathfrak{g} \times \mathfrak{g}$ -modules :

$$(9) \quad \Gamma((\overline{G})_0, \mathcal{L}_{\mu^*}) / \Gamma((\overline{G})_0, \mathcal{L}_{\mu^*} \otimes \mathcal{I}_F)$$

$$(10) \quad \simeq \Gamma((\overline{G})_0 \cap F, \mathcal{L}_{\mu^*}|_F)$$

$$(11) \quad \simeq \Gamma(BB^-/B^- \times B^-B/B, \mathcal{L}_{G/B^- \times G/B}(\mu, -\mu))$$

$$(12) \quad \simeq M_{(\mu, -\mu)}^*$$

où  $\mathcal{L}_{G/B^- \times G/B}(\mu, -\mu)$  est le faisceau inversible sur la variété de drapeaux  $G/B^- \times G/B$  associé au caractère  $(\mu, -\mu)$  de  $\widehat{T} \times \widehat{T}$  et  $M_{(\mu, -\mu)}^*$  est le dual du  $\mathfrak{g} \times \mathfrak{g}$ -module de Verma de plus haut poids  $(\mu, -\mu)$ .

Tout élément de  $Z(\mathfrak{g} \times \mathfrak{g})$  agit sur  $M_{(\mu, -\mu)}^*$  comme une homothétie donc on a pour tout  $\sigma \in \Gamma((\overline{G})_0, \mathcal{L}_{\nu^*})$ ,

$$(c - \chi_{\nu}(c)) \cdot \sigma \in \alpha_1 \Gamma((\overline{G})_0, \mathcal{L}_{\nu^*}) + \alpha_2 \Gamma((\overline{G})_0, \mathcal{L}_{\nu^*}) .$$

D'un autre côté, grâce à la proposition 8.1 on peut exprimer l'opérateur  $\Phi_{\nu^*}(c) \in \Gamma(\overline{G}, \mathcal{D}_{\nu^*})$  en fonction des coordonnées  $\alpha_1, \alpha_2, U_{i,j}, 1 \leq i \neq j \leq 3$  :

$$\begin{aligned} \Phi_{\nu^*}(c) &= \frac{1}{3} \sigma_{\nu} \otimes \left( \alpha_1 \partial_{U_{1,2}} \partial_{U_{2,1}} \right. \\ &\quad \left. + \alpha_2 (\partial_{U_{2,3}} + U_{1,2} \partial_{U_{1,3}}) (\partial_{U_{3,2} + U_{2,1}} \partial_{U_{3,1}}) \right. \\ &\quad \left. + \alpha_1 \alpha_2 \partial_{U_{1,3}} \partial_{U_{3,1}} \right) + \dots \otimes \sigma_{\nu}^{-1} \end{aligned}$$

où les ... sont mis pour des opérateurs dans  $\Gamma((\overline{G})_0, \mathcal{D}_{\overline{G}})$  qui ne changent pas les degrés en  $\alpha_1$  et en  $\alpha_2$  des monômes :

$$\alpha_1^{n_1} \alpha_2^{n_2} \prod_{1 \leq i \neq j \leq 3} U_{i,j}^{n_{i,j}} .$$

On a ainsi l'égalité de l'énoncé dans :

$$\Gamma((\overline{G})_0, \mathcal{L}_{\nu^*}) \subseteq \Gamma((\overline{G})_0, \mathcal{L}_{\lambda}) .$$

**Q.e.d.**

**2-ème cas :**  $\nu' = \nu + \alpha_2$

Dans ce cas,  $m_2 = m'_2 + 1 \geq 1$ .

$$\text{Soit } s_1 := \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \in \widehat{G} .$$

Grâce aux formules de changement de variables de la proposition 8.1, on trouve :

$$\begin{aligned} \tilde{s}_1^{-1} \cdot \sigma_{\nu} &= \frac{g_{3,3}^{\nu_2 - \lambda_1} \Delta_{3,3}^{m_1} \Delta_{2,2}^{\nu_1}}{\Delta_{1,1}^{\lambda_2}} f_{\lambda} \\ &= \alpha_1^{m_1} \alpha_2^{m_2} (\alpha_1 + U_{1,2} U_{2,1})^{\nu_1} f_{\lambda} \\ &= (\alpha_1 + U_{1,2} U_{2,1})^{\nu_1} \sigma_{\nu} \\ &D_{\lambda}(\tilde{s}_1^{-1} \sigma_{\nu}) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= m_2 \alpha_1^{m_1-1} \alpha_2^{m_2-1} (\alpha_1 + U_{1,2} U_{2,1})^{\nu_1-1} (m_1 (\alpha_1 + U_{1,2} U_{2,1}) + \nu_1 \alpha_1) f_\lambda \\
&= m_2 (\alpha_1 + U_{1,2} U_{2,1})^{\nu_1-1} (m_1 \sigma_{\nu+\rho} + \nu_1 \sigma_{\nu+\alpha_2}) f_\lambda \\
&\quad D_\lambda^{s_1}(\sigma_\nu) \\
&= \tilde{s}_1 \cdot (D_\lambda(\tilde{s}_1^{-1} \cdot \sigma_\nu)) \\
&= m_2 \alpha_1^{m_1-1} \alpha_2^{m_2-1} ((m_1 + \nu_1) \alpha_1 + m_1 U_{1,2} U_{2,1}) f_\lambda \\
&= m_2 (m_1 U_{1,2} U_{2,1} \sigma_{\nu+\rho} + (m_1 + \nu_1) \sigma_{\nu+\alpha_2}) .
\end{aligned}$$

On a donc grâce au lemme 9.2 :

$$(13) \quad (c - \chi_{\nu+\rho}(c)) \cdot D_\lambda^{s_1}(\sigma_\nu)$$

$$(14) \quad = m_2 \left( \frac{m_1}{3} + (m_1 + \nu_1) (\chi_{\nu+\alpha_2}(c) - \chi_{\nu+\rho}(c)) \right) \sigma_{\nu+\alpha_2}$$

$$(15) \quad = m_2 \left( \frac{m_1}{3} - (m_1 + \nu_1) \frac{\nu_1 + 2}{3} \right) \sigma_{\nu+\alpha_2}$$

$$(16) \quad = -\frac{m_2}{3} ((m_1 + \nu_1)(\nu_1 + 1) + \nu_1) \sigma_{\nu+\alpha_2} .$$

Or, comme  $\nu$  est dominant,  $\nu_1 \geq 0$ . De plus,  $m_1 \geq 0, m_2 \geq 1$  donc

$$\frac{m_2}{3} ((m_1 + \nu_1)(\nu_1 + 1) + \nu_1) > 0$$

et

$$\sigma_{\nu+\alpha_2} \in \mathcal{D}_\lambda(\overline{G}) \cdot \sigma_\nu .$$

De même on traite le cas où  $\nu' = \nu + \alpha_1$ .

**3-ème cas :**  $\nu' = \nu - \alpha_1$ .

$$\text{On pose } w := s_1 s_2 \text{ où } s_2 := \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix} .$$

Comme précédemment, on peut calculer  $D_\lambda^w(\sigma_\nu)$ . Et on trouve :

$$\begin{aligned}
&(c - \chi_{\nu+\rho}(c))(c - \chi_{\nu+\alpha_1}(c))(c - \chi_{\nu-\alpha_1+\alpha_2}(c))(c - \chi_{\nu+\alpha_2}(c))(c - \chi_\nu(c)) \cdot D_\lambda^w \sigma_\nu \\
&= r \sigma_{\nu-\alpha_1}
\end{aligned}$$

où :

$$r =$$

$$-\frac{2}{3^5} (\nu_2 + 3)(\nu_1 + m_1 + 1)(\nu_1 + \nu_2 + 1)(\nu_1 + \nu_2 + m_2 + 2)(2\nu_1 + \nu_2 + 3)\nu_1(\nu_1 - 1)$$

$> 0$

et donc  $\sigma_{\nu-\alpha_1} \in \mathcal{D}_\lambda(\overline{G}).\sigma_\nu$ .

De même, on traite le cas où  $\nu' = \nu - \alpha_2$ .

**4-ème cas :**  $\nu' = \rho$  et  $\nu = 0$ .

On a :

$$(17) \quad (c - \chi_{2\rho})(c - \chi_{\rho+\alpha_1})(c - \chi_\rho)D_\lambda^{w_0}\sigma_\rho = -\frac{2}{3}(m_1 + 4)(m_2 + 4)\sigma_0 .$$

Donc  $\sigma_0 \in \mathcal{D}_\lambda(\overline{G}).\sigma_\rho$ .

**Cas général :** Rappelons que :

$$(18) \quad \nu = \nu' + (m'_1 - m_1)\alpha_1 + (m'_2 - m_2)\alpha_2 .$$

On raisonne par récurrence sur  $|m'_1 - m_1| + |m'_2 - m_2|$ .

Si  $m'_1 = m_1$  et  $m'_2 = m_2$ ,  $\sigma_{\nu'} = \sigma_\nu$  et il n'y a rien à montrer.

Si  $m'_1 < m_1$ , et  $m'_2 < m_2$ , d'après le 1-er cas,

$$\sigma_{\nu+\rho} \in \mathcal{D}_\lambda(\overline{G}).\sigma_\nu$$

et par hypothèse de récurrence,

$$\sigma_{\nu'} \in \mathcal{D}_\lambda(\overline{G}).\sigma_{\nu+\rho} \subseteq \mathcal{D}_\lambda(\overline{G}).\sigma_\nu .$$

Si  $m'_1 < m_1$  et  $m'_2 \geq m_2$ ,  $\nu + \alpha_1$  est dominant, d'après le deuxième cas,

$$\sigma_{\nu+\alpha_1} \in \mathcal{D}_\lambda(\overline{G}).\sigma_\nu$$

et par hypothèse de récurrence :

$$\sigma_{\nu'} \in \mathcal{D}_\lambda(\overline{G}).\sigma_{\nu+\alpha_1} \subseteq \mathcal{D}_\lambda(\overline{G}).\sigma_\nu .$$

De même si  $m'_1 \geq m_1$  et  $m'_2 < m_2$ ,  $\sigma_{\nu'} \in \mathcal{D}_\lambda(\overline{G}).\sigma_\nu$ .

Si  $m'_1 > m_1$  et  $m'_2 \geq m_2$ , alors si  $m'_2 = m_2$ ,  $\nu - \alpha_1$  est dominant et d'après le 3-ème cas et l'hypothèse de récurrence :

$$\sigma_{\nu'} \in \mathcal{D}_\lambda(\overline{G}).\sigma_{\nu-\alpha_1} \subseteq \mathcal{D}_\lambda(\overline{G}).\sigma_\nu .$$

Si  $m'_2 > m_2$ , alors  $\nu - \alpha_1$  ou  $\nu - \alpha_2$  est dominant et encore d'après le 3-ème cas et l'hypothèse de récurrence :

$$\sigma_{\nu'} \in \mathcal{D}_\lambda(\overline{G}).\sigma_\nu$$

ou bien ni  $\nu - \alpha_1$  ni  $\nu - \alpha_2$  ne sont dominants et alors nécessairement :  $\nu' = 0$  et  $\nu = \rho$  (car  $\nu' < \nu$  et  $\nu$  et  $\nu'$  sont dominants) ; on utilise alors le 4-ème cas pour conclure. **Q.e.d.**

## 10 Autre cas

Notons  $S_3$  l'espace des matrices  $3 \times 3$  symétriques à coefficients dans  $\mathbf{k}$ . Soit  $\bar{\mathcal{C}}$  la variété :

$$\bar{\mathcal{C}} := \{([S], [S']) \in \mathbb{P}(S_3) \times \mathbb{P}(S_3) : SS' \in \mathbf{k}I_3\}$$

c'est la variété des « coniques complètes ». C'est une compactification magnifique (de rang 2) du  $SL_3$ -espace homogène  $PGL_3/PSO_3$  (on peut identifier  $gPSO_3 \in PGL_3/PSO_3$  et le couple  $({}^tgg, g^{-1}{}^tg^{-1})$ ).

Le théorème 9.1 est encore vrai si l'on remplace  $\bar{G}$  par  $\bar{\mathcal{C}}$ .

Pour tout faisceau inversible  $\mathcal{L}$  sur  $\bar{\mathcal{C}}$ , soit

$$\mathcal{D}_{\mathcal{L}} := \mathcal{L} \otimes \mathcal{D}_{\bar{\mathcal{C}}} \otimes \mathcal{L}^{-1} .$$

**Théorème 10.1** *Pour tout faisceau inversible  $\mathcal{L}$  sur  $\bar{\mathcal{C}}$ , le  $\mathcal{D}_{\mathcal{L}}(\bar{\mathcal{C}})$ -module  $\Gamma(X, \mathcal{L})$  est soit nul soit irréductible.*

**Démonstration** : C'est la même démonstration que dans le cas de  $\bar{G}$ . Cette fois, on utilise la grosse cellule :

$$(\bar{\mathcal{C}})_0 := \{([S], [S']) \in \bar{\mathcal{C}} : S_{1,1}S'_{3,3} \neq 0\} .$$

On note pour tout  $g \in SL_3(\mathbf{k})$ , pour tout  $([S], [S']) \in \bar{\mathcal{C}}$ ,

$$g \cdot ([S], [S']) := ({}^t g^{-1} S g^{-1}, [g S^t g])$$

$$\text{et } U := \left\{ \begin{pmatrix} 1 & u_{1,2} & u_{2,3} \\ & 1 & u_{1,3} \\ & & 1 \end{pmatrix} : \forall 1 \leq i < j \leq 3, u_{i,j} \in \mathbf{k} \right\} .$$

On a un isomorphisme de variétés algébriques :

$$U \times \mathbb{A}^2 \rightarrow (\bar{\mathcal{C}})_0$$

$$\left( u, \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \right) \mapsto u \cdot \left( \begin{bmatrix} 1 \\ x \\ xy \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} xy \\ y \\ 1 \end{bmatrix} \right) .$$

On remarque alors que

$$\partial_x \partial_y \in \Gamma(\bar{\mathcal{C}}, \mathcal{D}_{\bar{\mathcal{C}}}) .$$

Cet opérateur joue alors le même rôle que  $D_0$  dans le cas de  $\bar{G}$ . **Q.e.d.**

## Références

- [1] C. De Concini and C. Procesi. Complete symmetric varieties. *in Invariant theory (Montecatini, 1982), Lecture Notes in Math.*, 996 :1–44, 1983.
- [2] G. Kempf. The grothendieck-cousin complex of an induced representation. *Adv. in Math.*, 29(3) :310–396, 1978.
- [3] D. Mumford, J. Fogarty, and F. Kirwan. Geometric invariant theory. *Ergebnisse der Mathematik und ihrer Grenzgebiete*, 34, 1994.