GÉOMÉTRIE BIRATIONNELLE ÉQUIVARIANTE DES GRASSMANNIENNES

M. FLORENCE

Abstract. Soit K un corps infini et A une K-algèbre de dimension finie n. Soit $0 < r < n$ un entier. Le résultat principal de cet article est le suivant. Sous certaines hypothèses sur A (satisfaites si A est étale), la grassmannienne $\mathbb{G}(r, A)$ est K-birationnelle, de manière $\mathrm{PGL}_1(A)$-équivariante, au produit de $\mathbb{G}(\mathrm{pgcd}(r, n), A)$ par un espace affine (théorème 3.3). On en déduit par torsion plusieurs résultats nouveaux sur les variétés de Severi-Brauer généralisées, liés à la conjecture d'Amitsur. Les plus significatifs sont les suivants.
i) Si A est une K-algèbre simple centrale de degré n, et si $0 < r < n$ est un entier, la r-ième variété de Severi-Brauer généralisée $SB(r, A)$ est K-birationnelle au produit de $SB(\mathrm{pgcd}(r, n), A)$ par un K-espace affine de dimension convenable.
ii) Si A et B sont deux K-algèbres simples centrales de degrés premiers entre eux, $SB(A \otimes_K B)$ est birationnelle au produit de $SB(A) \times_K SB(B)$ par un K-espace affine de dimension convenable.

Mots-clés. Géométrie birationnelle, grassmanniennes, variétés de Severi-Brauer, conjecture d'Amitsur.

Introduction

Soit K un corps. En 1955, Amitsur a formulé la conjecture suivante ([1]) . Soient A, B deux K-algèbres simples centrales de même degré n (racine carrée de la dimension sur K). Alors les variétés de Severi-Brauer associées à A et B (notées respectivement $SB(A)$ et $SB(B)$) sont K-birationnelles si et seulement si les sous-groupes cycliques engendrés par les classes de A et de B dans le groupe de Brauer de K coïncident. Amitsur a démontré l'implication 'seulement si' de sa conjecture. En dépit de résultats partiels obtenus notamment par Roquette, Tregub et Krashen (cf. par exemple [7] pour une exposition de ces résultats), cette conjecture reste encore largement ouverte. Il n'est cependant pas difficile de démontrer que, si les sous-groupes engendrés par les classes de A et de B dans le groupe de Brauer de K coïncident, alors $SB(A)$ et $SB(B)$ sont *stablement* birationnellement isomorphes. En effet, soit E le corps des fonctions de $SB(A)$. L'extension E/K déploie A, donc aussi B. Par suite, $SB(B) \times_K E$ est E-isomorphe à l'espace projectif $\mathbb{P}^{n-1}_E$. Donc $SB(B) \times_K SB(A)$ est K-birationnellement isomorphe à $\mathbb{P}^{n-1}_K \times_K SB(A)$. En inversant les rôles de A et de B, on obtient que $\mathbb{P}^{n-1}_K \times_K SB(A)$ est K-birationnelle à $\mathbb{P}^{n-1}_K \times_K SB(B)$, cqfd. En général, nous dirons ici que deux K-variétés X et Y sont stablement K-birationnelles s'il existe deux entiers n et m tels que $X \times_K \mathbb{P}^n_K$ est K-birationnelle à $Y \times_K \mathbb{P}^m_K$. En s'inspirant de la preuve précédente, le lecteur pourra démontrer les propositions suivantes.

i) Soient A, B deux K-algèbres simples centrales de degrés premiers entre eux. Alors $SB(A \otimes_K B)$ est stablement K-birationnelle à $SB(A) \times_K SB(B)$.

ii) Soit A une K-algèbre simple centrale de degré n. Soit $r < n$ un entier positif. Soit $SB(r, A)$ la r-ième variété de Severi-Brauer généralisée associée à A; c'est la K-forme de la grassmannienne $\mathbb{G}(r, n)$ qui représente les idéaux à droite de A, de dimension rn. Alors $SB(r, A)$ et $SB(pgcd(n, r), A)$ sont stablement K-birationnelles.

On peut formuler les propriétés plus fines suivantes, et se demander si elles sont vraies.

i') Soient A, B deux K-algèbres simples centrales de degrés premiers entre eux. Alors $SB(A \otimes_K B)$ est K-birationnelle au produit de $SB(A) \times_K SB(B)$ par un espace projectif (ou affine, c'est pareil) de dimension convenable.

ii') Mêmes hypothèses que ii), avec la conclusion: $SB(r,A)$ est K-birationnelle au produit de $SB(pgcd(n,r),A)$ par un espace affine de dimension convenable.

De même que la conjecture d'Amitsur, le passage de i) à i') (resp. de ii) à ii')) peut être vu comme un cas particulier d'un problème de 'simplification par l'espace affine': si X et Y sont deux K-variétés telles que $X \times_K \mathbb{A}^1_K$ est K-birationnelle à $Y \times_K \mathbb{A}^1_K$, est-il vrai que X et Y sont K-birationnelles? Même si X est K-rationnelle, on sait que la réponse à cette question, qui n'est alors autre que la conjecture de Zariski, est en général négative ([2]).
Dans cette article, nous étudions la géométrie birationnelle des grassmanniennes de K-algèbres de dimension finie. Plus précisément, soit A une K-algèbre de dimension finie. Pour tout entier r compris entre 0 et la dimension de A, la grassmannienne $\mathbb{G}(r,A)$ des r-plans de A est naturellement munie d'une action du K-groupe algébrique $\mathrm{GL}_1(A)$, dont les K-points sont les éléments inversibles de A. On s'intéresse, par une approche nouvelle à la connaissance de l'auteur, à certaines propriétés birationnelles de cette action. Le résultat principal est le théorème 3.3. Il affirme que, sous certaines hypothèses sur A (vérifiées si A/K est étale), la K-variété $\mathbb{G}(r,A)$ est K-birationnelle, de manière $\mathrm{GL}_1(A)$-équivariante, au produit de $\mathbb{G}(pgcd(r,n),A)$ par un espace affine sur lequel $\mathrm{GL}_1(A)$ agit trivialement. Les isomorphismes birationnels obtenus sont non triviaux. Leur complexité dépend de façon cruciale du nombre d'étapes de l'algorithme d'Euclide, prenant en entrée les entiers n et r, et donnant leur plus grand commun diviseur en sortie.
L'article est structuré comme suit. Dans une première partie, nous introduisons la notion de *bonne* K-algèbre (définition 2.5) ainsi que les variétés auxiliaires $G(r,s,A)$ associées à une bonne K-algèbre A (définition 2.8). On dégage ensuite certaines relations birationnelles et équivariantes entre ces variétés (définition 2.14), qui motivent a posteriori leur introduction. Dans une seconde partie, nous exploitons ces relations pour en déduire le théorème principal (théorème 3.3). Dans la dernière section, nous exposons quelques applications, en majeure partie nouvelles, de ce théorème. Entre autres, nous démontrons la validité de i') et de ii'), ainsi que, dans certains cas, la conjecture d'Amitsur généralisée énoncée par Krashen dans [7].

1. Notations, rappels

Dans toute la suite, on désigne par K un corps infini, et par $\overline{K}$ une clôture algébrique de K. Introduisons un bref dictionnaire destiné à alléger les énoncés. Ainsi, les termes 'vectoriel', 'algèbre', 'variété', 'variété rationnelle', 'groupe algébrique' signifient respectivement, sauf mention du contraire, 'K-espace vectoriel de dimension finie', 'K-algèbre de dimension finie', 'K-schéma de type fini', 'variété K-rationnelle', 'K-groupe algébrique linéaire'. Si X et Y sont deux variétés (resp. vectoriels), on note par $X \times Y$ (resp. $X \otimes Y$) la variété $X \times_K Y$ (resp. le vectoriel $X \otimes_K Y$). Soit V un vectoriel. On note V^* le dual de V, et $\mathbb{A}(V)$ l'espace affine de V; c'est la variété dont le foncteur des points est $\mathbb{A}(V)(A) = V \otimes_K A$ pour toute algèbre commutative A (non nécessairement de dimension finie). Si m est un entier positif, on note $\mathbb{G}(m, V)$ la grassmannienne des m-sous-vectoriels de V. On rappelle que sa dimension est $m(\dim V - m)$. L'espace projectif de V est $\mathbb{G}(1, V)$; on le désigne par $\mathbb{P}(V)$. Si $E \subset V$ est un sous-vectoriel, on pose $E^\perp = \{\phi \in V^*; \phi(E) = 0\}$. Si A est une algèbre, on note $\mathrm{GL}_1(A)$ le groupe algébrique dont l'ensemble des points dans une algèbre commutative B est le groupe des éléments inversibles de $A \otimes_K B$. On note $\mathrm{PGL}_1(A)$ le quotient $\mathrm{GL}_1(A)/\mathbb{G}_\mathrm{m}$; c'est l'ouvert de $\mathbb{P}(A)$ formé des droites dont tout élément non nul est inversible pour la multiplication de A. Le groupe algébrique $\mathrm{GL}_1(A)$ possède deux représentations évidentes qui seront considérées dans la suite. D'une part, il agit par multiplication à gauche sur le vectoriel A. D'autre part, il agit sur le vectoriel A^* par la formule

$$(a.\phi)(x) = \phi(a^{-1}x),$$

pour $a \in \mathrm{GL}_1(A)(K)$, $\phi \in A^*$ et $x \in A$. Pour tout entier m, ces représentations induisent une action naturelle de $\mathrm{PGL}_1(A)$ sur $\mathbb{G}(m, A)$ et sur $\mathbb{G}(m, A^*)$, capitale dans ce qui suit. Enfin, nous noterons les applications rationnelles par des flèches pleines, et non par des pointillés, comme l'on a coutume de faire. Ceci est justifié par le fait que la quasi-totalité des flèches considérées dans cet article sont des applications rationnelles, et ne saurait prêter à confusion.

2. Quelques outils

Définition 2.1. *Soit G un groupe algébrique, agissant sur une variété non vide X de façon génériquement libre (i.e. il existe un ouvert Zariski dense de X, G-stable, où l'action est libre). Par un théorème de Gabriel ([4], Exposé V, Théorème 8.1), il existe alors un ouvert Zariski dense $U \subset X$, G-stable, tel que le quotient $U \longrightarrow U/G$ existe dans la catégorie des variétés, et est un G-torseur. Un ouvert U possédant cette propriété sera appelé bon pour l'action de G sur X.*

Définition 2.2. *Soit A une algèbre et M un A-module à gauche. Soit E (resp. X) un sous-vectoriel de A (resp. de M). Le produit de X par E, noté $E.X$, est par définition l'image de la composée*

$$E \otimes X \longrightarrow A \otimes M \longrightarrow M,$$

où le premier morphisme est le produit tensoriel des deux inclusions, et le second la loi donnant l'action de A sur M. On définit de manière semblable un produit $X.E$ pour les A-modules à droite.

Nous introduisons maintenant les variétés auxiliaires $G'(r,s,U)$. Ces variétés jouent un rôle crucial dans la stratégie que nous adpotons pour démontrer le théorème 3.3. Leur intérêt peut sembler obscur à ce stade. Il deviendra, nous l'espérons, plus clair au fil de la lecture de cet article.

Définition 2.3. *Soit A une algèbre de dimension n. Notons par*

$$<.,.>: A \times A^* \longrightarrow K$$

l'accouplement canonique. Soient r,s,u trois entiers positifs tels que $n \geq su+r$ et $n \geq ru+s$. Soit $U \subset A$ un sous-vectoriel de dimension u. On appelle $G'(r,s,U)$ la sous-variété fermée de $\mathbb{G}(r,A^*) \times \mathbb{G}(s,A)$ donnée par

$$\{(X,Y) \in \mathbb{G}(r,A^*) \times \mathbb{G}(s,A); < Y.U, X >= 0\}.$$

Lemme 2.4. *On conserve les objets et les notations de la définition 2.3. Les assertions suivantes sont vraies.*

i) $G'(r,s,U)$ est munie d'une action naturelle de $\mathrm{PGL}_1(A)$.
ii) La fibre de la première projection $G'(r,s,U) \longrightarrow \mathbb{G}(r,A^*)$ (resp. de la seconde projection $G'(r,s,U) \longrightarrow \mathbb{G}(s,A)$) en $X \in \mathbb{G}(r,A^*)(K)$ (resp. $Y \in \mathbb{G}(s,A)(K)$) est $\mathbb{G}(s,(U.X)^\perp)$ (resp. $\mathbb{G}(r,(Y.U)^\perp)$). On a l'assertion analogue en remplaçant K par une extension quelconque de K.
iii) Les deux projections précédentes sont dominantes.

Démonstration. Pour le premier point, on constate tout de suite que l'action naturelle de $\mathrm{PGL}_1(A)$ sur $\mathbb{G}(r,A^*) \times \mathbb{G}(s,A)$ laisse $G'(r,s,U)$ stable. L'assertion ii) est immédiate. On a $\dim \mathbb{G}(s,(U.X)^\perp) = s(\dim(U.X)^\perp - s) \geq s(n-ru-s) \geq 0$, et l'inégalité analogue pour $\mathbb{G}(r,(Y.U)^\perp)$, d'où iii). □

Nous pouvons maintenant définir la notion de bonne algèbre, capitale dans ce qui suit.

Définition 2.5. *Soit A une algèbre, dont on note n la dimension. On dit qu'un sous-vectoriel U de A, de dimension u, est bon si la propriété qui suit est vraie. Pour tous entiers positifs r et s tels que $n \geq ru+s$ et $n \geq su+r$, il existe $(X,Y) \in G'(r,s,U)(K)$ tels que $U.X$ et $Y.U$ sont de dimensions respectives ur et us (les plus grandes possibles).*
On dit que A est bonne si, pour tout entier d compris entre 1 et $n-1$, les propriétés

suivantes sont satisfaites.
(*) L'algèbre A possède un bon sous-vectoriel de dimension d.
(**) L'action de $\mathrm{PGL}_1(A)$ sur $\mathbb{G}(d, A)$ est génériquement libre.

A titre d'exercice, le lecteur pourra construire des algèbres qui ne satisfont aucune des deux conditions définissant une algèbre bonne. L'auteur de ces lignes pense que toute algèbre séparable (i.e. de radical de Jacobson nul) est bonne. Cependant, il n'a pu le montrer que dans le cas d'une algèbre étale, ce qui est suffisant pour obtenir de nombreuses applications.

Lemme 2.6. *Soit A une algèbre étale. Alors A est bonne.*

Démonstration. Montrons d'abord que A satisfait la condition (*) de la définition 2.5. Soit n la dimension de A. Soient r, s, u des entiers positifs tels que $n \geq ru + s$ et $n \geq su + r$. Supposons $s \geq r$; l'autre cas se traite de même. Soit t un générateur de A comme algèbre (un tel élément existe car K est infini). Une base de A comme vectoriel est donc $(1, t, t^2, \ldots, t^{n-1})$. Posons

$$X :=< 1, t, \ldots, t^{n-r-1} >^{\perp} \subset A^*,$$

$$Y :=< 1, t, \ldots, t^{s-1} > \subset A,$$

$$U :=< 1, t^s, t^{2s}, \ldots t^{(u-1)s} > \subset A.$$

On vérifie tout de suite que:
i) $Y.U =< 1, t, \ldots, t^{su-1} > \subset < 1, t, \ldots, t^{n-r-1} >$,
ii) $(X, Y) \in G'(r, s, U)(K)$.
Pour conclure, il reste donc à voir que $U.X$ est de dimension ur. Pour ce faire, on peut supposer $r \geq 1$. Par l'absurde, supposons le morphisme canonique $U \otimes X \longrightarrow U.X$ non injectif. On aurait alors une relation de la forme

$$\phi_0 + t^s\phi_1 + t^{2s}\phi_2 + \ldots + t^{ms}\phi_m = 0,$$

où les ϕ_i appartiennent à X, avec $0 < m < u$ et $\phi_m \neq 0$. Soit $i < m$ un entier positif. Puisqu'on a $n-r-us \geq 0$ et $s \geq r$, ϕ_i est nulle sur $< t^{n-r-(m-i)s}, t^{n-r-(m-i)s+1}, \ldots, t^{n-1-(m-i)s} > \subset < 1, t, \ldots, t^{n-1-r} >$. Par suite, $t^{is}\phi_i$ est nulle sur $< t^{n-r-ms}, t^{n-r-ms+1}, \ldots, t^{n-1-ms} >$. Donc $t^{ms}\phi_m$ est nulle sur ce sous-espace, ce qui implique que ϕ_m est nulle sur $< t^{n-r}, t^{n-r+1}, \ldots, t^{n-1} >$. Puisqu'elle appartient à X, elle est donc identiquement nulle, une contradiction.
Montrons maintenant que A satisfait la condition (**) de la définition 2.5. Soit $1 \leq r \leq n-1$ un entier. Montrons que l'action de $\mathrm{PGL}_1(A)$ sur $\mathbb{G}(r, A)$ est génériquement libre. Soit $K' := K(X_0, \ldots, X_{n-1})$ une extension transcendante pure de K, et $A' := K'[T]/ < T^n + X_{n-1}T^{n-1} + \ldots + X_1T + X_0 >$. La propriété à

démontrer étant de nature géométrique, et deux algèbres étales de même dimension étant géométriquement isomorphes, on peut remplacer K par K' et A par A'. On peut donc supposer que A et K sont les seules sous-algèbres de A. Il nous faut montrer que le stabilisateur schématique du point générique de $\mathbb{G}(r, A)$ est trivial. Puisque les points K-rationnels de $\mathbb{G}(r, A)$ sont Zariski-denses, il suffit de montrer que le stabilisateur schématique de tout point K-rationnel de $\mathbb{G}(r, A)$ est trivial. Soit donc $E \in \mathbb{G}(r, A)(K)$. Soit $\overline{K}[\epsilon]$ la $\overline{K}$-algèbre des nombres duaux. Vérifions que l'ensemble des $\overline{K}[\epsilon]$-points du stabilisateur schématique de E ne contient que l'élément neutre, i.e. que

$$\{a \in \mathrm{PGL}_1(A)(\overline{K}[\epsilon]), a.(E \otimes \overline{K}[\epsilon]) = E \otimes \overline{K}[\epsilon]\} = \{1\}.$$

L'ensemble

$$\{a \in A, a.E \subset E\}$$

est une sous-algèbre de A: c'est donc K ou A. On voit facilement que ce dernier cas est exclu. Puisque $\overline{K}[\epsilon]$ est libre sur K, on en déduit

$$\overline{K}[\epsilon] = \{a \in A \otimes \overline{K}[\epsilon], a.(E \otimes \overline{K}[\epsilon]) \subset (E \otimes \overline{K}[\epsilon])\},$$

d'où l'assertion. □

Lemme 2.7. *Soit A une bonne algèbre, de dimension n. Les assertions suivantes sont vraies.*

i) Soit u un entier compris entre 0 et n. Il existe un ouvert non vide de $\mathbb{G}(u, A)$ dont tout point rationnel est un bon sous-vectoriel.
ii) Soit $0 \leq u_1 < u_2 < \ldots < u_j \leq n$ une collection de j entiers. Soit $\mathbb{D}_{u_1,\ldots,u_j}(A)$ la variété des drapeaux de A, de type $(u_1, \ldots, u_j)$. Il existe un ouvert non vide de $\mathbb{D}_{u_1,\ldots,u_j}(A)$ dont tout point rationnel $(U_1, \ldots, U_j)$ est formé de bons sous-vectoriels.

Démonstration. Montrons i). Soient r et s deux entiers positifs tels que $n \geq ru + s$ et $n \geq su + r$. Il suffit d'exhiber un ouvert non vide $\mathcal{U}_{r,s} \subset \mathbb{G}(u, A)$ tel que, pour tout $U \in \mathcal{U}_{r,s}(K)$, il existe $(X, Y) \in G'(r, s, U)(K)$ tel que $U.X$ et $Y.U$ sont de dimensions respectives ur et us. En effet, l'intersection des $\mathcal{U}_{r,s}$, pour r, s comme il précède, jouit alors de la propriété requise.
Soient donc r et s deux entiers positifs tels que $n \geq ru + s$ et $n \geq su + r$. Soit U_0 un bon sous-vectoriel de dimension u. Soit $(X, Y) \in G'(r, s, U_0)(K)$ tels que $U_0.X$ et $Y.U_0$ sont de dimensions respectives ur et us. Soit $Z \subset A$ un sous-vectoriel, de dimension $ur + s$, tel que $(U_0.X)^{\perp} \cap Z = Y$. Il existe un ouvert $\mathcal{U} \subset \mathbb{G}(u, A)$, contenant U_0, tel que $U.X$ soit de dimension maximale ur pour tout $U \in \mathcal{U}(K)$ (de façon explicite, $\mathcal{U}$ peut s'obtenir comme le lieu où un déterminant ne s'annule

pas). Quitte à rétrécir $\mathcal{U}$, on peut supposer que $(U.X)^\perp \cap Z$ est de dimension $s = \dim(Z) - \dim(U.X)$ pour tout $U \in \mathcal{U}(K)$. Pour $U = U_0$, le vectoriel $((U.X)^\perp \cap Z).U$ est égal à $Y.U_0$, de dimension su. Rétrécissant encore $\mathcal{U}$, on peut supposer que $((U.X)^\perp \cap Z).U$ est de dimension su pour tout $U \in \mathcal{U}(K)$. Pour $U \in \mathcal{U}(K)$, posons $Y = (U.X)^\perp \cap Z$. On a alors bien $(X, Y) \in G'(r, s, U)(K)$; de plus $U.X$ et $Y.U$ sont de dimensions respectives ur et us.
Montrons ii). Pour $i = 1 \dots j$, soit $\pi_i : \mathbb{D}_{u_1,\dots,u_j}(A) \longrightarrow \mathbb{G}(u_i, A)$ le morphisme qui à un drapeau $(U_1, \dots, U_j)$ associe U_i. D'après i), il existe, pour tout $i = 1 \dots j$, un ouvert non vide $\mathcal{U}_i \subset \mathbb{G}(u_i, A)$ dont tout point rationnel est un bon sous-vectoriel. L'intersection des $\pi_i^{-1}(\mathcal{U}_i)$ fait alors l'affaire. □

Définition 2.8. *Soit A une bonne algèbre, de dimension n. Soit $U \subset A$ un bon sous-vectoriel, de dimension u. Soient r et s deux entiers positifs tels que $n \geq ru + s$ et $n \geq su + r$. Les couples $(X, Y) \in G'(r, s, U)$ tels que $U.X$ et $Y.U$ sont de dimensions respectives ur et us forment alors un ouvert, non vide, de $G'(r, s, U)$. Cet ouvert est noté $G(r, s, U)$. Sa clôture Zariski, dans $G'(r, s, U)$, est notée $\overline{G}(r, s, U)$.*

Lemme 2.9. *Soit A une bonne algèbre, de dimension n. Soit $U \subset A$ un bon sous-vectoriel, de dimension u. Soient r et s des entiers positifs tels que $n \geq ru + s$ et $n \geq su + r$. Soit $\pi'_1 : G'(r, s, U) \longrightarrow \mathbb{G}(r, A^*)$ (resp. $\pi'_2 : G'(r, s, U) \longrightarrow \mathbb{G}(s, A)$) la projection canonique, et π_1 (resp. π_2) sa restriction à $G(r, s, U)$. Les propriétés suivantes sont vraies.*

i) $G(r, s, U)$ est munie d'une action naturelle de $\mathrm{PGL}_1(A)$.
ii) Les morphismes π_1 et π_2 sont dominants.
iii) $G(r, s, U)$ est une variété géométriquement connexe et lisse.
Sa dimension est $r(n - r) + s(n - s) - sru$.
iv) Le fermé $\overline{G}(r, s, U) \subset G'(r, s, U)$ est l'unique composante irréductible $C' \subset G'(r, s, U)$ telle que la restriction de π'_1 et de π'_2 à C' est dominante.

Démonstration. Pour i), on vérifie sans difficulé que l'ouvert $G(r, s, U) \subset G'(r, s, U)$ est stable par l'action de $\mathrm{PGL}_1(A)$.
Pour démontrer les autres points, on peut supposer K algébriquement clos.
La définition de $G'(r, s, U)$ montre que cette variété est localement définie par rsu équations. Par suite, toutes ses composantes irréductibles (donc aussi celles de $G(r, s, U)$) sont de dimension $\geq s(n - s) + r(n - r) - rsu$. Nous allons montrer dans un instant que l'espace tangent en tout point K-rationnel de $G(r, s, U)$ est de dimension $r(n - r) + s(n - s) - rsu$. Par ce qui vient d'être dit, cela implique que $G(r, s, U)$ est lisse et que toutes ses composantes irréductibles sont de dimension

$r(n-r)+s(n-s)-rsu$. Soit C une telle composante. Par le lemme 2.4 ii), la fibre de $\pi_{1|C}$ en $(X,Y) \in C(K)$ est un ouvert non vide de $\mathbb{G}(s,(UX)^{\perp})$, donc de dimension $s(n-ru-s)$. Un calcul immédiat montre que $s(n-ru-s)+\dim \mathbb{G}(r,A^*) = \dim C$; $\pi_{1|C}$ est donc dominante. Vu que la fibre de π_1 en tout point K-rationnel est irréductible (lemme 2.4 ii)), ceci n'est possible que si C est la seule composante irréductible de $G(r,s,U)$. Ceci démontre ii) et iii). L'assertion d'unicité du point iv) résulte alors de ce que les fibres géométriques de π'_1 (resp. de π'_2) sont irréductibles. Soit donc $(X,Y) \in G(r,s,U)(K)$. On sait que l'espace tangent en X (resp. Y) de $\mathbb{G}(r,A^*)$ (resp. de $\mathbb{G}(s,A)$) s'identifie canoniquement à $\mathrm{Hom}(X,A^*/X)$ (resp. à $\mathrm{Hom}(Y,A/Y)$). En différenciant les équations définissant $G'(r,s,U)$, on voit que son espace tangent en $(X,Y) \in G(r,s,U)(K)$ n'est autre que le noyau du morphisme

$$\Theta : \mathrm{Hom}(X,A^*/X) \oplus \mathrm{Hom}(Y,A/Y) \longrightarrow (X \otimes Y \otimes U)^*,$$
$$(f,g) \mapsto (x \otimes y \otimes z \mapsto f(x)(yz) + x(g(y)z)).$$

Ce morphisme est surjectif. En effet, soit $\phi \in X^*$ et $\psi \in (Y \otimes U)^*$. Puisque le morphisme 'multiplication' $Y \otimes U \longrightarrow Y.U$ est un isomorphisme, il existe $\psi' \in A^*$ tel que $\psi'(yz) = \psi(y \otimes z)$ pour tous $y \in Y$, $z \in U$. Soit $f : X \longrightarrow A^*/X$ le morphisme envoyant $x \in X$ sur la classe de $\phi(x)\psi'$. On a $\Theta(f,0) = \phi \otimes \psi$. Puisque ϕ et ψ sont arbitraires, cela montre la surjectivité de Θ. L'espace tangent en (X,Y) à $G(r,s,U)$ est donc de dimension $r(n-r)+s(n-s)-sru$, cqfd. □

Pour illustrer l'utilisation que nous ferons des bons sous-vectoriels, commençons par un petit lemme.

Lemme 2.10. *Soit A une bonne algèbre, de dimension n. Soit $n = qd$ une décomposition de n en produit de deux entiers. Soit $U \subset A$ un bon sous-vectoriel, de dimension $q-1$. Alors l'application rationnelle $\mathrm{PGL}_1(A)$-équivariante*

$$\Phi_U : \mathbb{G}(d,A) \longrightarrow \mathbb{G}(d,A^*),$$
$$Y \mapsto (Y.U)^{\perp},$$

est birationnelle.

Démonstration. Soient $\pi_1 : G(d,d,U) \longrightarrow \mathbb{G}(d,A^*)$ et $\pi_2 : G(d,d,U) \longrightarrow \mathbb{G}(d,A)$ les projections canoniques, dominantes par le lemme 2.9 ii). D'après le lemme 2.4 ii), la fibre générique de π_1 est un point (grassmannienne des sous-espaces de dimension d d'un vectoriel de dimension $n-(q-1)d = d$), donc π_1 est birationnelle puisque sa source est intègre. On peut exhiber l'inverse birationnel de π_1 comme

$$X \in \mathbb{G}(d,A^*) \mapsto (X,(U.X)^{\perp}) \in G(d,d,U).$$

De même, π_2 est birationnelle. Puisque $\Phi_U = \pi_1 \circ \pi_2^{-1}$, on a l'assertion voulue. □

Nous allons maintenant développer quelques résultats plus raffinés.

Lemme 2.11. *Les objets et notations sont ceux de la définition 2.8. Distinguons deux cas.*
i) Supposons $r \geq s$. Ecrivons la division euclidienne $r = sq + t$. Soit $U' \subset A$ un bon sous-vectoriel, contenant U, de dimension $u + q$. Il existe alors un ouvert non vide $\mathcal{U} \subset G(r, s, U)$ tel que, pour tout $(X, Y) \in \mathcal{U}(\overline{K})$, les deux conditions suivantes sont vérifiées.
a) $\dim(Y.U') = s(u + q)$,
b) $\dim(X \cap (Y.U')^{\perp}) = t$.

ii) Supposons $s \geq r$. Ecrivons la division euclidienne $s = rq + t$. Soit $U' \subset A$ un bon sous-vectoriel, contenant U, de dimension $u + q$. Il existe alors un ouvert non vide $\mathcal{U} \subset G(r, s, U)$ tel que, pour tout $(X, Y) \in \mathcal{U}(\overline{K})$, les deux conditions suivantes sont vérifiées.
a) $\dim(U'.X) = r(u + q)$,
b) $\dim(Y \cap (U'.X)^{\perp}) = t$.

Démonstration. Donnons la démonstration de i); celle de ii) est identique. Les conditions a) et b) définissent un sous-schéma ouvert $\mathcal{U} \subset G(r, s, U)$, pour la raison suivante. Supposons satisfaite la condition a), qui est ouverte (elle exprime que le morphisme linéaire 'multiplication' $Y \otimes U' \longrightarrow A$ est injectif). Soient A et B les vectoriels X et $(Y.U')^{\perp}$, vus comme sous-vectoriels de $C := (Y.U)^{\perp}$. La condition b) exprime alors simplement que $A^{\perp} \subset C^*$ et $B^{\perp} \subset C^*$ (de dimensions respectives $n - su - r$ et $n - su - (n - s(u + q)) = sq$) sont en somme directe. C'est aussi une condition ouverte. Il nous faut donc montrer que $\mathcal{U}$ est non vide. Soit $\pi : G(r, s, U) \longrightarrow \mathbb{G}(s, A)$ la projection, dominante par le lemme 2.9. Il existe donc $(X', Y) \in G(r, s, U)(K)$ satisfaisant a). La fibre de π en (X', Y) est un ouvert non vide de $\mathbb{G}(r, (Y.U)^{\perp})$. L'ouvert formé des $X \in \mathbb{G}(r, (Y.U)^{\perp})$ satisfaisant b) étant aussi non vide, n'importe quel point rationnel X de l'intersection de ces deux ouverts est tel que (X, Y) satisfait a) et b), cqfd. □

Lemme 2.12. *Soit A une bonne algèbre, de dimension n. Soient r, s, u trois entiers positifs, tels que $n \geq su + r$ et $n \geq ru + s$.*
Supposons d'abord $r \geq s$. Ecrivons la division euclidienne $r = qs + t$. Soient $U \subset U' \subset A$ deux bons sous-vectoriels, de dimensions u et $u + q$. On a

$$t(u + q) + s \leq s(u + q) + t = su + r \leq n;$$

on peut donc considérer la variété $G'(t,s,U')$. D'après le lemme 2.11, on a une application rationnelle bien définie

$$\phi : G(r,s,U) \longrightarrow G'(t,s,U'),$$

au moyen de la formule

$$(X,Y) \mapsto (X \cap (Y.U')^{\perp}, Y).$$

Cette application rationnelle est à valeurs dans $\overline{G}(t,s,U')$.

Si $s > r$, écrivons la division euclidienne $s = rq + t$. Soient $U \subset U' \subset A$ deux bons sous-vectoriels, de dimensions u et $u+q$. On définit alors de manière semblable une application rationnelle

$$\phi : G(r,s,U) \longrightarrow G'(r,t,U'),$$

au moyen de la formule

$$(X,Y) \mapsto (X, Y \cap (U'.X)^{\perp}).$$

Cette application rationnelle est à valeurs dans $\overline{G}(r,t,U')$.

Démonstration. Supposons $r \geq s$; l'autre cas se traite de même. Puisque $G(r,s,U)$ est irréductible (lemme 2.9 iii)), ϕ prend ses valeurs dans une composante irréductible $C \subset G'(t,s,U')$. Soient $\pi : G(r,s,U) \longrightarrow \mathbb{G}(s,A)$ et $\pi' : G'(t,s,U') \longrightarrow \mathbb{G}(s,A)$ les projections. On a $\pi' \circ \phi = \pi$. Puisque π est dominante (lemme 2.9 ii)), on en déduit que la restriction de π' à C est dominante. D'après le lemme 2.9 iv), on en tire la conclusion souhaitée. □

Proposition 2.13. *Soit A une bonne algèbre, de dimension n. Soient r,s,u trois entiers positifs, tels que $n \geq su + r$ et $n \geq ru + s$.*
Supposons d'abord $r \geq s$. Ecrivons la division euclidienne $r = qs + t$. Soient $U \subset U' \subset A$ deux bons sous-vectoriels, de dimensions u et $u+q$. Soit

$$\phi : G(r,s,U) \longrightarrow \overline{G}(t,s,U')$$

l'application rationnelle du lemme 2.12. Les propositions suivantes sont vraies.

i) ϕ est $\mathrm{PGL}_1(A)$- équivariante.
ii) Soit $\mathcal{U}$ l'ouvert du lemme 2.11. Soit L une extension de K. La fibre du morphisme $\phi_{|\mathcal{U}}$ en $(X,Y) \in G(t,s,U')(L)$ est un ouvert de $\mathbb{G}_L(sq,(Y.U)^{\perp}/X)$.
iii) ϕ est dominante.

Si $s > r$, écrivons la division euclidienne $s = qr + t$. Soient $U \subset U' \subset A$ deux bons sous-vectoriels, de dimensions u et $u + q$. Soit

$$\phi : G(r, s, U) \longrightarrow \overline{G}(r, t, U')$$

l'application rationnelle du lemme 2.12. On a alors les assertions analogues à i), ii) et iii).

Démonstration. La première assertion est une vérification facile. Montrons ii). La fibre de $\phi_{|\mathcal{U}}$ en (X, Y) est un ouvert du sous-schéma fermé des $X' \in \mathbb{G}_L(r, A^*)$ vérifiant $X \subset X' \subset (Y.U)^{\perp}$, qui n'est autre que $\mathbb{G}_L(sq, (Y.U)^{\perp}/X)$. Cette fibre est donc soit vide, soit de dimension $sq(n - us - t - sq) = sq(n - us - r)$. D'après le calcul de dimension fait au point ii) du lemme 2.9, on en déduit que la clôture de l'image de ϕ est de dimension

$$\dim \mathcal{U} - sq(n - us - r) = s(n - s) + r(n - su - r) - sq(n - us - r)$$

$$= s(n - s) + t(n - su - r) = s(n - s) + t(n - s(u + q) - t) = \dim \overline{G}(t, s, U').$$

Ceci démontre iii). □

Définition 2.14. *Soit A une bonne algèbre, de dimension n. Soient r, s, u trois entiers positifs, tels que $n \geq su + r$ et $n \geq ru + s$.*
Supposons d'abord $r \geq s$. Ecrivons la division euclidienne $r = qs + t$. Soient $U \subset U' \subset A$ deux bons sous-vectoriels, de dimensions u et $u + q$. Le lemme 2.13 permet de définir une application rationnelle, dominante, $\mathrm{PGL}_1(A)$*- équivariante, à fibres rationnelles*

$$\phi_{U,U'} : G(r, s, U) \longrightarrow G(t, s, U').$$

Supposons maintenant $s > r$. Ecrivons la division euclidienne $s = qr + t$. Soient $U \subset U' \subset A$ deux bons sous-vectoriels, de dimensions u et $u + q$. On définit de la même manière une application rationnelle, dominante, $\mathrm{PGL}_1(A)$*- équivariante, à fibres rationnelles*

$$\phi_{U,U'} : G(r, s, U) \longrightarrow G(r, t, U').$$

Remarque 2.15. On peut itérer la construction précédente, en suivant l'algorithme d'Euclide, et composer les applications rationnelles $\phi_{U,U'}$ entre elles. De façon précise, cela est l'objet de la prochaine section, où nous démontrons le théorème principal.

3. Le théorème principal

Définition 3.1. *Soit A une bonne algèbre, de dimension n. Soit $1 < r < n$ un entier. Soit*

$$n = r_0, r = r_1, r_2, \dots, r_s = \mathrm{pgcd}(n, r), r_{s+1} = 0$$

la suite d'entiers définie selon l'algorithme d'Euclide, en prenant pour r_{i+1} le reste de la division euclidienne de r_{i-1} par r_i. Soient q_i les entiers tels que $r_{i-1} = q_i r_i + r_{i+1}$. Soit

$$\mathcal{U} = (U_0 = \{0\} \subset U_1 \subset U_2 \subset ... \subset U_s)$$

un drapeau formé de bons sous-vectoriels de A, tels que $\dim(U_i) - \dim(U_{i-1}) = q_i$ (un tel drapeau existe par le lemme 2.7).
Supposons s impair. D'après la définition 2.14, il existe alors une suite d'applications rationnelles dominantes, $\mathrm{PGL}_1(A)$-équivariantes, à fibres rationnelles:

$$\phi_{U_0,U_1} : G(r_0, r_1, U_0) \longrightarrow G(r_2, r_1, U_1),$$
$$\phi_{U_1,U_2} : G(r_2, r_1, U_1) \longrightarrow G(r_2, r_3, U_2),$$
$$\phi_{U_2,U_3} : G(r_2, r_3, U_2) \longrightarrow G(r_4, r_3, U_3),$$
$$\dots$$
$$\phi_{U_{s-1},U_s} : G(r_{s-1}, r_s, U_{s-1}) \longrightarrow G(r_{s+1}, r_s, U_s).$$

Puisque $G(r_0, r_1, U_0)$ (resp. $G(r_{s+1}, r_s, U_s)$) est un ouvert de $\mathbb{G}(r, A)$ (resp. $\mathbb{G}(\mathrm{pgcd}(r, n), A)$), on peut voir la composée de toutes ces applications comme une application rationnelle, dominante, $\mathrm{PGL}_1(A)$-équivariante, à fibres rationnelles

$$\Phi_{\mathcal{U}} : \mathbb{G}(r, A) \longrightarrow \mathbb{G}(\mathrm{pgcd}(r, n), A).$$

Si s est pair, le même procédé fournit une application rationnelle, dominante, $\mathrm{PGL}_1(A)$-équivariante, à fibres rationnelles

$$\Phi_{\mathcal{U}} : \mathbb{G}(r, A) \longrightarrow \mathbb{G}(\mathrm{pgcd}(r, n), A^*).$$

Proposition 3.2. *Soit A une bonne algèbre, de dimension n. Soient r, s, u trois entiers positifs et non nuls, tels que $n \geq ru + s$ et $n \geq su + r$.*
Supposons $r \geq s$. Ecrivons la division euclidienne $r = qs + t$. Soit $U \subset U' \subset A$ deux bons sous-vectoriels, de dimensions u et $u + q$. Soit

$$\phi_{U,U'} : G(r, s, U) \longrightarrow G(t, s, U')$$

l'application rationnelle, dominante et $\mathrm{PGL}_1(A)$-équivariante de la définition 2.14. Les propositions suivantes sont vraies.

i) L'action de $\mathrm{PGL}_1(A)$ *sur la source et le but de* $\phi_{U,U'}$ *est génériquement libre.*

Soit $\tilde{G}(r,s,U)$ *(resp.* $\tilde{G}(t,s,U')$*) un ouvert de* $G(r,s,U)$ *(resp.* $G(t,s,U')$*), bon pour l'action de* $\mathrm{PGL}_1(A)$*, et tel que* $\phi_{U,U'}$ *induise un morphisme partout défini*

$$\phi : \tilde{G}(r,s,U) \longrightarrow \tilde{G}(t,s,U').$$

ii) Le morphisme quotient

$$\overline{\phi} : \tilde{G}(r,s,U)/\mathrm{PGL}_1(A) \longrightarrow \tilde{G}(t,s,U')/\mathrm{PGL}_1(A)$$

induit une extension transcendante pure sur les corps de fonctions.

Si $s > r$*, écrivons la division euclidienne* $s = qr + t$*. Soit* $U \subset U' \subset A$ *deux bons sous-vectoriels, de dimensions* u *et* $u + q$*. Soit*

$$\phi_{U,U'} : G(r,s,U) \longrightarrow G(r,t,U')$$

l'application rationnelle, dominante et $\mathrm{PGL}_1(A)$*-équivariante de la définition 2.14. On a alors les assertions analogues à i) et ii).*

Démonstration. On suppose $r \geq s$; l'autre cas se traite de même.
i) Soit $d = \mathrm{pgcd}(r,s)$. On peut itérer la construction de la définition 2.14 pour construire une application rationnelle, dominante, $\mathrm{PGL}_1(A)$-équivariante

$$\theta : G(r,s,U) \longrightarrow \mathbb{G}(d,A)$$

ou bien

$$\theta : G(r,s,U) \longrightarrow \mathbb{G}(d,A^*) = \mathbb{G}(n-d,A).$$

Par un argument élémentaire laissé au lecteur, ceci montre que l'action de $\mathrm{PGL}_1(A)$ sur $G(r,s,U)$ est génériquement libre si elle l'est sur $\mathbb{G}(d,A)$ (ou sur $\mathbb{G}(n-d,A)$), ce qui est le cas par définition d'une algèbre bonne.

Montrons ii). Soit $\pi : \tilde{G}(t,s,U') \longrightarrow \tilde{G}(t,s,U')/\mathrm{PGL}_1(A)$ la projection canonique. Soit L une extension de K, et $y \in (\tilde{G}(t,s,U')/\mathrm{PGL}_1(A))(L)$. Montrons que la fibre de $\overline{\phi}$ en y est L-rationnelle. Soit $\overline{L}$ une clôture séparable de L. Soit $x = (X,Y) \in \tilde{G}(t,s,U')(\overline{L})$ s'envoyant sur y par π (un tel point existe car $\mathrm{PGL}_1(A)$ est lisse sur K). De la façon habituelle, on peut associer à x un 1-cocycle galoisien

$$c_\sigma : Gal(\overline{L}/L) \longrightarrow \mathrm{PGL}_1(A)(\overline{L}).$$

Il définit donc une algèbre simple centrale $\mathcal{A}$, isomorphe au tordu de $\mathrm{End}_L(A \otimes L)$ par le $\mathrm{PGL}_1(A)$-torseur 'fibre de π en y'. Si E est un sous-$\overline{L}$-vectoriel de $A \otimes \overline{L}$ ou de $A^* \otimes \overline{L}$, et $\sigma \in Gal(\overline{L}/L)$, on pose

$$\sigma * E = c_\sigma(\sigma(E)).$$

L'opération $*$ laisse $\mathbb{P}_{\overline{L}}(X) \subset \mathbb{P}_{\overline{L}}(A^* \otimes \overline{L})$ et $\mathbb{P}_{\overline{L}}(Y) \subset \mathbb{P}_{\overline{L}}(A \otimes \overline{L})$ stables. Par suite, les variétés $SB(t, \mathcal{A}^{op})$ et $SB(s, \mathcal{A})$ ont des points L-rationnels (correspondant à X et Y respectivement). Par la proposition 2.13, la fibre de ϕ en x est un ouvert de $\mathbb{G}_{\overline{L}}(sq, (Y.U)^\perp/X)$. Puisque $(Y.U)^\perp$ et X sont fixes par $*$, l'opération $*$ induit une action semi-linéaire de $Gal(\overline{L}/L)$ sur $\mathbb{G}_{\overline{L}}(sq, (Y.U)^\perp/X)$, encore notée $*$. Par ce qui précède, la fibre de $\overline{\phi}$ en y est un ouvert de la L-forme de $\mathbb{G}_{\overline{L}}(sq, (Y.U)^\perp/X)$ donnée par l'action $*$, qui est une L-variété de Severi-Brauer généralisée. Une telle variété étant rationnelle dès qu'elle possède un point rationnel, il nous faut voir que $(Y.U)^\perp/X$ possède des sous-$\overline{L}$-espaces vectoriels stables par $*$, de dimension sq. Considérons la condition suivante, portant sur un sous-espace $Z \in \mathbb{G}(s(u+q), A^*)(\overline{L})$:
(C): $(Y.U)^\perp \cap Z$ est de dimension sq, et intersecte trivialement X.
Elle définit un ouvert de $\mathbb{G}_{\overline{L}}(s(u+q), A^* \otimes \overline{L})$. Cet ouvert est non vide. En effet, on a $s(q+u)+t \leq n$, donc $sq + t \leq n - su$; autrement dit $sq + \dim X \leq \dim(Y.U)^\perp$. Il existe donc un sous-espace $Z' \subset (Y.U)^\perp$, de dimension sq, et d'intersection triviale avec X. Un tel Z' s'écrit toujours comme $(Y.U)^\perp \cap Z$ pour un $Z \in \mathbb{G}(s(u+q), A^*)(\overline{L})$, puisque la codimension de $(Y.U)^\perp$ dans A^* est su. D'où la non-vacuité annoncée. Maintenant, l'entier $s(u+q)$ est un multiple de s; les points L-rationnels de $SB(s(u+q), \mathcal{A})$ sont donc Zariski-denses. Par suite, il existe un sous-$\overline{L}$-vectoriel $Z \in \mathbb{G}(s(u+q), A^*)(\overline{L})$, $*$-stable, satisfaisant (C). L'image de $(Y.U)^\perp \cap Z$ par la projection $(Y.U)^\perp \longrightarrow (Y.U)^\perp/X$ fait alors l'affaire.
On applique ceci lorsque L est le corps des fonctions de $\tilde{G}(t, s, U')/\mathrm{PGL}_1(A)$ et y son point générique, ce qui démontre ii).

□

Nous disposons maintenant du matériel requis pour démontrer le théorème principal de cette section.

Théorème 3.3. *Soit A une bonne algèbre, de dimension n. Soit $0 < r < n$ un entier. Soit $d = \mathrm{pgcd}(r, n)$. Alors la variété $\mathbb{G}(r, A)$ est birationnelle, de manière $\mathrm{PGL}_1(A)$-équivariante, au produit de $\mathbb{G}(d, A)$ par un espace affine sur lequel $\mathrm{PGL}_1(A)$ agit trivialement.*

Démonstration. En combinant la définition 3.1 et la proposition 2.10, on dispose d'une application rationnelle, dominante, $\mathrm{PGL}_1(A)$- équivariante

$$\Phi : \mathbb{G}(r, A) \longrightarrow \mathbb{G}(d, A)$$

Soit $\tilde{\mathbb{G}}(r,A)$ (resp. $\tilde{\mathbb{G}}(d,A)$) un bon ouvert de $\mathbb{G}(r,A)$ (resp. $\mathbb{G}(d,A)$) pour l'action de $\mathrm{PGL}_1(A)$, tels que Φ induise un morphisme partout défini

$$\Phi' : \tilde{\mathbb{G}}(r,A) \longrightarrow \tilde{\mathbb{G}}(d,A).$$

Par applications itérées du point iv) de la proposition 3.2, on voit que le morphisme quotient

$$\overline{\Phi}' : \tilde{\mathbb{G}}(r,A)/\mathrm{PGL}_1(A) \longrightarrow \tilde{\mathbb{G}}(d,A)/\mathrm{PGL}_1(A)$$

induit une extension transcendante pure sur les corps de fonctions. Or le morphisme canonique

$$\tilde{\mathbb{G}}(r,A) \longrightarrow \tilde{\mathbb{G}}(d,A) \times_{\tilde{\mathbb{G}}(d,A)/\mathrm{PGL}_1(A)} (\tilde{\mathbb{G}}(r,A)/\mathrm{PGL}_1(A))$$

induit par le diagramme

$$\begin{tikzcd}
\tilde{\mathbb{G}}(r,A) \arrow[r] \arrow[d] & \tilde{\mathbb{G}}(d,A) \arrow[d] \\
\tilde{\mathbb{G}}(r,A)/\mathrm{PGL}_1(A) \arrow[r] & \tilde{\mathbb{G}}(d,A)/\mathrm{PGL}_1(A)
\end{tikzcd}$$

est un isomorphisme (un morphisme entre deux torseurs est un isomorphisme!), ce qui termine la démonstration. □

Corollaire 3.4. *Sous les hypothèses du théorème 3.3, supposons de plus que* $d = 1$*. Alors la variété* $\mathbb{G}(r,A)/\mathrm{PGL}_1(A)$ *(définie à isomorphisme birationnel près) est rationnelle.*

Démonstration. Appliquant le théorème 3.3, on voit que $\mathbb{G}(r,A)$ est birationnelle, de manière $\mathrm{PGL}_1(A)$-équivariante, au produit de $\mathbb{P}(A)$ par un espace affine. Il revient au même de dire qu'elle est birationnelle, de manière $\mathrm{PGL}_1(A)$-équivariante, au produit de $\mathrm{PGL}_1(A)$ par un espace affine, d'où l'assertion. □

Remarque 3.5. Soit V un vectoriel de dimension n, et $A = \mathrm{End}(V)$. Le lecteur pourra montrer, à titre d'exercice, que le quotient birationnel $\mathbb{G}(n,A)/\mathrm{PGL}_1(A)$ est stablement birationnel à l'espace classifiant de $\mathrm{PGL}_1(A) = \mathrm{PGL}(V)$. Sa (stable) rationalité est un problème majeur et très largement ouvert. Elle n'est en effet connue que lorsque n divise 420 ([3]).

4. Quelques applications du théorème 3.3

Nous énonçons dans cette section, sous forme de propositions, plusieurs corollaires du théorème principal, qui s'en déduisent par torsion. Pour des rappels sur cet important procédé, nous renvoyons le lecteur à [5], proposition 2.12 et lemme 2.14.

Proposition 4.1. *Soit* $0 < r < n$ *deux entiers, et* $d = \mathrm{pgcd}(r, n)$. *Soit* A *une algèbre simple centrale de degré* n. *Alors la variété de Severi-Brauer généralisée* $SB(r, A)$ *est birationnelle au produit de* $SB(d, A)$ *par un espace affine de dimension convenable.*

Démonstration. Soit L une sous-algèbre étale commutative maximale de A. Il est classique (suite exacte longue de cohomologie combinée au théorème 90 de Hilbert) que la cohomologie du groupe algébrique $T := R_{L/K}(\mathbb{G}_{\mathrm{m}})/\mathbb{G}_{\mathrm{m}} = \mathrm{PGL}_1(L)$ s'identifie au noyau de la flèche naturelle $Br(K) \longrightarrow Br(L)$; il correspond donc à A un T-torseur P tel que $SB(m, A)$ s'identifie au tordu de $\mathbb{G}(m, L)$ par P, pour tout $m = 1 \ldots n$. On déduit tout de suite le corollaire par torsion à partir du théorème 3.3, appliqué à L. □

Définition 4.2. *Soit* G *un groupe algébrique agissant sur une variété géométriquement intègre* X. *Nous dirons que l'action de* G *sur* X *est parfaite si* X *est birationnelle, de manière* G*-équivariante, au produit de* G *par un espace affine sur lequel* G *agit trivialement.*

Remarque 4.3. Soit G un groupe algébrique agissant sur une variété géométriquement intègre X. Le lecteur se convaincra aisément que l'action de G sur X est parfaite si et seulement si les conditions suivantes sont vérifiées.
i) L'action de G sur X est génériquement libre.
ii) Soit $U \subset X$ un ouvert bon pour l'action de G. Alors le G-torseur $U \longrightarrow U/G$ possède des sections rationnelles, et sa base est rationnelle.

Proposition 4.4. *Soit* V *un vectoriel de dimension* r, *et* A *une bonne algèbre de dimension* n. *Supposons* $r \leq n$ *et pgcd*$(n, r) = 1$. *Soit* G *le conoyau du morphisme*

$$\mathbb{G}_m \longrightarrow \mathrm{GL}(V) \times \mathrm{GL}_1(A),$$
$$x \mapsto (x, x^{-1}).$$

Le groupe G *agit sur* $\mathbb{A}(V \otimes A)$ *par la formule*

$$(f, x).(v \otimes a) = f(v) \otimes xa,$$

pour $f \in \mathrm{GL}(V)$, $x \in \mathrm{GL}_1(A)$, $v \in V$ *et* $a \in A$.
Cette action est parfaite.

Démonstration. Soit U l'ouvert de $\mathbb{A}(V \otimes A) = \mathbb{A}(\mathrm{Hom}(V^*, A))$ formé des applications linéaires de rang maximal r. L'ouvert U est stable par l'action naturelle de $\mathrm{GL}(V)$ sur $\mathbb{A}(V \otimes A)$, et le quotient $U/\mathrm{GL}(V)$ n'est autre que $\mathbb{G}(r, A)$. La projection naturelle $U \longrightarrow \mathbb{G}(r, A)$ est un $\mathrm{GL}(V)$-torseur. Puisque l'action de

$\mathrm{PGL}_1(A) = G/\mathrm{GL}(V)$ sur $\mathbb{G}(r, A)$ est génériquement libre, on en déduit que l'action de G sur $\mathbb{A}(V \otimes A)$ l'est aussi. On sait alors (définition 2.1) qu'il existe un ouvert $U' \subset \mathbb{A}(V \otimes A)$, bon pour l'action de G. Par le théorème 90 de Hilbert, la projection $U' \longrightarrow U'/\mathrm{GL}(V)$ possède des sections rationnelles. D'après le théorème 3.3, on sait que l'action de $\mathrm{PGL}_1(A)$ sur $\mathbb{G}(r, A)$ est parfaite. Ceci se traduit ici en disant que le $\mathrm{PGL}_1(A)$-torseur $U'/\mathrm{GL}(V) \longrightarrow U'/G$ possède des sections rationnelles, et que sa base est rationnelle. En définitive, on voit que le G-torseur $U' \longrightarrow U'/G$ possède des sections rationnelles, et que sa base est rationnelle. En d'autres termes, l'action de G sur $\mathbb{A}(V \otimes A)$ est parfaite. □

Proposition 4.5. *Soient A et B deux algèbres simples centrales, de degrés premiers entre eux. Alors $SB(A \otimes B)$ est birationnelle au produit de $SB(A) \times SB(B)$ par un espace affine de dimension convenable.*

Démonstration. Soit n (resp. r) le degré de A (resp. B). On suppose $r < n$. Soit L (resp. M) une sous-algèbre étale commutative maximale de A (resp. B). Soit G le conoyau du morphisme

$$\mathbb{G}_m \longrightarrow \mathrm{GL}(M) \times \mathrm{GL}_1(L),$$
$$x \mapsto (x, x^{-1}).$$

Soit G' le conoyau du morphisme

$$\mathbb{G}_m \longrightarrow \mathrm{GL}_1(M) \times \mathrm{GL}_1(L),$$
$$x \mapsto (x, x^{-1});$$

c'est un sous-groupe de G. Par le théorème 90 de Hilbert, le torseur $\mathrm{GL}(M) \longrightarrow \mathrm{GL}_1(M)\backslash\mathrm{GL}(M)$ possède des sections rationnelles. Sa base étant rationnelle (exercice laissé au lecteur), il suit que l'action de $\mathrm{GL}_1(M)$ sur $\mathrm{GL}(M)$ (par multiplication à gauche) est parfaite, donc que l'action de G' sur G est parfaite. Puisque l'action de G sur $\mathbb{A}(M \otimes L)$ est parfaite par la proposition 4.4, on en déduit -et c'est nettement plus faible- que l'action de G' sur $\mathbb{A}(L \otimes M)$ est parfaite. Passant au quotient par $\mathbb{G}_m$, on voit finalement que l'action de $\mathrm{PGL}_1(L) \times \mathrm{PGL}_1(M)$ sur $\mathbb{P}(L \otimes M)$ est parfaite. En d'autres termes, la variété $\mathbb{P}(L \otimes M)$ est birationnelle, de manière $\mathrm{PGL}_1(L) \times \mathrm{PGL}_1(M)$-équivariante, au produit de $\mathbb{P}(L) \times \mathbb{P}(M)$ par un espace affine. Le résultat annoncé suit par torsion, comme dans la preuve de la proposition 4.1. □

Proposition 4.6. ([6]) *Soient L et M deux algèbres étales, de degrés premiers entre eux. Soit T le conoyau du morphisme*

$$\mathrm{GL}_1(M) \times \mathrm{GL}_1(L) \longrightarrow \mathrm{GL}_1(M \otimes L),$$

$$(x, y) \mapsto x \otimes y;$$

c'est un tore algébrique. La variété T est rationnelle.

Démonstration. Soit G' le conoyau du morphisme

$$\mathbb{G}_m \longrightarrow \mathrm{GL}_1(M) \times \mathrm{GL}_1(L),$$
$$x \mapsto (x, x^{-1}).$$

Dans la preuve de la proposition 4.5, on a vu que l'action de G' sur $\mathbb{A}(M \otimes L)$ -donc aussi sur $\mathrm{GL}_1(M \otimes L)$- est parfaite. Le résultat suit par définition d'une action parfaite, vu que T n'est autre que $\mathrm{GL}_1(M \otimes L)/G'$. □

Proposition 4.7. *([7], Theorem 3.1) Soit A une algèbre simple centrale de degré n. Soit $0 < r < n$ un entier. Alors les variétés $SB(r, A)$ et $SB(r, A^{op})$ sont birationnellement isomorphes.*

Démonstration. Au vu de la proposition 4.1, on peut supposer que r divise n. Soient L et P comme dans la preuve de cette proposition. D'après le lemme 2.10, il existe un isomorphisme birationnel et $\mathrm{PGL}_1(L)$-équivariant

$$f : \mathbb{G}(r, L) \longrightarrow \mathbb{G}(r, L^*).$$

En tordant f par P, on obtient un isomorphisme birationnel entre $SB(r, A)$ et $SB(r, A^{op})$, cqfd. □

Proposition 4.8. *Soit r, n deux entiers premiers entre eux, vérifiant $3 \leq r \leq n-3$. Soient A, A' deux algèbres simples centrales de degré n, engendrant le même sous-groupe du groupe de Brauer de K. Alors les variétés $SB(r, A)$ et $SB(r, A')$ sont birationnelles.*

Démonstration. Puisque A et A' engendrent le même sous-groupe du groupe de Brauer de K, on sait (cf. introduction) que $SB(A) \times \mathbb{P}^{n-1}$ est birationnelle à $SB(A') \times \mathbb{P}^{n-1}$. D'après le corollaire précédent, $SB(r, A)$ (resp. $SB(r, A')$) est birationnelle à $SB(A) \times \mathbb{P}^s$ (resp. $SB(A') \times \mathbb{P}^s$) avec $s = r(n-r) - n + 1$. Puisqu'on a $s \geq n-1$ au vu des hypothèses faites sur n et r (vérification laissée au lecteur), on en déduit que $SB(A) \times \mathbb{P}^s$ et $SB(A') \times \mathbb{P}^s$ sont birationnellement isomorphes, cqfd. □

References

[1] S. A. Amitsur, Generic splitting fields of central simple algebras. *Ann. of Math. (2)*, 62:8–43, 1955.

[2] A. Beauville, J.-L. Colliot-Thélène, J.-J. Sansuc, P. Swinnerton-Dyer, Variétés stablement rationnelles non rationnelles. *Ann. of Math. (2)*, 121(2):283–318, 1985.

[3] C. Bessenrodt, L. Le Bruyn, Stable rationality of certain PGL_n-quotients. *Invent. Math.*, 104(1):179–199, 1991.

[4] M. Demazure, A. Grothendieck, *Schémas en groupes. I: Propriétés générales des schémas en groupes, Séminaire de Géométrie Algébrique du Bois Marie (SGA 3)*, volume 151 of *Lecture Notes in Mathematics*. Springer-Verlag, 1970.

[5] M. Florence, On the essential dimension of cyclic p-groups. *Invent. Math.*, 171(1):175–189, 2008.

[6] A. A. Klyachko, On the rationality of tori with cyclic splitting field. In *Arithmetic and geometry of manifolds (Russian)*, pages 73–78, 112. Kuĭbyshev. Gos. Univ., Kuybyshev, 1988.

[7] D. Krashen, Birational maps between generalized Severi-Brauer varieties. *J. Pure Appl. Algebra*, 212(4):689–703, 2008.

Mathieu Florence

Université Pierre et Marie Curie
Institut de Mathématiques de Jussieu, Equipe de Topologie et Géométrie Algébriques
175, rue du Chevaleret
75013 Paris

e-mail: `florence@math.jussieu.fr`