

Combinatoire du point de croix

Sandrine Caruso* et Xavier Caruso†

24 janvier 2010

Résumé

Dans cet article, nous expliquons une technique de broderie classique : le point de croix. Nous nous intéressons ensuite à la question de minimiser la longueur de fil utilisée pour broder un dessin donné et résolvons le problème lorsque le dessin est 4-connexe (notion définie dans le texte). Nous décrivons également un algorithme qui brode le dessin avec la quantité minimale de fil attendue. Enfin, dans une dernière partie, nous étudions plusieurs exemples de dessins qui ne sont pas 4-connexes.

Mots-clés : géométrie discrète, optimisation, combinatoire

Table des matières

1	Position du problème	1
1.1	Le point de croix	1
1.2	Configurations brodables et fortement brodables	3
2	Configurations 4-connexes	4
2.1	Définitions et énoncé du théorème	4
2.2	Schémas de piquage	5
2.3	Démonstration du théorème	8
2.4	Un algorithme pour broder	10
2.5	L'algorithme et les configurations non 4-connexes	11
3	Exemples et contre-exemples	13
3.1	Les configurations « escalier »	13
3.2	Récapitulatif : un diagramme d'implications	20

1 Position du problème

1.1 Le point de croix

Le point de croix est une technique de broderie consistant à reproduire le dessin d'une grille sur un tissu à trame régulière, à l'aide (comme son nom d'indique) de points en

*Élève de l'ÉNS Cachan, antenne de Bretagne

†Chercheur au CNRS, affecté à l'Université Indépendante de Moscou

forme de croix. Pour les lecteurs qui ne connaîtraient pas le principe de la broderie, voici quelques précisions. On dispose d'un fil enfilé dans une aiguille, que l'on fait passer à travers les trous (disposés régulièrement le long d'un quadrillage) du tissu, alternativement de l'envers vers l'endroit du tissu et de l'endroit vers l'envers. Pour broder un point de croix, le fil doit ainsi passer deux fois sur l'endroit du tissu : une fois selon l'une des diagonales, une fois selon l'autre diagonale (voir figure 1 ; la partie de fil plus foncée représente la dernière diagonale brodée).

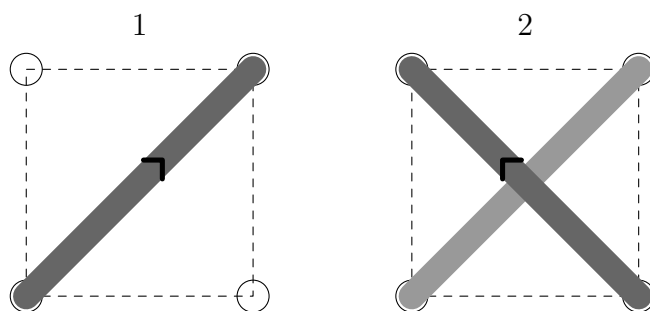


FIGURE 1 – Le point de croix

Lorsqu'il y a plusieurs cases à broder, l'ordre et le sens dans lequel on brode chaque diagonale ne doit obéir qu'à une seule condition : la diagonale qui passe par dessus l'autre doit être la même ¹ pour toutes les cases. Par exemple, pour broder deux cases côte-à-côte, les deux méthodes présentées sur la figure 2 sont acceptables.

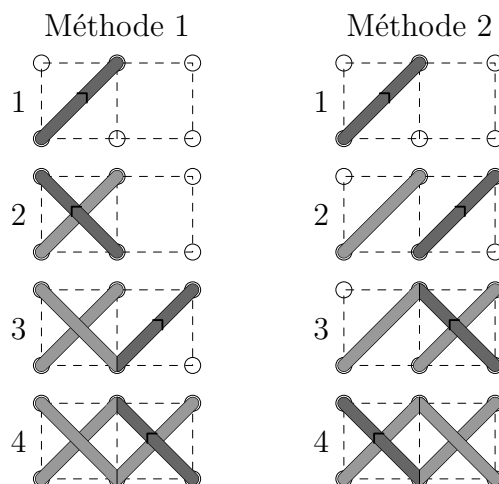


FIGURE 2 – Deux méthodes pour broder deux cases

Comme vous pouvez le constater sur la figure, ces deux méthodes donnent le même motif, et la condition sur les diagonales est respectée. Cependant, si les deux méthodes produisent le même résultat sur l'endroit du tissu, en revanche, sur l'envers de celui-ci, les fils ne sont pas disposés de la même façon, comme on peut le voir sur la figure 3.

Dorénavant, nous allons fixer le choix de la diagonale passant par dessus l'autre, par exemple, comme dans la figure 2, nous supposons qu'il s'agira de la diagonale joignant

1. Sous-entendu : dans la même direction

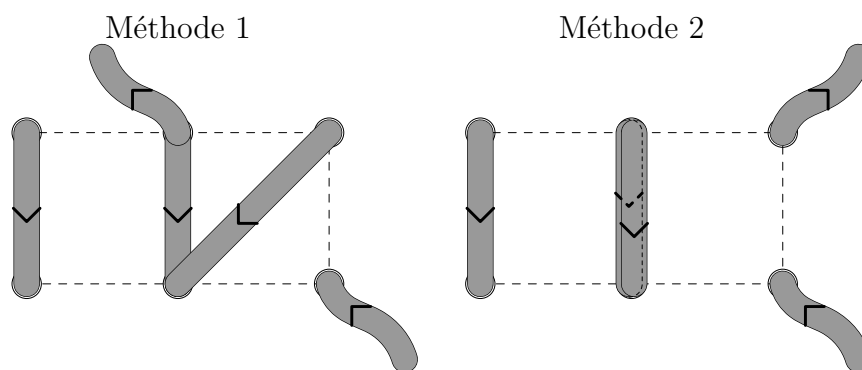


FIGURE 3 – Envers du tissu

le coin en haut à gauche au coin en bas à droite (si l'on regarde l'endroit du tissu), que nous appellerons désormais « diagonale supérieure ». Notons que cela signifie que pour une case donnée, il faudra broder la diagonale joignant le coin en haut à droite au coin en haut à gauche (que nous appellerons « diagonale inférieure ») avant l'autre diagonale.

Longueur de fil utilisée

D'un point de vue pratique, on peut avoir envie d'utiliser la méthode qui demande le moins de fil possible. Faisons quelques remarques à ce sujet. Nous négligeons la longueur de fil dépassant avant et après la partie brodée. En outre, si l'on brode le même motif avec plusieurs méthodes différentes, la longueur de fil présente sur l'endroit du tissu sera bien entendu la même. En fait, cette longueur ne dépend que du nombre de cases brodées. Seule est susceptible de varier la longueur de fil présente sur l'envers du tissu. Par exemple, si l'on choisit comme unité la longueur du côté d'une maille, pour la méthode 1, la longueur de fil sur l'envers du tissu est $2 + \sqrt{2}$ tandis que pour la méthode 2, cette longueur est 3 (voir la figure 3). Ainsi, la méthode 2 est-elle plus économe en fil que la méthode 1.

Notons tout d'abord qu'entre deux diagonales que l'on brode successivement, la longueur minimale sur l'envers est de 1 (obtenue dans le cas où le fil passe simplement le long d'un côté de maille). En effet, on ne peut pas passer l'aiguille deux fois de suite par le même trou (de l'endroit vers l'envers puis de l'envers vers l'endroit), car le fil ne serait pas maintenu et ressortirait, lâche, du côté endroit. Si l'on veut broder n cases, chaque case étant composée de 2 diagonales, il faut au minimum $2n - 1$ unités de fil sur l'envers.

1.2 Configurations brodables et fortement brodables

La question que nous nous posons à présent est la suivante : quelles sont les configurations qu'il est possible de broder avec seulement $2n - 1$ unités de fil sur l'envers ? De telles configurations existent bel et bien. Un petit manuel de point de croix, par exemple, nous apprend que c'est le cas notamment si les cases forment une ligne horizontale (ou verticale) continue ; il suffit de broder d'abord toutes les diagonales inférieures, puis toutes les diagonales supérieures, comme sur la figure 4.

Définition 1.1. On appelle *configuration brodable* une configuration à n cases qui peuvent être brodées par un fil de longueur $2n(1 + \sqrt{2}) - 1$ (ce qui correspond à une longueur $2n - 1$ sur l'envers, c'est-à-dire la longueur minimale).

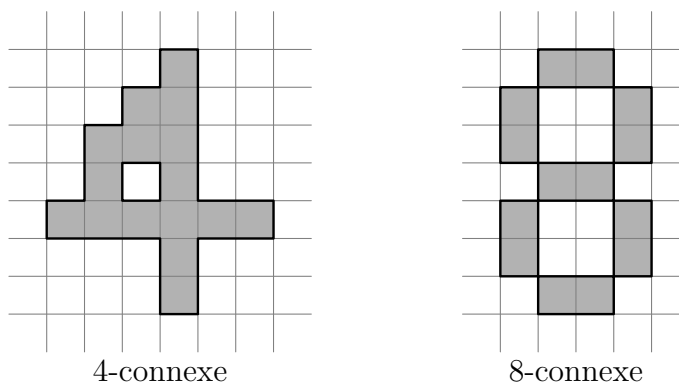
Deux sommets sont dit *adjacents* s'ils sont à distance 1 l'un de l'autre. On appelle *arête* un segment de droite joignant deux sommets adjacents. Une *arête d'une case* est une arête joignant deux sommets de cette case.

Définition 2.2 (4-chemin, 8-chemin). Soient p et p' deux cases. On appelle *4-chemin* reliant p à p' une suite finie de cases $p = p_0, p_1, \dots, p_n = p'$ telle que pour tout $i \in \{1, \dots, n\}$, p_{i-1} et p_i aient au moins une arête commune.

On appelle *8-chemin* reliant p à p' une suite finie de cases $p = p_0, p_1, \dots, p_n = p'$ telle que pour tout $i \in \{1, \dots, n\}$, p_{i-1} et p_i aient au moins un sommet commun.

Définition 2.3 (4-connexité, 8-connexité). Une configuration C est dite *4-connex* (resp. *8-connex*), si pour toutes cases p et p' de C , il existe un 4-chemin (resp. un 8-chemin) formé de cases de C reliant p à p' .

Voici un exemple de figure 4-connex et un exemple de figure 8-connex mais non 4-connex.



L'objectif de cette section est de démontrer le théorème suivant.

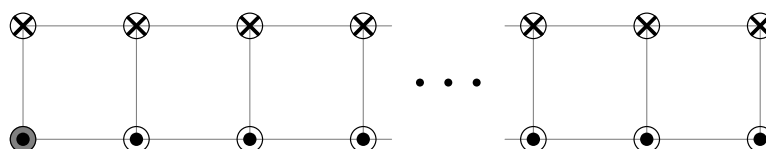
Théorème 2.4. *Toute configuration 4-connex est fortement brodable (et donc brodable).*

Pour les besoins de la démonstration, définissons encore la notion de ligne qu'en fait, nous avons déjà rencontré dans l'article.

Définition 2.5. Une configuration C est appelée une *ligne* si elle est 4-connex et s'il existe un ensemble de la forme $\mathbb{R} \times [m, m + 1]$ qui contient toutes ses cases.

2.2 Schémas de piquage

Nous avons vu en 1.2 qu'une ligne est fortement brodable. En observant attentivement la méthode qui a été décrite, on se rend compte que l'aiguille a traversé tous les trous de la ligne inférieure en allant de l'envers vers l'endroit et tous les trous de la ligne supérieure en allant de l'endroit vers l'envers, ce que nous représenterons dorénavant par le schéma de piquage suivant :



le sommet grisé représentant le point de départ (qui est aussi, rappelons-le, le point d'arrivée). Remarquez que la plupart des trous ont été traversé deux fois par l'aiguille. Dans notre cas, les deux passages ont toujours eu lieu dans le même sens, mais c'est à vrai dire un peu un hasard et rien n'interdira par la suite d'avoir des schémas de piquage où les deux symboles \odot et \otimes apparaissent ensemble sur un même trou. On les notera alors l'un à côté de l'autre dans un sens arbitraire. Voici une définition précise.

Définition 2.6. Un schéma de piquage \mathcal{S} est la donnée d'une fonction qui à chaque sommet s à coordonnées entières associe un sous-ensemble $\mathcal{S}(s)$ de $\{\odot, \otimes\}$ et d'un « point de départ », c'est-à-dire d'un couple $(s, \textcircled{?})$ où s est un sommet et $\textcircled{?} \in \mathcal{S}(s)$.

On dit qu'une configuration de n cases est *fortement brodable selon un schéma \mathcal{S}* s'il est possible de la broder entièrement par un fil de longueur $2n(1 + \sqrt{2})$ en revenant au point de départ et en respectant les indications du schéma.

Remarque. Si $\mathcal{S}(s)$ est vide, cela signifie que le sommet s n'est jamais piqué. En outre, si une configuration C est fortement brodable selon le schéma \mathcal{S} , alors $\mathcal{S}(s)$ est vide si et seulement si s n'est pas un sommet de C . En effet, il est évident que tous les sommets de C sont piqués. Réciproquement, si s est un sommet piqué, notons p_1, p_2, p_3, p_4 les quatre cases dont il est sommet.

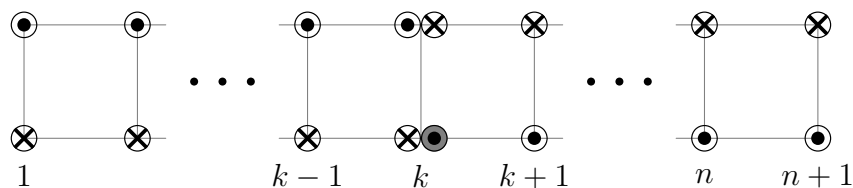
- Si l'on pique s de l'envers vers l'avant, cela signifie que l'on s'apprête à broder une diagonale d'un des p_i ($1 \leq i \leq 4$) ou bien qu'on l'a brodée en premier dans le cas où s est le dernier sommet piqué (en effet, dans ce cas, s est également le premier sommet piqué, dans le même sens, puisque C est fortement brodable).
- Si l'on pique s de l'avant vers l'envers, alors on vient de broder une diagonale d'un des p_i , ou bien on va la broder à la fin dans le cas où s est le premier sommet piqué (car, dans ce cas, il est aussi le dernier).

Dans tous les cas, un des p_i appartient à la configuration C , et donc s est un sommet de C .

2.2.1 Plusieurs schémas de piquage pour broder une ligne

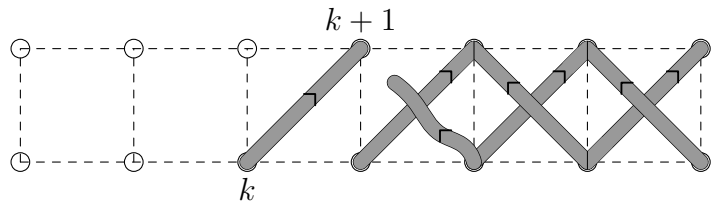
Nous nous intéressons encore à une configuration de n cases consécutives. Nous savons déjà qu'une telle configuration est fortement brodable mais, pour la suite, nous avons besoin d'être un peu plus précis sur les schémas de piquage associés. C'est l'objet du lemme suivant.

Lemme 2.7. Soit n un entier supérieur ou égal à 2 et soit $k \in \{2, \dots, n\}$. Alors, une ligne de n cases est fortement brodable selon le schéma suivant :

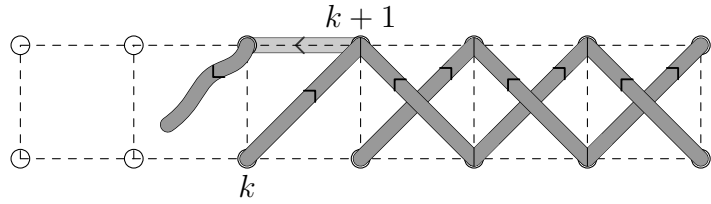


Modèle 1 de schéma de piquage

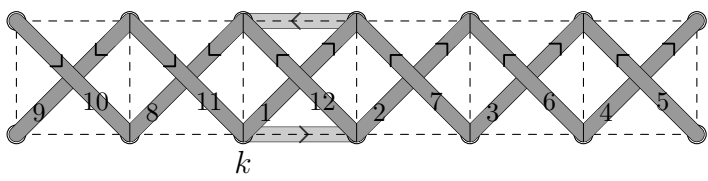
Démonstration. On brode les diagonales inférieures des cases k jusqu'à n , puis les diagonales supérieures des cases n jusqu'à $k + 1$.



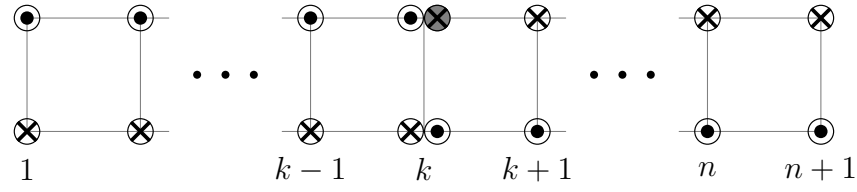
L'aiguille vient alors de passer à travers le sommet $k + 1$ en haut. On la passe par le k -ième sommet en haut



de sorte à pouvoir broder les diagonales inférieures des sommets $k - 1$ jusqu'à 1, puis leurs diagonales supérieures. Il ne reste plus qu'à broder la diagonale supérieure de la case k , ce que l'on fait en commençant par piquer au point d'abscisse $k + 1$ sur la ligne du bas.

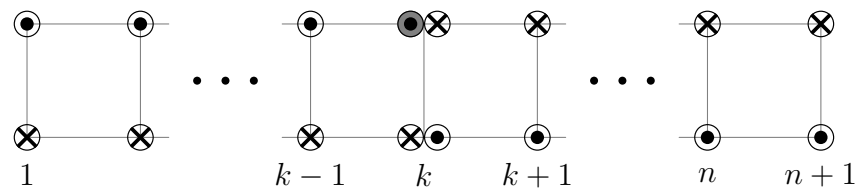


On aura également besoin de considérer des cas où l'on commence à broder par en dessus (c'est-à-dire que l'on commence par un point à l'envers). En déplaçant au début le dernier piquage de l'aiguille dans la méthode présentée dans la démonstration du lemme, on démontre que la ligne est aussi fortement brodable selon le schéma que voici :

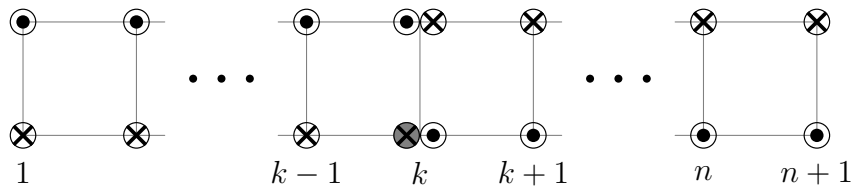


Modèle 2 de schéma de piquage

Enfin, en appliquant une symétrie centrale — ce qui ne modifie pas le sens des diagonales — à la construction que l'on vient de présenter, on s'aperçoit que la ligne est également fortement brodable selon les deux schémas suivants :

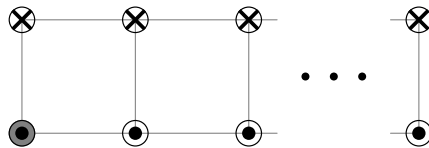


Modèle 3 de schéma de piquage



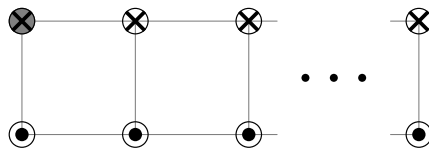
Modèle 4 de schéma de piquage

Jusqu'à présent, nous avons interdit à k de prendre les valeurs extrêmes 1 et $n + 1$, c'est-à-dire que nous n'avons pas encore considéré le cas où le point de départ est à l'extrémité de la ligne à broder. Dans la situation du lemme 2.7, on ne peut en fait pas avoir $k = n + 1$. En effet, commençant dans le coin en bas à droite, on serait contraint à broder d'abord la diagonale supérieure du dernier carré, ce qui pourtant d'après les règles ne peut se faire qu'après avoir brodé sa diagonale inférieure. Le cas $k = 1$, par contre, ne conduit pas à une impossibilité mais à un schéma de piquage dégénéré, déjà bien connu puisque c'est le premier que nous avons rencontré. Pour faciliter la lecture, nous le reproduisons ci-dessous.



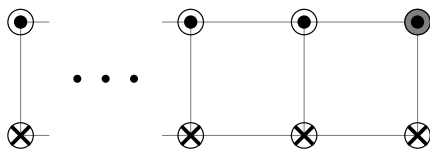
Modèle 1' de schéma de piquage

On remarque que les doubles décorations ont disparu. Comme précédemment, en déplaçant à la fin le premier point, on obtient le schéma que voici

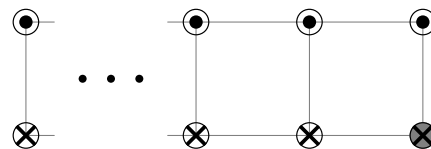


Modèle 2' de schéma de piquage

tandis qu'à l'aide de symétries centrales, on trouve les deux autres schémas suivants :



Modèle 3' de schéma de piquage



Modèle 4' de schéma de piquage

2.3 Démonstration du théorème

2.3.1 Recollement des schémas de piquage

L'intérêt de décorer les configurations par des schémas de piquage réside dans la propriété de recollement très facile suivante.

Lemme 2.8. Soient C_1 et C_2 deux configurations disjointes fortement brodables selon les schémas de piquage \mathcal{S}_1 et \mathcal{S}_2 respectivement. Soit $(s, \textcircled{1})$ le point de départ de \mathcal{S}_2 .

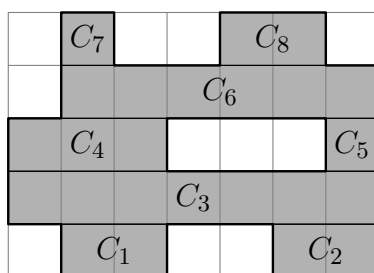
Si $\textcircled{1} \in \mathcal{S}_1(s)$, alors la configuration $C_1 \cup C_2$ est fortement brodable selon le schéma de piquage $P \mapsto \mathcal{S}_1(s) \cup \mathcal{S}_2(s)$ avec même élément de départ que celui de \mathcal{S}_1 .

Démonstration. On fixe une méthode de brochage de C_1 (resp. C_2) qui respecte le schéma de piquage \mathcal{S}_1 (resp. \mathcal{S}_2). On commence à broder C_1 . D'après l'hypothèse, se faisant, on passera par le sommet s dans le sens $\textcircled{1}$. À ce moment, on brode C_2 . Une fois cela fait, on est revenu au point de départ en piquant à nouveau dans le sens $\textcircled{1}$. On peut ainsi finir de broder C_1 .

Bien entendu, toutes les conditions sont respectées (tous les points sur l'envers ont pour longueur 1 et les diagonales inférieures sont toujours brodées avant les diagonales supérieures) puisqu'elles l'étaient déjà pour le brochage de C_1 et C_2 . \square

2.3.2 La démonstration proprement dite

On fixe à partir de maintenant une configuration C qui est 4-connexive. Comme illustré sur la figure ci-après, découpons C en l'union disjointe de lignes C_i ($1 \leq i \leq N$) de sorte que les cases immédiatement à gauche et à droite de C_i ne soient pas dans C .



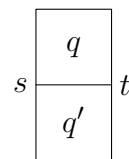
Nous allons montrer que pour tout $i \in I = \{1, \dots, N\}$, on peut choisir un schéma de piquage \mathcal{S}_i sur C_i donné par l'un des modèles vus en 2.2.1, tous ces schémas se recollent bien. Plus précisément nous allons construire par récurrence :

- une suite croissante $(I_k)_{1 \leq k \leq N}$ de sous-ensembles de $\{1, \dots, N\}$ avec $I_1 = \{1\}$ et I_k de cardinal k pour tout k (et donc $I_N = I$);
- des schémas de piquage \mathcal{S}_i sur C_i donnés par l'un des modèles de 2.2.1 tels que le point de départ de \mathcal{S}_1 soit de la forme $(s, \textcircled{\bullet})$ et, pour tout k , la configuration $C' = \cup_{i \in I_k} C_i$ soit fortement brodable selon le schéma $\mathcal{S}' : s \mapsto \cup_{i \in I_k} \mathcal{S}_i(s)$ ayant pour point de départ celui de \mathcal{S}_1 .

La construction de I_1 et de \mathcal{S}_1 ne pose aucun problème : on prend $I_1 = \{1\}$ comme cela est imposé et on choisit par exemple le modèle 1'. Supposons maintenant que I_k soit construit et que les \mathcal{S}_i pour $i \in I_k$ ont déjà été choisis. Notons $C' = \cup_{i \in I_k} C_i$ et \mathcal{S}' le schéma de piquage $s \mapsto \cup_{i \in I_k} \mathcal{S}_i(s)$ ayant pour point de départ celui de \mathcal{S}_1 . D'après l'hypothèse, C' est fortement brodable selon \mathcal{S}' .

Soit p une case de C qui n'est pas dans C' . Par hypothèse de 4-connexité, il existe un 4-chemin reliant p à une case de C' . Soit $q = p_j$ la dernière case de ce 4-chemin qui n'est pas dans C' . Appelons C_{i_0} la ligne à laquelle appartient q . Comme $q \notin C'$, on a nécessairement $i_0 \notin I_k$. On définit $I_{k+1} = I_k \cup \{i_0\}$; c'est bien un ensemble de cardinal $k + 1$.

On a par ailleurs $q' = p_{j+1} \in C'$, et le fait que C' soit une union de C_i montre que q' est situé soit au-dessus, soit au-dessous de q . Supposons par exemple que q soit au-dessus de q' , l'autre cas se traitant de manière analogue. Nommons s et t les deux sommets communs à q et q' comme sur la figure ci-contre. Si $\odot \in \mathcal{S}'(s)$, il suffit de choisir pour \mathcal{S}_i le modèle 1 ou 1' avec le sommet s pour point de départ. De même, si $\otimes \in \mathcal{S}'(t)$, on peut choisir le modèle 4 ou 4' avec t pour point de départ. Dans les deux cas, le lemme 2.8 montre que $\cup_{i \in I_{k+1}} C_i = C' \cup C_{i_0}$ est fortement brodable selon le schéma de piquage voulu. Étant donné que ni $\mathcal{S}(s)$, ni $\mathcal{S}(t)$ ne peut être vide, le seul cas restant est $\mathcal{S}'(s) = \{\otimes\}$ et $\mathcal{S}'(t) = \{\odot\}$. Mais, on voit tout de suite qu'aucun des modèles de schémas de piquage utilisés ne contient à la suite sur la ligne du haut les deux symboles \otimes et \odot dans cet ordre. Ainsi ce dernier cas ne peut se produire et la démonstration de l'hérédité est terminée.



2.4 Un algorithme pour broder

La démonstration précédente a l'avantage de fournir avec peu d'effort un algorithme qui calcule une façon convenable de broder la configuration qui utilise la quantité minimale de fil. Nous présentons ci-après deux versions de cet algorithme.

2.4.1 Version récursive

La version récursive est légèrement plus facile à comprendre, et c'est la raison pour laquelle nous commençons par celle-ci. Dans ce qui suit la lettre C désigne une *variable globale*. Une autre quantité qui doit être considérée comme variable globale est la position de l'aiguille : quand dans l'algorithme, on dit de piquer en tel sommet, on déplace « physiquement » l'aiguille jusqu'à ce sommet et elle reste à cette position jusqu'au prochain piquage.

L'algorithme 1 est une petite routine qui initialise les variables et se termine en appelant la fonction `Broder_ligne_haut` (décrite dans l'algorithme 2) qui, couplée à la fonction `Broder_ligne_bas`, (décrite au même endroit) constitue le cœur de l'algorithme.

Algorithme 1 Procédure d'appel

- 1: $C \leftarrow$ la configuration à broder
 - 2: $p \leftarrow$ une case de C
 - 3: $s \leftarrow$ le sommet en bas à gauche de p
 - 4: piquer l'aiguille en s de l'envers vers l'endroit
 - 5: appeler la fonction `Broder_ligne_haut`
-

Étant donné qu'il n'y a des appels récursifs que lorsque le nombre de cases dans la variable C diminue strictement (et que ceci ne peut pas se produire une infinité de fois), il est clair que l'algorithme s'arrête. La correction de l'algorithme, quant à elle, découle de la preuve du théorème que nous avons donné précédemment. Nous laissons au lecteur les détails de cette transcription.

On notera finalement que dans l'étape d'initialisation, on choisit une case quelconque de la configuration C . Ceci signifie que, non seulement, toute configuration 4-connexe

Algorithme 2 Fonction `Broder_ligne_haut` (resp. `Broder_ligne_bas`)

```
1:  $L \leftarrow$  la plus grande ligne horizontale incluse dans  $C$  contenant le sommet où se trouve
   l'aiguille et au-dessus (resp. au-dessous) de ce sommet
2: liste  $\leftarrow$  la liste ordonnée des sommets à piquer pour broder  $L$  à partir de  $s$  à l'aide
   d'un des modèles de 2.2.1
3: si le brodage n'est pas possible alors
4:   sortir de la fonction
5: retirer de  $C$  toutes les cases de  $L$ 
6: pour chaque sommet  $s$  dans liste parcourue dans l'ordre faire
7:   piquer l'aiguille en  $s$ 
8:   si le sommet  $s$  est en haut de  $L$  alors
9:     appeler la fonction Broder_ligne_haut
10:  sinon {le sommet  $s$  est en bas de  $L$ }
11:    appeler la fonction Broder_ligne_bas
```

est fortement brodable mais qu'en outre, il est possible de la broder en commençant par n'importe laquelle de ses cases.

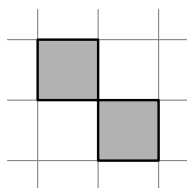
2.4.2 Version itérative

La version itérative, présentée dans l'algorithme 3, est en fait très proche de la version récursive. Elle fonctionne à l'aide d'une pile dont les éléments sont des couples (s, f) où s est un sommet et f un élément de l'ensemble {au-dessus, au-dessous}.

Nous laissons à nouveau l'exercice au lecteur de montrer que l'algorithme termine et a bien le comportement voulu. Cela est plutôt facile lorsque l'on a bien compris le fonctionnement de la pile, et notamment fait le lien entre la pile qui apparaît dans la version itérative et la pile des appels récursifs de la version récursive.

2.5 L'algorithme et les configurations non 4-connexes

Nous avons pour l'instant examiné le comportement de l'algorithme lorsqu'on l'appelle avec une configuration 4-connexe, mais il fait encore sens de l'appeler avec une configuration ne vérifiant pas cette propriété. Que se passe-t-il dans ce sens ? Remarquons déjà qu'il est clair que l'algorithme s'arrête encore (l'argument donné précédemment n'utilisait pas la 4-connexité) et qu'il brode au moins la composante 4-connexe contenant la ligne C_1 . Il se peut cependant qu'il en brode plus comme le montre l'exemple très simple de la configuration suivante (représentée en gris)

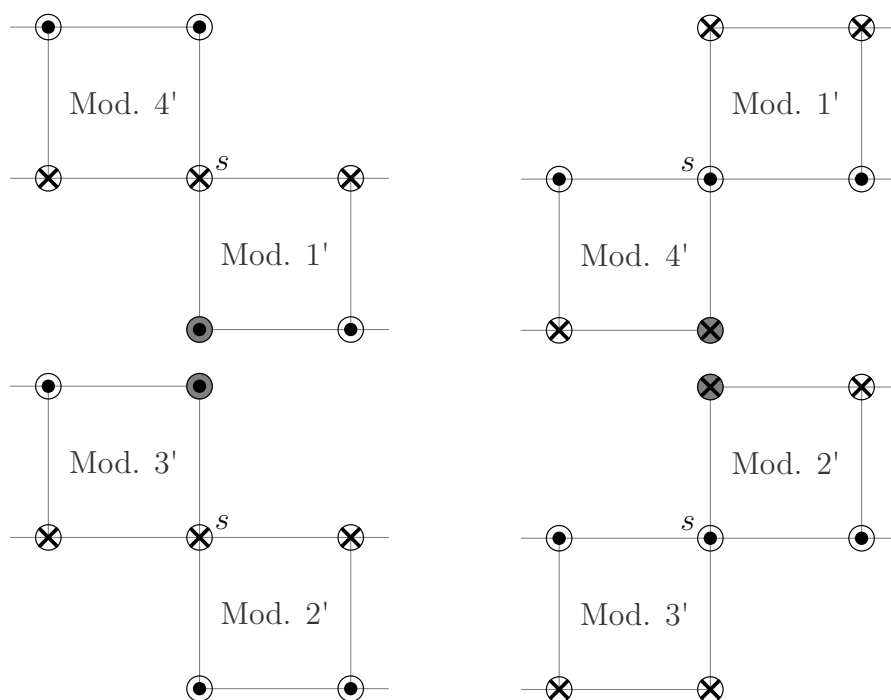


pour laquelle les deux cases sont brodées si l'on part du coin en bas à gauche de la case du bas. En examinant d'un peu plus près la situation, on se rend compte que les seuls

Algorithme 3 Version itérative

```
1:  $C \leftarrow$  la configuration à broder
2:  $p \leftarrow$  une case de  $C$ 
3:  $s \leftarrow$  le sommet en bas à gauche de  $p$ 
4: créer une pile vide  $pile$ 
5: empiler ( $s$ , au-dessus) sur  $pile$ 
6: tant que  $pile$  est non vide faire
7:   dépiler  $pile$ 
8:   ( $s$ ,  $f$ )  $\leftarrow$  l'élément dépilé
9:   piquer l'aiguille en  $s$ 
10:   $L \leftarrow$  la plus grande ligne horizontale incluse dans  $C$  contenant le sommet où se
    trouve l'aiguille et située  $f$  de ce sommet
11:   $liste \leftarrow$  la liste ordonnée des sommets à piquer pour broder  $L$  à partir de  $s$  à
    l'aide d'un des modèles de 2.2.1 (on convient que  $liste$  est vide si le brodage
    n'est pas possible)
12:  si  $liste$  est non vide alors
13:    retirer de  $C$  toutes les cases de  $L$ 
14:  pour chaque sommet  $s$  dans  $liste$  parcourue dans le sens inverse faire
15:    si le sommet  $s$  est en haut de  $L$  alors
16:      empiler ( $s$ , au-dessus) sur  $pile$ 
17:    sinon {le sommet  $s$  est en bas de  $L$ }
18:      empiler ( $s$ , au-dessous) sur  $pile$ 
```

recollements non 4-connexes entre deux des modèles présentés en 2.2.1 sont les quatre suivants :



où s est le sommet de recollement. Ainsi si, dans l'algorithme, on supprime l'appel récursif après

- le piquage dans le coin en haut à gauche lors de l'exécution du modèle 1',
 - le piquage dans le coin en bas à gauche lors de l'exécution du modèle 2',
 - le piquage dans le coin en bas à droite lors de l'exécution du modèle 3', et
 - le piquage dans le coin en haut à droite lors de l'exécution du modèle 4'
- on obtient un programme qui brode *exactement* la composante 4-connexe de C contenant la ligne C_1 .

Si vous souhaitez voir l'algorithme à l'œuvre, rendez-vous sur la page

<http://boumbo.toonywood.org/sandrine/pageperso/pcroix/>

où vous pourrez voir se broder devant vos yeux des configurations préenregistrés ainsi que toutes celles que vos dessinerez puis proposerez. La version de l'algorithme utilisée est la version itérative qui prend en compte la modification que nous venons de discuter pour ne broder qu'une composante 4-connexe. En réalité, le programme ne s'arrête pas après la première composante 4-connexe, mais continue jusqu'à avoir bordé toute la configuration proposée en changeant de fil — et de couleur — après chaque composante 4-connexe.

3 Exemples et contre-exemples

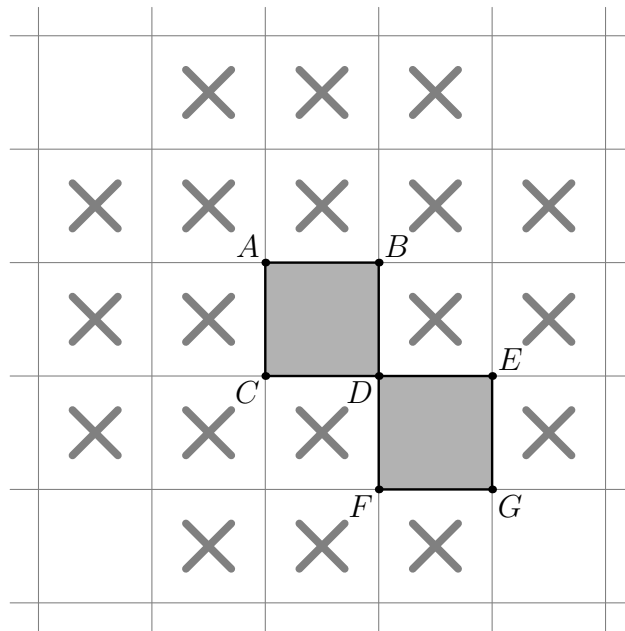
Jusqu'à présent, nous n'avons étudié que les configurations 4-connexes mais les questions de brodabilité et forte brodabilité ne se posent pas uniquement dans ce cadre restreint. On a notamment envie maintenant d'étudier le cas des configurations 8-connexes. La situation semble alors bien plus complexe, et c'est ce que aimerions illustrer dans cette dernière partie à l'aide d'exemples et de contre-exemples.

3.1 Les configurations « escalier »

Nous étudions, dans cette partie, deux familles d'exemples (que nous appellerons des *escaliers*) de configurations 8-connexes qui ne sont pas 4-connexes.

3.1.1 Un premier lemme bien utile

Intéressons-nous pour commencer à un type particulier de configurations, à savoir celles qui sont en accord avec la description suivante :



On lit cette description en convenant qu'une case grisée impose la présence de la case en question dans la configuration, alors qu'une case barrée impose son absence. Les cases laissées blanches, quant à elles, n'imposent aucune contrainte.

On considère à partir de maintenant une configuration C de la forme précédente. On note n le nombre de cases de C . On suppose en outre que C est brodable, et on fixe une manière de la broder qui respecte les règles que nous nous sommes fixées. Ceci nous permet de numéroter les diagonales des cases de la configuration : celle qui porte le numéro 1 est la première que la méthode de brochage choisie nous dit de brocher, celle qui porte le numéro 2 est la deuxième et ainsi de suite jusqu'au numéro $2n$.

Lemme 3.1. *On se place dans la situation qui vient d'être décrite, et on note i le numéro de la diagonale AD . Alors $i \in \{2, 2n\}$.*

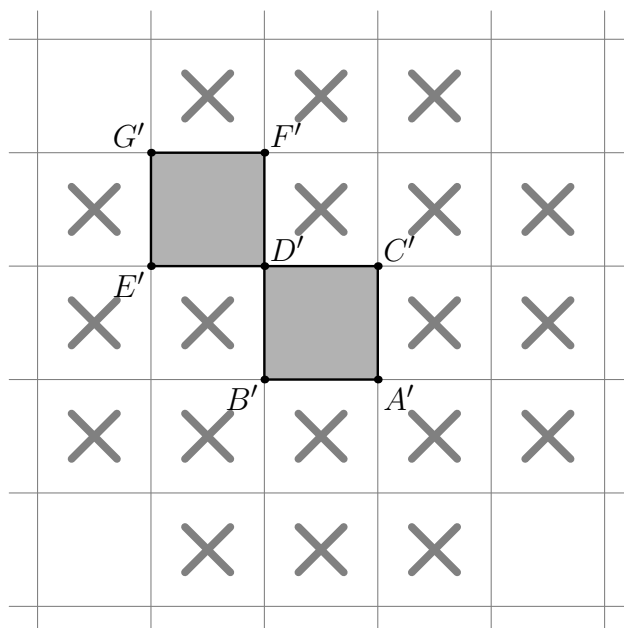
De plus, si $i = 2$, alors la diagonale BC porte le numéro 1, et la diagonale EF porte le numéro 3. Si, au contraire, $i = 2n$, alors la diagonale BC porte le numéro $2n - 1$, et la diagonale DG porte le numéro $2n - 2$.

Démonstration. Supposons par l'absurde que $i \notin \{2, 2n\}$. Comme il est clair que l'on ne peut pas non plus avoir $i = 1$ (puisque'il faut broder BC avant AD), on peut parler des diagonales numérotées $i - 2$, $i - 1$ et $i + 1$. Il est facile de se convaincre que les diagonales $i - 1$ et $i + 1$, étant voisines de i , sont à choisir parmi BC et EF . Mais, par ailleurs, les contraintes nous imposent de broder BC avant AD . La seule solution restante est donc que la diagonale $i - 1$ soit BC et que la diagonale $i + 1$ soit EF . Mais alors la diagonale $i - 2$ (qui est voisine de $i - 1$) est nécessairement DG . Il en résulte que DG est brodée avant EF , ce qui n'est pas possible. On a ainsi obtenu une contradiction, et la première partie du lemme est démontrée.

Supposons $i = 2$. Comme la diagonale BC doit être brodée avant AD , elle est nécessairement brodée en premier. D'autre part, après BC on ne peut broder que AD ou EF . Comme AD est déjà brodé, c'est EF qui porte le numéro 3.

Supposons maintenant $i = 2n$. Les deux seuls candidats pour porter le numéro $2n - 1$ sont alors BC et EF , mais EF est à écarter car il doit être brodé après DG . Ainsi BC porte bien le numéro $2n - 1$ et il suit rapidement que DG est numéroté $2n - 2$. \square

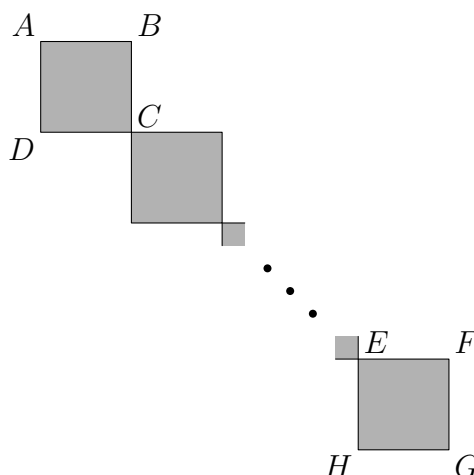
Par symétrie centrale, on obtient le résultat suivant : si C est une configuration bro-
dable qui est de la forme



alors le numéro j de la diagonale $A'D'$ appartient à l'ensemble $\{2, 2n\}$, etc.

3.1.2 L'escalier simple

Soit n un entier supérieur ou égal à 2. Considérons la configuration suivante E_n à n cases.



On comprend aisément d'où vient le nom d'*escalier*. On travaillera dans toute la suite de l'article avec des escaliers qui descendent, mais les mêmes résultats et les mêmes preuves sont valables pour des escaliers qui montent.

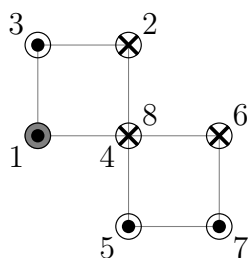
Théorème 3.2. (1) Pour tout n , la configuration E_n est brodable.

(2) La configuration E_n est fortement brodable si, et seulement si $n = 2$.

Démonstration. L'assertion (1) est facile. On brode les cases successivement en descendant l'escalier en piquant l'aiguille pour chacune d'elle

- d'abord dans le coin en bas à gauche,
- ensuite dans le coin en haut à droite,
- ensuite dans le coin en haut à gauche,
- et enfin dans le coin en bas à droite.

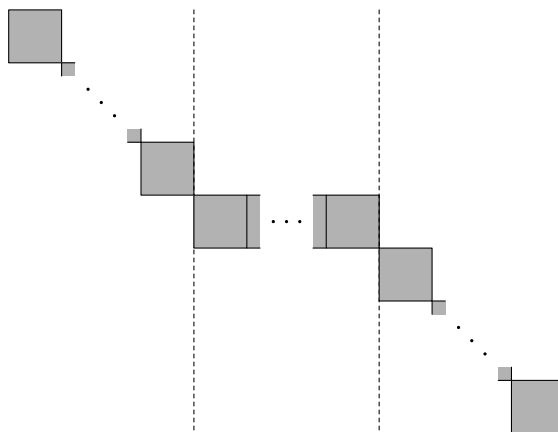
On passe maintenant à la démonstration de (2). Si $n = 2$, voici une solution pour réaliser le brochage avec les conditions voulues (les numéros sur les sommets indiquent l'ordre dans lequel l'aiguille les traverse).



Supposons maintenant $n > 2$ et appelons $ABCD$ et $EFGH$ les cases respectivement situées en haut et en bas de l'escalier comme cela a déjà été fait sur la première illustration. Supposons que l'escalier soit fortement brodable et fixons une manière de le broder qui respecte les contraintes correspondantes. Si i désigne le numéro de la diagonale AC , le lemme 3.1 nous dit que $i \in \{2, 2n\}$. De même, le numéro j de la diagonale EG est aussi dans $\{2, 2n\}$. Quitte à appliquer une symétrie centrale, on peut supposer que $i = 2$ et $j = 2n$. Mais alors, le lemme 3.1 à nouveau nous apprend que la diagonale BD est bordée en premier. Or ceci est incompatible avec le fait que EG soit bordée en dernier car ni B ni D n'est adjacent à E ou G (on rappelle que, par l'hypothèse de forte brodabilité, le brochage est supposé se terminer au même point que celui où il a commencé). \square

3.1.3 L'escalier avec palier

Soient g , p et d des entiers naturels non nuls. On considère la configuration suivante $E_{g,p,d}$



où il y a g cases dans la partie de gauche (le premier escalier), p cases dans la partie centrale (le palier) et d cases dans la partie de droite (le deuxième escalier). Pour plus de clarté, les trois parties sont séparées par des traits en pointillés sur le dessin précédent.

Le cas $p = 1$ correspond à un escalier simple où le palier se réduit à une marche normale. Ce cas a déjà été étudié précédemment, et c'est pourquoi nous l'excluons à partir de maintenant.

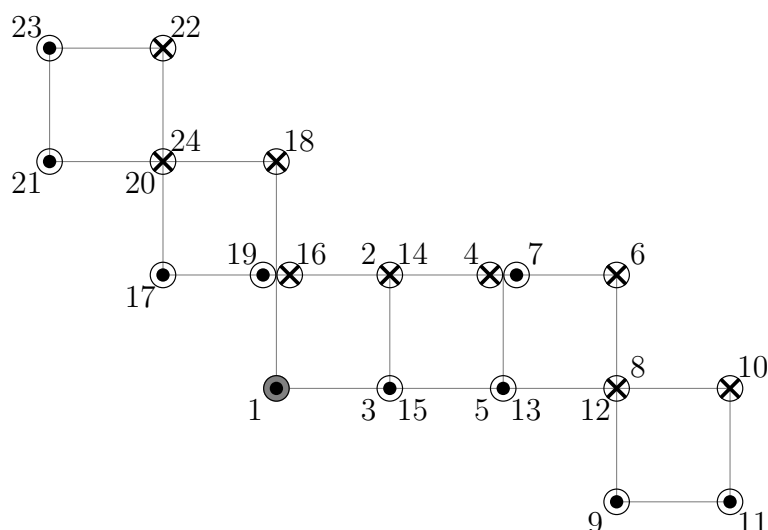
Théorème 3.3. Soient g , p et d des entiers naturels non nuls avec $p \geq 2$. Alors

- si $g = d = 1$, la configuration $E_{g,p,d}$ est fortement brodable
- si $g = 1$ et $d > 1$, la configuration $E_{g,p,d}$ est brodable, mais non fortement brodable
- si $d = 1$ et $g > 1$, la configuration $E_{g,p,d}$ est brodable, mais non fortement brodable
- si $g > 1$ et $d > 1$, la configuration $E_{g,p,d}$ n'est jamais fortement brodable, et elle est brodable si, et seulement si p est impair.

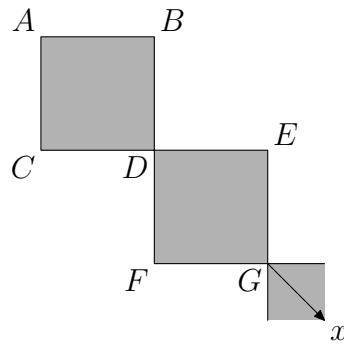
Le théorème précédent montre que la combinatoire de l'« escalier avec palier » n'est pas vraiment simple et laisse présager qu'il risque d'être difficile de trouver une condition nécessaire et suffisante facilement exploitable pour caractériser les configurations brodables (resp. fortement brodables) parmi les configurations 8-connexes. En tout cas, les auteurs n'ont, à ce jour, pas de réponse satisfaisante à cette question.

3.1.4 Démonstration du théorème

Les cas limites On commence par supposer $d = 1$. On souhaite tout d'abord montrer que $E_{g,p,1}$ est toujours brodable, et pour cela il suffit d'exhiber une façon convenable de broder cette configuration. Pour éviter de multiplier encore les notations, on la donne ci-dessous simplement dans le cas particulier $g = 2$, $p = 3$ en laissant au lecteur l'exercice de faire les adaptations nécessaires pour le cas général.



Dans le cas où $d = 1$, une construction similaire montre que $E_{1,p,1}$ est fortement brodable. Il ne reste donc plus qu'à démontrer que $E_{g,p,1}$ n'est pas fortement brodable pour $g > 1$. Pour cela, concentrons-nous sur les deux premières marches en haut à gauche et nommons leurs sommets comme sur la figure ci-après.



D'après le lemme 3.1, s'il existe une manière convenable de broder $E_{g,p,1}$, le numéro d'ordre qu'elle attribue à la diagonale AD est soit 2, soit $2n$ (où $n = g + p + 1$ est le nombre total de cases). Si c'est 2, d'après le même lemme, les diagonales BC et EF ont respectivement pour numéro 1 et 3. On en déduit que la diagonale DG porte le numéro 4. En effet, partant de E ou F , on ne peut aller sur l'envers qu'en D ou G , et il n'est pas possible de broder tout de suite la diagonale Gx car il s'agit d'une diagonale supérieure et que la diagonale inférieure correspondante n'a pas encore été brodée. Mais alors, il est clair que l'on ne pourra jamais revenir à notre point de départ puisque celui-ci (qui est B ou C) n'est adjacent qu'à A et D et que toutes les diagonales arrivant à ces sommets ont déjà été brodées. Un raisonnement analogue conduit également à une contradiction dans le cas où la diagonale AD est brodée en dernier.

Le cas $g = 1$ se déduit de ce qui vient d'être fait par application d'une symétrie centrale. Il ne reste donc plus qu'à traiter le cas où g et d sont tous les deux > 1 , ce que nous supposons à partir de maintenant. Remarquons alors que l'argument que nous avons utilisé dans la démonstration du théorème 3.2.(2) s'applique encore pour montrer que la configuration $E_{g,p,d}$ n'est pas fortement brodable. Il ne reste donc plus qu'à démontrer qu'elle est brodable si, et seulement si p est impair.

Supposons tout d'abord que $E_{g,p,d}$ soit fortement brodable et fixons un brodage qui respecte les conditions correspondantes. Comme cela a été expliqué précédemment, ce brodage détermine une numérotation des diagonales des cases de $E_{g,p,d}$.

Coloriage des diagonales Commençons par colorier les sommets à l'aide de deux couleurs que l'on alterne comme sur un échiquier. De façon formelle, la couleur du sommet de coordonnées (i, j) est donc la classe modulo 2 de $i + j$. Mais plutôt que de parler de classe modulo 2, nous conviendrons dans la suite que les couleurs que nous utilisons sont simplement le noir et le blanc.

Une diagonale dans une case relie toujours deux sommets de même couleur, et on convient alors de donner à cette diagonale cette couleur commune. Du fait que deux sommets adjacents sont de couleur différente, on déduit que deux diagonales dans $E_{g,p,d}$ qui sont consécutives (*i.e.* qui portent des numéros consécutifs) sont de couleur différente.

Ordre de parcours de l'escalier Notons G l'ensemble des cases de $E_{g,p,d}$ qui sont dans le premier escalier à gauche ; par définition, c'est un ensemble de cardinal g dont on note G_1, \dots, G_g les éléments en convenant que les cases G_1, \dots, G_g apparaissent dans l'ordre quand on descend l'escalier. On définit de même les ensembles $P = \{P_1, \dots, P_p\}$ et

$D = \{D_1, \dots, D_d\}$. D'après le lemme 3.1, les numéros des diagonales supérieures de G_1 et D_d sont 2 et $2n$ (où $n = g + p + d$ est le nombre total de cases), et quitte à faire une symétrie centrale on peut supposer que les numéros sont attribués dans cet ordre. La deuxième partie du lemme 3.1 assure alors que la diagonale inférieure de G_1 porte le numéro 1.

Lemme 3.4. Notons $A_i \in \{G, P, D\}$ la partie qui contient la case contenant la diagonale numéro i . Alors

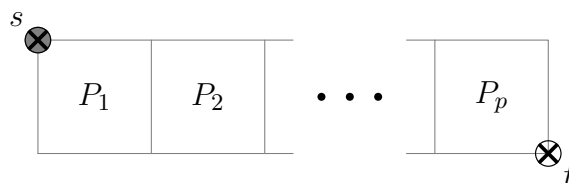
- pour $1 \leq i \leq 2g$, on a $A_i = G$;
- pour $2g + 1 \leq i \leq 2(g + p)$, on a $A_i = P$;
- pour $2(g + p) + 1 \leq i \leq 2(g + p + d) = 2n$, on a $A_i = D$.

Démonstration. On sait déjà que $A_1 = G$ et $A_{2n} = D$. Par ailleurs, il est clair que, pour tout i , on ne peut avoir ni $A_i = G$ et $A_{i+1} = D$, ni $A_i = D$ et $A_{i+1} = G$ (les cases de G et D sont trop éloignées). Pour conclure, il suffit donc de montrer qu'il existe au plus deux indices i tels que $\{A_i, A_{i+1}\} = \{G, P\}$ et, de même, au plus deux indices j tels que $\{A_j, A_{j+1}\} = \{P, D\}$.

À partir de maintenant, on se concentre sur la preuve de ses assertions. On traite même en fait uniquement la première, la seconde étant totalement similaire. Remarquons que si i est tel que $A_i = G$ et $A_{i+1} = P$, alors la diagonale numérotée i est forcément l'une des diagonales de G_g . De même, si $A_i = P$ et $A_{i+1} = G$, alors la diagonale numérotée $i + 1$ est forcément l'une des diagonales de G_g . Ainsi, à chaque i tel que $\{A_i, A_{i+1}\} = \{G, P\}$, on peut associer une diagonale de G_g notée $d(i)$. Comme G_g possède deux diagonales, il suffit pour conclure de montrer que cette association est injective.

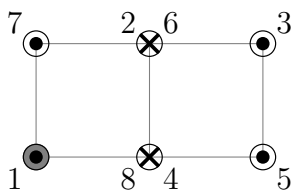
Pour cela, raisonnons par l'absurde en considérant deux indices i et j avec $i < j$ et $d(i) = d(j)$. Il est alors clair, au vu de la définition, que $d(i) = d(j)$ doit être la diagonale numérotée $i + 1 = j$. Cela signifie que $A_i = P$, $A_{i+1} = G$ et $A_{i+2} = P$. Mais alors, les diagonales numérotées i et $i + 2$ sont des diagonales de P_1 , et donc forcément ses deux diagonales. Mais par ailleurs, puisque leurs numéros diffèrent de 2 (qui est un nombre pair), elles doivent être de même couleur, ce qui n'est manifestement pas le cas. On a donc obtenu une contradiction d'où résulte l'injectivité annoncée puis le lemme. \square

Étude au niveau du palier Le lemme précédent nous dit que le brochage de l'escalier avec palier se découpe en trois parties : on brode d'abord complètement G , puis on passe à la partie P que l'on brode complètement avant de broder finalement D . Examinons de plus près la façon dont on brode le palier P . Nécessairement, puisque l'on vient de G , on entre dans P par le coin à haut à gauche (sommet s) juste après avoir brodé la diagonale supérieure de G_g . De même, on sort de P par le coin en bas à droite (sommet t) juste avant de se mettre en position pour broder la diagonale inférieure de D_1 . En résumé, on a le schéma de piquage partiel que voici :



Convenons, pour fixer les idées, que s est colorié en noir. La première diagonale brodée dans P , c'est-à-dire la diagonale numérotée $2g + 1$ est donc blanche. Il en résulte que la dernière diagonale brodée dans P qui porte le numéro $2g + 2d$ est noire puisque la différence $(2g + 2d) - (2g + 1) = 2d - 1$ est un nombre impair. Or cette dernière diagonale contient le sommet t ; celui-ci est donc également noir, c'est-à-dire de la même couleur que s . On en déduit que p est impair comme voulu.

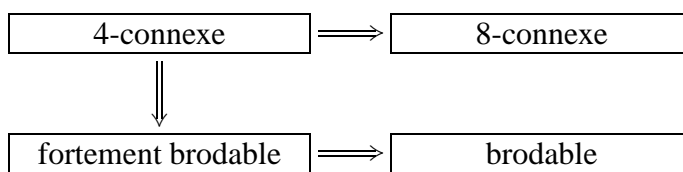
La réciproque On suppose désormais que d est un nombre impair, et on souhaite exhiber une façon de broder $E_{g,d,p}$ répondant aux contraintes usuelles. Voici une façon de faire. On commence par broder les cases de G (avec les mêmes notations que précédemment) comme cela est expliqué dans la preuve du théorème 3.2.(1). À l'issue de cela, le fil sort par le coin en bas à droite de G_g dans le sens \otimes . On brode ensuite les cases de P deux par deux selon le schéma suivant :



Le fil vient alors de traverser le coin en bas à gauche de P_{p-1} dans le sens \otimes . Finalement, on utilise à nouveau la méthode de la preuve du théorème 3.2.(1) pour broder ce qui reste (c'est-à-dire la partie D à laquelle est ajoutée la case P_p).

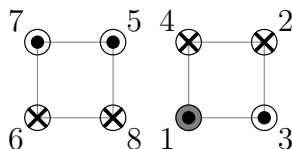
3.2 Récapitulatif : un diagramme d'implications

Le diagramme suivant récapitule les implications que nous avons démontrés entre les principales notions définies dans cet article.



Soulignons que les implications qui ne sont pas notées sur le précédent diagramme sont toutes fausses :

- le théorème 3.2 montre qu'il existe des configurations 8-connexes qui sont brodables sans être fortement brodables ;
- le théorème 3.3 montre qu'il existe des configurations 8-connexes qui ne sont pas brodables ;
- la configuration formée de deux cases sur une même ligne séparée par une unique case n'est certainement pas 8-connexes mais est pourtant fortement brodable :



Références

- [1] *Making mathematics with needlework. Ten papers and ten projects.* Edited by Sarah-Marie Belcastro and Carolyn Yackel. A K Peters, Ltd., Wellesley, MA, 2008. xiv+184 pp.