

Analyse de l'invariance d'échelle de séries temporelles par la décomposition modale empirique et l'analyse spectrale de Hilbert

Scaling analysis of time series using empirical mode decomposition and Hilbert spectral analysis

Yongxiang Huang ^{a,b}, François G. Schmitt ^a, Zhiming Lu ^b,
Yulu Liu ^b

^aLaboratory of Oceanography and Geosciences, CNRS UMR LOG 8187
University of Science and Technology of Lille -Lille 1
Wimereux Marine Station, 28 av. Foch, 62930 Wimereux, France

^bShanghai Institute of Applied Mathematics and Mechanics,
Shanghai University, 200072 Shanghai, China

Abstract

In this paper, we propose an extended version of the Hilbert spectral analysis which is done in the framework of Empirical Mode Decomposition. This arbitrary order Hilbert spectral analysis is able to characterize the intermittency properties of multiscaling time series. The method is validated using simulations of fractional Brownian motion with many different values of the H parameter, and with lognormal multifractal simulations. An application is shown to real data from the field of turbulence. The method proposed here works in the amplitude-frequency space, and is the first approach able to deal with intermittency exponents directly in the frequency space. It is also shown to be superior to the classical structure functions framework to retrieve background scaling fluctuations in case of a strong periodic component.

Keywords. Empirical mode decomposition, Hilbert spectral analysis, fractional Brownian motion, intermittency, multifractals.

Résumé. Nous proposons ici une généralisation de l'analyse spectrale de Hilbert qui est effectuée dans le cadre des décompositions modales empiriques. Cette analyse spectrale de Hilbert d'ordre arbitraire permet de caractériser les propriétés d'intermittence des séries temporelles à invariance d'échelle multiple. La méthode est validée en utilisant des simulations de mouvement Brownien fractionnaire, avec

différentes valeurs du paramètre H , et avec des simulations lognormales multifractales. Une application est effectuée sur des données “réelles” issues du domaine de la turbulence. La méthode proposée ici fonctionne dans l’espace amplitude-fréquence; cette méthode est la première approche pouvant prendre en compte les exposants d’intermittence dans l’espace des fréquences. Nous montrons également que cette méthode est supérieure à l’approche utilisant les fonctions de structure lorsque la série à analyser présente une invariance d’échelle superposée à une forte composante périodique.

Mots clés. Décomposition modale empirique, analyse spectrale de Hilbert, mouvement Brownien fractionnaire, intermittence, multifractals.

Recently, Hilbert-Huang transform (HHT), or Empirical Mode Decomposition (EMD) have become a promising methodology to deal with nonlinear and nonstationary time series [1,2]. This corresponds to a data-driven method with very local ability, both in physical and spectral space [3]. In this work, we propose an extended version of Hilbert spectral analysis, namely arbitrary order Hilbert spectral analysis, to characterize the scale invariant properties in spectral space directly.

The most innovative part of the Hilbert-Huang transform is the Empirical Mode Decomposition, which can separate the original time series into several Intrinsic Mode Functions, called IMF. The starting point of EMD is to consider the time series from real world as multi-component signal. The corresponding characteristic scale is defined as the distance between two successive maxima points (resp. minima points). The intrinsic mode function is proposed to approximate the mono-component signal, which satisfies the following two conditions: (i) the difference between the number of local extrema and the number of zero-crossings must be zero or one; (ii) the running mean value of the envelope defined by the local maxima and the envelope defined by the local minima is zero [1,2]. Then the empirical mode decomposition algorithm is proposed to extract IMF modes from a given time series [1,2,16].

After applying EMD algorithm on a given time series, the original signal is then decomposed into several IMF modes, $c_i(t)$. We therefore separate the different scales in physical domain. Then the Hilbert transform is applied on each mode to extract the time-frequency-energy information, amplitude $\mathcal{A}(t)$ and instantaneous frequency $\omega(t)$ [14,17,18]. The Hilbert spectrum $H(\omega, t)$ is thus designed to represent the original time series in time-frequency-energy space. When the marginal integration is taken on $H(\omega, t)$ over t , we thus have a marginal Hilbert spectrum $h(\omega)$, which is corresponding to the Fourier power spectrum [1,2]. The Hilbert transform is a singular integration, which means that it has a very local ability in spectral space. Hence, the combination of EMD and Hilbert spectral analysis provides a novel powerful time-frequency analysis tool to deal with nonlinear and nonstationary time series [1,2].

The above procedure is also known as Hilbert spectral analysis (HSA). It provides a joint pdf $p(\omega, \mathcal{A})$ [17,18]. Thus the Hilbert marginal spectrum can be redefined as the marginal integration of $p(\omega, \mathcal{A})$ over \mathcal{A} [17,18]. We propose here an arbitrary order Hilbert marginal spectrum $\mathcal{L}_q(\omega)$ by considering the marginal integration of $p(\omega, \mathcal{A})$ over \mathcal{A}^q [18]. In case of scale invariance, the arbitrary order spectrum has a power law with scaling exponent $N(q)$. Due to the integration operator, $N(q) - 1$ corresponds to $\zeta(q)$ estimated by the classical structure function analysis [18].

We first verify the arbitrary order HSA method by analyzing synthesized fractional Brownian motion (fBm). We show that the present proposed methodology is very useful to exact the Hurst exponent H when $0 < H < 1$. We then analyze a synthesized multifractal process by consider a discrete cascade with a lognormal model. We compare the scaling exponent $\xi(q)$ estimated by HSA with $\zeta(q)$ estimated by the structure function. Graphically, these scaling exponent curves are superposed: this confirms the validity of the present method for monofractal processes.

We then consider the periodic effect on both structure function analysis and the arbitrary order HSA. Due to large scale deterministic forcing, such as annual cycle, solar motion, the presence of a periodic component is a very common phenomena in environmental time series. We superpose a sine wave on simulated fBm time series with $H = 1/3$, which is corresponding to the Hurst number of turbulent velocity, and various intensity I . We perform the structure function analysis and the arbitrary order HSA on these data. By comparing with the results of fBm data without periodic component perturbation, we find that the structure function analysis is strongly influenced by the periodic component. It is found graphically that the periodic effect on the scaling analysis is as large as 2 decades. However, when considering EMD and HSA methods on the same data, we see that the arbitrary order HSA can constrain the periodic effect: the periodic effect on the scaling analysis has an amplitude of about 0.5 decade only.

We finally apply this new method on an experimental homogeneous and isotropic turbulence database, which is characterized by the Reynolds number $Re_\lambda = 720$. Both Fourier power spectrum and the Hilbert marginal spectrum predict an over two decades inertial range. We then recover the classical structure function scaling exponents $\zeta(q)$ in spectral space.

1 Introduction

Il y a une dizaine d'années, Norden Huang a proposé une méthode intitulée décomposition modale empirique (DME, ou EMD en anglais, pour *Empirical*

Mode Decomposition), pour analyser des séries temporelles non-linéaires et non stationnaires [1,2]. Cette méthode permet de décomposer une série temporelle quelconque en une somme de plusieurs séries temporelles, appelées “modes” ou fonctions modales intrinsèques (FMI, ou IMF en anglais, pour *Intrinsic Mode Function*). Chaque mode possède une fréquence caractéristique, dont la valeur peut être estimée par exemple par leur densité spectrale. Pour un bruit blanc ou un bruit Gaussien fractionnaire, la répartition de ces fréquences caractéristiques est telle que la décomposition correspond à un banc de filtre dyadique (ou quasi- dyadique) [3,4]. La décomposition modale empirique s’accompagne souvent d’un second aspect faisant appel à une transformation spectrale de Hilbert pour chaque mode pris séparément, permettant de proposer une densité spectrale d’énergie de Hilbert pour les séries temporelles [1,2]. Depuis son introduction, cette méthode a connu un succès important, et a été appliquée dans différents domaines, dont par exemple la physiologie [5], l’acoustique [6], la géophysique [7], la climatologie [8–10], la mécanique [11], l’océanographie [12,13].

Ici nous présentons une version étendue de l’analyse spectrale de Hilbert, qui permet de caractériser l’intermittence et l’invariance d’échelle multiple de séries temporelles, dans l’espace spectral. Nous montrons comment cette méthode permet d’estimer le nombre de Hurst qui caractérise l’invariance d’échelle; nous l’appliquons en tant que validation au mouvement Brownien fractionnaire, puis à un processus lognormal multifractal simulé. L’approche est brièvement illustrée sur des données de turbulence. Nous montrons également que cette approche est bien adaptée pour analyser un processus possédant une invariance d’échelle superposée à un forçage périodique, contrairement à l’approche plus classique utilisant les fonctions de structure.

2 Présentation de la méthode DME et la transformée de Hilbert Huang

De façon générale, la méthode proposée comprend deux étapes: la méthode DME et la transformée de Hilbert Huang; bien qu’elles aient certains liens, nous présentons ci-dessous séparément ces deux méthodes.

2.1 Décomposition modale empirique

Nous considérons ici un signal complexe à large bande, comportant donc différentes échelles de façon simultanée [14,1]. L’idée de la décomposition est alors la suivante: il s’agit de considérer un signal en tant que superposition de différentes oscillations monocomposantes, chacune ayant une échelle car-

actéristique différente. Chaque oscillation est appelée une fonction modale intrinsèque lorsqu'elle satisfait à deux conditions: (i) la différence entre le nombre de minima locaux et le nombre de traversée du zéro (*“zero crossing”*) doit être zéro ou un; (ii) la moyenne glissante de la somme de l'enveloppe définie par les maxima locaux et l'enveloppe définie par les minima locaux est nulle. La décomposition est faite de façon itérative, en considérant à chaque étape le signal comme étant la somme d'une composante basse fréquence (le résidu, qui est une tendance locale) et d'une composante haute fréquence (la FMI). L'itération est alors poursuivie en décomposant à nouveau le résidu obtenu, selon le même principe, pour extraire un nouveau résidu et un nouveau FMI. A la fin de la décomposition, la méthode DME exprime une série temporelle $x(t)$ comme la somme d'un nombre fini de FMI $C_i(t)$ et un résidu final $r_n(t)$ [1,15].

L'algorithme précis est le suivant [1,2]:

- 1 Identification des extrema locaux du signal $x(t)$;
- 2 Connection des maxima locaux pour former une enveloppe supérieure $e_{\max}(t)$, obtenue par une interpolation spline cubique. La même chose est faite pour l'enveloppe inférieure $e_{\min}(t)$;
- 3 Estimation de la moyenne $m_1(t) = (e_{\max}(t) + e_{\min}(t))/2$;
- 4 Soustraction de la moyenne pour obtenir le détail local $h_1(t) = x(t) - m_1(t)$;
- 5 On considère alors $h_1(t)$: si ce dernier satisfait aux conditions pour être une FMI, il s'agit de la première FMI, notée $C_1(t) = h_1(t)$, qui est soustraite du signal d'origine et le premier résidu $r_1(t) = x(t) - C_1(t)$ est la nouvelle série à analyser, qui est réinjectée dans la procédure à l'étape 1. Si $h_1(t)$ n'est pas une FMI, on utilise un processus de tamisage (en anglais *“sifting process”*) appliquée autant de fois que nécessaire pour obtenir une FMI. Dans le processus de tamisage, $h_1(t)$ est considéré comme la nouvelle série; les extrema locaux sont estimés, les enveloppes supérieures et inférieures sont formées et leur moyenne notée $m_{11}(t)$. Cette moyenne est soustraite de $h_1(t)$, fournissant $h_{11}(t) = h_1(t) - m_{11}(t)$. Si $h_{11}(t)$ n'est pas une FMI, le processus de tamisage est répété, jusqu'à ce que la composante $h_{1k}(t)$ satisfasse la condition pour être une FMI. A la fin de ce processus, la première FMI est notée $C_1(t) = h_{1k}(t)$ et le résidu $r_1(t) = x(t) - C_1(t)$ est considéré comme une nouvelle série à l'étape 1.

Les deux processus itératifs décrits ci-dessus (l'algorithme FMI et le processus de tamisage) doivent contenir un critère de fin: nous ne discutons pas ceci ici, et renvoyons à d'autres références pour plus de détails sur la méthode [1,2,16]. Le signal $x(t)$ est alors représenté de la façon suivante:

$$x(t) = \sum_{i=1}^N C_i(t) + r_n(t) \quad (1)$$

En pratique, les FMI sont quasi orthogonaux (mutuellement non corrélés). L'algorithme ci-dessus fonctionne en général, sans hypothèse a priori, de façon auto-adaptative [1–3].

2.2 Analyse spectrale de Hilbert

Après la décomposition en FMI, une analyse spectrale de Hilbert [17] peut être effectuée sur chaque mode pris séparément:

$$C_i^H(t) = \frac{1}{\pi} \int \frac{C_i(t')}{t-t'} dt' \quad (2)$$

La combinaison de $C_i(t)$ et $C_i^H(t)$ permet de construire un signal analytique [14,17]:

$$C_i^A(t) = C_i(t) + jC_i^H(t) = \mathcal{A}_i(t)e^{j\theta_i(t)} \quad (3)$$

où l'amplitude $\mathcal{A}_i(t)$ et la fonction de phase θ_i sont définis comme suit:

$$\begin{cases} \mathcal{A}_i(t) = \sqrt{C_i^2 + C_i^{H^2}} \\ \theta_i(t) = \tan^{-1}\left(\frac{C_i^H}{C_i}\right) \end{cases} \quad (4)$$

On peut alors définir la fréquence instantanée de la façon suivante:

$$\omega_i = \frac{d\theta_i(t)}{dt} \quad (5)$$

Finalement, la série temporelle d'origine peut s'écrire:

$$x(t) = PR \sum_{i=1}^N \mathcal{A}_i(t) e^{j \int \omega_i(t)} + r_n(t) \quad (6)$$

où “PR” signifie partie réelle. Cette approche est analogue à la transformée de Fourier: cela permet une modulation en amplitude et en fréquence de façon simultanée [1,2].

Pour chaque mode, la densité spectrale de Hilbert est définie comme le carré de l'amplitude

$$H(\omega, t) = \mathcal{A}^2(\omega, t) \quad (7)$$

$H(\omega, t)$ donne une valeur locale de l'énergie dans une représentation temps-fréquence [17,1] et on peut extraire la densité de probabilité jointe $p(\omega, \mathcal{A})$ de la fréquence et de l'amplitude, à partir de l'ensemble de la série d'origine (\mathcal{A}_i) et (ω_i) pour l'ensemble des modes $i = 1..N$. Ceci permet d'estimer la densité spectrale marginale (de Hilbert):

$$h(\omega) = \int_0^\infty H(\omega, t) dt \quad (8)$$

qui est une densité d'énergie pour une fréquence ω , qui peut être comparée à la densité spectrale d'énergie estimée par la transformée de Fourier $E(f)$, bien que les définitions de f et ω soient très différentes. L'objectif recherché par ce type de méthode est d'effectuer la décomposition au niveau local, dans un espace temps-fréquence, par une méthode ne nécessitant pas d'hypothèse a priori; plus de détails peuvent être trouvés ailleurs [1–3].

2.3 Généralisation: analyse spectrale de Hilbert d'ordre quelconque

Après avoir exposé l'approche d'origine introduite il y a une dizaine d'années par N. Huang, nous proposons ici une généralisation permettant de considérer les moments d'ordre $q > 0$ quelconque de l'amplitude. Cette approche a été exposée et appliquée à des données de turbulence récemment [18]. Ici nous nous focalisons sur la méthodologie en testant la robustesse de la méthode.

On peut noter tout d'abord que l'approche précédente permet d'estimer la densité de probabilité jointe $p(\omega, \mathcal{A})$ de la fréquence instantanée ω et de l'amplitude \mathcal{A} . Ceci amène une autre expression pour la définition du spectre marginal de Hilbert:

$$h(\omega) = \int_0^\infty p(\omega, \mathcal{A}) \mathcal{A}^2 d\mathcal{A} \quad (9)$$

Cette expression est en fait un second moment statistique. Nous généralisons ici ce calcul spectral pour un moment d'ordre $q > 0$ quelconque en considérant l'intermittence d'une série temporelle sous la forme suivante:

$$\mathcal{L}_q(\omega) = \int_0^\infty p(\omega, \mathcal{A}) \mathcal{A}^q d\mathcal{A} \sim \omega^{-N(q)} \quad (10)$$

où $\mathcal{L}_q(\omega)$ est un spectre d'amplitude de Hilbert généralisé, et où on a supposé une invariance d'échelle caractérisée par l'exposant $N(q)$. L'analyse proposée à l'origine, dans le cadre des premières études présentant la méthode DME accompagné de la transformée de Hilbert-Huang, incluait uniquement le moment d'ordre 2, qui peut être comparé avec la densité spectrale d'énergie en Fourier. Notre proposition ci-dessus correspond à une nouvelle méthodologie pour l'analyse de l'intermittence en fonction de l'échelle non plus dans l'espace physique, mais dans l'espace des fréquences. Il faut noter que dimensionnellement, la fonction $N(q)$ se compare à $1 + \zeta(q)$ obtenu classiquement via les fonctions de structure [19] en turbulence pour le champ de vent ou pour des champs multifractals non-stationnaires $x(t)$

$$\langle (\Delta x_\tau)^q \rangle \approx \tau^{\zeta(q)} \quad (11)$$

où nous avons ici écrit les fonctions de structure $\Delta x_\tau = |x(t + \tau) - x(t)|$ pour un incrément τ , dans une représentation temporelle plutôt que spatiale comme considéré habituellement en turbulence [19]. Cette approche est testée

ci-dessous pour un mouvement Brownien fractionnaire, et pour un processus multifractal.

3 Vérification à l'aide de simulations

L'approche généralisée proposée ici prédit une fonction invariante d'échelle $N(q)$ qui est reliée, dimensionnellement, à l'exposant classique des fonctions de structure $\zeta(q)$. Nous testons ici cette approche sur des séries temporelles stochastiques pour lesquelles l'exposant $\zeta(q)$ est connu théoriquement.

3.1 Validation à l'aide du mouvement Brownien fractionnaire

Le mouvement Brownien fractionnaire $B_H(t)$ est un processus self-similaire classique, défini comme le processus gaussien de moyenne nulle et de fonction d'autocovariance (pour $0 < H < 1$)

$$R_H(t, t') = Cov(X(t), X(t')) = \frac{1}{2} (|t|^{2H} + |t'|^{2H} - |t - t'|^{2H}) Var X(1) \quad (12)$$

Les fonctions de structure correspondantes sont invariantes d'échelle avec l'exposant linéaire $\zeta(q) = qH$. En utilisant le spectre d'amplitude généralisé de Hilbert, on s'attend alors à avoir un exposant

$$N(q) = 1 + qH \quad (13)$$

Nous testons ceci ici à l'aide de simulations stochastiques de mouvements Brownien fractionnaires de différents indices H . La méthode utilisée pour les simulations stochastiques est basée sur la transformée en ondelettes [20]. Nous simulons 500 segments chacun de longueur 2^{12} , avec des paramètres H allant de 0.1 à 0.9 avec un incrément de 0.1. Les figures 1–4 montrent l'analyse spectrale de Hilbert généralisée pour les moments allant de $q = 1$ à 6, pour quatre différentes valeurs de H : $H = 0.2, 0.4, 0.6$ et 0.8 . On peut constater que les lois d'échelles sont très bien vérifiées dans chaque cas. Les pentes de ces lois d'échelles sont estimées par des ajustement par la méthode des moindres carrés, et représentées en Fig.11, pour H allant de 0.1 à 0.9 et pour q allant de 0 à 6 avec un pas de 0.5. On constate que la loi (13) est parfaitement respectée pour cet ensemble de valeurs de q et de H .

Ceci nous amène à proposer 2 méthodes différentes pour estimer la valeur de H en utilisant cette approche spectrale de Hilbert: la première méthode utilise le moment d'ordre 2:

$$H^* = (N(2) - 1)/2 \quad (14)$$

et la seconde méthode propose pour H^\diamond un ajustement sur l'ensemble des valeurs de $(\zeta(q) - 1)/q$ pour q variant de 0 à 6. Les deux méthodes sont comparées en Fig.6 avec les valeurs demandées dans les simulations stochastiques. On constate que l'indicateur H^* basé sur le moment d'ordre 2 est plus proche des valeurs théoriques (erreur de 3 %), tandis que l'indicateur utilisant une plage de valeurs de q semble souvent légèrement surévaluer les estimations des valeurs de H , avec une erreur moyenne de 9 %.

Ceci montre néanmoins de façon numérique la validité de l'équation (13) pour décrire l'exposant d'invariance d'échelle obtenu à l'aide de l'approche spectrale de Hilbert généralisée.

3.2 Validation à l'aide de simulations de processus multifractals

Nous réalisons ici des simulations multifractales non-stationnaires, c'est-à-dire des simulations d'un processus $X(t)$ pour lequel les incréments $\Delta X_\tau = |X(t + \tau) - X(t)|$ vérifient $\langle (\Delta X_\tau)^q \rangle \approx \tau^{\zeta(q)}$, comme c'est le cas par exemple pour le champ de vent [19] ou en finance [21]. Nous utilisons ici une méthode inspirée de la marche aléatoire multifractale lognormale [22]:

$$X(t) = \int_0^t \epsilon(u)^{1/2} dW(u) \quad (15)$$

où $W(t)$ est un mouvement Brownien, et $\epsilon(t)$ un processus multifractal lognormal, que nous simulons ici à l'aide de cascades discrètes lognormales [23]. Le résultat est un processus multifractal possédant, pour ses incréments (fonctions de structure), une invariance d'échelle caractérisée par $\zeta(q)$, prenant ici une forme quadratique:

$$\zeta(q) = \frac{q}{2} - \frac{\mu}{2}(q^2 - q) \quad (16)$$

où μ est un paramètre d'intermittence ($0 \leq \mu \leq 1$).

Nous avons effectué des simulations pour des processus de cascade sur 17 niveaux, avec $N = 2^{17}$ points dans chaque série, pour un total de 500 réalisations. Les exposants d'invariance d'échelle sont estimés pour ces simulations, en moyenne d'ensemble sur les 500 réalisations. La fonction $\zeta(q)$ qui en résulte est représentée pour $\mu = 0.05$ en Fig. 7, superposée à la fonction $\xi(q) - 1$ obtenue via l'approche de Hilbert pour les mêmes séries temporelles: on constate une excellente superposition. Les barres d'erreur dans les deux cas proviennent des différentes estimations pour chaque réalisation: pour les grands moments ($q \geq 4$), la barre d'erreur semble moins importante pour la méthode faisant appel à la transformation de Hilbert.

Ceci montre que la méthode introduite ici fonctionne efficacement pour un processus multifractal, possédant des performances comparables, voire supérieures,

à l'approche utilisant les fonctions de structure.

3.3 Robustesse de la méthode en cas de forçage périodique

Dans plusieurs domaines, comme par exemple l'environnement marin [24], on est souvent mis en présence de séries temporelles présentant un régime invariant d'échelle, superposé à un fort pic associé à un forçage périodique (marée, cycle journalier, cycle annuel...). Il est utile de disposer d'une méthode capable de caractériser ces fluctuations stochastiques invariantes d'échelle, sans être trop perturbées par le forçage. Nous comparons ici les performances de la nouvelle méthode, aux fonctions de structure. Pour cela, nous synthétisons des séries temporelles fBm utilisant la méthode décrite ci-dessus, avec $H = 1/3$. Nous réalisons 500 réalisations, chacune de longueur 2^{14} . Chaque série est normalisée par sa variance, puis on lui ajoute une composante périodique sous la forme:

$$X'(t) = X(t) + I \sin(2\pi f_d t) \quad (17)$$

où I est l'intensité du processus périodique, f_d est sa fréquence. On considère alors l'effet de la composante périodique sur l'estimation des propriétés invariantes d'échelles, à l'aide des fonctions de structure et de l'approche spectrale de Hilbert. On considère d'abord les fonctions de structure pour τ variant de 2 à 10000. Le spectre de Hilbert est estimé à partir d'une moyenne d'ensemble effectuée sur 500 réalisations. Une loi de puissance est observée sur la plage de fréquences $0.0002 < f < 0.2$. On quantifie l'effet de la composante périodique en estimant le ratio entre l'estimation du second moment pour la série d'origine et après addition de la composante périodique:

$$\Upsilon(\tau) = \frac{S'^2(\tau)}{S^2(\tau)}, \text{ et } \Upsilon(\omega) = \frac{\mathcal{L}'_2(\omega)}{\mathcal{L}_2(\omega)} \quad (18)$$

Lorsque la loi de puissance n'est pas affectée par la composante périodique, Υ est constant. Nous montrons le résultat pour différentes intensités I ($I = 0.2, 0.4, 0.6$ et 0.8) en Fig. 8a, la Fig. 8b représentant le rapport $\Upsilon(\tau)$. Les Figs. 8c et 8d représentent le le spectre de Hilbert et le rapport $\Upsilon(\tau)$.

Graphiquement, on constate que l'impact de l'ajout de la composante périodique a une amplitude de plus de deux décades pour les fonctions de structure. En ce qui concernent l'influence sur les petites échelles, pour les fonctions de structure, l'impact Γ_S touche près de 2 décades pour la plus forte intensité $I = 0.8$. Pour l'approche utilisant l'espace de Hilbert, l'impact Γ_S est limité à 0.5 décade. Ceci démontre l'utilité de l'approche spectrale généralisée de Hilbert, pour estimer les régimes invariants d'échelles "perturbés" par un forçage périodique.

4 Application à une série temporelle de turbulence homogène et isotrope

Après cette validation, nous illustrons l'application de cette méthode sur une série temporelle de turbulence pleinement développée. Nous montrons ici brièvement l'application de la nouvelle approche spectrale de Hilbert généralisée à des données expérimentales, en choisissant pour ceci des données de turbulence. En turbulence pleinement développée, il existe un régime dit "inertiel" pour lequel les fluctuations de vitesse possèdent une invariance d'échelle ; ce régime est caractérisé par le classique spectre d'énergie en $-5/3$ de Kolmogorov, et l'intermittence des fluctuations du champ de vitesse sur cette plage d'échelle est classiquement caractérisée à l'aide de modèles multifractals, via les fonctions de structure $\zeta(q)$ non-linéaires et concaves [19,25]. Ce type de série temporelle fournit donc un exemple illustratif permettant de tester l'approche que nous avons introduite ci-dessus.

Nous utilisons une série temporelle de vitesse obtenue à partir de mesures de turbulence quasi isotrope en aval d'une grille active à une distance $x/M = 48$ de la grille dans la direction de l'écoulement, où M est la taille de la maille. L'expérience est caractérisée par le nombre de Reynolds $Re_\lambda = 720$. La fréquence des mesures est $f_s = 40$ kHz et un filtre passe-bas à la fréquence de 20 kHz est appliquée aux mesures [26]. La figure 9 montre la densité spectrale d'énergie estimée par la méthode classique de Fourier, et par l'analyse spectrale de Hilbert. Un spectre de Kolmogorov en $-5/3$ est observé pour les fréquences dans la plage $10 < f$ (ou ω) < 1000 Hz pour chacun des spectres, révélant un intervalle inertiel sur 2 décades en échelles. Ce résultat montre pour la première fois que l'analyse spectrale de Hilbert permet d'obtenir le spectre en $-5/3$, ce qui est un résultat auquel on pouvait s'attendre, mais qui n'est pas trivial pour autant, puisque la méthode d'estimation des fréquences via l'analyse de Hilbert est très différente de l'approche en espace de Fourier. Il est donc intéressant de constater ici que les deux approches sont cohérentes, aussi bien pour la pente spectrale que pour les intervalles en échelles.

La figure 10 représente ensuite $N_q(\omega)$, la pente spectrale généralisée obtenue par la méthode que nous avons introduite ci-dessus, pour différents moments (0, 1, 2 and 4). Le moment d'ordre 0 est la densité de probabilité marginale de la fréquence instantanée. Il est surprenant de constater que cette densité de probabilité est extrêmement "violente", ayant un comportement proche de $N_0(\omega) \sim \omega^{-1}$, correspondant à un processus sporadique, pour lequel la densité de probabilité n'est pas intégrable (puisque $\int p(\omega)d\omega$ diverge). Ce résultat est en fait seulement obtenu lorsque tous les modes sont considérés dans leur ensemble; une telle densité de probabilité n'est pas obtenue pour la fréquence d'un mode pris séparément. Nous observons également des lois de puissance pour les fréquences $10 < \omega < 1000$ Hz pour tous les moments considérés.

Les valeurs de $N(q)$ correspondants sont indiquées dans chaque figure. La figure 11 montre la comparaison de $N(q) - 1$ avec la fonction classique $\zeta(q)$ obtenue via les fonctions de structure, en utilisant la méthode ESS (*Extended Self Similarity*) [27]. On peut constater qu'on retrouve bien la non-linéarité et concavité de la fonction $N(q)$, avec une bonne concordance entre les deux méthodes, malgré une légère déviation pour les moments d'ordre le plus élevé.

5 Conclusion

La méthode d'analyse intitulée Décomposition Modale Empirique a été introduite il y a dix ans avec comme objectif de décomposer une série temporelle en une somme de modes, chaque mode étant localisé dans l'espace des fréquences. L'objectif de ce type de décomposition était de pouvoir appliquer une transformation de Hilbert à chaque mode, de façon à extraire une information fréquentielle locale par cette méthode. Cette approche a été appliquée avec succès à des séries temporelles dans un grand nombre de domaines; il a également été montré que cette approche permet une décomposition selon un banc de filtre dyadique, permettant d'extraire l'exposant H pour les mouvements Browniens fractionnaires [3,4]. Ceci a montré que l'approche DME combinée à une analyse spectrale de Hilbert permet de caractériser un processus mono-fractal pour lequel le seul paramètre important est la valeur de H . Nous avons ici étendu cette approche par une généralisation permettant de prendre en compte l'intermittence de séries temporelles et permettant donc de caractériser des séries temporelles multifractales. Cette généralisation consiste à considérer le moment d'ordre q plutôt que le moment d'ordre 2 pour le spectre.

Nous avons validé cette approche à partir de simulations de mouvement Brownien fractionnaire et de simulations multifractales. Nous avons ensuite montré l'intérêt de cette approche pour des données possédant une invariance d'échelle superposée à un forçage périodique, comme cela se rencontre très souvent dans le domaine environnemental. Nous avons montré la supériorité de cette approche sur les fonctions de structure, le forçage périodique ayant une forte influence sur les fonctions de structure, tandis qu'il se trouve beaucoup plus localisé en échelle dans l'espace spectral de Hilbert.

Nous avons ensuite appliqué cette nouvelle approche à des données de turbulence de vitesse. Ceci a montré: (i) que l'approche proposée s'applique à des données de turbulence, et par extension à des données présentant une intermittence multifractale; (ii) que l'exposant qui peut être extrait de cette façon, via les moments d'ordre q de l'amplitude, sont proches des exposants $\zeta(q)$ obtenus par la méthode classique des fonctions de structure.

Il s'agit donc là d'une proposition de jonction entre la méthode DME-transformée de Hilbert et l'étude de l'intermittence, qui procure une nouvelle méthodologie pour l'étude de l'intermittence. Cette approche est également originale par le fait qu'elle correspond à une étude de l'amplitude dans l'espace des fréquences, ce qui ne fonctionne pas dans le cadre utilisant l'approche en Fourier.

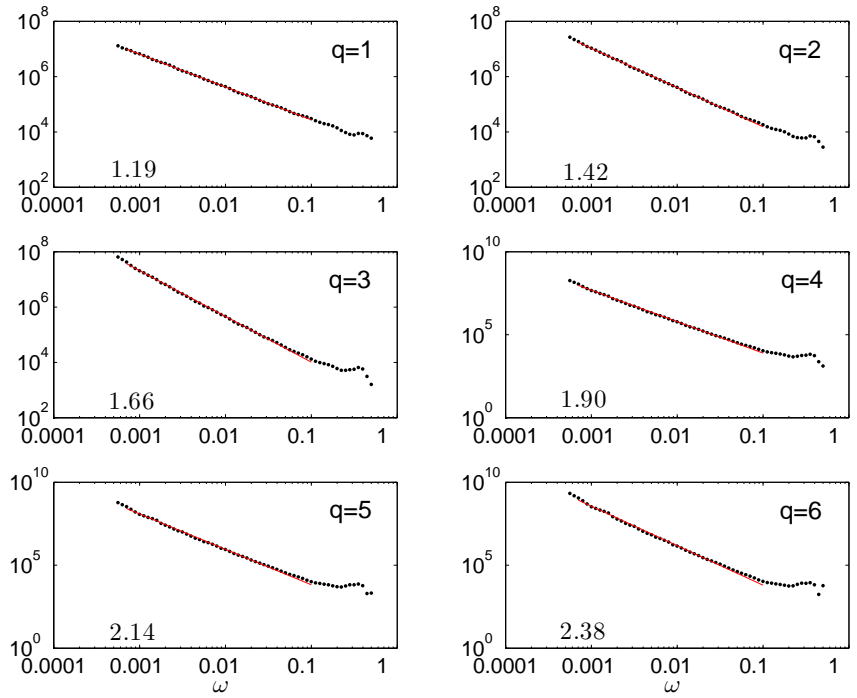


Fig. 1. Les six premiers moments de l'analyse spectrale de Hilbert, en représentation log-log, pour des simulations de mouvement Brownien fractionnaire avec $H = 0.2$. La valeur de l'exposant caractéristique obtenu pour la partie hyperbolique est indiqué dans la figure.

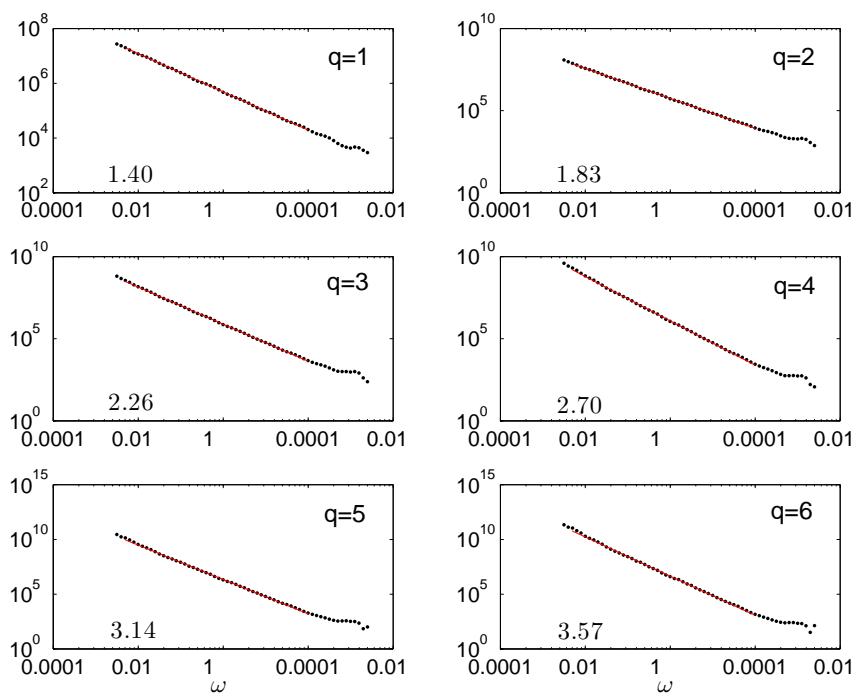


Fig. 2. Figure analogue à la Figure 1, pour $H = 0.4$.

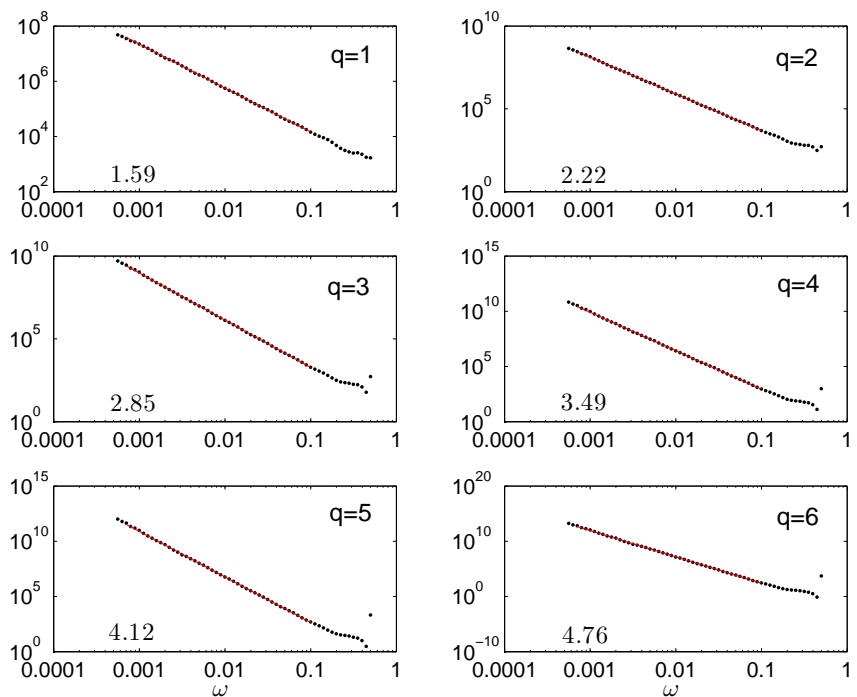


Fig. 3. Figure analogue à la Figure 1, pour $H = 0.6$.

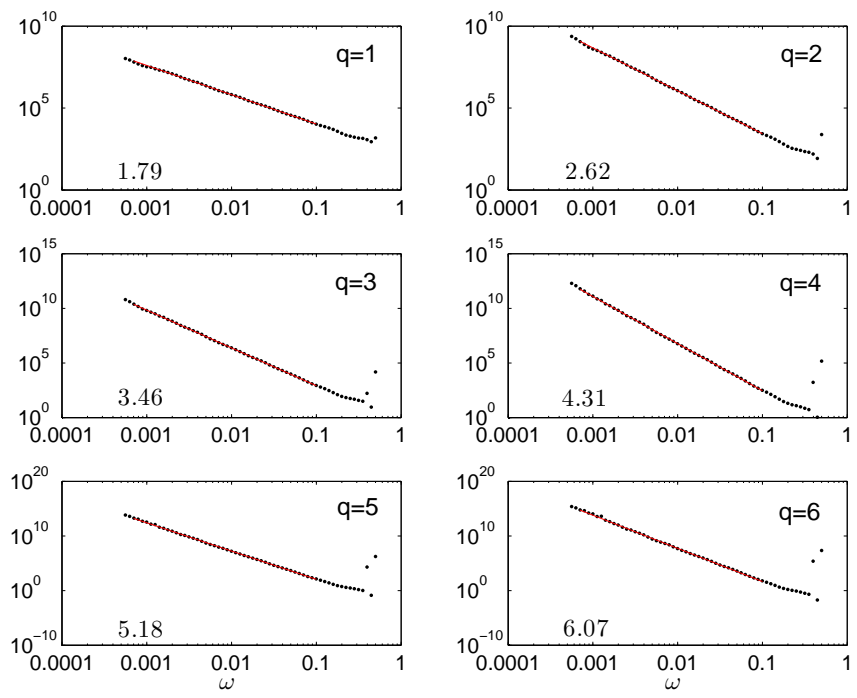


Fig. 4. Figure analogue à la Figure 1, pour $H = 0.8$.

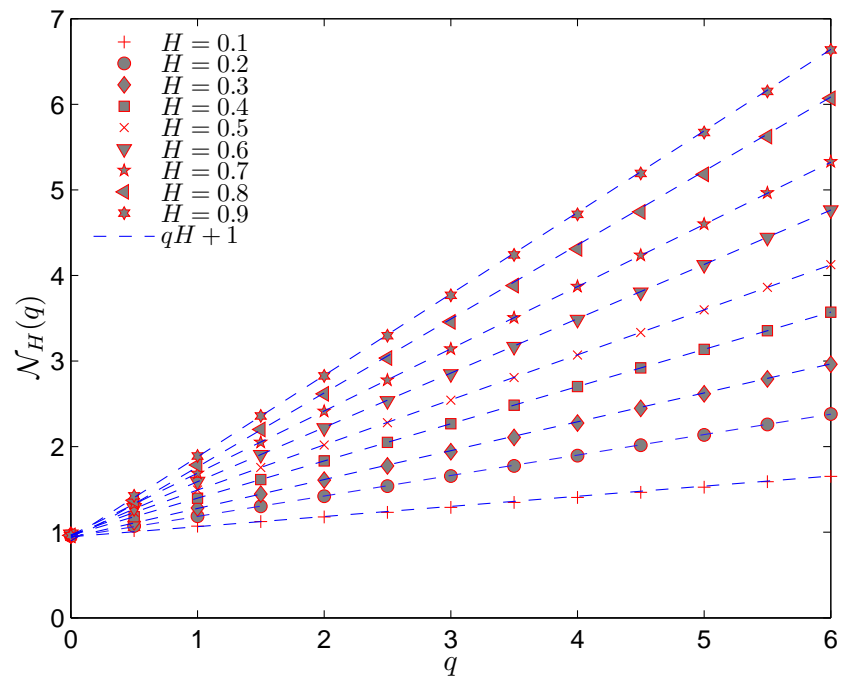


Fig. 5. Représentation des exposants $\mathcal{N}(q)$ en fonction de q , où H varie de 0.1 à 0.9. Les valeurs obtenues sont comparées aux expressions théoriques $1 + qH$, montrant une parfaite adéquation.

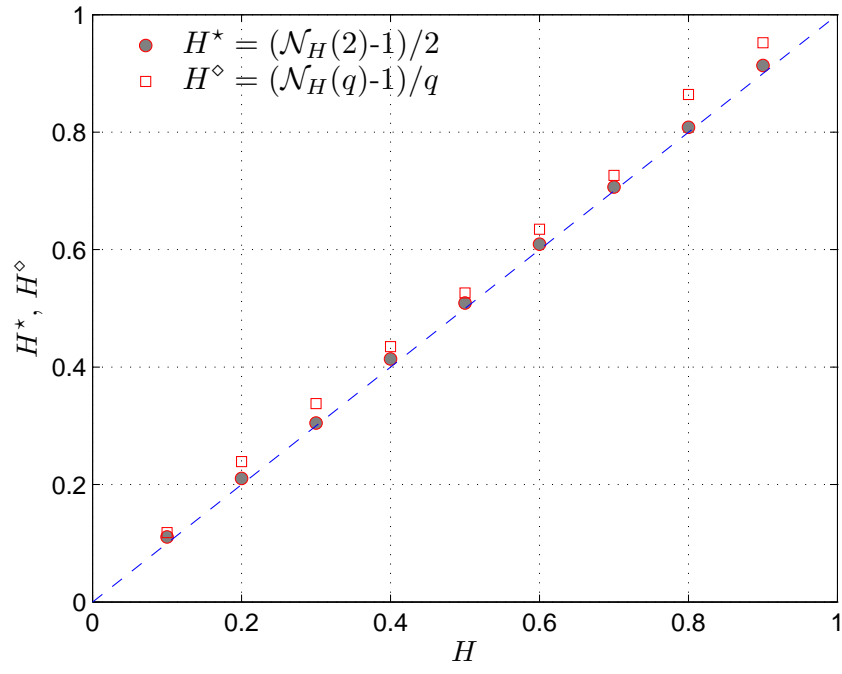


Fig. 6. Comparaison de l'estimation de H^* et H^\diamond avec les valeurs théoriques utilisées pour les simulations.

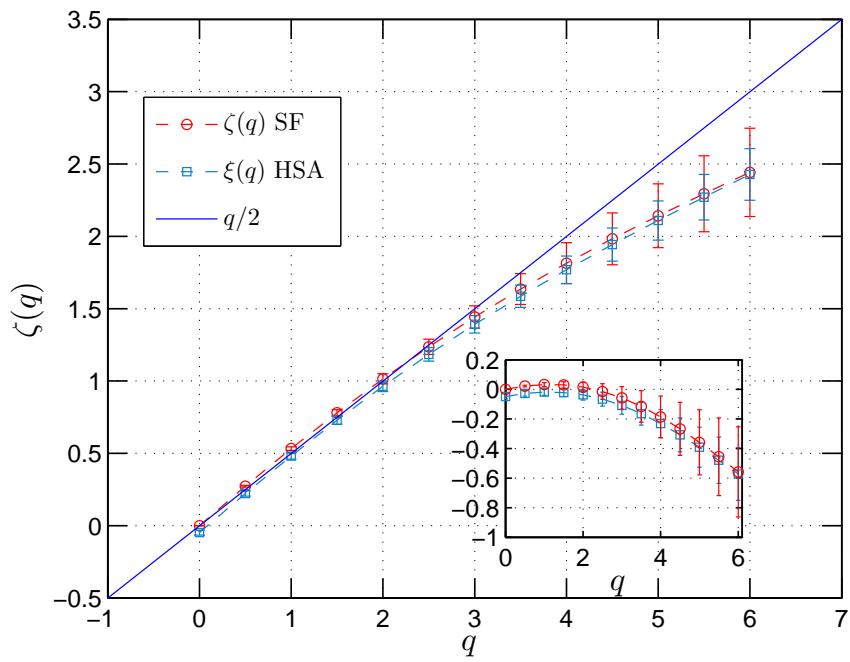


Fig. 7. Comparaison de l'estimation de l'exposant multifractal à l'aide des fonctions de structure et à l'aide de l'analyse spectrale de Hilbert d'ordre quelconque pour des simulations multifractales lognormales avec $\mu = 0.05$.

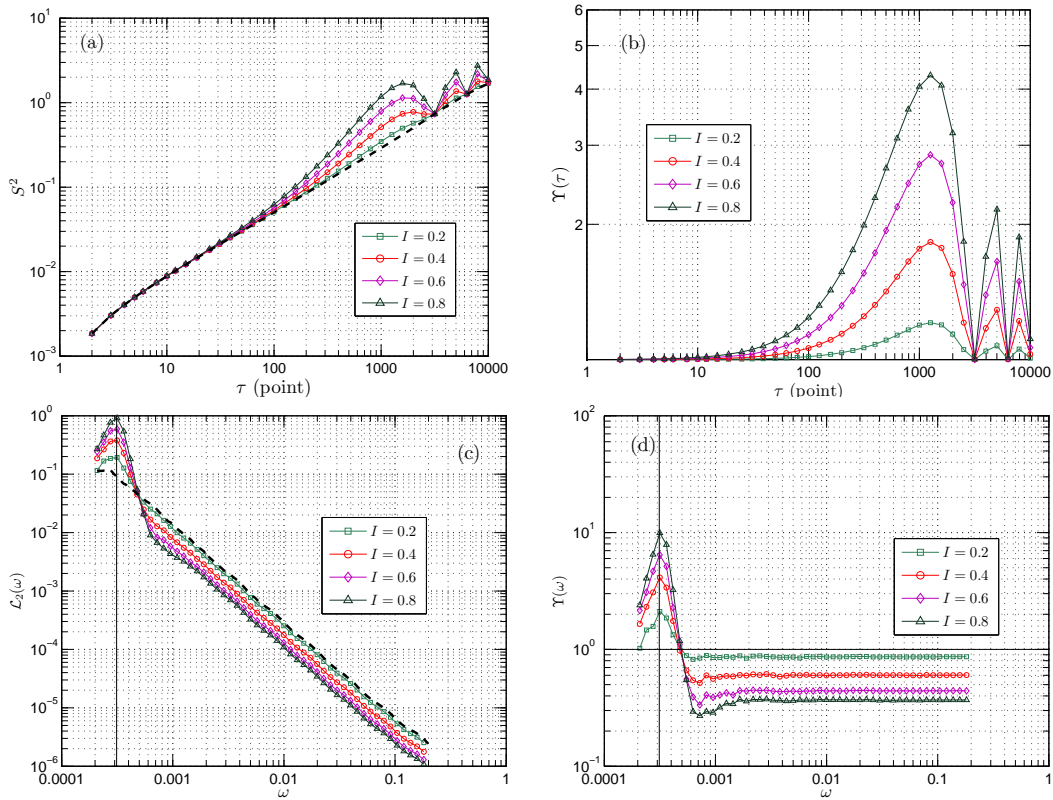


Fig. 8. Représentation de l'effet périodique, (a) fonction de structure d'ordre 2, (b) le ratio $\Upsilon(\tau)$, (c) spectre de Hilbert $\mathcal{L}_2^2(\omega)$, (d) le ratio $\Upsilon(\omega)$, où $f = 1/3200$ et l'intensité $I = 0.2$ (\square), 0.4 (\circ), 0.6 (\diamond) and 0.8 (\triangle).

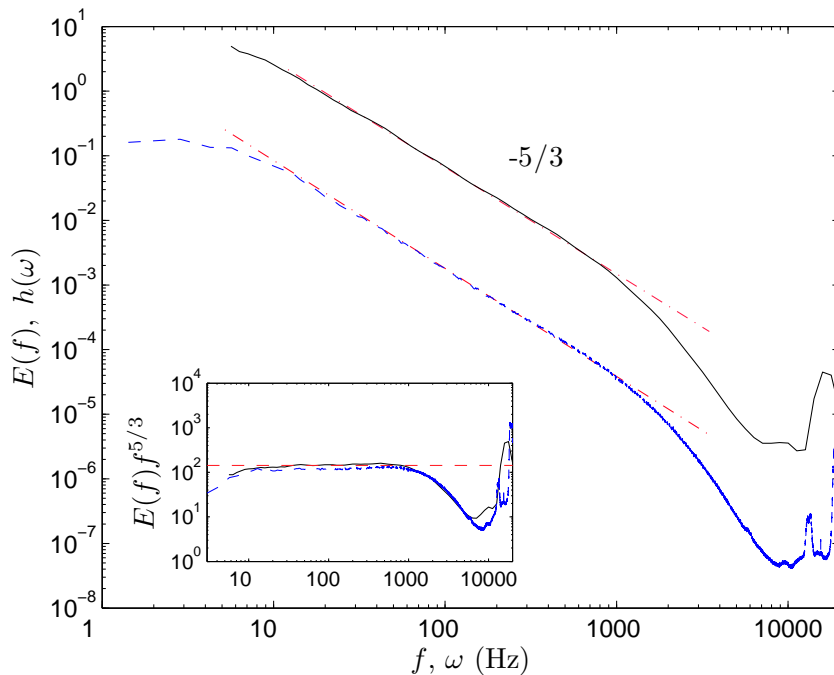


Fig. 9. Comparaison de la densité spectrale d'énergie obtenue par la méthode de Fourier (ligne continue) et par la transformation de Hilbert (ligne pointillée, translatée verticalement). La pente de la ligne de référence est $-5/3$. Les spectres en Fourier et via la transformation de Hilbert montrent le même intervalle inertiel, $10 < f$ (ou ω) < 1000 Hz. La figure miniature montre les spectres compensés.

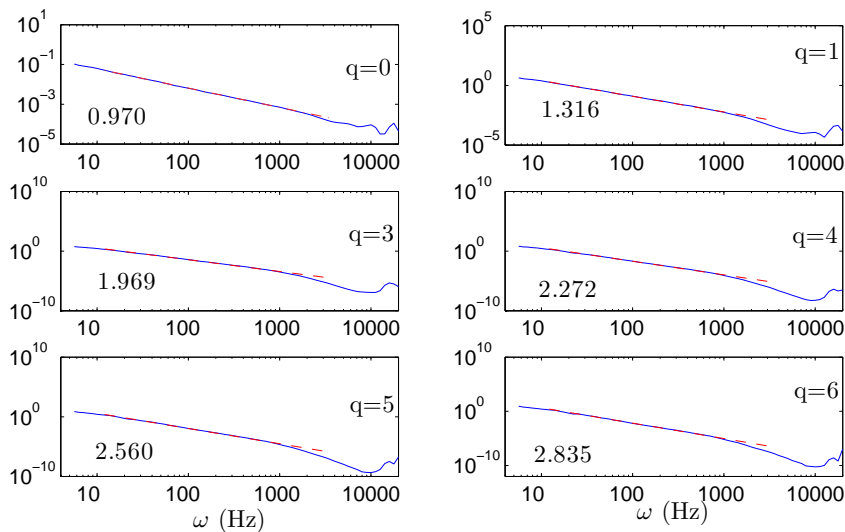


Fig. 10. Représentation de $N(q)$ pour le champ de vitesse turbulente, pour les moments $q = 0, 1, 2$ and 4 . Les lois d'échelles sont observées pour $10 < \omega < 1000$ Hz dans chaque cas. La valeur de $N(q)$ estimée numériquement est indiquée dans chaque figure.

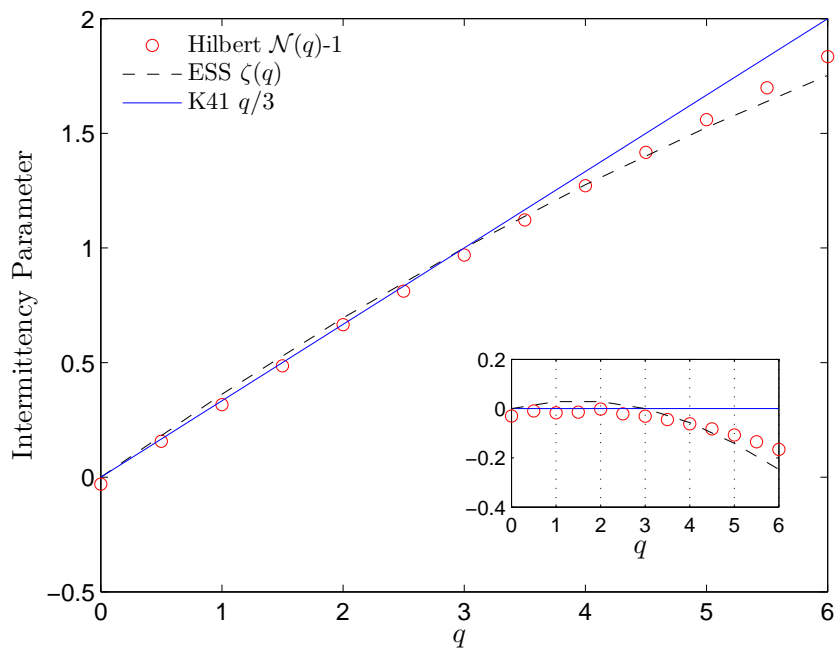


Fig. 11. Comparaison de $N(q) - 1$ avec $\zeta(q)$. La figure miniature montre le départ de la loi K41 correspondant à la droite d'équation $q/3$.

References

- [1] N. E. Huang, Z. Shen, S. R. Long, M. C. Wu, H. H. Shih, Q. Zheng, N.C. Yen, C. C. Tung, and H. H. Liu. The empirical mode decomposition and the Hilbert spectrum for nonlinear and non-stationary time series analysis. *Proc. R. Soc. London*, 454(1971):903–995, 1998.
- [2] N. E. Huang, Z. Shen, and S. R. Long. A new view of nonlinear water waves: The Hilbert Spectrum . *Annu. Rev. Fluid Mech.*, 31(1):417–457, 1999.
- [3] P. Flandrin and P. Gonçalvès. Empirical Mode Decompositions as Data-Driven Wavelet-Like Expansions. *Int. J. of Wavelets, Multires. and Info. Proc.*, 2(4):477–496, 2004.
- [4] Z. Wu and N. E. Huang. A study of the characteristics of white noise using the empirical mode decomposition method. *Proc. R. Soc. London*, 460:1597–1611, 2004.
- [5] Zhi-Yuan Su, Chuan-Chen Wang, Tzuyin Wu, Yeng-Tseng Wang, and Tang Feng-Cheng. Instantaneous frequency-time analysis of physiology signals: the application of pregnant women’s radial artery pulse signals. *Physica A*, 387:485–494, 2008.
- [6] S. J. Loutridis. Resonance identification in loudspeaker driver units: A comparison of techniques. *Appl. Acoust.*, 66(12):1399–1426, 2005.
- [7] I.M. Jánosi and R. Müller. Empirical mode decomposition and correlation properties of long daily ozone records. *Phys. Rev. E*, 71(5):56126, 2005.
- [8] J. I. Salisbury and M. Wimbush. Using modern time series analysis techniques to predict ENSO events from the SOI time series. *Nonlinear Proc. Geoph.*, 9(3/4):341–345, 2002.
- [9] K. T. Coughlin and K. K. Tung. 11-Year solar cycle in the stratosphere extracted by the empirical mode decomposition method. *Adv. Space Res.*, 34(2):323–329, 2004.
- [10] J. Solé, A. Turiel, and JE Llebot. Using empirical mode decomposition to correlate paleoclimatic time-series. *Natural Hazards and Earth System Sciences*, 7:299–307, 2007.
- [11] J. Chen, Y. L. Xu, and R. C. Zhang. Modal parameter identification of Tsing Ma suspension bridge under Typhoon Victor: EMD-HT method. *J. Wind Eng. Ind. Aerodyn.*, 92(10):805–827, 2004.
- [12] P. A. Hwang, N. E. Huang, and D. W. Wang. A note on analyzing nonlinear and nonstationary ocean wave data. *Appl. Ocean Res.*, 25(4):187–193, 2003.
- [13] A. D. Veltcheva and C. G. Soares. Identification of the components of wave spectra by the Hilbert Huang transform method. *Appl. Ocean Res.*, 26(1-2):1–12, 2004.

- [14] L. Cohen. *Time-frequency analysis*. Prentice Hall PTR Englewood Cliffs, NJ, 1995.
- [15] P. Flandrin, G. Rilling, and P. Gonçalves. Empirical mode decomposition as a filter bank. *Signal Processing Letters, IEEE*, 11(2):112–114, 2004.
- [16] G. Rilling, P. Flandrin, and P. Gonçalves. On empirical mode decomposition and its algorithms. *IEEE-EURASIP Workshop on Nonlinear Signal and Image Processing*, 2003.
- [17] S. R. Long, N. E. Huang, C. C. Tung, M. L. Wu, R. Q. Lin, E. Mollo-Christensen, and Y. Yuan. The Hilbert techniques: an alternate approach for non-steady time series analysis. *IEEE Geoscience and Remote Sensing Soc. Lett.*, 3:6–11, 1995.
- [18] Y.X. Huang, F.G. Schmitt, Z.M. Lu, Y.L. Liu. An amplitude-frequency study of turbulent scaling intermittency using Empirical Mode Decomposition and Hilbert Spectral Analysis. *EPL*, 84:40010, 2008.
- [19] U. Frisch. *Turbulence: the legacy of AN Kolmogorov*. Cambridge University Press, 1995.
- [20] P. Abry and F. Sellan. The Wavelet-Based Synthesis for Fractional Brownian Motion Proposed by F. Sellan and Y. Meyer: Remarks and Fast Implementation. *Appl. Comput. Harmon. Anal.*, 3(4):377–383, 1996.
- [21] F. G. Schmitt, D. Schertzer, S. Lovejoy, Multifractal analysis of foreign exchange data. *Appl. Stoch. Models Data Anal.*, 15:29–53, 1999.
- [22] E. Bacry, J. F. Muzy, Log-infinitely divisible multifractal processes. *Commun. Math. Phys.*, 236:449–475, 2003.
- [23] F. G. Schmitt, A causal multifractal stochastic equation and its statistical properties. *Eur. Phys. J. B*, 34:85–98, 2003.
- [24] F.G. Schmitt, G. Dur, S. Souissi, S.B. Zongo, Statistical properties of turbidity, oxygen and pH fluctuations in the Seine river estuary (France). *Physica A*, 387:6613–6623, 2008.
- [25] D. Schertzer, S. Lovejoy, F. Schmitt, Y. Chigirinskaya, and D. Marsan. Multifractal cascade dynamics and turbulent intermittency. *Fractals*, 5(3):427–471, 1997.
- [26] H. Kang, S. Chester, and C. Meneveau. Decaying turbulence in an active-grid-generated flow and comparisons with large-eddy simulation. *J. Fluid Mech.*, 480:129–160, 2003.
- [27] R. Benzi, S. Ciliberto, R. Tripiccone, C. Baudet, F. Massaioli, and S. Succi. Extended self-similarity in turbulent flows. *Phys. Rev. E*, 48(1):29–32, 1993.