

Mosaïques, enveloppes convexes et modèle Booléen : quelques propriétés et rapprochements

Document de synthèse
présenté par
Pierre CALKA

en vue de l'obtention de
l'habilitation à diriger des recherches
Spécialité : Mathématiques

soutenue le 10 décembre 2009

Composition du jury :

Bartek BLASZCZYSZYN	Directeur de recherche (Ecole Normale Supérieure)
Thierry BODINEAU	Professeur (Ecole Normale Supérieure), <i>Rapporteur</i>
Youri DAVYDOV	Professeur (Université Lille 1), <i>Rapporteur</i>
Nathanaël ENRIQUEZ	Professeur (Université Paris Ouest)
Anne ESTRADE	Professeur (Université Paris Descartes)
André GOLDMAN	Professeur (Université Lyon 1)
Volker SCHMIDT	Professeur (Université d'Ulm, Allemagne), <i>Rapporteur</i>

Remerciements

Je tiens tout d'abord à remercier André Goldman qui m'a initié au domaine de la géométrie aléatoire. Il m'a fait partager sa grande imagination et son sens des belles mathématiques. A son contact, j'ai appris à chercher et à le faire avec plaisir. Sa présence dans ce jury me touche particulièrement.

Thierry Bodineau, Youri Davydov et Volker Schmidt m'ont fait l'honneur d'accepter de rapporter sur ce mémoire. Je leur suis extrêmement reconnaissant du soin qu'ils y ont mis.

Bartek Blaszczyszyn et Nathanaël Enriquez ont toute ma gratitude pour avoir bien voulu faire partie du jury. Leur intérêt pour mon travail m'honore.

La présence d'Anne Estrade dans le jury me fait particulièrement plaisir. Je tiens à la remercier pour le fort soutien qu'elle m'a apporté depuis son arrivée au laboratoire MAP5 jusqu'à la préparation de cette habilitation ainsi que pour toutes les discussions intéressantes que nous avons pu avoir.

Je remercie chaleureusement tous mes collaborateurs au contact desquels j'ai beaucoup appris : André Goldman, Henk Hilhorst, André Mézin, Julien Michel, Katy Paroux, Sylvain Porret-Blanc, Grégory Schehr, Tomasz Schreiber, Pierre Vallois et Joe Yukich. Sans eux, ce mémoire n'existerait pas et je suis pleinement conscient de tout ce que je dois à chacun. Je suis par ailleurs extrêmement reconnaissant envers Wilfrid Kendall et Ilya Molchanov de m'avoir accordé leur confiance pour la rédaction d'un chapitre de livre.

Je remercie tous ceux qui font du laboratoire MAP5 et de l'UFR de Mathématiques et Informatique un cadre de travail aussi agréable. Je pense à Bernard Ycart, Christine Graffigne et Annie Raoult qui ont successivement dirigé le laboratoire et je citerai aussi notamment les membres des projets ANR *mipomodim* et MATAIM, de l'équipe de probabilités, les personnes avec lesquelles j'ai travaillé en enseignement sans oublier tous mes voisins du couloir H409. J'aimerais ajouter un merci tout particulier à ceux qui m'ont apporté leurs soutien et amitié depuis mon arrivée au MAP5 et dont l'aide a été déterminante pendant la préparation de cette habilitation : je pense à mes collègues de bureau, Antoine Chambaz et Servane Gey, à Valentine Genon-Catalot et Fabienne Comte.

Merci enfin à ma famille et proches pour leur soutien permanent.

Table des matières

Introduction	6
1 Mosaïques aléatoires	11
1.1 Nombre de côtés des zéro-cellules	13
1.1.1 Lois explicites	13
1.1.2 Cellules à grand nombre de côtés et physique statistique	15
1.2 Forme des zéro-cellules, étude asymptotique à grand rayon inscrit	20
1.2.1 Fonction spectrale de la cellule typique de Poisson-Voronoi	20
1.2.2 Loi du rayon circonscrit et conséquences	22
1.2.3 Théorèmes limites pour le nombre d'hyperfaces et le volume	24
1.2.4 Frontière de la cellule : changement d'échelle local et global, valeurs extrêmes	26
2 Enveloppes convexes aléatoires dans la boule-unité	28
2.1 Grandes déviations pour le nombre de sommets d'un polytope aléatoire dans la boule-unité	29
2.2 Frontière des polytopes aléatoires isotropes dans la boule-unité : convergences par changements d'échelle local et global, valeurs extrêmes	31
3 Le modèle Booléen et autres modèles de recouvrement	36
3.1 Modèle RSA appliqué à un problème de fissuration	36
3.2 Raffinement de la convergence vers la cellule de Crofton	39
3.3 Fonction de visibilité : distribution et asymptotiques	42
Perspectives	47
Liste des publications	52
Bibliographie	54

Introduction

La géométrie aléatoire trouve ses origines dans un jeu de hasard inventé par le Comte de Buffon en 1733 : le problème connu sous le nom d'aiguille de Buffon consiste à déterminer la probabilité qu'un objet jeté au sol sur une mosaïque régulière rencontre l'une des arêtes de cette mosaïque. Pour résoudre ce problème, Buffon utilise un calcul intégral, vraisemblablement pour la première fois en probabilités. Il obtient une formule où apparaît le nombre π et par conséquent un moyen simple d'en fournir une valeur approchée. De nombreuses autres questions faisant intervenir les probabilités et la géométrie élémentaire autour d'expériences imaginaires simples ont été envisagées depuis le dix-neuvième siècle et cela a conduit au développement du domaine de la géométrie intégrale puis de la géométrie stochastique (terme introduit par D. G. Kendall, K. Krickeberg et R. E. Miles en 1969). Parallèlement, dès la seconde partie du vingtième siècle, l'étude de vrais matériaux provenant de la géologie, la biologie ou la médecine a nécessité l'utilisation de modèles issus de la géométrie aléatoire et a naturellement soulevé un grand nombre de questions théoriques, par exemple pour tout ce qui tourne autour de la stéréologie. De nos jours, la géométrie aléatoire est une branche reconnue des probabilités et des domaines tels que la statistique spatiale, l'analyse d'images, la physique des matériaux, la médecine et même la finance y ont régulièrement recours. Les modèles introduits sont porteurs de nombreux problèmes motivants pour les mathématiciens, où l'intuition géométrique se heurte bien souvent à la difficulté de mener au bout des calculs explicites.

Dans ce mémoire, trois objets d'étude sont envisagés :

- Les mosaïques aléatoires ;
- les enveloppes convexes aléatoires ;
- le modèle Booléen, dit de percolation continue.

Il s'agit de trois modèles qui sont aujourd'hui parmi les plus classiques de la géométrie aléatoire euclidienne. Dans ce qui suit, une partie sera consacrée à chacun d'entre eux.

Les mosaïques sont des partitions de l'espace en cellules, qui sont dans le cas d'une mosaïque convexe, des polyèdres convexes. Elles interviennent naturellement dans de nombreux domaines d'application, tels que l'astrophysique, les télécommunications, la biologie moléculaire et la biologie cellulaire. En 1644, R. Descartes avait par exemple introduit dans

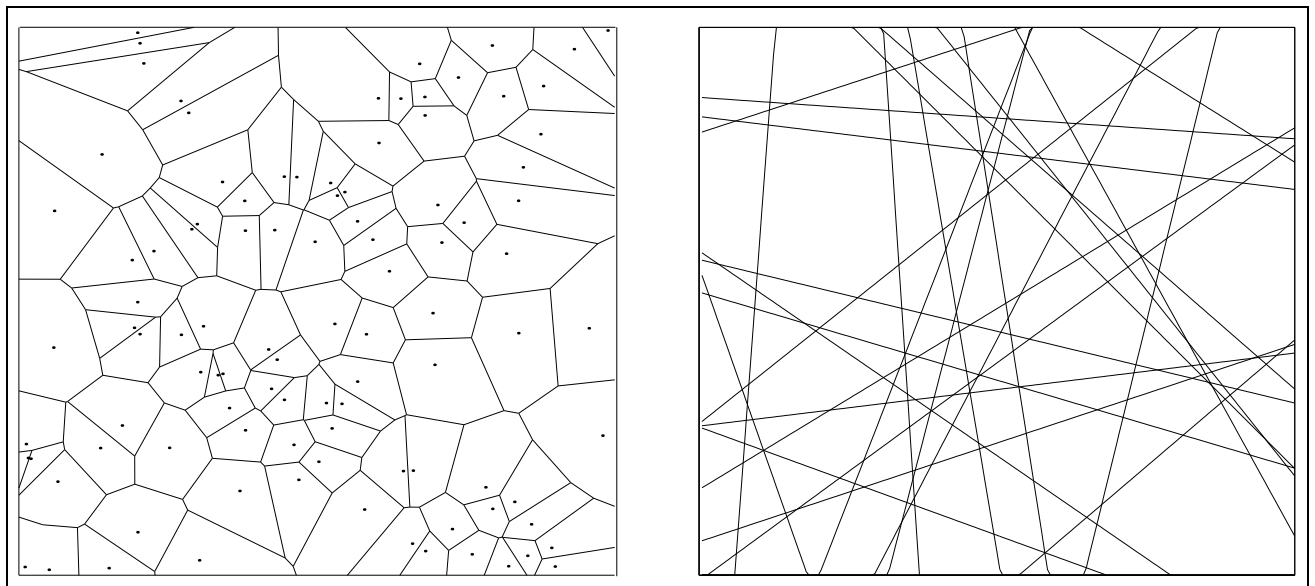


FIG. 1 – Réalisations d’une mosaïque de Poisson–Voronoi (à gauche) et d’une mosaïque poissonnienne de droites (à droite) dans un carré

un cadre déterministe les mosaïques que l’on connaît aujourd’hui sous le nom de Voronoi dans le but de décrire la répartition de la matière dans le système solaire et ses environs. Plus récemment, on a constaté que les cellules de Voronoi fournissent un modèle intéressant pour représenter notamment un tissu épithélial, la forme de grandes molécules de protéine ou des bulles de savon. On peut d’ailleurs noter qu’il a déjà été proposé d’exploiter les irrégularités d’une telle mosaïque pour détecter des cellules cancéreuses au sein d’un tissu biologique. L’idée de considérer ce type de structure comme la réalisation d’un processus aléatoire remonte essentiellement à la seconde partie du vingtième siècle. L’étude théorique des mosaïques aléatoires a débuté sous l’impulsion notamment de D. G. Kendall, J. L. Meijering, E. N. Gilbert et R. E. Miles. En général, on s’intéresse aux propriétés moyennes de toutes les cellules qui constituent la partition ou au contraire aux propriétés d’une seule de ces cellules. Dans les travaux présentés ici, on considérera plus particulièrement la géométrie de la cellule contenant l’origine (dite *zéro-cellule*) pour une mosaïque construite avec un processus poissonnien d’hyperplans. Les résultats porteront sur les calculs explicites de distributions et plus largement sur les propriétés asymptotiques de ce polyèdre lorsqu’il est grand, dans un sens à préciser.

Les enveloppes convexes aléatoires (souvent appelées polytopes aléatoires dans la littérature) sont construites comme les plus petits ensembles convexes contenant un nuage de points aléatoires donné. A l’origine de ce modèle, le problème de Sylvester en 1864 consiste à déterminer la probabilité que quatre points jetés suivant une certaine loi forment

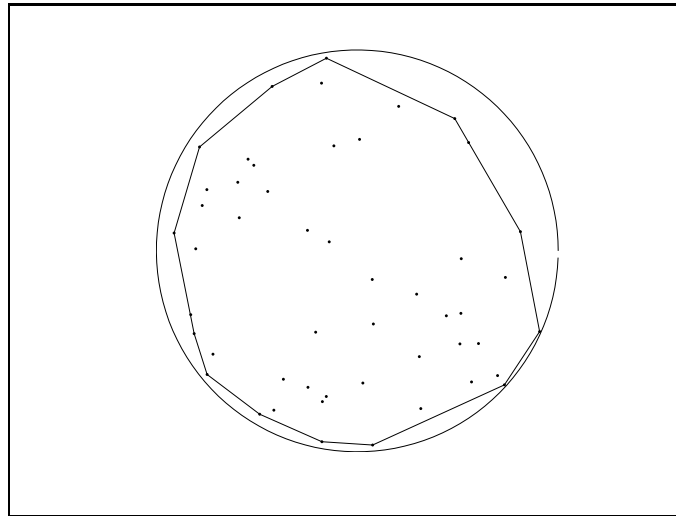


FIG. 2 – Réalisation d’une enveloppe convexe aléatoire dans le disque-unité

un quadrilatère convexe. L’intérêt pour les polytopes aléatoires s’est accru durant les cinquante dernières années, en particulier car ils se sont révélés d’une grande utilité dans des domaines aussi variés que l’algorithmique, l’optimisation ou l’archéologie. On peut par exemple citer l’utilisation que l’infographie fait des enveloppes convexes pour colorier rapidement des zones. Les premiers à avoir développé l’analyse théorique de ces objets sont notamment J. G. Wendel, B. Efron, A. Rényi et R. Sulanke. Il existe peu de résultats disponibles lorsque la taille du nuage de points considéré est fixée et l’essentiel des recherches porte sur les propriétés asymptotiques de ces polytopes lorsque le nombre de points jetés est grand. Dans ce mémoire, on s’intéresse au cas des enveloppes convexes isotropes à l’intérieur de la boule-unité et plus particulièrement à des théorèmes limites portant sur la géométrie de ces polyèdres.

Le modèle Booléen est un processus de recouvrement de l’espace par des objets dont la forme et la position sont aléatoires. On obtient ainsi une partition binaire avec deux zones, le plein et le vide. Introduit par E. N. Gilbert en 1961 pour modéliser la transmission d’ondes radio, cet objet a ensuite été étudié par P. Hall, M. V. Menshikov et R. Roy notamment. De par sa structure qui fait directement songer à un milieu de type poreux, le modèle Booléen est naturellement utilisé en physique des matériaux mais aussi en médecine ou télécommunications. Il sert par exemple à modéliser la forme de structures géologiques générées par sédimentation, la microstructure du papier ou encore les gouttelettes d’eau dans l’étude d’une transition de phase liquide-vapeur. Le principal problème envisagé est celui de la percolation continue, c’est-à-dire l’étude de l’existence et du nombre de composantes connexes non bornées du plein ou du vide. Les travaux que nous présentons ici sont centrés autour de la géométrie de la composante connexe

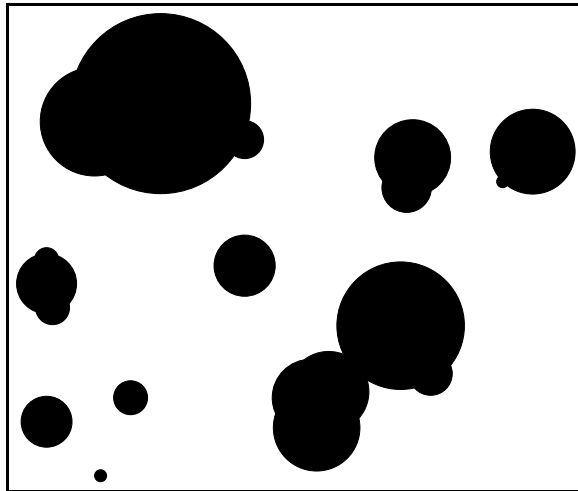


FIG. 3 – Réalisation d'un modèle Booléen dans un carré avec des grains circulaires

du vide contenant l'origine lorsque celle-ci n'est pas recouverte. Par ailleurs, un modèle de recouvrement unidimensionnel sans interpénétration des objets est également proposé pour représenter un phénomène de fissuration des matériaux.

Cette structuration en trois parties qui isole ces différents modèles reste essentiellement artificielle, tant les interactions entre eux sont grandes. Les travaux ici présentés ont notamment permis de mettre en lumière des analogies profondes entre la géométrie des zéro-cellules de mosaïques isotropes, celle des enveloppes convexes de nuages de points dans la boule-unité ou encore celle d'une composante connexe de la partie non recouverte par un modèle Booléen. Dans les trois cas, il s'agit en effet d'une forme aléatoire, étoilée autour d'une origine, invariante par rotation en loi et qui devient sphérique lorsqu'elle grossit (dans un sens à préciser). Ainsi, certains résultats feront intervenir deux de ces modèles simultanément, comme par exemple ceux concernant la convergence à grande intensité vers la cellule de Crofton de la composante connexe du vide autour de l'origine du modèle Booléen. D'autres résultats de type asymptotique pourront s'écrire aussi bien pour les zéro-cellules que pour les enveloppes convexes, comme notamment la convergence de la frontière de ces polyèdres vers un processus de croissance parabolique. Il ne fait aucune doute que même aujourd'hui, les connections entre ces trois modèles n'ont pas encore été totalement exploitées.

Notations communes à l'ensemble du mémoire

$\#\{\cdot\}$: cardinal d'un ensemble fini

$\langle \cdot, \cdot \rangle$: produit scalaire usuel sur \mathbb{R}^d

$\|\cdot\|$: norme euclidienne sur \mathbb{R}^d

$B(x, r)$: boule de centre $x \in \mathbb{R}^d$ et de rayon $r > 0$

\mathbb{B}^d : boule-unité de \mathbb{R}^d

\mathbb{S}^{d-1} : sphère-unité de \mathbb{R}^d

V_d : mesure de Lebesgue dans \mathbb{R}^d

σ_{d-1} : mesure uniforme (non normalisée) sur la sphère-unité \mathbb{S}^{d-1}

κ_d : mesure de Lebesgue de la boule-unité dans \mathbb{R}^d

ω_d : aire de la sphère-unité dans \mathbb{R}^d

$\mathbf{1}$: fonction indicatrice d'un ensemble

\mathcal{K}^d : ensemble des convexes compacts de \mathbb{R}^d

$\text{conv}(\chi)$: enveloppe convexe du sous-ensemble χ de \mathbb{R}^d

$F(\chi)$: fleur de Voronoi $\cup_{x \in \text{conv}(\chi)} B(x/2, \|x\|/2)$ associée au sous-ensemble χ de \mathbb{R}^d

\mathbb{P} : probabilité

\mathbb{E} : espérance

$\mathbf{X}, \mathbf{X}_\lambda$: processus ponctuel de Poisson

Chapitre 1

Mosaïques aléatoires

Une *mosaïque convexe* de l'espace euclidien \mathbb{R}^d ($d \geq 1$) est une collection localement finie $\{C_i\}_{i \geq 1}$ de polyèdres convexes telle que C_i et C_j ont des intérieurs disjoints pour tous $i \neq j$ et $\bigcup_{i \geq 1} C_i = \mathbb{R}^d$. On munit l'ensemble des mosaïques convexes de \mathbb{R}^d de la tribu engendrée par les ensembles de la forme

$$\{\mathcal{T} = \{C_i\}_{i \geq 1} : [\bigcup_{i \geq 1} \partial C_i] \cap K \neq \emptyset\}$$

où K est un ensemble compact de \mathbb{R}^d . Une mosaïque convexe aléatoire est alors une variable aléatoire à valeurs dans l'ensemble des mosaïques convexes de \mathbb{R}^d .

Dans ce chapitre, on s'intéresse en particulier à deux constructions classiques : la mosaïque poissonnienne d'hyperplans et la mosaïque poissonnienne de Voronoi.

Soit \mathbf{X} un processus ponctuel dans \mathbb{R}^d qui ne contient pas l'origine presque-sûrement. Pour tout $x \in \mathbf{X} \setminus \{0\}$, on note H_x l'hyperplan (parfois appelé hyperplan *polaire*) qui est orthogonal à x et contient x , c'est-à-dire

$$H_x = \{y \in \mathbb{R}^d : \langle y - x, x \rangle = 0\}.$$

La *mosaïque d'hyperplans* induite par \mathbf{X} est la mosaïque convexe constituée de l'adhérence de chaque composante connexe de $\mathbb{R}^d \setminus \bigcup_{x \in \mathbf{X}} H_x$.

En particulier, considérons la mesure Θ_1 sur \mathbb{R}^d dont la densité par rapport à la mesure de Lebesgue est $\|\cdot\|^{-(d-1)}$. Si \mathbf{X} est un processus ponctuel de Poisson de mesure d'intensité Θ_1 , alors la mosaïque d'hyperplans associée est isotrope et stationnaire. On parle alors de *mosaïque poissonnienne d'hyperplans*.

Soit \mathbf{X} un processus ponctuel dans \mathbb{R}^d . Pour tout $x \in \mathbf{X}$, on définit la cellule associée à x comme étant

$$C(x) = \{y \in \mathbb{R}^d : \|y - x\| \leq \|y - x'\| \text{ pour tout } x' \in \mathbf{X}\}.$$

La *mosaïque de Voronoi* induite par \mathbf{X} est la collection $\{C(x) : x \in \mathbf{X}\}$. Les points du processus sont appelés *germes* de la mosaïque.

En particulier, lorsque \mathbf{X} est un processus ponctuel de Poisson homogène, stationnaire sur \mathbb{R}^d , la mosaïque de Voronoi associée est stationnaire et isotrope. On parle de *mosaïque de Poisson–Voronoi*.

Il existe bien sûr de nombreux autres modèles de mosaïques aléatoires que nous n’aborderons pas ici, parmi lesquels les plus populaires sont actuellement la mosaïque de Laguerre [47, 49], la mosaïque de Johnson-Mehl [68] et les mosaïques itérées [71, 53]. De plus, dans le cadre d’applications en télécommunications, la notion de mosaïque a été étendue à des modèles de recouvrement de type *shot-noise* qui ne sont plus nécessairement des partitions [3]. Pour plus de détails sur les mosaïques en général, on pourra notamment consulter les ouvrages de références dûs à D. Stoyan et alt. [95], A. Okabe et alt. [72] et R. Schneider et W. Weil ([88], chapitre 10).

Face à ce type de partition, il est naturel d’isoler une cellule particulière et d’en étudier les propriétés. En particulier, lorsqu’elle est unique presque-sûrement, la cellule contenant l’origine est appelée *zéro-cellule*. On peut remarquer qu’elle prend aussi le nom de *cellule de Crofton* dans le cas d’une mosaïque poissonnienne d’hyperplans. Une autre manière d’appréhender les modèles consiste au contraire à faire une analyse statistique de l’ensemble de la population des cellules d’une même mosaïque. Dans ce contexte, des calculs de moyennes empiriques de grandeurs mesurées sur chacune des cellules ont été proposés dès les travaux de J. L. Meijering [57] ou de R. E. Miles [61, 62]. L’étude théorique de la convergence de moyennes ergodiques est due en particulier à R. Cowan [20, 21]. Elle a été complétée plus récemment par des théorèmes centraux limites [2, 74, 33]. Parallèlement, l’outil des mesures de Palm [56] a été exploité pour définir une notion de cellule typique d’une mosaïque stationnaire, c’est-à-dire représentant en moyenne l’ensemble des cellules constituant la mosaïque. Plus précisément, lorsqu’on peut attribuer à chaque cellule C un centre $z(C)$ tel que $z(C + x) = z(C) + x$, la cellule typique \mathcal{C} est définie comme une variable aléatoire à valeurs dans l’ensemble des convexes compacts \mathcal{K}^d qui satisfait pour toute fonction mesurable et bornée $f : \mathcal{K}^d \rightarrow \mathbb{R}$ et tout borélien B tel que $0 < V_d(B) < \infty$

$$\mathbb{E}(f(\mathcal{C})) = \frac{1}{\gamma V_d(B)} \mathbb{E} \left\{ \sum_{\{C:z(C) \in B\}} f(C - z(C)) \right\}, \quad (1.1)$$

où γ est le nombre de centres $z(C)$ par unité de volume.

On peut montrer que les deux approches, c’est-à-dire l’utilisation d’une procédure de Palm et celle d’un théorème ergodique, coïncident. Par exemple, dans le cas d’une mosaïque de Poisson-Voronoi [67] ou d’une mosaïque poissonnienne d’hyperplans (voir par exemple [T1]), l’espérance $\mathbb{E}(f(\mathcal{C}))$ définie par (1.1) satisfait lorsque f est invariante

par translation

$$\mathbb{E}(f(\mathcal{C})) = \frac{1}{\mathbb{E}(\lambda_d(C_0)^{-1})} \mathbb{E} \left(\frac{f(C_0)}{\lambda_d(C_0)} \right) = \lim_{R \rightarrow +\infty} \frac{1}{\#\{C : z(C) \in B(0, R)\}} \sum_{C: z(C) \in B(0, R)} f(C) \quad \text{p.s.} \quad (1.2)$$

où C_0 désigne la zéro-cellule de la mosaïque.

En fait, les relations (1.1) et (1.2) ne sont guère utilisées en pratique. Ainsi, dans le cas d'une mosaïque de Poisson-Voronoi, la cellule typique peut être réalisée comme la zéro-cellule d'une mosaïque poissonnienne d'hyperplans associée à une mesure d'intensité proportionnelle à la mesure de Lebesgue [69].

Le travail [T1] propose une réalisation de la cellule typique dans le cas d'une mosaïque poissonnienne d'hyperplans. Plus précisément, considérons une boule $B(0, R_I)$ où R_I suit la loi exponentielle de paramètre ω_d . La cellule \mathcal{C} est alors égale en loi à l'intersection des deux ensembles suivants :

- le simplexe circonscrit à cette boule et indépendant de R_I tel que la densité de la loi conjointe des vecteurs unitaires orthogonaux aux hyperfaces est proportionnelle au volume du simplexe formé par ces vecteurs ;
- la cellule de Crofton de la mosaïque poissonnienne construite à partir d'un processus ponctuel de Poisson de mesure d'intensité $\mathbf{1}_{B(0,r)^c} d\Theta_1$ conditionnellement à $\{R_I = r\}$, $r \geq 0$.

Ce chapitre est centré sur l'étude de certaines caractéristiques de zéro-cellules de mosaïques d'hyperplans isotropes. Deux parties le composent : la première est consacrée au nombre d'hyperfaces, la seconde à la fonction spectrale, le rayon circonscrit et plus généralement à la forme de la cellule lorsque son rayon inscrit est grand.

1.1 Nombre de côtés des zéro-cellules

1.1.1 Lois explicites

Les résultats présentés dans cette partie proviennent des travaux [T4, T5, T12]. Par souci de privilégier l'essentiel des idées, nous avons choisi de ne pas retranscrire ici l'intégralité des formules explicites et des résultats numériques présents dans les articles en question.

On considère la zéro-cellule C_0 d'une mosaïque poissonnienne et isotrope d'hyperplans dont la mesure d'intensité est $d\Theta = \gamma \|x\|^{\alpha-d} dx$, où $\alpha \geq 1$ et $\gamma > 0$. Ce choix est inspiré par le modèle plus général introduit par D. Hug et R. Schneider [36] mais nous évitons ici d'introduire une mesure directionnelle sphérique en faisant l'hypothèse d'isotropie. En particulier, à homothétie près, si $\alpha = 1$, C_0 est la cellule de Crofton et si $\alpha = d$, C_0 a la loi

de la cellule typique de Poisson–Voronoi. La quantité à laquelle on s'intéresse dans cette partie est le nombre N_{d-1} d'hyperfaces de C_0 .

Les résultats que nous obtenons sont les suivants :

- une représentation intégrale de la loi de N_{d-1} qui est explicite en dimension deux ;
- la loi explicite de de la cellule C_0 en dimension deux (c'est-à-dire la loi jointe des positions de ses côtés) lorsque celle-ci est conditionnée par son nombre de côtés.

Plus précisément, pour tout $n \geq (d+1)$ et tous $x_1, \dots, x_n \in \mathbb{R}^d \setminus \{0\}$, on note $D(x_1, \dots, x_n)$ la composante connexe contenant l'origine de $\mathbb{R}^d \setminus \cup_{i=1}^n H_{x_i}$.

La formule de Slivnyak (voir par exemple le chapitre 3 de [88]) permet d'obtenir que

$$\mathbb{P}\{N_{d-1} = n\} = \frac{1}{n!} \int e^{-\gamma\Phi(x_1, \dots, x_n)} \mathbf{1}_{A_n}(x_1, \dots, x_n) d\Theta(x_1) \dots d\Theta(x_n), \quad (1.3)$$

où $\gamma\Phi(x_1, \dots, x_n) = \Theta(\{x \in \mathbb{R}^d : H_x \cap D(x_1, \dots, x_n) \neq \emptyset\})$ et A_n est l'ensemble des n -uplets (x_1, \dots, x_n) tels que $D(x_1, \dots, x_n)$ est un polyèdre convexe avec n hyperfaces et contenant l'origine. Remarquons qu'une formule analogue avait été obtenue de manière heuristique en dimension deux et pour la cellule typique de Poisson–Voronoi par R. E. Miles et R. J. Maillardet [64].

Dans le cas du plan, la fonction Φ ainsi que la fonction indicatrice $\mathbf{1}_{A_n}$ peuvent être explicitées en fonction des coordonnées polaires de x_1, \dots, x_n . Un calcul intermédiaire valable en toute dimension implique la relation

$$\Phi(x_1, \dots, x_n) = \frac{1}{\alpha} \int h_{D(x_1, \dots, x_n)}(u)^\alpha d\sigma_{d-1}(u)$$

où $h_K(u) = \sup\{\langle x, u \rangle : x \in K\}$, $u \in \mathbb{S}^{d-1}$, est la fonction de support d'un convexe compact K contenant l'origine (voir par exemple la partie 1.7 de l'ouvrage [87]). De plus, en dimension deux, si les points $x_1 = (r_1, \theta_1), \dots, x_n = (r_n, \theta_n)$ sont ordonnés par angle croissant, on a pour tout $u_\theta = (\cos(\theta), \sin(\theta))$ avec $\theta_i \leq \theta < \theta_{i+1}$,

$$h_{D(x_1, \dots, x_n)}(u_\theta) = \frac{1}{\sin(\theta_{i+1} - \theta_i)} (\sin(\theta_{i+1} - \theta)r_i + \sin(\theta - \theta_i)r_{i+1}).$$

En particulier, il est possible d'intégrer la fonction $h_{D(x_1, \dots, x_n)}^\alpha$ dans les cas $\alpha = 1$ et $\alpha = 2$. On obtient alors dans le premier cas le périmètre de l'ensemble $D(x_1, \dots, x_n)$ et dans le second cas l'aire de la fleur de Voronoi $F(x_1, \dots, x_n)$ de $D(x_1, \dots, x_n)$, à savoir l'union des disques $B(x/2, \|x\|/2)$ pour tous les x contenus dans $D(x_1, \dots, x_n)$. Enfin, la fonction indicatrice de A_n peut aussi être explicitée : $(x_1, \dots, x_n) \in A_n$ si et seulement si pour tout $1 \leq i \leq n$,

$$r_{i-1} \sin(\theta_{i+1} - \theta_i) + r_{i+1} \sin(\theta_i - \theta_{i-1}) > r_i \sin(\theta_{i+1} - \theta_{i-1})$$

avec la convention $x_0 = (r_0, \theta_0) = x_n$ et $x_{n+1} = x_1$.

Les formules obtenues permettent alors de procéder à des estimations numériques de la loi du nombre d'hyperfaces sans recourir à des simulations de mosaïques. Par ailleurs, on peut montrer que la fonctionnelle qui apparaît à l'intérieur de l'intégrale dans la relation (1.3) est à constante multiplicative près la densité de la loi des positions respectives des n hyperplans qui interceptent la frontière de la zéro-cellule conditionnée à avoir n hyperfaces. En particulier, on retrouve le résultat obtenu notamment par S. Zuyev [108] selon lequel, conditionnellement à $\{N_{d-1} = n\}$, $n \geq (d+1)$, la quantité $\Theta(\{x \in \mathbb{R}^d : H_x \cap C_0 \neq \emptyset\})$ suit une loi Gamma de paramètres n et 1.

1.1.2 Cellules à grand nombre de côtés et physique statistique

Les résultats présentés dans cette partie sont issus d'un travail commun avec Henk Hilhorst [T9] et d'un second travail en collaboration avec Henk Hilhorst et Grégory Schehr [T10]. Certaines des méthodes utilisées proviennent de la physique statistique, avec le niveau de rigueur communément admis dans ce domaine. Des formules explicites présentes dans les articles ne sont pas reportées dans leur intégralité ici par souci d'éviter une accumulation de notations et de privilégier l'exposition des arguments essentiels.

Etude asymptotique

Nous reprenons le modèle paramétrique de zéro-cellule introduit dans la partie 1.1.1. Nous nous restreignons au cas de la dimension deux et nous nous intéressons plus particulièrement au comportement asymptotique de la loi du nombre de côtés N_1 , c'est-à-dire à la quantité $p_n = \mathbb{P}\{N_1 = n\}$ lorsque n tend vers l'infini. Les résultats numériques obtenus soit par simulation de la mosaïque, soit par utilisation des formules précédentes, révèlent que dans le cas d'une mosaïque de Poisson-Voronoi, p_n croît jusqu'au rang 6, le nombre 6 étant aussi la moyenne de N_1 , puis décroît rapidement vers zéro. Par des techniques de discrétisation, il est possible de montrer que la quantité $-\log(p_n)/(n \log(n))$ est bornée par des constantes strictement positives. Cependant, il est difficile d'expliciter sa limite exacte. On peut citer les travaux de C. Itzykson et J. N. Drouffe qui traitent de la question en exploitant des résultats de simulation pour des grandes valeurs de n (voir [39], chapitre 11). Dans le cas de la cellule typique de Poisson-Voronoi, H. Hilhorst a proposé une méthode inspirée par la théorie de la perturbation pour expliciter le comportement asymptotique de p_n . Pour ce faire, il s'appuie notamment sur la formule (1.3) contenue dans le travail [T2]. La technique est ici modifiée et étendue au cas plus général de la zéro-cellule C_0 pour $1 \leq \alpha \leq 2$.

Les résultats que nous obtenons sont les suivants :

- la réécriture de p_n comme produit d'un préfacteur déterministe (le terme *libre*) et

de l'espérance d'une fonction dépendant de deux jeux indépendants de n variables aléatoires angulaires (le terme *d'interactions*);

- le développement à quatre termes de $\log(p_n)$ et le calcul de la constante provenant du terme d'interaction;
- le traitement du cas de la cellule de Crofton et de la cellule typique d'une mosaïque poissonnienne de droites.

Plus précisément, la formule (1.3) contient une intégrale multiple sur un domaine de dimension $(2n-1)$. On se propose d'appliquer une succession de changements de variables à cette intégrale afin de simplifier son écriture et plus particulièrement celle de la fonction indicatrice $\mathbf{1}_{A_n}$. Ces transformations sont suggérées par la constatation suivante : lorsque n est grand, la forme de la zéro-cellule devient circulaire. Ce fait a été observé et prouvé de manière heuristique par R. E. Miles [63] dans le cas de la cellule de Crofton. On peut noter par ailleurs qu'il s'agit d'un pendant à la classique conjecture de D. G. Kendall (voir l'introduction de la partie 1.2). En conséquence, seule une variable est nécessaire comme paramètre de taille de la zéro-cellule et nous choisissons la distance moyenne r_{moy} de l'origine aux n droites bordant la cellule. On peut par la suite intégrer par rapport à r_{moy} et ne conserver qu'une intégrale multiple sur un domaine de dimension $(2n-2)$. Ces $(2n-2)$ degrés de liberté restants vont paramétrer la forme de la cellule : on choisit les n angles ξ_1, \dots, ξ_n entre deux côtés successifs et les n angles η_1, \dots, η_n entre deux sommets successifs. On peut noter en particulier que la somme des ξ_i (respectivement des η_i) vaut 2π . De plus, on remarque qu'une fois fixés ces angles, le décalage entre les deux jeux (c'est-à-dire l'angle $\beta_1 = \widehat{\mathbf{r}_1 0 s_1}$ où \mathbf{r}_1 est la projection de l'origine sur la droite portant le premier côté rencontré dans le sens trigonométrique et s_1 le premier sommet) est imposé pour obtenir un polygone convexe à n côtés.

Soient $H^{(n)} = (H_1, \dots, H_n)$ et $\Xi^{(n)} = (\Xi_1, \dots, \Xi_n)$ deux variables aléatoires indépendantes à valeurs dans le simplexe $\{(x_1, \dots, x_n) \in (\mathbb{R}_+)^n : \sum_{i=1}^n x_i = 2\pi\}$ telles que (H_1, \dots, H_n) est de loi uniforme sur ce simplexe et (Ξ_1, \dots, Ξ_n) admet une densité proportionnelle à $\prod_{i=1}^n x_i$ par rapport à la loi uniforme. Les changements de variable successifs nous permettent d'obtenir l'expression suivante : pour tout $n \geq 3$,

$$p_n = p_n^{(0)} \mathbb{E}\{\mathbf{1}_{B_n} e^{-V}\}$$

où

$$p_n^{(0)} = 2 \frac{(4\pi^2 \alpha)^{n-1}}{(2n)!}$$

et où l'événement B_n et la variable aléatoire e^{-V} sont des fonctions explicites des deux variables $H^{(n)}$ et $\Xi^{(n)}$.

En particulier, on remarque que

$$\log(p_n^{(0)}) \underset{n \rightarrow +\infty}{=} -2n \log(n) + n \log(2\pi^2 e^2 \alpha) - \frac{1}{2} \log(n) - \log(4\pi^{5/2} \alpha) + o(1).$$

On montre par ailleurs que pour $\alpha > 1$, l'espérance $\mathbb{E}\{\mathbf{1}_{B_n} e^{-V}\}$ converge vers le nombre

$$C(\alpha) = \prod_{q=1}^{+\infty} \left(1 - \frac{3-\alpha}{q^2} + \frac{\alpha^2}{q^4}\right)^{-1}.$$

Pour ce faire, on exploite le comportement limite des deux variables $H^{(n)}$ et $\Xi^{(n)}$ (on peut par exemple réaliser $H^{(n)}$ comme $\frac{2\pi}{S_n}(X_1, \dots, X_n)$ où $\{X_i : i \geq 1\}$ est une suite de v.a.i.i.d. exponentielles de paramètre 1 et $S_n = \sum_{i=1}^n X_i$). On effectue un développement de Taylor de l'intégrande que l'on réécrit ensuite en fonction des coefficients de Fourier de $H^{(n)}$ et $\Xi^{(n)}$. On propose alors un calcul explicite de l'espérance limite en exploitant une normalité asymptotique de ces coefficients.

On constate que cette technique conduit à un terme $\mathbb{E}\{\mathbf{1}_{B_n} e^{-V}\}$ divergent si $\alpha = 1$ et ce cas doit donc être traité séparément. Il s'agit en effet alors de la cellule de Crofton d'une mosaïque poissonnienne de droites stationnaire et isotrope. En particulier, puisque sa loi est invariante par translation des droites, l'origine n'a plus de rôle central et lorsque le polygone est fixé à translation près, elle est distribuée de manière uniforme à l'intérieur de ce polygone. Nous devons donc commencer par recentrer la cellule avant d'appliquer les changements de variables décrits ci-dessus. Plus précisément, si r_1, \dots, r_n désignent les distances de l'origine aux n droites successives bordant la cellule, nous effectuons une translation telle que le coefficient de Fourier $\sum_{m=1}^n e^{2\pi i m/n} r_m$ soit nul.

Enfin, rappelons que la cellule typique d'une mosaïque poissonnienne stationnaire de droites est un polygone aléatoire dont la loi admet pour densité $1/V_2(\cdot)$ (à constante multiplicative près) par rapport à la cellule de Crofton (voir la formule (1.2)). En rajoutant ce terme de densité supplémentaire dans les expressions relatives à la cellule de Crofton, il est donc possible d'obtenir une formule explicite pour la loi du nombre de côtés de la cellule typique et appliquer la technique précédente pour en faire l'étude asymptotique. En particulier, le rapport de la probabilité que la cellule de Crofton ait n côtés sur la même probabilité mais pour la cellule typique est équivalent à $\frac{1}{4}n^2$, c'est-à-dire l'équivalent asymptotique de l'aire de la cellule.

Points en position convexe

Nous décrivons ici un travail qui ne porte pas directement sur les mosaïques aléatoires mais se situe dans le prolongement immédiat de l'étude effectuée dans la sous-partie

précédente. Il a donc été naturellement incorporé à ce chapitre.

En 1864, J. J. Sylvester a posé la question du calcul de la probabilité que quatre points indépendants jetés uniformément dans un ensemble convexe compact fixé du plan euclidien soient les sommets d'un quadrilatère convexe [97]. Depuis, on entend plus généralement par *problème de Sylvester* la recherche de la probabilité $q_n(K)$ que n points indépendants et uniformément distribués dans un convexe compact K du plan soient en position convexe, c'est-à-dire tous situés sur la frontière de leur enveloppe convexe. Dans le cas où K est un parallélogramme ou un triangle, $q_n(K)$ a été calculé explicitement par P. Valtr en utilisant des méthodes combinatoires [99, 100]. En général et plus particulièrement dans le cas où D est un disque, on ne sait pas obtenir de formule élémentaire. I. Bárány [6] a prouvé un développement à deux termes de $\log(q_n(K))$ qui fait intervenir la notion de périmètre affine de K . Dans le cas où K est le disque unité \mathbb{B}^2 , il obtient lorsque n tend vers l'infini

$$\log(q_n(\mathbb{B}^2)) = -2n \log(n) + n \log(2\pi^2 e^2) + o(n).$$

Il montre de plus que lorsque les points sont conditionnés à être en position convexe, la distance de Hausdorff entre l'enveloppe et le disque tend vers zéro. Sa méthode repose sur la décomposition de la frontière de l'enveloppe en chaînes convexes inscrites dans des triangles puis l'utilisation d'une formule combinatoire du type de celle de P. Valtr. Il paraît difficile d'en déduire un terme supplémentaire dans le développement de $\log(q_n(\mathbb{B}^2))$ ou d'envisager une généralisation à la dimension supérieure. Dans ce qui suit, on utilisera l'abus de langage suivant : la condition *être en position convexe* contiendra également la sous-condition que l'enveloppe contient l'origine, c'est-à-dire que les points ne sont pas contenus dans un demi-disque. On peut montrer que cela ne constitue pas de différence pour nos questions asymptotiques (voir par exemple le calcul explicite dû à J. G. Wendel [104]).

Notre travail est motivé par la constatation que les deux premiers termes du développement de $\log(q_n(\mathbb{B}^2))$ coïncident avec ceux obtenus dans la partie 1.1.2 pour la quantité $\log(p_n)$ avec le choix $\alpha = 2$, c'est-à-dire lorsque p_n est la probabilité que la cellule typique de Poisson–Voronoi ait n côtés.

En fait, ceci s'explique par une relation de dualité entre les deux modèles qui sera beaucoup exploitée dans les parties 1.2.3 et 1.2.4 et que l'on présente ici brièvement : considérons n droites $\mathcal{D}_1, \dots, \mathcal{D}_n$ à distance plus grande que 1 de l'origine. La transformation d'inversion I qui à un point $x \neq 0$ associe $x/\|x\|^2$ envoie chacune de ces droites sur un cercle passant par l'origine et contenu dans le disque-unité \mathbb{B}^2 . En notant x_1, \dots, x_n les points diamétralement opposés à l'origine sur ces cercles, on remarque que les n droites $\mathcal{D}_1, \dots, \mathcal{D}_n$ permettent de construire un polygone convexe à exactement n côtés si et seulement si les n points x_1, \dots, x_n sont en position convexe. Ainsi, en reprenant la formule intégrale (1.3), on peut effectuer un changement de variable correspondant à une

inversion par rapport au plus grand cercle centré en l'origine et contenu dans la cellule. Notons E_n l'ensemble des n -uplets de points en position convexe et considérons une suite $\{U_i; i \geq 1\}$ de v.a.i.i.d. uniformes dans \mathbb{B}^2 . On obtient alors que la probabilité p_n que la cellule typique de Poisson–Voronoi ait n côtés s'écrit

$$p_n = \frac{\pi^{n-1}}{2} \mathbb{E} \{ \varphi(\mathbf{u}, U_1, \dots, U_{n-1}) \mathbf{1}_{E_n}(\mathbf{u}, U_1, \dots, U_{n-1}) \}$$

où la densité φ a la forme $\varphi(x_1, \dots, x_n) = [V_2(F(x_1/\|x_1\|^2, \dots, x_n/\|x_n\|^2))]^{-n} \prod_{i=1}^n \|x_i\|^{-4}$ et où \mathbf{u} est le point $(1; 0)$. La difficulté repose ensuite sur l'estimation fine de la densité φ lorsque les points U_i se rapprochent de la frontière du disque.

Les résultats que nous obtenons sont les suivants :

- la réécriture de $q_n(\mathbb{B}^2)$ comme produit d'un préfacteur déterministe et d'un terme d'interactions (méthode identique à celle développée pour p_n) ;
- l'interprétation du troisième terme du développement de $\log(q_n(\mathbb{B}^2))$ comme fonction d'un processus solution d'une équation du type RAP (*random acceleration process*) ;
- une estimation de ce troisième terme en $n^{1/5}$.

Plus précisément, nous écrivons la probabilité $q_n(\mathbb{B}^2)$ comme une intégrale sur $(\mathbb{B}^2)^n$. Après un changement de variables en tous points identique à celui effectué pour la probabilité p_n , nous obtenons une égalité du type

$$q_n(\mathbb{B}^2) = q_n^{(0)} \mathbb{E} \{ \mathbf{1}_{B_n} e^{-\mathbb{W}} \}$$

où le préfacteur déterministe $q_n^{(0)} = \frac{1}{4\pi^2} \frac{(8\pi^2)^n}{(2n)!}$ s'identifie à $p_n^{(0)}$ avec le choix $\alpha = 2$ et où le terme d'interactions est une fonction explicite des deux variables $H^{(n)}$ et $\Xi^{(n)}$ définies dans la partie 1.1.2.

On se concentre ensuite sur le terme d'interactions $\mathbb{E} \{ \mathbf{1}_{B_n} e^{-\mathbb{W}} \}$. Après développement de Taylor de l'intégrande, on en obtient un équivalent. Celui-ci est réinterprété comme la valeur de la transformée de Laplace en $(2n^{1/2})$ de la variable aléatoire $\max_{0 \leq \phi \leq 2\pi} r(\phi)$, où $(r(\phi))_{\phi \in \mathbb{R}}$ est un processus 2π -périodique et de valeur moyenne nulle qui est solution de l'équation dite *Random Acceleration Process* (RAP). Plus précisément, on a

$$\frac{d^2 r}{d\phi^2}(\phi) = f(\phi)$$

où f est un bruit gaussien de fonction d'autocorrélation $\mathbb{E}(f(\phi)f(\phi')) = \frac{3}{2}(2\pi\mathbf{1}_{\phi=\phi'} - 1)$.

Il existe une littérature importante de physique statistique consacrée à ce type d'équations [15, 54]. Le travail récent de G. Györgyi et alt. [29] fournit un moyen d'estimer la transformée de Laplace du maximum d'un tel processus. Si l'on admet que leur hypothèse

principale d'existence de solution d'une certaine équation aux dérivées partielles est satisfaite, alors on peut appliquer leur résultat et en déduire que la quantité $n^{-1/5} \mathbb{E}\{\mathbf{1}_{B_n} e^{-W}\}$ est convergente. Sans cette hypothèse, on peut seulement montrer que le terme est d'ordre compris entre $n^{1/6}$ et $n^{1/4}$. En particulier, on constate le fait surprenant que le troisième terme du développement de la quantité $\log(q_n(\mathbb{B}^2))$ est non analytique.

1.2 Forme des zéro-cellules, étude asymptotique à grand rayon inscrit

Une fameuse conjecture due à D. G. Kendall affirme que dans une mosaïque poissonnienne de droites isotrope, les cellules dont l'aire est grande ont une forme approximativement circulaire (voir notamment la préface de l'ouvrage [95]). Elle peut être reformulée dans un langage plus moderne de la manière suivante : la loi conditionnelle de la cellule typique d'une mosaïque poissonnienne de droites converge faiblement lorsque son aire tend vers l'infini vers la loi dégénérée concentrée sur la forme circulaire.

Les travaux de R. E. Miles [63], A. Goldman [27] et surtout I. N. Kovalenko [44, 45] ont apporté des réponses partielles. Plus récemment, D. Hug, M. Reitzner et R. Schneider [34, 35, 37] ont obtenu des résultats plus précis qui non seulement justifient totalement la conjecture de D. G. Kendall mais la généralisent également dans plusieurs directions, entre autres par l'étude de mosaïques plus générales et l'estimation de la déviation par rapport à la forme asymptotique.

Nous présentons ici un premier travail autour de la fonction spectrale de la cellule typique de Poisson-Voronoi. Celui-ci est motivé notamment par le fait que des relations entre le spectre du Laplacien avec condition au bord de Dirichlet et la structure géométrique d'un ensemble ont été exhibées dans un cadre déterministe depuis quarante ans [22, 42, 101]. En particulier, l'étude de la loi de la première valeur propre fournit une approche différente de la conjecture de D. G. Kendall. Nous nous concentrons ensuite sur la forme d'une zéro-cellule de mosaïque d'hyperplans lorsque son rayon inscrit tend vers l'infini. Nous nous trouvons alors dans un cas très particulier de la conjecture qui nous permet cependant d'être beaucoup plus précis en différents sens sur la convergence de la cellule vers la sphère.

1.2.1 Fonction spectrale de la cellule typique de Poisson-Voronoi

Les résultats présentés dans cette partie ont été obtenus en commun avec André Goldman [T3].

Désignons par $\varphi(t)$, $t > 0$, la fonction spectrale de la cellule typique \mathcal{C} d'une mosaïque

de Poisson–Voronoi dans \mathbb{R}^d , c'est-à-dire

$$\varphi(t) = \sum_{n \geq 0} e^{-t\lambda_n},$$

où $0 < \lambda_1 < \lambda_2 \leq \dots \leq \lambda_n \leq \dots$ sont les valeurs propres successives du Laplacien avec condition au bord de Dirichlet sur \mathcal{C} .

Nous relierons l'espérance de cette fonction spectrale à un pont brownien indépendant de la mosaïque et en déduisons ses asymptotiques quand t tend vers 0 et vers $+\infty$. Ce travail fait suite à l'étude semblable menée par A. Goldman [26] pour la cellule typique d'une mosaïque poissonnienne de droites dans le plan.

Les résultats que nous obtenons sont les suivants :

- une formule pour l'espérance de la fonction spectrale utilisant un pont brownien indépendant ;
- un développement à trois termes de cette espérance lorsque t tend vers 0 ;
- un équivalent logarithmique en l'infini dont nous déduisons une estimée de la fonction de répartition de la première valeur propre.

L'outil essentiel utilisé dans ce travail est la relation entre la fonction spectrale $\varphi_D(t)$, $t > 0$, d'un domaine convexe borné $D \subset \mathbb{R}^d$ et l'enveloppe convexe $\widehat{\mathbf{W}}$ de la trajectoire d'un pont brownien entre 0 et 1 [96] :

$$\varphi_D(t) = \frac{1}{(4\pi t)^{d/2}} \int_D \mathbb{P}\{x + \sqrt{2t}\widehat{\mathbf{W}} \subset D\} dx. \quad (1.4)$$

En appliquant (1.4) à la cellule \mathcal{C} , on obtient que pour tout $t > 0$,

$$\mathbb{E}\varphi(t) = \frac{1}{(2\pi)^{\frac{d}{2}}} \int \mathbb{E} \exp(-(2t)^{\frac{d}{2}} V_d \left(\cup_{y \in \widehat{\mathbf{W}}} B(y, \|y - x\|) \right)) dx. \quad (1.5)$$

Un calcul explicite du volume de la fleur $\cup_{y \in \widehat{\mathbf{W}}} B(y, \|y - x\|)$ nous permet de déduire de (1.5) un développement asymptotique explicite à trois termes de $\mathbb{E}\varphi(t)$ au voisinage de zéro. En particulier, dans le cas $d = 2$, on vérifie que lorsque t tend vers 0,

$$\mathbb{E}\varphi(t) = \frac{\mathbb{E}V_2(\mathcal{C})}{4\pi t} - \frac{\mathbb{E}V_1(\mathcal{C})}{4\sqrt{4\pi t}} + \frac{1}{24}(\pi\mathbb{E}\alpha^{-1}(\mathcal{C}) - \mathbb{E}N_0(\mathcal{C}) + 2) + O(t^{-1/2}), \quad (1.6)$$

où $\alpha^{-1}(\mathcal{C})$ désigne la moyenne harmonique des angles de la cellule \mathcal{C} . En d'autres termes, le résultat (1.6) exprime le fait qu'il suffit de prendre l'espérance de chacun des termes du développement en zéro de la fonction spectrale déterministe [77, 101] pour retrouver celui de $\mathbb{E}\varphi(t)$.

Par ailleurs, toujours dans le cas de la dimension deux, la formule (1.5) permet d'obtenir un équivalent logarithmique de la transformée de Laplace de la première valeur propre λ_1 , et aussi de sa fonction de répartition en utilisant un théorème taubérien :

$$\lim_{t \rightarrow \infty} t^{-1/2} \ln \mathbb{E}\varphi(t) = \lim_{t \rightarrow \infty} t^{-1/2} \ln \mathbb{E}e^{-t\lambda_1} = -4\sqrt{\pi}j_0, \quad (1.7)$$

et

$$\lim_{t \rightarrow 0} t \ln \mathbb{P}\{\lambda_1 \leq t\} = -4\pi j_0^2, \quad (1.8)$$

où j_0 est le premier zéro positif de la fonction de Bessel J_0 . La preuve de ces deux derniers résultats repose d'une part sur une estimation de la fonction de répartition du périmètre de $\widehat{\mathbf{W}}$ due à A. Goldman [27] et d'autre part sur une application d'un lemme de T. W. Anderson [1]. Ce lemme affirme que la probabilité pour un vecteur gaussien de covariance fixée d'appartenir à un ensemble convexe symétrique est maximale lorsque la moyenne du vecteur est nulle.

Les estimées (1.7) et (1.8) sont identiques pour la première valeur propre λ_1 de la cellule typique \mathcal{C} et pour la première valeur propre μ_1 de la plus grande boule centrée à l'origine contenue dans \mathcal{C} . Ainsi, cela permet d'une part de confirmer en un certain sens la conjecture de D. G. Kendall et d'autre part de constater une analogie avec le modèle Booléen. En effet, A. S. Sznitman a prouvé que les grandes déviations de la première valeur propre du complémentaire d'un nuage poissonnien d'obstacle sphériques dans une fenêtre fixée sont contrôlées par la plus grande boule ne rencontrant pas d'obstacle (voir l'ouvrage [98], pages 182).

Enfin, on peut noter que certaines parties de ce travail peuvent être généralisés aux mosaïques de Johnson-Mehl [16].

1.2.2 Loi du rayon circonscrit et conséquences

Les résultats présentés dans cette partie sont issus des travaux [T2,T12]. Par souci de concision, certaines formules explicites et résultats numériques présents dans l'article d'origine ne sont pas reportés ici.

On considère à nouveau la zéro-cellule C_0 d'une mosaïque poissonnienne et isotrope d'hyperplans dont la mesure d'intensité est $d\Theta(t, u) = \gamma \|x\|^{\alpha-d} dx$, où $\alpha \geq 1$ et $\gamma > 0$.

On cherche dans cette partie à inclure de manière optimale la frontière de la cellule C_0 entre deux sphères centrées en l'origine. Soit $R_m = \sup\{r > 0 : B(0, r) \subset C_0\}$, le rayon de la plus grande boule centrée en l'origine et contenue dans C_0 . Dans ce qui suit, on appellera R_m le *rayon inscrit*. On obtient aisément que pour tout $r > 0$,

$$\mathbb{P}\{R_m \geq r\} = \exp\left(-\frac{\gamma \omega_d}{\alpha} r^\alpha\right),$$

et la loi du processus d'hyperplans conditionné par $\{R_m \geq r\}$ est celle d'un nouveau processus d'hyperplans de mesure d'intensité $\mathbf{1}_{\mathbb{R}^d \setminus B(0, r)} d\Theta$.

On définit par ailleurs la quantité $R_M = \inf\{r > 0 : C_0 \subset B(0, r)\}$ qui est le rayon de la plus petite boule centrée en l'origine qui contient C_0 . On l'appelle *rayon circonscrit*. Les principaux résultats que nous obtenons sont les suivants :

- l'écriture de la queue de distribution de la loi de R_M (et aussi de la loi conditionnelle de R_M sachant R_m) comme une probabilité de recouvrement de la sphère-unité par des calottes aléatoires ;
- une formule explicite et un encadrement élémentaire en dimension deux ;
- une estimation asymptotique de la loi conditionnelle de R_M lorsque le rayon inscrit tend vers l'infini.

Plus précisément, on rappelle que chaque hyperplan de la mosaïque sépare l'espace en deux et la zéro-cellule est définie comme le complémentaire de l'union des demi-espaces bordés par ces hyperplans et qui ne contiennent pas l'origine. Ainsi, le rayon R_M dépasse la valeur $r > 0$ si la sphère $r\mathbb{S}^{d-1}$ n'est pas totalement recouverte par les intersections avec ces demi-espaces. Or, chacune de ces intersections est une calotte sphérique si l'hyperplan est à distance au plus r de l'origine et l'ensemble vide sinon.

On est donc amené à utiliser une notion de recouvrement de la sphère déjà abordée dans la littérature [31, 41]. Pour tout entier n et toute mesure de probabilité ν sur $[0, 1]$, on note $P(\nu, n)$ la probabilité de recouvrir la sphère-unité par n calottes sphériques indépendantes, réparties uniformément et dont le rayon angulaire (normalisé par π) a pour loi ν . On obtient que la queue de distribution de R_M s'écrit pour tout $r > 0$,

$$\mathbb{P}\{R_M \geq r\} = \exp\left(-\frac{\gamma\omega_d}{\alpha}r^\alpha\right) \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\left(\frac{\gamma\omega_d}{\alpha}r^\alpha\right)^n}{n!} (1 - P(\nu_\alpha, n)). \quad (1.9)$$

où ν_α est la mesure de probabilité suivante :

$$d\nu_\alpha(\theta) = \alpha\pi \sin(\pi\theta) \cos^\alpha(\pi\theta) \mathbf{1}_{[0,1/2]}(\theta) d\theta. \quad (1.10)$$

La relation (1.9) peut se généraliser aisément si on considère la loi conditionnelle de R_M sachant $\{R_m = r\}$.

Dans le cas de la dimension deux, nous disposons dans la littérature d'un calcul de la probabilité de recouvrir le cercle dû à A. Siegel et L. Holst [94, 93], ce qui nous permet de déduire de (1.9) une formule explicite de la fonction de répartition de R_M . De plus, nous remarquons qu'il est possible de comparer des probabilités de recouvrement pour deux mesures μ et ν lorsque celles-ci sont ordonnées pour l'ordre convexe. Par conséquent, en considérant notamment la mesure ν_α introduite en (1.10) et la mesure de Dirac en sa moyenne $I_\alpha = \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi/2} \cos^\alpha(u) du$, nous obtenons l'existence de deux constantes $0 < C_1 < C_2 < \infty$ telles que pour r suffisamment grand,

$$C_1 r^\alpha \exp\left(-\frac{2\pi\gamma I_\alpha}{\alpha} r^\alpha\right) \leq \mathbb{P}\{R_M \geq r\} \leq C_2 r^\alpha \exp\left(-\frac{2\pi\gamma I_\alpha}{\alpha} r^\alpha\right).$$

Enfin, le calcul de la loi jointe du couple (R_M, R_m) nous permet d'obtenir d'obtenir une estimation asymptotique de la probabilité $\mathbb{P}\{R_M \geq r + r^\delta | R_m = r\}$: pour $1 - \frac{2}{3}\alpha < \delta < 1$,

il existe une constante $c > 0$ telle que nous avons lorsque r tend vers l'infini

$$\mathbb{P}\{R_M \geq r + r^\delta | R_m = r\} = \mathcal{O}(\exp(-cr^\beta)) \quad (1.11)$$

où $\beta = \frac{1}{2}(2\alpha - 3 + 3\delta)$. Cette probabilité décroît exponentiellement vite vers zéro, ce qui n'a rien de surprenant puisque nous nous trouvons dans le cadre d'application du résultat de la conjecture de D. G. Kendall. Cependant, nous obtenons l'information supplémentaire que l'épaisseur de la couronne $B(0, R_M) \setminus B(0, R_m)$ (contenant la frontière de la zéro-cellule) est de l'ordre de $R_m^{1-2\alpha/3}$ quand R_m est grand. Nous proposerons une généralisation en toute dimension du résultat (1.11) dans la partie 1.2.3, puis dans la partie 1.2.4 un développement à trois termes de la quantité $(R_M - R_m)$ dans le cadre d'un théorème de convergence de type valeurs extrêmes.

1.2.3 Théorèmes limites pour le nombre d'hyperfaces et le volume

Les résultats présentés dans cette partie ont été obtenus en collaboration avec Tomasz Schreiber et sont issus des travaux [T7,T8,T12].

On conserve le même modèle de zéro-cellule que dans la partie précédente. Nous avons constaté que lorsque le rayon inscrit est grand, la frontière de la zéro-cellule se situe dans une couronne d'épaisseur contrôlée et qui tend vers zéro. Il est donc naturel de chercher à comprendre de quelle manière la forme de la cellule se rapproche d'une sphère, en particulier combien d'hyperfaces se trouvent dans cette couronne et quelle est la proportion du volume occupé par la cellule. On note $N_{d-1,r}$ (respectivement \mathcal{V}_r) le nombre d'hyperfaces de la zéro-cellule C_0 conditionnée par l'événement $\{R_m = r\}$ (respectivement le volume de $C_0 \setminus B(0, R_m)$ sachant $\{R_m = r\}$).

Les résultats que nous obtenons sont les suivants :

- la généralisation à toute dimension de l'estimation asymptotique (1.11) de la loi du rayon circonscrit ;
- une loi des grands nombres, un théorème central limite et un résultat de déviations modérées pour le nombre $N_{d-1,r}$;
- le même type de théorèmes limites pour le volume \mathcal{V}_r .

Bien que les théorèmes portent exclusivement sur la géométrie des zéro-cellules de mosaïques d'hyperplans, les techniques de preuve font largement appel à des notions qui seront développées dans le chapitre 2 sur les enveloppes convexes aléatoires. Nous utilisons en effet une transformation géométrique reliant la zéro-cellule à un polytope aléatoire dans la boule-unité. Nous exploitons ensuite les théorèmes limites disponibles pour ce type de modèle afin de déduire leurs analogues pour les zéro-cellules. Dans ce qui suit, on décrit la méthode de manière plus précise.

La première étape consiste à appliquer une homothétie de rapport $1/r$ à la cellule C_0 conditionnée par $\{R_m = r\}$. On obtient alors la zéro-cellule associée à une mosaïque d'hyperplans construite avec un hyperplan déterministe à distance 1 de l'origine et avec un processus d'hyperplans à l'extérieur de la boule-unité \mathbb{B}^d , de mesure d'intensité $r^\alpha \mathbf{1}_{\mathbb{R} \setminus \mathbb{B}^d} d\Theta$. Le nombre $N_{d-1,r}$ est conservé tandis que le volume V_d est multiplié par r^{-d} .

Dans une seconde étape, on applique ensuite la fonction d'inversion définie par $I(x) = x/\|x\|^2$ pour tout $x \in \mathbb{R}^d \setminus \{0\}$. La frontière de zéro-cellule est alors envoyée sur la frontière de la fleur de Voronoi engendrée par un polytope aléatoire dans la boule-unité \mathbb{B}^d . Plus précisément, l'image du processus d'hyperplans est un processus de sphères centrées en $y/2$ et de rayon $\|y\|/2$ où y décrit un processus ponctuel de Poisson \mathbf{Y} dans \mathbb{B}^d de mesure d'intensité $r^\alpha \mathbf{1}_{\mathbb{B}^d}(x) \|x\|^{-(\alpha+d)} dx$. Le nombre $N_{d-1,r}$ peut être vu comme le nombre de points extrémaux de l'enveloppe convexe de l'ensemble $\mathbf{Y} \cup \{y_0\}$ où y_0 est un point déterministe sur la sphère-unité. Le volume \mathcal{V}_r devient la quantité $r^{-d} \mu(\mathbb{B}^d \setminus \cup_{y \in \mathcal{Y} \cup \{y_0\}} B(y/2, \|y\|/2))$ où $\mu = \mathbf{1}_{\mathbb{B}^d}(x) \|x\|^{-2d} dx$.

On est alors ramené à étudier les propriétés asymptotiques lorsque λ tend vers l'infini de l'enveloppe convexe et de la fleur de Voronoi d'un nuage de points poissonnien dans la boule-unité, dont la mesure d'intensité est du type $\lambda f(\|x\|) dx$ avec $\lim_{t \rightarrow 1} f(t) = 1$.

Tout d'abord, nous disposons d'un résultat de localisation à proximité de la sphère-unité des points extrémaux d'une telle enveloppe convexe dans une couronne d'épaisseur de l'ordre de $\lambda^{-\frac{2}{d+1}}$. Nous présenterons ce résultat plus en détails dans la partie 2.1 (voir l'égalité (2.1)). Il est utilisé ici pour généraliser à toute dimension l'estimation obtenue en (1.11) dans le cas du plan : il existe une constante $c > 0$ telle que pour tout $\frac{d+1-2\alpha}{d+1} < \delta < 1$, nous avons lorsque r tend vers l'infini

$$\mathbb{P}\{R_M \geq r + r^\delta | R_m = r\} = \mathcal{O}(\exp(-cr^\beta)) \quad (1.12)$$

où $\beta = \frac{1}{2} [(2\alpha - (d+1)) + \delta(d+1)]$.

De plus, la littérature conséquente sur le comportement asymptotique du nombre de points extrémaux nous fournit une loi des grands nombres [84, 79], de même qu'un théorème central limite [81] et un résultat de type déviations modérées [T8][103] (voir notamment l'introduction du chapitre 2 et la partie 2.1). Nous en déduisons ainsi des résultats analogues pour le nombre d'hyperfaces $N_{d-1,r}$ de la zéro-cellule conditionnée à avoir un rayon inscrit r : il existe une constante explicite $a > 0$ ne dépendant que de la dimension et de α telle que lorsque r tend vers l'infini,

$$N_{d-1,r} (ar^{\frac{\alpha(d-1)}{d+1}})^{-1} \longrightarrow 1 \quad \text{dans } L^1 \text{ et p.s..}$$

De plus, ce nombre satisfait un théorème central limite (sans estimation exacte de la

variance) ainsi qu'un résultat de déviations modérées : pour tout $\varepsilon > 0$,

$$\liminf_{r \rightarrow \infty} \frac{1}{\log(r)} \log \left(-\log \left(\mathbb{P} \left\{ \left| \frac{N_{d-1,r}}{\mathbb{E}N_{d-1,r}} - 1 \right| \geq \varepsilon \right\} \right) \right) \geq \frac{\alpha(d-1)}{3d+5}.$$

Enfin, de la même manière, les travaux de T. Schreiber [89, 90] sur le volume ou la μ -mesure de l'ensemble $\mathbb{B}^d \setminus \cup_{y \in \mathbf{Y}} B(y/2, \|y\|/2)$ nous permettent d'obtenir les trois types de théorèmes limites pour la quantité \mathcal{V}_r , à savoir une loi des grands nombres, un théorème central limite et un principe de déviations modérées. En particulier, la croissance de \mathcal{V}_r est de l'ordre de $r^{\frac{\alpha(d-1)}{d+1}}$ à constante multiplicative près.

Ces résultats sont encore enrichis dans la partie suivante par une description exhaustive de la frontière de la cellule en termes de processus indexé par les vecteurs de la sphère-unité, qui nous permet d'obtenir notamment un théorème des valeurs extrêmes pour R_M et un principe d'invariance fonctionnel pour le volume entre la frontière de la cellule et la boule inscrite.

1.2.4 Frontière de la cellule : changement d'échelle local et global, valeurs extrêmes

Les résultats présentés dans cette partie ont été obtenus en collaboration avec Tomasz Schreiber et Joseph Yukich [T15]. Une version non définitive du travail peut être téléchargée à l'adresse <http://www.math-info.univ-paris5.fr/~calka/T15.pdf>.

Ce travail est contenu dans un article portant sur les enveloppes convexes aléatoires (voir partie 2.2 pour plus de détails). Il a été constaté que des théorèmes analogues à ceux montrés pour les polytopes aléatoires peuvent être obtenus pour des zéro-cellules de mosaïques d'hyperplans isotropes. On peut choisir de réécrire les démonstrations en conservant des techniques très semblables ou de manière plus efficace, on peut également reprendre l'idée développée dans la partie 1.2.3, c'est-à-dire s'appuyer sur l'utilisation de la fonction d'inversion qui nous sert de "traducteur" d'un modèle à l'autre. Notre but est d'apporter de nouvelles précisions sur la convergence de la zéro-cellule vers la forme circulaire lorsqu'on la conditionne à avoir un rayon inscrit plus grand que r , avec r tendant vers l'infini (il revient asymptotiquement au même de conditionner par $\{R_m \geq r\}$ ou $\{R_m = r\}$. La seule différence dans la réalisation du conditionnement est l'ajout d'un hyperplan déterministe à distance r de l'origine).

Les résultats principaux que nous obtenons sont les suivants :

- après changement d'échelle, la convergence du processus de la distance radiale entre la sphère de rayon r et la frontière de la cellule ;
- après un autre changement d'échelle, la convergence de l'intégrale de cette distance vue comme processus indexé par \mathbb{R}^{d-1} vers un drap brownien de variance explicite ;

– un résultat de convergence du type valeur extrême pour le rayon circonscrit R_M .

On n'explicitera pas davantage les deux premiers points qui reposent sur la construction d'un objet appelé processus parabolique de croissance et qui sera introduit dans la partie 2.2. Les énoncés sont semblables à ceux que nous donnerons pour les polytopes aléatoires et nous renvoyons donc le lecteur à cette partie pour plus de détails. On notera cependant que le premier résultat permet de déduire une estimation de la variance et un théorème central limite pour le nombre de faces k -dimensionnelles. Le second résultat est une version fonctionnelle du théorème central limite obtenu en partie 1.2.3 pour le volume compris entre la boule inscrite et la frontière de la zéro-cellule.

Le résultat de convergence pour le rayon circonscrit R_M améliore nettement l'estimée (1.12) en fournissant un développement à trois termes de la différence entre rayon circonscrit et rayon inscrit. Dans le cas de la cellule typique de Poisson–Voronoi ($\alpha = d$), il s'écrit de la manière suivante : soit

$$L_r = C_0 r^{\frac{d-1}{2}} (R_M - r)^{\frac{d+1}{2}} - C_1 \log(r) - C_2 \log(\log(r)) - C_3$$

où les constantes C_i , $0 \leq i \leq 3$, sont explicites et ne dépendent que de la dimension d . Alors conditionnellement à $\{R_m \geq r\}$, la quantité L_r converge en loi lorsque r tend vers l'infini vers la distribution de Gumbel, c'est-à-dire

$$\lim_{r \rightarrow +\infty} \mathbb{P}\{L_r \leq t\} = \exp(-e^{-t}).$$

La démonstration repose à nouveau sur le lien existant entre la fonction de répartition du rayon circonscrit et une probabilité de recouvrement de la sphère par des calottes sphériques. On exploite ensuite un résultat dû à S. Janson [41] qui précise le comportement asymptotique de cette probabilité de recouvrement sous certaines hypothèses lorsque le nombre de calottes tend vers l'infini et leur taille tend vers zéro. On pourra consulter les parties 2.2 et 3.3 pour d'autres applications du travail de S. Janson.

Chapitre 2

Enveloppes convexes aléatoires dans la boule-unité

On considère un processus ponctuel de Poisson homogène \mathbf{X}_λ d'intensité λ dans \mathbb{R}^d et on construit l'enveloppe convexe, notée K_λ , de $\mathbf{X}_\lambda \cap \mathbb{B}^d$. On appelle l'ensemble K_λ *enveloppe convexe aléatoire* ou plus généralement *polytope aléatoire*. De même, on peut construire le polytope \tilde{K}_n de manière analogue en considérant l'enveloppe convexe de n points i.i.d. uniformément distribués dans \mathbb{B}^d .

L'étude du comportement asymptotique de K_λ et \tilde{K}_n quand λ et n tendent vers l'infini remonte au travail de Rényi et Sulanke [84] qui fournit un équivalent en espérance du nombre de sommets. Les fonctionnelles qui ont ensuite été considérées classiquement sont le volume, le nombre de faces k -dimensionnelles ainsi que les volumes intrinsèques. Des lois des grands nombres sur ces variables ont été obtenues pour des polytopes aléatoires construits dans des ensembles convexes plus généraux que la boule-unité. On pourra notamment consulter les travaux de J. A. Wieacker [106], R. Schneider [86], I. Bárány [5], et M. Reitzner [80, 82].

Plus récemment, des estimations de moments d'ordre supérieur et des théorèmes centraux limites ont été établis. Suite aux premiers travaux de P. Groeneboom [28] et F. Avram et D. Bertsimas [2], M. Reitzner [81], V. Vu [102], I. Bárány et M. Reitzner [8] ont fourni l'essentiel des résultats. L'étude menée par T. Schreiber et J. Yukich [91] et basée sur un résultat de stabilisation a conduit à une version plus forte de théorème central limite multivarié et où la variance est estimée précisément.

Nous proposons ici deux travaux portant sur les polytopes aléatoires dans la boule-unité. Le premier traite d'un résultat de grandes déviations pour le nombre de sommets, le second s'intéresse aux propriétés asymptotiques de la géométrie de la frontière du polytope.

2.1 Grandes déviations pour le nombre de sommets d'un polytope aléatoire dans la boule-unité

Les résultats présentés dans cette partie ont été obtenus en collaboration avec Tomasz Schreiber [T8].

Au moment où ce travail a été entrepris, la littérature sur les polytopes aléatoires comprenait des lois des grands nombres en espérance pour la plupart des fonctionnelles ainsi que des premiers résultats de convergence vers la loi normale. Cependant, aucune inégalité de type grandes déviations n'était disponible. Nous nous sommes restreints au cas des polytopes aléatoires dans la boule-unité et à une seule fonctionnelle, à savoir le nombre de sommets. Les résultats que nous proposons sont les suivants :

- une estimation de la localisation des points extrémaux près de la frontière de la boule ;
- un théorème de concentration de la mesure qui fournit une minoration du taux de décroissance de la probabilité de l'événement rare.

Les enveloppes aléatoires \tilde{K}_n et K_λ se traitent ici de manière analogue. C'est pourquoi on se restreindra dans ce qui suit au cas du polytope aléatoire \tilde{K}_n généré par un processus binomial.

Tout d'abord, lorsque n tend vers l'infini, les sommets de l'enveloppe convexe se rapprochent naturellement de la frontière de la boule-unité \mathbb{B}^d . Plus précisément, ils se trouvent avec grande probabilité dans une couronne d'épaisseur $n^{-\frac{2}{d+1}}$: il existe des constantes $c, K > 0$ telles que pour tout $\alpha \in (0, \frac{2}{d+1})$, on a

$$\mathbb{P}\{B(0, 1 - Kn^{-\alpha}) \not\subseteq \tilde{K}_n\} = O(\exp(-cn^{1-\alpha(d+1)/2})). \quad (2.1)$$

La démonstration de ce résultat repose sur une décomposition déterministe de la couronne en question par un nombre polynomial de calottes sphériques pleines ainsi que sur une estimation de la probabilité qu'une de ces calottes soit vide.

Lorsqu'on souhaite appliquer un résultat classique de concentration de la mesure au nombre de sommets de \tilde{K}_n , on se heurte au problème de la grande irrégularité de la fonction qui à un nuage de n points associe son nombre de points extrémaux. En effet, théoriquement, l'ajout ou le retrait d'un seul de ces points peut faire chuter considérablement la valeur de cette fonction. L'idée est donc de remplacer le nombre de points extrémaux \tilde{N}_n par une modification de ce nombre notée $\tilde{N}_n^{\alpha, \beta}$ avec $\alpha, \beta > 0$ fixés ultérieurement. Cette nouvelle quantité $\tilde{N}_n^{\alpha, \beta}$ devra d'une part être proche du nombre \tilde{N}_n lorsque n tend vers l'infini et d'autre part, présenter davantage de stabilité à l'ajout ou retrait d'un point dans le nuage.

Afin de construire ce nombre modifié, on choisit $\alpha \in (0, \frac{2}{d+1})$ et $\beta \in (1 - \frac{\alpha(d+1)}{2}, 1)$.

On réutilise alors le recouvrement par des calottes sphériques pleines de la couronne $\mathbb{B}^d \setminus B(0, 1 - Kn^{-\alpha})$ où les points extrémaux sont localisés. On retire ensuite tous les points du nuage initial qui sont hors de cette couronne ainsi que certains points dans chaque calotte de telle manière que le nombre total de points par calotte ne dépasse pas n^β . La quantité $\tilde{N}_n^{\alpha, \beta}$ est alors définie comme le nombre de points extrémaux de ce nouveau nuage.

On peut alors montrer que $\tilde{N}_n^{\alpha, \beta}$ est une fonction lipschitzienne de rapport proportionnel à n^β lorsque l'ensemble des n -uplets de points dans la boule-unité est muni de la distance

$$\delta[(x_1, \dots, x_n), (y_1, \dots, y_n)] = \sum_{k=1}^n \mathbf{1}_{x_k \neq y_k}, \quad (x_1, \dots, x_n), (y_1, \dots, y_n) \in (\mathbb{B}^d)^n.$$

Par conséquent, nous nous trouvons dans le cadre d'application d'un résultat de concentration dû à M. Ledoux ([50], corollaire 1.17) qui nous permet d'obtenir que pour tout $\varepsilon > 0$,

$$\liminf_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\log n} \log \left(-\log \mathbb{P} \left\{ \left| \frac{\tilde{N}_n^{\alpha, \beta}}{\mathbb{E} \tilde{N}_n^{\alpha, \beta}} - 1 \right| > \varepsilon \right\} \right) \geq 1 + \alpha - \frac{4}{d+1} - 2\beta.$$

Par ailleurs, l'effet de la modification peut être évalué de la manière suivante :

$$\liminf_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\log n} \log \left(-\log \mathbb{P} \left\{ \tilde{N}_n \neq \tilde{N}_n^{\alpha, \beta} \right\} \right) \geq 1 - \alpha \frac{d+1}{2}.$$

Il reste à optimiser les deux inégalités précédentes en α et β pour déduire que pour tout $\varepsilon > 0$,

$$\liminf_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\log n} \log \left(-\log \mathbb{P} \left\{ \left| \frac{\tilde{N}_n}{\mathbb{E} \tilde{N}_n} - 1 \right| > \varepsilon \right\} \right) \geq \frac{d-1}{3d+5}.$$

Une conséquence immédiate du résultat de déviations modérées est le passage à une convergence presque-sûre et en toute dimension dans la loi des grands nombres pour \tilde{N}_n .

Simultanément à ce travail, V. Vu a obtenu une autre inégalité de type grandes déviations pour le nombre de sommets et le volume des polytopes aléatoires construits dans un convexe à bord lisse [103]. Bien que V. Vu ait utilisé une inégalité de concentration différente de la nôtre, il est tout à fait significatif que la puissance de n obtenue dans l'exponentielle soit exactement la même que dans notre résultat principal, à savoir $\frac{d-1}{3d+5}$. Rien n'indique pourtant que le taux $n^{\frac{d-1}{3d+5}}$ soit optimal. On pourrait en effet croire que l'on devrait retrouver plutôt le taux de croissance du nombre moyen de points extrémaux, à savoir $n^{\frac{d-1}{d+1}}$.

On peut enfin ajouter que le travail [T8] a permis de généraliser à toute dimension les résultats obtenus dans [T7] pour la cellule typique de Poisson-Voronoi, et de les enrichir d'une inégalité de déviations modérées (voir partie 1.2.3).

2.2 Frontière des polytopes aléatoires isotropes dans la boule-unité : convergences par changements d'échelle local et global, valeurs extrêmes

Les résultats présentés dans cette partie ont été obtenus en collaboration avec Tomasz Schreiber et Joseph Yukich [T15]. Une version non définitive du travail peut être téléchargée à l'adresse <http://www.math-info.univ-paris5.fr/~calka/T15.pdf>.

Dans [91], T. Schreiber et J. E. Yukich ont introduit un modèle de processus de croissance pour lequel une méthode de type *stabilisation* [10, 75] peut être développée. Dans une des applications proposées, ils montrent un résultat de convergence de la variance et un théorème central limite pour le nombre de sommets et plus généralement pour la mesure empirique des points extrémaux d'un polytope aléatoire dans la boule-unité.

Notre but est ici d'étendre ce travail en décrivant plus directement la frontière de l'enveloppe convexe et de sa fleur de Voronoi comme des processus indexés par les vecteurs de la sphère-unité. Après changement d'échelle en temps et en espace, les deux processus limites dans l'espace-temps $\mathbb{R}^{d-1} \times \mathbb{R}_+$ sont appelés *processus parabolique de recouvrement* et *processus parabolique de croissance*. Le premier de ces deux objets est nouveau tandis que le second est un cas particulier du modèle de croissance introduit dans [91]. Ces deux résultats de convergence ont de nombreuses conséquences, notamment au niveau des caractéristiques géométriques classiques du polytope. Les résultats principaux que nous obtenons sont les suivants :

- après changement d'échelle dit *en régime local*, la convergence du processus de la distance radiale entre la sphère-unité et l'enveloppe convexe (respectivement la fleur de Voronoi de l'enveloppe) vers un processus continu défini à partir d'un processus parabolique de recouvrement (respectivement de croissance) ;
- un calcul explicite des lois finies-dimensionnelles (asymptotiques ou non) de ces processus en dimension deux ainsi que la fonction de corrélation de paires du processus ponctuel des points extrémaux ;
- des résultats de convergence de variances et des théorèmes centraux limites pour le nombre de faces k -dimensionnelles et pour les volumes intrinsèques du polytope ;
- après un autre changement d'échelle dit *en régime global*, la convergence de l'intégrale de la distance entre la sphère-unité et l'enveloppe convexe (respectivement la fleur de Voronoi), vue comme processus indexé par \mathbb{R}^{d-1} (via la transformation exponentielle envoyant \mathbb{R}^{d-1} sur \mathbb{S}^{d-1}), vers un drap brownien de variance explicite ;
- un résultat de convergence de la valeur extrême de la distance entre la sphère et l'enveloppe convexe ;
- des résultats analogues pour les zéro-cellules de mosaïques d'hyperplans isotropes

(voir partie 1.2.4).

Plus précisément, on se place dans le contexte un peu plus général d'un processus ponctuel de Poisson dans \mathbb{B}^d dont la mesure d'intensité a la forme $\lambda(1 - \|x\|)^\delta dx$, $\lambda, \delta \geq 0$. On note K_λ l'enveloppe convexe d'un tel processus. Celle-ci contient l'origine sauf sur un ensemble de probabilité exponentiellement décroissante quand λ tend vers l'infini [104] et on fera donc l'abus de supposer que K_λ contient presque-sûrement l'origine.

Afin de décrire la frontière de K_λ , on considère tout d'abord sa *radius-vector fonction* recentrée (voir la partie de [65])

$$r_\lambda(\mathbf{u}) = 1 - \sup\{r > 0 : r\mathbf{u} \in K_\lambda\}, \quad \mathbf{u} \in \mathbb{S}^{d-1}.$$

La quantité $r_\lambda(\mathbf{u})$ représente la distance dans la direction \mathbf{u} entre la frontière de l'enveloppe convexe K_λ et la frontière \mathbb{S}^{d-1} de la boule. De même, on considère sa fonction de support recentrée

$$s_\lambda(\mathbf{u}) = 1 - h_{K_\lambda}(\mathbf{u}) = 1 - \sup\{\langle x, \mathbf{u} \rangle : x \in K_\lambda\}, \quad \mathbf{u} \in \mathbb{S}^{d-1}.$$

En particulier, la fonction de support h_{K_λ} est aussi la radius-vector fonction de la fleur de Voronoi $F(K_\lambda)$ et par conséquent, la quantité $s_\lambda(\mathbf{u})$ représente la distance dans la direction \mathbf{u} entre la frontière de la fleur de Voronoi de K_λ et la frontière \mathbb{S}^{d-1} de la boule.

• Lorsqu'on cherche à obtenir une convergence intéressante des processus s_λ et r_λ , on constate qu'un changement d'échelle en temps est nécessaire (puisque chacune de ces fonctions tend vers zéro lorsque λ tend vers l'infini). De plus, si l'on n'effectue aucun changement d'échelle en espace, alors les directions sont asymptotiquement indépendantes et les processus tendent vers des bruits blancs. On fixe le vecteur $\mathbf{u}_0 = (1, 0, \dots, 0)$ de la sphère \mathbb{S}^{d-1} et on considère l'application exponentielle associée $\exp_{d-1} : T_{\mathbf{u}_0}\mathbb{S}^{d-1} \simeq \mathbb{R}^{d-1} \rightarrow \mathbb{S}^{d-1}$. En notant $\beta = (d + 1 + 2\delta)^{-1}$ et $\gamma = 2\beta$, les nouvelles versions des deux processus après changements d'échelles sont

$$\hat{s}_\lambda(v) := \lambda^\gamma s_\lambda(\exp_{d-1}(\lambda^{-\beta}v)), \quad v \in \mathbb{R}^{d-1},$$

et

$$\hat{r}_\lambda(v) := \lambda^\gamma r_\lambda(\exp_{d-1}(\lambda^{-\beta}v)), \quad v \in \mathbb{R}^{d-1}.$$

Afin de décrire la limite de ces deux processus, on introduit les deux notions duales de processus paraboliques de croissance et de recouvrement : soit \mathbf{X} un processus ponctuel de Poisson sur $\mathbb{R}^{d-1} \times \mathbb{R}_+$ de mesure d'intensité $h^\delta dh dv$ ($v \in \mathbb{R}^{d-1}$, $h \in \mathbb{R}_+$). On considère par ailleurs l'épigraphe du paraboloïde ($h = \|v\|^2/2$) noté

$$\Pi^\uparrow = \{(v, h) \in \mathbb{R}^{d-1} \times \mathbb{R}_+, h \geq \|v\|^2/2\}.$$

Dans ce qui suit, la notation \cdot^\uparrow désignera plus généralement l'épigraphe d'un sous-ensemble de $\mathbb{R}^{d-1} \times \mathbb{R}_+$.

On définit alors le *processus de croissance* Ψ comme le sous-ensemble fermé aléatoire de $\mathbb{R}^{d-1} \times \mathbb{R}_+$

$$\Psi = \bigcup_{x \in \mathbf{X}} x \oplus \Pi^\uparrow.$$

Par ailleurs, considérons d points $x_1 = (v_1, h_1), \dots, x_d = (v_d, h_d)$ dont les coordonnées v_i sont affinement indépendantes. On note alors $\Pi^\square[x_1, \dots, x_d]$ l'unique portion d'un translaté du parabolöide ($h = -\|v\|^2/2$) contenue dans $\text{conv}(v_1, \dots, v_d) \times \mathbb{R}$ et contenant les points x_1, \dots, x_d . On définit alors le *processus de recouvrement* Φ comme le sous-ensemble fermé

$$\Phi = \bigcup_{\{x_1, \dots, x_d\} \subset \mathbf{X}} [\Pi^\square[x_1, \dots, x_d]]^\uparrow.$$

Le résultat que nous montrons alors est le suivant :

\hat{s}_λ et \hat{r}_λ convergent respectivement vers $\partial\Psi$ et $\partial\Phi$ dans l'espace $\mathcal{C}(B(0, R))$ des fonctions continues sur $B(0, R)$ muni de la norme uniforme.

- Indépendamment, le calcul non asymptotique des lois finies-dimensionnelles de ces deux processus peut être mené dans le cas $d = 2$ par des arguments géométriques élémentaires. On retrouve à la limite les lois finies-dimensionnelles des deux processus paraboliques et on en déduit des résultats du second ordre pour le processus ponctuel limite des points extrémaux de l'enveloppe convexe.

- Les deux processus limites Φ et Ψ sont ensuite exploités pour obtenir des estimations asymptotiques de variances et théorèmes centraux limites : certaines mesures aléatoires comme la mesure empirique des faces k -dimensionnelles ou la mesure de courbure (voir par exemple le chapitre 14 de l'ouvrage [88]) ont des contreparties asymptotiques définies directement par le biais de Φ et Ψ . Il est ensuite montré que dans ces différents cas, il existe un rayon de localisation [91] dont la queue de distribution décroît exponentiellement. On rappelle que le rayon de localisation d'une variable aléatoire définie comme fonction d'un point d'un processus ponctuel et du processus lui-même est une distance au-delà de laquelle on peut modifier le processus ponctuel sans que cela change la valeur de la variable. En désignant par $f_k(K_\lambda)$ et $V_k(K_\lambda)$ respectivement le nombre de faces k -dimensionnelles et le k -ième volume intrinsèque de K_λ , l'utilisation classique des techniques de stabilisation [75, 10] permet ensuite de montrer notamment que

$$\lim_{\lambda \rightarrow \infty} \lambda^{-(d-1)/(d+1)} \text{Var}[f_k(K_\lambda)] = \sigma_{f_k}^2 \text{ et } \lim_{\lambda \rightarrow \infty} \lambda^{(d+3)/(d+1)} \text{Var}[V_k(K_\lambda)] = \sigma_{V_k}^2$$

où les variances limites $\sigma_{f_k}^2$ et $\sigma_{V_k}^2$ sont décrites en fonction des processus Ψ et Φ . Remarquons en particulier que ces convergences améliorent les estimations précédemment obtenues par M. Reitzner [81] ou I. Bárány et alt. [7].

- Une autre conséquence importante des techniques de stabilisation est le résultat suivant, en régime global : on a déjà remarqué que le comportement asymptotique des

processus r_λ et s_λ est celui d'un bruit blanc. Il paraît donc naturel de les intégrer afin de chercher une convergence brownienne. On définit donc pour tout $v \in \mathbb{R}^{d-1}$

$$W_\lambda(v) = \int_{\exp([0,v])} s_\lambda(w) d\sigma_{d-1}(w) \text{ et } V_\lambda(v) = \int_{\exp([0,v])} r_\lambda(w) d\sigma_{d-1}(w)$$

où le "segment" $[0, v]$ désigne le pavé $\prod_{i=1}^{d-1} [\min(0, v_i), \max(0, v_i)]$. On remarque en particulier

que $W_\lambda(\infty) = \int_{\mathbb{S}^{d-1}} s_\lambda(w) d\sigma_{d-1}(w)$ coïncide avec la quantité $(2\pi - \pi V_1(K_\lambda))$. En dimension deux, $W_\lambda(\infty)$ est égal à la différence des périmètres du cercle-unité et de K_λ . De même, la grandeur $V_\lambda(\infty) = \int_{\mathbb{S}^{d-1}} r_\lambda(w) d\sigma_{d-1}(w)$ est asymptotiquement équivalente au volume de $\mathbb{B}^d \setminus K_\lambda$.

Après avoir recentré les processus et appliqué un nouveau changement d'échelles, on définit

$$\hat{W}_\lambda(v) = \lambda^{\zeta/2}(W_\lambda(v) - \mathbb{E}W_\lambda(v)) \text{ et } \hat{V}_\lambda(v) = \lambda^{\zeta/2}(V_\lambda(v) - \mathbb{E}V_\lambda(v))$$

où $\zeta = \frac{d+3}{d+1+2\delta}$. On montre alors que lorsque λ tend vers l'infini, \hat{W}_λ (respectivement \hat{V}_λ) converge dans $\mathcal{C}(\mathbb{R}^{d-1})$ vers un drap brownien sur l'intérieur de $B(0, \pi)$, de coefficient de variance explicité en fonction de Φ et Ψ .

- Enfin, on considère la valeur extrême

$$S_\lambda = \sup_{u \in \mathbb{S}^{d-1}} s_\lambda(u) = \sup_{u \in \mathbb{S}^{d-1}} r_\lambda(u).$$

On peut montrer un résultat de convergence pour S_λ qui affine le lemme de localisation des points extrémaux présenté dans la partie 2.1 : soit

$$G_\lambda := M\lambda S_\lambda^{\frac{1}{\gamma}} - C_1 \log(\lambda) - C_2 \log(\log(\lambda)) - C_3$$

où M, C_1, C_2, C_3 sont des constantes explicites, ne dépendant que de la dimension d . Notre résultat est le suivant : lorsque λ tend vers l'infini, la quantité G_λ converge en loi vers une distribution des valeurs extrêmes de type I ou de Gumbel, c'est-à-dire que

$$\lim_{\lambda \rightarrow \infty} \mathbb{P}\{G_\lambda \leq t\} = \exp(-e^{-t}).$$

On généralise ainsi le travail de Bräker et al. [13] portant sur la distance de Hausdorff entre l'enveloppe et le disque-unité en dimension deux. La démonstration de ce résultat repose avant tout sur la relation entre la fonction de répartition de S_λ et une probabilité de recouvrement de la sphère par des calottes sphériques : on remarque que S_λ est inférieur à ε si et seulement si la sphère centrée en l'origine et de rayon $(1 - \varepsilon)$ est entièrement

recouverte par ses intersections avec les boules $B(x/2, \|x\|/2)$ où $x \in \mathbf{X}_\lambda$. Lorsque $\varepsilon = f(\lambda)$ où $f(\lambda)$ a la forme (t étant un réel fixé)

$$f(\lambda) = \left[\frac{1}{M} \left(C_1 \frac{\log(\lambda)}{\lambda} + C_2 \frac{\log(\log(\lambda))}{\lambda} + \frac{C_3 + t}{\lambda} \right) \right]^\gamma,$$

on doit estimer le calcul d'une probabilité de recouvrement de la sphère par des calottes sphériques dont le nombre tend vers l'infini et dont la taille tend vers zéro. Dans ce contexte et avec l'hypothèse que la taille des calottes et leur nombre moyen satisfont une certaine relation asymptotique, S. Janson ([41], lemme 8.1) a fourni un résultat de convergence de la probabilité de recouvrement vers la loi de Gumbel. Il reste donc à adapter convenablement la fonction $f(\lambda)$ pour être dans les conditions d'application du résultat de S. Janson (voir aussi la partie 3.3 pour d'autres utilisations du travail de S. Janson).

Chapitre 3

Le modèle Booléen et autres modèles de recouvrement

Ce chapitre est consacré au modèle Booléen et plus généralement aux modèles de recouvrement, c'est-à-dire faisant intervenir un jet aléatoire d'objets dont le nombre et la forme sont eux-mêmes éventuellement aléatoires. Il comporte trois parties : la première est centrée sur un modèle de recouvrement appelé *Random Sequential Adsorption* qui est utilisé dans le cadre uni-dimensionnel pour modéliser un phénomène de fissuration. La différence avec le modèle Booléen est que l'on interdit l'interpénétration des grains jetés dans l'espace. Les seconde et troisième parties portent sur le modèle Booléen classique et plus particulièrement sur la géométrie de la composante connexe du vide contenant l'origine lorsque le processus est conditionné à ne pas la recouvrir. Dans le premier travail présenté, on s'intéresse à la vitesse de convergence en grande intensité et en dimension deux de cette composante connexe vers la cellule de Crofton. Enfin, la dernière étude met en lumière une grandeur appelée visibilité totale dont on précise la distribution.

3.1 Modèle RSA appliqué à un problème de fissuration

Les résultats présentés dans cette partie ont été obtenus en commun avec André Mézin et Pierre Vallois [T6].

La motivation de notre étude est la modélisation d'un phénomène de fissuration. Plus précisément, considérons un ensemble composé d'un substrat et d'un dépôt d'épaisseur négligeable (par exemple, une couche de peinture sur un mur ou de vase sur un étang). Lorsqu'on applique une force de traction unilatérale d'intensité ε à l'ensemble, le dépôt se craquèle et les fissures formées sont toutes parallèles. Aussi, il suffit de considérer

leurs projections sur un axe fixé, ce qui nous ramène à l'étude d'un processus ponctuel unidimensionnel.

Prenant pour hypothèse que la formation d'une fissure se fait indépendamment des fissures déjà existantes, A. Mézin et P. Vallois [59] ont fourni comme premier modèle pour l'ensemble des couples (position d'une fissure, niveau de contrainte exact auquel celle-ci se crée) un processus de Poisson Φ sur $\mathbb{R} \times \mathbb{R}_+$ de mesure d'intensité $f(y)\mathbf{1}_{\mathbb{R}_+}(y)dxdy$, où $f = F'$ est une fonction dépendant des données physiques du système étudié.

En fait, un certain nombre de travaux physiques [12], [25], [51], [58] montre que les fissures ne se forment pas indépendamment les unes des autres car la création d'une fissure sur le dépôt implique la relaxation de la contrainte sur tout un voisinage de la position. Par conséquent, on se donne pour hypothèse dans l'ensemble du travail le fait suivant : lorsqu'il existe une fissure en un point $x \in \mathbb{R}$, aucune nouvelle fissure ne peut se former par la suite dans l'intervalle $[x - r, x + r]$, où $r > 0$ est une constante fixée.

Suivant cette hypothèse, on construit le processus bi-dimensionnel Ψ sur $\mathbb{R} \times \mathbb{R}_+$ des couples (position d'une fissure, niveau de contrainte auquel celle-ci apparaît) en effaçant certains points du processus Φ , de telle manière qu'il n'y ait jamais deux points à distance inférieure à r . En particulier, un point (x, y) ne peut être effacé que par un point apparu dans l'ensemble $[x - r, x + r] \times [0, y)$ et lui-même épargné par la procédure d'effacement. Le modèle utilisé est appelé *random sequential adsorption* [9, 19, 18]. On obtient que l'ensemble des positions des fissures, lorsqu'on applique une force d'intensité ε , est modélisé par le processus stationnaire et ergodique

$$\Lambda_\varepsilon = \{x \in \mathbb{R}; \exists y \in [0, \varepsilon] \mid (x, y) \in \Psi\}.$$

Les principaux résultats que nous obtenons se divisent en trois parties :

- l'étude statistique de Λ_ε sur \mathbb{R} avec le calcul explicite de l'intensité et de la loi de la distance inter-fissures typique ;
- l'étude locale de ce même processus sur \mathbb{R}_+ dans laquelle on calcule la loi jointe des positions et niveaux de contraintes associés des n premières fissures ;
- le passage à la limite de ces résultats quand ε tend vers l'infini, c'est-à-dire à saturation. Cela nous permet en particulier de retrouver un résultat fondateur dû à Rényi concernant l'intensité critique [83].

Dans ce qui suit, nous apportons des précisions sur les deux premiers points. On considère λ_ε l'intensité de Λ_ε et le couple $(D_\varepsilon, L_\varepsilon)$ constitué de la distance inter-fissures typique et du niveau de contrainte typique associés définis au sens de Palm. Nous déterminons des calculs explicites de λ_ε et de la loi conjointe de $(D_\varepsilon, L_\varepsilon)$ en résolvant une équation intégrale. En notant α la fonction définie sur \mathbb{R}_+ par

$$\alpha(s) = \exp \left\{ - \int_0^{rs} \frac{1 - e^{-t}}{t} dt \right\}, \quad s \geq 0,$$

nous avons

$$\lambda_\varepsilon = \int_0^\varepsilon \alpha(v)^2 dv.$$

De plus, la densité φ_{D_ε} de la loi de D_ε satisfait pour tout $x \geq r$

$$\varphi_{D_\varepsilon}(x) = \begin{cases} \frac{\varepsilon^2}{\lambda_\varepsilon} \alpha(\varepsilon)^2 e^{-(x-2r)\varepsilon} & \text{si } x > 2r \\ \frac{2}{\lambda_\varepsilon} \int_0^\varepsilon e^{-(x-r)v} \alpha(v)^2 v dv & \text{si } r \leq x \leq 2r. \end{cases}$$

La densité φ_{L_ε} de L_ε vérifie pour tout $y \in [0, \varepsilon]$

$$\varphi_{L_\varepsilon}(y) = \frac{1}{\lambda_\varepsilon} \alpha(y)^2.$$

Enfin, la densité $\Pi^{D_\varepsilon}(L_\varepsilon; \cdot)$ de la loi de D_ε conditionnellement à L_ε est la suivante : pour tous $y \in [0, \varepsilon]$, $u \geq 0$,

$$\begin{aligned} \Pi^{D_\varepsilon}(y; u) = & \mathbf{1}_{\{u > 2r\}} \frac{\varepsilon \alpha(\varepsilon)}{\alpha(y)} e^{-ry} e^{-(u-2r)\varepsilon} \\ & + \mathbf{1}_{\{r \leq u \leq 2r\}} \left\{ y e^{-(u-r)y} + \frac{e^{-ry}}{\alpha(y)} \int_y^\varepsilon e^{-(u-r)v} \alpha(v) dv \right\}. \end{aligned}$$

On peut en particulier noter que nous généralisons ici les résultats que Widom avait obtenus dans un contexte moins précis mathématiquement [105].

Par ailleurs, dans le cadre d'une approche locale et non statistique, nous construisons le processus $\Lambda_\varepsilon^+ = \{X_n; n \geq 1\}$ sur \mathbb{R}_+ (modélisant l'ensemble des fissures sur un dépôt unilatéral) par le même procédé que Λ_ε . Nous déterminons la loi de Λ_ε^+ point par point : en particulier, nous calculons explicitement la loi conjointe des positions des n premières fissures X_1, \dots, X_n et de leurs niveaux de contrainte associés, Y_1, \dots, Y_n , $n \geq 1$. Une conséquence de ce résultat est une méthode simple de simulation par rejet. En effet, le vecteur (X_1, \dots, X_n) suit la loi des n premiers points d'un processus de renouvellement conditionné par un évènement que nous explicitons de manière purement géométrique. Plus précisément, on considère trois densités de probabilités sur \mathbb{R}_+ définies pour tout $x \geq 0$ par

$$\begin{aligned} \varphi_\eta(x) &= \frac{\varepsilon}{r\varepsilon + 1} (\mathbf{1}_{[0,r]}(x) + \mathbf{1}_{(r,+\infty)}(x) e^{-(x-r)\varepsilon}), \\ \varphi_\rho(x) &= \frac{1}{\varepsilon} \mathbf{1}_{[0,\varepsilon]}(x), \\ \varphi_{\rho'}(x) &= \frac{1}{\int_0^\varepsilon \alpha(u) du} \mathbf{1}_{[0,\varepsilon]}(x) \alpha(x). \end{aligned}$$

On se donne trois suites indépendantes $(\eta_n)_{n \geq 1}$, $(\rho_n)_{n \geq 1}$ et $(\rho'_n)_{n \geq 1}$ de v.a.i.i.d. de densités respectives φ_η , φ_ρ et $\varphi_{\rho'}$. On considère par ailleurs un processus ponctuel de Poisson

Φ_+ homogène d'intensité un sur $(\mathbb{R}_+)^2$ et indépendant des trois suites précédentes. Alors pour tout $n \geq 1$, le vecteur $(X_1, Y_1, (X_2 - X_1), Y_2, \dots, (X_n - X_{n-1}), Y_n)$ suit la loi de $(\eta_1, \rho_1, r + \eta_2, \rho_2, \dots, r + \eta_{n-1}, \rho_{n-1}, r + \eta_n, \rho'_n)$ conditionné par l'événement

$$\{\Phi_+ \cap \mathcal{PE}(\eta_1, \rho_1, r + \eta_2, \rho_2, \dots, r + \eta_n, \rho'_n) = \emptyset\},$$

où \mathcal{PE} désigne l'ensemble des effaceurs potentiels, c'est-à-dire le lieu des points de \mathbb{R}_+^2 qui effacerait l'un des (X_i, Y_i) sans être lui-même effacé par l'un d'eux.

Notons enfin que notre modèle et nos résultats ont été utilisés depuis par K. Lochmann, R. Gloaguen et D. Stoyan dans le cadre d'une étude de la répartition des fissures sur la dorsale océanique [52]. En particulier, ils ont établi que la loi de la distance inter-fissures typique que nous avons obtenue est une approximation satisfaisante des données numériques dont ils disposaient.

3.2 Raffinement de la convergence vers la cellule de Crofton

Le travail présenté dans cette partie a été réalisé en collaboration avec Julien Michel et Katy Paroux [T11].

Pour tout $\lambda > 0$, on considère un processus ponctuel de Poisson \mathbf{X}_λ dans \mathbb{R}^2 ayant pour mesure d'intensité λdx . On se donne par ailleurs une collection de marques réelles positives i.i.d. R_x pour tout $x \in \mathbf{X}_\lambda$. Ces variables ont pour loi commune une mesure de probabilité μ satisfaisant l'existence d'une constante $R_* > 0$ telle que $\mu(R_*, +\infty) = 1$.

On construit alors la phase occupée du modèle Booléen associé :

$$\mathcal{O}_\lambda = \bigcup_{x \in \mathbf{X}_\lambda} B(x, R_x),$$

et l'on conditionne par l'événement $\{0 \notin \mathcal{O}\}$, dont la probabilité vaut $\exp(-\pi\lambda\mathbb{E}[R^2])$. On s'intéresse à la forme asymptotique de la composante connexe du vide D_0^λ contenant l'origine lorsque l'intensité du processus de Poisson sous-jacent tend vers l'infini. il apparaît qu'après homothétie, le domaine $D^\lambda = \lambda D_0^\lambda$ converge en loi vers la cellule de Crofton d'une mosaïque poissonnienne de droites. Cette question avait été abordée par P. Hall [30] dans les années 1980, puis résolue par I. Molchanov [66], traitée indépendamment par A. Goldman et K. Paroux [73] et enfin par J. Michel et K. Paroux [60], avec des solutions complètes pour des grains de forme aléatoire la plus générale possible.

Le travail qui suit propose de préciser de deux manières ce résultat classique de convergence, tout d'abord en remplaçant la convergence en loi par une convergence presque-sûre puis en étudiant la vitesse de convergence dans toutes les directions. Plus précisément, les résultats établis sont les suivants :

- nous construisons explicitement un couplage entre le modèle Booléen et la mosaïque poissonnienne de droites qui nous permet de montrer une convergence presque-sûre en distance de Hausdorff ;
- nous considérons le processus indexé par les angles de la distance radiale renormalisée entre les deux domaines et nous montrons la convergence des lois finies-dimensionnelles de ce processus ;
- nous établissons la convergence en loi d'une approximation de ce processus, puis du processus lui-même dans L^1 presque-sûrement.

Plus précisément, on considère un processus ponctuel de Poisson \mathbf{Z} de mesure d'intensité $d\rho d\theta d\mu$ sur $\mathbb{R}_+ \times [0, 2\pi) \times \mathbb{R}_+$ et on définit la fonction

$$\psi_\lambda(\rho, R) = R\sqrt{1 + \frac{2\rho}{\lambda R}}.$$

On montre alors que les ensembles aléatoires

$$\mathbf{X} = \bigcup_{(\rho, \theta, R) \in \mathbf{Z}} \{(\rho, \theta)\} \text{ et } \mathbf{X}_\lambda^M = \bigcup_{(\rho, \theta, R) \in \mathbf{Z}} \{(\psi_\lambda(\rho, R), \theta, R)\}$$

sont aussi des processus ponctuels de Poisson qui ont pour mesure d'intensité respectives $d\rho d\theta$ et $\lambda \rho d\rho d\theta d\mu$ sur $\mathbb{R}_+ \times [0, 2\pi)$ et $\mathcal{B} = \{(r, t, R) \in \mathbb{R}_+ \times [0, 2\pi) \times \mathbb{R}_+ : r > R\}$ respectivement.

Cette propriété nous permet d'établir un couplage explicite entre le modèle Booléen et le processus poissonnien de droites de la manière suivante : nous construisons d'une part le modèle Booléen associé aux points marqués du processus \mathbf{X}_λ^M et d'autre part les droites polaires aux points de \mathbf{X} . De plus, chaque droite polaire est associée bijectivement à un disque du modèle Booléen. Après une homothétie de rapport λ sur le modèle Booléen, nous obtenons une composante connexe du vide contenant l'origine notée D^λ et la cellule de Crofton notée C_0 de la mosaïque poissonnienne. Il est ensuite possible d'estimer la distance de Hausdorff $d_H(D^\lambda, C_0)$ lorsqu'on remplace les domaines D^λ et C_0 par leurs intersections avec un disque fixé centré en l'origine et de rayon M . On peut d'ailleurs noter que cette distance décroît en λ^{-1} . Il reste alors à utiliser l'estimation de la queue de distribution du rayon circonscrit de C_0 obtenue dans [T2] (voir partie 1.2.2) et à établir un résultat du même type pour le rayon du plus petit disque centré en l'origine et contenant D^λ . Nous obtenons ainsi le résultat suivant :

le domaine D^λ converge presque-sûrement en distance de Hausdorff vers la cellule de Crofton C_0 de la mosaïque poissonnienne quand l'intensité λ tend vers l'infini.

Il paraît naturel ensuite de chercher un second ordre dans cette convergence, c'est-à-dire d'étudier le comportement de la distance entre ces deux ensembles. En notant Δ_t , $t \in [0, 2\pi)$, la demi-droite issue de l'origine et orientée par le vecteur $(\cos(t), \sin(t))$, on

considère donc la distance dans la direction t

$$d_\lambda(t) = \text{dist}(0, \Delta_t \cap \partial D^\lambda) - \text{dist}(0, \Delta_t \cap \partial C_0),$$

où dist désigne la distance euclidienne.

On montre alors que les vecteurs de dimension finie $\lambda(d_\lambda(t_1), \dots, d_\lambda(t_n))$, $0 \leq t_1 < \dots < t_n < 2\pi$, convergent presque-sûrement vers des variables dont la loi peut être rendue explicite. Décrivons par exemple la limite pour un vecteur à une coordonnée : la demi-droite Δ_t intercepte la frontière de la cellule de Crofton C_0 en un point qui se trouve sur une unique arête presque-sûrement. Soit $\Theta(t)$ l'angle polaire associé à cette arête et $L(t)$ la distance de l'origine à ce point d'intersection. Le procédé de couplage permet d'associer à la droite portant cette arête un disque du modèle Booléen dont on note le rayon $R(t)$. On montre alors que pour tout $t \in [0, 2\pi)$,

$$\lambda d_\lambda(t) \xrightarrow[\lambda \rightarrow +\infty]{\text{a.s.}} -\frac{L(t)^2}{2} \frac{\cos 2(\Theta(t) - t)}{R(t) \cos(\Theta(t) - t)},$$

où le triplet $(L(t), \Theta(t), R(t))$ a pour loi

$$d\mathbb{P}_{(L(t), \Theta(t), R(t))}(\ell, \alpha, r) = \pi \exp(-2\pi\ell) \cos(\alpha - t) \mathbf{1}_{\alpha \in (t-\pi/2, t+\pi/2)} d\ell d\alpha d\mu(r).$$

La question de la convergence du processus λd_λ est plus délicate. En effet, celui-ci est constitué d'une partie continue et d'une autre partie à sauts. Du fait de son comportement au voisinage des sommets de la cellule de Crofton, il n'est pas possible de montrer un critère de tension. On utilise alors une approximation de λd_λ en remplaçant $d_\lambda(t)$ par la distance $\bar{d}_\lambda(t)$ définie de la manière suivante : la demi-droite Δ_t coupe la frontière de la cellule de Crofton sur une arête à laquelle on associe un disque par le procédé de couplage. La distance \bar{d}_λ est alors mesurée le long de Δ_t entre la frontière de C_0 et la frontière du disque en question. En particulier, les lois finies-dimensionnelles des deux processus $(\lambda d_\lambda(t))_{t \in [0, 2\pi)}$ et $(\lambda \bar{d}_\lambda(t))_{t \in [0, 2\pi)}$ convergent vers la même limite. On montre de plus que

$(\lambda \bar{d}_\lambda(t))_{t \in [0, 2\pi)}$ converge en loi vers un processus explicite $(\xi_t)_{t \in [0, 2\pi)}$ (non continu) dans l'espace $D(0, 2\pi)$ des fonctions càdlàg sur $[0, 2\pi)$.

Il devient naturel ensuite d'étudier la différence entre le processus $(\lambda d_\lambda)_{t \in [0, 2\pi)}$ qui nous intéresse et le processus d'approximation $(\lambda \bar{d}_\lambda)_{t \in [0, 2\pi)}$. Celle-ci diverge dans l'espace $L^\infty(0, 2\pi)$ mais converge dans $L^1(0, 2\pi)$ presque-sûrement :

$$\lim_{\lambda \rightarrow +\infty} \lambda \int_{(0, 2\pi)} |d_\lambda(t) - \bar{d}_\lambda(t)| dt = 0.$$

Une conséquence directe de cette estimation est la suivante : presque-sûrement, on a

$$(\lambda d_\lambda)_{t \in [0, 2\pi)} \xrightarrow[\lambda \rightarrow +\infty]{L^1(0, 2\pi)} (\xi_t)_{t \in (0, 2\pi)}.$$

On peut enfin signaler que nous disposons d'un résultat partiel portant sur la loi du maximum de d_λ pris sur toutes les directions possibles : pour tout $\beta < 1$,

$$\lim_{u \rightarrow +\infty} \left\{ u^\beta \limsup_{\lambda \rightarrow +\infty} \mathbb{P} \left(\sup_{\theta \in [0, 2\pi)} \lambda |d_\lambda(\theta)| \geq u \right) \right\} = 0.$$

3.3 Fonction de visibilité : distribution et asymptotiques

Le travail présenté dans cette partie a été réalisé en collaboration avec Julien Michel et Sylvain Porret-Blanc [T13, T14].

Le modèle Booléen que nous allons considérer dans ce chapitre peut être défini de la manière suivante : on considère un ensemble convexe compact aléatoire K qui est de diamètre presque-sûrement borné et invariant en loi par toute rotation. Soit \mathbf{X} un processus ponctuel de Poisson de mesure d'intensité la mesure de Lebesgue sur \mathbb{R}^d , marqué en tout point x par une copie indépendante K_x de K . La phase occupée du modèle Booléen est alors donnée par $\mathcal{O} = \bigcup_{x \in \mathbf{X}} (x \oplus K_x)$, et l'on conditionne par l'événement $\{0 \notin \mathcal{O}\}$, dont la probabilité vaut $\exp(-\mathbb{E}[V_d(K)])$. Dans le cadre de ce travail, un observateur imaginaire est placé en l'origine et on appelle les grains du modèle Booléen *obstacles*.

La composante connexe du vide contenant l'origine notée \mathcal{D} est en particulier un domaine étoilé autour de l'origine dont nous allons étudier certaines caractéristiques géométriques.

Tout d'abord, il est possible de déterminer la loi du rayon R_m de la plus grande boule entièrement contenue dans \mathcal{D} et centrée en l'origine. La queue de distribution de R_m satisfait en effet la relation suivante pour tout $r > 0$:

$$\mathbb{P}\{R_m \geq r\} = \exp\{-\mathbb{E}[V_d(K + B(0, r)) - V_d(K)]\} = \exp\left\{-\sum_{k=1}^d \kappa_k k \mathbb{E}[V_{d-k}(K)] r^k\right\}$$

où $V_0(K), \dots, V_d(K)$ sont les volumes intrinsèques du convexe compact K et où l'espérance \mathbb{E} se rapporte ici au convexe compact aléatoire K .

Du fait de la non-convexité des composantes connexes d'un modèle Booléen, il est plus difficile d'obtenir des informations sur le rayon circonscrit de \mathcal{D} , c'est-à-dire le rayon de la plus petite boule centrée en l'origine et contenant \mathcal{D} . C'est une des raisons pour lesquelles on s'intéresse à une autre caractéristique géométrique que l'on appelle la visibilité. Pour un vecteur unitaire $\mathbf{u} \in \mathbb{S}^{d-1}$ donné, la visibilité $V(\mathbf{u})$ dans la direction \mathbf{u} est définie comme la longueur du plus grand segment orienté par \mathbf{u} , émanant de l'origine et entièrement contenu dans la composante connexe \mathcal{D} , c'est-à-dire

$$V(\mathbf{u}) = \inf\{r > 0; r\mathbf{u} \in \mathcal{O}\}.$$

Dans la littérature, cette grandeur est souvent appelée longueur de corde [55, 32]. La loi de $V(\mathbf{u})$ peut être déterminée de manière explicite à l'aide du diamètre moyen de K , c'est-à-dire le volume intrinsèque $V_1(K)$, qui est aussi la moyenne des diamètres de K pris dans toutes les directions. Ainsi, on obtient pour tout $r > 0$,

$$\mathbb{P}\{V(\mathbf{u}) \geq r\} = \exp\{-\mathbb{E}[V_1(K)]r\}.$$

Le minimum des $V(\mathbf{u})$ lorsque \mathbf{u} décrit \mathbb{S}^{d-1} est précisément le rayon R_m défini précédemment, qui est aussi appelé distance sphérique de contact [46, 17]. Il s'agit d'une donnée géométrique qui est communément utilisée dans la littérature pour décrire des milieux de type poreux (voir par exemple le travail récent [48]). Il est naturel de définir également le maximum des $V(\mathbf{u})$ que l'on appelle visibilité totale \mathcal{V} :

$$\mathcal{V} = \sup\{V(\mathbf{u}); u \in \mathbb{S}^{d-1}\}.$$

Etrangement, cette grandeur a été peu considérée jusqu'à présent alors qu'elle apporte clairement une information supplémentaire par rapport à la distribution sphérique de contact. On peut tout de même citer les travaux non probabilistes de G. Pólya [76] puis de V. Janković [40] portant sur la visibilité dans un réseau carré d'arbres, un ouvrage de référence dû à S. Zacks [107] et motivé par des applications militaires et plus récemment l'étude menée par I. Benjamini et al. [11] dans le cadre du disque hyperbolique, qui a en particulier permis d'exhiber une intensité critique pour la visibilité à l'infini.

L'un de nos buts est d'apporter de nouvelles informations sur la loi de la visibilité totale afin de développer une utilisation future de cet indicateur dans l'étude des milieux poreux et plus particulièrement en foresterie. On peut notamment citer comme applications potentielles l'optimisation de l'élagage directionnel des arbres, la mesure du niveau de compétition entre arbres en dynamique forestière ou même l'estimation de la transmission de lumière à travers la canopée.

Nos résultats sont les suivants :

- en dimension deux et dans le cas d'obstacles circulaires, nous fournissons une formule explicite pour la loi de \mathcal{V} , accompagnée par un encadrement de la queue de distribution avec des fonctions élémentaires ;
- en dimension deux, nous obtenons un équivalent logarithmique de la queue pour toute forme d'obstacle ;
- en dimension quelconque et avec des obstacles sphériques, un encadrement de cette queue est donné ;
- en dimension quelconque, un théorème de convergence vers la loi des valeurs extrêmes de type I est montré dans deux cas asymptotiques distincts : lorsque la taille des obstacles tend vers zéro et lorsque la distance au premier obstacle rencontré tend vers l'infini.

Tous ces résultats reposent sur une réécriture de la loi de \mathcal{V} en termes de probabilité de recouvrement de la sphère unité par des calottes sphériques aléatoires. En effet, chaque obstacle produit une *ombre* sur la sphère de rayon r et par conséquent, on parvient à voir jusqu'à la distance r si cette sphère n'est pas totalement ombragée. En particulier, en reprenant la notation $P(\nu, n)$ introduite en partie 1.2.2, nous obtenons qu'en dimension deux, lorsque les obstacles sont des disques de rayon $R > 0$ fixé, on a pour tout $r > 0$,

$$\mathbb{P}(\mathcal{V} \geq r) = \exp(-\pi(2rR + r^2)) \sum_{n \geq 0} \frac{(\pi(2rR + r^2))^n}{n!} (1 - P(\nu_r, n))$$

où ν_r est la mesure de probabilité

$$\begin{aligned} \nu_r(du) &= \frac{\pi r}{rR + \frac{r^2}{2}} \mathbf{1}_{[0, \frac{1}{\pi} \arctan(\frac{R}{r})]}(u) \left(r \sin(2\pi u) + \frac{\sin(\pi u)(R^2 + r^2 \cos(2\pi u))}{\sqrt{R^2 - r^2 \sin^2(\pi u)}} \right) \\ &\quad + \frac{\pi R^2}{rR + \frac{r^2}{2}} \mathbf{1}_{[\frac{1}{\pi} \arctan(\frac{R}{r}), \frac{1}{2}]}(u) \frac{\cos(\pi u)}{\sin^3(\pi u)}. \end{aligned}$$

Rappelons que $P(\nu, n)$ est connue explicitement [94, 93].

Dans le cas général d'obstacles de forme aléatoire, invariante par rotation, le lien avec des probabilités de recouvrement de type $P(\nu, n)$ subsiste mais il est plus délicat d'expliciter la mesure ν impliquée. Cependant, on peut obtenir l'estimation ci-dessous :

$$\lim_{r \rightarrow +\infty} \frac{1}{r} \log \mathbb{P}(\mathcal{V} \geq r) = -\mathbb{E}[V_1(\mathcal{K})]. \quad (3.1)$$

Ce résultat indique en particulier que l'estimation unidirectionnelle fournie par l'égalité immédiate $\mathbb{P}(V(\mathbf{u}) > r) = \exp(-r\mathbb{E}[V_1(\mathcal{K})])$ se retrouve asymptotiquement pour le maximum dans toutes les directions.

Dans le cas d'obstacles circulaires, nous disposons d'un encadrement plus général de $\mathbb{P}(\mathcal{V} \geq r)$: il existe deux constantes C_1 et C_2 telles que pour r suffisamment grand,

$$C_1 r \exp(-\pi m_r(2\mathbb{E}(R)r + r^2)) \leq \mathbb{P}(\mathcal{V} \geq r) \leq C_2 r^2 \exp(-\pi m_r(2\mathbb{E}(R)r + r^2)), \quad (3.2)$$

m_r étant la moyenne de la loi ν_r . Celui-ci implique l'équivalent logarithmique précédent. Pour montrer (3.1) et (3.2), on s'appuie sur la stratégie utilisée dans ([T2], conséquence de la preuve du Théorème 13), à savoir : on exploite tout d'abord un résultat de comparaison entre probabilités de recouvrement $P(\nu_1, n)$ et $P(\nu_2, n)$ lorsque ν_1 et ν_2 sont des mesures de probabilité sur $[0, 1/2]$ ordonnées suivant l'ordre convexe [70], puis on applique une estimation due à L. A. Shepp [92] de la probabilité de recouvrir le cercle avec des arcs de longueur constante. Lorsque K n'est plus un disque, il faut également faire intervenir une estimation de l'angle de vision depuis l'origine pour les obstacles éloignés.

L'équivalent en dimension supérieure des recouvrements du cercle est le recouvrement de la sphère par des calottes. Il y a peu de littérature sur ce sujet, essentiellement

concentrée dans le cas des calottes sphériques de rayon constant. En particulier, les travaux dûs à E. N. Gilbert et P. Hall [24, 31] ont été récemment enrichis par l'article de Bürgisser et alt. [14] dans lequel une formule de la probabilité de recouvrir est obtenue dans certains cas, ainsi qu'un nouveau minorant dans le cas général. Nous nous limitons donc à des obstacles $K = B(0, R)$ où R est un rayon constant.

En dimension $d \geq 3$, on a :

$$-\kappa_{d-1}R^{d-1} \leq \liminf_{r \rightarrow +\infty} \frac{1}{r} \log \mathbb{P}(\mathcal{V} \geq r) \leq \limsup_{r \rightarrow +\infty} \frac{1}{r} \log \mathbb{P}(\mathcal{V} \geq r) \leq -\frac{1}{d}\kappa_{d-1}R^{d-1}.$$

Les travaux dûs à S. Janson fournissent une précieuse estimation asymptotique ([41], lemme 8.1) valable en toute dimension de la probabilité de recouvrir la sphère et plus généralement une variété riemannienne avec des boules géodésiques lorsqu'il y a compétition entre la taille de ces boules qui tend vers 0 et leur nombre qui tend vers l'infini. Nous en déduisons deux théorèmes de convergence de valeurs extrêmes.

Tout d'abord, dans le cas d'obstacles sphériques en toute dimension, on s'intéresse à la visibilité lorsque le modèle est conditionné par l'événement $\{R_m \geq r\}$, c'est-à-dire qu'aucun obstacle n'est vu de l'origine jusqu'à la distance r . On note \mathcal{V}_r une variable ayant la loi de \mathcal{V} conditionnée par $\{R_m \geq r\}$ et on considère de plus la quantité

$$\psi_r = \kappa_{d-1}E(R^{d-1})(\mathcal{V}_r - r) - (d-1) \log(r) - (d-1) \log(\log(r)) - K_d$$

où

$$K_d = \log \left(\frac{1}{(d-1)!} \left(\frac{\sqrt{\pi} \Gamma(\frac{d+1}{2})}{\Gamma(\frac{d}{2})} \right)^{d-2} \frac{E_\mu(R^{d-2})^{d-1}}{E_\mu(R^{d-1})^{d-2}} \right) + (d-1) \log(d-1) - \log \left(\frac{\kappa_{d-1} E_\mu(R^{d-1})}{d\kappa_d} \right).$$

Alors lorsque r tend vers l'infini, on a pour tout $t \in \mathbb{R}$,

$$\lim_{r \rightarrow +\infty} \mathbb{P}(\psi_R \leq t) = \exp(-e^{-t}).$$

En particulier, on peut remarquer que lorsqu'on a la vue totalement dégagée à grande distance r , on ne verra pas au-delà d'une distance de l'ordre de $(r + c \log(r))$, où c est une constante positive ne dépendant que de la dimension.

Le second théorème de convergence est obtenu toujours en dimension quelconque, avec des obstacles sphériques de rayon R déterministe. On note \mathcal{V}_R la visibilité associée aux obstacles de rayon R et on s'intéresse à la variable

$$\xi_R = \kappa_{d-1}R^{d-1}\mathcal{V}_R + d(d-1) \log(R) - 2(d-1) \log |\log(R)| - C_d$$

où

$$C_d = \log \left(d^{2(d-1)} (d-1)^{3(d-1)-1} \Gamma \left(\frac{d}{2} - \frac{1}{2} \right)^{2d-2} \right) - \log \left((d-1)! \pi^{\frac{(d-1)^2+1}{2}} 2^{2d-3} \Gamma \left(\frac{d}{2} \right)^{d-2} \right).$$

On obtient que pour tout $t \in \mathbb{R}$,

$$\lim_{R \rightarrow 0} \mathbb{P}(\xi_R \leq t) = \exp(-e^{-t}).$$

Autrement dit, ce résultat fournit un développement à trois termes de la croissance de la visibilité lorsque les obstacles “disparaissent”.

Perspectives

Cette partie propose une brève sélection de thèmes de réflexion. Certains sont directement suggérés par l'un des travaux présentés dans ce mémoire, d'autres sont associés à des modèles de géométrie aléatoire proches de ceux présentés dans les parties précédentes.

Zéro-cellules à grand nombre de côtés

Au-delà des arguments issus de la physique statistique qui requerraient certains compléments et reformulations mathématiques, il reste de nombreux points à éclaircir. Par exemple, la constante obtenue comme dernier terme du développement de $\log(p_n)$ demeure énigmatique. Une piste possible serait de tenter de la réécrire comme moyenne d'une fonction de la limite continue des deux processus (ξ_i) et (η_i) . Si on peut espérer exploiter le développement de Taylor de l'intégrande pour en déduire sa limite, la justification de la convergence de l'espérance elle-même est de toute façon délicate. Plus généralement, une description précise de la radius-vector fonction de la zéro-cellule conditionnée à avoir n côtés apporterait des éclaircissements. A la manière du travail [T15] qui fait l'étude de la forme de la zéro-cellule lorsque son rayon inscrit est grand, il faudrait estimer précisément rayons inscrit et circonscrit lorsque le nombre de côtés est fixé et grand, puis directement le processus qui à chaque direction associe la longueur du plus grand segment émanant de l'origine et contenu dans la zéro-cellule. L'obstacle principal est qu'il est beaucoup plus difficile de réaliser la zéro-cellule conditionnée par son nombre de côtés. Même le rapport entre rayon inscrit et rayon circonscrit est difficile à évaluer précisément en fonction de n .

Par ailleurs, le rôle joué par le paramètre est intéressant dans la mesure où plus α est grand, plus l'origine a un rôle central dans la cellule. La cellule de Crofton tenant une place très particulière dans notre étude, il est naturel de s'interroger sur l'évolution de la zéro-cellule pour des valeurs de α inférieures à 1, c'est-à-dire au-delà du cas Crofton.

Le lien avec le problème de Sylvester des points en position convexe n'est sans doute pas totalement compris ni exploité. Les deux premiers termes du développement de $\log(p_n)$ (probabilité que la zéro-cellule ait n côtés) et $\log(q_n)$ (probabilité que n points uniformes dans le disque soient en position convexe) ne coïncident que dans le cas $\alpha = 2$, c'est-à-

dire le cas de la cellule typique de Poisson-Voronoi. Le terme suivant (en $\log(n)$ pour la zéro-cellule, sans doute en $n^{1/5}$ pour les points en position convexe) diffère dans tous les cas, sans que cela soit totalement prouvé.

Toujours dans le cadre du modèle de Sylvester, un problème relié de près à cette question concerne la localisation de la frontière de l'enveloppe convexe près du cercle dans le cas où on conditionne les points à être tous extrémaux. A ce jour, I. Bárány [6] a prouvé que la distance de Hausdorff entre l'enveloppe et le disque tend vers 0 mais il n'est pas possible d'adapter sa technique de preuve pour en déduire une estimation plus fine de la décroissance de la distance. En particulier, il n'existe aucun résultat du type de ceux obtenus dans le cadre de polytopes aléatoires classiques dans la partie 2, comme par exemple le théorème des valeurs extrêmes. Il n'est de fait pas évident de relier le comportement des deux objets en question, c'est-à-dire d'une part l'enveloppe convexe d'un nuage de points et d'autre part cette même enveloppe conditionnée par l'événement que tous les points du nuage sont extrémaux.

Frontières de zéro-cellules et de polytopes aléatoires

Le travail portant sur les convergences de processus qui décrivent la frontière d'une enveloppe convexe aléatoire peut être généralisé dans plusieurs directions.

- le problème de la dépoissonnisation n'a par exemple pas été envisagé. Il s'agirait de remplacer le nuage de points poissonnien par n points indépendants et uniformément distribués, puis de faire le même type d'étude asymptotique lorsque n tend vers l'infini. Etrangement, ce n'est en général pas une étape immédiate lorsqu'on manie les polytopes aléatoires.
- Une seconde extension possible des résultats consisterait à remplacer la boule-unité par un autre ensemble convexe de \mathbb{R}^d . En général, l'analyse s'avère très différente suivant que l'ensemble convexe dans lequel on construit le polytope aléatoire est à bord \mathcal{C}^2 ou est un polyèdre. L'isotropie semble être un argument important dans certaines démonstrations. Cependant, on remarquera qu'a priori le résultat de valeurs extrêmes repose sur l'utilisation d'un lemme de S. Janson qui est en fait énoncé sur une variété riemannienne quelconque.
- Dans ce travail, sont proposés de premiers calculs de caractéristiques du second ordre pour le processus ponctuel des points extrémaux. Pour autant, la répartition de ces points reste difficile à cerner, notamment par rapport aux différentes classes connues de processus ponctuels. En lien avec cette remarque, on peut regretter de n'avoir pas davantage exploité l'aspect dynamique de la construction de l'enveloppe convexe ou du processus parabolique de croissance.

- Enfin, bien que cela semble difficile, je garde tout de même l'envie d'obtenir davantage de résultats non asymptotiques telles que les calculs de lois finies-dimensionnelles pour r_λ et s_λ dans ce travail. Dans la littérature, il existe peu de travaux non asymptotiques et de nombreuses questions élémentaires demeurent irrésolues. Citons par exemple la conjecture suivante : le nombre moyen de points extrémaux d'un nuage de n points indépendants et uniformément répartis dans le disque-unité croît avec n .

La partie de ce travail consacrée aux mosaïques suggère également différentes perspectives à court et plus long terme.

- Le lien de dualité qui relie les zéro-cellules de mosaïques d'hyperplans aux enveloppes convexes aléatoires ne semble pas avoir été totalement exploité. Il restera par exemple à faire l'étude des mesures empiriques des faces k -dimensionnelles, de la mesure de courbure et des volumes intrinsèques. Il s'agit de grandeurs qui ne se conservent pas de manière évidente lorsqu'on fait agir une transformation d'inversion. Il faut donc dans ce contexte appliquer directement les techniques de stabilisation à la zéro-cellule.
- Il paraît naturel d'envisager d'autres conditionnements de la zéro-cellule. L'énoncé original de la conjecture de D. G. Kendall suggère de conditionner par la valeur de l'aire et les travaux de D. Hug, M. Reitzner et R. Schneider [35] considèrent des événements plus généraux du type "volume k -dimensionnel grand" ou "diamètre grand". Dans ce contexte, l'analyse de la convergence de la cellule vers la forme sphérique reste à faire, par exemple à l'aide de la radius-vector fonction.

Visibilité dans un modèle Booléen

De nombreuses extensions de l'étude déjà effectuée sont envisagées :

Un premier travail consisterait à répondre plus directement aux questions posées en foresterie. Il apparaît d'ailleurs que d'autres quantités liées à la visibilité auraient un rôle à jouer.

- La moyenne de la visibilité dans toutes les directions, autrement dit la quantité d'énergie diffusée depuis l'origine : bien évidemment, le calcul de son premier moment ne pose aucune difficulté mais les moments suivants font intervenir la loi jointe de visibilité dans plusieurs directions simultanément.
- La proportion de points à distance r visible depuis l'origine : en reprenant le lien entre la loi de la visibilité et les probabilités de recouvrement de la sphère, on constate qu'il sera nécessaire d'avoir une estimation de la proportion de sphère recouverte. Des travaux tels que ceux de T. Huillet [38] fournissent des résultats dans cette direction.
- Le rayon circonscrit de la composante connexe du vide contenant l'origine : contrairement à la visibilité, cette grandeur dépend de la percolation et n'est plus une donnée de

la géométrie locale autour de l'origine. Elle est clairement minorée par la visibilité.

De plus, il serait intéressant de pousser l'étude plus générale du processus indexé par les directions de la visibilité (et non de son maximum ou de son minimum) en considérant donc la frontière de l'étoile de visibilité, c'est-à-dire le domaine de l'espace vu de l'origine. Des calculs de moyennes tels que le volume de ce domaine ou le nombre de sauts d'une boule à l'autre sur sa frontière peuvent déjà être obtenus de manière relativement directe.

Enfin, on pourrait imaginer que les obstacles rencontrés par les rayons lumineux absorbent une partie seulement de l'énergie, qui serait fonction de la distance parcourue à l'intérieur du plein.

Autres problèmes

- Un des problèmes classiques associés au modèle Booléen consiste à dénombrer le nombre de grains dans une composante connexe. Cette question est évidemment associée à la percolation et l'une de ses motivations est la détection de clusters de points dans une image binaire. Par l'utilisation de la formule de Slivnyak, il est possible d'obtenir une formule intégrale pour la distribution de ce nombre [78] mais son exploitation reste difficile. Dans le cas où les grains sont des boules, il existe des résultats asymptotiques à grande intensité [85]. La détection de clusters requiert plutôt des informations à faible intensité qui font défaut à ce jour. Récemment, A. Bar-Hen, M. Koskas et N. Picard [4] ont proposé un calcul de la distribution du nombre de composantes connexes (à k éléments) pour un modèle Booléen construit dans une fenêtre. Il serait intéressant d'étudier dans quelles mesures ces résultats peuvent se prolonger sur l'espace tout entier et s'il y a moyen d'en déduire une composante connexe typique au sens de Palm.

- P. Vallois (mathématicien à l'université Nancy 1), A. Mézin (physicien aux Mines de Nancy) et S. Barrat (physicien aux Mines de Nancy) m'ont présenté un modèle de cristallisation à partir de germes sur la droite, qui s'apparente à la mosaïque dite *de Gilbert* introduite en 1965 [23]. Des germes sont placés aléatoirement et simultanément sur la droite réelle. Chacun d'eux croît avec le temps sous la forme d'un segment qui s'allonge le long d'une demi-droite orientée de manière aléatoire. On impose qu'un germe interromp sa croissance dès lors qu'il rencontre un autre segment déjà formé. Une variante de ce modèle qui représente de manière extrêmement basique la formation de cristaux consiste à remplacer les segments par d'autres formes géométriques. Très peu de travaux existent sur cet objet et à ma connaissance, aucun résultat de type analytique lorsque les directions des germes sont aléatoires. Nous avons débuté une première étude dans des cas très particuliers qui a abouti à quelques résultats mineurs mais encourageants sur la proportion de cristaux interrompus avant un instant fixé. Il serait envisageable ensuite

de chercher à décrire plus précisément la mosaïque formée, par exemple la proportion de triangles.

- Un problème remontant à la fin de ma thèse de doctorat concerne l'étude de mosaïques biphasées, c'est-à-dire telles que chaque cellule soit coloriée en blanc ou noir avec une probabilité fixe et indépendamment des autres cellules. L'idée serait de représenter ainsi un milieu de type poreux. Ce genre de modèle a déjà été utilisé pour estimer par simulation la conductivité thermique de certains mélanges de matériaux [43]. Lorsqu'on cherche à en faire une étude purement statique en se plaçant en un point fixé, on rencontre des difficultés pour étudier des quantités aussi élémentaires que la distribution de corde, la distribution sphérique de contact ou la visibilité. Sur un plan dynamique, on pourrait songer à modéliser un transport en milieu poreux en étudiant une particule brownienne qui évolue dans ce milieu et serait par exemple ralentie ou réfléchi lorsqu'elle se trouve au contact des parties noircies.

- Enfin, de manière extrêmement vague pour le moment, je suis intéressé par d'autres thématiques émergentes du domaine de la géométrie aléatoire telles que les mosaïques fractales ou les applications liées au transport de masse.

Liste des publications

- [T1] P. Calka. Mosaiques poissoniennes de l'espace euclidien. Une extension d'un résultat de R. E. Miles *C. R. Acad. Sci. Paris, Série I Math.*, **332 (6)**, 557-562 (2001)
- [T2] P. Calka. The distributions of the smallest disks containing the Poisson-Voronoi typical cell and the Crofton cell in the plane *Adv. in Appl. Probab.*, **34 (4)**, 702-717 (2002)
- [T3] A. Goldman et P. Calka. On the spectral function of the Poisson-Voronoi cells. *Ann. Inst. H. Poincaré Probab. Statist.*, **39 (6)**, 1057-1082 (2003)
- [T4] P. Calka. An explicit expression of the distribution of the number of sides of the typical Poisson-Voronoi cell. *Adv. in Appl. Probab.*, **35 (4)**, 863-870 (2003)
- [T5] P. Calka. Precise formulae for the distributions of the principal geometric characteristics of the typical cells of a two-dimensional Poisson-Voronoi tessellation and a Poisson line process. *Adv. in Appl. Probab.*, **35 (3)**, 551-562 (2003)
- [T6] P. Calka, A. Mézin et P. Vallois. Statistical and renewal results for the random sequential adsorption model applied to a unidirectional multicracking problem. *Stochastic Process. Appl.*, **115(6)**, 983-1016 (2005)
- [T7] P. Calka et T. Schreiber. Limit theorems for the typical Poisson-Voronoi cell and the Crofton cell with a large inradius. *Ann. Probab.*, **33 (4)**, 1625-1642 (2005)
- [T8] P. Calka et T. Schreiber. Large deviation probabilities for the number of vertices of random polytopes in the ball. *Adv. in Appl. Probab.*, **38 (1)**, 47-58 (2006)
- [T9] H. Hilhorst et P. Calka. Random line tessellations of the plane : statistical properties of many-sided cells. *J. Stat. Phys.*, **132 (4)**, 627-647 (2008)
- [T10] H. Hilhorst, P. Calka et G. Schehr. Sylvester's question and the Random Acceleration Process. *J. Stat. Mech.*, P10010 (2008)
- [T11] P. Calka, J. Michel et K. Paroux. Refined convergence for the Boolean model. A paraître dans *Adv. in Appl. Probab.* (2009)
- [T12] P. Calka. Tessellations. Contributed chapter to *New Perspectives in Stochastic Geometry*. Edited by W. Kendall and I. Molchanov. Published by Oxford University Press (2009)

- [T13] P. Calka, J. Michel et S. Porret-Blanc. Visibilité dans le modèle booléen. *Comptes-Rendus Mathématique*, **347 (11-12)**, 659-662 (2009)
- [T14] P. Calka, J. Michel et S. Porret-Blanc. Asymptotics of the visibility function in the Boolean model. *Soumis*, *hal-00389798*.
- [T15] P. Calka, T. Schreiber et J. Yukich. Local scaling, global scaling and extreme value asymptotics for convex hulls in the unit ball.

Bibliographie

- [1] T. W. Anderson. The integral of a symmetric unimodal function over a symmetric convex set and some probability inequalities. *Proc. Amer. Math. Soc.*, 6 :170–176, 1955.
- [2] F. Avram and D. Bertsimas. On central limit theorems in geometrical probability. *Ann. Appl. Probab.*, 3(4) :1033–1046, 1993.
- [3] F. Baccelli and B. Błaszczyszyn. On a coverage process ranging from the Boolean model to the Poisson-Voronoi tessellation with applications to wireless communications. *Adv. in Appl. Probab.*, 33(2) :293–323, 2001.
- [4] A. Bar-Hen, M. Koskas, and N. Picard. Spatial cluster detection using the number of connected components of a graph. *disponible sur <http://hal.archives-ouvertes.fr/hal-00197578/en/>*, 2008.
- [5] I. Bárány. Random polytopes in smooth convex bodies. *Mathematika*, 39(1) :81–92, 1992.
- [6] I. Bárány. Sylvester’s question : the probability that n points are in convex position. *Ann. Probab.*, 27(4) :2020–2034, 1999.
- [7] I. Bárány, F. Fodor, and V. Vigh. Intrinsic volumes of inscribed random polytopes in smooth convex bodies. *disponible sur <http://arxiv.org/abs/0906.0309>* , 2009.
- [8] I. Bárány and M. Reitzner. Random polytopes. *disponible sur <http://www.renyi.hu/~barany/cikkek/clt-pol2.pdf>* , 2009.
- [9] Yu. Baryshnikov and J. E. Yukich. Gaussian fields and random packing. *J. Statist. Phys.*, 111(1-2) :443–463, 2003.
- [10] Yu. Baryshnikov and J. E. Yukich. Gaussian limits for random measures in geometric probability. *Ann. Appl. Probab.*, 15(1A) :213–253, 2005.
- [11] I. Benjamini, J. Jonasson, O. Schramm, and J. Tykesson.
- [12] J. Berréhar, C. Lapersonne-Meyer, M. Schott, and J. Villain. Formation of periodic crack structures in polydiacetylene single crystal thin films. *J. de Physique France*, 50 :923–935, 1989.

- [13] H. Bräker, T. Hsing, and N. H. Bingham. On the Hausdorff distance between a convex set and an interior random convex hull. *Adv. in Appl. Probab.*, 30(2) :295–316, 1998.
- [14] P. Bürgisser, F. Cucker, and M. Lotz. Coverage processes on spheres and condition numbers for linear programming. *disponible sur <http://arxiv.org/abs/0712.2816>*, 2008.
- [15] T. W. Burkhardt. Semiflexible polymer in the half plane and statistics of the integral of a brownian curve. *J. Phys. A : Math. Gen.*, 26(L1157-L1162), 1993.
- [16] P. Calka. *De nouveaux résultats sur la géométrie des mosaïques de Poisson-Voronoi et des mosaïques poissonniennes d'hyperplans. Etude du modèle de fissuration de Rényi-Widom*. PhD thesis, Université Lyon 1, décembre 2002.
- [17] V. Capasso and A. Micheletti. Local spherical contact distribution function and local mean densities for inhomogeneous random sets. *Stochastics Stochastics Rep.*, 71(1-2) :51–67, 2000.
- [18] S. Caser and H. J. Hilhorst. Random sequential adsorption of hard discs and squares : exact bounds for the covering fraction. *J. Phys. A*, 28(14) :3887–3900, 1995.
- [19] E. G. Coffman, Jr., Leopold Flatto, and Predrag Jelenković. Interval packing : the vacant interval distribution. *Ann. Appl. Probab.*, 10(1) :240–257, 2000.
- [20] R. Cowan. The use of the ergodic theorems in random geometry. *Adv. Appl. Probab.*, (suppl.) :47–57, 1978. Spatial patterns and processes (Proc. Conf., Canberra, 1977).
- [21] R. Cowan. Properties of ergodic random mosaic processes. *Math. Nachr.*, 97 :89–102, 1980.
- [22] B. V. Fedosov. Asymptotic formulae for eigenvalues of the Laplace operator for a polyhedron. *Dokl. Akad. Nauk SSSR*, 157 :536–538, 1964.
- [23] E. N. Gilbert. Random plane networks. *J. Soc. Indust. Appl. Math.*, 9 :533–543, 1961.
- [24] E. N. Gilbert. Random subdivisions of space into crystals. *Ann. Math. Statist.*, 33 :958–972, 1962.
- [25] G. Gille. Investigations on mechanical behaviour of brittle wear-resistant coatings : II Theory. *Thin Solid Films*, 111 :201–218, 1984.
- [26] A. Goldman. Le spectre de certaines mosaïques poissonniennes du plan et l'enveloppe convexe du pont brownien. *Probab. Theory Related Fields*, 105(1) :57–83, 1996.
- [27] A. Goldman. Sur une conjecture de D. G. Kendall concernant la cellule de Crofton du plan et sur sa contrepartie brownienne. *Ann. Probab.*, 26(4) :1727–1750, 1998.

- [28] P. Groeneboom. Limit theorems for convex hulls. *Probab. Theory Related Fields*, 79(3) :327–368, 1988.
- [29] G. Gyöngyi, N. R. Moloney, K. Ozogány, and Z. Rácz. Maximal height statistics for $1/f^\alpha$ signals. *Phys. Rev. E (3)*, 75(2) :021123, 16, 2007.
- [30] P. Hall. Distribution of size, structure and number of vacant regions in a high-intensity mosaic. *Z. Wahrsch. Verw. Gebiete*, 70(2) :237–261, 1985.
- [31] P. Hall. On the coverage of k -dimensional space by k -dimensional spheres. *Ann. Probab.*, 13(3) :991–1002, 1985.
- [32] L. Heinrich. Contact and chord length distribution of a stationary Voronoï tessellation. *Adv. in Appl. Probab.*, 30(3) :603–618, 1998.
- [33] L. Heinrich, H. Schmidt, and V. Schmidt. Central limit theorems for Poisson hyperplane tessellations. *Ann. Appl. Probab.*, 16 :919–950, 2006.
- [34] D. Hug, M. Reitzner, and R. Schneider. Large Poisson–Voronoi cells and Crofton cells. *Adv. in Appl. Probab.*, 36 :667–690, 2004.
- [35] D. Hug, M. Reitzner, and R. Schneider. The limit shape of the zero cell in a stationary Poisson hyperplane tessellation. *Ann. Probab.*, 32 :1140–1167, 2004.
- [36] D. Hug and R. Schneider. Asymptotic shapes of large cells in random tessellations. *Geom. Funct. Anal.*, 17 :156–191, 2007.
- [37] D. Hug and R. Schneider. Typical cells in Poisson hyperplane tessellations. *Discrete Comput. Geom.*, 38 :305–319, 2007.
- [38] T. Huillet. Random covering of the circle : the size of the connected components. *Adv. in Appl. Probab.*, 35(3) :563–582, 2003.
- [39] C. Itzykson and J.-M. Drouffe. *Statistical field theory. Vol. 2*. Cambridge Monographs on Mathematical Physics. Cambridge University Press, Cambridge, 1989. Strong coupling, Monte Carlo methods, conformal field theory, and random systems.
- [40] V. Janković. Solution of one problem of G. Pólya. *Mat. Vesnik*, 48(1-2) :47–50, 1996.
- [41] S. Janson. Random coverings in several dimensions. *Acta Math.*, 156(1-2) :83–118, 1986.
- [42] M. Kac. Can one hear the shape of a drum? *Amer. Math. Monthly*, 73(4, part II) :1–23, 1966.
- [43] M. Kobayashi, H. Maekawa, and Y. Kondou. Calculation of the mean thermal conductivity of a heterogeneous solid mixture with the Voronoi-Polyhedron element method. *Trans. JSME*, 57B(537) :1795–1801, 1991.

- [44] I. N. Kovalenko. On certain random polygons of large areas. *J. Appl. Math. Stochastic Anal.*, 11(3) :369–376, 1998.
- [45] I. N. Kovalenko. A simplified proof of a conjecture of D. G. Kendall concerning shapes of random polygons. *J. Appl. Math. Stochastic Anal.*, 12(4) :301–310, 1999.
- [46] G. Last and R. Schassberger. On the distribution of the spherical contact vector of stationary germ-grain models. *Adv. in Appl. Probab.*, 30(1) :36–52, 1998.
- [47] C. Lautensack. *Random Laguerre Tessellations*. PhD thesis, Karlsruhe University, 2007.
- [48] C. Lautensack, K. Schladitz, and A. Särkkä. Modeling the microstructure of sintered copper. Proceedings of 6th International Conference on Stereology, Spatial Statistics and Stochastic Geometry (S4G), 2006.
- [49] C. Lautensack and S. Zuyev. Random Laguerre tessellations. *Adv. in Appl. Probab.*, 40 :630–650, 2008.
- [50] M. Ledoux. *The concentration of measure phenomenon*, volume 89 of *Mathematical Surveys and Monographs*. American Mathematical Society, Providence, RI, 2001.
- [51] Y. Leterrier, D. Pellaton, D. Mendels, R. Glauser, J. Andersons, and J. A. Manson. Biaxial fragmentation on thin silicon oxide coatings on poly(ethylene terephthalate). *J. Mat. Sci.*, 36 :2213–2225, 2001.
- [52] K. Lochmann, R. Gloaguen, and D. Stoyan. Geometrical-statistical modelling of systems of fracture zones along oceanic ridges. *Geophysical Journal International*, 170(2) :605–614, 2007.
- [53] R. Maier and V. Schmidt. Stationary iterated tessellations. *Adv. in Appl. Probab.*, 35(2) :337–353, 2003.
- [54] Satya N. Majumdar and Alain Comtet. Airy distribution function : from the area under a Brownian excursion to the maximal height of fluctuating interfaces. *J. Stat. Phys.*, 119(3-4) :777–826, 2005.
- [55] A. Mazzolo, B. Roesslinger, and W. Gille. Properties of chord length distributions of nonconvex bodies. *J. Math. Phys.*, 44(12) :6195–6208, 2003.
- [56] J. Mecke. Stationäre zufällige Masse auf lokalkompakten Abelschen Gruppen. *Z. Wahrscheinlichkeitstheorie und Verw. Gebiete*, 9 :36–58, 1967.
- [57] J. L. Meijering. Interface area, edge, length and number of vertices in crystal aggregates with random nucleation. *Philips Res. Rep.*, 8 :270–290, 1953.
- [58] A. Mézin, J. Lepage, N. Pacia, and D. Paulmier. Étude statistique de la fissuration des revêtements I : Théorie. *Thin Solid Films*, 172 :197–209, 1989.

- [59] A. Mézin and P. Vallois. Statistical analysis of unidirectional multicracking of coatings by a two-dimensional Poisson point process. *Math. Mech. Solids*, 5(4) :417–440, 2000.
- [60] J. Michel and K. Paroux. Local convergence of the Boolean shell model towards the thick Poisson hyperplane process in the Euclidean space. *Adv. in Appl. Probab.*, 35(2) :354–361, 2003.
- [61] R. E. Miles. Random polygons determined by random lines in a plane. *Proc. Nat. Acad. Sci. U.S.A.*, 52 :901–907, 1964.
- [62] R. E. Miles. Random polygons determined by random lines in a plane. II. *Proc. Nat. Acad. Sci. U.S.A.*, 52 :1157–1160, 1964.
- [63] R. E. Miles. A heuristic proof of a long-standing conjecture of D. G. Kendall concerning the shapes of certain large random polygons. *Adv. in Appl. Probab.*, 27(2) :397–417, 1995.
- [64] R. E. Miles and R. J. Maillardet. The basic structures of Voronoï and generalized Voronoï polygons. *J. Appl. Probab.*, (Special Vol. 19A) :97–111, 1982. Essays in statistical science.
- [65] I. Molchanov. *Theory of random sets*. Probability and its Applications (New York). Springer-Verlag London Ltd., London, 2005.
- [66] I. S. Molchanov. A limit theorem for scaled vacancies of the Boolean model. *Stochastics Stochastics Rep.*, 58(1-2) :45–65, 1996.
- [67] J. Møller. Random tessellations in \mathbf{R}^d . *Adv. in Appl. Probab.*, 21(1) :37–73, 1989.
- [68] J. Møller. Random Johnson-Mehl tessellations. *Adv. in Appl. Probab.*, 24(4) :814–844, 1992.
- [69] J. Møller. *Lectures on random Voronoï tessellations*, volume 87 of *Lecture Notes in Statistics*. Springer-Verlag, New York, 1994.
- [70] A. Müller and D. Stoyan. *Comparison methods for stochastic models and risks*. Wiley Series in Probability and Statistics. John Wiley & Sons Ltd., Chichester, 2002.
- [71] W. Nagel and V. Weiss. Crack STIT tessellations—existence and uniqueness of tessellations that are stable with respect to iterations. *Izv. Nats. Akad. Nauk Armenii Mat.*, 39(4) :84–114, 2004.
- [72] A. Okabe, B. Boots, K. Sugihara, and S. N. Chiu. *Spatial tessellations : concepts and applications of Voronoi diagrams*. Wiley Series in Probability and Statistics. John Wiley & Sons Ltd., Chichester, second edition, 2000. With a foreword by D. G. Kendall.

- [73] K. Paroux. *Théorèmes centraux limites pour les processus poissoniens de droites dans le plan et questions de convergence pour le modèle Booléen de l'espace euclidien*. PhD thesis, Université Lyon 1, 1997.
- [74] K. Paroux. Quelques théorèmes centraux limites pour les processus Poissoniens de droites dans le plan. *Adv. in Appl. Probab.*, 30(3) :640–656, 1998.
- [75] M. D. Penrose and J. E. Yukich. Normal approximation in geometric probability. In *Stein's method and applications*, volume 5 of *Lect. Notes Ser. Inst. Math. Sci. Natl. Univ. Singap.*, pages 37–58. Singapore Univ. Press, Singapore, 2005.
- [76] G. Pólya. Zahlentheoretisches und Wahrscheinlichkeitstheoretisches über die Sichtweite im Walde. *Archiv der Mathematik und Physik, ser. 3*, pages 135–142, 1918.
- [77] M. H. Protter. Can one hear the shape of a drum ? revisited. *SIAM Rev.*, 29(2) :185–197, 1987.
- [78] J. Quintanilla and S. Torquato. Clustering in a continuum percolation model. *Adv. in Appl. Probab.*, 29(2) :327–336, 1997.
- [79] M. Reitzner. Random polytopes and the Efron-Stein jackknife inequality. *Ann. Probab.*, 31(4) :2136–2166, 2003.
- [80] M. Reitzner. Stochastic approximation of smooth convex bodies. *Mathematika*, 51(1-2) :11–29 (2005), 2004.
- [81] M. Reitzner. Central limit theorems for random polytopes. *Probab. Theory Related Fields*, 133(4) :483–507, 2005.
- [82] M. Reitzner. The combinatorial structure of random polytopes. *Adv. Math.*, 191(1) :178–208, 2005.
- [83] A. Rényi. On a one-dimensional problem concerning random space filling. *Magyar Tud. Akad. Mat. Kutató Int. Közl.*, 3(no 1/2) :109–127, 1958.
- [84] A. Rényi and R. Sulanke. Über die konvexe Hülle von n zufällig gewählten Punkten. *Z. Wahrscheinlichkeitstheorie und Verw. Gebiete*, 2 :75–84 (1963), 1963.
- [85] A. Sarkar. Finite clusters in high density Boolean models with balls of varying sizes. *Adv. in Appl. Probab.*, 30(4) :929–947, 1998.
- [86] R. Schneider. Random approximation of convex sets. *J. Microscopy*, 151 :211–227, 1988.
- [87] R. Schneider. *Convex bodies : the Brunn-Minkowski theory*, volume 44 of *Encyclopedia of Mathematics and its Applications*. Cambridge University Press, Cambridge, 1993.
- [88] R. Schneider and W. Weil. *Stochastic and integral geometry*. Probability and its Applications (New York). Springer-Verlag, Berlin, 2008.

- [89] T. Schreiber. Variance asymptotics and central limit theorems for volumes of unions of random closed sets. *Adv. in Appl. Probab.*, 34(3) :520–539, 2002.
- [90] T. Schreiber. Asymptotic geometry of high-density smooth-grained Boolean models in bounded domains. *Adv. in Appl. Probab.*, 35(4) :913–936, 2003.
- [91] T. Schreiber and J. E. Yukich. Variance asymptotics and central limit theorems for generalized growth processes with applications to convex hulls and maximal points. *Ann. Probab.*, 36(1) :363–396, 2008.
- [92] L. A. Shepp. Covering the circle with random arcs. *Israel J. Math.*, 11 :328–345, 1972.
- [93] A. F. Siegel and L. Holst. Covering the circle with random arcs of random sizes. *J. Appl. Probab.*, 19(2) :373–381, 1982.
- [94] W. L. Stevens. Solution to a geometrical problem in probability. *Ann. Eugenics*, 9 :315–320, 1939.
- [95] D. Stoyan, W. S. Kendall, and J. Mecke. *Stochastic geometry and its applications*. Wiley Series in Probability and Mathematical Statistics : Applied Probability and Statistics. John Wiley & Sons Ltd., Chichester, 1987. With a foreword by D. G. Kendall.
- [96] D. W. Stroock. *Probability theory, an analytic view*. Cambridge University Press, Cambridge, 1993.
- [97] J. J. Sylvester. Problem 1491. *The Educational Times, London*, 1864.
- [98] A. S. Sznitman. *Brownian motion, obstacles and random media*. Springer Monographs in Mathematics. Springer-Verlag, Berlin, 1998.
- [99] P. Valtr. Probability that n random points are in convex position. *Discrete Comput. Geom.*, 13(3-4) :637–643, 1995.
- [100] P. Valtr. The probability that n random points in a triangle are in convex position. *Combinatorica*, 16(4) :567–573, 1996.
- [101] M. van den Berg and S. Srisatkunarakajah. Heat equation for a region in \mathbb{R}^2 with a polygonal boundary. *J. London Math. Soc. (2)*, 37(1) :119–127, 1988.
- [102] V. Vu. Central limit theorems for random polytopes in a smooth convex set. *Adv. Math.*, 207(1) :221–243, 2006.
- [103] V. H. Vu. Sharp concentration of random polytopes. *Geom. Funct. Anal.*, 15(6) :1284–1318, 2005.
- [104] J. G. Wendel. A problem in geometric probability. *Math. Scand.*, 11 :109–111, 1962.
- [105] B. Widom. Random sequential addition of hard spheres to a volume. *J. Chem. Phys.*, 44(10) :3888–3894, 1966.

- [106] J. A. Wieacker. *Einige Probleme der polyedrischen Approximation*. PhD thesis, Freiburg im Breisgau, 1978.
- [107] S. Zacks. *Stochastic visibility in random fields*, volume 95 of *Lecture Notes in Statistics*. Springer-Verlag, New York, 1994. With 1 IBM-PC floppy disk (3.5 inch ; HD).
- [108] S. Zuyev. Stopping sets : gamma-type results and hitting properties. *Adv. in Appl. Probab.*, 31(2) :355–366, 1999.