

# MORPHISMES QUADRATIQUES ENTRE MODULES SUR UN ANNEAU CARRÉ

HENRI GAUDIER AND MANFRED HARTL

ABSTRACT. We introduce the notions of a commutative square ring  $\underline{R}$  and of a quadratic map between modules over  $\underline{R}$ , called  $\underline{R}$ -quadratic map. This notion generalizes various notions of quadratic maps between algebraic objects in the literature. We construct a category of quadratic maps between  $\underline{R}$ -modules and show that it is a right-quadratic category and has an internal Hom-functor.

Along our way, we recall the notions of a general square ring  $\underline{R}$  and of a module over  $\underline{R}$ , and discuss their elementary properties in some detail, adopting an operadic point of view. In particular, it turns out that the associated graded object of a square ring  $\underline{R}$  is a nilpotent operad of class 2, and the associated graded object of an  $\underline{R}$ -module is an algebra over this operad, in a functorial way. This generalizes the well-known relation between groups and graded Lie algebras (in the case of nilpotency class 2). We also generalize some elementary notions from group theory to modules over square rings.

## 1. INTRODUCTION

In this paper we generalize various notions of quadratic map between algebraic objects studied in the literature: quadratic forms certainly are the most classical example, followed by the notion of quadratic map between modules defined to be the sum of a linear and a homogenous quadratic map. The latter notion does not cover the map  $\mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z}$ ,  $n \mapsto \binom{n}{2}$ , which, however, is a quadratic map in Passi's sense who first introduced polynomial maps from groups to abelian groups [11]. In [9] we introduce a more general notion of quadratic map between modules which in the case of  $\mathbb{Z}$ -modules is equivalent with Passi's notion specialized to abelian domains. On the other hand, quadratic maps between arbitrary groups were studied in [10], [6] after they had arisen in the new field of "quadratic algebra", namely the theory of square rings and their modules, see [2] and numerous papers by Baues, Jibladze, Muro and Pirashvili giving applications of these structures in homotopy theory, see for example [1], [2], [3], [4], [5].

Square rings and their modules also constitute the framework of this paper; this allows to define a notion of quadratic map which covers the one for modules over an ordinary ring in [9], as well as quadratic maps between nilpotent groups of class 2 (which is the generic case of quadratic maps between groups, see proposition 3.2.28 below); but it also provides a notion of quadratic map between nilpotent algebras of class 2 over any operad. We start by recalling the definition and elementary properties of square rings and their modules, noting in addition that the associated graded group of a square ring  $\underline{R}$  has the structure of a nilpotent operad of class 2, and that the associated graded group of an  $\underline{R}$ -module is an algebra over this operad, in a functorial way. We need, however, to distinguish two notions of module over  $\underline{R}$ , the original one from [2], and a slightly more general one coming from the theory of modules over a square ringoid, by specializing to the one-object case [8]. The latter notion is needed in the last section where we construct a category of  $\underline{R}$ -quadratic maps between  $\underline{R}$ -modules, equipped with an internal Hom-functor, thus generalizing the category CP of quadratic maps between pairs of groups in [6]. The construction of this category indeed is the main objective of this paper: it allows us in forthcoming work to introduce square algebras and their modules, as a new approach to the study of quadratic maps, even between vector spaces.

To define  $\underline{R}$ -quadratic maps,  $\underline{R}$  has to be commutative, a property we introduce in section 3.1, and which can be conveniently expressed in terms of the operad associated with  $\underline{R}$ . Several equivalent characterizations of  $\underline{R}$ -quadratic maps are given, as well as some canonical examples; as a striking fact, the endomorphism of  $\underline{R}$  given by  $r \mapsto r^2$  is no longer  $\underline{R}$ -quadratic in general, nor is the map  $r \mapsto r^2 - r$ , which is the universal quadratic map annihilating 1 on an ordinary commutative ring. In fact, lack of a canonical  $\underline{R}$ -quadratic endomorphism of the free  $\underline{R}$ -module of rank 1, we were not able so far to determine the structure of the target of the universal  $\underline{R}$ -quadratic map on an  $\underline{R}$ -module, as we did in [9] for quadratic maps on a module over an ordinary ring.

---

*Date:* January 15, 2010.

*2000 Mathematics Subject Classification.* 18D50, 13C99, 20N99, 20F18.

*Key words and phrases.* quadratic map, square ring, modules over square rings, commutative square ring, operad.

## 2. ANNEAUX CARRÉS ET LEURS MODULES

## 2.1. Anneaux carrés.

**Définition 2.1.1.** [2] Un anneau carré  $\underline{R} = ( R_e \xrightarrow{H} R_{ee} \xrightarrow{P} R_e )$  est donné par

- un pré-anneau (near-ring) à droite  $R_e$  (i.e. un objet qui satisfait tous les axiomes d'un anneau sauf la commutativité de l'addition et la distributivité à gauche),
- un groupe abélien  $R_{ee}$ ,
- une application quadriadditive<sup>(1)</sup>  $R_e \times R_e \times R_{ee} \times R_e \rightarrow R_{ee}$ ,  $(r, s, x, t) \mapsto (r, s) \cdot x \cdot t$  munissant  $R_{ee}$  d'une action à gauche du monoïde multiplicatif  $R_e \times R_e$  et d'une action à droite du monoïde multiplicatif  $R_e$ , compatibles entre elles,<sup>(2)</sup>
- un morphisme de groupes  $T : R_{ee} \rightarrow R_{ee}$  tel que  $T^2 = \text{Id}$
- une application  $H : R_e \rightarrow R_{ee}$  et un morphisme de groupe  $P : R_{ee} \rightarrow R_e$  vérifiant les propriétés suivantes, où  $r, s, t \in R_e$  et  $x, y \in R_{ee}$ :

$$(AC0) \quad PHP = P + P,$$

$$(AC1) \quad P \text{ est binaturel, i.e. } P((r, r) \cdot x \cdot s) = rP(x)s,$$

$$(AC2) \quad T = HP - \text{Id},$$

$$(AC3) \quad PT = P,$$

$$(AC4) \quad (P(x), r) \cdot y = (r, P(x)) \cdot y = 0 = y \cdot P(x),^{(3)}$$

$$(AC5) \quad H(r + s) = H(r) + H(s) + (s, r) \cdot H(2), \text{ où } 2 = 1_R + 1_R,$$

$$(AC6) \quad H(rs) = (r, r) \cdot H(s) + H(r) \cdot s,$$

$$(AC7) \quad (r + s)t = rt + st + P((r, s) \cdot H(t)),$$

$$(AC8) \quad T((r, s) \cdot x \cdot t) = (s, r) \cdot T(x) \cdot t.$$

**Remarque 2.1.2.** Rappelons [2] qu'alors  $\overline{R} = \text{Coker } P$  est un anneau et que  $R_{ee}$  est un  $\overline{R} \otimes \overline{R} \otimes \overline{R}^{op}$ -module. Grâce à la relation (AC8), on obtient ainsi une opérade nilpotente de classe  $\leq 2$ , notée  $\text{OP}(\underline{R})$ , où  $\text{OP}(\underline{R})_1 = \overline{R}$  et  $\text{OP}(\underline{R})_2 = R_{ee}$  (rappelons qu'une opérade  $\mathbb{P}$  est dite nilpotente de classe  $\leq n$  si  $\mathbb{P}_k = 0$  pour  $k > n$ ).

Remarquons également que  $H(1) = 0$  (prendre  $r = s = 1$  dans (AC6)), et que (AC2)  $\Rightarrow$  ((AC0)  $\Leftrightarrow$  (AC3)).

Des exemples d'anneaux carrés et de leur modules (cf. le paragraphe suivant) seront donnés dans le paragraphe 2.4 plus loin.

**2.2. Modules sur un anneau carré.** Nous donnons, en parallèle, deux définitions pour la notion de module sur un anneau carré. La première se trouve dans la littérature, par exemple dans [2], nous la notons ici BHP-module. La seconde, inspirée de la notion analogue pour les groupes ([6]), s'impose lorsque l'on veut que la somme et la composée d'applications quadratiques restent quadratiques. C'est aussi celle qu'on obtient en spécialisant la notion de module sur un annélide carré ([7]). Nous la notons ici CP-module.

<sup>1</sup> Pour éviter toute ambiguïté, une application qui respecte l'addition, sera dite additive (et non pas linéaire).

<sup>2</sup> ou si l'on préfère d'une action à gauche du monoïde  $R_e \times R_e \times R_e^{op}$ .

<sup>3</sup> la dernière relation ne figure pas dans [2].

**Définition 2.2.1.** ([2] def 7.9) Soit  $\underline{R} = (R_e \xrightarrow{H} R_{ee} \xrightarrow{P} R_e)$  un anneau carré. Un  $\underline{R}$ -BHP-module à droite est un groupe  $M$  (additif mais non nécessairement commutatif) muni d'opérations

$$\begin{aligned} - M \times R_e &\rightarrow M, & (m, r) &\mapsto m \cdot r, \\ - M \times M \times R_{ee} &\rightarrow M, & (m, n, x) &\mapsto [m, n] \cdot x \end{aligned}$$

satisfaisant les relations suivantes, où  $r, s \in R_e$ ,  $x, y \in R_{ee}$ ,  $m, m', n \in M$  :

$$(MC1) \quad m \cdot 1 = m, \quad (m \cdot r) \cdot s = m \cdot (rs),$$

$$m \cdot (r + s) = m \cdot r + m \cdot s,$$

$$(MC2) \quad (m + n) \cdot r = m \cdot r + n \cdot r + [m, n] \cdot H(r),$$

$$(MC3) \quad m \cdot P(x) = [m, m] \cdot x,$$

$$(MC4) \quad [m, n] \cdot T(x) = [n, m] \cdot x,$$

$$(MC5) \quad [m, n] \cdot x \text{ est additif en } m, n \text{ et } x,$$

$$(MC6) \quad ([m \cdot r, n \cdot s] \cdot x) \cdot t = [m, n] \cdot ((r, s) \cdot x \cdot t),$$

$$(MC7) \quad [[m, m'] \cdot x, n] \cdot y = 0.$$

**Définition 2.2.2.** ([8]) Soit  $\underline{R} = (R_e \xrightarrow{H} R_{ee} \xrightarrow{P} R_e)$  un anneau carré. Un  $\underline{R}$ -CP-module à droite est un couple  $(M, A)$  formé d'un groupe  $M$  et un sous groupe  $A$  de  $M$ , muni d'opérations

$$\begin{aligned} - M \times R_e &\rightarrow M, & (m, r) &\mapsto m \cdot r, \\ - M \times M \times R_{ee} &\rightarrow M, & (m, n, x) &\mapsto [m, n] \cdot x \end{aligned}$$

satisfaisant les relations suivantes, où  $r, s \in R_e$ ,  $x, y \in R_{ee}$ ,  $m, m', n \in M$  :

(MC0)  $A$  est stable sous l'action de  $R_e$

$$(MC1) \quad m \cdot 1 = m, \quad (m \cdot r) \cdot s = m \cdot (rs),$$

$$m \cdot (r + s) = m \cdot r + m \cdot s,$$

$$(MC2) \quad (m + n) \cdot r = m \cdot r + n \cdot r + [m, n] \cdot H(r),$$

$$(MC3) \quad m \cdot P(x) = [m, m] \cdot x,$$

$$(MC4) \quad [m, n] \cdot T(x) = [n, m] \cdot x,$$

$$(MC5) \quad [m, n] \cdot x \text{ est additif en } m, n \text{ et } x,$$

$$(MC6) \quad ([m \cdot r, n \cdot s] \cdot x) \cdot t = [m, n] \cdot ((r, s) \cdot x \cdot t),$$

$$(MC7a) \quad [m, n] \cdot x = 0 \text{ si } m \in A,$$

$$(MC7b) \quad [m, n] \cdot x \in A.$$

**Remarque 2.2.3.** L'axiome MC7 découle clairement des axiomes [MC7a] et [MC7b], par conséquent tout  $\underline{R}$ -CP-module est un  $\underline{R}$ -BHP-module.

**Remarque 2.2.4.** La définition peut s'interpréter de la façon suivante. On se donne un groupe  $M$  (dont on verra plus tard (2.2.6) par l'axiome MC7 qu'il est nilpotent de classe  $\leq 2$ ) muni d'une famille d'opérations unaires paramétrées par  $R_e$  et d'une famille d'opérations binaires paramétrées par  $R_{ee}$  (on verra plus loin que quand  $\underline{R}$  est commutatif les opérations unaires sont quadratiques, et les opérations binaires sont bilinéaires). Les applications  $H$  et  $P$  relient ces deux familles d'opérations: l'axiome MC2 exprime que l'effet croisé de l'opération unaire associée à  $r \in R_e$  est l'opération binaire associée à  $H(r)$ , et l'axiome MC3 exprime que la composée de l'application diagonale de  $M$  et de l'opération binaire associée à  $x \in R_{ee}$  est l'opération unaire associée à  $P(x)$ .

### Exemples 2.2.5.

1) On vérifie aisément que le groupe  $R_e$  muni des actions

$$R_e \times R_e \rightarrow R_e \quad r \cdot s = rs$$

$$R_e \times R_e \times R_{ee} \rightarrow R_e \quad [r, s] \cdot x = P((r, s) \cdot x),$$

est un  $\underline{R}$ -BHP-module.

2) Soit  $A$  un sous groupe de  $R_e$  stable par la multiplication à droite par  $R_e$  et tel que  $P(R_{ee}) \subseteq A \subseteq \underline{Z}_{\underline{R}}(R_e)$  <sup>(a)</sup>. On vérifie aisément que  $(R_e, A)$  muni des mêmes actions que ci-contre est un  $\underline{R}$ -CP-module.

<sup>a</sup> cette notation est définie en 2.2.16.

3) Soit  $M$  un  $\overline{R}$ -module à droite, par restriction des scalaires on a une action à droite de  $R_e$  sur  $M$ . En prenant l'application nulle  $M \times M \times R_{ee} \rightarrow M$ , on obtient une structure de  $\underline{R}$ -BHP-module sur  $M$ . On vérifie aisément que pour tout sous- $\overline{R}$ -module à droite  $M'$ , le couple  $(M, M')$  est un  $\underline{R}$ -CP-module. En particulier, si  $\underline{R}$  est un anneau carré,  $R_{ee}$  est naturellement un  $\underline{R}$ -BHP-module. Et pour tout  $R_e$ -sous-module  $B$  de  $R_{ee}$ ,  $(R_{ee}, B)$  est un  $\underline{R}$ -CP-module.

D'autres exemples seront donnés plus loin en 2.4.

**Proposition 2.2.6.** [8] Soit  $M$  un  $\underline{R}$ -BHP-module,  $m, n \in M$ ,  $r \in R_e$  et  $x, y \in R_{ee}$  :

- (1) les éléments  $[m, n] \cdot x$  sont dans le centre de  $M$ ,
- (2) on a  $[m, n] \cdot H(2) = [n, m]$ ,
- (3) le groupe  $M$  est nilpotent de classe 2,
- (4)  $(-m) \cdot r = -(m \cdot r) + [m, m] \cdot H(r) = -(m \cdot r) + m \cdot PH(r)$ ,
- (5)  $([m, n] \cdot x) \cdot P(y) = 0$ , en particulier  $P(x)P(y) = 0$ .

On peut interpréter la propriété 2), en disant que les opérations binaires associées aux éléments  $x$  de  $R_{ee}$  généralisent les commutateurs de  $M$  (pour l'addition) définis par  $[m, n] := m + n - m - n$ .

*Preuve.* Remarquons d'abord que l'axiome MC2 donne

$$[m, n] \cdot H(2) = -n - n - m - m + m + n + m + n = -n + [-n, -m] + n$$

Remplaçant  $m$  et  $n$  par leurs opposés on a grâce à (MC5)

$$(*) \quad [m, n] \cdot H(2) = [-m, -n] \cdot H(2) = n + [n, m] - n$$

L'axiome MC7 avec  $y = H(2)$  et la relation (\*) donnent alors

$$\begin{aligned} 0 &= [[m, m'] \cdot x, n] \cdot H(2) \\ &= n + [n, [m, m'] \cdot x] - n = [n, [m, m'] \cdot x], \end{aligned}$$

ce qui prouve (1).

Puisque  $[m, n] \cdot H(2)$  est dans le centre, la propriété (2) découle immédiatement de (\*). Puisque les commutateurs sont centraux, la propriété (3) est vraie.

Pour la quatrième relation, on a :

$$0 = (m - m) \cdot r = m \cdot r + (-m) \cdot r + [m, -m] \cdot H(r) = m \cdot r + (-m) \cdot r - [m, m] \cdot H(r),$$

ce qui montre la formule, en terminant avec (MC3). Pour la cinquième relation, on a d'après la dernière relation de AC4

$$([m, n] \cdot x) \cdot P(y) = [m, n] \cdot (x \cdot P(y)) = [m, n] \cdot 0 = 0.$$

En prenant alors  $M = R_e$ , et  $m = n = 1$  on obtient la toute dernière égalité.  $\square$

Appliquant ce résultat au  $\underline{R}$ -module  $R_e$  on a

**Corollaire 2.2.7.** *L'image de  $P$  est contenue dans le centre (additif) de  $R_e$ . Pour  $r, s \in R_e$  on a  $[r, s] = P((s, r) \cdot H(2))$ . Le groupe additif de  $R_e$  est nilpotent de classe 2. Et  $(-r)s = -(rs) + rPH(s)$ .  $\square$*

En particulier pour  $r = 1$  on a  $s + (-1)s = PH(s)$ .

**Remarque 2.2.8.** Si  $(M, A)$  est un  $\underline{R}$ -CP-module, tout sous-groupe de  $M$  contenant  $A$  est normal, d'après les relations 2.2.6(2) et (MC7b).

**Définition 2.2.9.** Un  $\underline{R}$ -BHP-sous-module de  $M$  est un sous-groupe  $N$  de  $M$  stable sous les actions de  $R_e$  et de  $R_{ee}$ . Il sera dit *normal* si en outre  $[m, n] \cdot x$  est dans  $N$  pour  $n \in N$ ,  $m \in M$  et  $x \in R_{ee}$ .

**Proposition 2.2.11.** *Soient  $M$  un  $\underline{R}$ -BHP-module et  $N$  un  $\underline{R}$ -BHP-sous-module normal de  $M$ . Le groupe sous-jacent de  $N$  est un sous-groupe normal de  $M$ , et le quotient  $M/N$  est naturellement muni d'une structure de  $\underline{R}$ -BHP-module.*

**Définition 2.2.10.** Un  $\underline{R}$ -CP-sous-module de  $(M, A)$  est un  $\underline{R}$ -CP-module  $(N, B)$  où  $N$  (resp.  $B$ ) est un sous-groupe de  $M$  (resp.  $A$ ) stable sous les actions de  $R_e$  et de  $R_{ee}$ . Il sera dit *normal* si en outre  $B = N \cap A$  et si  $[m, n] \cdot x$  est dans  $N$  pour  $n \in N$ ,  $m \in M$  et  $x \in R_{ee}$ .

**Proposition 2.2.12.** *Soient  $\underline{M} = (M, A)$  un  $\underline{R}$ -CP-module et  $\underline{N} = (N, B)$  un  $\underline{R}$ -CP-sous-module normal de  $\underline{M}$ . Le groupe sous-jacent de  $N$  est un sous-groupe normal de  $M$ , et le quotient  $(M/N, A/B)$  est naturellement muni d'une structure de  $\underline{R}$ -CP-module.*

*Preuve.* [Preuve de 2.2.11] Soit  $m \in M$  et  $n \in N$ , puisque  $[n, m] = [m, n] \cdot H(2) \in N$ ,  $N$  est un sous-groupe normal de  $M$ . On vérifie que les actions de  $R_e$  et de  $R_{ee}$  sur  $M$  passent bien au quotient:

$$(m + n) \cdot r = m \cdot r + n \cdot r + [m, n] \cdot H(r)$$

où les deux derniers termes sont dans  $N$ .

$$[m + n, m'] \cdot x = [m, m'] \cdot x + [n, m'] \cdot x,$$

où le dernier terme est dans  $N$ .  $\square$

*Preuve.* [Preuve de 2.2.12] Il reste à vérifier les axiomes MC0, MC7a et MC7b. Puisque  $B = N \cap A$ , il est stable sous l'action de  $R_e$ , et on a  $A/B \simeq A + N/N$  et  $(M/N)/(A/B) \simeq M/(A + N)$ . Soient alors  $m, m' \in M$  et  $x \in R_{ee}$ . Puisque  $[m, m'] \cdot x \in A$ , sa classe modulo  $A + N$  est nulle, donc  $[\overline{m}, \overline{m'}] \cdot x \in A/B$  (où  $\overline{m}$  est la classe de  $m$  modulo  $N$ ). Et si  $a \in A$  on a  $[m, a] \cdot x = 0$ . Donc  $[\overline{m}, \overline{a}] \cdot x = 0$ .  $\square$

**Proposition 2.2.13.** *Soit  $M$  un  $\underline{R}$ -BHP-module, et soit  $(N_i)_{i \in I}$  une famille de  $\underline{R}$ -BHP-sous-modules de  $M$ . L'intersection  $N = \bigcap_{i \in I} N_i$  est un  $\underline{R}$ -BHP-sous-module de  $M$ .  $\square$*

**Définition 2.2.14.** Soit  $M$  un  $\underline{R}$ -BHP-module et soit  $E$  un sous ensemble de  $M$  on appelle  $\underline{R}$ -BHP-sous-module engendré par  $E$  l'intersection des sous-modules de  $M$  qui contiennent  $E$ . C'est le plus petit sous-module de  $M$  qui contienne  $E$ .

**Proposition 2.2.15.** Soit  $M$  un  $\underline{R}$ -BHP-module et soit  $E$  un sous ensemble de  $M$ . Le  $\underline{R}$ -BHP-sous-module engendré par  $E$  est formé de l'ensemble des éléments de  $M$  de la forme

$$(2.2.1) \quad \sum m_i \cdot r_i + \sum [m'_j, m''_k] \cdot x_{j,k}$$

où  $m_i, m'_j, m''_k \in E, r_i \in R_e$  et  $x_{j,k} \in R_{ee}$ .  $\square$

**Définition 2.2.16.** Soit  $M$  un  $\underline{R}$ -BHP-module, un élément  $m \in M$  est dit  $\underline{R}$ -central si  $[m, n] \cdot x = 0$  pour tous  $n \in M$  et  $x \in R_{ee}$ .

On appelle  $\underline{R}$ -centre de  $M$  l'ensemble  $Z_{\underline{R}}(M)$  des  $m \in M$  qui sont  $\underline{R}$ -centraux. On appelle *module  $\underline{R}$ -dérivé* de  $M$  le  $\underline{R}$ -BHP-sous-module  $[M, M]_{\underline{R}}$  de  $M$ , (ou  $[M]$  s'il n'y a pas ambiguïté) engendré par les  $[m, n] \cdot x$  pour  $m, n \in M$  et  $x \in R_{ee}$ .

**Proposition 2.2.17.** 1) Le  $\underline{R}$ -centre et le module  $\underline{R}$ -dérivé sont des sous- $\underline{R}$ -BHP-modules normaux, et on a les inclusions:

$$(2.2.2) \quad [M, M] \subseteq [M, M]_{\underline{R}} \subseteq Z_{\underline{R}}(M) \subseteq Z(M).$$

2) Le  $\underline{R}$ -centre, le module  $\underline{R}$ -dérivé, le quotient  $M/Z_{\underline{R}}(M)$  et le  $\underline{R}$ -abélianisé  $M^{\underline{R}\text{-ab}} = \overline{M} = M/[M, M]_{\underline{R}}$  sont des  $\overline{R}$ -modules. De même, si  $(M, A)$  est un  $\underline{R}$ -CP-module,  $A$  et  $\overline{M} = M/A$  sont des  $\overline{R}$ -modules.

*Preuve.* La première assertion découle de MC5 et MC7. Les trois inclusions sont des conséquences immédiates de la proposition 2.2.6. On notera en particulier que l'inclusion  $[M, M]_{\underline{R}} \subseteq Z_{\underline{R}}(M)$  équivaut à la propriété MC7.

La seconde vient de ce que  $\text{Im } P$  annule les quatre modules. en effet, d'après (MC3)  $m \cdot P(x) = [m, m] \cdot x$  qui est dans le groupe  $\underline{R}$ -dérivé pour  $m \in M$ , et est nul si  $m$  est dans le  $\underline{R}$ -centre.  $\square$

**Corollaire 2.2.18.** Si  $M$  est un  $\underline{R}$ -BHP-module à droite, alors  $(M, A)$  est un  $\underline{R}$ -CP-module à droite pour tout sous-groupe  $A$  de  $M$  stable sous les actions de  $R_e$  et tel que  $[M] \subseteq A \subseteq Z_{\underline{R}}(M)$ . Autrement dit,  $A$  est un sous- $\overline{R}$ -module de  $Z_{\underline{R}}(M)$  contenant  $[M]$ .

*Preuve.* Les propriétés [MC7a] et [MC7b] équivalent respectivement à  $A \subseteq Z_{\underline{R}}(M)$  et à  $[M, M]_{\underline{R}} \subseteq A$ .  $\square$

On notera que  $A$  est stable sous les actions de  $R_{ee}$  puisque celles-ci sont triviales sur  $A$ .

En particulier,  $(R_e, A)$  est un  $\underline{R}$ -CP-module à droite pour tout sous-groupe  $A$  de  $R_e$  stable sous les actions de  $R_e$  et tel que  $[R_e] \subseteq A \subseteq Z_{\underline{R}}(R_e)$ .

**Remarque 2.2.19.** Si  $(M, A)$  est un  $\underline{R}$ -CP-module, il en résulte que  $[M, M] \subseteq A \subseteq Z(M)$ , par conséquent le couple  $(M, A)$  est un objet de la catégorie CP définie en [6].

**Proposition 2.2.20.** Soit  $M$  un  $\underline{R}$ -BHP-module. Alors les groupes abéliens  $\mathbb{N}^*$ -gradués

$$\text{Gr}_{\gamma}(M) = (M^{\underline{R}\text{-ab}}, [M, M]_{\underline{R}}, 0, \dots)$$

$$\text{Gr}_{\mathbb{Z}}(M) = (M/Z_{\underline{R}}(M), Z_{\underline{R}}(M), 0, \dots)$$

ont une structure naturelle d'algèbre graduée sur l'opérade  $\text{OP}(\underline{R})$ .

**Proposition 2.2.21.** Soit  $\underline{M} = (M, A)$  un  $\underline{R}$ -CP-module. Alors le groupe abélien  $\mathbb{N}^*$ -gradué

$$\text{Gr}(M, A) = (M/A, A, 0, \dots)$$

a une structure naturelle d'algèbre graduée sur l'opérade  $\text{OP}(\underline{R})$ .

*Preuve.* (pour  $(M, A)$ , les autres étant des cas particuliers) :  $M/A$  et  $A$  sont des  $\overline{R}$ -modules d'après la proposition 2.2.17. Vu la graduation et le fait que  $\text{OP}(\underline{R})$  est nilpotente de classe 2, la structure de  $\text{OP}(\underline{R})$ -algèbre sur  $\text{Gr}(M, A)$  est entièrement déterminée par les applications

$$(M/A \oplus A) \otimes \text{OP}(\underline{R})_1 \rightarrow M/A \oplus A, \quad (\overline{m}, a) \otimes \overline{r} \mapsto (\overline{m\overline{r}}, ar)$$

$$(M/A) \otimes (M/A) \otimes \text{OP}(\underline{R})_2 \rightarrow A, \quad \overline{m} \otimes \overline{m'} \otimes x \mapsto [m, m'] \cdot x.$$

$\square$

En effet, les propositions précédentes généralisent le fait que les quotients de la suite centrale descendante d'un groupe (nilpotent de classe 2 ici) forment une algèbre de Lie, cf. le paragraphe 2.4.3 plus loin.

**2.3. Morphismes de modules sur un anneau carré.** Soit  $M$  et  $N$  deux  $\underline{R}$ -BHP-modules, une application  $f$  de  $M$  dans  $N$  sera dite additive (et non pas linéaire) si elle respecte l'addition, elle sera dite  $R_e$ -équivariante si elle respecte l'action de  $R_e$ , et elle sera dite  $R_{ee}$ -équivariante si elle respecte l'action de  $R_{ee}$  sur  $M$  et  $N$ , c'est à dire si

$$f([m, m'] \cdot x) = [f(m), f(m')] \cdot x.$$

Elle sera dite  $R_e$ -linéaire si elle est additive et  $R_e$ -équivariante.

**Définition 2.3.1.** ([2]) Soient  $M$  et  $N$  deux  $\underline{R}$ -BHP-modules, un BHP-morphisme ou application  $\underline{R}$ -BHP-linéaire est une application  $\alpha : M \rightarrow N$  qui est  $R_e$ -linéaire et  $R_{ee}$ -équivariante.

L'application  $\alpha$  est donc un homomorphisme de groupe tel que  $\alpha(m \cdot r) = \alpha(m) \cdot r$ , et  $\alpha([m, m'] \cdot x) = [\alpha(m), \alpha(m')] \cdot x$ .

Il est clair qu'on obtient ainsi une catégorie notée  $\text{BHP-Mod}_{\underline{R}}$ . Si  $N$  est un sous  $\underline{R}$ -BHP-module normal de  $M$  on peut vérifier que  $N$  est le noyau dans  $\text{BHP-Mod}_{\underline{R}}$  du morphisme  $M \rightarrow M/N$ .

Il est immédiat qu'à un  $\underline{R}$ -BHP-morphisme  $M \rightarrow N$  on associe canoniquement un  $\underline{R}$ -CP-morphisme  $(M, [M]) \rightarrow (N, [N])$ , ou plus généralement  $(M, [M]) \rightarrow (N, B)$  où  $B$  est un sous-BHP-module tel que  $[N] \subseteq B \subseteq \underline{Z}_{\underline{R}}N$ .

**Exemple 2.3.3.** Soit  $M$  un  $R$ -BHP module, pour tout  $m \in M$  l'application  $g_m : R_e \rightarrow M$ ,  $r \mapsto m \cdot r$  est  $\underline{R}$ -BHP-linéaire. En effet, elle est additive et  $R_e$  équivariante par MC1, et  $R_{ee}$ -équivariante puisque, d'après MC3 et MC6 on a :

$$m \cdot ([r, s] \cdot x) = m \cdot P((r, s) \cdot x) = [m, m] \cdot ((r, s) \cdot x) = [m \cdot r, m \cdot s] \cdot x.$$

En particulier, si  $M = R_e$  les multiplications à gauche dans  $R_e$  sont  $\underline{R}$ -BHP-linéaires.

**Proposition 2.3.4.** Une application  $\underline{R}$ -BHP-linéaire  $f : M \rightarrow N$  entre  $\underline{R}$ -BHP-modules  $M, N$  induit un morphisme de  $\text{OP}(\underline{R})$ -algèbres graduées

$$\text{Gr}_{\gamma}(f) : \text{Gr}_{\gamma}(M) \rightarrow \text{Gr}_{\gamma}(N)$$

de façon évidente.

On obtient ainsi des foncteurs

$$\text{Gr}_{\gamma} : \text{BHP-Mod}_{\underline{R}} \rightarrow \text{GrAlg}_2(\text{OP}(\underline{R})),$$

$$\text{Gr} : \text{CP-Mod}_{\underline{R}} \rightarrow \text{GrAlg}_2(\text{OP}(\underline{R}))$$

où  $\text{GrAlg}_2(\text{OP}(\underline{R}))$  désigne la catégorie des algèbres gradués nilpotentes de classe 2 sur l'opérade  $\text{OP}(\underline{R})$ . Ils généralisent le foncteur qui associe à un groupe nilpotent de classe 2 l'algèbre de Lie formée des quotients de la suite centrale descendante, cf. le paragraphe 2.4.3 plus loin.

**Définition 2.3.6.** Un  $\underline{R}$ -module est dit  $\underline{R}$ -abélien, si l'application  $M \times M \times R_{ee} \rightarrow M$  est nulle.

**Lemme 2.3.7.** Soit  $M$  un  $\underline{R}$ -module  $\underline{R}$ -abélien. Alors

- le groupe additif de  $M$  est abélien,
- $M$  est annulé par  $\text{Im } P$ ,
- l'action de  $R_e$  sur  $M$  est distributive à gauche,

et  $M$  est naturellement un  $\bar{R}$ -module.

*Preuve.* Cela découle immédiatement de 2.2.6 (2) et des axiomes (MC3) et (MC2).  $\square$

**Corollaire 2.3.8.** La sous catégorie pleine de  $\text{BHP-Mod}_{\underline{R}}$  formée des modules  $\underline{R}$ -abéliens est équivalente à la catégorie des  $\bar{R}$ -modules.

**Définition 2.3.2.** ([8]) Soient  $(M, A)$  et  $(N, B)$  deux  $\underline{R}$ -CP-modules un  $\underline{R}$ -CP-morphisme de  $(M, A)$  dans  $(N, B)$  est une application  $\alpha : M \rightarrow N$  qui est  $R_e$ -linéaire et  $R_{ee}$ -équivariante, et telle que  $\alpha(A) \subseteq B$ .

Il est clair qu'on obtient ainsi une catégorie notée  $\text{CP-Mod}_{\underline{R}}$ . Si  $(N, B)$  est un sous  $\underline{R}$ -CP-module normal de  $(M, A)$  on peut vérifier que  $(N, B)$  est le noyau dans  $\text{CP-Mod}_{\underline{R}}$  du morphisme  $(M, A) \rightarrow (M/N, A/B)$ .

**Proposition 2.3.5.** Une application  $\underline{R}$ -CP-linéaire  $f : (M, A) \rightarrow (N, B)$  entre  $\underline{R}$ -CP-modules  $(M, A), (N, B)$  induit des morphismes de  $\text{OP}(\underline{R})$ -algèbres graduées

$$\text{Gr}(f) : \text{Gr}(M, A) \rightarrow \text{Gr}(N, B),$$

de façon évidente.

**Corollaire 2.3.9.** La sous-catégorie pleine de  $\text{CP-Mod}_{\underline{R}}$  formée des modules  $\underline{R}$ -abéliens est équivalente à la catégorie des couples de  $\bar{R}$ -modules.

**Proposition 2.3.10.** Soient  $M$  et  $N$  deux  $\underline{R}$ -BHP-modules, et supposons que  $N$  est  $\underline{R}$ -abélien. Toute application  $\underline{R}$ -BHP-linéaire de  $M$  dans  $N$  se factorise par  $\bar{M} = M/[M]_{\underline{R}}$ . On obtient donc une bijection naturelle

$$\bar{R}\text{-mod}(\bar{M}, N) \rightarrow \text{BHP-Mod}_{\underline{R}}(M, N).$$

**Corollaire 2.3.12.** Sous les mêmes hypothèses, l'ensemble  $\text{BHP-Mod}_{\underline{R}}(M, N)$  est naturellement un groupe abélien. Si en outre l'anneau  $\bar{R}$  est commutatif, c'est un  $\bar{R}$ -module.  $\square$

**Exemple 2.3.14.** Soit  $M$  un  $\underline{R}$ -BHP-module et  $m \in M$ . Il existe une unique application  $\underline{R}$ -linéaire  $R_e \rightarrow M$  qui envoie 1 sur  $m$ . En effet, si une telle application  $\varphi$  existe, comme elle est  $R_e$ -équivariante, on a  $\varphi(r) = \varphi(1 \cdot r) = \varphi(1) \cdot r = m \cdot r$ . d'où l'unicité. On a vu 2.3.3 que  $r \mapsto m \cdot r$  est  $\underline{R}$ -BHP-linéaire. On en déduit alors que  $R_e$  est le  $\underline{R}$ -BHP-module libre à un générateur.

**Définition 2.3.16.** Soit  $E$  un ensemble,  $M$  un  $\underline{R}$ -BHP-module, et  $f : E \rightarrow M$  une application. On appelle  $\underline{R}$ -image de  $f$ , qu'on note  $\text{Im}_{\underline{R}} f$  le  $\underline{R}$ -BHP-sous-module de  $M$  engendré par l'ensemble  $f(E)$  (cf. 2.2.14).

**Lemme 2.3.17.** Avec les notations ci-dessus, si  $Y$  est une partie de  $f(E)$  qui  $\underline{R}$ -centralise tous les éléments de  $f(E)$ , alors le  $\underline{R}$ -BHP-sous-module de  $M$  engendré par  $Y$  est  $\underline{R}$ -central dans  $\text{Im}_{\underline{R}} f$ .

*Preuve.* Cela découle immédiatement de la proposition 2.2.15.  $\square$

**2.4. Exemples.** Nous rappelons ici des exemples du paragraphe 8 de [2].

**2.4.1. Modules sur un anneau commutatif classique.** Soit  $R$  un anneau commutatif classique et  $\underline{R} = (R \rightarrow 0 \rightarrow R)$  l'anneau carré associé. Un BHP-module  $M$  est simplement un  $R$ -module classique (les propriétés (MC3) à (MC7) sont vides, et le groupe  $M$  est commutatif puisque  $H = 0$ ).

**2.4.2. Modules sur l'anneau  $\mathbb{Z}_{\text{nil}}$ .** On a  $\mathbb{Z}_{\text{nil}} = (\mathbb{Z}_e \xrightarrow{H} \mathbb{Z}_{ee} \xrightarrow{P} \mathbb{Z}_e)$  avec  $\mathbb{Z}_e = \mathbb{Z}_{ee} = \mathbb{Z}$ ,  $H(n) = \binom{n}{2}$  et  $P = 0$ . Un  $\mathbb{Z}_{\text{nil}}$ -BHP-module est un groupe nilpotent de classe 2. L'action de  $\mathbb{Z}_e$  est donnée par  $m \cdot r = m + \dots m$  ( $r$  fois); celle de  $\mathbb{Z}_{ee}$  est déterminée par  $[m, m'] \cdot 1 = [m', m]$ .

**2.4.3. Modules sur les anneaux carrés tels que  $P = 0$ .** Soit  $R$  un anneau, prenons  $R_e = R$  et soit  $R_{ee}$  un  $R_e \otimes R_e \otimes R_e^{\text{op}}$ -module tel que pour  $r, s, t \in R_e$

$$(2.4.1) \quad (r \otimes s) \cdot x \cdot t = (s \otimes r) \cdot x \cdot t.$$

Pour toute application  $H : R_e \rightarrow R_{ee}$  vérifiant

$$H(r + s) = H(r) + H(s) + (s, r) \cdot H(2) \quad \text{et} \quad H(rs) = (r \otimes r) \cdot H(s) + H(r) \cdot s$$

on obtient un anneau carré  $R_{\text{nil}}^H = (R_e \xrightarrow{H} R_{ee} \xrightarrow{P=0} R_e)$ , où  $T = -\text{Id}$ . Et tout anneau carré tel que  $P = 0$  est obtenu de cette façon.

Un  $R_{\text{nil}}^H$ -module  $M$  est alors un groupe muni d'une action à droite du monoïde  $R_e$ , et d'opérations indexées par  $R_{ee}$  vérifiant les axiomes de la définition 2.2.1. Les axiomes MC3 et MC4 entraînent que ces opérations sont toutes alternées.

En particulier, si  $R$  est commutatif et si on prend pour  $R_{ee}$  l'idéal  $I_2$  de  $R$  engendré par les éléments  $r^2 - r$  avec  $H(r) = r^2 - r$ , on obtient l'anneau carré  $R_{\text{Nil}} = (R \rightarrow I_2 \rightarrow R)$  [9].

Lorsque  $R$  est un anneau 2-binomial, l'anneau carré  $R_{\text{nil}} = (R \xrightarrow{H} R \xrightarrow{P=0} R)$  avec  $H(r) := \binom{r}{2}$  est isomorphe à  $R_{\text{Nil}}$ . Les  $R$ -groupes nilpotents de classe  $\leq 2$  classiques ([13]) sont donc exactement les  $R_{\text{Nil}}$ -modules. La notion de  $R_{\text{Nil}}$ -module pour un anneau commutatif quelconque généralise donc la notion de  $R$ -groupe nilpotent de classe  $\leq 2$  pour un anneau 2-binomial.

**Proposition 2.3.11.** Soient  $(M, A)$  et  $(N, B)$  deux  $\underline{R}$ -CP-modules, et supposons que  $(N, B)$  est  $\underline{R}$ -abélien. Toute application  $\underline{R}$ -CP-linéaire de  $(M, A)$  dans  $(N, B)$  se factorise par  $(\bar{M}, \bar{A}) = (M/[M]_{\underline{R}}, A/[A]_{\underline{R}})$ . On obtient donc une bijection naturelle

$$\bar{R}\text{-mod}((\bar{M}, \bar{A}), (N, B)) \rightarrow \text{CP-Mod}_{\underline{R}}((M, A), (N, B)).$$

**Corollaire 2.3.13.** Sous les mêmes hypothèses, l'ensemble  $\text{CP-Mod}_{\underline{R}}((M, A), (N, B))$  est naturellement un groupe abélien. Si en outre l'anneau  $\bar{R}$  est commutatif, c'est un  $\bar{R}$ -module.  $\square$

**Exemple 2.3.15.** Soit  $(M, A)$  un  $\underline{R}$ -CP-module et  $m \in M$ . Il existe une unique application  $\underline{R}$ -CP-linéaire  $(R_e, P(R_{ee})) \rightarrow (M, A)$  qui envoie 1 sur  $m$ . On en déduit que  $(R_e, P(R_{ee}))$  est le  $\underline{R}$ -CP-module libre à un générateur.

Notons aussi que  $\text{Op}(R_{\text{nil}})$  est l'opérade Lie tronquée, et que pour un  $R_{\text{nil}}$ -BHP-module  $M$  (càd, un  $R$ -groupe nilpotent de classe  $\leq 2$ ), la  $\text{Op}(R_{\text{nil}})$ -algèbre  $\text{Gr}_\gamma(M)$  est la  $R$ -algèbre de Lie graduée associée à  $M$  classique.

2.4.4. *Modules sur l'anneau carré  $\Lambda_R$  de [2] (8.8).* Soit  $R$  un anneau commutatif, soit

$$(2.4.2) \quad \Lambda_R := ( R \xrightarrow{0} R \xrightarrow{0} R )$$

l'anneau carré où  $R_e = R$  avec les mêmes addition et multiplication,  $R_{ee} = R$  avec la même addition,  $H = P = 0$ . Les actions de  $R_e$  sur  $R_{ee}$  sont données par :  $(r, s) \cdot x \cdot t := rsxt$ .

Soit maintenant  $M$  un  $\Lambda_R$ -BHP-module. D'après 2.2.6 (2) le groupe additif de  $M$  est commutatif, et d'après MC2  $M$  est un  $R$ -module (au sens classique). D'après MC6 les crochets sur  $M$  sont déterminés par le seul crochet  $[m, n] \cdot 1$  qui est bilinéaire en  $m$  et  $n$  d'après MC5 et qui doit vérifier  $[m, m] \cdot 1 = 0$ ,  $[n, m] \cdot 1 = -[m, n] \cdot 1$  et  $[[m, m'] \cdot 1, n] \cdot 1 = 0$ . Il en résulte qu'un  $\Lambda_R$ -BHP-module n'est rien d'autre qu'une  $R$ -algèbre de Lie nilpotente de classe  $\leq 2$ .

On vérifie de même qu'un  $\Lambda_R$ -CP-module est un couple  $(M, A)$ , où  $M$  est une  $R$ -algèbre de Lie nilpotente de classe  $\leq 2$ , et  $A$  un sous module de  $M$  contenant  $[M, M]$  et tel que  $[A, M] = 0$ .

2.4.5. *Modules sur l'anneau carré  $\otimes_R$  de [2] (8.8).* Dans cet exemple et les deux qui vont suivre, soit  $R$  un anneau commutatif, et soit  $R_e$  le groupe  $R \oplus R$  muni de la multiplication

$$(2.4.3) \quad (r, s)(r', s') := (rr', r^2s' + sr').$$

On vérifie que  $R_e$  satisfait tous les axiomes d'un anneau, sauf la distributivité à droite. On a en effet:

$$\begin{aligned} (r + r', s + s')(r'', s'') &= (rr'' + r'r'', (r + r')^2s'' + (s + s')r''), \\ (r, s)(r'', s'') + (r', s')(r'', s'') &= (rr'', r^2s'' + sr'') + (r'r'', r'^2s'' + s'r''), \\ &= (rr'' + r'r'', r^2s'' + sr'' + r'^2s'' + s'r''). \end{aligned}$$

Donc

$$((r, s) + (r', s'))(r'', s'') = (r, s)(r'', s'') + (r', s')(r'', s'') + (0, 2rr's'').$$

On remarquera que l'inclusion canonique  $R \rightarrow R_e$ ,  $r \mapsto (r, 0)$  est compatible avec les deux opérations.

Définissons alors un anneau carré:

$$(2.4.4) \quad \otimes_R := ( R_e \xrightarrow{H} R \oplus R \xrightarrow{P} R_e )$$

où  $H(r, s) := (s, s)$ ,  $P(x, y) := (0, x + y)$  et où les actions de  $R_e$  sur  $R_{ee}$  sont données par

$$((r, s), (r', s')) \cdot (x, y) \cdot (r'', s'') := (rr'xr'', rr'yr'').$$

Le lecteur vérifiera alors que  $\otimes_R$  satisfait les axiomes d'un anneau carré. Par exemple, pour AC7 on a

$$P(((r, s), (r'', s'')) \cdot H(r'', s'')) = P(((r, s), (r', s')) \cdot (s'', s'')) = P((rr's'', rr's'')) = (0, 2rr's'').$$

On a  $T(x, y) = HP(x, y) - (x, y) = H(0, x + y) - (x, y) = (x + y, x + y) - (x, y) = (y, x)$ .

Soit maintenant  $M$  un  $\otimes_R$ -BHP-module. Comme on a  $H(2) = H((2, 0)) = 0$ , la propriété 2.2.6 (2) montre que le groupe additif de  $M$  est commutatif. En outre,  $M$  est naturellement un  $R$ -module via l'inclusion de  $R$  dans  $R_e$ .

D'après MC5 MC4 et MC6 on a

$$\begin{aligned} [m, n] \cdot (r, s) &= [m, n] \cdot (r, 0) + [m, n] \cdot (0, s) = [m, n] \cdot (r, 0) + [m, n] \cdot T(s, 0) = [m, n] \cdot (r, 0) + [n, m] \cdot (s, 0) \\ &= ([m, n] \cdot (1, 0))r + ([n, m] \cdot (1, 0))s. \end{aligned}$$

Les crochets sont donc entièrement déterminés par le seul crochet  $[m, n] \cdot 1$ . Si on pose  $m * n := [m, n] \cdot 1$ , le calcul précédent s'écrit:

$$[m, n] \cdot (r, s) = (m * n)r + (n * m)s.$$

L'action de la seconde composante de  $R_e$  sur  $M$  s'exprime aussi à l'aide de l'opération  $*$  grâce à MC3:

$$m \cdot (0, s) = m \cdot P(s, 0) = [m, m] \cdot (s, 0) = (m * m)s$$

Il en résulte que la donnée d'un  $\otimes_R$ -BHP-module  $M$  équivaut à la donnée d'un  $R$ -module  $M$  muni d'une multiplication  $*$  qui est  $R$ -bilinéaire et nilpotente de classe  $\leq 2$ , puisque MC7 avec  $x = y = 1$  donne  $(m * m') * n = 0$  pour tous  $m, m'$  et  $n$ . Autrement dit,  $M$  est une  $R$ -algèbre non nécessairement commutative (sans unité) nilpotente de classe  $\leq 2$ .

On vérifie de même qu'un  $\otimes_R$ -CP-module est un couple  $(M, A)$ , où  $M$  est une  $R$ -algèbre non nécessairement commutative (sans unité) nilpotente de classe  $\leq 2$ , et  $A$  un idéal de  $M$  contenant  $M * M$  et tel que  $A * M = M * A = 0$ .

2.4.6. *Modules sur l'anneau carré  $S_R$  de [2] (8.8).* A partir du même  $R_e$ , définissons un autre anneau carré:

$$(2.4.5) \quad S_R := ( R_e \xrightarrow{H} R \xrightarrow{P} R_e )$$

où  $H(r, s) := 2s$ ,  $P(x) := (0, x)$  et où les actions de  $R_e$  sur  $R_{ee}$  sont données par

$$((r, s), (r', s')) \cdot x \cdot (r'', s'') := rr'xr''.$$

Le lecteur vérifiera alors que  $S_R$  satisfait les axiomes d'un anneau carré. Par exemple, pour AC7 on a

$$P(((r, s), (r', s')) \cdot H(r'', s'')) = P(((r, s), (r', s')) \cdot (2s'')) = P((2rr's'')) = (0, 2rr's'').$$

On a  $T(x) = HP(x) - x = H(0, x) - x = 2x - x = x$ .

Soit maintenant  $M$  un  $S_R$ -BHP-module. Comme on a  $H(2) = H((2, 0)) = 0$ , la propriété 2.2.6 (2) montre que le groupe additif de  $M$  est commutatif. En outre,  $M$  est naturellement un  $R$ -module via l'inclusion de  $R$  dans  $R_e$ .

D'après MC6 on a

$$[m, n] \cdot x = [m, n] \cdot (1 \cdot (x, 0)) = ([m, n] \cdot 1)(x, 0) = ([m, n] \cdot 1)x.$$

Les crochets sont donc entièrement déterminés par le seul crochet  $[m, n] \cdot 1$ . Définissons alors une multiplication sur  $M$  par  $m * n := [m, n] \cdot 1$ .

L'action de la seconde composante de  $R_e$  sur  $M$  s'exprime aussi à l'aide de l'opération  $*$  grâce à MC3:

$$m \cdot (0, s) = m \cdot P(s) = [m, m] \cdot s = (m * m)s$$

En outre, d'après MC4 on a  $[m, n] \cdot T(1) = [n, m] \cdot 1$ . Et comme  $T = \text{Id}$  on en déduit que la multiplication  $*$  est commutative.

Il en résulte que la donnée d'un  $S_R$ -BHP-module  $M$  équivaut à la donnée d'un  $R$ -module  $M$  muni d'une multiplication commutative  $*$  qui est  $R$ -bilinéaire et nilpotente de classe  $\leq 2$ , puisque MC7 avec  $x = y = 1$  donne  $(m * m') * n = 0$  pour tous  $m, m'$  et  $n$ . Autrement dit,  $M$  est une  $R$ -algèbre commutative (sans unité) nilpotente de classe  $\leq 2$ .

On vérifie de même qu'un  $S_R$ -CP-module est un couple  $(M, A)$ , où  $M$  est une  $R$ -algèbre commutative nilpotente de classe  $\leq 2$ , et  $A$  un idéal de  $M$  contenant  $M * M$  et tel que  $A * M = 0$ .

2.4.7. *Modules sur l'anneau carré  $\Gamma_R$  de [2] (8.8).* Toujours à partir du même  $R_e$  définissons un troisième anneau carré:

$$(2.4.6) \quad \Gamma_R := ( R_e \xrightarrow{H} R \xrightarrow{P} R_e )$$

où  $H(r, s) := s$ ,  $P(x) := (0, 2x)$  et où les actions de  $R_e$  sur  $R_{ee}$  sont données par

$$((r, s), (r', s')) \cdot x \cdot (r'', s'') := rr'xr''.$$

Le lecteur vérifiera alors que  $\Gamma_R$  satisfait les axiomes d'un anneau carré. Par exemple, pour AC7 on a

$$P(((r, s), (r', s')) \cdot H(r'', s'')) = P(((r, s), (r', s')) \cdot (s'')) = P((rr's'')) = (0, 2rr's'').$$

On a  $T(x) = HP(x) - x = H(0, 2x) - x = 2x - x = x$ .

Soit maintenant  $M$  un  $\Gamma_R$ -BHP-module. Comme on a  $H(2) = H((2, 0)) = 0$ , la propriété 2.2.6 (2) montre que le groupe additif de  $M$  est commutatif. En outre,  $M$  est naturellement un  $R$ -module via l'inclusion de  $R$  dans  $R_e$ . Définissons alors une application  $\gamma : M \rightarrow M$  par  $\gamma(m) := m \cdot (0, 1)$ . D'après MC2 on a

$$[m, n] \cdot 1 = [m, n] \cdot H(0, 1) = (m + n) \cdot (0, 1) - m \cdot (0, 1) - n \cdot (0, 1) = \gamma(m + n) - \gamma(m) - \gamma(n).$$

Il en résulte que la multiplication  $m * n := [m, n] \cdot (0, 1)$  est commutative et  $R$ -bilinéaire, et que  $m * m = 2\gamma(m)$ . On a aussi

$$\gamma(mr) = \gamma(m \cdot (r, 0)) = m \cdot (r, 0) \cdot (0, 1) = m \cdot (0, r^2) = m \cdot (0, 1) \cdot (r^2, 0) = \gamma(m) \cdot (r^2, 0) = \gamma(m)r^2.$$

Il en résulte que la donnée d'un  $\Gamma_R$ -BHP-module  $M$  équivaut à la donnée d'une  $R$ -algèbre à puissance divisée (sans unité) nilpotente de classe  $\leq 2$ .

2.4.8. *Anneaux carrés associés à la suspension des pseudo-plans projectifs* [2] (8.4). Dans l'exemple précédent, soit  $I_2$  l'idéal de  $R$  engendré par les éléments  $r^2 - r$  et soit  $\varepsilon \in \text{Ann}(I_2)$ . Déformons l'addition de  $R_e$  en posant

$$(r, s) + (r', s') := (r + r', s + s' + \varepsilon r r')$$

Avec le même  $R_{ee}$ , les mêmes actions de  $R_e$  sur  $R_{ee}$  et les mêmes applications  $H$  et  $P$  que pour l'anneau carré  $\Gamma_R$ , on obtient un nouvel anneau carré  $\Gamma_R^\varepsilon$ , qui généralise l'exemple précédent puisque  $\Gamma_R^0 = \Gamma_R$ .

Lorsque l'on prend  $R = \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$  et  $\varepsilon = \binom{n}{2}$  l'anneau carré obtenu est l'anneau carré des endomorphismes de  $\Sigma P_n$ .

### 3. ANNEAUX CARRÉS COMMUTATIFS ET APPLICATIONS $\underline{R}$ -QUADRATIQUES

#### 3.1. Anneaux carrés commutatifs.

**Définition 3.1.1.** Un anneau carré  $\underline{R}$  est dit commutatif si

- l'anneau quotient  $\overline{R} = R_e / \text{Im } P$  est commutatif
- les trois actions de  $R_e$  sur  $R_{ee}$  coïncident,<sup>(4)</sup> c'est à dire  $(r, 1) \cdot x = (1, r) \cdot x = x \cdot r$ .

Remarquons que la propriété de commutativité s'exprime en termes de l'opérade associée :  $\underline{R}$  est commutatif si et seulement si l'anneau  $\text{OP}(\underline{R})_1$  est commutatif et  $\text{OP}(\underline{R})$  est une opérade de  $\text{OP}(\underline{R})_1$ -modules.

**Lemme 3.1.2.** Si  $\underline{R}$  est commutatif, on a  $x \cdot rs = x \cdot sr$  pour  $r, s \in R_e$  et  $x \in R_{ee}$ . En outre le groupe additif de  $R_e$  est commutatif.

*Preuve.* La première relation est une conséquence immédiate de la définition. Pour la seconde propriété, soient  $r$  et  $s$  dans  $R_e$ , on a d'après 2.2.6

$$[r, s] = P((s, r) \cdot H(2)) = P((1, 1) \cdot H(2)) rs = [1, 1] rs = 0. \quad \square$$

**Lemme 3.1.3.** Soit  $M$  un module sur l'anneau carré commutatif  $\underline{R}$ . Pour  $m, n \in M$ ,  $r, s, t \in R_e$  et  $x, y \in R_{ee}$ , on a  $[m \cdot r, n \cdot s] \cdot (x \cdot t) = ([m, n] \cdot x) \cdot rst$ , et dans le produit  $rst$  on peut changer l'ordre des facteurs.

*Preuve.* Cela découle de MC6. □

**Corollaire 3.1.4.** Soit  $\underline{R}$  un anneau carré commutatif, pour  $r \in R_e$  et  $x \in R_{ee}$  on a  $rP(x) = P(x)r^2$ .

*Preuve.* En utilisant AC1, la définition 3.1.1 et à nouveau AC1 on a:

$$rP(x) = P((r, r) \cdot x) = P(x \cdot r^2) = P(x)r^2. \quad \square$$

**Remarque 3.1.5.** Puisque  $\overline{R}$  est commutatif,  $rs - sr \in \text{Im } P$ , par conséquent  $m \cdot sr - m \cdot rs = m \cdot (sr - rs) = m \cdot P(x) = [m, m] \cdot x$ . Donc, si  $m$  est tel que  $[m, m] \cdot x = 0$  pour tout  $x \in R_{ee}$ , on a  $m \cdot sr = m \cdot rs$  pour tous  $r, s \in R_e$ .

3.1.6. *Exemples.* Les anneaux carrés des exemples 2.4.1,  $\mathbb{Z}_{\text{nil}}$  (2.4.2),  $R_{\text{nil}}^H$  si  $R$  est commutatif (2.4.3) et si  $(r, 1) \cdot x = x \cdot r$ ,  $\Lambda_R$  (2.4.4),  $\otimes_R$  (2.4.5) et  $S_R$  (2.4.6) sont des anneaux carrés commutatifs.

3.1.7. *Les anneaux carrés*  $\Gamma_R$  (2.4.7) et  $\Gamma_R^\varepsilon$  (2.4.8). Pour ces anneaux carrés, on a  $\text{Im } P = 2R$ , donc  $\overline{R} = R \times R/2R$ . On vérifie alors que  $\overline{R}$  est un anneau commutatif si et seulement si  $I_2 = 2R$ . Cette condition est réalisée, par exemple si  $1/2 \in R$  ou si  $R$  est un anneau 2-binomial, ou si  $R = \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ .

<sup>4</sup>Une autre définition possible a finalement été écartée : Un anneau carré  $\underline{R}$  est dit commutatif si la multiplication dans  $R_e$  est commutative et si les trois actions de  $R_e$  sur  $R_{ee}$  coïncident. En effet la commutativité de la multiplication de  $R_e$  entraîne la distributivité à gauche, il en résulte que  $PH = 0$  et que  $2P = 0$ . Elle entraîne aussi la commutativité de l'addition de  $R_e$ , puisque  $[m, n] = P((n, m) \cdot H(2)) = PH(2)nm = 0$ . On aurait finalement que  $R_e$  serait un anneau commutatif, ce qui semble un peu trop restrictif.

**3.2. Applications quadratiques entre  $\underline{R}$ -modules.** Dans toute la suite, on supposera que  $\underline{R}$  est un anneau carré commutatif.

**Définition 3.2.1.** Soient  $\underline{R}$  un anneau carré commutatif,  $M$  et  $N$  deux  $\underline{R}$ -modules et  $f : M \rightarrow N$  une application. On appelle *défaut additif* de  $f$  l'application

$$(3.2.1) \quad d_f : M \times M \rightarrow N \quad (m, m') \mapsto d_f(m, m') := f(m + m') - f(m') - f(m).$$

On appelle *défauts scalaires* de  $f$  les applications

$$(3.2.2) \quad f_{(r)} : M \rightarrow N \quad m \mapsto f_{(r)}(m) := f(m \cdot r) - f(m) \cdot r,$$

pour  $r \in R_e$ . On appelle *défauts des commutateurs* de  $f$  les applications

$$(3.2.3) \quad f_{[x]} : M \times M \rightarrow N \quad (m, m') \mapsto f_{[x]}(m, m') := f([m, m'] \cdot x) - [f(m), f(m')] \cdot x,$$

pour  $x \in R_{ee}$ .

**Définition 3.2.2.** Soit  $\underline{R}$  un anneau carré commutatif et soient  $M$  et  $N$  deux  $\underline{R}$ -BHP-modules, une application  $f : M \rightarrow N$  est  $\underline{R}$ -BHP-quadratique si elle satisfait :

- (1) les images des défauts :  $\text{Im}_{\underline{R}} d_f$ ,  $\text{Im}_{\underline{R}} f_{(r)}$  et  $\text{Im}_{\underline{R}} f_{[x]}$  sont  $\underline{R}$ -centrales dans  $\text{Im}_{\underline{R}} f$ , pour  $r \in R_e$  et  $x \in R_{ee}$ .
- (2) le défaut additif  $d_f$  et les défauts des commutateurs  $f_{[x]}$  sont  $\underline{R}$ -bilinéaires,
- (3) les défauts scalaires  $f_{(r)}$  sont homogènes de degré 2 <sup>(a)</sup>, i.e.  $f_{(r)}(m \cdot s) = f_{(r)}(m) \cdot s^2$ , pour  $m \in M$ ,  $r, s \in R_e$ .

<sup>a</sup> Nous n'utilisons pas ici l'appellation "quadratique homogène" car pour le moment rien ne dit que  $f_{(r)}$  est  $\underline{R}$ -quadratique. On verra plus loin 3.2.18 que si  $f$  est  $\underline{R}$ -BHP-quadratique, les  $f_{(r)}$  le sont aussi.

**Définition 3.2.3.** Soit  $\underline{R}$  un anneau carré commutatif et soient  $(M, A)$  et  $(N, B)$  deux  $\underline{R}$ -CP-modules, on appelle application  $\underline{R}$ -CP-quadratique de  $(M, A)$  dans  $(N, B)$  une application  $f : M \rightarrow N$  qui satisfait :

- (1) l'image  $f(A)$  et celles des défauts :  $\text{Im}_{\underline{R}} d_f$ ,  $\text{Im}_{\underline{R}} f_{(r)}$  et  $\text{Im}_{\underline{R}} f_{[x]}$  sont contenues dans  $B$ , pour  $r \in R_e$  et  $x \in R_{ee}$ ,
- (2) le défaut additif  $d_f$  et les défauts des commutateurs  $f_{[x]}$  sont  $\underline{R}$ -bilinéaires,
- (3) les défauts scalaires  $f_{(r)}$  sont homogènes de degré 2, i.e.  $f_{(r)}(m \cdot s) = f_{(r)}(m) \cdot s^2$ ,
- (4) tous les défauts s'annulent sur  $A$ , c.a.d.

$$d_f(M, A) = d_f(A, M) = 0$$

$$f_{(r)}(A) = 0$$

$$f_{[x]}(M, A) = f_{[x]}(A, M) = 0.$$

pour  $m \in M$ ,  $r, s \in R_e$  et  $x \in R_{ee}$ .

Puisque  $f(A) \subset B$ , que  $d_f$  est biadditif et que  $d_f(M, A) = d_f(A, M) = 0$ , l'application  $f : (M, A) \rightarrow (N, B)$  est une "quadratic pair map" au sens de [6].

Remarquons qu'une application  $\underline{R}$ -BHP-quadratique où  $\underline{R}$ -CP-quadratique annule 0 car  $d_f(0, 0) = 0$ .

**Exemple 3.2.4.** On a vu (2.2.5) que  $R_e$  et  $R_{ee}$  sont des  $\underline{R}$ -BHP-modules quadratiques. L'application  $H : R_e \rightarrow R_{ee}$  est  $\underline{R}$ -BHP-quadratique. On vérifie en effet que  $d_H(r, s) = (s, r) \cdot H(2)$ ,  $H_{[x]}(r, s) = HP((r, s) \cdot x)$ ,  $H_{(r)}(s) = (s, s) \cdot H(r)$ .

**Exemple 3.2.5.** Soit  $A$  un sous-groupe de  $R_e$  stable par multiplication à droite par  $R_e$  et tel que  $P(R_{ee}) \subseteq A \subseteq \underline{Z}_{\underline{R}}(R_e)$ , et soit  $B$  un sous- $\underline{R}$ -module de  $R_{ee}$ . On a vu (2.2.5) que  $(R_e, A)$  et  $(R_{ee}, B)$  sont des  $\underline{R}$ -CP-modules quadratiques. Alors si  $H(A) \subseteq B$  l'application  $H : (R_e, A) \rightarrow (R_{ee}, B)$  est  $\underline{R}$ -CP-quadratique.

**Exemple 3.2.6.** Soit  $M$  un  $\underline{R}$ -BHP-module. Pour tout  $t \in R_e$  la multiplication à droite  $\mu_t : M \rightarrow M$ ,  $\mu_t(m) = m \cdot t$  est une application  $\underline{R}$ -BHP quadratique. En effet, on a  $d_{\mu_t}(m, n) = [m, n] \cdot H(t)$  qui est bien  $\underline{R}$ -bilinéaire et d'image  $\underline{R}$ -centrale. On a aussi  $(\mu_t)_{(r)}(m) = m \cdot (rt - tr) = m \cdot P(y)$  pour un certain  $y$ . L'image est bien  $\underline{R}$ -centrale et on a  $(\mu_t)_{(r)}(m \cdot s) = m \cdot s \cdot P(y) = m \cdot P(y) \cdot s^2 = (\mu_t)_{(r)}(m) \cdot s^2$ . Enfin on a  $(\mu_t)_{[x]}(m, n) = [m, n] \cdot (x \cdot (t - t^2))$  qui est  $\underline{R}$ -bilinéaire et d'image  $\underline{R}$ -centrale.

En particulier, si  $M = R_e$ , les multiplications à droite dans  $R_e$  sont des applications  $\underline{R}$ -BHP-quadratiques.

La proposition suivante est une conséquence immédiate de la définition 3.2.3.

**Proposition 3.2.7.** Soit  $f : (M, A) \rightarrow (N, B)$  une application  $\underline{R}$ -CP-quadratique. Elle induit des morphismes de  $\overline{R}$ -modules

$$\overline{f} = \text{Gr}_1(f) : M/A \rightarrow N/B \quad \text{et} \quad f_2 = \text{Gr}_2(f) : A \rightarrow B$$

tels que  $\overline{f}(\overline{m}) = \overline{f(m)}$  et  $f_2(a) = f(a)$ , pour  $m \in M$  et  $a \in A$ .

**Proposition 3.2.8.** Soient  $M$  et  $N$  deux  $\underline{R}$ -BHP-modules, et  $\varphi : M \times M \rightarrow \underline{Z}_{\underline{R}}(N)$  une application  $\underline{R}$ -bilinéaire. Alors  $\varphi$  s'annule sur  $M \times [M]$  et  $[M] \times M$ . Elle définit donc une application  $\overline{R}$ -linéaire  $\overline{\varphi} : \overline{M} \otimes_{\overline{R}} \overline{M} \rightarrow \underline{Z}_{\underline{R}}(N)$ . L'ensemble  $\underline{R}\text{-Bil}(M \times M, \underline{Z}_{\underline{R}}(N))$  des applications  $\underline{R}$ -bilinéaires de  $M$  dans le  $\underline{R}$ -centre de  $N$  est un  $\overline{R}$ -module.

*Preuve.* Soient  $m, m', m'' \in M$  et  $x \in R_{ee}$ . Puisque  $\varphi$  est  $\underline{R}$ -bilinéaire, on a  $\varphi([m, m'] \cdot x, m'') = [\varphi(m, m''), \varphi(m', m'')] \cdot x = 0$  puisque l'image de  $\varphi$  est dans le  $\underline{R}$ -centre de  $N$ . Donc l'application injective  $\underline{R}\text{-Bil}(\overline{M} \times \overline{M}, \underline{Z}_{\underline{R}}(N)) \rightarrow \underline{R}\text{-Bil}(M \times M, \underline{Z}_{\underline{R}}(N))$  induite par la surjection  $M \rightarrow \overline{M}$  est bijective. La preuve se termine grâce à la bijection naturelle entre  $\underline{R}\text{-Bil}(\overline{M} \times \overline{M}, \underline{Z}_{\underline{R}}(N))$  et  $\overline{R}\text{-mod}(\overline{M} \otimes_{\overline{R}} \overline{M}, \underline{Z}_{\underline{R}}(N))$ .  $\square$

**Remarque 3.2.9.** Soit  $f : M \rightarrow N$  une application  $\underline{R}$ -BHP-quadratique. Les applications  $d_f$  et  $f_{[x]}$  sont  $\underline{R}$ -bilinéaires et  $\underline{R}$ -centrales dans l'image. D'après 2.3.10 elles s'annulent si l'un de leurs arguments est dans  $[M]$ , autrement dit  $d_f(M, [M]) = d_f([M], M) = 0$  et  $f_{[x]}(M, [M]) = f_{[x]}([M], M) = 0$ .

**Exemple 3.2.10.** Le commutateur pour la multiplication  $R_e \times R_e \rightarrow R_e$ ,  $(r, s) \mapsto rs - sr$  est une application bi- $\underline{R}$ -BHP-quadratique. Montrons le pour la première variable: fixons  $s$ , alors  $c_s(r) := rs - sr = \mu_s(r) - g_s(r)$ . Puisque l'anneau  $\overline{R}$  est commutatif, l'image de  $c_s$  est incluse dans l'image de  $P$ , donc tous les défauts de  $c_s$  sont  $\underline{R}$ -centraux dans l'image de  $c_s$ . Comme le groupe additif de  $R_e$  est commutatif,  $d_{c_s} = d_{\mu_s} - d_{g_s} = d_{\mu_s}$  puisque  $g_s$  est  $\underline{R}$ -BP-linéaire. Donc  $d_{c_s}$  est  $\underline{R}$ -bilinéaire. De même, on a

$$\begin{aligned} (c_s)_{[x]}(r, r') &= c_s([r, r'] \cdot x) - [c_s(r), c_s(r')] \cdot x \\ &= (\mu_s)_{[x]}(r, r') - (g_s)_{[x]}(r, r') + [rs, sr'] \cdot x + [sr, r's] \cdot x = (\mu_s)_{[x]}(r, r') + [r, r'] \cdot (x \cdot 2s^2), \end{aligned}$$

puisque  $g_s$  est  $\underline{R}$ -BHP-linéaire et en utilisant 3.1.3. D'après la proposition précédente,  $c_s$  est  $\underline{R}$ -bilinéaire. Enfin on a

$$\begin{aligned} (c_s)_{(t)}(r) &= c_s(rt) - c_s(r)t = \mu_s(rt) - g_s(rt) - (\mu_s(r)t + (-g_s(r))t) + [\mu_s(r), -g_s(r)] \cdot H(t) \\ &= (\mu_s)_{(t)}(r) - (g_s)_{(t)}(r) + [c_s(r), g_s(r)] \cdot H(t) = (\mu_s)_{(t)}(r), \end{aligned}$$

puisque  $g_s$  est  $\underline{R}$ -linéaire. Donc  $(c_s)_{(t)}$  est quadratique homogène.

Explicitons maintenant les différentes conditions de la définition d'une application BHP-quadratique:

**Lemme 3.2.11.** Soit  $f : M \rightarrow N$ .

(1) le défaut additif  $d_f$  est  $\underline{R}$ -central dans  $\text{Im}_{\underline{R}} f$  si et seulement si

$$(3.2.4) \quad [f(m + m'), f(n)] \cdot x = [f(m), f(n)] \cdot x + [f(m'), f(n)] \cdot x.$$

(2) le défaut scalaire  $f_{(r)}$  est  $\underline{R}$ -central dans  $\text{Im}_{\underline{R}} f$  si et seulement si

$$(3.2.5) \quad [f(m \cdot r), f(n)] \cdot x = ([f(m), f(n)] \cdot x) \cdot r.$$

(3) le défaut du commutateur  $f_{[x]}$  est  $\underline{R}$ -central dans  $\text{Im}_{\underline{R}} f$  si et seulement si

$$(3.2.6) \quad [f([m, m'] \cdot x), f(n)] \cdot y = 0.$$

Ces trois relations équivalent à dire que les applications  $m \mapsto [f(m), n] \cdot x$  sont  $\underline{R}$ -linéaires pour  $n \in \text{Im} f$  et  $x \in R_{ee}$ .

*Preuve.* (1) On doit avoir  $[f(m + m') - f(m') - f(m), f(n)] \cdot x = 0$ . L'additivité du crochet en la première variable (MC5) permet de conclure.

(2) On doit avoir  $[f(m \cdot r) - f(m) \cdot r, f(n)] \cdot x = 0$ . La même additivité et (MC6) donnent la relation cherchée.

(3) On doit avoir  $[f([m, m'] \cdot x) - [f(m), f(m')] \cdot x, f(n)] \cdot y = 0$ . La même additivité et (MC7) donnent la relation cherchée.  $\square$

**Lemme 3.2.12.** Soit  $f : M \rightarrow N$  telle que son défaut additif  $d_f$  soit  $\underline{R}$ -central dans  $\text{Im}_{\underline{R}} f$ .

(1) L'image du défaut additif est annulée par l'image de  $P$ .

(2) Le défaut  $d_f$  est biadditif si et seulement si

$$(3.2.7) \quad f(m + m' + m'') + f(m) + f(m') + f(m'') = f(m + m') + f(m' + m'') + f(m + m'') - [f(m'), f(m + m'')].$$

(3) Le défaut  $d_f$  est  $R_e$ -équivariant si et seulement si

$$(3.2.8) \quad f(m \cdot r + n \cdot s) = f(m+n) \cdot rs - f(n) \cdot rs - f(m) \cdot rs \\ + f(m \cdot r) + f(n \cdot s) - [f(m), f(n)] \cdot H(rs).$$

(4) Le défaut  $d_f$  commute aux commutateurs si et seulement si

$$(3.2.9) \quad f([m, m'] \cdot x + n) = f([m, m'] \cdot x) + f(n)$$

*Preuve.* (1) En effet, on a d'après MC3

$$d_f(m, m') \cdot P(x) = [d_f(m, m'), d_f(m, m')] \cdot x = 0,$$

puisque  $d_f(m, m')$  est  $\underline{R}$ -central.

(2) Pour l'additivité en la première variable on doit avoir

$$\begin{aligned} d_f(m + m', m'') &= d_f(m, m'') + d_f(m', m'') \\ f(m + m' + m'') - f(m'') - f(m + m') &= d_f(m', m'') + d_f(m, m'') \\ f(m + m' + m'') &= f(m + m') + d_f(m', m'') + f(m'') \\ &\quad + f(m + m'') - f(m'') - f(m) \\ f(m + m' + m'') &= f(m + m') + f(m' + m'') - f(m'') \\ &\quad - f(m') + f(m'') + f(m + m'') - f(m'') - f(m) \\ f(m + m' + m'') &= f(m + m') + f(m' + m'') - f(m') \\ &\quad + [f(m''), f(m')] + f(m + m'') - f(m'') - f(m) \\ f(m + m' + m'') &= f(m + m') + f(m' + m'') - f(m') \\ &\quad + f(m + m'') + [f(m''), f(m')] - f(m'') - f(m) \\ f(m + m' + m'') &= f(m + m') + f(m' + m'') + f(m + m'') + [f(m + m''), f(m')] \\ &\quad + [f(m''), f(m')] - f(m') - f(m'') - f(m) \\ f(m + m' + m'') &= f(m + m') + f(m' + m'') + f(m + m'') - \\ &\quad [f(m'), f(m + m'')] - f(m'') - f(m') - f(m). \end{aligned}$$

Un calcul analogue pour la seconde variable aboutit à la même relation, ce qui montre la deuxième propriété.

(3) Remarquons tout d'abord que puisque  $rs - sr \in \text{Im } P$  on a, en utilisant (1),  $d_f(m, m') \cdot rs = d_f(m, m') \cdot sr$ . On doit alors avoir

$$\begin{aligned} d_f(m \cdot r, n \cdot s) &= d_f(m, n) \cdot rs = (f(m+n) - f(n) - f(m)) \cdot rs \\ &= f(m+n) \cdot rs + (-f(n)) \cdot rs + (-f(m)) \cdot rs + ([f(m+n), -f(n)] \cdot H(rs) \\ &\quad + [f(m+n) - f(m)] \cdot H(rs) + [-f(n), -f(m)] \cdot H(rs)) \\ &= f(m+n) \cdot rs - f(n) \cdot rs + [f(n), f(n)] \cdot H(rs) - f(m) \cdot rs + [f(m), f(m)] \cdot H(rs) \\ &\quad - [f(m), f(n)] \cdot H(rs) - [f(n), f(n)] \cdot H(rs) - [f(m), f(m)] \cdot H(rs) \\ &= f(m+n) \cdot rs - f(n) \cdot rs - f(m) \cdot rs + f(m \cdot r) + f(n \cdot s) - [f(m), f(n)] \cdot H(rs) \end{aligned}$$

Ce qui montre la troisième propriété.

(4) On doit avoir

$$d_f([m, m'] \cdot x, n) = [d_f(m, n), d_f(m', n)] \cdot x$$

Or le second membre est nul puisque l'image de  $d_f$  est  $\underline{R}$ -centrale. On développe alors le premier membre:

$$d_f([m, m'] \cdot x, n) = 0 = f([m, m'] \cdot x + n) - f(n) - (f([m, m'] \cdot x))$$

ce qui donne la dernière équation.  $\square$

**Lemme 3.2.13.** Soit  $f : M \rightarrow N$

(1) Si le défaut  $d_f$  est  $\underline{R}$ -bilinéaire et  $\underline{R}$ -central dans  $\text{Im } \underline{R}f$  alors les défauts des commutateurs sont biadditifs.

(2) Si les défauts  $f_{(r)}$  sont  $\underline{R}$ -centraux dans  $\text{Im}_{\underline{R}} f$  alors les défauts des commutateurs sont  $R_e$ -biéquivariants si et seulement si  $f_{(r)}([M]) = 0$  pour tout  $r \in R_e$ , c.a.d. si et seulement si

$$(3.2.10) \quad f([m, n] \cdot x \cdot r) = (f([m, n] \cdot x)) \cdot r$$

(3) Si les défauts  $f_{[x]}$  sont  $\underline{R}$ -centraux dans  $\text{Im}_{\underline{R}} f$  alors ils sont  $R_{ee}$ -équivariants.

*Preuve.* (1) En effet, en utilisant successivement 3.2.11(1) et 3.2.12(4), on a :

$$\begin{aligned} f_{[x]}(m, m' + m'') &= f([m, m' + m''] \cdot x) - [f(m), f(m' + m'')] \cdot x \\ &= f([m, m'] \cdot x + [m, m''] \cdot x) - [f(m), f(m') + f(m'')] \cdot x \\ &= f([m, m'] \cdot x) + f([m, m''] \cdot x) - ([f(m), f(m')] \cdot x + [f(m), f(m'')] \cdot x) \\ &= f([m, m'] \cdot x) - [f(m), f(m')] \cdot x + f([m, m''] \cdot x) - [f(m), f(m'')] \cdot x \\ &= f_{[x]}(m, m') + f_{[x]}(m, m''). \end{aligned}$$

Ce qui montre la première partie du lemme.

(2) On a

$$f_{(r)}([m, m'] \cdot x) = f([m, m'] \cdot x \cdot r) - f([m, m'] \cdot x) \cdot r$$

Or puisque  $\underline{R}$  est commutatif,

$$([m, m'] \cdot x) \cdot r = [m, m'] \cdot (x \cdot r) = [m, m'] \cdot ((r, 1) \cdot x) = [m \cdot r, m'] \cdot x,$$

donc

$$\begin{aligned} f_{(r)}([m, m'] \cdot x) &= f([m \cdot r, m'] \cdot x) - f([m, m'] \cdot x) \cdot r \\ &= f_{[x]}(m \cdot r, m') + [f(m \cdot r), f(m')] \cdot x \\ &\quad - (f_{[x]}(m, m') + [f(m), f(m')] \cdot x) \cdot r \end{aligned}$$

Comme  $[f(m), f(m')] \cdot x$  est central, on a

$$-(f_{[x]}(m, m') + [f(m), f(m')] \cdot x) \cdot r = -[f(m), f(m')] \cdot (x \cdot r) - f_{[x]}(m, m') \cdot r,$$

et en utilisant la relation (3.2.5) on obtient :

$$f_{(r)}([m, m'] \cdot x) = f_{[x]}(m \cdot r, m') - (f_{[x]}(m, m')) \cdot r.$$

(3) Supposons maintenant que les images des  $f_{[x]}$  sont centrales dans l'image de  $f$ . On a d'une part d'après 3.2.11(3)

$$f_{[x]}([m, m'] \cdot y, n) = f([m, m'] \cdot y, n) \cdot x - [f([m, m'] \cdot y), f(n)] \cdot x = -[f([m, m'] \cdot y), f(n)] \cdot x = 0,$$

et d'autre part :

$$[f_{[x]}(m, n), f_{[x]}(m', n)] \cdot y = 0. \quad \square$$

On peut résumer ces trois lemmes sous la forme :

**Proposition 3.2.14.** Une application  $f : M \rightarrow N$  est  $\underline{R}$ -BHP-quadratique si et seulement si elle vérifie les relations :

$$(3.2.11a) \quad [f(m + m'), f(n)] \cdot x = [f(m), f(n)] \cdot x + [f(m'), f(n)] \cdot x,$$

$$(3.2.11b) \quad [f(m \cdot r), f(n)] \cdot x = ([f(m), f(n)] \cdot x) \cdot r,$$

$$(3.2.11c) \quad [f([m, m'] \cdot x), f(n)] \cdot y = 0,$$

$$(3.2.11d) \quad f(m + m' + m'') + f(m) + f(m') + f(m'') = f(m + m') + f(m' + m'') + f(m + m'') - [f(m'), f(m + m'')],$$

$$(3.2.11e) \quad f(m \cdot r + n \cdot s) = f(m + n) \cdot rs - f(n) \cdot rs - f(m) \cdot rs + f(m \cdot r) + f(n \cdot s) - [f(m), f(n)] \cdot H(rs),$$

$$(3.2.11f) \quad f([m, m'] \cdot x + n) = f([m, m'] \cdot x) + f(n)$$

$$(3.2.11g) \quad f(m \cdot sr) - (f(m \cdot s)) \cdot r = (f(m \cdot r) - (f(m)) \cdot r) \cdot s^2,$$

$$(3.2.11h) \quad f([m, n] \cdot x \cdot r) = (f([m, n] \cdot x)) \cdot r,$$

pour tous  $m, m', m'', n \in M$ ,  $r, s \in R_e$  et  $x, y \in R_{ee}$ .

Il résulte de cette proposition et plus particulièrement du lemme 3.2.13

**Corollaire 3.2.15.** *Une application  $f : M \rightarrow N$  entre deux  $\underline{R}$ -BHP-modules est  $\underline{R}$ -BHP-quadratique si et seulement si elle satisfait les propriétés suivantes:*

- (1) les applications  $m \mapsto [f(m), n] \cdot x$  sont  $\underline{R}$ -linéaires pour  $n \in \text{Im } f$  et  $x \in R_{ee}$ .
- (2) le défaut additif  $d_f$  est  $\underline{R}$ -bilinéaire,
- (3) les défauts scalaires  $f_{(r)}$  sont quadratiques homogènes, i.e.  $f_{(r)}(m \cdot s) = f_{(r)}(m) \cdot s^2$ , pour  $m \in M$ ,  $r, s \in R_e$ ,
- (4) on a  $f_{(r)}([M]) = 0$ .

**Corollaire 3.2.16.** *Une application  $f : (M, A) \rightarrow (N, B)$  entre deux  $\underline{R}$ -CP-modules est  $\underline{R}$ -CP-quadratique si et seulement si elle satisfait les propriétés suivantes:*

- (1) l'image  $f(A)$  et les images du défaut additif et des défauts scalaires,  $\text{Im } \underline{R} d_f$  et  $\text{Im } \underline{R} f_{(r)}$ , sont contenues dans  $B$ , pour  $r \in R_e$ .
- (2) le défaut additif  $d_f$  est  $\underline{R}$ -bilinéaire,
- (3) les défauts scalaires  $f_{(r)}$  sont quadratiques homogènes, i.e.  $f_{(r)}(m \cdot s) = f_{(r)}(m) \cdot s^2$ , pour  $m \in M$ ,  $r, s \in R_e$ ,
- (4) le défaut additif et les défauts scalaires s'annulent sur  $A$  :

$$d_f(M, A) = d_f(A, M) = 0 = f_{(r)}(A)$$

pour  $m \in M$  et  $r, s \in R_e$ .

On notera que la caractérisation d'une application  $\underline{R}$ -CP-quadratique dans le corollaire 3.2.16 n'implique aucune condition portant sur les défauts des commutateurs ; en effet, leur propriétés souhaitées découlent des conditions portant sur les autres défauts :  $\text{Im } \underline{R} f_{[x]} \subset B$  car  $f(A) \subset B \supset [N]$ , l'application  $f_{[x]}$  annule  $A$  en chaque variable car les commutateurs de  $M$  resp. de  $N$  annulent  $A$  resp.  $B$  et donc  $f(A)$  en chaque variable, et  $f_{[x]}$  est  $\underline{R}$ -bilinéaire d'après le lemme 3.2.13.

**Lemme 3.2.17.** [Lemme des 3 défauts] *Soit  $f : M \rightarrow N$  une application vérifiant les conditions (1) et (2) de 3.2.2, et  $r \in R_e$  alors*

$$d_{f_{(r)}}(m, m') = f_{[H(r)]}(m, m') + d_f(m, m') \cdot (r^2 - r).$$

*Preuve.* On a

$$\begin{aligned} d_{f_{(r)}}(m, m') &= f_{(r)}(m + m') - f_{(r)}(m') - f_{(r)}(m) \\ &= f((m + m') \cdot r) - (f(m + m')) \cdot r - f_{(r)}(m') - f_{(r)}(m) \\ &= f(m \cdot r + m' \cdot r + [m, m'] \cdot H(r)) \\ &\quad - (f(m) + f(m') + d_f(m, m')) \cdot r - f_{(r)}(m') - f_{(r)}(m) \\ &= f(m \cdot r + m' \cdot r) + f([m, m'] \cdot H(r)) \\ &\quad - (f(m) + f(m')) \cdot r - d_f(m, m') \cdot r - f_{(r)}(m') - f_{(r)}(m) \\ &= d_f(m \cdot r, m' \cdot r) + f(m \cdot r) + f(m' \cdot r) + f([m, m'] \cdot H(r)) \\ &\quad - [f(m), f(m')] \cdot H(r) - f(m') \cdot r - f(m) \cdot r \\ &\quad - d_f(m, m') \cdot r - f_{(r)}(m') - f_{(r)}(m) \end{aligned}$$

puisque  $f_{(r)}$  et  $f_{[H(r)]}$  sont  $\underline{R}$ -centraux dans  $\text{Im } \underline{R} f$ :

$$\begin{aligned} d_{f_{(r)}}(m, m') &= f_{[H(r)]}(m, m') + d_f(m, m') \cdot r^2 + f(m \cdot r) - f(m) \cdot r \\ &\quad - d_f(m, m') \cdot r - f_{(r)}(m) \\ &= f_{[H(r)]}(m, m') + d_f(m, m') \cdot r^2 - d_f(m, m') \cdot r \\ &= f_{[H(r)]}(m, m') + d_f(m, m') \cdot (r^2 - r) \end{aligned}$$

□

**Proposition 3.2.18.** *Soit  $f : M \rightarrow N$  une application  $\underline{R}$ -BHP-quadratique. Les défauts scalaires  $f_{(r)} : M \rightarrow N$  sont  $\underline{R}$ -BHP-quadratiques.*

*Preuve.* D'après le lemme précédent et puisque les défauts additifs et des commutateurs de  $f$  commutent entre eux, les défauts  $d_{(r)}$  sont  $R_e$ -bilinéaires.  $\square$

Le corollaire 3.2.16 et la proposition 3.2.19 permettent de donner une caractérisation plus concise d'une application  $\underline{R}$ -CP-quadratique, comme suit.

**Proposition 3.2.20.** *Soient  $(M, A)$  et  $(N, B)$  deux  $\underline{R}$ -CP-modules et  $f : M \rightarrow N$  une application. Alors  $f : (M, A) \rightarrow (N, B)$  est  $\underline{R}$ -CP-quadratique si et seulement si elle satisfait les propriétés suivantes.*

- (1)  $f(A) \subset B$  ;
- (2) l'application  $d_f : M \times M \rightarrow N$  se factorise par un morphisme de  $\overline{R}$ -modules

$$\overline{d}_f : \overline{M} \otimes_{\overline{R}} \overline{M} \rightarrow B,$$

i.e.  $d_f(m, m') = i_B \overline{d}_f(\overline{m} \otimes \overline{m}')$  où  $i_B : B \hookrightarrow N$  ;

- (3) pour  $r \in R_e$ , l'application  $f_{(r)} : M \rightarrow N$  se factorise par un morphisme de  $\overline{R}$ -modules

$$\overline{f}_{(r)} : \Gamma_{\overline{R}}^2(M) \rightarrow B,$$

i.e.  $f_{(r)} = i_B \overline{f}_{(r)} \gamma_2$  où  $\Gamma_{\overline{R}}^2(M)$  est le terme homogène de degré 2 de l'algèbre des puissances divisées sur  $M$ , cf. [12] ou [9] où sa structure a été déterminée pour tout anneau commutatif  $\overline{R}$ .

**Proposition 3.2.21.** *Soit  $f : (M, A) \rightarrow (N, B)$  une application  $\underline{R}$ -CP-quadratique, l'application  $f : M \rightarrow N$  est  $\underline{R}$ -BHP-quadratique.*

*Preuve.* C'est immédiat: puisque  $B \subset Z_{\underline{R}}(N)$ , il centralise aussi  $f(M)$ .  $\square$

**Proposition 3.2.22.** *Inversement soit  $f : M \rightarrow N$  une application  $\underline{R}$ -BHP-quadratique. L'application  $f : (M, [M]) \rightarrow (\text{Im}_{\underline{R}} f, Z_{\underline{R}}(\text{Im}_{\underline{R}} f))$  est  $\underline{R}$ -CP-quadratique.*

*Preuve.* Remarquons d'abord que, par 2.2.18,  $(M, [M])$  et  $(\text{Im}_{\underline{R}} f, Z_{\underline{R}}(\text{Im}_{\underline{R}} f))$  sont des  $\underline{R}$ -CP-modules. Appliquant les corollaires 3.2.15 et 3.2.16 il suffit de montrer que  $d_f(M, [M]) = d_f([M], M) = f_{[x]}(M, [M]) = f_{[x]}([m], M) = 0$ , ce qui découle de 3.2.9, et que  $f([M]) \subseteq Z_{\underline{R}}(\text{Im}_{\underline{R}} f)$ . Or on a

$$f([m, m'] \cdot x, f(m'')) \cdot y = f([m, m'] \cdot x, m'') \cdot y - f_{[y]}([m, m'] \cdot x, m'').$$

Le premier terme de la différence est nul par MC7, et le second par la remarque 3.2.9.  $\square$

**Remarque 3.2.23.** Soit  $f$  une application  $\underline{R}$ -BHP-quadratique, on peut vérifier que  $d_{f_{(2)}}(m, m') = d_f(m, m') + d_f(m', m)$ . On en déduit que lorsque  $r = 2$ , la formule du lemme 3.2.17 se réduit à  $d_f(m', m) - d_f(m, m') = f([m', m]) - [f(m'), f(m)]$ , et on retrouve la formule (9) de [6].

**Exemple 3.2.24.** Lorsque la multiplication dans  $R_e$  n'est pas commutative, l'application  $R_e \rightarrow R_e$ ,  $r \mapsto r^2$  n'est pas toujours quadratique. Prenons par exemple l'anneau carré  $\underline{R} = \otimes_{\underline{R}} (2.4.5)$ . On peut vérifier que la condition de biadditivité du défaut additif (3.2.11d) est satisfaite pour les éléments  $(r, s)$ ,  $(r', s')$  et  $(r'', s'')$  de  $R_e$  si et seulement si  $2rr's'' + 2rs's'' + 2sr'r'' = 0$  c'est à dire si et seulement si  $R$  est de caractéristique 2. La condition (3.2.11f) pour les éléments  $m = m' = (1, 0)$ ,  $m'' = (r, 0)$  et  $x = (1, 0)$  donne  $r^2 + r = 0$ . Par conséquent l'application  $R_e \rightarrow R_e$ ,  $r \mapsto r^2$  est quadratique si et seulement si l'anneau  $R$  est booléen, mais alors  $R_e$  est lui même au anneau commutatif.

3.2.25. *Applications quadratiques entre modules sur un anneau commutatif classique.* Soient  $R$  un anneau commutatif classique,  $\underline{R} = (R \rightarrow 0 \rightarrow R)$  l'anneau carré associé et  $M$  et  $N$  deux BHP-modules (cf. 2.4.1) Une application  $f : M \rightarrow N$  est  $\underline{R}$ -BHP-quadratique si et seulement si elle est quadratique au sens de [9]: les conditions portant sur les défauts des crochets sont triviaux et la  $\underline{R}$ -bilinéarité se réduit à la  $R$ -bilinéarité.

De même une application  $\underline{R}$ -CP-quadratique  $f : (M, A) \rightarrow (N, B)$  est une application  $R$ -quadratique au sens de [9] vérifiant les conditions (1) et (4) de 3.2.3, c'est à dire  $R$ -quadratique au sens de [9], quadratique dans la catégorie  $\mathbf{CP}$  ([6]) et vérifiant la condition (4) de 3.2.3.

3.2.26. *Applications quadratiques entre modules sur l'anneau  $\mathbb{Z}_{\text{nil}}$ .* Soient  $\mathbb{Z}_{\text{nil}} = (\mathbb{Z}_e \xrightarrow{H} \mathbb{Z}_{ee} \xrightarrow{P} \mathbb{Z}_e)$  (2.4.2),  $M$  et  $N$  deux  $\mathbb{Z}_{\text{nil}}$ -BHP-modules, c'est à dire deux groupes nilpotents de classe  $\leq 2$ , et  $f : M \rightarrow N$  une application  $\mathbb{Z}_{\text{nil}}$ -BHP-quadratique. D'après 3.2.23 on a

$$f_{[1]}(m, m') = d_f(m, m') - d_f(m', m),$$

par conséquent les défauts des commutateurs sont biadditifs et  $\mathbb{Z}_{\text{nil}}$ -bilinéaires. On vérifie même que

$$f_{[1]}(m, [n, n']) = d_f(m, [n, n']) - d_f([n, n'], m) = 0,$$

en effet, puisque  $d_f$  est bilinéaire et d'image centrale:

$$\begin{aligned} d_f(m, [n, n']) &= d_f(m, n + n' - n - n') \\ &= d_f(m, n) + d_f(m, n') - d_f(m, n) - d_f(m, n') = 0. \end{aligned}$$

On a donc pour tout  $r \in \mathbb{Z}$ ,  $f_{[r]}(M, [M]) = f_{[r]}([M], M) = 0$ . Il en résulte qu'une application  $\mathbb{Z}_{\text{nil}}$ -BHP-quadratique  $f : M \rightarrow N$  est simplement une application quadratique entre groupes nilpotents de classe 2. En fait, toute application quadratique entre groupes  $f : G \rightarrow H$  se ramène à une application quadratique entre groupes nilpotents de classe 2, "à un morphisme entre les troisièmes termes des suites centrales descendantes près", comme suit : notons  $\gamma_3(G) = [G, [G, G]]$ ,  $\overline{G} = G/\gamma_3(G)$ , et  $\pi_G : G \rightarrow \overline{G}$  la projection canonique.

**Proposition 3.2.27.** *Soient  $G$  un groupe et  $q : G \rightarrow Q(G)$  son application quadratique universelle [6]. Alors la restriction  $q_3 : \gamma_3(G) \rightarrow Q(G)$  de  $q$  à  $\gamma_3(G)$  est un isomorphisme sur  $\gamma_3(Q(G))$ .*

*Preuve.* L'application  $q_3$  est un homomorphisme car  $d_q$  annule  $[G, G]$  en chaque variable. De plus, pour  $a, b, c \in G$ , on a  $q[a, [b, c]] = [qa, [qb, qc]]$ , cf. [10], donc  $\gamma_3(Q(G)) = q(\gamma_3(G))$ . Or  $q$  est injective car elle admet une retraction, à savoir, l'application  $\overline{1}_G : Q(G) \rightarrow G$  obtenue en appliquant la propriété universelle de  $q$  à l'application identique  $1_G$  de  $G$  qui est bien quadratique.  $\square$

**Corollaire 3.2.28.** *Toute application quadratique entre groupes  $f : G \rightarrow H$  induit un diagramme commutatif de homomorphismes de groupes dont les lignes sont exactes :*

$$\begin{array}{ccccccc} 0 & \longrightarrow & \gamma_3(G) & \xrightarrow{q_3} & Q(G) & \xrightarrow{Q(\pi_G)} & Q(\overline{G}) \longrightarrow 0 \\ & & \downarrow f_3 & & \downarrow \overline{f} & & \downarrow \overline{f} \\ 0 & \longrightarrow & \gamma_3(H) & \longrightarrow & H & \xrightarrow{\pi_H} & \overline{H} \longrightarrow 0 \end{array}$$

On remarque que  $\overline{f}$  correspond à une application quadratique de  $\overline{G}$  dans  $\overline{H}$ , donc entre groupes nilpotents de classe  $\leq 2$ .

*Preuve.* L'application  $\overline{f}$  est obtenue en appliquant la propriété universelle de  $q$  à  $f$ . D'après la proposition 3.2.27 il ne reste qu'à montrer que  $\text{Ker}(Q(\pi_G)) = \gamma_3(Q(G))$ . Rappelons de [6] que l'on a une suite exacte naturelle

$$0 \longrightarrow G^{ab} \otimes G^{ab} \xrightarrow{w_G} Q(G) \xrightarrow{\overline{1}_G} G \longrightarrow 0 .$$

Elle donne naissance au diagramme commutatif suivant dont les lignes sont exactes :

$$\begin{array}{ccccccc} G^{ab} \otimes G^{ab} & \xrightarrow{\pi_{Q(G)} w_G} & Q(G)/\gamma_3(Q(G)) & \xrightarrow{\overline{\pi_G 1_G}} & G/\gamma_3(G) & \longrightarrow & 0 \\ \downarrow \simeq & & \downarrow \overline{Q(\pi_G)} & & \parallel & & \\ 0 \longrightarrow & \overline{G}^{ab} \otimes \overline{G}^{ab} & \xrightarrow{w_{\overline{G}}} & Q(\overline{G}) & \xrightarrow{\overline{1}_{\overline{G}}} & \overline{G} & \longrightarrow 0 \end{array}$$

Notons que l'application  $\overline{Q(\pi_G)}$  est bien définie d'après la proposition 3.2.27. On en déduit que  $\pi_{Q(G)} w_G$  est injective et que  $\overline{Q(\pi_G)}$  est donc un isomorphisme.  $\square$

### 3.3. Module et catégorie des applications CP-quadratiques.

**Lemme 3.3.1.** Soit  $\underline{R}$  un anneau carré non nécessairement commutatif, soient  $A \subset M$  deux ensembles et  $\underline{N} = (N, B)$  un  $\underline{R}$ -CP-module quadratique. Désignons par  $\text{Appl}_{A/B}(M, N)$  l'ensemble des applications de  $M$  dans  $N$  telles que l'image de  $A$  soit contenue dans  $B$  et par  $\text{Appl}_{A/0}(M, B)$  le sous-ensemble formé des applications de  $M$  dans  $B$  telles que l'image de  $A$  soit  $0$ . Définissons point par point sur ces ensembles une addition, une action de  $R_e$  et une action de  $R_{ee}$ . Alors le couple

$$\text{Appl}(\underline{M}, \underline{N}) := (\text{Appl}_{A/B}(M, N), \text{Appl}_{A/0}(M, B))$$

est un  $\underline{R}$ -CP-module quadratique.

*Preuve.* Les applications  $f + g$ ,  $-f$ ,  $f \cdot r$  et  $[f, g] \cdot x$  sont définies par

$$\begin{aligned} (f + g)(m) &= f(m) + g(m) & (-f)(m) &= -(f(m)) \\ (f \cdot r)(m) &= (f(m)) \cdot r & ([f, g] \cdot x)(m) &= [f(m), g(m)] \cdot x. \end{aligned}$$

L'ensemble  $\text{Appl}_{A/B}(M, N)$  est clairement un sous-groupe du groupe des applications de  $M$  dans  $N$ , et  $\text{Appl}_{A/0}(M, B)$  en est un sous-groupe. Puisque les opérations sont définies point par point elles héritent de propriétés du couple  $(N, B)$ , ce qui montre la proposition.  $\square$

**Proposition 3.3.2.** Soient  $\underline{M} = (M, A)$  et  $\underline{N} = (N, B)$  deux  $\underline{R}$ -CP-modules quadratiques, et soit  $\underline{B} := (B, 0)$ . Le couple

$$\underline{R}\text{-Quad}(\underline{M}, \underline{N}) := (\underline{R}\text{-CP-quad}(\underline{M}, \underline{N}), \underline{R}\text{-CP-quad}(\underline{M}, \underline{B}))$$

muni des opérations naturelles est un  $\underline{R}$ -CP-module quadratique.

*Preuve.* Montrons que  $\underline{R}\text{-CP-quad}(\underline{M}, \underline{N})$  est un sous-groupe du groupe des applications de  $M$  dans  $N$ , c.a.d. que  $f + g$  et  $-f$  sont des applications  $\underline{R}$ -CP-quadratiques si  $f$  et  $g$  le sont. On a

$$(f + g)(a) = f(a) + g(a) \in B \quad (-f)(a) = -(f(a)) \in B.$$

$$\begin{aligned} d_{f+g}(m, m') &= (f + g)(m + m') - (f + g)(m') - (f + g)(m) \\ &= f(m + m') + g(m + m') - g(m') - f(m') - g(m) - f(m) \\ &= f(m + m') + d_g(m, m') + [f(m'), g(m)] - f(m') - f(m) \\ &= d_f(m, m') + d_g(m, m') + [f(m'), g(m)] \in B. \end{aligned}$$

En prenant  $g = -f$  on en déduit

$$d_{-f}(m, m') = -d_f(m, m') - [f(m), f(m')] \in B.$$

$$\begin{aligned} (f + g)_{(r)}(m) &= (f + g)(m \cdot r) - ((f + g)(m)) \cdot r \\ &= f(m \cdot r) + g(m \cdot r) - (f(m) + g(m)) \cdot r \\ &= f(m \cdot r) + g(m \cdot r) - g(m) \cdot r - f(m) \cdot r - [f(m), g(m)] \cdot H(r) \\ &= f(m \cdot r) + g_{(r)}(m) - f(m) \cdot r - [f(m), g(m)] \cdot H(r) \\ &= f_{(r)}(m) + g_{(r)}(m) - [f(m), g(m)] \cdot H(r) \in B. \end{aligned}$$

D'où l'on déduit

$$(-f)_{(r)}(m) = -f_{(r)}(m) - [f(m), f(m)] \cdot H(r) \in B.$$

Ce qui montre que les applications  $f + g$  et  $-f$  satisfont les conditions du (1) du corollaire 3.2.16. On en déduit aussi qu'elles satisfont les conditions (4) car  $f(A) \subset B \subset \underline{Z}_{\underline{R}}(N)$ .

Les calculs ci-dessus montrent que les défauts additifs de  $f + g$  et  $-f$  sont des combinaisons linéaires d'applications  $\underline{R}$ -bilinéaires de  $M$  dans  $B$ . D'après la proposition 3.2.8 elles sont aussi  $\underline{R}$ -bilinéaires, ce qui démontre la condition (2) du corollaire 3.2.16.

Montrons la condition (3). D'après les calculs ci-dessus, et en utilisant 3.2.14(b) on a:

$$\begin{aligned} (f + g)_{(r)}(m \cdot s) &= f_{(r)}(m \cdot s) + g_{(r)}(m \cdot s) - [f(m \cdot s), g(m \cdot s)] \cdot H(r) \\ &= f_{(r)}(m) \cdot s^2 + g_{(r)}(m) \cdot s^2 - ([f(m), g(m)] \cdot H(r)) \cdot s^2 \\ &= (f_{(r)}(m) + g_{(r)}(m) - [f(m), g(m)] \cdot H(r)) \cdot s^2 = ((f + g)_{(r)}(m)) \cdot s^2, \end{aligned}$$

la factorisation se faisant sans terme correctif puisque tous les termes sont dans  $B$ . On a également:

$$\begin{aligned} (-f)_{(r)}(m \cdot s) &= -f_{(r)}(m \cdot s) - [f(m \cdot s), f(m \cdot s)] \cdot H(r) \\ &= -f_{(r)}(m) \cdot s^2 - ([f(m), f(m)] \cdot H(r)) \cdot s^2 \\ &= ((-f)_{(r)}(m)) \cdot s^2. \end{aligned}$$

On a donc montré que  $(\underline{R}\text{-CP-quad}(\underline{M}, \underline{N}), \underline{R}\text{-CP-quad}(\underline{M}, \underline{B}))$  est un sous- $\underline{R}$ -CP-module quadratique de  $(\text{Appl}_{A/B}(M, N), \text{Appl}_{A/0}(M, B))$ .  $\square$

**Proposition 3.3.3.** *Soient  $f : (M, A) \rightarrow (N, B)$  et  $g : (N, B) \rightarrow (L, C)$  deux applications  $\underline{R}$ -CP-quadratiques. L'application composée  $g \circ f : (M, A) \rightarrow (L, C)$  est  $\underline{R}$ -CP-quadratique.*

*Preuve.* D'après [6] le défaut additif de  $g \circ f$  est donné par

$$(3.3.1) \quad d_{g \circ f}(m, m') = gd_f(m, m') + d_g(f(m), f(m')).$$

Donc  $d_{g \circ f}$  a son image dans  $C$ , annule  $A$  en chaque variable, et est  $\underline{R}$ -bilinéaire d'après les propositions 3.2.7 et 3.2.20.

Considérons les défauts scalaires  $(g \circ f)_{(r)}$ . On a

$$\begin{aligned} (g \circ f)_{(r)}(m) &= (g \circ f)(m \cdot r) - ((g \circ f)(m)) \cdot r = g(f(m \cdot r)) - (g(f(m))) \cdot r \\ &= g(f_{(r)}(m) + f(m) \cdot r) - (g(f(m))) \cdot r \\ &= g(f_{(r)}(m)) + g(f(m) \cdot r) - (g(f(m))) \cdot r + d_g(f_{(r)}(m), f(m) \cdot r) \end{aligned}$$

Le dernier terme est nul puisque son premier argument est dans  $B$ , donc

$$(3.3.2) \quad (g \circ f)_{(r)}(m) = g(f_{(r)}(m)) + g_{(r)}(f(m)).$$

Ce qui montre que  $(g \circ f)_{(r)}$  a son image dans  $C$  et s'annule si  $m$  est dans  $A$ . Enfin on a

$$\begin{aligned} (g \circ f)_{(r)}(m \cdot s) &= g(f_{(r)}(m \cdot s)) + g_{(r)}(f(m \cdot s)) \\ &= g(f_{(r)}(m) \cdot s^2) + g_{(r)}(f_{(s)}(m) + f(m) \cdot s) \\ &= g(f_{(r)}(m)) \cdot s^2 + g_{(s^2)}(f_{(r)}(m)) + g_{(r)}(f_{(s)}(m)) \\ &\quad + g_{(r)}(f(m) \cdot s) + d_{g_{(r)}}(f_{(s)}(m), f(m) \cdot s) \end{aligned}$$

Or le deuxième, le troisième et le cinquième terme sont nuls puisque  $f_{(r)}(m)$  et  $f_{(s)}(m)$  sont dans  $B$ , donc

$$\begin{aligned} (g \circ f)_{(r)}(m \cdot s) &= g(f_{(r)}(m)) \cdot s^2 + g_{(r)}(f(m) \cdot s) \\ &= g(f_{(r)}(m)) \cdot s^2 + g_{(r)}(f(m)) \cdot s^2 = (g \circ f)_{(r)}(m) \cdot s^2 \end{aligned}$$

Pour des usages futurs, déterminons enfin les défauts  $(g \circ f)_{[x]}$ . On a

$$\begin{aligned} (g \circ f)_{[x]}(m, m') &= (g \circ f)([m, m'] \cdot x) - [(g \circ f)(m), (g \circ f)(m')] \cdot x \\ &= g(f([m, m'] \cdot x)) - [g(f(m)), g(f(m'))] \cdot x \\ &= g(f_{[x]}(m, m')) + [f(m), f(m')] \cdot x - [g(f(m)), g(f(m'))] \cdot x \\ &= g(f_{[x]}(m, m')) + g([f(m), f(m')] \cdot x) - [g(f(m)), g(f(m'))] \cdot x \\ &\quad + d_g(f_{[x]}(m, m'), [f(m), f(m')] \cdot x) \end{aligned}$$

Le dernier terme est nul puisque son second argument est dans  $B$ , donc

$$(3.3.3) \quad (g \circ f)_{[x]}(m, m') = g(f_{[x]}(m, m')) + g_{[x]}(f(m), f(m')) \quad \square$$

**Proposition 3.3.4.** *Soient  $f : (M, A) \rightarrow (N, B)$  et  $g : (N, B) \rightarrow (L, C)$  deux applications  $\underline{R}$ -CP-quadratiques. L'application*

$$f^* : \underline{R}\text{-Quad}((N, B), (L, C)) \rightarrow \underline{R}\text{-Quad}((M, A), (L, C)) \quad g \mapsto g \circ f$$

*est  $\underline{R}$ -CP-linéaire. Et l'application*

$$g_* : \underline{R}\text{-Quad}((M, A), (N, B)) \rightarrow \underline{R}\text{-Quad}((M, A), (L, C)) \quad f \mapsto g \circ f$$

*est  $\underline{R}$ -CP-quadratique.*

*Preuve.* Montrons que  $f^*$  est additive. On a

$$\begin{aligned} (f^*(g_1 + g_2))(m) &= ((g_1 + g_2) \circ f)(m) = (g_1 + g_2)(f(m)) = g_1(f(m)) + g_2(f(m)) \\ &= (g_1 \circ f)(m) + (g_2 \circ f)(m) = (g_1 \circ f + g_2 \circ f)(m) = (f^*(g_1) + f^*(g_2))(m). \end{aligned}$$

Montrons que  $f^*$  est  $R_e$ -équivariante. On a

$$(f^*(g \cdot r))(m) = ((g \cdot r) \circ f)(m) = (g \cdot r)(f(m)) = g(f(m)) \cdot r = (f^*(g))(m) \cdot r = ((f^*(g)) \cdot r)(m).$$

Pour montrer que  $f^*$  est  $\underline{R}$ -linéaire il reste à montrer que  $f^*$  conserve les crochets. On a

$$\begin{aligned} (f^*([g_1, g_2] \cdot x))(m) &= ([g_1, g_2] \cdot x)(f(m)) = [g_1(f(m)), g_2(f(m))] \cdot x \\ &= [(f^*(g_1))(m), (f^*(g_2))(m)] \cdot x = ((f^*(g_1), f^*(g_2))) \cdot x(m). \end{aligned}$$

Montrons maintenant que  $g_*$  est  $\underline{R}$ -CP-quadratique. On a

$$\begin{aligned} (d_{g_*}(f_1, f_2))(m) &= (g_*(f_1 + f_2) - g_*(f_2) - g_*(f_1))(m) = (g(f_1 + f_2))(m) - (g(f_2))(m) - (g(f_1))(m) \\ &= g(f_1(m) + f_2(m)) - g(f_2(m)) - g(f_1(m)) \\ &= g(f_1(m)) + g(f_2(m)) + d_g(f_1(m), f_2(m)) - g(f_2(m)) - g(f_1(m)) \\ &= d_g(f_1(m), f_2(m)) \end{aligned}$$

Il en résulte immédiatement que  $d_{g_*}$  est  $\underline{R}$ -bilinéaire en les variables  $f_1$  et  $f_2$ , qu'elle s'annule si l'image de  $f_1$  ou celle de  $f_2$  est dans  $B$ , que son image est constituée d'applications de  $M$  dans  $C$ . Il reste à étudier les défauts scalaires.

$$(g_*)_{(r)}(f) = g_*(f \cdot r) - (g_*(f)) \cdot r = g \circ (f \cdot r) - (g \circ f) \cdot r.$$

$$(g_*)_{(r)}(f)(m) = g((f \cdot r)(m)) - ((g \circ f) \cdot r)(m) = g(f(m) \cdot r) - (g(f(m)) \cdot r) = g_{(r)}(f(m))$$

Ce qui assure que  $(g_*)_{(r)}$  s'annule si l'image de  $f$  est dans  $B$  et que l'image de  $(g_*)_{(r)}(f)$  est dans  $C$ . Enfin on a

$$\begin{aligned} (g_*)_{(r)}(f)(m \cdot s) &= g_{(r)}(f(m \cdot s)) = g_{(r)}(f(m) \cdot s + f_{(s)}(m)) \\ &= g_{(r)}(f(m) \cdot s) + g_{(r)}(f_{(s)}(m)) + d_{g_{(r)}}(f(m) \cdot s, f_{(s)}(m)). \end{aligned}$$

Dans cette somme on remarque que  $f_{(s)}(m) \in B$  d'après 3.2.3 (1). Il en résulte d'une part que le deuxième terme est nul d'après 3.2.3 (4), et que le dernier terme est aussi nul car  $g_{(r)}$  est quadratique d'après 3.2.19. On a donc

$$(3.3.4) \quad (g_*)_{(r)}(f)(m \cdot s) = g_{(r)}(f(m) \cdot s)$$

En prenant  $s = 1$  on obtient pour  $t \in R_e$

$$\begin{aligned} (g_*)_{(r)}(f \cdot t)(m) &= g_{(r)}((f \cdot t)(m)) = g_{(r)}(f(m) \cdot t) = g_{(r)}(f(m)) \cdot t^2 = (g_*)_{(r)}(f)(m) \cdot t^2 \\ &= (((g_*)_{(r)}(f)) \cdot t^2)(m) \end{aligned}$$

On a donc bien  $(g_*)_{(r)}(f \cdot t) = ((g_*)_{(r)}(f)) \cdot t^2$ . □

Les résultats de ce paragraphe se résument comme suit :

**Théorème 3.3.5.** *Il existe une catégorie  $\mathbf{CP}_{\underline{R}}$  dont les objets sont les  $\underline{R}$ -CP-modules quadratiques et dont les morphismes sont les applications  $\underline{R}$ -CP-quadratiques. Elle est préquadratique à droite au sens de [2], et admet un foncteur  $\text{Hom}$  interne.*

**Remarque 3.3.6.** Soit  $R$  un anneau commutatif. En prenant  $\underline{R} = (R \rightarrow 0 \rightarrow R)$ , on obtient une catégorie  $\mathbf{CP}_R = \mathbf{CP}_{\underline{R}}$  qui contient toute application  $R$ -quadratique  $f: M \rightarrow N$  entre  $R$ -modules  $M, N$  (au sens de [9]) comme morphisme, d'au moins deux façons canoniques :  $f: (M, 0) \rightarrow (N, N)$  et  $f: (M, \text{rad}_R(f)) \rightarrow (N, f(\text{rad}(f)) + D_f)$  sont des morphismes dans  $\mathbf{CP}_R$  où  $\text{rad}_R(f)$  désigne l'ensemble des éléments  $m$  de  $M$  tels que  $d_f(m, m') = 0$  pour tout  $m' \in M$  et  $f(mr) = f(m)r$  pour tout  $r \in R$ , et où  $D_f$  désigne le sous- $R$ -module de  $N$  engendré par les images de  $d_f$  et des  $f_{(r)}$ ,  $r \in R$ . Nous nous attendons à ce que l'étude des catégories  $\mathbf{CP}_{\underline{R}}$  fournisse alors une approche nouvelle des applications quadratiques entre modules (carrés et classiques) qui sera développée dans [7].

## REFERENCES

- [1] H.J. Baues, Quadratic homology, *Trans. Amer. Math. Soc.* **351** (1999), 429-457.
- [2] H.J. Baues, M. Hartl and T. Pirashvili, Quadratic categories and square rings, *J. Pure Appl. Algebra* **122** (1997), 1-40.
- [3] H.J. Baues, M. Jibladze and T. Pirashvili, Quadratic algebra of square groups, *Adv. Math.* **217** (3) (2008), 1236-1300.
- [4] H.J. Baues, M. Jibladze and T. Pirashvili, Third McLane cohomology, *Math. Proc. Cambr. Phil. Soc.* **144** (2008), 337-367.
- [5] H.J. Baues, F. Muro, *Toda brackets and cup-one squares for ring spectra*, *Comm. Algebra* 37 (2009), no. 1, 56-82.
- [6] M. Hartl, Quadratic maps between groups, *Georgian Math. J.* **16** (2009), n°1, 55-74.
- [7] H. Gaudier F. Goichot, M. Hartl, Square algebroids and their modules, en préparation.
- [8] H. Gaudier F. Goichot, M. Hartl, B. Loiseau and T. Pirashvili, Square algebra, en préparation.
- [9] H. Gaudier, M. Hartl, Quadratic maps between modules, *J. of Algebra*, **322** (2009), 1667-1688.
- [10] M. Jibladze and T. Pirashvili, Quadratic envelope of the category of class two nilpotent groups, *Georgian Math. J.* **13** (2006), Number 4, 693-722.
- [11] I. B. S. Passi, Polynomial maps on groups, *J. Algebra* **9** (1968), 121-151.
- [12] N. Roby, Lois polynômes et lois formelles en théorie des modules, *Ann. Scient. Éc. Norm. Sup.*, 3<sup>e</sup> série **80** (1963), 213-348.
- [13] R.B. Warfield, Jr., *Nilpotent groups*, LNM Vol. 513 (1976), Springer-Verlag, Berlin, Heidelberg, New York.

UNIV. LILLE NORD DE FRANCE, F-59000 LILLE, FRANCE  
UVHC,LAMAV ET FR CNRS 2956, F-59313 VALENCIENNES, FRANCE  
E-mail address: [manfred.hartl@univ-valenciennes.fr](mailto:manfred.hartl@univ-valenciennes.fr)  
E-mail address: [henri.gaudier@univ-valenciennes.fr](mailto:henri.gaudier@univ-valenciennes.fr)