

Approche variationnelle bayésienne pour la reconstruction tomographique

Hacheme AYASSO¹, Sofia FEKIH-SALEM^{1,2}, Ali MOHAMMAD-DJAFARI¹

¹Laboratoire des Signaux et Systèmes (L2S), UMR8506 (CNRS-SUPELEC-Univ Paris Sud),
3 rue Joliot-Curie, F-91192 Gif-sur-Yvette cedex, France

²CEA, DRT, LID, F-91191 Gif-sur-Yvette, France

ayasso@lss.supelec.fr, Sofia.FEKIH-SALEM@lss.supelec.fr
djafari@lss.supelec.fr

Résumé – Le cadre de l'inférence bayésienne fournit un outil important pour la résolution des problèmes inverses par la modélisation probabiliste de tous les paramètres inconnus. Cependant, à part des modèles *a priori* simples, le calcul bayésien de la solution optimale est complexe. Par conséquent, le coût de calcul augmente significativement rendant la solution bayésienne peu utilisable en pratique. Pour cela, deux classes de méthodes qui approchent la loi *a posteriori* ont été utilisées: analytique comme l'approximation de Laplace et numérique comme les méthodes d'échantillonnage MCMC.

Dans ce papier, nous appliquons l'inférence bayésienne dans un problème de reconstruction tomographique. Dans ce but, nous proposons un champ de Gauss-Markov pour la distribution d'intensité avec un champ de Potts Markov caché pour la classe du matériau. Le modèle de l'*a priori* est alors un modèle de Gauss-Markov-Potts hiérarchique. La plupart des paramètres du modèle sont inconnus et nous voulons les évaluer conjointement avec l'objet d'intérêt. En utilisant l'approche bayésienne variationnelle, la loi *a posteriori* jointe est approchée par un produit de lois marginales à partir desquelles les équations des paramètres de forme sont déduits. Nous présentons l'application de cette approche en reconstruction tomographique et nous discutons du coût de calcul et de la qualité de cette estimation.

Abstract – The framework of Bayesian inference provides an important tool for solving inverse problems by modeling the probability of all the unknown parameters. However, except for simple prior models, Bayesian computation of the optimal solution is complex. Therefore, the computational cost increases significantly making these methods not practical. Two classes of approximation methods have been used to approach the posterior distribution, analytical as Laplace approximation and numeric such as MCMC sampling.

In this paper, we apply the Bayesian inference method in X ray tomographic reconstruction problem. For this purpose, we propose a Gauss-Markov field with Potts region label model for the images. Most of model parameters are unknown and we wish to estimate them jointly with the object of interest. Using the variational Bayes framework, the joint posterior law is approximated by a product of marginal laws whose shaping parameter equations are derived. An application to tomographic reconstruction is presented with discussion of computational cost and quality of this estimation.

1 Introduction

Dans un problème de tomographie $2D$, nous essayons de reconstruire un objet inconnu à partir de plusieurs projections. La relation entre les données observées $g(s)$ et l'objet inconnu $f(r)$ est donnée par la transformé de Radon (TR). Cette relation, une fois discrétisée s'écrit sous la forme Le modèle direct se traduit par :

$$\mathbf{g} = \mathbf{H}\mathbf{f} + \epsilon \quad (1)$$

où $\mathbf{f} = (f(r_i), r_i \in \mathcal{R}, i = 1, \dots, N)$ est un vecteur contenant N valeurs des pixels de l'objet discrétisé, $\mathbf{g} = (g(s_i), i = 1, \dots, M)$ est un vecteur contenant M mesures, ϵ est un vecteur représentant l'erreur de modélisation et de mesure et \mathbf{H} est la matrice des coefficients de projection, appelée *matrice de projection*.

Sachant les données \mathbf{g} et le modèle \mathbf{H} , l'estimation de \mathbf{f} est

connue pour être un problème mal posé. De plus, les erreurs de mesure et le nombre limité de projections rendent le problème encore plus difficile. Par conséquent, pour réduire l'espace des solutions admissibles, nous devons utiliser une technique de régularisation. Deux classes de méthodes sont généralement utilisées, déterministe [1, 2] et probabiliste [3, 4, 5]. Dans ce papier, nous utilisons la seconde méthode par le biais d'une approche bayésienne. En utilisant la formule de Bayes, nous pouvons écrire la loi *a posteriori* $p(\mathbf{f}|\mathbf{g}; \mathcal{M})$ de l'objet inconnu comme suit,

$$p(\mathbf{f}|\mathbf{g}; \mathcal{M}) = \frac{p(\mathbf{g}|\mathbf{f}; \mathcal{M})p(\mathbf{f}|\mathcal{M})}{p(\mathbf{g}|\mathcal{M})} \quad (2)$$

où la probabilité $p(\mathbf{g}|\mathbf{f}; \mathcal{M})$ représente l'incertitude dans les données connaissant l'objet, $p(\mathbf{f}|\mathcal{M})$ traduit l'information *a priori* sur l'objet, et $p(\mathbf{g}|\mathcal{M})$ est l'evidence du modèle \mathcal{M} . Une fois l'expression de l'*a posteriori* $p(\mathbf{f}|\mathbf{g}; \mathcal{M})$ obtenue, nous

définissons la solution du problème soit par l'estimateur du maximum *a posteriori* MAP ou par celui de la moyenne *a posteriori* (MP). Pour des *a priori* réalistes, l'expression analytique de ces estimateurs peut être difficilement calculable. Ainsi, la loi *a posteriori* devrait être approchée pour obtenir, avec un coût de calcul raisonnable, la solution désirée. Deux classes de méthodes existent pour approcher la loi *a posteriori* : analytique telle que l'approche de Laplace, et numérique telle que les méthodes d'échantillonnage MCMC.

Récemment, une méthode d'approximation analytique de la loi *a posteriori*, l'approche variationnelle bayésienne (VB), ou l'apprentissage dans un ensemble, a été introduite pour une application en réseaux de neurones [6]. L'originalité de nos travaux est l'application de cette méthode pour un modèle de Gauss-Markov-Potts en reconstruction tomographique et dans un contexte d'estimation non-supervisée. Dans cette méthode, la loi *a posteriori* exacte est approchée par une loi séparable en minimisant la divergence de Kullback-Leibler entre ces deux lois. L'estimation des paramètres du modèle peut alors être obtenue analytiquement. En choisissant des lois *a priori* conjuguées, les paramètres des lois approchantes peuvent être déduits grâce à l'itération des équations qui les relie implicitement.

2 Formulation bayésienne

2.1 Modèle *a priori*

Dans de nombreuses applications en reconstruction tomographique, nous savons que l'objet d'intérêt est composé d'un nombre fini de matériaux homogènes. Par exemple, en imagerie médicale, l'organe étudié est composé de muscles et d'os ou de matière blanche et de matière grise. Une autre application est le contrôle non-destructif (CND) dans les applications industrielles, où les matières étudiées en général sont composées d'air et de métal ou d'air, de métal et d'un composite. Ce modèle *a priori* a déjà été utilisé dans plusieurs travaux pour plusieurs applications [4, 7, 8].

Par conséquent, nous associons, dans notre modèle *a priori*, à chaque pixel inconnu f une variable cachée discrète z . Cette variable cachée détermine la classe (matériau) à laquelle le pixel inconnu appartient. Puisque l'objet est composé d'un nombre limité de matériaux, ces variables prennent leurs valeurs dans l'ensemble $\{1, \dots, K\}$, où K est le nombre de matériaux. L'ensemble de ces variables est appelé champ caché. De plus, nous voudrions prendre en compte la dépendance entre les pixels d'une même classe donnée (compacité des régions homogènes), c'est-à-dire que tous les pixels appartenant à une classe donnée doivent être dans des régions compactes. Cette propriété peut être représentée par un *a priori* de Potts.

$$p(z|\gamma) \propto \exp \left[\sum_{\mathbf{r} \in \mathcal{R}} \Phi(z(\mathbf{r})) + \frac{1}{2} \gamma \sum_{\mathbf{r} \in \mathcal{R}} \sum_{\mathbf{r}' \in \mathcal{V}(\mathbf{r})} \delta(z(\mathbf{r}) - z(\mathbf{r}')) \right] \quad (3)$$

où $\Phi(z(\mathbf{r})) = \alpha_z(\mathbf{r})$ est l'énergie des cliques singletons, $\mathcal{V}(\mathbf{r})$ représente le voisinage de \mathbf{r} (les quatre plus proches voisins), et γ est le paramètre de Potts

La seconde clé de l'information *a priori* est l'homogénéité de chaque matériau k , ce qui peut être exprimé par une loi de Gauss. Ce choix fait intervenir la densité moyenne du matériau m_k (valeur moyenne de gaussienne) et la fluctuation autour de cette moyenne v_k (variance de gaussienne).

$$p(f(\mathbf{r})|z(\mathbf{r}) = k, m_k, v_k) = \mathcal{N}(m_k, v_k) \quad (4)$$

Concernant l'interaction spatiale entre les pixels de l'objet à l'intérieur de chaque classe, une solution simple est de les considérer mutuellement indépendants, ce qui se traduit par une loi *a priori* de mélange de gaussiennes indépendantes :

$$\text{MGI} : p(\mathbf{f}|\mathbf{z}, \mathbf{m}_z, \mathbf{v}_z) = \prod_{\mathbf{r} \in \mathcal{R}} \mathcal{N}(m_z(\mathbf{r}), v_z(\mathbf{r})) \quad (5)$$

Nous pouvons aussi introduire une corrélation plus importante dans la classe et ceci par le choix d'un modèle qui prend en compte la dépendance spatiale comme un mélange de Gauss-Markov :

$$\text{MGM} : p(\mathbf{f}|\mathbf{z}, \mathbf{m}_z, \mathbf{v}_z) = \prod_{\mathbf{r} \in \mathcal{R}} \mathcal{N}(\mu_z(\mathbf{r}), v_z(\mathbf{r})) \quad (6)$$

avec $m_z(\mathbf{r}) = m_k, \forall \mathbf{r} \in \mathcal{R}_k, v_z(\mathbf{r}) = v_k, \forall \mathbf{r} \in \mathcal{R}_k$, et \mathcal{R}_k est l'ensemble de pixel dans la classe k , avec $\mathcal{R} = \cup_k \mathcal{R}_k$.

$$\begin{cases} \mathcal{C}_z(\mathbf{r}) &= 1 - \prod_{\mathbf{r}' \in \mathcal{V}(\mathbf{r})} \delta(z(\mathbf{r}) - z(\mathbf{r}')) \\ \mu_z(\mathbf{r}') &= \begin{cases} m_k & \text{si } \mathcal{C}_z(\mathbf{r}) = 1 \\ \frac{1}{|\mathcal{V}(\mathbf{r}')|} \sum_{\mathbf{r}' \in \mathcal{V}(\mathbf{r}')} f(\mathbf{r}') & \text{si } \mathcal{C}_z(\mathbf{r}) = 0 \end{cases} \end{cases}$$

Les hyperparamètres de ce modèle sont également inconnus. Nous adoptons le même cadre bayésien pour leur estimation, et pour simplifier les calculs nous utilisons des lois *a priori* conjuguées :

$$p(m_k|m_0, v_0) = \mathcal{N}(m_0, v_0), \forall k \quad (7)$$

$$p(v_k^{-1}|a_0, b_0) = \mathcal{G}(a_0, b_0), \forall k \quad (8)$$

$$p(\boldsymbol{\alpha}|\alpha_0) = \mathcal{D}(\alpha_0, \dots, \alpha_0) \quad (9)$$

2.2 Estimation bayésienne jointe

Afin d'estimer conjointement ces paramètres d'une manière non-supervisée, nous commençons par écrire la loi *a posteriori* jointe $p(\mathbf{f}, \mathbf{z}, \boldsymbol{\theta}|\mathbf{g}; \mathcal{M})$ en utilisant la formule de Bayes

$$p(\mathbf{f}, \mathbf{z}, \boldsymbol{\theta}|\mathbf{g}; \mathcal{M}) = p(\mathbf{g}|\mathbf{f}, \mathbf{z}, \boldsymbol{\theta}; \mathcal{M})p(\mathbf{f}|\mathbf{z}, \boldsymbol{\theta}; \mathcal{M}) \times p(\mathbf{z}|\boldsymbol{\theta}; \mathcal{M})p(\boldsymbol{\theta}|\mathcal{M}) \quad (10)$$

Malheureusement, les expressions analytiques des estimateurs MAP et MP sont complexes et des calculs exacts sont peu réalisables. Par conséquent, seule des solutions sous-optimales peuvent être proposées. Cela peut être fait en approchant les lois *a posteriori* afin d'obtenir facilement les estimateurs. En général, les méthodes d'approximation *a posteriori* peuvent être classées en deux catégories principales : analytique et numérique.

Pour un problème de reconstruction tomographique une méthode numérique basée sur l'échantillonnage, comme MCMC, a été principalement mise en oeuvre [8]. Ce type de méthode est très coûteux en terme de temps de calcul et de difficulté technique. Pour cette raison, nous avons proposé l'approximation variationnelle bayésienne pour résoudre ce problème, où la distribution *a posteriori* conjointe est remplacée par une loi séparable.

3 Approche variationnelle bayésienne

En regardant l'expression de la loi *a posteriori*, nous remarquons que la principale source de difficulté dans l'obtention des formes analytiques des estimateurs est la dépendance entre les paramètres inconnus. Nous pouvons surmonter ce problème en approchant la loi *a posteriori* par une loi séparable.

Le principe de cette approximation vient de la physique statistique [10]. Récemment, cette approche a été adoptée par la communauté d'apprentissage et de réseaux de neurones [6]. De nombreux travaux l'ont appliquée depuis dans plusieurs domaines d'inférence bayésienne [11, 12].

La première étape de cette approche est le choix de la forme de factorisation de l'*a posteriori* approchant $q(\mathbf{f}, \mathbf{z}, \boldsymbol{\theta})$. Nous devons faire ce choix en préservant les fortes dépendances dans l'expression de l'*a posteriori*, comme la dépendance entre \mathbf{f} et les champs cachés \mathbf{z} et nous débarrasser des faibles dépendances entre les valeurs de l'objet \mathbf{f} et les hyperparamètres. Dans ce travail, nous avons choisi une forte forme de factorisation pour la loi *a posteriori*

$$q(\mathbf{f}, \mathbf{z}, \boldsymbol{\theta}) = q(v_\epsilon^{-1}) \prod_{j \in \mathcal{R}} q(f_j | z_j) \prod_{j \in \mathcal{R}} q(z_j) \prod_{i \in \{1 \dots K\}} q(m_i) q(v_i^{-1}) q(\alpha_i) \quad (11)$$

Ensuite, l'expression analytique de la loi approchante q est obtenue en minimisant la divergence de Kullback-Leibler.

$$\begin{aligned} \text{KL}(q : p) &= \int \int \sum q(\mathbf{f}, \mathbf{z}, \boldsymbol{\theta}) \ln \frac{q(\mathbf{f}, \mathbf{z}, \boldsymbol{\theta})}{p(\mathbf{f}, \mathbf{z}, \boldsymbol{\theta} | \mathbf{g})} d\mathbf{f} d\boldsymbol{\theta} \\ &= -\mathcal{F}(\mathbf{g}) + \ln(p(\mathbf{g} | \mathcal{M})) \end{aligned} \quad (12)$$

Dans le cas des *a priori* conjuguées, cette solution optimale qui minimise la distance précédente, peut être obtenue sous une forme analytique.

$$q(\mathbf{f} | \mathbf{z}) = \prod_{\mathbf{r}} \mathcal{N}(\tilde{\mu}_{\mathbf{z}}(\mathbf{r}), \tilde{v}_{\mathbf{z}}(\mathbf{r})) \quad (13)$$

$$q(\mathbf{z}) = \prod_{\mathbf{r}} q(z(\mathbf{r}) | \tilde{z}(\mathbf{r}'), \mathbf{r}' \in \mathcal{V}(\mathbf{r})) \quad (14)$$

$$q(v_\epsilon^{-1} | \tilde{\alpha}_e, \tilde{\beta}_e) = \mathcal{G}(\tilde{\alpha}_e, \tilde{\beta}_e) \quad (15)$$

$$q(m_k | \tilde{m}_k, \tilde{v}_k) = \mathcal{N}(\tilde{m}_k, \tilde{v}_k), \forall k \quad (16)$$

$$q(v_k^{-1} | \tilde{a}_k, \tilde{b}_k) = \mathcal{G}(\tilde{a}_k, \tilde{b}_k), \forall k \quad (17)$$

$$q(\boldsymbol{\alpha}) \propto \mathcal{D}(\tilde{\alpha}_1, \dots, \tilde{\alpha}_K) \quad (18)$$

où l'expression des paramètres des lois approchantes est donnée dans (app.A)

4 Application en Tomographie 2D

Dans cette partie, nous allons présenter les résultats de l'algorithme de reconstruction proposé dans le cas d'un problème de tomographie de transmission. Les paramètres liés à la configuration de la géométrie d'acquisition ainsi que les constantes *a priori* seront donnés. Nous allons étudier les performances de notre algorithme du point de vue temps de calcul et de qualité de la reconstruction.

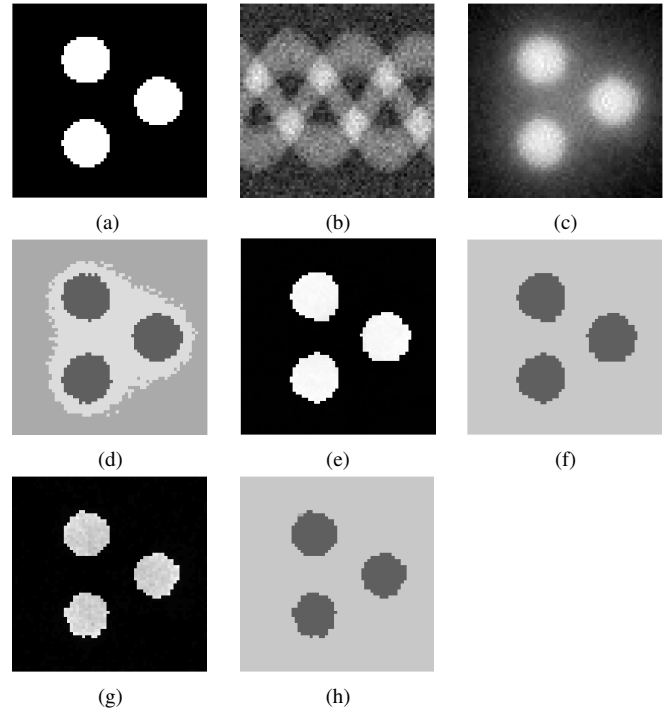


FIGURE 1 – Reconstruction des données synthétiques en utilisant notre méthode et une méthode MCMC : (a) Objet original (b) Donnée bruitée (c) Estimation initiale (d) Champs caché initial (e) VB MGI (f) MGI (champ caché) (g) MCMC (h) MCMC (champ caché)

TABLE 1 – Table récapitulatif de performance de méthode

	PSNR(dB)		Temps(sec)	
	VB MGI	MCMC	VB MGI	MCMC
-56	20	19	1.6	10.5

En Utilisant l'algorithme proposé, nous sommes capable de reconstruire l'objet inconnu avec 40 itérations (équivalent à 1,6 sec sur Intel Dual Core processeur 2,66 GHz). Par rapport à une méthode MCMC basée sur le même modèle *a priori*, la qualité de la reconstruction est très proche. Toutefois, c'est la vitesse

de convergence qui fait la différence entre les deux méthodes. En effet, il faut en général 1000 itérations pour que la méthode MCMC converge (pour les résultats montrés, nous avons juste attendu 100 itérations ≈ 10.5 sec). De plus, l'espace nécessaire pour stocker les variables de notre méthode est plus approprié en cas de dimension plus importante.

5 conclusion

Nous avons présenté dans cet article une approche bayésienne variationnelle pour la reconstruction d'image en tomographie X 2D. L'information a priori prise en compte est l'homogenité par région de l'objet à reconstruire. Cette information *a priori* a été modélisée avec deux modèles hiérarchiques qui prennent en compte la dépendance spatiale de l'objet. Ensuite, nous avons appliqué l'approche bayésienne variationnelle qui approche la loi *a posteriori* par une loi séparable, ce qui a permis d'obtenir un estimateur simple de l'objet inconnu et les autres paramètres du modèle. L'application de cette méthode de tomographie CT a donné des résultats très encourageants pour son extension en 3D.

A Paramètres des lois approchantes

Les paramètres de la loi de mélange de gaussiennes sont,

$$\begin{aligned} \tilde{\mu}_k^t(\mathbf{r}) &= \tilde{f}^{t-1}(\mathbf{r}) + \frac{\tilde{v}_k^{t-1}(\mathbf{r})}{\tilde{v}_k^{t-1}} \left(\tilde{\mu}_k^{*t-1}(\mathbf{r}) - \tilde{f}^{t-1}(\mathbf{r}) \right) \\ &+ \frac{\tilde{v}_k^{t-1}(\mathbf{r})}{\tilde{v}_k^{t-1}} \sum_{\mathbf{s}} H(\mathbf{s}, \mathbf{r}) (g(\mathbf{s}) - \tilde{g}^{t-1}(\mathbf{s})) \end{aligned} \quad (19)$$

$$\begin{cases} \tilde{C}_k^{t-1}(\mathbf{r}) = 1 & \text{cas : MGI} \\ \tilde{C}_k^{t-1}(\mathbf{r}) = 1 - \prod_{\mathbf{r}' \in \mathcal{V}(\mathbf{r})} \tilde{\zeta}_k(\mathbf{r}') & \text{cas : MGM} \end{cases} \quad (20)$$

$$\begin{aligned} \tilde{\mu}_k^{*t-1}(\mathbf{r}) &= \frac{1 - \tilde{C}_k^{t-1}(\mathbf{r})}{|\mathcal{V}(\mathbf{r})|} \sum_{\mathbf{r}' \in \mathcal{V}(\mathbf{r})} \tilde{\mu}_k^{t-1}(\mathbf{r}') \\ &+ \frac{\tilde{C}_k^{t-1}(\mathbf{r}) \tilde{m}_k^{t-1}}{\tilde{v}_k^{t-1}} \end{aligned} \quad (21)$$

$$\tilde{v}_k^{t-1}(\mathbf{r}) = \frac{\tilde{v}_k^{t-1}}{\left(1 + \frac{\tilde{v}_k^{t-1}}{\tilde{v}_k^{t-1}} \sum_{\mathbf{s}} H^2(\mathbf{s}, \mathbf{r}) \right)} \quad (22)$$

$$\tilde{v}_k^{t-1} = \langle v_k \rangle_{q^{t-1}} = (\tilde{a}_k^{t-1} \tilde{b}_k^{t-1})^{-1} \quad (23)$$

$$\tilde{f}^t(\mathbf{r}) = \sum_k \tilde{\zeta}_k^t(\mathbf{r}) \tilde{\mu}_k^t(\mathbf{r}) \quad (24)$$

$$\tilde{g}^t = H \tilde{f}^t \quad (25)$$

La loi approchant du champ caché est,

$$\begin{aligned} q(z(\mathbf{r}) = k) &= \tilde{\zeta}_k^t(\mathbf{r}) = \tilde{c}_k \tilde{d}_k(\mathbf{r}) \tilde{e}_k(\mathbf{r}) \\ \tilde{c}_k^t &= \exp \left[\Psi(\tilde{\alpha}_k^{t-1}) - \Psi \left(\sum_l \tilde{\alpha}_l^{t-1} \right) \right. \\ &\left. + \frac{1}{2} \left(\Psi(\tilde{b}_k^{t-1}) + \ln(\tilde{a}_k^{t-1}) \right) \right], \end{aligned} \quad (26)$$

$$\begin{aligned} \tilde{d}_k^t(\mathbf{r}) &= (\tilde{v}_k^t(\mathbf{r}))^{-\frac{1}{2}} \exp \left[- \frac{[\tilde{\mu}_k^t(\mathbf{r}) - \tilde{\mu}_k^{t-1}(\mathbf{r})]^2}{2\tilde{v}_k^t(\mathbf{r})} \right. \\ &\left. + \frac{(\tilde{\mu}_k^t(\mathbf{r}))^2}{2\tilde{v}_k^t(\mathbf{r})} - \frac{\langle (\mu_k(\mathbf{r}))^2 \rangle_{q^{t-1}}}{2\tilde{v}_k^{t-1}} \right], \end{aligned} \quad (27)$$

$$\tilde{e}_k^t(\mathbf{r}) = \exp \left(+ \frac{1}{2} \gamma \sum_{\mathbf{r}'} \tilde{\zeta}_k^{t-1}(\mathbf{r}') \right). \quad (28)$$

et les hyper-paramètres sont,

$$\tilde{\alpha}_e^t = \left[\alpha_{e0}^{-1} + \frac{1}{2} \sum_{\mathbf{r}} \langle (g(\mathbf{r}) - [\mathcal{H}\mathbf{f}](\mathbf{r}))^2 \rangle_{q^{t-1}} \right]^{-1} \quad (29)$$

$$\tilde{\beta}_e^t = \beta_{e0} + \frac{|\mathcal{R}|}{2}, \quad (30)$$

$$\begin{aligned} \tilde{m}_k^t &= \frac{\tilde{\sigma}_k^t}{\tilde{v}_k^{t-1}} \sum_{\mathbf{r}} \tilde{C}_k^{t-1}(\mathbf{r}) \tilde{\zeta}_k^{t-1}(\mathbf{r}) \tilde{\mu}_k^{t-1}(\mathbf{r}) \\ &+ \frac{\tilde{\sigma}_k^t}{\sigma_0} m_0, \end{aligned} \quad (31)$$

$$\tilde{\sigma}_k^t = \left(\sigma_0^{-1} + \frac{1}{\tilde{v}_k^{t-1}} \sum_{\mathbf{r}} \tilde{C}_k^{t-1}(\mathbf{r}) \tilde{\zeta}_k^{t-1}(\mathbf{r}) \right)^{-1}, \quad (32)$$

$$\tilde{a}_k^t = \left[a_0^{-1} + \frac{1}{2} \sum_{\mathbf{r}} \langle (f(\mathbf{r}) - \mu_k(\mathbf{r}))^2 \rangle_{q^{t-1}} \right]^{-1}, \quad (33)$$

$$\tilde{b}_k^t = b_0 + \frac{1}{2} \sum_{\mathbf{r}} \tilde{\zeta}_k^{t-1}(\mathbf{r}), \quad (34)$$

$$\tilde{\alpha}_k^t = \alpha_0 + \sum_{\mathbf{r}} \tilde{\zeta}_k^{t-1}(\mathbf{r}). \quad (35)$$

Références

- [1] A. H. Andersen, and A. C. Kak, *Ultrason Imaging* **6**, 81–94 (1984).
- [2] R. Gordon, R. Bender, and G. T. Herman, *J Theor Biol* **29**, 471–81 (1970).
- [3] C. Bouman, and K. Sauer, *Image Processing, IEEE Transactions on* **2**, 296–310 (1993).
- [4] S. Fekih-Salem, A. Vabre, and A. Mohammad-Djafari, in *MaxEnt*, 2007, vol. 954, pp. 372–380.
- [5] K. Lange, and R. Carson, *J Comput Assist Tomogr* **8**, 306–16 (1984).
- [6] D. J. C. MacKay, in *Proc. NIPS*, 1995.
- [7] O. Féron, and A. Mohammad-Djafari, *Journal of Electronic Imaging* **14**, 023014 (2005).
- [8] A. Mohammad-Djafari, and L. Robillard, in *EUSIPCO*, 2006.
- [9] R. A. Choudrey, Ph.D. thesis, University of Oxford (2002).
- [10] H. B. Callen, *Thermodynamics and an Introduction to Thermostatistics*, John Wiley and Sons (WIE), 1985.
- [11] V. Smidl, *The Variational Bayes Method in Signal Processing*, Springer, 2006.
- [12] M.J. Wainwright, *Graphical Models, Exponential Families, and Variational Inference.*, Now Publishers, 2008.
- [13] H. Ayasso, S. Fekih-Salem, and A. Mohammad-Djafari, *MaxEnt, AIP Conference Proceedings Volume 1073*, 2008, pp. 243-251.