

# Stratégie de calcul adaptatif pour des problèmes sous-structurés

A. Parret-Fréaud<sup>a</sup>, P. Gosselet<sup>a</sup> et C. Rey<sup>a</sup>

*a. LMT-Cachan*

*(ENS Cachan/CNRS/UPMC/PRES UniverSud Paris)*

*61 av. du Président Wilson, F-94230 Cachan, France*

*e-mail : {apf,gosselet,rey}@lmt.ens-cachan.fr*

*web : <http://www.lmt.ens-cachan.fr>*

## Résumé :

*Cette étude présente une stratégie dédiée à la vérification des calculs effectués dans un cadre sous-structuré : à la suite du calcul d'une solution éléments finis (EF) obtenue à l'aide des méthodes de décomposition de domaine utilisant des solveurs itératifs, l'erreur de discrétisation est estimée à travers la non-vérification de la relation de comportement par un champ de contrainte statiquement admissible post-processé. Une première technique de construction parallèle est ici présentée et commentée.*

## Abstract :

*This study presents a strategy to verify computations in a sub-structured context : after a finite element solution has been obtained from a domain decomposition based iterative solver, discretization error is estimated through non-verification of the constitutive relation for a statically admissible reconstructed stress field. A first parallel recovery technique is presented and assessed.*

**Mots clefs :** estimateurs d'erreur a posteriori, méthodes de décomposition de domaine sans recouvrement

## 1 Introduction

Aujourd'hui, la mise en place du *virtual testing* fait partie intégrante des objectifs du monde industriel. Il s'agit, à terme, de remplacer l'ensemble des études expérimentales aux coûts prohibitifs par des simulations numériques, y compris celles relatives à la certification de structures conséquentes provenant du génie civil ou de l'aéronautique (viaducs, avions...). Ainsi, l'une des principales exigences des méthodes numériques actuelles concerne la *vérification* des calculs, permettant de garantir que la solution obtenue lors de la résolution d'un problème physique est suffisamment proche de la solution originale et analytique du modèle physique continu. Cette branche de l'analyse numérique a été sujette à de nombreuses recherches durant les deux dernières décennies.

D'autre part, une autre exigence fondamentale des nouvelles méthodes numériques concerne leur capacité à résoudre rapidement des problèmes de plus en plus complexes. Cette complexité croissante provient aussi bien de celle des modèles physiques sous-jacents (non-linéarité fréquente) que par le nombre de degrés de liberté impliqués. L'une des réponses les plus classiques à ce type d'exigence réside dans l'utilisation des méthodes de décomposition de domaine (DD), qui permettent de tirer avantageusement partie des architectures massivement parallèles des calculateurs et grilles actuels. Notons au passage la prépondérance des méthodes de décomposition de domaine sans recouvrement dans le domaine de l'ingénierie des structures, qui feront ainsi l'objet de nos développements futurs. Notre démarche s'intègre directement au sein des deux aspects évoqués ci-dessus. Elle a pour objectif la mise en place d'une procédure intégrée de calcul adaptatif permettant la résolution de problèmes mécaniques complexes tout en garantissant une exigence de précision initiale donnée. Nos développements reposent sur l'utilisation conjointe d'une vision générique des méthodes de décomposition de domaine [1] et de l'erreur en relation de comportement [2], afin de quantifier la qualité de la solution finale obtenue et d'avoir recours, si nécessaire, à des procédures d'adaptativité.

Dans cet article, nous nous attacherons au calcul de la contribution élémentaire à l'erreur globale dans un cadre entièrement parallèle. Tout d'abord, nous rappellerons quelques notions fondamentales relatives aux décompositions de domaine sans recouvrement et à la mise en œuvre de l'erreur en relation de comportement dans le cadre de l'élasticité mécanique. Nous présenterons par la suite une stratégie de construction des contributions élémentaires à l'erreur adaptée au cadre des méthodes de

décomposition de domaine utilisées. Enfin, nous donnerons quelques conclusions et objectifs sur la base de premiers résultats.

## 2 Formulation et notions fondamentales

Avant toute chose, notons que nos techniques se rattachent à l'étude statique d'une structure (occupant le domaine  $\Omega$ ) à comportement élastique linéaire, sous les hypothèses de la théorie des petites perturbations. Le problème associé est ensuite résolu à l'aide d'une discrétisation éléments finis.

### 2.1 Méthodes de décomposition de domaine sans recouvrement

Le point de départ de ces méthodes réside dans la décomposition du domaine  $\Omega$  en un ensemble de sous-domaines ( $\Omega^{(s)}$ ). Dans la suite, notons avec l'exposant ( $s$ ) les différentes variables associées au sous-domaine  $\Omega^{(s)}$ . En effectuant une décomposition conforme de la structure initiale  $\Omega$ , qui impose une correspondance noeud à noeud des interfaces entre sous-domaines, l'équation d'équilibre  $Ku = f$  ( $K$  désignant la matrice de raideur,  $u$  et  $f$  les déplacements et efforts nodaux, respectivement) peut être réécrite de manière sous-structurée à l'aide du système d'équations ci-dessous :

$$\begin{aligned} K^{(s)}u^{(s)} &= f^{(s)} + t^{(s)T}\lambda_b^{(s)} \\ \sum_s \underline{\mathbb{A}}^{(s)}u_b^{(s)} &= 0 \\ \sum_s \mathbb{A}^{(s)}\lambda_b^{(s)} &= 0 \end{aligned} \quad (1)$$

La première équation de (1) correspond à l'équilibre mécanique de la sous-structure ( $\Omega^{(s)}$ ),  $\lambda_b^{(s)}$  désignant la réaction aux noeuds provenant de l'action des sous-domaines voisins et  $t^{(s)}$  l'opérateur de trace (qui associe à l'ensemble des noeuds de  $\Omega^{(s)}$  le sous-ensemble des noeuds frontière du sous-domaine considéré). La deuxième équation de (1) impose la continuité des déplacements entre les sous-structures ( $u_b^{(s)} = t^{(s)}u^{(s)}$  étant le déplacement aux frontières, et  $\underline{\mathbb{A}}^{(s)}$  un opérateur d'assemblage (booléen signé) des variables d'interfaces similaire à celui de la méthode FETI [3, 4]). Enfin, la troisième équation de (1) impose l'équilibre des inter-efforts (selon le principe de l'action et de la réaction) entre sous-domaines (où  $\mathbb{A}^{(s)}$  désigne un opérateur d'assemblage (booléen) similaire à celui de la méthode BDD [5]).

Quelle que soit la stratégie, généralement itérative, utilisée pour la résolution du système condensé (1), les champs d'interfaces  $u_b^{(s)}$  et  $\lambda_b^{(s)}$  obtenus à convergence satisfont la continuité aux interfaces et l'équilibre entre les sous-structures, respectivement.

### 2.2 Erreur en relation de comportement

Il existe de nombreuses techniques permettant d'aborder la thématique de l'estimation d'erreur a posteriori [2]. Les estimateurs associés sont généralement classifiés en trois principales catégories, suivant qu'ils reposent sur des techniques de projection de flux [6], l'utilisation de résidus sur l'équation d'équilibre [7] ou sur la relation de comportement [8].

Au cours de la présente étude, nous avons choisi d'utiliser un estimateur reposant sur l'erreur en relation de comportement, dont nous rappelons ci-après les principes fondamentaux. Pour cela, prenons comme point de départ l'écriture de la formulation continue des problèmes mécaniques classiques (2) en terme d'admissibilité cinématique (2, CA), d'admissibilité statique (2, SA) (à travers l'écriture du principe des puissances virtuelles) et de relation de comportement (2, RdC).

$$\begin{aligned} u \text{ CA} : u|_{\partial_1\Omega} &= u_d \\ \sigma \text{ SA} : \int_{\Omega} \sigma : \varepsilon(u^*)d\Omega &= \int_{\Omega} f_d \cdot u^*d\Omega + \int_{\partial_2\Omega} F_d \cdot u^*dS, \forall u^* \text{ KA}_0 \\ \text{RdC} : \sigma &= \mathbf{K} : \varepsilon(u) \end{aligned} \quad (2)$$

Ci-dessus,  $\sigma$  désigne le tenseur des contraintes de Cauchy,  $\varepsilon(u)$  la partie symétrique du gradient du champ de déplacement  $u$ ,  $u_d$  le déplacement imposé sur la partie  $\partial_1\Omega$  de la frontière du domaine (condition de Dirichlet),  $F_d$  l'effort surfacique imposé sur la partie  $\partial_2\Omega$  de la frontière (condition de Neumann) et  $f_d$  l'effort volumique imposé au sein du domaine  $\Omega$ .

Généralement, un couple de solutions ( $u_h, \sigma_h$ ) obtenu à l'aide de la méthode des éléments finis en déplacement satisfait (2, CA&RdC) mais non (2, SA). En d'autres termes, le champ  $\sigma_h$  obtenu ne vérifie

pas exactement l'équilibre mécanique au sein de la structure, contrairement au champ de déplacements  $u_h$  qui est pour sa part cinématiquement admissible dans nombre de cas de figures. Ainsi, le point de départ des estimateurs d'erreur en relation de comportement est de mettre en défaut, non pas l'équation d'admissibilité statique, mais la relation de comportement qui est, généralement, l'équation la moins fiable car déterminée expérimentalement. Pour cela, il est nécessaire de construire un nouveau couple de solutions  $(\hat{u}_h, \hat{\sigma}_h)$  à partir de la donnée de  $(u_h, \sigma_h)$  et vérifiant (2, CA&SA). Par la suite, l'erreur en relation de comportement est calculée élément par élément en intégrant le résidu sur la relation de comportement au sens de la norme énergétique comme indiquée dans l'équation (3).

$$\begin{aligned} e_{RdC}(\hat{u}_h, \hat{\sigma}_h) &= \|\hat{\sigma}_h - \mathbf{K} : \varepsilon(\hat{u}_h)\|_{\sigma, \Omega} \\ \text{avec } \|x\|_{\sigma, \Omega}^2 &= \int_{\Omega} (x : \mathbf{K}^{-1} : x) d\Omega \end{aligned} \quad (3)$$

Un résultat important de cet estimateur, provenant de l'application du théorème de *Prager-Synge*, réside dans son caractère *garanti* [2]. En effet, quel que soit le champ  $(\hat{u}_h, \hat{\sigma}_h)$  construit, la mesure de l'erreur  $e_{RdC}(\hat{u}_h, \hat{\sigma}_h)$  peut s'exprimer comme suit :

$$e_{RdC}^2 = \|\sigma_{ex} - \hat{\sigma}_h\|_{\sigma, \Omega}^2 + \|\underline{u}_{ex} - \underline{u}_h\|_{u, \Omega}^2 \quad (4)$$

Par la suite, nous déduisons de (4) les inégalités suivantes, traduisant le caractère garanti de  $e_{RdC}$  :

$$\begin{aligned} \|\underline{u}_{ex} - \underline{u}_h\|_{u, \Omega} &\leq e_{RdC} \\ \|\underline{\sigma}_{ex} - \underline{\hat{\sigma}}_h\|_{\underline{\sigma}, \Omega} &\leq e_{RdC} \\ \text{avec } \|x\|_{u, \Omega}^2 &= \int_{\Omega} (x : \mathbf{K} : x) d\Omega \end{aligned} \quad (5)$$

### 3 Construction de champs SA en cadre sous-structuré

Comme mentionné précédemment, la majorité des formulations éléments finis permettent d'obtenir un champ de déplacement  $u_h$  satisfaisant les conditions d'admissibilité cinématique (2, CA), si bien qu'il est possible de choisir  $\hat{u}_h$  égal à  $u_h$  en tout point. En revanche, ceci est rarement le cas pour le champ de contraintes  $\sigma_h$ , si bien que le champ  $\hat{\sigma}_h$  satisfaisant l'admissibilité statique (2, SA) doit souvent être calculé à partir de  $\sigma_h$  par des procédures dédiées. Cette démarche peut être menée à bien à l'aide d'une procédure de construction systématique en deux étapes (illustrée fig. 1) [9, 10] consistant :

- en premier lieu : à construire un ensemble de densités d'efforts équilibrées  $\hat{F}$  aux frontières de chaque élément du maillage, à partir de la donnée de  $\sigma_h$  et à travers un ensemble de calculs locaux en chaque noeud du maillage sur des "patches" d'éléments centrés sur ces mêmes noeuds ;
- en second lieu : à calculer  $\hat{\sigma}_h$  à travers la résolution locale, élément par élément, d'un problème mécanique aux conditions aux limites de Neumann imposées par la donnée de  $\hat{F}$  aux frontières des éléments, et en utilisant lors des calculs, autant que possible, l'expression de solutions analytiques ou bien une base d'approximation enrichie sur chaque élément ([11] recommande une interpolation  $p+3$ ).

L'obtention du champ global  $\hat{\sigma}_h$  sur l'ensemble du domaine consiste ensuite en un assemblage des différents champs obtenus sur chacun des éléments.

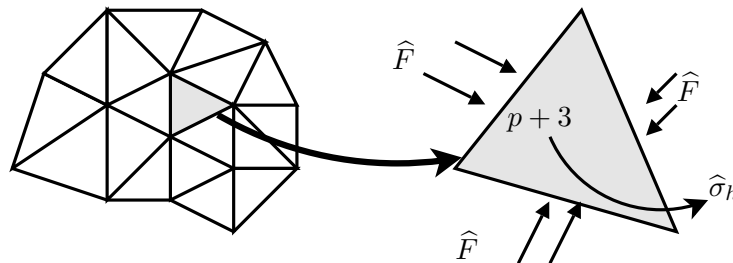


FIG. 1 – Problèmes "patch" locaux

De par son caractère local, la seconde étape peut être facilement mise en œuvre dans un cadre sous-structuré. Malheureusement, il n'en est pas de même de la première étape qui implique, pour chaque noeud, des calculs menés sur un patch d'éléments (cf. fig. 2). Dans un contexte sous-structuré, des difficultés apparaissent au niveau des noeuds d'interface pour lesquels les patches d'éléments se

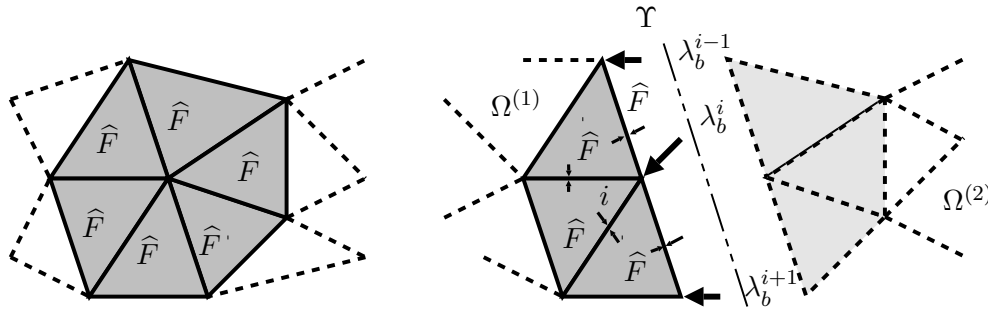


FIG. 2 – Problèmes “patch” aux interfaces

retrouvent partagés entre plusieurs sous-domaines distincts. Ainsi, la mise en oeuvre systématique de cette méthode sur chaque sous-domaine nécessiterait de recourir à l’utilisation de communications entre sous-domaines pour les calculs associés aux noeuds d’interface.

Si un tel échange de données ne paraît pas exagérément couteux et pénalisant du point de vue de l’extensibilité de la méthode, nous étudierons par la suite des constructions alternatives entièrement parallèles. Comme rappelé précédemment, toute méthode de résolution par décomposition de domaine donne, à convergence, un champ de déplacement  $u_b^{(s)}$  continu et un champ nodal d’inter-efforts  $\lambda_b^{(s)}$  équilibré. Afin de découpler la construction des densités d’efforts équilibrés  $\hat{F}$  sur les noeuds d’interface, nous proposons de construire une densité surfacique approximée d’inter-efforts aux interfaces  $\tilde{\lambda}_b$  à partir de la donnée des réactions aux noeuds  $\lambda_b$ . Se pose alors la question du choix de la base de représentation de  $\tilde{\lambda}_b$ . En première approximation, nous avons fait le choix de représenter  $\tilde{\lambda}_b$  sur la base constituée par la trace sur l’interface des fonctions de formes éléments finis.  $\tilde{\lambda}_b$  est alors construit comme suit :

$$\tilde{\lambda}_b = \sum_i \tilde{\lambda}_{bi} \varphi_i \quad \text{with } \tilde{\lambda}_b \text{ verifying } \lambda_{bi} = \int_{\Gamma} \tilde{\lambda}_b \varphi_i d\tau \quad (6)$$

### 4 Résultats et conclusion

La stratégie présentée a été implantée dans le code de calcul ZeBuLoN [12]. Plusieurs calculs ont ensuite été conduits sur une  $\Gamma$ -structure académique dont la carte des contributions à l’erreur globale est représentée fig. 3.

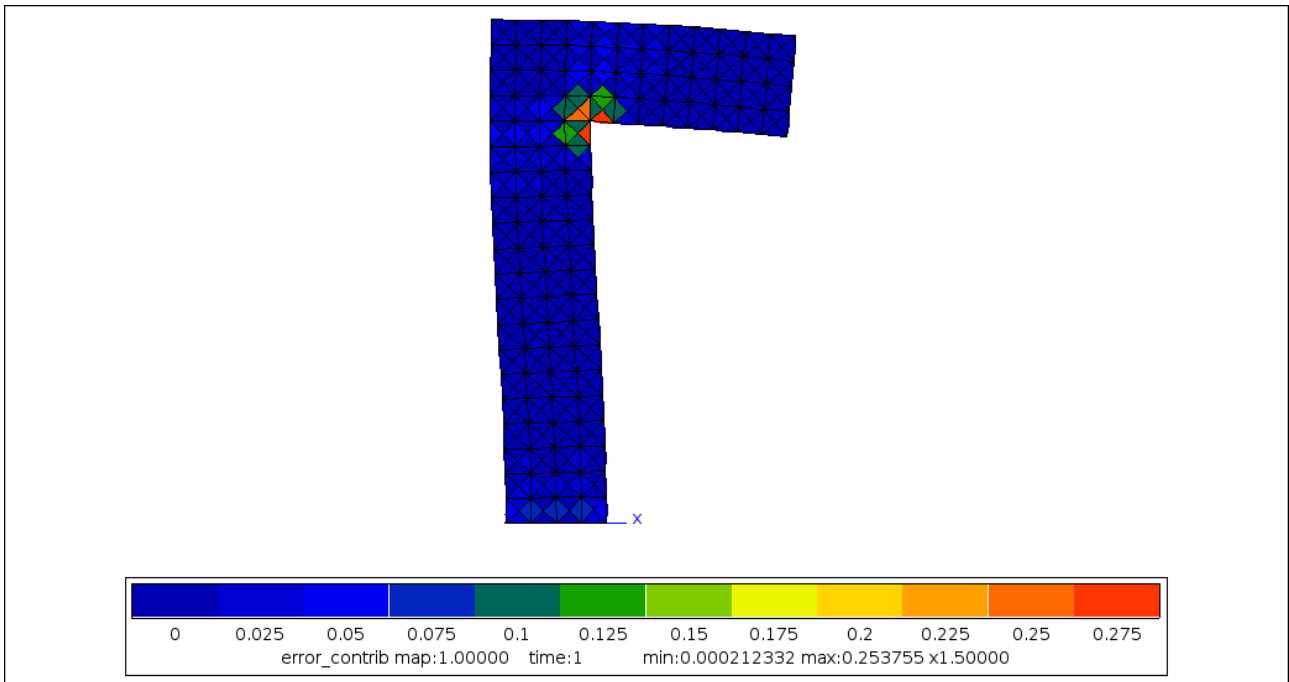


FIG. 3 – Contributions à l’erreur globale pour le problème séquentiel

Pour une taille de maille fixée, l'erreur globale a été calculée pour le problème séquentiel initial ainsi que pour différents cas de décomposition obtenues par découpage automatique, en faisant varier le nombre de sous-structures (cf. Tab. 1).

# sous-domaines	1	2	3	5	8	9
$e_{RdC}$ (%)	9.40	9.31	13.59	9.23	9.32	8.77

TAB. 1 – Erreur globale pour différents cas de sous-structuration

Ces premiers résultats permettent de constater que la stratégie proposée permet, dans la plupart des cas, d'obtenir des champs SA satisfaisant. Dans certains cas de sous-structuration, l'erreur calculée est même inférieure par rapport à celle obtenue sur le problème séquentiel par la stratégie initiale. Cependant, le calcul sous-structuré sur 3 sous-domaines fait figure d'exception : en effet, le découpage automatique a conduit à la création d'une interface passant au niveau d'un point de singularité du champ de contrainte et a ainsi mis en défaut le choix d'une approximation linéaire des densité d'inter-efforts (cf fig. 4).

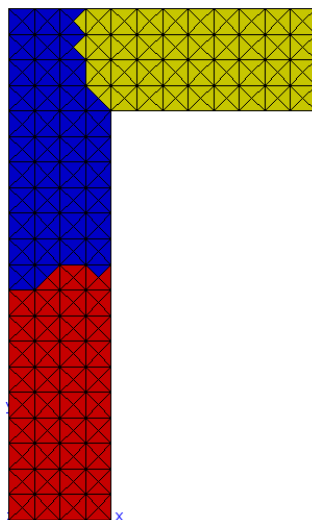


FIG. 4 – Découpage automatique en 3 sous-domaines

Ce problème sera étudié dans de futurs travaux, afin d'aboutir à une stratégie permettant un calcul entièrement parallèle de l'erreur en relation de comportement. Notamment, pour garantir une estimation satisfaisante de l'erreur, la méthode ne devra pas nécessiter de connaissance a priori sur la forme du champ de contraintes dans la conduite du découpage en sous-domaines de la structure initiale. Les résultats les plus récents seront montrés lors de la conférence.

## Références

- [1] Gosselet P. and Rey C. Non-overlapping domain decomposition methods in structural mechanics. *Arch. Comput. Meth. Engng.*, 13(4), 515–572, 2006.
- [2] Ladevèze P. and Pelle J. *Mastering calculations in linear and nonlinear mechanics*. Springer, 2004.
- [3] Farhat C. A method of finite element tearing and interconnecting and its parallel solution algorithm. *Intl. J. Num. Meth. Eng.*, 07 1991.
- [4] Farhat C. and Roux F. The dual schur complement method with well-posed local neumann problems. *Contemporary Mathematics*, 157, 193–201, 1994.
- [5] Mandel J. Balancing domain decomposition. *Comm. Appl. Num. Meth. Engrg.*, 1993.
- [6] Zienkiewicz O. and Zhu J. A simple error estimate and adaptative procedure for practical engineering analysis. *Int. J. for Num. Meth. in Engrg.*, 24, 337–357, 1987.
- [7] Babuska I. and Rheinboldt W. Error estimates for adaptative finite element computation. *SIAM J. Num. Anal.*, 15(4), 736–754, 1978.
- [8] Ladevèze P. *Comparaison de modèles de milieux continus*. Thèse de doctorat d'état, Université Pierre et Marie Curie, 75005 Paris, France, 1975.
- [9] Ladevèze P. and Leguillon D. Error estimate procedure in the finite element method and application. *Proc GAMNI*, Dunod, 1981.

- [10] Ladevèze P. and Rougeot P. New advances on a posteriori error on constitutive relation in f.e. analysis. *Comp. Meth. Appl. Mech. Eng.*, 150, 239–249, 1997.
- [11] Babuska I., Strouboulis T., Upadhyay C., Gangaraj S., and Copps K. Validation of *a posteriori* error estimators by numerical approach. *Int. J. Num. Meth. Engng.*, 37, 1073–1123, 1994.
- [12] Northwest Numerics. Z-set developer manual, 2001.