
UNE APPROCHE SÉQUENTIELLE DE L'HYPOTHÈSE DE RIEMANN GÉNÉRALISÉE

par

Anne de Roton

Résumé. — Une généralisation du théorème de Beurling et Nyman établit que l'hypothèse de Riemann pour une fonction F de la classe de Selberg est équivalente à l'appartenance de la fonction χ , indicatrice de l'intervalle $]0, 1[$ à l'adhérence d'un sous-espace de fonctions \mathcal{B}_F dans l'espace $L^2(0, +\infty)$. Dans cet article, l'auteur étend aux fonctions F de la classe de Selberg un résultat de Báez-Duarte en donnant une construction d'une suite de \mathcal{B}_F qui, sous l'hypothèse de Riemann pour la fonction F , converge dans $L^2(0, +\infty)$ vers la fonction χ .

Abstract (An approach of generalised Riemann hypothesis through sequences)

A generalisation of the Beurling and Nyman criterion implies that the Riemann hypothesis for a function F in the Selberg class is equivalent to the statement that χ , the characteristic function of $(0, 1)$ belongs to the adherence in $L^2(0, +\infty)$ of a subspace \mathcal{B}_F . In this article, the author generalises a result of Báez-Duarte to the Selberg class and gives a construction of some sequence of \mathcal{B}_F converging to χ in $L^2(0, +\infty)$ under Riemann hypothesis for F .

1. Présentation des résultats; historique

Le théorème de Beurling et Nyman (cf [Be] et [BS1] pour une analyse) établit une correspondance entre des régions sans zéro de la fonction ζ de Riemann et la densité de l'espace de fonctions $\tilde{\mathcal{B}}$ suivant

$$\tilde{\mathcal{B}} = \left\{ t \mapsto \sum_{k=1}^n c_k \left\{ \frac{\theta_k}{t} \right\}, n \in \mathbb{N}, c_k \in \mathbb{C}, 0 < \theta_k \leq 1, \sum_{k=1}^n c_k \theta_k = 0 \right\},$$

où $\{.\}$ représente la fonction partie fractionnaire.

Il établit en particulier que pour tout nombre réel $p > 1$, l'absence de zéro de ζ dans le demi-plan $\Re(s) > 1/p$ est équivalente à l'appartenance de la fonction χ indicatrice de l'intervalle $]0, 1[$ à l'adhérence de $\tilde{\mathcal{B}}$ dans $L^p(0, 1)$. Bercovici et Foias étendent dans [BF] ce résultat au cas $p = 1$.

L'étude des régions sans zéro de la fonction ζ de Riemann est donc liée à la recherche de suites $(f_n)_n$ de fonctions de $\tilde{\mathcal{B}}$ telles que la norme $\|\chi - f_n\|_p$ tende vers 0. La formule $\sum_{k=1}^{\infty} \mu(k)\{1/kt\} = -1$ pour $0 < t \leq 1$, issue de formules classiques sur la fonction μ de Möbius, conduit naturellement à considérer les sommes partielles

$$S_n(t) = - \sum_{k=1}^n \mu(k)\{1/kt\}.$$

Dans [BD1], Báez-Duarte modifie les fonctions $(S_n)_n$ pour obtenir des fonctions B_n de $\tilde{\mathcal{B}}$ qui, sous l'hypothèse de non-annulation de ζ dans le demi-plan $\{Res > 1/p\}$, convergent vers χ dans l'espace $L^r(0,1)$ pour tout réel r vérifiant $1 < r < 2 - 1/p$. Balazard et Saias montrent dans [BS1] que cette hypothèse de non-annulation est en fait équivalente à la convergence de la suite de fonctions $(B_n)_n$ vers χ dans $L^r(0,1)$ pour tout r vérifiant $0 < r < p$.

Nous nous intéressons dans cet article au cas $p = 2$, essentiellement dû à Nyman et détaillé dans [BS2], du théorème de Beurling et Nyman qui fournit, par symétrie des zéros de ζ , un critère d'analyse fonctionnelle pour l'hypothèse de Riemann (HR).

Notant \mathcal{B} l'ensemble des fonctions de la forme

$$f(t) = \sum_{k=1}^n c_k \left\{ \frac{\theta_k}{t} \right\}, \text{ avec } n \in \mathbb{N}, c_k \in \mathbb{C}, 0 < \theta_k \leq 1,$$

les auteurs de [BDBLS] reformulent ce critère dans $L^2(0, +\infty)$: HR est équivalente à l'appartenance de la fonction χ à l'adhérence de \mathcal{B} dans $L^2(0, +\infty)$. Báez-Duarte démontre dans l'article [BD2] que, même sous HR, les suites naturelles $(B_n)_n$ et $(S_n)_n$ divergent dans $L^2(0, +\infty)$. En lissant la suite $(S_n)_n$, il parvient néanmoins dans [BD3] à construire une suite $(F_n)_n$ de \mathcal{B} qui converge vers χ dans $L^2(0, +\infty)$. La construction explicite de cette suite, qui garantit une certaine vitesse de convergence, est due à Balazard. Báez-Duarte démontre ainsi que l'hypothèse de Riemann est équivalente à l'assertion : $\chi \in \overline{\mathcal{B}^{nat}}$ où \mathcal{B}^{nat} désigne le sous-espace des fonctions de \mathcal{B} pour lesquelles les θ_k sont des inverses d'entiers positifs.

Nous avons étendu dans [dR2] le théorème de Beurling et Nyman dans le cas $p = 2$ aux fonctions de la classe de Selberg. Nous allons dans cet article étendre le résultat de Báez-Duarte et Balazard, présenté dans [BD3] à cette même classe de fonctions.

Commençons par rappeler la définition de la classe de Selberg S , introduite en 1989 dans [S], et qui est conjecturalement l'ensemble des fonctions L de formes auto-morphes.

Définition 1. — *On dit qu'une fonction F appartient à la classe de Selberg S si F vérifie les conditions suivantes :*

1. Pour $\Re s > 1$, $F(s) = \sum_{n=1}^{\infty} a(n)n^{-s}$ est une série de Dirichlet absolument convergente;

2. il existe un entier naturel m tel que $(s - 1)^m F(s)$ soit une fonction entière d'ordre fini;
3. la fonction F satisfait une équation fonctionnelle de la forme :

$$\Phi(s) = \omega \overline{\Phi(1 - \bar{s})} \quad \text{où } \Phi(s) = Q^s \Delta(s) F(s),$$

avec $\Delta(s) = \prod_{j=1}^r \Gamma(\lambda_j s + \mu_j)$, $\lambda_j > 0$, $\Re \mu_j \geq 0$, $Q > 0$ et $|\omega| = 1$;

4. pour tout $\varepsilon > 0$, il existe un réel $M(\varepsilon)$ tel que $|a(n)| \leq M(\varepsilon)n^\varepsilon$;
5. pour $\Re s$ assez grand, $\log F(s) = \sum_{n=1}^{+\infty} b(n)n^{-s}$ où $b(n) = 0$ si n n'est pas une puissance d'un nombre premier et $b(n) = O(n^\theta)$ pour un $\theta < 1/2$.

Étudiée dans de nombreux articles, la classe de Selberg est en particulier l'objet dans [KP0] d'un survol de Kaczorowski et Perelli.

Notations 1. — On note $d = 2 \sum_{j=1}^r \lambda_j$ le degré de F , m_F l'ordre du pôle éventuel de F en $s = 1$ et \bar{f} la fonction $s \mapsto \overline{f(\bar{s})}$.

L'assertion 5 implique que la fonction F admet un développement en produit Eulérien de la forme $F(s) = \prod_{p \in \mathcal{P}} F_p(s)$, où \mathcal{P} est l'ensemble des nombres premiers et $F_p(s) = \sum_{k=0}^{+\infty} \beta(k)p^{-ks}$.

On distingue parmi les zéros d'une fonction F de la classe de Selberg les zéros de la forme $-(n + \mu_j)/\lambda_j$, $n \in \mathbb{N}$, $j \in [1, r]$, que l'on appelle zéros triviaux de F . Les zéros non triviaux de F sont de partie réelle comprise entre 0 et 1. La droite d'équation $\Re s = 1/2$ est appelée droite critique.

Conjecture 1. — Les zéros non triviaux de F sont de partie réelle égale à $1/2$.

C'est ce que l'on appelle hypothèse de Riemann généralisée pour la fonction F (HRG).

Afin de caractériser l'hypothèse de Riemann généralisée pour une fonction F de la classe de Selberg, nous définissons la fonction complémentaire associée à F par

$$\Psi_F : \begin{array}{ll} \mathbb{R}^+ & \rightarrow \mathbb{C} \\ x & \mapsto \text{Res} \left(\frac{x^s}{s} F(s), 1 \right) - \sum_{n \leq x} a(n), \end{array}$$

la fonction $\Psi_F^{(1)}$ par $\Psi_F^{(1)}(x) = \Psi_F(1/x)$ et le sous-espace de fonctions suivant :

$$\mathcal{B}_F = \left\{ f : t \mapsto \sum_{k=1}^n c_k \Psi_F \left(\frac{\theta_k}{t} \right), n \in \mathbb{N}, \forall k \in [1, n], c_k \in \mathbb{C}, 0 < \theta_k \leq 1 \right\}.$$

Nous avons démontré dans [dR2] que pour une fonction F de S , (HRG) est équivalente à

$$\Psi_F^{(1)} \in L^2(0, +\infty) \text{ et } \chi \in \overline{\mathcal{B}_F}.$$

La démonstration de ce résultat est essentiellement basée sur la formule suivante.

$$\mathcal{M} \Psi_F^{(1)}(s) = -\frac{F(s)}{s}, \text{ pour } \frac{1}{2} < \Re s < 1, \tag{1}$$

où $\mathcal{M}f$, la transformée de Mellin de f , est définie par $\mathcal{M}f(s) = \int_0^{+\infty} f(t)t^{s-1}dt$. La condition $\Psi_F^{(1)} \in L^2(0, +\infty)$ est vérifiée pour les fonctions F de S de degré $d < 4$ (voir [dR1]).

Nous démontrons dans cet article le résultat suivant, qui est une extension du résultat de Báez-Duarte et Balazard.

Théorème I. — Soit F une fonction de la classe de Selberg vérifiant l'hypothèse de Riemann généralisée. Notons $(a^{-1}(n))_{n \geq 1}$ les coefficients de sa série de Dirichlet inverse F^{-1} . Alors il existe un entier positif N_0 tel que pour tout entier $N \geq N_0$, la distance dans $L^2(0, +\infty)$ entre la fonction χ , indicatrice de l'intervalle $]0, 1[$, et la fonction

$$x \mapsto - \sum_{n=1}^N a^{-1}(n) e^{-a \frac{\log n}{\log \log N}} \Psi_F(1/nx),$$

où a désigne une constante dépendant uniquement de F , est $O((\log \log N)^{-1/3})$.

Nous en déduisons immédiatement le corollaire suivant.

Corollaire 1. — Soit F une fonction de la classe de Selberg. Alors l'hypothèse de Riemann pour F est équivalente à la propriété :

$$\Psi_F^{(1)} \in L^2(0, +\infty) \text{ et } \chi \in \overline{\mathcal{B}_F^{nat}},$$

où \mathcal{B}_F^{nat} est le sous-ensemble des fonctions f de \mathcal{B}_F , définies sur \mathbb{R}^{++} par :

$$f(t) := \sum_{k=1}^n c_k \Psi_F\left(\frac{1}{kt}\right), \quad n \in \mathbb{N}^*, \quad c_k \in \mathbb{C}.$$

Afin d'obtenir ces résultats, nous étudierons dans la partie 2 l'ordre de grandeur de l'inverse d'une fonction F de S ainsi que des coefficients $a^{-1}(n)$. La partie 3 sera consacrée à la démonstration du théorème I.

Notations 2. — Dans toute la suite, s désignera un nombre complexe de partie réelle σ et de partie imaginaire τ et F sera une fonction de S . De plus, les constantes implicites dans les notations O et \ll ne dépendront que de la fonction F .

L'auteur souhaite remercier chaleureusement Michel Balazard qui a encadré ce travail en thèse ainsi que Bruno Martin et Alberto Perelli pour des conversations mathématiques éclairantes. Elle exprime également ici sa gratitude à l'égard du "lecteur-arbitre" anonyme auquel la forme finale de cet article doit beaucoup.

2. Inverse d'une fonction de la classe de Selberg

L'inverse de F est une série de Dirichlet formelle dont les coefficients, que l'on note $a^{-1}(n)$, sont définis par (voir sections I.2.3 et I.2.4 de [Te])

$$\begin{cases} a^{-1}(1) = 1 \\ a^{-1}(n) = \sum_{d|n, d < n} a(n/d)a^{-1}(d) \quad (n > 1). \end{cases} \quad (2)$$

2.1. Ordre de grandeur des coefficients. — Les axiomes 4 et 5 et la relation (2) permettent d'obtenir, à l'aide de démonstrations par récurrence, des majorations de la taille des coefficients $a^{-1}(n)$. On obtient ainsi pour tout $\varepsilon > 0$, la majoration $|a^{-1}(n)| \ll_{\varepsilon} n^{1+\theta+\varepsilon}$. La proposition suivante permet d'améliorer cette majoration si on suppose que la fonction F vérifie l'hypothèse de Riemann généralisée. Elle est en fait valable même si l'axiome 4 de la définition de S n'est pas vérifié.

Proposition 2.1. — *Soit F une fonction de la classe de Selberg vérifiant l'hypothèse de Riemann généralisée. Alors F^{-1} est une série de Dirichlet d'abscisse de convergence $\sigma_c \leq 1/2$. On a donc en particulier*

$$\forall \varepsilon > 0, a^{-1}(n) = O_{\varepsilon}(n^{1/2+\varepsilon}). \quad (3)$$

Démonstration. La fonction F^{-1} est holomorphe dans le demi-plan $\sigma > 1/2$. D'après [L], Satz 5, F^{-1} est une série de Dirichlet d'abscisse de convergence σ_c finie. Une application d'un lemme similaire au Satz 4 de [L] à la fonction

$$h(s) = F(s) \left(\frac{s-1}{s} \right)^{m_F}$$

qui est holomorphe sans zéro dans le demi-plan $\sigma > 1/2$, tend vers 1 uniformément en τ lorsque σ tend vers l'infini et vérifie que pour tout $\delta > 0$, il existe un réel $c = c(\delta)$ tel que $h(s) = O((1+|\tau|)^c)$ uniformément pour $\sigma \geq 1/2 + \delta$ et $\tau \in \mathbb{R}$, fournit pour tout $\varepsilon > 0$ la majoration

$$1/h(s) = O_{\varepsilon}((1+|\tau|)^{\varepsilon}) \quad (\sigma > 1/2).$$

La même majoration vaut pour F^{-1} et on peut donc conclure en appliquant le théorème de Landau-Schnee (voir [Te], section II.2.2) à la fonction F^{-1} . \square

Sous l'hypothèse, conjecturalement vraie pour toutes les fonctions F de la classe de Selberg, que pour tout nombre premier p , $F_p(s)^{-1}$ est un polynôme en p^{-s} de degré r indépendant de p , on peut montrer par des arguments classiques

$$\forall \varepsilon > 0, \forall n \in \mathbb{N}, a^{-1}(n) = O_{\varepsilon}(n^{\varepsilon}). \quad (4)$$

Cette majoration de la taille des coefficients $a^{-1}(n)$ est en fait valable inconditionnellement pour des entiers criblés, comme l'atteste le lemma 1 de [KP1]. Ainsi pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $z(\varepsilon) > 0$ tel que

$$(n, P(z(\varepsilon))) = 1 \Rightarrow |a^{-1}(n)| \leq n^{\varepsilon}, \text{ avec } P(z) = \prod_{p \leq z} p. \quad (5)$$

Cette majoration et un argument semblable à celui de R. Murty dans sa démonstration d'une majoration de $b(p^k)$ dans [M] permettent d'obtenir la majoration suivante. Ce résultat sera publié dans le livre [KP2], actuellement en cours d'écriture. Cet ouvrage n'étant pas encore disponible, nous donnons ici une démonstration succincte de cette majoration.

Proposition 2.2. — *Pour tout réel $\beta > \theta$, il existe une constante positive C , ne dépendant que de β et θ tels que pour tout entier positif n , on ait*

$$|a^{-1}(n)| \leq Cn^\beta,$$

où $\theta < 1/2$ est défini à l'axiome 5 de la classe de Selberg.

Démonstration. Soit β un réel vérifiant $\theta < \beta$ et H un réel tel que $|b(n)| \leq Hn^\theta$ pour tout entier positif n . La majoration (5) de [KP1] assure l'existence d'un réel $z = z(\beta)$ tel que pour tout entier positif n premier avec z , on ait $|a^{-1}(n)| \leq n^\beta$.

Montrons à présent qu'il existe une constante positive K telle pour tout nombre premier p et tout entier naturel m , on ait $|a^{-1}(p^m)| \leq Kp^{m\beta}$. Le fait que la suite $(a^{-1}(n))_n$ soit multiplicative permet alors de conclure puisque l'on a

$$|a^{-1}(n)| \leq K^{z(\beta)} n^\beta.$$

Un calcul de la dérivée logarithmique de F^{-1} permet d'obtenir pour tout nombre premier p et tout entier $m \geq 1$ l'égalité suivante.

$$ma^{-1}(p^m) = - \sum_{k=1}^m kb(p^k)a^{-1}(p^{m-k}). \quad (6)$$

Fixons à présent le nombre premier p . Une récurrence sur m et la majoration de l'axiome 5 permettent d'obtenir la majoration $|a^{-1}(p^m)| \leq A_m p^{m\theta}$ où $(A_m)_m$ est défini par $A_0 = 1$ et pour $m \geq 1$,

$$mA_m = H \sum_{k=1}^m kA_{m-k}. \quad (7)$$

La relation de récurrence (7) permet de calculer la série génératrice associée à la suite $(A_m)_m$

$$A(z) := \sum_{m \geq 0} A_m z^m = \exp\left(\frac{Hz}{1-z}\right),$$

donc d'obtenir l'expression suivante de A_m pour $m \geq 1$,

$$A_m = \sum_{n=0}^m \binom{m-1}{n-1} \frac{H^n}{n!}.$$

L'utilisation de la formule de Stirling réelle assure alors l'existence d'une constante positive A ne dépendant que de H telle que pour tout nombre premier p et tout entier naturel m , on ait

$$|a^{-1}(p^m)| \leq Ae^{4\sqrt{Hm}} p^{m\theta}.$$

La suite $(Ae^{4\sqrt{Hm}2^{-m\varepsilon}})_m$ étant bornée, on obtient bien le résultat annoncé. \square

2.2. Majoration de l'inverse d'une fonction de S . —

2.2.1. Majorations classiques. — Commençons par donner quelques estimations classiques, dont les démonstrations sont analogues à celles de l'étude de la fonction ζ que Titchmarsh a menée dans [Ti], chapitres IX et XIV. Le lecteur pourra consulter [dRO] pour une démonstration détaillée de ces résultats.

Définition 2. — Pour $T > 0$, on définit $N_F(T)$, le nombre de zéros $\rho = \beta + i\gamma$ de F vérifiant $0 \leq \beta \leq 1$ et $0 < \gamma \leq T$.

On a classiquement

$$N_F(T + 1) - N_F(T) = O(\log T) \quad (T > 0). \tag{8}$$

Notations 3. — Pour tout réel t , on note

$$\mathcal{L}(t) = \frac{\log(|t| + 3)}{\log \log(|t| + 3)}.$$

Si F vérifie HRG, alors

- il existe une constante $k_1 > 0$ telle que

$$|F(\sigma + i\tau)| \leq e^{k_1 \mathcal{L}(\tau)} \tag{9}$$

- il existe une constante $k_2 > 0$ telle que

$$|F(\sigma + i\tau)|^{-1} \leq e^{k_2 \mathcal{L}(\tau)/(\sigma - 1/2)} \tag{10}$$

pour $1/2 < \sigma \leq 1$ et $|\tau| \geq 3$;

- il existe deux constantes positives absolue c_1 et c_2 telles que, pour tous nombres réels σ et τ vérifiant :

$$|\tau| \geq 3, \quad \frac{1}{2} + \frac{c_1}{\log \log |\tau|} \leq \sigma \leq 1,$$

on a

$$|F(\sigma + i\tau)|^{-1} \leq e^{c_2 \mathcal{L}(\tau)}. \tag{11}$$

2.2.2. Majoration du quotient $F(s)/F(s + A)$ sur la droite critique. — Dans son article [Bu], Burnol donne une majoration uniforme de $\zeta(s)/\zeta(s + A)$ sur la droite critique. Nous allons ici généraliser cette majoration pour une fonction de la classe de Selberg.

Proposition 2.3. — Soit F une fonction de la classe de Selberg vérifiant HRG et A un réel vérifiant $0 \leq A \leq 1/2$. Alors, sur la droite critique, on a

$$\left| \frac{F(z)}{F(z + A)} \right| = O(|z|^{Ad/2}).$$

Démonstration. Soit $0 < A \leq 1/2$. Pour $\Re(s) \geq 1/2$, on considère la fonction

$$h_A(s) = \frac{(s-1-A/2)^{m_F} F(s-A/2)}{(s-1+A/2)^{m_F} F(s+A/2)} \frac{1}{s^{dA/2}}.$$

- Si $s = 1/2 + i\tau$, alors $z := s + A/2 = (1+A)/2 + i\tau$ vérifie $1/2 < \Re z \leq 3/4$ et en utilisant l'équation fonctionnelle de F et le lemme 3.2 de [dR1], on obtient :

$$\left| \frac{F(s-A/2)}{F(s+A/2)} \right| = \left| \frac{\overline{F}(1-z)}{F(z)} \right| = \left| Q^{2z-1} \frac{\Delta(z)}{\Delta(1-z)} \right| = O(|z|^{d(\Re z - 1/2)}) = O(|s|^{dA/2}),$$

où les constantes implicites ne dépendent que de F . On a donc $h_A(s) = O(1)$ sur la droite critique, uniformément pour $0 \leq A \leq 1/2$.

- D'autre part, $\lim_{\sigma \rightarrow +\infty} F(s) = 1$, donc il existe $\Lambda_0 > 1$, tel que pour tout $\sigma \geq \Lambda_0$ et tout $\tau \in \mathbb{R}$, on ait

$$\left| \frac{F(s-A/2)}{F(s+A/2)} \right| \leq 4 \text{ donc } |h_A(s)| \leq 4|s|^{-dA/2} \leq 4\Lambda_0^{-dA/2} \leq 4.$$

Appliquant le principe de Phragmén-Lindelöf à la fonction h_A , holomorphe dans $\{\sigma \geq 1/2\}$ entre $\{\Re s = 1/2\}$ et $\{\Re s = \Lambda_0\}$, on obtient $h_A(s) = O(1)$ uniformément pour A tel que $0 \leq A \leq 1/2$ et s tel que $1/2 \leq \sigma \leq \Lambda_0$. En particulier, pour $s = (1+A)/2 + i\tau$ et donc $z = s - A/2 = 1/2 + i\tau$, on a

$$\left| \frac{F(z)}{F(z+A)} \right| = O(|z|^{Ad/2}),$$

uniformément par rapport à A tel que $0 \leq A \leq 1/2$. □

Cette majoration permettra de pallier l'absence de majoration uniforme de $|F(s)|^{-1}$ pour $\sigma > 1/2$.

3. Explicitation d'une suite de \mathcal{B}_F tendant vers χ dans $L^2(0, +\infty)$

Comme dans le cas de la fonction ζ de Riemann, on définit la suite "naturelle"

$$S_{n,F}(t) = \sum_{k=1}^n a^{-1}(k) \Psi_F^{(1)}(kt)$$

et on la modifie par un procédé de construction analogue à celui que Báez-Duarte expose dans [BD3] afin d'obtenir une suite convergente de $L^2(0, +\infty)$.

Proposition 3.1. — *Soit F une fonction de la classe de Selberg vérifiant HRG. Alors il existe deux constantes positives a et b et un entier naturel N_0 ne dépendant que de F tels que, pour tous réels t , $\delta > 0$ et tout entier $N \geq N_0$ vérifiant*

$$\frac{a}{\log \log N} \leq \delta \leq \frac{1}{2}$$

on ait uniformément

$$\sum_{n \leq N} \frac{a^{-1}(n)}{n^{\frac{1}{2} + \delta + it}} = \frac{1}{F\left(\frac{1}{2} + \delta + it\right)} + O(N^{-\delta/3} \exp(b(\mathcal{L}(t)))).$$

Démonstration. Dans cette démonstration, N_0 sera un entier assez grand et δ un réel tel que $0 < \delta \leq 1/2$. D'après la proposition 2.2, il existe $\alpha \in]0, 1/2[$ et $C > 0$ tels que $|a^{-1}(n)| \leq Cn^\alpha$.

Les axiomes 4 et 5 assurent que la fonction F^{-1} est une série de Dirichlet d'abscisse de convergence absolue $\sigma_a \leq 1$.

En lui appliquant la formule de Perron effective (théorème II.2.3 de [Te]), puis un calcul classique semblable à celui de la démonstration du corollaire II.2.4 de [Te], on obtient pour $z = 1/2 + \delta + it$, $c = \frac{1}{2} + \alpha - \delta + 1/\log 3N$ et pour tout entier N et tout réel T tel que $N \geq T \geq 2$,

$$\sum_{n \leq N} \frac{a^{-1}(n)}{n^z} = \frac{1}{2i\pi} \int_{c-iT}^{c+iT} F^{-1}(s+z) \frac{N^s}{s} ds + O\left(\frac{N^{\frac{1}{2} + \alpha - \delta}}{T} \log N\right),$$

où $c := \frac{1}{2} + \alpha - \delta + 1/\log 3N$.

On supposera $N \geq N_0 = N_0(F, \alpha)$.

Déplaçons à présent le segment d'intégration à l'abscisse $c' = -\delta/2$ en appliquant le théorème des résidus. On obtient :

$$\sum_{n \leq N} \frac{a^{-1}(n)}{n^z} = F(z)^{-1} + I_1 - I_- + I_+ + O\left(\frac{N^{\frac{1}{2} + \alpha - \delta}}{T} \log N\right), \quad (12)$$

où

$$I_{\pm} = \frac{1}{2i\pi} \int_{c' \pm iT}^{c \pm iT} F^{-1}(s+z) \frac{N^s}{s} ds \text{ et } I_1 = \frac{1}{2i\pi} \int_{c'-iT}^{c'+iT} F^{-1}(s+z) \frac{N^s}{s} ds.$$

- Si $|t| \leq N^{1/2+\alpha}$, on choisit $T = 2N^{1/2+\alpha}$. Le reste dans (12) est alors $O(N^{-\delta/3})$. Sur les segments horizontaux, on a $N^{1/2+\alpha} \leq |\tau + t|$ et donc, si $a \geq 4c_1$ et $N \geq N_0$, alors

$$\Re(s+z) \geq \frac{1}{2} + \frac{\delta}{2} \geq \frac{1}{2} + \frac{a}{2 \log \log N} \geq \frac{1}{2} + \frac{c_1}{\log \log |t + \tau|}$$

et d'après (11), on a

$$|F(s+z)|^{-1} \leq e^{c_2 \mathcal{L}(|t+\tau|)} \ll e^{2c_2 \mathcal{L}(N)}.$$

La contribution des segments horizontaux est donc, pour N_0 assez grand

$$\ll \frac{1}{T} \exp(O(\mathcal{L}(N))) \frac{N^{1/2+\alpha-\delta+1/\log 3N}}{\log N} \ll N^{-\delta+O(1/\log \log N)} \ll N^{-\delta/3}.$$

La majoration (10) permet de majorer la contribution des $\tau \in [c' - iT, c' + iT]$ vérifiant $|t + \tau| \leq e^{\sqrt{\log N}}$ par

$$O\left(\frac{N^{-\delta/2}}{\delta} \exp\left(O\left(\sqrt{\log N}\right)\right)\right) = O(N^{-\delta/3}).$$

Sur le reste de l'intervalle $[c' - iT, c' + iT]$, on utilise (11) qui donne

$$F^{-1}(s + z) \leq \exp(O(\mathcal{L}(|t + \tau|))) \ll \exp(O(\log N / \log \log N)).$$

Comme

$$\int_{c' - iT}^{c' + iT} \frac{|ds|}{|s|} \ll \log N,$$

quitte à choisir a assez grand, on a une contribution de ces termes

$$\ll N^{-\delta/2} \log N \exp(O(\mathcal{L}(N))) \ll N^{-\delta/3},$$

ce qui conclut la démonstration dans ce premier cas.

- Si $|t| \geq N^{1/2+\alpha}$, on applique l'équation (12) en choisissant $T = \frac{1}{2}N^{1/2+\alpha}$. En remarquant que l'on a $|t + \tau| \asymp |t|$ sur tous les segments d'intégration, un raisonnement analogue au précédent permet de conclure la preuve. \square

Proposition 3.2. — Soit F une fonction de la classe de Selberg vérifiant HRG. On a uniformément pour $0 < A \leq 1/(2d)$,

$$\int_{\Re z = 1/2} \left| \frac{F(z)}{F(z + A)} - 1 \right|^2 \frac{|dz|}{|z|^2} \ll A^{2/3}.$$

Démonstration. D'après la proposition 2.3, sur la droite critique on a

$$\left| \frac{F(z)}{F(z + A)} \right| = O(|z|^{Ad/2}),$$

uniformément par rapport à A tel que $0 \leq A \leq 1/2$. On peut donc supposer A inférieur à une constante positive donnée au préalable, le résultat étant trivial dans le cas contraire.

On note γ la partie imaginaire d'un zéro générique de F .

Soit δ tel que $0 < \delta \leq 1$, et $E_1 := \bigcup_{\gamma} [\gamma - \delta, \gamma + \delta]$; $E_2 := \mathbb{R} \setminus E_1$.

Si $t \in E_1$ et $A \leq 1/(2d)$, la proposition 2.3 et la formule (8) donnent, pour $z = 1/2 + it$:

$$\int_{\frac{1}{2} + iE_1} \left| \frac{F(z)}{F(z + A)} - 1 \right|^2 \frac{|dz|}{|z|^2} \ll \sum_{\gamma} \delta \gamma^{-3/2} \ll \delta.$$

D'autre part, avec le lemme α de [Ti], section 3.9 et la formule (8), on obtient pour $0 \leq x \leq A$ et $t \in E_2$:

$$\frac{F'}{F} \left(\frac{1}{2} + x + it \right) = \sum_{|t-\gamma| \leq 1} \frac{1}{x + i(t - \gamma)} + O(\log(|t| + 3)) \ll \delta^{-1} \log(|t| + 3),$$

donc

$$\log \left(\frac{F(\frac{1}{2} + it)}{F(\frac{1}{2} + A + it)} \right) = - \int_0^A \frac{F'}{F} \left(\frac{1}{2} + x + it \right) dx \ll A\delta^{-1} \log(|t| + 3).$$

En utilisant l'inégalité $|e^u - 1| \leq |u|e^{|u|}$, on en déduit

$$\left| \frac{F(z)}{F(z + A)} - 1 \right| \ll A\delta^{-1} \log(|t| + 3)(|t| + 3)^{c'A/\delta},$$

où c' est une constante positive absolue. Par conséquent,

$$\int_{\frac{1}{2} + iE_2} \left| \frac{F(z)}{F(z + A)} - 1 \right|^2 \frac{|dz|}{|z|^2} \ll A^2\delta^{-2} \int_{\mathbb{R}} \log^2(|t| + 3)(|t| + 3)^{2c'A/\delta-2} \ll A^2\delta^{-2},$$

pourvu que $A \leq \delta/4c'$, ce que nous supposons. On choisit $\delta = A^{2/3}$ pour conclure, ce qui est possible si l'on suppose $A \leq (1/4c')^3$. \square

Nous pouvons maintenant conclure la démonstration du théorème I donné en introduction.

Démonstration. Posons

$$f_{A,N}(x) := - \sum_{n=1}^N \frac{a^{-1}(n)}{n^A} \Psi_F(1/nx).$$

D'après (1), pour $1/2 < \Re z < 1$, on a

$$\mathcal{M}f_{A,N}(z) = \frac{F(z)}{z} \left(\sum_{n=1}^N \frac{a^{-1}(n)}{n^{z+A}} \right).$$

Par ailleurs, pour $\Re z > 0$, on a $\mathcal{M}\chi(z) = -1/z$. Le théorème de Plancherel donne donc

$$\begin{aligned} \|f_{A,N} - \chi\|^2 &= \int_{\Re z=1/2} \left| F(z) \sum_{n=1}^N \frac{a^{-1}(n)}{n^{z+A}} - 1 \right|^2 \frac{|dz|}{|z|^2} \\ &\leq 2 \int_{\Re z=1/2} \left| F(z) \left(\sum_{n=1}^N \frac{a^{-1}(n)}{n^{z+A}} - F(z + A)^{-1} \right) \right|^2 \frac{|dz|}{|z|^2} + 2 \int_{\Re z=1/2} \left| \frac{F(z)}{F(z + A)} - 1 \right|^2 \frac{|dz|}{|z|^2} \end{aligned}$$

en utilisant $(X + Y)^2 \leq 2(X^2 + Y^2)$. D'après la proposition 3.1, si $A \geq a/\log \log N$ et $z = 1/2 + it$, on a

$$\left| \sum_{n=1}^N \frac{a^{-1}(n)}{n^{z+A}} - F(z + A)^{-1} \right| = O \left(N^{-A/3} \exp(b\mathcal{L}(t)) \right)$$

et d'après (9), on a $|F(z)| = \exp(O(\mathcal{L}(t)))$, donc

$$\begin{aligned} &\int_{\Re z=1/2} \left| F(z) \left(\sum_{n=1}^N \frac{a^{-1}(n)}{n^{z+A}} - F(z + A)^{-1} \right) \right|^2 \frac{|dz|}{|z|^2} \\ &\ll N^{-2A/3} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{O(\mathcal{L}(t))} \frac{dt}{\frac{1}{4} + t^2} \ll N^{-2A/3}. \end{aligned}$$

En utilisant la proposition 3.2, on obtient donc

$$\|f_{A,N} - \chi\|^2 \ll N^{-2A/3} + A^{2/3}.$$

Le choix $A = a/\log \log N$ permet de conclure. \square

Références

- [BD1] L. Báez-Duarte, *On Beurling's real variable reformulation of the Riemann hypothesis*, Adv. in Maths **101** (1993), 10-30.
- [BD2] L. Báez-Duarte, *A class of invariant unitary operators*, Adv. in Math **144** (1999), 1-12.
- [BD3] L. Báez-Duarte, *A strengthening of the Nyman-Beurling criterion for the Riemann hypothesis*, Atti Accad. Naz. Lincei Cl. Sci. Fis. Mat. Natur. Rend. Lincei **9**, Mat. Appl. **14** (2003), n°1, 5-11. 1-12.
- [BDBLS] L. Báez-Duarte, M. Balazard, B. Landreau, E. Saias, *Note sur la fonction zeta de Riemann, III*, Adv. in Maths. **149** (2000), n°1, 130-144.
- [BS1] M. Balazard, E. Saias, *Note sur la fonction zeta de Riemann, 1*, Adv. in Maths. **139** (1998), 310-321.
- [BS2] M. Balazard, E. Saias, *The Nyman-Beurling equivalent form for the Riemann hypothesis*, Expo. Math. **18** (2000), 131-138.
- [BF] H. Bercovici, C. Foias, *A real variable restatement of Riemann's hypothesis*, Israel J. Maths. **48** (1984), 57-68.
- [Be] A. Beurling, *A closure problem related to the Riemann Zeta-function*, Proc. Nat. Acad. Sci. **41** (1955), 312-314.
- [Bu] J.-F. Burnol, *On an analytic estimate in the theory of the Riemann Zeta function and a theorem of Báez-Duarte*, à paraître dans Acta Cientifica Venezolana **54** (2003).
- [dR0] A. de Roton *Généralisation du critère de Beurling-Nyman à la classe de Selberg*, thèse, université Bordeaux 1, 2003, disponible sur www.iecn.u-nancy.fr/~deroton.
- [dR1] A. de Roton, *On the mean square of an error term for an extended Selberg's class*, Acta Arith. **126** (2007), n°1, 417-445.
- [dR2] A. de Roton, *Généralisation du critère de Beurling-Nyman pour l'hypothèse de Riemann généralisée*, Trans. Amer. Math. Soc. **359** (2007), n°12, 6111-6126.
- [KP0] J. Kaczorowski, A. Perelli, *The Selberg class: a survey*, Number theory in progress, Vol. 2 (Zakopane-Kościelisko, 1997), 953-992, de Gruyter, Berlin, 1999.
- [KP1] J. Kaczorowski, A. Perelli, *On the prime number theorem for the Selberg class*, Arch. Math. **80** (2003), 255-263.
- [KP2] J. Kaczorowski et A. Perelli, "Introduction to the Selberg Class of L-functions", livre en cours d'écriture.
- [L] E. Landau *Über den Wertevorrat von $\zeta(s)$ in der Halbene $\sigma > 1$* , Nachr. Ges. Wiss. Göttingen, Math.-Phys. Kl. I, **36** (1933), 81-91.
- [M] M. R. Murty, *Stronger multiplicity one for Selberg's class*. In: Harmonic analysis and number theory (ed. by S.M. Drury and M.R. Murty; CMS Conf. Proc. 21), 133-142. American Mathematical Society, Providence 1997.
- [S] A. Selberg *Old and new conjectures and results about a class of Dirichlet series*, Proceedings of the Almagi Conference on Analytic Number Theory, Università di Salerno (1992).
- [Te] G. Tenenbaum, *Introduction à la théorie analytique et probabiliste des nombres*, 3^e édition, Belin, 2008.

[Ti] E. C. Titchmarsh, The theory of the Riemann Zeta-function, Oxford University Press, 1951.

A. DE ROTON, Institut Elie Cartan UMR 7502 - Nancy Université, CNRS-INRIA,, BP 239, 54506
Vandoeuvre-lès-Nancy • *E-mail* : deroton@iecn.u-nancy.fr