

TAM-TAM, Maroc, Kenitra 6-8 may 2009

## Méthode de la moyenne et de double échelle pour système de cordes en vibration non linéaire

Gasmi Anouar

Laboratoire LAMSIN  
ENIT  
BP 37, 1002 Tunis

Laboratoire J.-A. Dieudonné  
Université de Nice  
Parc Valrose, 06108 Nice Cedex 2



**RÉSUMÉ.** On s'intéresse à l'étude de quelques systèmes différentiels inspirés d'expériences de vibrations effectuées pour détecter des endommagements dans une structure élastique.

Plusieurs techniques expérimentales ont été développées dans ce cadre. La technique utilisée ici est la réponse vibratoire en vue du contrôle non destructif.

L'objectif est d'utiliser des modèles très simples pour simuler certains résultats expérimentaux de [7]. Le système de la corde tendue avec non linéarité géométrique est approché par un système d'équations différentielles ordinaires (E.D.O) qu'on résout numériquement en utilisant deux méthodes d'approximation par développement asymptotique. Ces derniers seront comparés avec la solution fournie par des méthodes d'intégration numérique pas à pas avec le solveur "ode" de Scilab .

Le développement asymptotique est justifié avec la méthode de la moyenne. La comparaison dans le plan fréquentiel est un choix qui satisfait nos attentes car il offre une interprétation qualitative et numérique des deux approches.

**ABSTRACT.** We propose to study some differential systems based on previous experiments of vibrations in order to detect damage in an elastic structure.

Several asymptotic expansions and numerical techniques are developed in this area. We use the vibrational response to an external actuation to try to distinguish between damaged and undamaged structures.

The objective is to use very simple models in order to simulate some experimental results in [7]. The system is represented by an ordinary differential system that we solve with two methods of asymptotic expansion. They are compared to the numerical solution given by a step by step scheme with O.D.E package of SCILAB.

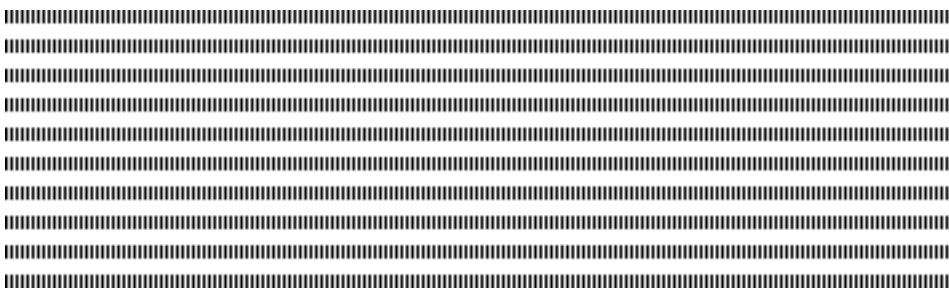
The asymptotic development is justified with the average method .

The comparison in the frequential plane is convenient since it provides for both approaches a qualitative and numerical interpretation

**MOTS-CLÉS :** E.D.O, méthode de la moyenne, méthode double échelle, vibrations non linéaire

**KEYWORDS :** O.D.E, the method of averaging, the method of double scale, non linear vibrations

TAM TAM '09

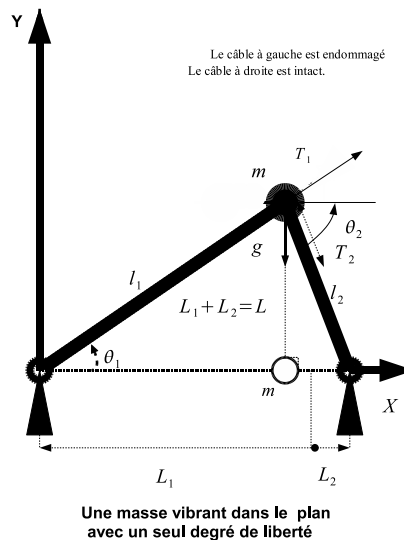


---

## 1. Modèle à un noeud et un degré de liberté

### 1.1. Modèle sans amortissement

17/12/2008



Nous étudions un modèle simple introductif en relation avec l'expérience décrite dans (G. Vanderborck[7]) avec des hypothèses de non linéarité géométrique pour la vibration transversale du câble tendu. La tension des câbles varie linéairement et elle est égale à  $T_0$  au repos. Nous considérons d'abord un modèle discret à une masse  $m$  dans lequel on néglige le déplacement longitudinal; il ne reste qu'un seul degré de liberté, déplacement transversal  $v$ ; désignons par  $\tilde{\lambda}$  le niveau de force;  $g = \tilde{\lambda} \tilde{g} \cos(\tilde{\alpha} t)$  la force excitatrice,  $k_1, k_2$  constantes élastiques,  $L_1, L_2$  longueurs au repos,  $l_1, l_2$  longueurs des câbles en déplacements,  $T_1, T_2$  tension respectives des câbles en déplacements. L'équation différentielle relative au déplacement de la masse  $m$  peut être approchée sous forme adimensionnée par :

$$\ddot{y} + y + \epsilon y^3 = \epsilon g \cos(\alpha t) \quad (1)$$

avec

$$v = Ly, \quad g = \frac{\tilde{g}}{mL\omega^2}$$

$$\omega^* = \left( \frac{T_0 \left( \frac{1}{L_1} + \frac{1}{L_2} \right)}{m} \right)^{\frac{1}{2}}, \quad \tilde{t} = \frac{t}{\omega^*}, \quad \tilde{\alpha} = \frac{\alpha}{\omega^*}$$

$$\epsilon = \frac{\tilde{\lambda}^2 (L_1 + L_2)^2}{2m\omega^{*2}} \left( \frac{T_0 - k_1 L_1}{L_1^3} + \frac{T_0 - k_2 L_2}{L_2^3} \right)$$

Dans ce modèle, on a fait un changement de temps pour se ramener à une fréquence du problème linéarisé égale à 1 :  $\tilde{t} = t/\omega^*$  et un changement de la variable de déplacement :  $v = Ly$ .

### 1.1.1. Développement asymptotique par double échelle

Pour une fréquence de la force proche de 1 ; on introduit le paramètre  $\sigma$  défini par

$$\alpha = 1 + \epsilon\sigma$$

on cherche une solution de type

$$y = y_0(T_0, T_1) + \epsilon y_1(T_0, T_1) + \mathbf{O}(\epsilon^2)$$

où

$$T_0 = t, \quad T_1 = \epsilon t$$

on aboutit à une solution au premier ordre :

$$y_0 = a(T_1) \cos(T_0 + \beta(T_1)) \quad (2)$$

avec

$$(3) \quad \begin{cases} \frac{da}{dT_1} = \frac{1}{2}g \sin(\sigma T_1 - \beta) \\ a \frac{d\beta}{dT_1} = \frac{3}{8}a^3 - \frac{1}{2}g \cos(\sigma T_1 - \beta) \end{cases}$$

on peut pousser le développement au second ordre

$$y = a(\epsilon t) \cos(t + \beta(\epsilon t)) + \epsilon \frac{a^3(\epsilon t)}{32} \cos(3t + 3\beta(\epsilon t)) + \mathbf{O}(\epsilon^2) \quad (4)$$

### 1.1.2. Développement asymptotique par la méthode de la moyenne

On cherche une solution sous la forme :

$$y = a \cos(t + \beta)$$

$a$  et  $\beta$  sont des fonctions du temps  $t$ . Pour des perturbations assez petit on suppose que la dérivé par rapport à  $t$  :  $\dot{y}$  a la forme du celle du cas linéaire ( $\dot{y} = -a \sin(t + \beta)$ ). Cela

revient à supposer que la variation (par rapport au cas linéaire) est  $\mathbf{O}(\epsilon)$ .  
En se basant sur ce qui précède on obtient :

$$(5) \quad \begin{cases} \dot{a} = \epsilon \left[ \frac{1}{4} a^3 \sin(2t + 2\beta) + \frac{1}{8} a^3 \sin(4t + 4\beta) \right. \\ \quad \left. - \frac{1}{2} g \sin[2t + \sigma\epsilon t + \beta] - \frac{1}{2} g \sin[\sigma\epsilon t + \beta] \right] \\ a\dot{\beta} = \epsilon \left[ \frac{3}{8} a^3 + \frac{1}{2} a^3 \cos(2t + 2\beta) + \frac{1}{8} a^3 \cos(4t + 4\beta) \right. \\ \quad \left. - \frac{1}{2} g \cos[2t + \sigma\epsilon t + \beta] - \frac{1}{2} g \cos[\sigma\epsilon t + \beta] \right] \end{cases}$$

On fait appel au théorème suivant

**Théorème 1 (la moyenne au premier ordre :)** (*F.Verhulst*)  
soit le système suivant,

$$\begin{cases} \frac{d\tilde{y}}{dt} = \epsilon h(t, \tilde{y}) \\ \tilde{y}(t_0) = (\epsilon t_0, y_0) \end{cases}$$

et soit le système moyenné,

$$\begin{cases} \frac{d\tilde{x}}{dt} = \epsilon h^0(\tilde{x}) \\ \tilde{x}(t_0) = (\epsilon t_0, y_0) \end{cases}$$

avec ,

$$h^0(\tilde{x}) = \frac{1}{T} \int_0^T h(t, \tilde{x}) dt$$

sous les hypothèses

- i-  $\tilde{y}, \tilde{x}, y_0 \in D \subset \mathbf{R}, t \in [t_0, \infty), \epsilon \in (0, \epsilon_0]$
- ii-  $h$  , et  $\nabla h$  sont définis continues et majorées par une constante  $\mathbf{M}$  indépendante de  $\epsilon$  , dans l'intervalle  $[t_0, \infty) \times D$
- iii-  $h$  est  $\mathbf{T}$ -périodique en  $t$  avec  $\mathbf{T}$  constante indépendante de  $\epsilon$ .
- iv-  $\tilde{x}(t)$  appartient à un sous-domaine ouvert de  $D$  sur un échelle de temps  $\frac{1}{\epsilon}$ .

On conclut sur l'échelle de temps  $\frac{1}{\epsilon}$  **l'approximation suivante**

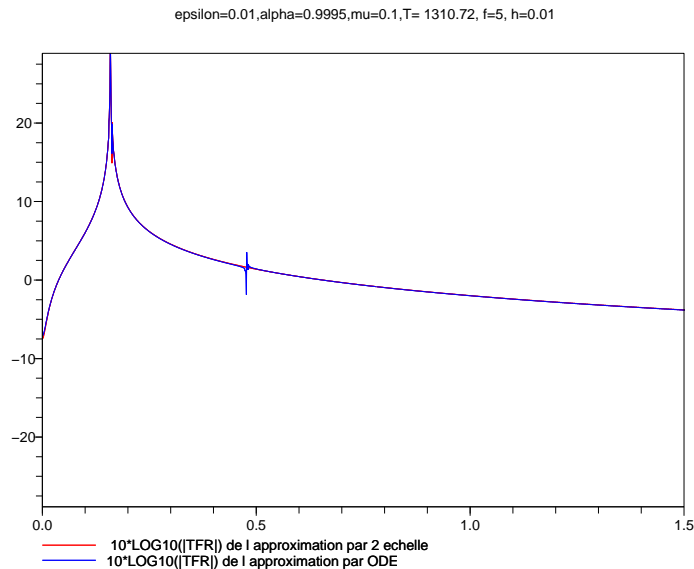
$$\tilde{y}(t) = \tilde{x}(t) + \mathbf{O}(\epsilon)$$

Ce théorème permet d'approcher (5) par le système suivant :

$$(6) \quad \begin{cases} \dot{a} = +\frac{1}{2}\epsilon g \sin[\sigma\epsilon t - \beta] \\ a\dot{\beta} = \frac{3}{8}\epsilon a^3 - \frac{1}{2}\epsilon g \cos[\sigma\epsilon t - \beta] \end{cases}$$

REMARQUE. — Les systèmes (3) et (6) sont équivalents.

### 1.1.3. Résolution numérique



**Figure 1.** Comparaison numérique dans le plan fréquentiel des deux approches par ODE et par la méthode double échelle.

On résout les équations (1) et (3) par le solveur "ODE" sous Scilab ([2] pour plus de détail). On représente par la suite dans le plan fréquentiel la transformée de Fourier discrète de la solution approchée par ODE de (1), et le développement asymptotique au premier ordre par la méthode double échelle (2).

Un bon accord est constaté dans la figure 1 entre les deux approximations sauf que le pic à droite ( $\approx \frac{3}{2\pi}$ ) n'apparaît pas pour le développement par la méthode double échelle au premier ordre. Ce dernier peut être rattrapé en poussant le développement à l'ordre

suisant. L'amortissement influe sur la hauteur des pics secondaires comme le montre la figure 2.

## 1.2. Modèle avec amortissement

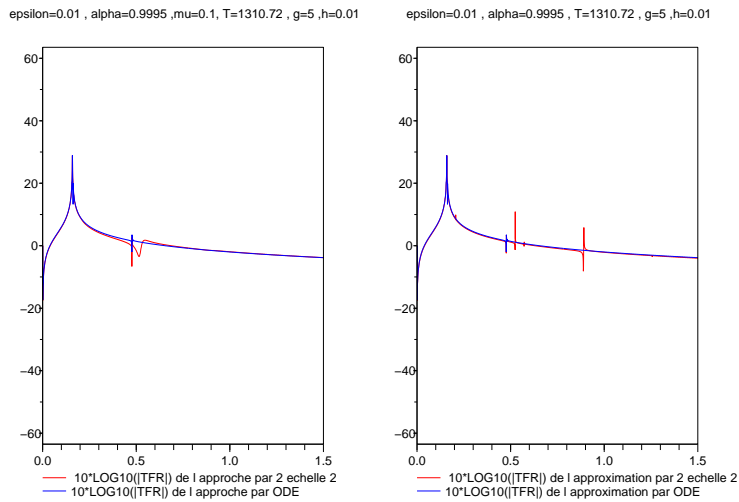
$$\ddot{y} + y + 2\epsilon\mu\dot{y} + \epsilon y^3 = \epsilon g \cos(\alpha t) \quad (7)$$

On compare dans ce qui suit la TFR (transformé de fourier rapide) des deux approximations, l'approximation par ODE et l'approximation au second ordre par la méthode double échelle, de la solution de (7). Par contre (3) est remplacé par

$$(8) \quad \begin{cases} \frac{da}{dT_1} = -\mu a + \frac{1}{2}g \sin(\sigma T_1 - \beta) \\ a \frac{d\beta}{dT_1} = \frac{3}{8}a^3 - \frac{1}{2}g \cos(\sigma T_1 - \beta) \end{cases}$$

avec  $\mu$  coefficient d'amortissement.

### 1.2.1. Résolution numérique :



**Figure 2.** Comparaison numérique dans le plan fréquentiel des deux approches par ODE et par la méthode de double échelle au second ordre avec amortissement à gauche et sans amortissement à droite.

REMARQUE. — L'intermodulation qui correspond à la fréquence naturelle apparait dans les deux approximations. Par contre d'autres n'apparaissent que dans le cas de l'approximation au second ordre par double échelle .

**Conclusion :** Les développements asymptotiques comparés avec des approximations numériques permettent de bien caractériser les systèmes considérés.

## 2. Modèle à un noeud et deux degrés de liberté

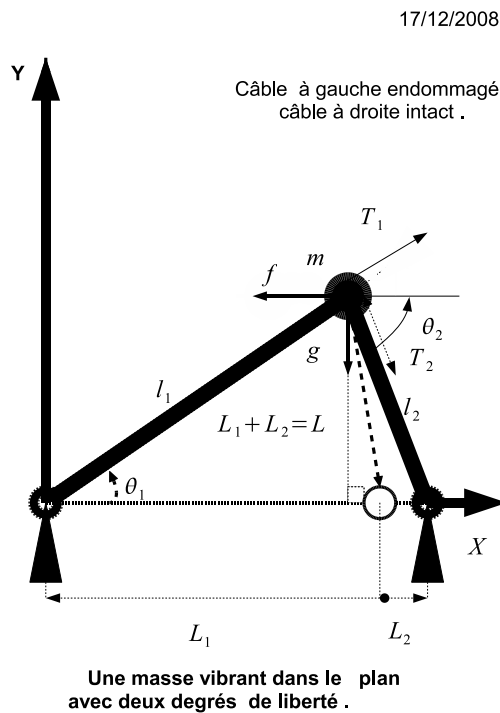


Figure 3. masse attachée à deux câbles dans le plan.

Dans le cas où l'on ne néglige pas le déplacement longitudinal et avec une seule masse, on obtient un système à deux degrés de liberté ; pour un petit niveau de force, il peut être

approché par le système suivant (équations sans dimensions avec  $u$  désigne le déplacement horizontal et  $v$  le déplacement vertical) :

$$(9) \quad \begin{cases} \ddot{u} = \mathbf{e}u - 2\epsilon\mu_1 u - \epsilon\mathbf{k}v^2 + \mathbf{O}(\epsilon^2) \\ \ddot{v} = -v - 2\epsilon\mu_2 v - 2\epsilon\mathbf{k}uv + \epsilon g \cos(\alpha t) + \mathbf{O}(\epsilon^2) \end{cases}$$

avec

$$\mathbf{c} = -(k_1 + k_2) m^{-1} = -\omega_1^{*2} \quad ; \quad \mathbf{h} = -\frac{T_0(L_1 + L_2)}{L_1 L_2} m^{-1} = -\omega_2^{*2}$$

$$\mathbf{e} = -\frac{\mathbf{c}}{\mathbf{h}} = -\omega_1^2 \quad ; \quad \omega_2 = 1$$

NOTE. — Les autres paramètres  $\mathbf{k}, \mu_1, \mu_2, g$  sont des constantes relatives au système Figure 3.

### 2.1. Résolution par la méthode double échelle :

On s'intéresse à l'étude de ce système dans le cas de résonnance, deux types de résonnances apparaissent, résonnance interne  $-4 \approx \mathbf{e}$  et résonnance externe  $1 \approx \alpha$ . On introduit les paramètres  $\sigma_1, \sigma_2$  à fin d'obtenir un développement asymptotique au premier ordre comme approche de (9). On utilise comme avant deux échelles de temps et on réécrit le système avec les nouveaux paramètres on obtient la solution au premier ordre (10) dont les paramètres vérifient le système (11).

$$(10) \quad \begin{cases} u = a_{u_0} \cos(\omega_1 t + \beta_{u_0}) \\ v = a_{v_0} \cos(\omega_2 t + \beta_{v_0}) \end{cases}$$

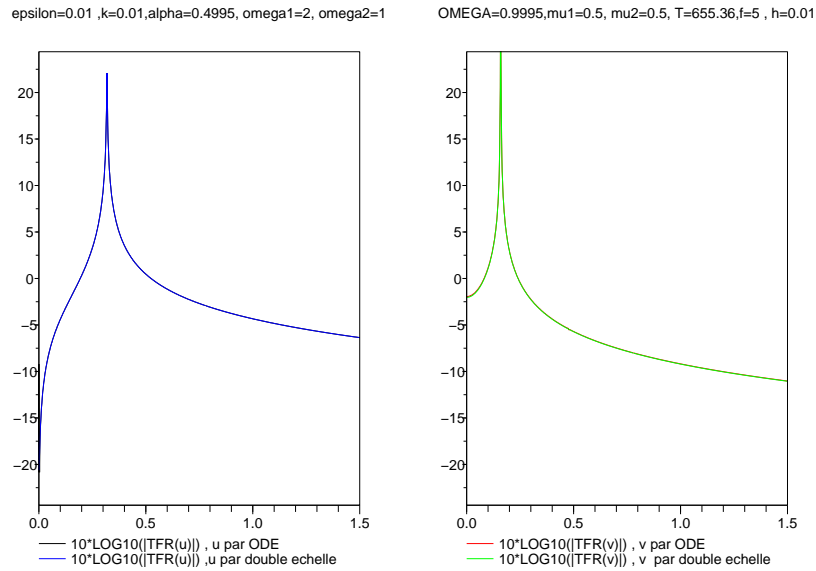
avec,

$$(11) \quad \begin{cases} \frac{da_{u_0}}{dT_1} = -\mu_1 a_{u_0} - \frac{ka_{v_0}^2}{4\omega_1} \sin(-\sigma_1 T_1 + 2\beta_{v_0} - \beta_{u_0}) \\ a_{u_0} \frac{d\beta_{u_0}}{dT_1} = \frac{ka_{v_0}^2}{4\omega_1} \cos(-\sigma_1 T_1 + 2\beta_{v_0} - \beta_{u_0}) \\ \frac{da_{v_0}}{dT_1} = -\mu_2 a_{v_0} + \frac{g}{2\omega_2} \sin(\sigma_2 T_1 - \beta_{v_0}) \\ a_{v_0} \frac{d\beta_{v_0}}{dT_1} = -\frac{g}{2\omega_2} \cos(\sigma_2 T_1 - \beta_{v_0}) \end{cases}$$

## 2.2. Résolution par la méthode de la moyenne :

De la même manière que dans le cas d'un système à un noeud et un seul degré de liberté, on suppose que la vitesse selon les deux axes se comporte de la même façon que dans le cas linéaire. Par la suite on applique le théorème de la moyenne on obtient un système équivalent à (11).

### 2.2.1. Résolution numérique



**Figure 4.** Comparaison dans le plan fréquentiel des deux approximations par ODE et méthode double échelle .

REMARQUE. — Un bon accord est constaté

---

## 3. Conclusion

Les développements obtenus avec la méthode double échelle sont justifiés par la méthodes de la moyennes et validés numériquement par comparaison avec une méthode d'intégration numérique.

---

#### 4. Bibliographie

- [1] B.Rousselet- G.Vanderborck, »Non destructive testing with non linear vibroacoustic », *Septième colloque national en Calcul de structures*, vol. 2.Hermes, page 603-608, 2005. editor :Ohayon, Grellier, Rassinieux
- [2] Scilab software. *Copyright 1989-2005.INRIA ENPC*. www.scilab.org.
- [3] F.Verhulst- J.A.Sanders. *Averaging methods in nonlinear dynamical systems* Springer1985.
- [4] Ali Hassen Nayfeh. *Introduction to perturbation techniques*.J.Wiley,1981.
- [5] B.Rousselet- G.Vanderborck. *Defect perturbation in non linear acoustic*. In *Actes des Journées scientifiques du 8 au 12 décembre 2003 du GDR 2501 étude de la propagation ultrasonore en milieux inhomogènes en vue du contrôle non destructif*. INRIA, 2004.
- [6] B.Rousselet- G.Vanderborck. *Non destructive testing using non linear vibroacoustic*. *Comm. coll. (INRIA) du GDR 2501 étude de la propagation ultrasonore en milieux inhomogènes en vue du contrôle non destructif*. oct. 2004. 41
- [7] Lagier Michel- Vanderborck Gerard. *Application of non-linear ultrasonic spectroscopy to health monitoring and damage detection in structures*.38p. In *75th Shock and vibration symposium, Virginia Beach(VA) USA* , du 18\10\2004 au 21\10\2004 , 2004.
- [8] B.Rousselet- G.Vanderborck, »Non destructive control of cables : O.D.E. models of non linear vibrations », *Variational Formulations in Mechanics : Theory and Applications - A Workshop dedicated to the 60th Birthday of Professor Raúl A. Feijoo* ; 3-5/9/2006, 2006. Organization :LNCC, Petropolis, Bresil
- [9] B.Rousselet , »Non linear vibrations for non destructive testings, ODE models », *Advances in geomaterials and structures*, vol. 1, page 245-254, 2008. Organization :Euromediterranean symposium on advances in geomaterials and structures