

# Approche généralisée pour la synthèse de bases orthogonales non entières

Mohamed AOUN<sup>1</sup>, Rachid MALTI<sup>1</sup>, Alain OUSTALOUP<sup>1</sup>

<sup>1</sup> LAPS - UMR 5131 CNRS - Université Bordeaux I – ENSEIRB,

351, cours de la Libération, 33405 Talence cedex, France.

Tél : +33 540 003 709, mail : {aoun, mali, oustaloup}@laps.u-bordeaux1.fr

**Résumé**— Une approche généralisée pour la synthèse de bases orthogonales non entières à temps continu est développée. Elle permet d'interpoler la définition classique des bases orthogonales rationnelles entre deux ordres de dérivation entiers. Une application en identification de systèmes est ensuite proposée.

**Mots-clés**— Dérivation non entière, système dynamique, fonctions orthogonales, base orthogonale généralisée, identification.

## I. INTRODUCTION ET OUTILS MATHÉMATIQUES

### A. Contexte et motivation

Le recours aux fonctions orthogonales pour la modélisation des systèmes dynamiques linéaires remonte au début du 19<sup>ième</sup> siècle avec les travaux de Lee et Wiener [13], [24]. Depuis, plusieurs autres travaux ont vu le jour dans le domaine de la commande [9], [11] et de l'identification des systèmes [2], [16], [18], [23].

Les fonctions orthogonales les plus couramment utilisées pour la représentation de systèmes dynamiques sont les fonctions de Laguerre ayant un pôle unique, les fonctions de Kautz ayant deux pôles complexes conjugués et les fonctions issues de la base orthogonale généralisée (BOG) ayant plusieurs pôles réels ou paires de pôles complexes conjugués.

Par ailleurs, des études théoriques et expérimentales sur des systèmes thermiques [5] et électrochimiques [7] révèlent la présence d'un comportement dynamique non entier. L'utilisation des méthodes classiques, basées sur une dérivation entière, n'est donc pas appropriée pour la modélisation de tels systèmes. Par conséquent, des modèles basés sur des dérivées non entières ont été développés [6], [12], [22].

El-Sayed [8] a proposé d'étendre la définition des fonctions de Laguerre, en permettant à leur ordre de dérivation d'être réel. Cependant, Abbot [1], par des commentaires correctifs sur les travaux d'El-Sayed, a démontré que les fonctions de Laguerre sont divergentes dès que l'ordre de dérivation est non entier.

Récemment, nous avons synthétisé la première base orthogonale non entière ayant un mode unique et des fonctions convergentes, proposant ainsi une extension des fonctions de Laguerre à des ordres de dérivation non entiers [4]. Cette base reste cependant limitée à l'utilisation d'un mode réel et unique.

Le but de ce nouveau travail est de proposer une approche généralisée pour la synthèse de bases orthogonales

non entières à modes quelconques.

Dans le paragraphe I-B, quelques propriétés de systèmes non entiers sont rappelées. Ensuite, dans le paragraphe II, la procédure de synthèse de bases orthogonales non entières est décrite puis appliquée à un exemple numérique pour la synthèse de la base de Kautz non entière. Dans le troisième paragraphe, l'identification en utilisant ces bases est présentée puis appliquée sur un processus réel.

### B. Représentation et propriétés des systèmes non entiers

Les systèmes non entiers sont régis par des équations différentielles non entières de la forme :

$$y(t) + b_1 \mathbf{D}^{\beta_1} y(t) + \dots + b_{m_B} \mathbf{D}^{\beta_{m_B}} y(t) = a_0 \mathbf{D}^{\alpha_0} u(t) + a_1 \mathbf{D}^{\alpha_1} u(t) + \dots + a_{m_A} \mathbf{D}^{\alpha_{m_A}} u(t). \quad (1)$$

où les ordres de dérivation  $\beta_1, \dots, \beta_{m_B}, \alpha_0, \dots, \alpha_{m_A}$  peuvent être des nombres non-entiers positifs.

Le concept de dérivation d'une fonction  $x(t)$  à un ordre quelconque,  $\gamma \in \mathbb{R}^+$ , a été défini au 19<sup>ième</sup> siècle par Riemann et Liouville comme étant la dérivée entière d'ordre  $m = \lfloor \gamma \rfloor + 1$  de l'intégrale non entière d'ordre  $1 - (m - \gamma)$  de  $x(t)$  [20] (avec  $t > 0$ ) :

$$\mathbf{D}^\gamma x(t) \triangleq \frac{1}{\Gamma(m - \gamma)} \left( \frac{d}{dt} \right)^m \int_0^t \frac{x(\tau) d\tau}{(t - \tau)^{1 - (m - \gamma)}}. \quad (2)$$

où  $\Gamma$  est la fonction Gamma d'Euler généralisée aux nombres réels :  $\Gamma(\gamma) = \int_0^\infty e^{-x} x^{\gamma-1} dx$ .

La transformée de Laplace s'avère être un outil très efficace pour la représentation de systèmes non entiers, puisque, comme le montre Oldham et Spanier [19] pour tout signal  $x(t)$  dont toutes les dérivées entières sont nulles pour  $t \leq 0$ , on a :

$$\mathcal{L}\{\mathbf{D}^\gamma x(t)\} = s^\gamma X(s).$$

Cette propriété permet de réécrire l'équation différentielle (1), quand les signaux  $u(t)$ ,  $y(t)$  et leurs dérivées d'ordre entier sont nuls pour tout  $t \leq 0$ , sous la forme d'une fonction de transfert irrationnelle :

$$F(s) = \frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{\sum_{i=0}^{m_A} a_i s^{\alpha_i}}{1 + \sum_{j=1}^{m_B} b_j s^{\beta_j}}, \quad (3)$$

où  $(a_i, b_j) \in \mathbb{C}^2$ ,  $(\alpha_i, \beta_j) \in \mathbb{R}_+^2$ ,  $\forall i = 0, 1, \dots, m_A$ ,  $\forall j = 1, 2, \dots, m_B$ .

Cette forme de fonction de transfert est dite explicite, car elle ne fait intervenir que des puissances directes de  $s$ .

La fonction de transfert  $F(s)$  est commensurable à l'ordre  $\gamma \in \mathbb{R}^+$  si et seulement si elle peut s'écrire sous la forme  $F(s) = S(s^\gamma)$ , où  $S = \frac{T}{R}$  est une fonction rationnelle et  $T$  et  $R$  deux polynômes premiers entre eux. En d'autres termes, il faut que tous les ordres de dérivation de  $F(s)$  soient multiples d'un même nombre  $\gamma \in \mathbb{R}^+$ . Si tel est le cas, on peut écrire :

$$S(s) = \frac{T(s)}{R(s)} = \frac{\sum_{i=0}^{m_A} a_i s^{\alpha_i}}{1 + \sum_{j=1}^{m_B} b_j s^{\beta_j}}. \quad (4)$$

Toutes les puissances de  $s$  dans (4) sont entières. Une condition suffisante pour que  $F(s)$  soit commensurable est que tous les ordres de dérivation appartiennent à l'ensemble des nombres rationnels positifs  $\mathbb{Q}^+$ .

Les racines de  $R(s) = 0$ , qui correspondent aussi aux pôles en  $s^\gamma$  de la fonction de transfert irrationnelle  $F(s)$ , sont appelées *modes* ou *modes d'ordre  $\gamma$* .

La condition de stabilité dans le sens entrée bornée sortie bornée d'un système non entier commensurable à dérivées explicites est établie par Matignon [17, théorème 2.21 p.150], dont une version revue est présentée ci-dessous.

**Théorème** Une fonction de transfert commensurable à l'ordre  $\gamma$ ,  $F(s) = S(s^\gamma) = \frac{T(s^\gamma)}{R(s^\gamma)}$ , tel que  $S$  et  $T$  sont premiers entre eux, est BIBO stable ssi

$$0 < \gamma < 2 \quad (5)$$

et pour tout  $s \in \mathbb{C}$  tel que  $R(s) = 0$

$$|\arg(s)| > \gamma \frac{\pi}{2}. \quad (6)$$

Contrairement au cas des systèmes rationnels, la condition de stabilité ne garantit pas à la fonction de transfert d'appartenir à  $H_2(\mathbb{C}^+)$ , ensemble de Hardy des fonctions  $F$  analytiques sur la partie droite du plan complexe qui satisfont à  $\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} |F(j\omega)|^2 d\omega < \infty$ . En effet, il a été démontré dans [15] que la condition d'appartenance à  $H_2(\mathbb{C}^+)$  d'une fonction de transfert de type (3) stable (conditions 5 et 6 satisfaites) correspond à :

$$\beta_{m_B} - \alpha_{m_A} > \frac{1}{2}. \quad (7)$$

Cette condition est nécessaire à notre étude, puisqu'on ne pourra orthogonaliser des fonctions génératrices que si elles appartiennent à  $H_2(\mathbb{C}^+)$ .

## II. SYNTHÈSE DE BASES ORTHOGONALES NON ENTIÈRES

Avant de présenter la méthode de synthèse des bases orthogonales non entières, la définition du produit scalaire et les caractéristiques des bases orthogonales sont brièvement rappelées.

### A. Produit scalaire et bases orthogonales

Les fonctions classiques de Laguerre, Kautz et celles issues de la BOG sont orthogonales et forment une base complète dans  $L_2[0, \infty[$ , suivant la définition courante du produit scalaire [21] :

$$\langle l_n(t), l_m(t) \rangle = \int_0^\infty l_n(t) l_m(t) dt = \delta_{nm}. \quad (8)$$

L'application du théorème de Plancherel permet de réécrire ce produit scalaire dans le domaine fréquentiel :

$$\langle L_n(j\omega), L_m(j\omega) \rangle = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} L_n(j\omega) \overline{L_m(j\omega)} d\omega = \delta_{nm}, \quad (9)$$

avec  $L_n$  et  $L_m$  les transformées de Laplace respectives de  $l_n$  et  $l_m$ ;  $\overline{L_m}$  représente le conjugué de  $L_m$ . Par conséquent, toute fonction (ou réponse impulsionnelle)  $f(t) \in L_2[0, \infty[$  de carré intégrable, satisfaisant à :

$$\langle f(t), f(t) \rangle^{\frac{1}{2}} = \|f\|_2 < \infty, \quad (10)$$

peut s'écrire sous la forme d'une combinaison linéaire de fonctions orthogonales :

$$f(t) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n l_n(t). \quad (11)$$

La convergence des coefficients de Fourier  $a_n$  quand  $n$  tend vers l'infini, permet de tronquer la somme infinie de (11) à un ordre  $N$  fini.  $f(t)$  est alors approchée par :

$$f(t) \approx f_N(t) = \sum_{n=0}^N a_n l_n(t). \quad (12)$$

Les coefficients de Fourier sont calculés en minimisant le critère quadratique :

$$J = \int_0^\infty (f(t) - f_N(t))^2 dt, \quad (13)$$

qui correspond à la norme  $L_2$  de l'erreur d'approximation :

$$J = \|f(t) - f_N(t)\|_2^2. \quad (14)$$

Du fait de l'orthogonalité des  $l_n$ , les coefficients de Fourier optimaux sont donnés par le produit scalaire :

$$a_n = \langle f(t), l_n(t) \rangle = \langle F(j\omega), L_n(j\omega) \rangle. \quad (15)$$

### B. Procédure d'orthogonalisation de Gram-Schmidt

Soit un ensemble de fonctions  $\{F_m\}_{m=1}^M$ , tel que  $F_m \in H_2(\mathbb{C}^+) \forall m$ . Les fonctions orthogonales  $\{G_m\}_{m=1}^M$  sont obtenues, par combinaison linéaire des  $F_m$  en appliquant la procédure d'orthogonalisation de Gram-Schmidt :

$$\mathbf{G} = \Delta \times \mathbf{F}, \quad (16)$$

où  $\Delta$  est une matrice triangulaire inférieure de dimension  $M \times M$ , avec :

$$\mathbf{G} = \begin{bmatrix} G_1(s) & G_2(s) & \cdots & G_{M-1}(s) & G_M(s) \end{bmatrix}^T$$

et

$$\mathbf{F} = [ F_1(s) \quad F_2(s) \quad \cdots \quad F_{M-1}(s) \quad F_M(s) ]^T.$$

Puisque  $\mathbf{G}$  est un vecteur de fonctions orthogonales,

$$\langle \mathbf{G}, \mathbf{G}^T \rangle = \mathbf{I}, \quad (17)$$

$\mathbf{I}$  étant la matrice identité de dimension  $M \times M$  et  $\langle \mathbf{G}, \mathbf{G}^T \rangle$  la matrice des produits scalaires :

$$\langle \mathbf{G}, \mathbf{G}^T \rangle = \begin{bmatrix} \langle G_1, G_1 \rangle & \langle G_1, G_2 \rangle & \cdots & \langle G_1, G_M \rangle \\ \langle G_2, G_1 \rangle & \langle G_2, G_2 \rangle & \cdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \langle G_M, G_1 \rangle & \langle G_M, G_2 \rangle & \cdots & \langle G_M, G_M \rangle \end{bmatrix}. \quad (18)$$

Compte tenu de (16), il vient :

$$\langle \mathbf{G}, \mathbf{G}^T \rangle = \Delta \langle \mathbf{F}, \mathbf{F}^T \rangle \Delta^T = \mathbf{I}. \quad (19)$$

D'où l'on tire :

$$\Delta^T \Delta = \langle \mathbf{F}, \mathbf{F}^T \rangle^{-1}. \quad (20)$$

A partir de cette forme quadratique,  $\Delta$ , matrice triangulaire inférieure, est obtenue par la décomposition de Cholesky de  $\langle \mathbf{F}, \mathbf{F}^T \rangle^{-1}$ . Le vecteur regroupant les fonctions orthogonales s'écrit alors :

$$\mathbf{G} = \text{Cholesky} \left( \langle \mathbf{F}, \mathbf{F}^T \rangle^{-1} \right) \times \mathbf{F}. \quad (21)$$

La principale difficulté de cette procédure réside dans l'évaluation des éléments de la matrice des produits scalaires. L'annexe A présente un algorithme de calcul du produit scalaire de deux fonctions de transfert commensurables quelconques.

### C. Choix des fonctions génératrices non entières

La base orthogonale est formée à partir de fonctions génératrices  $F_m$ . Afin de se conformer aux bases orthogonales rationnelles existantes, chaque fonction génératrice doit introduire (ou augmenter la multiplicité d') un mode réel ou complexe. Afin que les fonctions génératrices soient à réponse impulsionnelle réelle, les modes complexes sont introduits par paire complexe conjuguée.

Si le choix du premier mode, à savoir  $-\lambda_{m_0}$  porte sur un réel, la première fonction génératrice s'écrit :

$$F_{m_0}(s) = \frac{1}{(s^\gamma + \lambda_{m_0})^{m_0}}. \quad (22)$$

Si en revanche, le choix du premier mode porte sur un complexe, alors le deuxième mode est obligatoirement son conjugué et les deux premières fonctions génératrices sont définies en première approche :

$$\begin{aligned} F'_{m_0}(s) &= \frac{1}{(s^\gamma + \lambda_{m_0})^{m_0}} \\ F''_{m_0}(s) &= \frac{1}{(s^\gamma + \bar{\lambda}_{m_0})^{m_0}}. \end{aligned} \quad (23)$$

Pour que  $F_{m_0}(s)$ ,  $F'_{m_0}(s)$ , et  $F''_{m_0}(s)$  appartiennent à l'espace de Hardy, il faut que les conditions de stabilité (5) et (6) soient satisfaites :

$$|\arg(-\lambda_{m_0})| > \gamma \frac{\pi}{2} \quad \text{et} \quad \gamma \in ]0, 2[ \quad (24)$$

et que la différence entre le degré du dénominateur et du numérateur soit supérieure à  $\frac{1}{2}$  (7).  $m_0$  est alors le plus petit entier satisfaisant à  $\gamma m_0 > \frac{1}{2}$ , soit :

$$m_0 = \left\lceil \frac{1}{2\gamma} \right\rceil + 1. \quad (25)$$

De par les réponses impulsionnelles complexes des fonctions génératrices (23), elles ne sont pas adaptées à la représentation de systèmes ayant des réponses impulsionnelles réelles. Il convient alors de définir, en deuxième approche, des fonctions génératrices à réponses impulsionnelles réelles  $\tilde{F}'_{m_0}$  et  $\tilde{F}''_{m_0}$  issues de combinaisons linéaires de  $F'_{m_0}$  et  $F''_{m_0}$  :

$$\begin{bmatrix} \tilde{F}'_{m_0}(s) \\ \tilde{F}''_{m_0}(s) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} c_0 & c_1 \\ c'_0 & c'_1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} F'_{m_0}(s) \\ F''_{m_0}(s) \end{bmatrix}, \quad (26)$$

où  $c_0, c_1, c'_0$  et  $c'_1$  sont des nombres complexes non nuls choisis tels que  $\tilde{F}'_{m_0}$  et  $\tilde{F}''_{m_0}$  ne soient pas colinéaires à savoir  $(c_0, c_1) \neq d(c'_0, c'_1), \forall d \in \mathbb{R}^*$ . En développant (26) et en tenant compte de (23), les conditions sur  $c_0$  et  $c'_0$  permettant d'éliminer la partie imaginaire des réponses temporelles de  $\tilde{F}'_{m_0}$  et  $\tilde{F}''_{m_0}$  sont obtenues :

$$c_1 = \bar{c}_0 \quad \text{et} \quad c'_1 = \bar{c}'_0, \quad (27)$$

conduisant à :

$$\begin{aligned} \tilde{F}'_{m_0}(s) &= \frac{\sum_{k=0}^{m_0} \beta_k s^{\gamma k}}{\left( (s^\gamma + \lambda_{m_0}) (s^\gamma + \bar{\lambda}_{m_0}) \right)^{m_0}}, \\ \tilde{F}''_{m_0}(s) &= \frac{\sum_{k=0}^{m_0} \beta'_k s^{\gamma k}}{\left( (s^\gamma + \lambda_{m_0}) (s^\gamma + \bar{\lambda}_{m_0}) \right)^{m_0}}, \end{aligned} \quad (28)$$

où

$$\begin{aligned} \beta_k &= 2 \binom{m_0}{k} \left( \Re(c_0) \Re(\lambda_{m_0}^{m_0-k}) + \Im(c_0) \Im(\lambda_{m_0}^{m_0-k}) \right) \\ \beta'_k &= 2 \binom{m_0}{k} \left( \Re(c'_0) \Re(\lambda_{m_0}^{m_0-k}) + \Im(c'_0) \Im(\lambda_{m_0}^{m_0-k}) \right). \end{aligned} \quad (29)$$

Les fonctions génératrices d'indice  $m > m_0$  sont définies récursivement, à partir de la fonction génératrice d'indice  $m-1$ , notée  $\Phi_{m-1}$ , où :

$$\Phi_{m-1} = \begin{cases} F_{m-1}, & \text{si } \lambda_{m-1} \text{ est réel} \\ \tilde{F}'_{m-1} \text{ ou } \tilde{F}''_{m-1}, & \text{si } \lambda_{m-1} \text{ est complexe} \end{cases}. \quad (30)$$

Si le choix du nouveau mode, à savoir  $-\lambda_m$ , porte sur un réel, la fonction génératrice est :

$$F_m(s) = \frac{1}{s^\gamma + \lambda_m} \Phi_{m-1}(s). \quad (31)$$

Si en revanche le choix du nouveau mode porte sur un complexe, alors le mode qui lui succède est obligatoirement son conjugué et les deux fonctions génératrices sont :

$$\begin{bmatrix} \tilde{F}'_m(s) \\ \tilde{F}''_m(s) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} c_0 & \overline{c'_0} \\ c'_0 & \overline{c_0} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{1}{s^\gamma + \lambda_m} \\ \frac{1}{s^\gamma + \overline{\lambda_m}} \end{bmatrix} \Phi_{m-1}(s), \quad (32)$$

conduisant à :

$$\begin{aligned} \tilde{F}'_m(s) &= \frac{\beta_1 s^\gamma + \beta_0}{(s^\gamma + \lambda_m)(s^\gamma + \overline{\lambda_m})} \Phi_{m-1}(s) \\ \tilde{F}''_m(s) &= \frac{\beta'_1 s^\gamma + \beta'_0}{(s^\gamma + \lambda_m)(s^\gamma + \overline{\lambda_m})} \Phi_{m-1}(s) \end{aligned}, \quad (33)$$

où

$$\begin{aligned} \beta_1 &= 2\Re(c_0) \text{ et } \beta_0 = \Re(c_0)\Re(\lambda_m) + \Im(c_0)\Im(\lambda_m) \\ \beta'_1 &= 2\Re(c'_0) \text{ et } \beta'_0 = \Re(c'_0)\Re(\lambda_m) + \Im(c'_0)\Im(\lambda_m) \end{aligned}, \quad (34)$$

$c_0$  et  $c'_0$  étant des nombres complexes tel que  $c_0 \neq dc'_0, \forall d \in \mathbb{R}_+^*$ .

Compte tenu de (24) et (25),  $F_m(s)$ ,  $F'_m(s)$  et  $F''_m(s)$  appartiennent à l'espace de Hardy  $ssi$  :

$$|\arg(-\lambda_m)| > \gamma \frac{\pi}{2} \quad \forall m = m_0, m_0 + 1, \dots \quad (35)$$

Il est intéressant de noter que, dans le cas particulier où tous les modes sont fixés au réel  $-\lambda$ , les fonctions génératrices de la base non entière de Laguerre sont obtenues [4] :

$$F_m(s) = \frac{1}{(s^\gamma + \lambda)^m}, \quad m \geq m_0 = \left\lfloor \frac{1}{2\gamma} \right\rfloor + 1 \quad (36)$$

et dans le cas où tous les modes sont des complexes conjugués, identiques et fixés à  $(-\lambda, -\overline{\lambda})$ , les fonctions génératrices de la base non entière de Kautz sont obtenues.

#### D. Complétude

La complétude de la base orthogonale généralisée non entière reste encore à démontrer. À ce jour, nous avons démontré la complétude de cette base quand tous les modes sont réels et identiques (base de Laguerre non entière).

**Théorème** Soit  $F_m(s)$  la fonction définie par (36) avec  $\lambda \in \mathbb{R}_+^*$  et  $0 < \gamma < 2$ , alors l'espace engendré par la série fonctionnelle  $\{F_m\}_{m=m_0, m_0+1, \dots, \infty}$ , où  $m_0 = \left\lfloor \frac{1}{2\gamma} \right\rfloor + 1$ , est dense dans  $H_2(\mathbb{C}^+)$ .  $\square$

Ce théorème est démontré en annexe B.

La conséquence immédiate de ce théorème est que la base  $\{G_m\}_{m=m_0, \dots, \infty}$ , issue de l'orthogonalisation par Gram-Schmidt de  $\{F_m\}_{m=m_0, \dots, \infty}$ , est dense dans  $H_2(\mathbb{C}^+)$ .

#### E. Exemple d'orthogonalisation

Ce paragraphe présente un exemple de base orthogonale dont l'ordre non entier est  $\gamma = 1.5$  et dont les modes sont tous complexes conjugués et identiques fixés à  $-1.5e^{\pm j\frac{\pi}{6}}$  (base de Kautz non entière). L'indice des deux premières fonctions génératrices est  $m_0 = \left\lfloor \frac{1}{2 \times 1.5} \right\rfloor + 1 = 1$ . Par

conséquent, les quatre premières fonctions génératrices, exprimées par (28) et (33) pour  $c_0 = 1$ ,  $c'_0 = i$  et  $\Phi_1 = \tilde{F}''_1$ , sont :

$$\begin{aligned} \tilde{F}'_1(s) &= \frac{2.00s^{1.5} + 1.30}{s^3 + 3 \cos\left(\frac{\pi}{6}\right)s^{1.5} + 2.25} \\ \tilde{F}''_1(s) &= \frac{-0.75}{s^3 + 3 \cos\left(\frac{\pi}{6}\right)s^{1.5} + 2.25} \\ \tilde{F}'_2(s) &= \frac{-1.50s^{1.5} - 0.97}{(s^3 + 3 \cos\left(\frac{\pi}{6}\right)s^{1.5} + 2.25)^2} \\ \tilde{F}''_2(s) &= \frac{0.56}{(s^3 + 3 \cos\left(\frac{\pi}{6}\right)s^{1.5} + 2.25)^2} \end{aligned}. \quad (37)$$

Elles permettent d'obtenir, par la procédure d'orthogonalisation de *Gram-Schmidt*, les fonctions orthogonales :

$$\begin{aligned} G_1(s) &= \frac{1.37s^{1.5} + 0.89}{s^3 + 2.60s^{1.5} + 2.25} \\ G_2(s) &= \frac{0.28s^{1.5} + 1.71}{s^3 + 2.60s^{1.5} + 2.25} \\ G_3(s) &= \frac{-0.69s^{4.5} - 0.60s^3 - 0.66s^{1.5} + 1.26}{(s^3 + 2.60s^{1.5} + 2.25)^2} \\ G_4(s) &= \frac{-0.92s^{4.5} - 2.54s^3 - 3.57s^{1.5} - 2.71}{(s^3 + 2.60s^{1.5} + 2.25)^2} \end{aligned}. \quad (38)$$

Les réponses impulsionnelles de ces fonctions (figure (1)) sont calculées en appliquant les méthodes classiques de simulation des systèmes non entiers [3].

### III. IDENTIFICATION DE SYSTÈMES EN UTILISANT LES BASES ORTHOGONALES NON ENTIÈRES

Lors de l'identification de systèmes en utilisant une base orthogonale non entière, l'ordre de dérivation  $\gamma$  ainsi que tous les modes sont fixés à partir d'une connaissance a priori, d'une analyse harmonique ou d'une identification sommaire par un modèle de type ARX non entier d'ordre réduit. Ainsi pour les systèmes régis par des équations de diffusion par exemple, les études théoriques [5], [7] montrent que l'ordre de dérivation est souvent un multiple de 0.5. Un choix adéquat des paramètres de la base permet d'approcher le système par un nombre réduit de fonctions orthogonales. A défaut, si une approximation n'est pas jugée satisfaisante, le nombre de fonctions orthogonales est augmenté dans le modèle final.

Les paramètres de la base étant fixés, les fonctions orthogonales sont calculées conformément à la démarche présentée au paragraphe II-B. Ce modèle d'identification est connu sous le nom de *modèle à dénominateur fixe*, puisque l'estimation paramétrique n'est effectuée que sur les coefficients de Fourier une fois que tous les paramètres du dénominateur aient été fixés.

#### A. Estimation paramétrique

Soient  $u(t)$  et  $y^*(t)$  respectivement l'entrée et la sortie mesurées entre les instants  $t_0$  et  $t_f$  d'un système  $H$  dont la fonction de transfert est approchée par une combinaison linéaire de fonctions orthogonales :

$$H(s) \approx \sum_{m=m_0}^M g_m G_m(s) \quad (39)$$

soit, sous la forme vectorielle :

$$H(s) \approx \mathbf{g}^T \mathbf{G}(s), \quad (40)$$

avec

$$\mathbf{g} = [g_{m_0}, g_{m_0+1}, \dots, g_M]^T \quad (41)$$

et

$$\mathbf{G}(s) = [G_{m_0}(s), G_{m_0+1}(s), \dots, G_M(s)]^T. \quad (42)$$

Une estimation  $\hat{\mathbf{g}}$  du vecteur des coefficients de Fourier  $\mathbf{g}$  est obtenue par minimisation de la norme quadratique de l'erreur de sortie :

$$\varepsilon(t, \hat{\mathbf{g}}) = \sum_{m=m_0}^M \hat{g}_m y_{G_m}(t) - y^*(t) = \hat{\mathbf{g}}^T \mathbf{y}_{\mathbf{G}}(t)^T - y^*(t), \quad (43)$$

où  $y_{G_m}$  et  $\mathbf{y}_{\mathbf{G}}$  sont définis respectivement par :

$$y_{G_m}(t) = G_m(t) \otimes u(t) \quad (44)$$

et

$$\mathbf{y}_{\mathbf{G}}(t) = [y_{G_{m_0}}(t), y_{G_{m_0+1}}(t), \dots, y_{G_M}(t)]. \quad (45)$$

$\otimes$  représente le produit de convolution.

L'erreur de sortie tient compte des erreurs d'approximation dont celles engendrées par la troncature à l'ordre  $M$  des fonctions orthogonales.

Le modèle étant linéaire par rapport à  $\hat{\mathbf{g}}$ , la minimisation de l'erreur quadratique :

$$J_{[t_0, t_f]}(\hat{\mathbf{g}}) = \int_{t_0}^{t_f} (\varepsilon(t, \hat{\mathbf{g}}))^2 dt, \quad (46)$$

conduit au calcul de la valeur optimale de  $\hat{\mathbf{g}}$ , à savoir  $\hat{\mathbf{g}}_{\text{opt}}$ , par la formule des moindres carrés :

$$\hat{\mathbf{g}}_{\text{opt}} = \left[ \int_{t_0}^{t_f} (\mathbf{y}_{\mathbf{G}}(t)^T \mathbf{y}_{\mathbf{G}}(t)) dt \right]^{-1} \int_{t_0}^{t_f} \mathbf{y}_{\mathbf{G}}(t)^T y^*(t) dt. \quad (47)$$

Soient  $\mathbf{Y}_{[t_0, t_f]}^*$  le vecteur discrétisé contenant la sortie mesurée du système entre  $t_0$  et  $t_f$  :

$$\mathbf{Y}_{[t_0, t_f]}^* = [y^*(t_0), \dots, y^*(t_f)]^T \quad (48)$$

et  $\Phi_{[t_0, t_f]}$  la matrice de régression dont les colonnes représentent les sorties des différentes fonctions de la base :

$$\Phi_{[t_0, t_f]} = [\mathbf{y}_{\mathbf{G}}^T(t_0), \dots, \mathbf{y}_{\mathbf{G}}^T(t_f)]^T. \quad (49)$$

L'équation (47) peut alors être approchée par :

$$\hat{\mathbf{g}}_{\text{opt}} = (\Phi_{[t_0, t_f]}^T \Phi_{[t_0, t_f]})^{-1} \Phi_{[t_0, t_f]}^T \mathbf{Y}_{[t_0, t_f]}^*. \quad (50)$$

Les caractéristiques de l'estimateur des moindres carrés [14] s'appliquent à  $\hat{\mathbf{g}}$ . Ainsi, sous l'hypothèse selon laquelle la séquence  $r$  des résidus entre la sortie du modèle optimal et la vraie sortie du système est blanche, on montre que l'espérance mathématique de l'estimateur  $\hat{\mathbf{g}}_{\text{opt}}$  tend vers

les 'vrais' paramètres quand le nombre de mesures est suffisamment élevé et que la matrice de covariance est donnée par :

$$\mathbf{C} = \text{cov}(\hat{\mathbf{g}}_{\text{opt}}) = \sigma^2 \left( \Phi_{[t_0, t_f]}^T \Phi_{[t_0, t_f]} \right)^{-1}, \quad (51)$$

où  $\sigma^2$ , la variance de  $r$ , est estimée par :

$$\hat{\sigma}^2 = \frac{1}{N - M} \sum_{k=1}^N \left( \varepsilon \left( t_0 + k \frac{t_f - t_0}{N}, \hat{\mathbf{g}}_{\text{opt}} \right) \right)^2, \quad (52)$$

$N$  étant le nombre de mesures.

### B. Exemple d'identification

Pour illustrer l'utilisation des bases orthogonales non entières en identification de systèmes, cette section présente un exemple industriel réel dont la nature ne peut être divulguée pour des raisons de confidentialité. Un temps de relaxation suffisamment long est prévu avant d'appliquer une excitation de type 'signal binaire pseudo aléatoire'. Les signaux d'entrée/sortie, échantillonnés à 0.01s puis filtrés pour atténuer les bruits de mesures sont tracés sur la figure (2). En plus de ces signaux, l'analyse harmonique a permis de fixer l'ordre commensurable à 0.6 et les modes des fonctions génératrices de la base à  $(-0.6$  et  $-4.1e^{\pm j0.12\pi})$ . La base orthogonale généralisée non entière est alors synthétisée, par application de la procédure de Gram-Schmidt présentée au paragraphe II-B :

$$\begin{aligned} G_1(s) &= \frac{0.78}{s^{0.6} + 0.60} \\ G_2(s) &= \frac{0.70s^{1.2} - 8.83s^{0.6} - 16.09}{s^{1.8} + 8.40s^{1.2} + 21.49s^{0.6} + 10.09} \\ G_3(s) &= \frac{0.22s^{1.2} - 24.82s^{0.6} + 24.49}{s^{1.8} + 8.40s^{1.2} + 21.49s^{0.6} + 10.09} \end{aligned} \quad (53)$$

Les coefficients de Fourier sont calculés en minimisant (46). Le modèle optimal obtenu est :

$$\hat{H}_{\text{opt}}(s) = 0.1138G_1(s) + 0.0647G_2(s) - 0.0002G_3(s) \quad (54)$$

La réponse du modèle (54) ainsi que les fonctions de la base orthogonale pondérées par leur coefficient de Fourier respectif sont tracées sur la figure (3).

Au vu du dernier coefficient, la contribution de la dernière fonction peut visiblement être négligée, conduisant au modèle à deux fonctions orthogonales dont les paramètres ont été réévalués :

$$\hat{H}_{\text{opt}}(s) = 0.1146G_1(s) + 0.0652G_2(s). \quad (55)$$

Le calcul de la matrice de covariance permet d'avoir une idée sur la précision du résultat :

$$\mathbf{C} = 10^{-10} \begin{pmatrix} 0.3921 & 0.4907 \\ 0.4907 & 0.6149 \end{pmatrix}. \quad (56)$$

Les courbes représentatives de la sortie du système et du modèle optimal à deux fonctions orthogonales sont tracées sur un jeu de données de validation sur la figure (4).

#### IV. CONCLUSION

Une méthode générique est développée dans cet article pour la synthèse de bases orthogonales non entières quelconques. Un choix adéquat de fonctions génératrices permet d'étendre la définition des bases classiques de Laguerre, Kautz et de la base orthogonale généralisée (BOG) à des ordres de dérivation non entiers. Un nouveau degré de liberté est ainsi introduit, à savoir l'ordre de dérivation. Ces bases orthogonales non entières sont ensuite exploitées pour l'identification de systèmes.

##### I. ANNEXE A - CALCUL DU PRODUIT SCALAIRE DE DEUX FONCTIONS DE TRANSFERT NON ENTIÈRES

Soient  $G(s)$  et  $H(s)$  deux fonctions de transfert non entières stables, à dérivées explicites et commensurables. Le produit scalaire de ces deux fonctions est défini dans le domaine fréquentiel par :

$$\langle G, H \rangle = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} G(j\omega) \overline{H(j\omega)} d\omega. \quad (57)$$

Soit le changement de variable :

$$x = \omega^\gamma \Rightarrow d\omega = \frac{1}{n} x^{\frac{1}{\gamma}-1} dx, \quad (58)$$

avec  $\gamma$  l'ordre commensurable. Soient  $q$  et  $\rho$  respectivement la partie entière et non-entière de  $\frac{1}{\gamma}$ . Alors,

$$\langle G, H \rangle = \frac{1}{\pi n} \int_0^{\infty} x^{q+\rho-1} \frac{A(x)}{B(x)} dx. \quad (59)$$

Deux cas se distinguent :

A.  $\deg(B) \leq \deg(A) + \frac{1}{n}$

Dans ce cas,

$$\langle G, H \rangle = \infty,$$

car le degré du numérateur dans (59) est supérieur à celui du dénominateur. C'est le cas des systèmes stables pour lesquels la condition (7) n'est pas satisfaite.

B.  $\deg(B) > \deg(A) + \frac{1}{n}$

Suivant la valeur de  $\rho$ , la solution de l'intégrale (57) est différente. Deux cas se distinguent, de nouveau :

B.1  $0 < \rho < 1$

Cette condition est équivalente à  $\frac{1}{\gamma}$  est non entier. Un développement en éléments simples de  $x^q \frac{A(x)}{B(x)}$  donne :

$$x^{\rho-1} \left[ x^q \frac{A(x)}{B(x)} \right] = \sum_{k=1}^r \sum_{l=1}^{v_k} \frac{a_{k,l} x^{\rho-1}}{(x+s_k)^l}.$$

En remplaçant dans (59), on obtient :

$$\langle G, H \rangle = \frac{1}{n\pi} \sum_{k=1}^r \sum_{l=1}^{v_k} a_{k,l} s_k^{-l} \int_0^{\infty} \frac{x^{\rho-1} dx}{(1+s_k^{-1}x)^l}.$$

La solution de cette intégrale est reportée dans [10, formule 3.194, 4 p. 285]. D'où :

$$\langle G, H \rangle = \frac{\sum_{k=1}^r \sum_{l=1}^{v_k} (-1)^{l-1} a_{k,l} s_k^{\rho-l} \binom{\rho-1}{l-1}}{n \sin(\rho\pi)}.$$

B.2  $\rho = 0$

Cette condition est équivalente à  $\frac{1}{\gamma}$  entier. On réalise le développement en série suivant :

$$x^{q-1} \frac{A(x)}{B(x)} = \sum_{k=2}^r \frac{c_k}{(x+s_1)(x+s_k)} + \sum_{k=1}^r \sum_{l=2}^{v_k} \frac{b_{k,l}}{(x+s_k)^l},$$

où  $s_1$  est un pôle choisi arbitrairement. Après quelques développements laborieux on arrive à l'expression finale :

$$\langle G, H \rangle = \sum_{k=2}^r \frac{c_k (\ln(s_k) - \ln(s_1))}{n\pi (s_k - s_1)} + \sum_{k=1}^r \sum_{l=2}^{v_k} \frac{b_{k,l} s_k^{1-l}}{n\pi (l-1)}.$$

Cela complète le calcul du produit scalaire de deux fonctions de transfert non entières, stables, à dérivées explicites et commensurables.

##### II. ANNEXE B - COMPLÉTUDE DE LA BASE DE LAGUERRE NON ENTIÈRE

Soit :

$$w(s) = \frac{1}{s^\gamma + \lambda}.$$

$w$  est une fonction bijective de  $\mathbb{C}^+$  vers un ensemble ouvert  $\Omega$  borné par le contour de Jordan  $\Gamma$ .  $\Gamma$  est l'union d'un ensemble finie d'arcs de cercles.

Soit  $G(s) = (s^\gamma + \lambda)^{m_0} F(s)$  où  $m_0 = \lfloor \frac{1}{2\gamma} \rfloor + 1$ .

Soit  $E(\Omega)$  l'ensemble des fonctions analytiques dans  $\Omega$  et continues dans  $\overline{\Omega} = \Omega \cup \Gamma$ . Alors,  $G \circ w^{-1} \in E(\Omega)$ . En appliquant le théorème de *Runge - Walsh* [21],  $G \circ w^{-1}$  peut être approché par un polynôme  $P(z)$  :  $\forall z \in \overline{\Omega}, \forall \varepsilon > 0, \exists P(z)$ , tel que  $\|G \circ w^{-1} - P(z)\| \leq \varepsilon$ .

Notons  $P(z) = \sum_{n=0}^N a_n(z)^n$ ,  $N \in \mathbb{N}$ . En remplaçant  $z$  par  $w(s)$ , on obtient :

$$\forall s \in \overline{\mathbb{C}^+} : |G(s) - \sum_{n=0}^N a_n(w(s))^n| \leq \varepsilon,$$

$$|(s^\gamma + \lambda)^{m_0} F(s) - \sum_{n=0}^N a_n(w(s))^n| \leq \varepsilon.$$

Comme  $\lambda > 0$  et  $\Re(s) \geq 0$  (domaine de convergence de la transformée de Laplace), alors  $(s^\gamma + \lambda)^{m_0} \neq 0$  et :

$$|F(s) - (s^\gamma + \lambda)^{-m_0} \sum_{n=0}^N a_n(w(s))^n| \leq \varepsilon |(s^\gamma + \lambda)^{-m_0}|,$$

$$|F(s) - \sum_{n=0}^N a_n(w(s))^{n+m_0}| \leq \varepsilon |w(s)^{m_0}|.$$

D'autre part,  $w^m \in H_2(\mathbb{C}^+)$  ( $m \in \mathbb{N}$ ) ssi  $m \geq m_0$ . Donc,  $\forall n \in \mathbb{N}, w^{n+m_0} \in H_2(\mathbb{C}^+)$ . Or  $F \in H_2(\mathbb{C}^+)$ . On a alors

$$\int_{-j\infty}^{j\infty} |F(s) - \sum_{n=0}^N a_n(w(s))^{n+m_0}|^2 ds \leq \epsilon^2 \int_{-j\infty}^{j\infty} |w(s)|^{2m_0} ds.$$

Par conséquent,  $\forall F(s) \in H_2(\mathbb{C}^+), \forall \epsilon > 0, \exists P(w(s)) = \sum_{n=0}^N a_n(w(s))^{n+m_0}$  tel que :

$$\|F(s) - \sum_{n=0}^N a_n(w(s))^{n+m_0}\|_2 \leq \epsilon.$$

Par conséquent, la série  $\{w^m\}_{m \geq m_0}$  est dense dans  $H_2(\mathbb{C}^+)$ . On en déduit alors que l'espace engendré par des combinaisons linéaires de  $F_m(s)$  est dense dans  $H_2(\mathbb{C}^+)$ .  $\square$

#### RÉFÉRENCES

- [1] P.C. Abbott. Generalized Laguerre polynomials and quantum mechanics. *J. Phys. A : Math. Gen.*, 33(42) :7659–7660.
- [2] H. Akçay and B. Ninness. Orthonormal basis functions for modelling continuous-time systems. *Signal processing*, 77 :261–274, Februar 1999.
- [3] M. Aoun, R. Malti, F. Levron, and A. Oustaloup. Numerical simulations of fractional systems. In *In proceedings of ASME*, Chicago, USA, 02-06 September 2003.
- [4] M. Aoun, R. Malti, F. Levron, and A. Oustaloup. Orthonormal basis functions for modeling continuous-time fractional systems. In Elsevier, editor, *SySId*, Rotterdam, Pays bas, August 2003. IFAC, Elsevier.
- [5] J.-L. Battaglia, L. Le Lay, Batsale J.-C., Oustaloup A., and Cois O. Heat flux estimation through inverted non integer identification models. *International Journal of Thermal Science*, 39(3) :374–389, 2000.
- [6] O. Cois. *Systèmes linéaires non entiers et identification par modèle non entier : application en thermique*. PhD thesis, Univ. of Bordeaux 1, France, 2002.
- [7] R. Darling and J. Newman. On the short behavior of porous intercalation electrodes. *J. Electrochem. Soc.*, 144(9) :3057–3063, 1997.
- [8] A.M. El-Sayed. On the generalized Laguerre polynomials of arbitrary (fractional) orders and quantum mechanics. *J. Phys. A : Math. Gen.*, 32 :8647–8654, 1999.
- [9] A.-L. Elshafei, G.A. Dumont, and A. Elnaggar. Adaptive gpc based on Laguerre-filters modelling. *Automatica*, 30(12) :1913–1920, December 1994.
- [10] I.S. Gradshteyn and I.M. Ryzhik. *Table of integrals, series, and products*. 1980.
- [11] I. Horowitz. *Synthesis of Feedback Systems*. Academic Press, New-York, 1963.
- [12] L. Le Lay. *Identification fréquentielle et temporelle par modèle non entier*. PhD thesis, Université Bordeaux I, Talence, France, octobre 1998.
- [13] Y. Lee. Synthesis of electrical networks by means of Fourier transforms of Laguerre's functions. *J. Math. Phys.*, 11 :83–113, 1931.
- [14] L. Ljung. *System identification*. 2nd edition, 1999.
- [15] R. Malti, M. Aoun, F. Levron, and A. Oustaloup.  $H_2$  norm of fractional differential systems. In *Proceedings of ASME*, number DETC2003/VIB-48387, September 2003.
- [16] R. Malti, S.B. Ekongolo, and J. Ragot. Dynamic SISO and MIMO system approximations based on optimal Laguerre models. *IEEE TAC*, 43(9), 1998.
- [17] D. Matignon. Stability properties for generalized fractional differential systems. *ESAIM proceedings - Systèmes Différentiels Fractionnaires - Modèles, Méthodes et Applications*, 5, 1998.
- [18] B. Ninness and F. Gustafsson. A unifying construction of orthonormal bases for system identification. *IEEE TAC*, 42(4) :515–521, 1997.
- [19] K.B. Oldham and J. Spanier. *The fractional calculus*. Academic Press, New-York and London, 1974.
- [20] S.G. Samko, A.A. Kilbas, and O.I. Marichev. *Fractional integrals and derivatives : theory and applications*. Gordon and Breach Science, 1993.
- [21] G. Szegő. *Orthogonal Polynomials*. American Mathematical Society, 4th edition, 1975.
- [22] J.-C. Trigeassou, T. Poinot, J. Lin, A. Oustaloup, and F. Levron. Modeling and identification of a non integer order system. Karlsruhe, Germany, 1999. European Control Conference.
- [23] B. Wahlberg. System identification using Laguerre models. *IEEE TAC*, 36 :551–562, 1991.
- [24] N. Wiener. The theory of prediction. *Modern Math. for Engrn.*, New York, 1956.

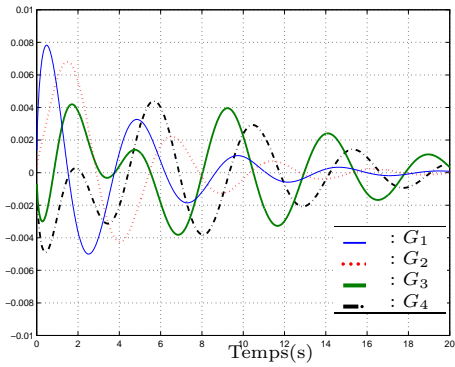


Fig. 1. Réponses impulsionnelles des quatre premières fonctions de la base avec  $\gamma = 1.5$  et  $\lambda = 1.5e^{\pm j\frac{\pi}{6}}$

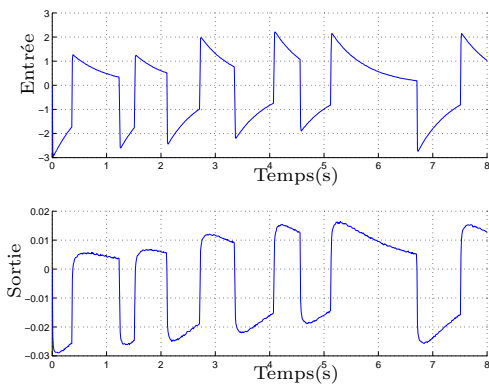


Fig. 2. Entrée et sortie filtrées du système réel

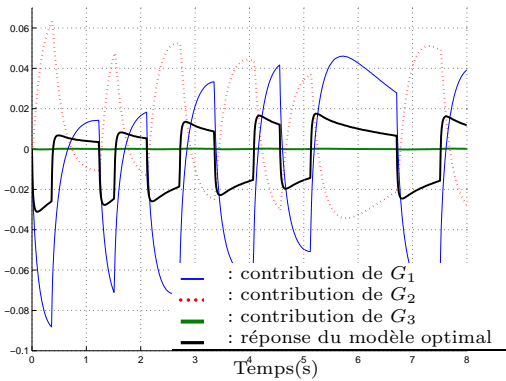


Fig. 3. Réponses des fonctions de la base et du modèle estimé

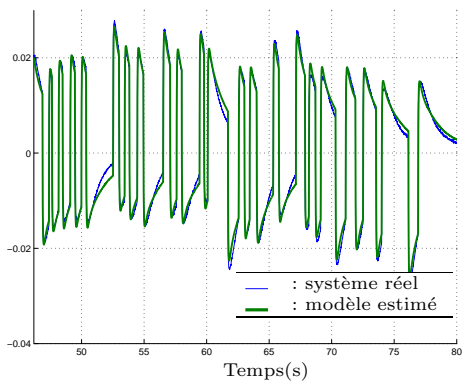


Fig. 4. Réponse du système réel et du modèle estimé pour une entrée de validation