

UNIVERSITÉ DE PROVENCE

Thèse traitant de

« La modélisation  
des tubes à onde progressive à hélice  
en domaine temporel »

présentée par  
Anass AÏSSI

en vue d'obtenir le titre de Docteur de l'Université de Provence

spécialité : Rayonnement et Plasma

Thèse soutenue publiquement le 5 décembre 2008 à 14h30 devant le jury  
composé de MM. :

Les rapporteurs :

- Arne Jacob, professeur à l'université de Hambourg-Harbourg
- Alfredo De Rossi, ingénieur de recherche à Thales Research and Technology

Les membres du jury :

- Frédéric André, ingénieur de recherche à Thales Electron Devices
- Fabrice Doveil, directeur de recherche au CNRS (directeur de thèse)
- Yves Elskens, professeur à l'université Aix-Marseille 1
- André Nicolet, professeur à l'université Aix-Marseille 3
- Jérôme Puech, ingénieur de recherche au CNES

Laboratoire de Physique des Interactions Ioniques et Moléculaires  
(Unité Mixte de Recherche du CNRS 6633)  
Centre de Saint-Jérôme-case 321-13397 Marseille Cedex 20

Je voudrais avant de commencer remercier quelques personnes.

Je remercie tout d'abord MM. Fabrice Doveil et Frédéric André pour leur encadrement et leur confiance. Leurs conseils avisés, ainsi que leurs encouragements ont beaucoup contribué à l'accomplissement de ce travail.

Je remercie ensuite M. Yves Elskens qui a bien voulu me traduire en langage humain une certaine littérature mathématique. Par ailleurs, sa relecture minutieuse de mon manuscrit a élevé ce dernier du rang de brouillon.

Aussi, je me dois de remercier MM. Jean-François David, Alain Leclair et David Bariou de la société Thales Electron Devices à Vélizy pour le temps qu'ils ont bien voulu me consacrer malgré la surcharge de travail qui pèse sur eux.

Enfin et surtout, je remercie ma femme Yamina qui m'a fait oublier la difficulté et qui, à table, a toujours supporté mes élucubrations sur la modélisation en domaine temporel des tubes à onde progressive.

# Table des matières

<b>1</b>	<b>Introduction</b>	<b>5</b>
<b>2</b>	<b>Simulation du faisceau d'électrons</b>	<b>11</b>
2.1	Équation de Vlasov en une dimension . . . . .	12
2.2	Résolution de l'équation de Vlasov . . . . .	13
2.2.1	Méthodes semi-lagrangiennes . . . . .	14
2.2.2	Méthodes à conservation de flux . . . . .	16
2.2.3	Méthode « <i>Piecewise Parabolic Method</i> » . . . . .	20
2.2.4	Mise en oeuvre et essai de la méthode PPM . . . . .	23
2.3	Injection de particules . . . . .	24
2.4	Répulsion coulombienne au sein du faisceau . . . . .	25
<b>3</b>	<b>Approche par circuit équivalent</b>	<b>29</b>
3.1	Les circuits équivalents . . . . .	29
3.2	La structure à onde lente à hélice . . . . .	30
3.3	Construction du circuit équivalent . . . . .	31
3.4	Caractéristiques du circuit équivalent . . . . .	32
3.5	Courbe de dispersion du circuit équivalent . . . . .	33
3.6	Évolution temporelle du circuit équivalent . . . . .	34
3.6.1	Excitation du circuit par un signal . . . . .	36
3.6.2	Régime établi . . . . .	38
3.7	Ondes stationnaires . . . . .	38
3.7.1	Adaptation à large bande de fréquence . . . . .	39
3.7.2	Adaptation autour d'une fréquence . . . . .	40
3.8	Interaction de la structure à onde lente avec le faisceau . . . . .	41
3.8.1	Action de la structure à onde lente sur le faisceau . . . . .	41
3.8.2	Action du faisceau sur la structure à onde lente . . . . .	43
3.9	Évolution globale du TOP : <i>divide et impera</i> . . . . .	44
3.10	Résultats . . . . .	46
3.10.1	Interaction d'un faisceau continu avec un signal harmonique . . . . .	46
3.10.2	Génération d'un signal par un faisceau modulé . . . . .	49
3.11	Conclusion . . . . .	49

<b>4</b>	<b>Approche par réduction de modèle</b>	<b>53</b>
4.1	Discretisation des équations de Maxwell . . . . .	53
4.2	Évolution temporelle des systèmes linéaires du second ordre .	55
4.3	Réduction des systèmes dynamiques linéaires du second ordre	57
4.3.1	La méthode des moments . . . . .	58
4.3.2	Cas des systèmes du premier ordre . . . . .	59
4.3.3	Algorithme d'Arnoldi et inversion de grandes matrices	61
4.3.4	Réduction des systèmes du second ordre . . . . .	63
4.3.5	Optimisation de la base de projection . . . . .	64
4.4	Résultats . . . . .	65
4.4.1	Exemple d'une structure périodique bidimensionnelle .	65
4.5	Conclusion et perspectives . . . . .	68
<b>5</b>	<b>Conclusion</b>	<b>71</b>

# Chapitre 1

## Introduction

Ce manuscrit ne livre pas un code complet et fonctionnel pour simuler les tubes à onde progressive (TOP). Il propose par contre quelques idées pour simuler les TOP en domaine temporel.

Les tubes hyperfréquence sont des dispositifs sous vide où un faisceau d'électrons interagit avec un champ électromagnétique dans le but de l'amplifier. Ce champ, dont la fréquence est de l'ordre de 1 GHz, est de type hyperfréquence.

Un tube hyperfréquence est composé d'au moins trois parties :

1. un canon à électrons qui forme et accélère le faisceau d'électrons ;
2. une zone d'interaction où les électrons interagissent et échangent de l'énergie avec le champ électromagnétique ;
3. un collecteur qui récupère les électrons après l'interaction.

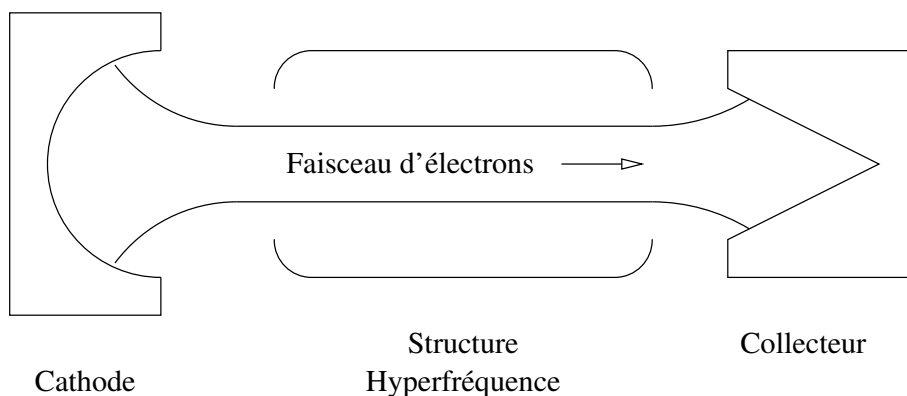


FIG. 1.1 – Les trois parties d'un tube hyperfréquence.

Le faisceau d'électrons, issu d'une cathode, est accéléré par un champ électrostatique avant d'être introduit dans la structure contenant le champ hyperfréquence. Là, un fort champ magnétique longitudinal focalise le fais-

ceau et l'empêche de se disperser dans la structure sous l'effet de la répulsion coulombienne. Ensuite, suivant la configuration spatiale du champ, le faisceau d'électrons est soit accéléré, soit freiné. S'il est accéléré, alors le dispositif est un accélérateur de particules ; et si le faisceau est freiné, alors par conservation d'énergie et d'impulsion le champ hyperfréquence est amplifié, et le dispositif fait partie des tubes hyperfréquence.

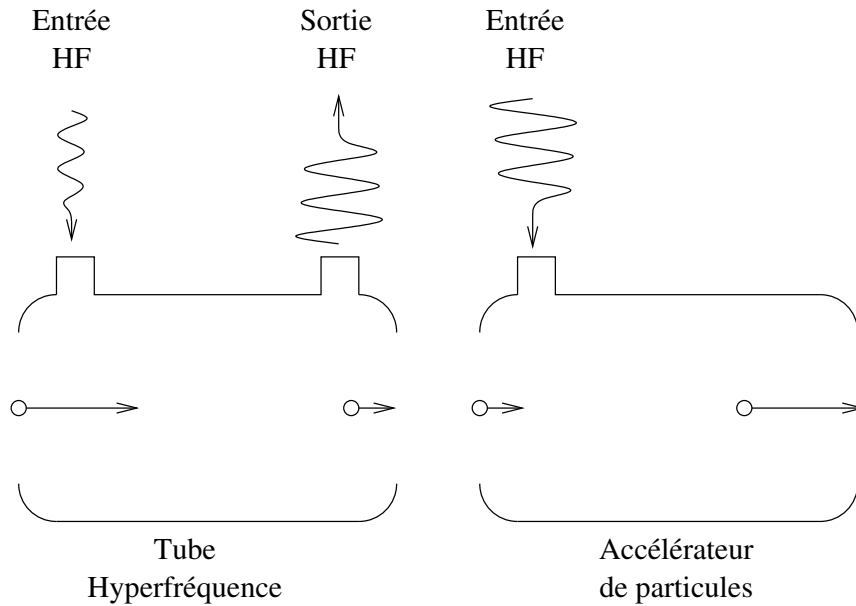


FIG. 1.2 – Contrairement aux accélérateurs de particules, un tube HF ralentit les électrons pour amplifier le champ hyperfréquence.

Le champ hyperfréquence interagissant avec les électrons peut être soit stationnaire, soit propagatif. Dans le premier cas, le champ oscille dans une cavité métallique résonante, et les électrons interagissent avec le champ en traversant la cavité. C'est le cas par exemple des klystrons et des magnétrons. Dans l'autre cas, le champ se propage dans un guide d'onde, et interagit tout le long de son trajet avec le faisceau d'électrons. C'est le cas des TOP. La différence fondamentale entre les deux cas est que les guides d'ondes peuvent propager des champs sur une grande plage de fréquence, alors que les structures du type cavité ne fonctionnent qu'autour de leur fréquence de résonance. On choisit donc une structure de champ stationnaire ou progressive selon que l'on veuille construire un amplificateur à bande étroite ou à large bande.

Dans les TOP, les guides d'ondes sont appelés structures à onde lente ou encore lignes à retard, car leur but est non seulement de guider le champ hyperfréquence, mais aussi de ralentir la propagation de celui-ci afin qu'il puisse interagir efficacement avec les électrons. En effet, si les électrons voyaient le champ défilier trop rapidement, l'effet moyen de l'interaction serait nul.

Les lignes à retard peuvent prendre diverses formes parmi lesquelles on trouve les guides d'ondes repliés, les guides à cavités couplées, les lignes à hélice, ou les lignes dites « ring-and-bar ». Nous nous intéresserons, dans le cadre de cette thèse, aux lignes à hélice qui représentent actuellement plus de 50% des tubes hyperfréquence professionnels vendus dans le monde [1].

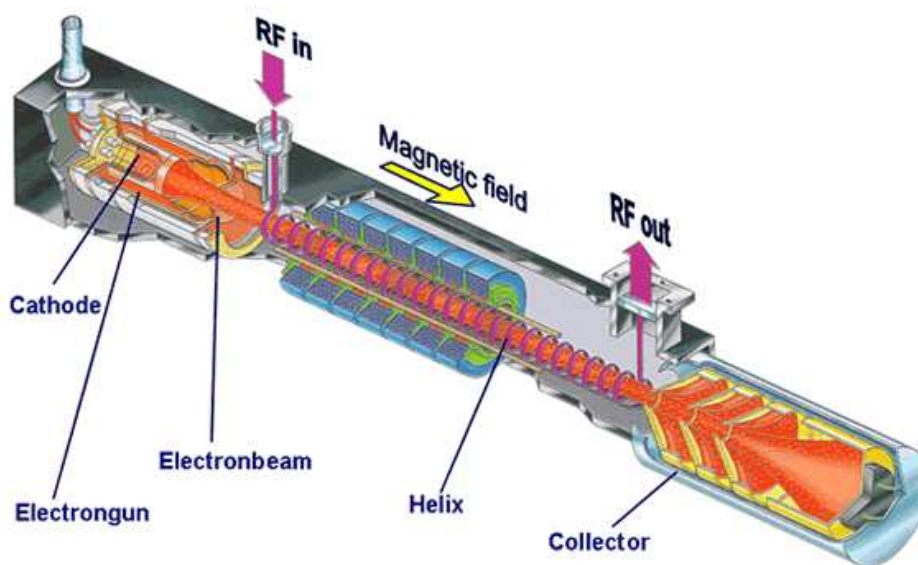


FIG. 1.3 – La ligne à hélice guide et ralentit le champ hyperfréquence afin qu'il interagisse efficacement avec le faisceau d'électrons.

Les TOP à hélice sont utilisés comme amplificateurs dans les domaines des télécommunications spatiales, des radars, et des contre-mesures électroniques. On y met à contribution leur large bande de fréquence pouvant dépasser deux décades, leur rendement élevé ( $\approx 70\%$ ), et leur puissance de sortie atteignant le kilowatt.



FIG. 1.4 – Photographie de quelques TOP proposés par Thales Electron Devices. Le plus petit fait 15 cm de long, et le plus gros délivre une puissance instantanée de  $\approx 1$  kW.

Par ailleurs, le TOP constitue un outil exceptionnellement simple et riche pour étudier l'interaction onde-particule en physique des plasmas [3]. Dans

cette application, le TOP joue le rôle du plasma pour propager des ondes, mais évite tous les phénomènes parasites qui peuvent apparaître dans un plasma réel. Récemment, le phénomène de chaos hamiltonien a été finement étudié dans un tel dispositif, et une méthode de contrôle du chaos y a été expérimentée avec succès [4].



FIG. 1.5 – Le TOP de l'équipe Turbulence Plasma de l'université de Provence permet d'étudier finement l'interaction onde-particule sur une distance de 4 m.

Dans les deux utilisations des TOP que nous venons de mentionner, la simulation numérique joue un rôle important. Dans le cadre industriel, elle constitue un outil essentiel pour développer les TOP en prenant en compte les demandes des clients en termes de fréquence, de puissance, de rendement, etc. Et dans le cadre de la recherche fondamentale, la simulation numérique permet de dimensionner les expériences de laboratoire, et d'aiguiller l'expérimentateur dans le réglage ou la recherche de phénomènes résonants.

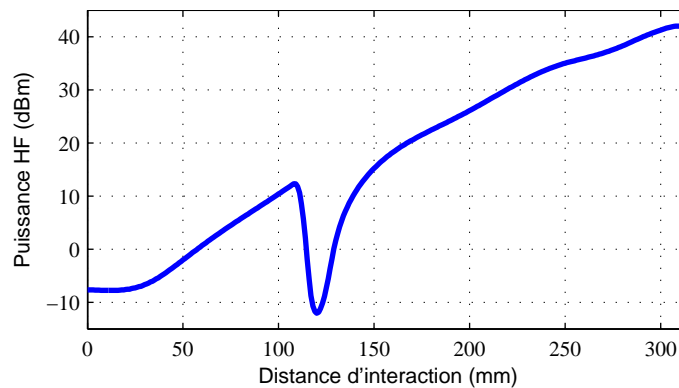


FIG. 1.6 – Graphique tracé par MvtRad, un code de simulation développé et utilisé par Thales Electron Devices [20].

Ainsi, que ce soit dans un cadre industriel ou de recherche fondamentale, la simulation numérique se doit d'être le plus juste possible. Or la justesse d'une simulation dépend de la qualité du modèle physique sous-jacent. Plus ce modèle contiendra d'hypothèses simplificatrices sur le système à modéliser, plus le champ de validité de la simulation sera restreint ; et plus le modèle sera général, plus la simulation sera représentative de la réalité. Mais il semble que la richesse d'un modèle aille de pair avec la quantité de calcul nécessaire à sa mise en œuvre. Un compromis doit donc être recherché en profitant constamment de l'augmentation des puissances de calcul pour enrichir les modèles.

Aujourd'hui, la simulation des TOP se fait essentiellement en domaine fréquentiel, c'est-à-dire que l'on suppose dès le départ qu'un ensemble fini et défini de fréquences compose le champ hyperfréquence, ainsi que toutes les grandeurs variables dans le TOP. Cette hypothèse est utilisée depuis le premier modèle de TOP proposé par Pierce en 1950 [5] jusqu'au code de simulation en 3D CTLSS [6], en passant par le modèle de Rowe [7], le code CHRISTINE [8], ou le code MUSE [9].

Ces modèles et les codes qui en découlent sont massivement utilisés dans l'industrie, et donnent au quotidien des résultats rapides et très fiables pour dimensionner et fabriquer des TOP. Mais leur point faible est qu'ils ne travaillent qu'aux fréquences qui ont été prescrites par l'ingénieur. Cette approche simplifie grandement les calculs, et les accélère donc, mais elle est incapable de prendre en compte des phénomènes non ou mal définis *a priori*. Par exemple, si l'on veut observer une instabilité, qu'elle soit parasite ou voulue, on est obligé de déterminer sa fréquence avant de débiter la simulation ; et si on ne la connaît pas, il faudra alors procéder à un balayage en fréquence et multiplier les simulations jusqu'à observer le développement de l'instabilité.

On peut aussi ajouter l'exemple de l'étude des TOP en régime transitoire comme lors du démarrage ou de l'extinction d'un tube. Dans ce cas, l'abondance des fréquences mises en jeu est telle qu'une approche fréquentielle conduirait à une importante déformation de la réalité.

La simulation des TOP en domaine temporel devrait permettre à l'ingénieur ou au chercheur de lancer une simulation sans se préoccuper de définir précisément les fréquences entrant en jeu. Mais elle génère généralement de très grands temps de calcul dès qu'il s'agit de traiter des systèmes réels. Et cela est suffisant pour décourager l'ingénieur ou le chercheur qui recherche légitimement dans la simulation un moyen rapide d'exploration.

Pour remédier à cet inconvénient, nous proposons deux idées pour alléger la simulation en domaine temporel de la structure à onde lente :

1. l'utilisation d'un circuit équivalent ;
2. la réduction des équations décrivant la structure à onde lente.

Loin de prétendre remplacer l'approche fréquentielle dans la simulation du

fonctionnement stationnaire des tubes hyperfréquence, ces idées sont susceptibles en revanche de former la base de codes qui, soutenus par le développement des moyens de calcul, permettront l'étude des tubes hyperfréquence dans toute leur généralité.

Cette thèse est organisée de la manière suivante. Le second chapitre traitera de la simulation du faisceau d'électrons qui interagit avec la structure à hélice. Nous avons en effet profité de notre besoin de simuler le faisceau pour explorer ce domaine. Ensuite, nous présenterons dans le troisième chapitre la modélisation de la structure à onde lente par un circuit équivalent, ainsi que son couplage avec le faisceau d'électrons. Puis le quatrième chapitre présentera la méthode de réduction de modèles, ainsi que son applicabilité à notre problème. Enfin, le cinquième chapitre clora ce travail par une conclusion et proposera des perspectives pour continuer ce travail.

## Chapitre 2

# Simulation du faisceau d'électrons

Un faisceau d'électrons est un ensemble organisé d'électrons évoluant dans l'espace. Dans un TOP, le faisceau d'électrons est émis par la cathode et se propage suivant l'axe de la structure à onde lente pour interagir avec les ondes électromagnétiques qui s'y propagent.

Dans le TOP, l'interaction entre le faisceau et les champs électromagnétiques est essentiellement longitudinale. On peut donc pour simplifier considérer un faisceau d'électrons à une dimension. De plus, l'effet de la composante magnétique du champ est négligeable car les électrons composant le faisceau ne sont pas relativistes.

Pour décrire l'évolution du faisceau on peut utiliser sa fonction de distribution. La fonction de distribution est la densité d'électrons dans l'espace des phases, c'est-à-dire que le nombre d'électrons ayant une position comprise entre  $x$  et  $x + dx$ , et une vitesse comprise entre  $v$  et  $v + dv$  est :

$$dN(x, v) = f(x, v).dx.dv.$$

Le nombre d'électrons situés entre  $x_{\min}$  et  $x_{\max}$ , et ayant une vitesse comprise entre  $v_{\min}$  et  $v_{\max}$  s'écrit alors :

$$N = \int_{x_{\min}}^{x_{\max}} \int_{v_{\min}}^{v_{\max}} f(x, v).dx.dv.$$

Une autre approche très utilisée pour modéliser le faisceau est la méthode PIC (*Particle In Cell*) qui consiste à grouper les électrons en macroparticules, puis à intégrer les équations du mouvement de chaque macroparticule [10]. En comparaison avec cette méthode, il a été montré que l'approche basée sur la fonction de distribution a les avantages suivants [11] :

- elle permet une prise en compte plus complète du faisceau ;
- elle génère moins de bruit numérique ;

– elle est plus rapide dans le cas d'un faisceau à une dimension.

Nous choisissons donc l'approche basée sur la fonction de distribution.

En pratique, comme la gestion d'un espace continu par un ordinateur n'est pas possible, la fonction de distribution est définie sur un espace des phases  $(x_i, v_j)$  discrétisé tel que :

$$x_{i+1} = x_i + \Delta x; \quad v_{j+1} = v_j + \Delta v.$$

La fonction de distribution  $f(x, v)$  est alors représentée par un tableau  $f(i, j) = f(x_i, v_j)$  contenant la valeur moyenne de  $f(x, v)$  sur chaque cellule. De cette manière, le nombre d'électrons situés entre  $x_i - \Delta x/2$  et  $x_i + \Delta x/2$  et dont la vitesse est comprise entre  $v_j - \Delta v/2$  et  $v_j + \Delta v/2$  est défini par l'expression suivante :

$$f(i, j) \cdot \Delta x \cdot \Delta v.$$

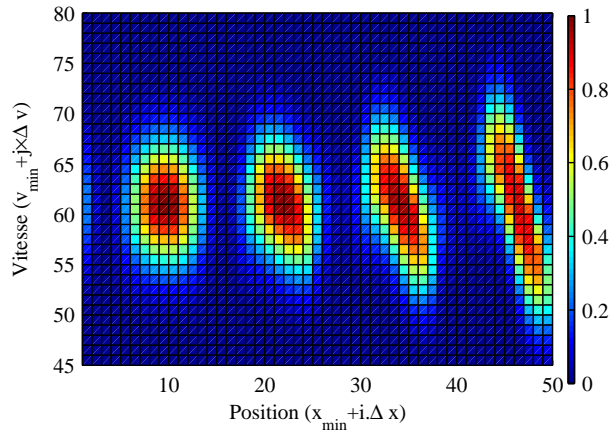


FIG. 2.1 – Représentation d'un faisceau pulsé dans l'espace des phases discrétisé.

## 2.1 Équation de Vlasov en une dimension

Nous avons considéré que le faisceau d'électrons est unidimensionnel et non-relativiste, et qu'il n'est soumis qu'à un champ électrique longitudinal. Dans ce cas, l'évolution temporelle de la fonction de distribution  $f(x, v, t)$ , déterminée par l'équation de Vlasov, s'écrit de la manière suivante :

$$\frac{\partial f}{\partial t} + v \cdot \frac{\partial f}{\partial x} + \frac{q}{m} E \cdot \frac{\partial f}{\partial v} = 0 \quad (2.1)$$

où  $q$  et  $m$  sont la charge et la masse de l'électron, et  $E$  est la composante longitudinale du champ électrique. Ce champ électrique a deux origines. Une

partie est due au champ électrique porté par la structure à onde lente, et est appelée « champ d'hélice ». Et l'autre partie est due à la répulsion coulombienne au sein du faisceau, et est appelée « champ de charge d'espace » :

$$\vec{E} = \vec{E}_h + \vec{E}_{ce}$$

Le champ  $\vec{E}_{ce}$  sera explicité à la section 2.4, alors que le champ  $\vec{E}_h$  le sera à la section 3.8.1 après avoir introduit d'autres notions.

Notons que l'équation de Vlasov relie l'évolution temporelle de  $f$  à deux effets :

1. la dynamique propre du faisceau qui fait qu'un électron se meut sous l'effet de sa vitesse ;
2. l'action des forces de toutes sortes sur les électrons qui fait varier la vitesse d'un électron suivant la force qu'il subit.

## 2.2 Résolution de l'équation de Vlasov

Nous avons trouvé dans la littérature différentes manières de résoudre l'équation de Vlasov, et toutes sont basées sur le fait de scinder l'équation de Vlasov en deux équations plus simples à résoudre. Cette idée a été proposée par Cheng et Knorr [12] en 1975. Au lieu de résoudre l'équation de Vlasov (2.1) telle quelle à chaque pas de temps, Cheng et Knorr proposent de résoudre consécutivement les deux équations suivantes :

$$\frac{\partial f}{\partial t} + v \cdot \frac{\partial f}{\partial x} = 0 \quad (2.2)$$

$$\frac{\partial f}{\partial t} + \frac{q \cdot E}{m} \cdot \frac{\partial f}{\partial v} = 0 \quad (2.3)$$

en utilisant la solution de l'une comme condition initiale de l'autre. Cette manière de procéder est appelée *Time Splitting Method*<sup>1</sup>.

Pour intégrer l'équation de Vlasov (2.1) sur un pas de temps  $\Delta t$ , Cheng et Knorr utilisent le schéma numérique du second ordre suivant :

- intégrer l'équation (2.2) sur  $\Delta t/2$
- calculer le champ électrique
- intégrer l'équation (2.3) sur  $\Delta t$
- intégrer l'équation (2.2) sur  $\Delta t/2$ .

Nous remarquons que les équations (2.2) et (2.3) sont de la même forme et se résolvent donc de la même manière. Nous étudierons donc seulement l'équation (2.2), et l'équation (2.3) se résoudra en remplaçant  $x$  par  $v$ , et  $v$  par  $qE/m$ .

<sup>1</sup>Pour plus d'information sur cette méthode, l'on pourra consulter l'ouvrage auquel se réfèrent Cheng et Knorr : « *The method of fractional steps* » de N. N. Yanenko, Springer-Verlag, New-York, 1970.

L'équation(2.2) est ce que l'on appelle une *équation d'advection*. Sa solution analytique est :

$$f(x, v, t + \Delta t) = f(x - v.\Delta t, v, t)$$

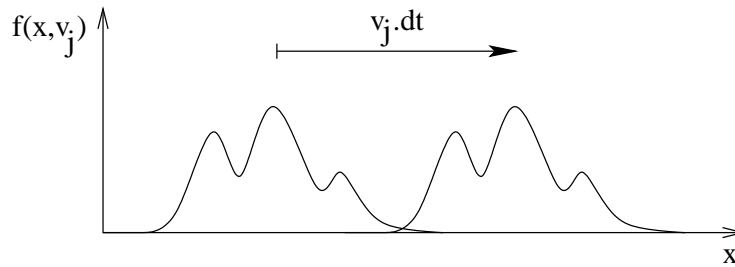


FIG. 2.2 – Advection de la fonction  $f(x, v)$  pendant un temps  $dt$  lorsque  $v = v_j$ .

Cette relation signifie que pendant un temps  $\Delta t$ , la fonction  $f(x, v, t)$  est translatée d'une longueur  $v.\Delta t$  dans la direction  $x$ . C'est tout simplement de la translation à vitesse constante. Dans notre cas, où  $f$  est définie sur un espace discret, on résoudrait l'équation d'advection en utilisant la relation suivante pour chaque valeur de  $v_j$  :

$$f(x_i, v_j, t + \Delta t) = f(x_i - v_j.\Delta t, v_j, t)$$

Mais comme le montre la figure 2.3 il n'est pas garanti que  $f$  soit définie en la position  $(x_i - v_j.\Delta t, v_j)$ , car  $f$  n'a été définie que pour les points  $(x_i, v_j)$ , et il se peut que la position  $(x_i - v_j.\Delta t, v_j)$  ne corresponde à aucun point du maillage. C'est pour contourner ce problème qu'ont été développés les *Vlasov Solvers*.

Il existe plusieurs méthodes pour résoudre l'équation d'advection. Ces méthodes peuvent être classées en deux catégories :

1. les méthodes semi-lagrangiennes qui s'appuient sur un raisonnement particulière pour faire évoluer la fonction de distribution  $f$  ;
2. les méthodes à conservation de flux qui s'attachent à échanger de la quantité de matière (du  $\int \int f . dx . dv$ ) entre les cellules de l'espace discrétisé  $(x_i, v_j)$ .

### 2.2.1 Méthodes semi-lagrangiennes

Pour résoudre l'équation d'advection (2.2) en mettant en oeuvre la relation :

$$f(x_i, v_j, t + \Delta t) = f(x_i - v_j.\Delta t, v_j, t),$$

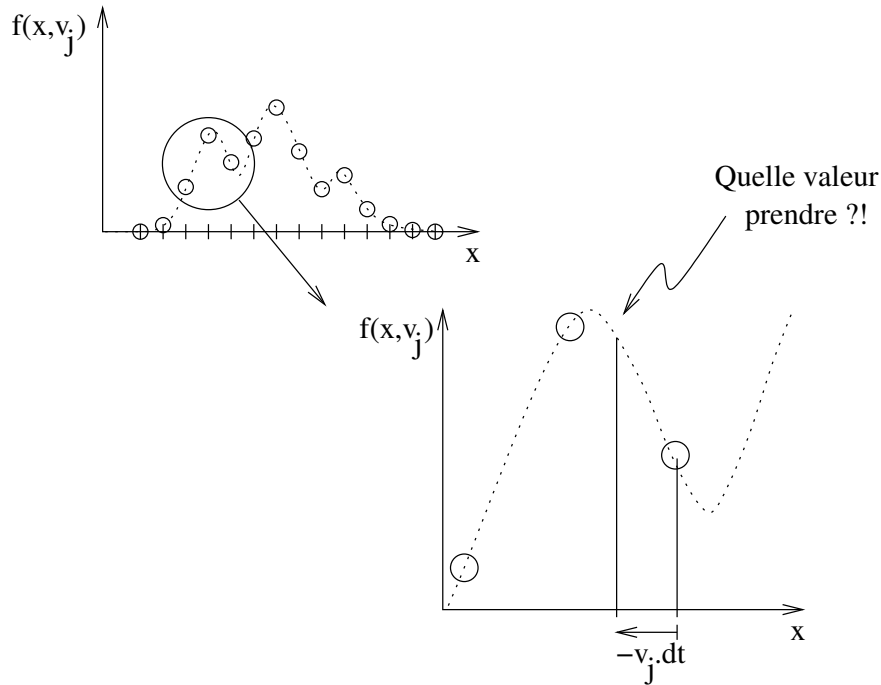


FIG. 2.3 – La solution analytique de l'équation d'advection n'est pas applicable telle quelle lorsque la fonction  $f(x, v)$  a été discrétisée. Ici, on ne connaît que les valeurs de  $f$  matérialisées par des ronds.

les méthodes semi-lagrangiennes utilisent tout simplement une interpolation de  $f$ . Si  $f_{interp}(x, v, t)$  est une fonction interpolante de la fonction  $f(x_i, v_j, t)$ , alors :

$$f(x_i, v_j, t + \Delta t) = f_{interp}(x_i - v_j \cdot \Delta t, v_j, t).$$

Ainsi, pour  $v_i$  fixé, la méthode semi-lagrangienne translate la fonction de distribution comme on translate une particule ayant une vitesse  $v_i$ . Cette approche est intéressante dans les cas non-linéaires où  $v = v(x)$ ; on peut résoudre l'équation non-linéaire du mouvement pour une particule, et transposer le mouvement obtenu à la fonction de distribution.

Ensuite, la multitude d'algorithmes qui découle de cette idée se différencient par la méthode d'interpolation utilisée. Cheng et Knorr [12] ont interpolé  $f(x_i, v_j, t)$  par des fonctions cubiques dans la direction  $v$ , et par des séries de Fourier dans la direction  $x$  en raison de la périodicité spatiale du faisceau. Ils ont observé une dissipation de la fonction  $f(x_i, v_j, t)$  manipulée; c'est-à-dire que les détails de la fonction  $f(x_i, v_j, t)$  sont effacés au fil de l'intégration. Ils ont attribué cet écart aux erreurs d'arrondi.

En fait, ce problème de l'approche semi-lagrangienne vient du fait qu'elle a été conçue pour interpoler (copier) et ré-affecter les valeurs de la fonction  $f$  en d'autres positions de l'espace des phases (coller) sans explicitement

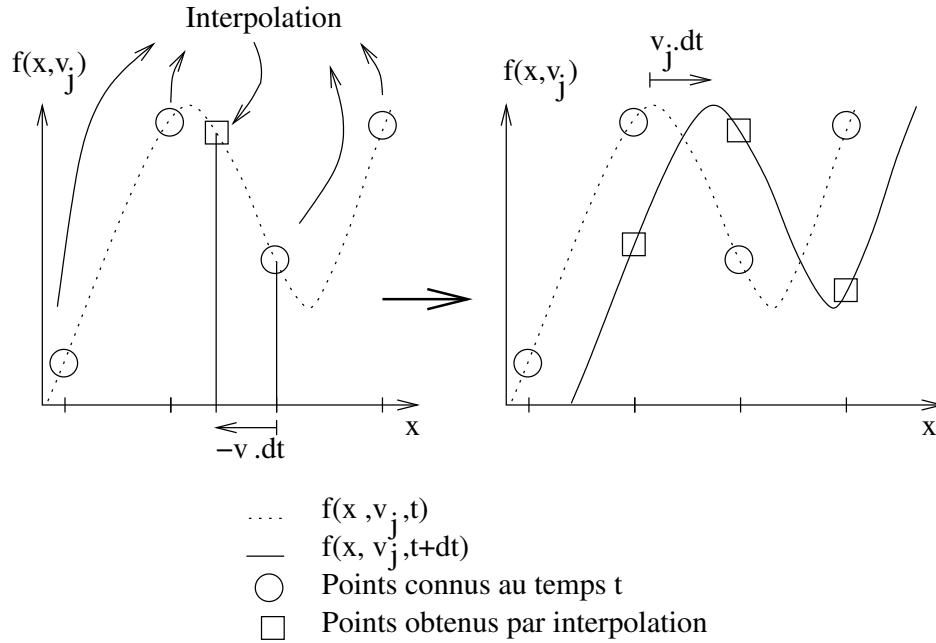


FIG. 2.4 – Les méthodes semi-lagrangiennes utilisent l'interpolation pour reconstituer la fonction de distribution.

prendre en compte les propriétés importantes d'une fonction de distribution :

- la conservation de la matière :  $\int \int f(x, v, t) \cdot dx \cdot dv = cte$ ,
- la positivité :  $f(x, v, t) \geq 0$ .

Ensuite, Eric Sonnendrücker *et al.* [13] ont étendu la méthode semi-lagrangienne au cas plus général où  $v = v(x, t)$  et la force  $F = F(v, t)$ . Cette évolution permet de traiter l'équation de Vlasov dans des situations non-linéaires, et notamment relativistes. Ils utilisent une interpolation cubique dans les deux directions  $x$  et  $v$ , et obtiennent d'assez bon résultats en terme de justesse et de coût calculatoire.

Francis Filbet *et al.* [14] indiquent avant d'introduire les méthodes conservatives que la non-préservation de la positivité de la fonction de distribution  $f(x, v, t)$  peut engendrer des oscillations parasites et est un défaut commun aux algorithmes basés sur la méthode semi-lagrangienne.

### 2.2.2 Méthodes à conservation de flux

Pour résoudre l'équation d'advection (2.2), les méthodes à conservation de flux utilisent aussi la relation :

$$f(x, v, t + \Delta t) = f(x - v \cdot \Delta t, v, t), \quad (2.4)$$

mais sous une forme intégrale. En procédant de la sorte, on manipule de la quantité de matière (du  $\int \int f \cdot dx \cdot dv$ ), et l'on est en mesure de garantir

explicitement sa conservation.

Dans un espace discrétisé en cellules de longueur  $\Delta x$ , et où  $x_i$  est la position du centre de la  $i^{\text{e}}$  cellule, la quantité de matière contenue dans la  $i^{\text{e}}$  cellule au temps  $t = n.\Delta t$  est :

$$F_i^n = \int_{x_i - \frac{\Delta x}{2}}^{x_i + \frac{\Delta x}{2}} f(x, t).dx.$$

À partir de cette définition, on calcule  $F_i^{n+1}$  en manipulant l'intégrale de la solution analytique (2.4) de l'équation d'advection avec la relation de Chasles :

$$\begin{aligned} F_i^{n+1} &= \int_{x_i - \frac{\Delta x}{2}}^{x_i + \frac{\Delta x}{2}} f(x, t + \Delta t).dx \\ &= \int_{x_i - \frac{\Delta x}{2}}^{x_i + \frac{\Delta x}{2}} f(x - v\Delta t, t).dx \\ &= \int_{x_i - \frac{\Delta x}{2} - v\Delta t}^{x_i + \frac{\Delta x}{2} - v\Delta t} f(x, t).dx \\ &= \int_{x_i - \frac{\Delta x}{2} - v\Delta t}^{x_i - \frac{\Delta x}{2}} f(x, t).dx + \int_{x_i - \frac{\Delta x}{2}}^{x_i + \frac{\Delta x}{2}} f(x, t).dx + \int_{x_i + \frac{\Delta x}{2}}^{x_i + \frac{\Delta x}{2} - v\Delta t} f(x, t).dx \\ &= \underbrace{\int_{x_{i-1} + \frac{\Delta x}{2} - v\Delta t}^{x_i - \frac{\Delta x}{2}} f(x, t).dx}_{\text{Flux entre } i-1 \text{ et } i} + F_i^n - \underbrace{\int_{x_i + \frac{\Delta x}{2} - v\Delta t}^{x_i + \frac{\Delta x}{2}} f(x, t).dx}_{\text{Flux entre } i \text{ et } i+1} \end{aligned}$$

En notant

$$\phi_i^n = \int_{x_i + \frac{\Delta x}{2} - v\Delta t}^{x_i + \frac{\Delta x}{2}} f(x, t).dx$$

le flux de matière passant de la cellule  $n^0$   $i$  à la cellule  $n^0$   $i + 1$  entre  $t$  et  $t + \Delta t$ , on obtient finalement :

$$F_i^{n+1} = F_i^n - \phi_i^n + \phi_{i-1}^n \quad (2.5)$$

Cette relation signifie simplement qu'une cellule gagne la matière que ses voisins lui cèdent, et perd ce qu'elle cède à ses voisins. De cette manière, la conservation de la matière est explicitement garantie.

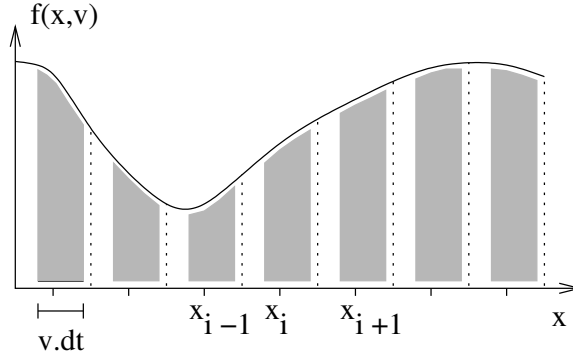


FIG. 2.5 – Illustration de la conservation de flux pour une vitesse  $v$  fixée. Les aires grisées représentent la quantité de matière qui ira d'une cellule  $i$  à la cellule  $i + 1$  pendant une durée  $dt$ .

La suite consiste à expliciter la fonction  $f(x, v, t)$ , car ce que nous manipulons et stockons sur un ordinateur est un tableau  $f(x_i, v_j)$ . Pour ce faire,  $f(x, v, t)$  sera construite comme fonction interpolante de  $f(x_i, v_j)$ . Pour assurer la conservation de la matière dès le départ, il faut veiller à ce que les intégrales de  $f(x, v, t)$  et de  $f(x_i, v_j)$  soient égales sur une cellule  $(i, j)$  :

$$v = v_j \Rightarrow \int_{v_j - \frac{\Delta v}{2}}^{v_j + \frac{\Delta v}{2}} \int_{x_i - \frac{\Delta x}{2}}^{x_i + \frac{\Delta x}{2}} f(x, v, t) . dx . dv = f(x_i, v_j) . \Delta x . \Delta v .$$

En plus de devoir conserver la matière, la fonction interpolante devra respecter la monotonie de la fonction interpolée, c'est-à-dire qu'elle n'introduira pas d'extrema là où la fonction interpolée n'en a pas. De plus, elle ne devra pas accentuer les extrema existants. La satisfaction de cette dernière condition conduit forcément à la préservation de la positivité de la fonction de distribution.

Nous trouvons dans la littérature plusieurs manières d'interpoler la fonction de distribution.

En 1999, Eric Fijalkow [15] propose de revenir<sup>2</sup> aux méthodes à conservation de flux pour résoudre l'équation de Vlasov. Recherchant un code rapide, il propose un algorithme qu'il nomme *Flux Balance Method* où il utilise une interpolation linéaire par morceaux. Sur chaque cellule, et pour  $v = v_j$  :

$$f(x, v_j, t) = \frac{f(x_{i+1}, v_j, t) - f(x_{i-1}, v_j, t)}{2\Delta x} . (x - x_i) + f(x_i, v_j, t) .$$

<sup>2</sup>De ce que nous avons lu, les méthodes à conservation de flux ont été absentes de la littérature pendant une quinzaine d'année. E. Fijalkow lui-même se base sur un article de 1987.

Cette approche conserve bien la matière, mais ne considère pas la question des extrema. Elle obtient de bons résultats sur des plasmas faiblement perturbés, mais elle est mise en défaut dans notre cas où la fonction de distribution peut être fortement modulée. Cela arrive lorsque le faisceau est pulsé, et que la fonction de distribution s'annule par moments. Nous observons alors le développement d'oscillations parasites qui font que la positivité n'est plus respectée, et que la matière n'est plus conservée.

Puis en 2001, Francis Filbet *et al.* [14] utilisent la même méthode, et proposent un schéma qu'ils appellent *Positive and Flux Conservative method*. Ce schéma utilise une interpolation quadratique par morceaux. Sur chaque cellule n°  $i$ , la fonction interpolante est une parabole de la forme :

$$\begin{aligned} f(x, v, t) &= f(x_i, v, t) \\ &+ \frac{\epsilon_i^+}{6\Delta x^2} [2(x - x_i)(x - x_{i-3/2}) + (x - x_{i-1/2})(x - x_{i+1/2})] \\ &\quad \cdot (f(x_{i+1}, v, t) - f(x_i, v, t)) \\ &+ \frac{\epsilon_i^-}{6\Delta x^2} [2(x - x_i)(x - x_{i+3/2}) + (x - x_{i-1/2})(x - x_{i+1/2})] \\ &\quad \cdot (f(x_i, v, t) - f(x_{i-1}, v, t)) \end{aligned}$$

Un *correcteur de pente* est incorporé dans cette interpolation afin de sauvegarder la positivité et les valeurs des extrema globaux ( $0$  et  $f_\infty = \max[f(x_i, v_j, t)]$ ) de la fonction de distribution manipulée :

$$\epsilon_i^+ = \begin{cases} \min \left[ 1; \frac{2f(x_i, v, t)}{f(x_{i+1}, v, t) - f(x_i, v, t)} \right] & \text{si } f(x_{i+1}, v, t) - f(x_i, v, t) > 0, \\ \min \left[ 1; \frac{-2(f_\infty - f(x_i, v, t))}{f(x_{i+1}, v, t) - f(x_i, v, t)} \right] & \text{si } f(x_{i+1}, v, t) - f(x_i, v, t) < 0, \end{cases}$$

et

$$\epsilon_i^- = \begin{cases} \min \left[ 1; \frac{2(f_\infty - f(x_i, v, t))}{f(x_i, v, t) - f(x_{i-1}, v, t)} \right] & \text{si } f(x_i, v, t) - f(x_{i-1}, v, t) > 0, \\ \min \left[ 1; \frac{-2f(x_i, v, t)}{f(x_i, v, t) - f(x_{i-1}, v, t)} \right] & \text{si } f(x_i, v, t) - f(x_{i-1}, v, t) < 0. \end{cases}$$

Cette méthode conserve exactement la matière, préserve la positivité de la fonction de distribution ainsi que ses extrema globaux. Mais elle ne préserve cependant pas les extrema locaux. Tout de même, dans un comparatif d'une demi-douzaine de techniques d'advection [16], F.Filbet et E.Sonnendrücker montrent que le schéma *Positive and Flux Conservative method* est le plus précis sur des maillages grossiers. Il est par ailleurs le deuxième en vitesse d'exécution en raison de l'utilisation d'une interpolation par morceaux qui se prête très bien à la vectorisation et au calcul parallèle. Nous l'aurions sûrement choisie si nous n'avions pas trouvé la méthode *Piecewise Parabolic Method* que nous présentons maintenant.

### 2.2.3 Méthode « Piecewise Parabolic Method »

En 2002, T.D.Arber et R.G.L.Vann [17] proposent une comparaison d'une demi-douzaine de méthodes pour résoudre l'équation d'advection. On trouve dans leur article la méthode *Flux Balance Method* de Fijalkow [15] ainsi que la méthode *Positive and Flux Conservative method* de Filbet *et al.* [14]. On y trouve aussi la méthode *Piecewise Parabolic Method* (PPM) développée en 1984 par Phillip Colella et Paul R.Woodward [18] qui travaillaient alors sur la simulation des ondes de chocs en hydrodynamique. Comme le font remarquer Arber et Vann, la résolution de l'équation d'advection n'est pas un problème nouveau en physique numérique! (*sic*). Mais c'est la séparation de l'équation de Vlasov en deux équations d'advection qui l'est.

Il ressort de leur comparatif que la méthode PPM offre le meilleur compromis entre précision et rapidité :

- elle conserve la masse ;
- elle préserve tous les extrema locaux, et préserve de ce fait la positivité de  $f(x, v, t)$  ;
- elle est rapide grâce à l'utilisation d'une interpolation par morceaux ;
- et pour information, elle permet de travailler sur des maillages irréguliers, et une version relativiste de la méthode a été développée [19].

C'est donc la méthode que nous avons retenue. Voyons à présent son fonctionnement.

L'espace des positions est discrétisé en cellules de largeur  $\Delta x$ . Le centre de la  $i^e$  cellule a pour position  $x_i$ . Nous avons donc  $x_{i+1} = x_i + \Delta x$ . On note  $x_{i+1/2} = x_i + \Delta x/2$  la position de la frontière entre la  $i^e$  et la  $i + 1^e$  cellule.

La quantité manipulée est un tableau  $f(i, j) = f(x_i, v_j, t)$  contenant la valeur moyenne de la fonction de distribution  $f(x, v, t)$  sur une cellule :

$$f(x_i, v_j, t) = \frac{1}{\Delta x} \int_{x_i - \Delta x/2}^{x_i + \Delta x/2} f(x, v_j, t).dx$$

Pour intégrer l'équation d'advection (2.2) pour  $v = v_j$  pendant un temps  $\Delta t$ , la méthode PPM se base comme la méthode PFC [14] sur une interpolation quadratique par morceaux de la fonction de distribution  $f(x_i, v_j, t)$ . Dans chaque cellule, la fonction  $f(x_i, v_j, t = n.\Delta t)$ , que l'on notera  $f_i^n$ , est approximée par une fonction parabolique de la forme :

$$f(x, v_j, t) = f_{L,i} + x_i^r (\Delta f_i + f_{6,i}(1 - x_i^r)) \quad (2.6)$$

où :

- $x_i^r = \frac{x - x_{i-1/2}}{\Delta x}$  est une variable réduite qui vaut 0 à gauche de la cellule et 1 à droite ;
- $f_{L,i} = \lim_{x \rightarrow x_i - \Delta x/2} f(x, v_j, t)$  est la valeur de l'interpolation à gauche de la cellule n°  $i$  ;

- $f_{R,i} = \lim_{x \rightarrow x_i + \Delta x/2} f(x, v_j, t)$  est la valeur de l'interpolation à droite de la cellule n°  $i$  ;
- $\Delta f_i = f_{R,i} - f_{L,i}$  est la pente moyenne de l'interpolation sur la cellule n°  $i$  ;
- $f_{6,i} = 6 \left( f_i^n - \frac{1}{2}(f_{L,i} + f_{R,i}) \right)$ .

Notons qu'à la limite entre deux cellules, il est possible que  $f_{R,i}$  soit différent de  $f_{L,i+1}$ , ce qui fait que la fonction interpolante n'est pas forcément continue. Cela va permettre de mieux suivre les variations brutales de la fonction de distribution.

Pour déterminer  $f_{L,i}$  et  $f_{R,i}$ , on utilise les valeurs  $f_{i+1/2}$  aux frontières comme point de départ. Cette valeur sera corrigée suivant le comportement de la fonction de distribution. On détermine les  $f_{i+1/2}$  par une interpolation quartique de  $f_i^n$  :

$$f_{i+1/2}^n = \frac{1}{2}(f_i^n + f_{i+1}^n) + \frac{1}{6}(\delta_m f_i - \delta_m f_{i+1}),$$

avec

$$\delta_m f_i = \min \left( \frac{|f_{i+1}^n - f_{i-1}^n|}{2}, 2|f_i^n - f_{i-1}^n|, 2|f_i^n - f_{i+1}^n| \right) \cdot \text{signe} \left( \frac{f_{i+1}^n - f_{i-1}^n}{2} \right)$$

si  $(f_{i+1}^n - f_i^n)(f_i^n - f_{i-1}^n) > 0$ , et  $\delta_m f_i = 0$  sinon.

Munis des valeurs  $f_{i+1/2}$ , on doit encore déterminer le comportement de  $f_i^n$  pour savoir quelles valeurs affecter aux  $f_{L,i}$  et aux  $f_{R,i}$ . Une approximation de la dérivée seconde :

$$\delta^2 f_i = \frac{1}{3\Delta x} \left[ \frac{f_{i+1} - f_i}{2\Delta x} - \frac{f_i - f_{i-1}}{2\Delta x} \right]$$

va permettre de détecter les discontinuités grâce au paramètre :

$$\tilde{\eta}_i = - \left( \frac{\delta^2 f_{i+1} - \delta^2 f_{i-1}}{2\Delta x} \right) \left( \frac{2\Delta x^3}{f_{i+1} - f_{i-1}} \right)$$

si  $\delta^2 f_{i+1} \cdot \delta^2 f_{i-1} < 0$  et  $|f_{i+1} - f_{i-1}| > 1\% \min(|f_{i+1}|, |f_{i-1}|)$ ,  
et 0 sinon.

Ce paramètre  $\tilde{\eta}_j$ , que l'on va rendre (presque) binaire grâce au test suivant :

$$\eta_i = \max \{0, \min \{20(\tilde{\eta}_i - 0.005), 1\}\},$$

va permettre de décider de la manière d'initialiser  $f_{L,i}$  et  $f_{R,i}$  selon la présence ou non d'une discontinuité :

$$\tilde{f}_{L,i} = f_{(i-1)+1/2}(1 - \eta_i) + (f_{i-1} + \frac{1}{2}\delta_m f_{i-1})\eta_i$$

$$\tilde{f}_{R,i} = f_{i+1/2}(1 - \eta_i) + (f_{i+1} - \frac{1}{2}\delta_m f_{i+1})\eta_i$$

Ensuite,  $f_{L,i}$  et  $f_{R,i}$  sont soumis à un limiteur de pentes afin de préserver la monotonie de la fonction de distribution :

$$\begin{aligned} f_{L,i} &= f_{R,i} = f_i^n \text{ si } (\tilde{f}_{R,i} - f_i^n)(f_i^n - \tilde{f}_{L,i}) \leq 0; \\ f_{L,i} &= 3f_i^n - 2\tilde{f}_{R,i} \text{ si } (\tilde{f}_{R,i} - \tilde{f}_{L,i}) \left( f_i^n - \frac{1}{2}(\tilde{f}_{R,i} + \tilde{f}_{L,i}) \right) > \frac{(\tilde{f}_{R,i} - \tilde{f}_{L,i})^2}{6}; \\ f_{R,i} &= 3f_i^n - 2\tilde{f}_{L,i} \text{ si } (\tilde{f}_{R,i} - \tilde{f}_{L,i}) \left( f_i^n - \frac{1}{2}(\tilde{f}_{R,i} + \tilde{f}_{L,i}) \right) < -\frac{(\tilde{f}_{R,i} - \tilde{f}_{L,i})^2}{6}. \end{aligned}$$

Munis des valeurs de  $f_{L,i}$  et  $f_{R,i}$ , on calcule enfin les paramètres  $\Delta f_i$  et  $f_{6,i}$  des paraboles interpolantes sur chaque cellule  $i$ , et l'on intègre l'expression de la parabole de l'équation (2.6) pour obtenir le flux de matière entre les cellules  $i$  et  $i + 1$  :

$$\begin{aligned} \phi_i^n &= \int_{x_i + \frac{\Delta x}{2} - v\Delta t}^{x_i + \frac{\Delta x}{2}} f(x, v, t) \cdot dx \\ &= \int_{1 - \frac{v\Delta t}{\Delta x}}^1 f_{L,i} + x_i^r (\Delta f_i + f_{6,i}(1 - x_i^r)) \cdot dx_i^r \\ &= \begin{cases} v\Delta t (f_{R,i} - \frac{v\Delta t}{2\Delta x} (\Delta f_i - (1 - \frac{2}{3} \frac{v\Delta t}{\Delta x}) a_{6,i})) & \text{si } v \geq 0 \\ v\Delta t (f_{L,i+1} - \frac{v\Delta t}{2\Delta x} (\Delta f_{i+1} + (1 + \frac{2}{3} \frac{v\Delta t}{\Delta x}) a_{6,i+1})) & \text{si } v < 0 \end{cases} \end{aligned}$$

Puis on recalcule la densité moyenne de matière dans chaque cellule au temps  $t + \Delta t$  en utilisant (2.5) :

$$f_i^{n+1} = f_i^n + (\phi_{i-1}^n - \phi_i^n).$$

Comme chaque parabole est définie sur seulement un intervalle  $\Delta x$ , on doit veiller à ne pas intégrer l'expression (2.6) au-delà de cette limite. On devra donc veiller au critère de stabilité :

$$v\Delta t \leq \Delta x$$

Comme  $\Delta x$  est généralement fixé par la structure spatiale des champs électromagnétiques présents, on définit en conséquence  $\Delta t$  comme :

$$\Delta t = \frac{\Delta x}{v_{\max}},$$

où  $v_{\max}$  est le module de la vitesse maximale prise en compte dans l'espace des phases.

Voilà donc la méthode PPM. Comme nous avons pu le voir, dans cette méthode, chaque cellule  $f(i, j)$  n'interagit qu'avec les deux cellules adjacentes. À aucun moment, un calcul n'a fait intervenir la totalité des cellules,

comme dans d'autres méthodes d'interpolation (polynomiales, par des séries de Fourier, etc...). C'est donc une méthode qui se prête bien à la vectorisation. C'est-à-dire qu'au lieu de traiter les cellules une par une, on peut facilement traiter des lignes ou des colonnes entières du tableau  $f(i, j)$  en une fois. Numériquement, une ligne ou une colonne d'un tableau est un vecteur, d'où le néologisme « vectoriser ». Par exemple, pour une advection dans la direction  $x$ , on traitera toutes les cellules  $f(x_{i=1,2,\dots,N_x}, v_j, t)$  ayant une même vitesse  $v = v_j$  en une seule opération, puisqu'elles subissent toutes la même translation  $v_j \Delta t$ . En poussant plus loin la vectorisation, il est possible de traiter tout le tableau  $f(x_i, v_j)$  en une seule opération.

### 2.2.4 Mise en oeuvre et essai de la méthode PPM

Nous avons implémenté la méthode PPM en langage Matlab<sup>3</sup>. Matlab, dont le nom est la contraction de *Matrix Laboratory*, utilise la matrice comme entité de base : un nombre est une matrice, un graphique 2D ou 3D est une matrice, etc... Nous avons donc profité des capacités de ce langage pour vectoriser les calculs au maximum. La suite des calculs nécessaires pour faire évoluer d'un pas de temps tout le tableau  $f(x_i, v_j)$  ne tient qu'en 18 opérations.

Afin de vérifier les qualités de notre code, nous avons effectué un test en une dimension, et un autre en deux dimensions. Le premier a consisté à translater une fonction  $f(x)$  regroupant toutes les « tares » que pourrait présenter une fonction de distribution : plusieurs extrema locaux, ainsi que des plateaux. Le second test consiste à faire subir à une fonction abrupte  $f(x, y)$  un mouvement circulaire dans le plan  $(x, y)$  (Fig.2.7).

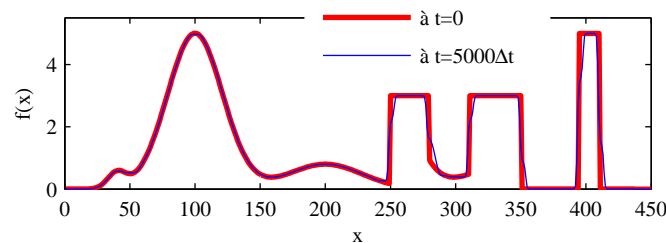


FIG. 2.6 – Évolution d'une fonction d'essai après 5000 pas de temps.

Dans les deux cas nous avons observé, comme on peut le voir sur les figures 2.6 et 2.8, une déformation des flancs des fonctions abruptes, mais :

- la positivité est strictement préservée ;
- la hauteur des extrema reste strictement inchangée ;

<sup>3</sup>Matlab est une marque déposée de la société américaine The MathsWorks. Au passage, signalons l'existence du logiciel GNU Octave ([www.octave.org](http://www.octave.org)), un clone de Matlab libre de droits.

- dans le premier exemple, l'intégrale  $\int f dx$  est conservée à  $10^{-15}$  près après 5000 pas, et le temps d'exécution a été de  $\approx 0,014$  s par pas ;
- dans le second cas, l'intégrale  $\iint f dx dy$  est conservée à  $10^{-14}$  près après 4000 pas de temps. Cet accroissement de l'erreur est certainement dû à l'algorithme du premier ordre que nous avons utilisé pour enchaîner les translations horizontale et verticale. Bien que que la méthode PPM permette d'effectuer correctement chacune des opérations, comme dans le premier exemple, une mauvaise association des deux peut mener à des résultats de moindre qualité.

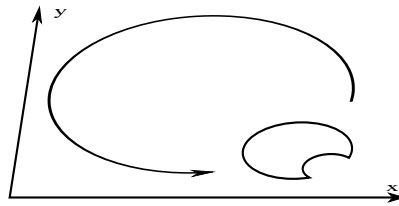


FIG. 2.7 – Évolution d'une fonction d'essai après 5000 pas de temps.

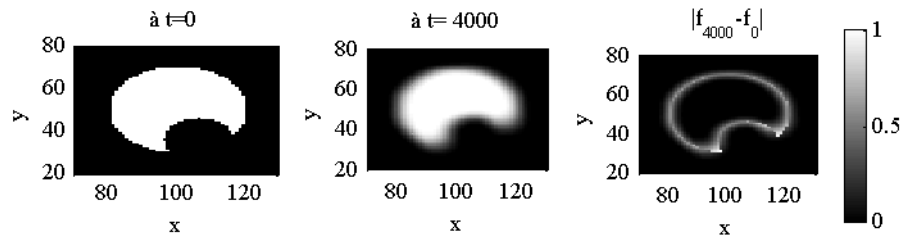


FIG. 2.8 – Représentation de l'évolution d'une fonction d'essai après 4000 pas de temps (gauche et centre), ainsi que de l'erreur commise après 4000 pas (droite). Cette fonction a subi alternativement des translations verticales et horizontales.

Nous concluons donc que la méthode PPM est une méthode simple, efficace, et rapide pour résoudre l'équation de Vlasov dans l'espace des phases  $(x, v)$ .

### 2.3 Injection de particules

La représentation d'un faisceau par une fonction de distribution permet de prendre facilement en compte l'injection de particules avec une distribution quelconque en vitesse. Il suffit de fixer la densité moyenne  $f$  dans les cellules correspondant à la position d'injection et aux vitesses d'injection. Si on veut injecter par exemple un faisceau à la position  $x = x_{\min}$  avec une distribution gaussienne en vitesse centrée sur  $v = v_0$ , et avec un écart-type

$\sigma$ , on posera à chaque pas de temps pour chaque valeur de  $v = v_{j=1,2,\dots,j_{\max}}$  :

$$f(i = 1, v_j, t) = \alpha e^{-\frac{1}{2} \cdot \left(\frac{v_j - v_0}{\sigma}\right)^2} \quad (2.7)$$

où  $\alpha$  est une constante à fixer de telle sorte que le courant transporté par ce faisceau soit égal au courant  $I_{\text{injection}}$  voulu :

$$\begin{aligned} I_{\text{injection}} &= q \int_{v_{\min}}^{v_{\max}} v f(x, v, t) dv \\ &= q \sum_{j=1}^{j_{\max}} \alpha v_j e^{-\frac{1}{2} \cdot \left(\frac{v_j - v_0}{\sigma}\right)^2} \Delta v \\ \Rightarrow \alpha &= \frac{I_{\text{injection}}}{q \cdot \Delta v \cdot \sum_{j=1}^{j_{\max}} v_j e^{-\frac{1}{2} \cdot \left(\frac{v_j - v_0}{\sigma}\right)^2}} \end{aligned}$$

## 2.4 Répulsion coulombienne au sein du faisceau

Le champ électrique de charge d'espace peut être calculé à chaque pas de temps en prenant en compte la position des électrons. Dans le vide, ce champ est solution de l'équation de Maxwell-Gauss :

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{E} = \frac{\rho}{\epsilon_0}$$

où  $\rho$  est la densité volumique des électrons, et s'exprime en fonction de la fonction de distribution par la relation :

$$\rho(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x, v) dv.$$

Mais puisque nous recherchons la rapidité des calculs, et puisque notre faisceau est unidimensionnel, nous pouvons utiliser des relations analytiques pour calculer ce champ. Nous empruntons donc l'approche utilisée dans le code TUBO, développé et utilisé par Thales Electron Devices pour simuler l'interaction dans le TOP en une dimension [20].

Dans le code TUBO, le faisceau est discrétisé en disques indéformables, et l'hélice est assimilée à un cylindre conducteur. On utilise alors une expression analytique donnant le champ longitudinal moyen d'interaction entre deux disques. Le calcul de l'expression du champ part de l'expression du potentiel créé par une charge ponctuelle à l'intérieur d'un cylindre conducteur (*cf* [21] ou [22]) ; et après une intégration sur chaque disque, une dérivation pour obtenir le champ électrique, et une simplification, on trouve une approximation du champ moyen qu'exerce un disque  $i$  sur un autre disque  $j$  :

$$E = \text{signe}(x_j - x_i) \cdot \frac{J_1\left(\mu_1 \frac{r}{a}\right)^2}{\mu_1^2 J_1(\mu_1)^2} \cdot \frac{2q_i}{\pi \epsilon_0 r^2} \cdot e^{-\mu_1 \frac{|x_j - x_i|}{a}} \quad (2.8)$$

où :

- $q_i$  est la charge du disque  $i$  ;
- $x_i$  est la position du disque  $i$  ;
- $r$  est le rayon des disques ;
- $a$  est le rayon du cylindre conducteur équivalent ;
- $J_1(x)$  est la fonction de Bessel de première espèce et d'ordre 1 ;
- $\mu_1 \approx 2,405$  est la première racine de la fonction de Bessel  $J_0(x)$ .

Dans notre cas, l'espace a été discrétisé en cellules de longueur  $\Delta x$ , et la position du centre de chaque cellule  $i$  est  $x_i$ . Pour mettre en œuvre l'expression (2.8) dans notre cas, nous considérons que le faisceau est représenté par un ensemble de disques chargés de rayon égal à celui du faisceau. Ces disques sont placés aux centres des cellules, aux positions  $x_i$ , et leur charge est celle de la cellule qui les contient. Ainsi la charge du disque  $i$ , correspondant à la cellule  $i$ , est :

$$q_i = q_e \int_{x_i - \frac{\Delta x}{2}}^{x_i + \frac{\Delta x}{2}} \rho(x).dx = q_e \int_{x_i - \frac{\Delta x}{2}}^{x_i + \frac{\Delta x}{2}} \int_{-\infty}^{+\infty} f(x, v).dv.dx$$

où  $q_e$  est la charge de l'électron, et  $f(x, v)$  est la fonction de distribution du faisceau. Et comme nous avons discrétisé l'espace des phases en cellules  $(x_i, v_j)$ , la précédente expression se met sous la forme :

$$q_i = q_e \cdot \Delta x \cdot \Delta v \cdot \sum_{v_j = v_{\min}}^{v_{\max}} f(x_i, v_j).$$

Ensuite, contrairement au code TUBO, où les disques se meuvent comme les particules qu'ils représentent, dans notre cas les disques sont liés à une cellule et ne se déplacent pas. Seule leur charge change au cours du temps. Cela permet de gagner beaucoup de temps dans le calcul de l'expression (2.8), car toute la partie dépendant de la distance devient invariable et peut être précalculée et stockée. En effet, comme la position d'un disque  $i$  est  $x_i = x_{\min} + i\Delta x$ , l'expression (2.8) peut être simplifiée de la manière suivante :

$$\begin{aligned} E_{i,j} &= q_i \cdot \text{signe}(x_j - x_i) \cdot \underbrace{\frac{2J_1\left(\mu_1 \frac{r}{a}\right)^2}{\pi \epsilon_0 r^2 \mu_1^2 J_1(\mu_1)^2}}_{\alpha} \cdot \underbrace{\left(e^{-\mu_1 \frac{\Delta x}{a}}\right)^{|j-i|}}_{\beta} \\ &= q_i \cdot \underbrace{\text{signe}(x_j - x_i) \cdot \alpha \cdot \beta^{|j-i|}}_{C_{i,j}} \end{aligned}$$

où la charge  $q_i$  de la cellule qui crée le champ est la seule partie variable dans le temps, et  $C_{i,j}$  est calculé une seule fois et stocké.

Ainsi, à chaque pas de temps de la simulation, le calcul du champ de charge d'espace exercé sur une cellule  $j$  est réduit à :

$$E_j = \sum_i E_{i,j} \quad (2.9)$$

$$= \sum_i q_i C_{i,j}. \quad (2.10)$$

Là aussi, les capacités de vectorisation des calculs par Matlab peuvent être mises à profit pour accélérer les calculs. Nous obtenons donc une bonne approximation du champ de charge d'espace pour un minimum de calculs à chaque pas de temps.

La figure 2.9 montre l'effet de la répulsion coulombienne sur un faisceau pulsé. On peut y voir les paquets d'électrons éclater sous l'effet de la répulsion. Les électrons situés à l'avant des paquets sont repoussés vers l'avant, et donc accélérés ; et les électrons situés à l'arrière sont repoussés vers l'arrière, et donc freinés. Lorsque les électrons s'éloignent de leur paquet d'origine, ils subissent de plus en plus la répulsion des autres paquets, et les forces de répulsion finissent par s'équilibrer. L'effet d'éclatement diminue à mesure que les électrons repoussés s'approchent des autres paquets, car ils subissent de plus en plus la répulsion des paquets voisins. La répulsion coulombienne a donc pour effet global d'homogénéiser le faisceau d'électrons.

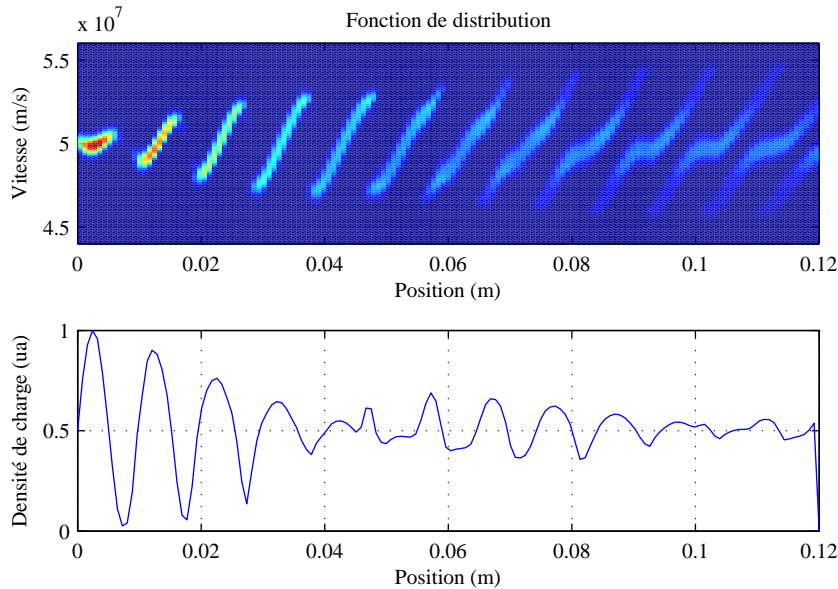


FIG. 2.9 – Évolution d'un faisceau pulsé sous l'effet de la charge d'espace. Temps de calcul :  $\approx 10$  s.

Ainsi, le faisceau d'électrons a été représenté par un modèle léger et rapide prenant en compte la répulsion coulombienne et l'injection à la cathode.

Il reste maintenant à coupler ce modèle de faisceau avec un modèle de la structure à onde lente.

## Chapitre 3

# Approche par circuit équivalent

Pour étudier une structure électromagnétique, la résolution directe des équations de Maxwell en temps est trop lourde pour être envisagée sur un ordinateur de bureau<sup>1</sup>. Le temps nécessaire pour mener une simulation se compte en heures à cause du nombre élevé ( $\approx 10^6$ ) de degrés de liberté manipulés lorsque l'on étudie des structures réelles. Pour contourner ce problème, on peut recourir aux circuits équivalents.

### 3.1 Les circuits équivalents

Un circuit équivalent est un circuit électronique fictif constitué de composants électroniques linéaires, et qui reproduit le comportement temporel d'une structure électromagnétique donnée. Cette substitution est possible, car le fonctionnement des composants électroniques est aussi basé sur les équations de Maxwell. L'élaboration d'un circuit équivalent repose sur :

1. l'identification des couplages dominants dans la structure étudiée ;
2. le remplacement de ces couplages par des composants électroniques linéaires.

Les champs électriques sont remplacés par des condensateurs, les conducteurs électriques par une inductance en série avec une résistance, et les couplages magnétiques par des transformateurs. En délaissant l'aspect spatial des champs, cette approche intuitive permet de réduire énormément le nombre de degrés de liberté pour décrire une structure électromagnétique.

Dans le domaine des tubes hyperfréquence, les circuits équivalents ont été utilisés pour la première fois en 1950 par J.R.Pierce [5]. Dans son ouvrage, Pierce modélise la structure à hélice par une infinité de circuits LC mis en série (Fig.3.1). C'est un modèle couramment utilisé pour traiter la propagation d'ondes sur des lignes bifilaires.

---

<sup>1</sup>Dans notre cas : un ordinateur de bureau basé sur un processeur Pentium 4 cadencé à 2,8 GHz et muni de 1 Go de mémoire vive.

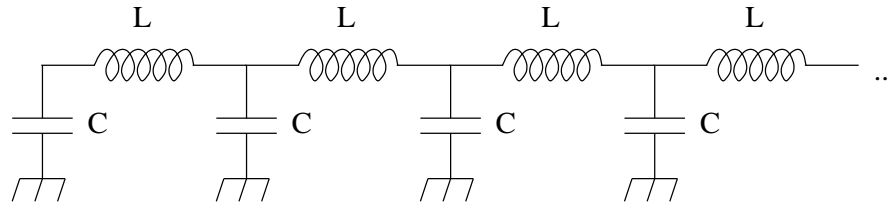


FIG. 3.1 – Circuit équivalent utilisé par Pierce pour modéliser la structure à onde lente.

Le choix de ce modèle par Pierce ne fait pas appel à des raisonnements sur la structure du champ, mais utilise le fait que ce modèle de la ligne bifilaire permet de fixer indépendamment la vitesse et la fréquence d'une onde, et donc de mimer n'importe quelle structure en régime harmonique.

Malgré la simplicité du modèle, Pierce parvient à dégager un grand nombre de résultats qui sont encore utilisés de nos jours. Mais le modèle reste intrinsèquement harmonique, même si des astuces permettent de traiter des problèmes multifréquentiels.

On trouve en outre dans la littérature l'utilisation de deux autres circuits équivalents. D.Dialetis *et al.* [23] citent et comparent deux circuits pour simuler les tubes à onde progressive à cavités couplées en domaine temporel. L'un est dû à Curnow et date de 1965, et l'autre a été développé par Malykhin *et al.* en 2003. D'après D.Dialetis, ces deux circuits reproduisent convenablement la courbe de dispersion ainsi que l'impédance de couplage des lignes à cavité couplée étudiées.

### 3.2 La structure à onde lente à hélice

Parmi les structures à ondes lentes utilisées dans les tubes à onde progressive, on trouve celles basées sur une hélice (Fig.3.2). Dans un guide d'onde cylindrique, appelé fourreau, une hélice métallique est glissée et maintenue au centre par trois montants isolants. Un faisceau d'électrons traverse cette structure suivant son axe de symétrie afin d'interagir avec le champ électromagnétique qu'elle guide. Ce champ électromagnétique se propage à la vitesse de la lumière en suivant l'hélice et, de ce fait, sa vitesse suivant l'axe du guide d'onde est diminuée. Le pas de l'hélice est donc fixé de manière à ce que la vitesse longitudinale de l'onde électromagnétique soit proche de celle des électrons ; les deux peuvent alors interagir tout le long du tube et échanger de l'énergie.

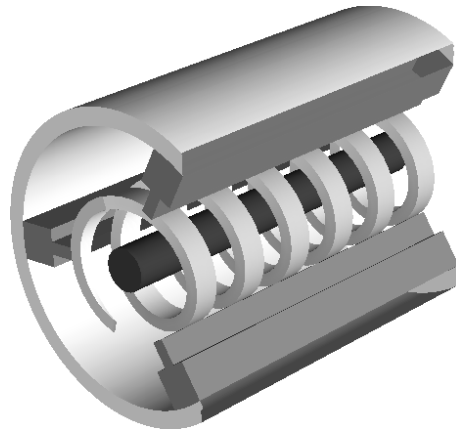


FIG. 3.2 – Coupe de la ligne à hélice.

### 3.3 Construction du circuit équivalent

Nous allons proposer un circuit équivalent pour la structure à ondes lentes à hélice en identifiant les couplages électromagnétiques qui ont lieu entre différentes parties de la structure. En examinant le fil constituant l'hélice (Fig.3.3), nous constatons que chaque point du fil :

- est couplé capacitivement avec le fourreau ;
- est rattaché par un fil conducteur non-parfait aux deux points adjacents sur le fil ;
- et est couplé capacitivement aux deux points situés à un tour d'hélice de chaque côté.

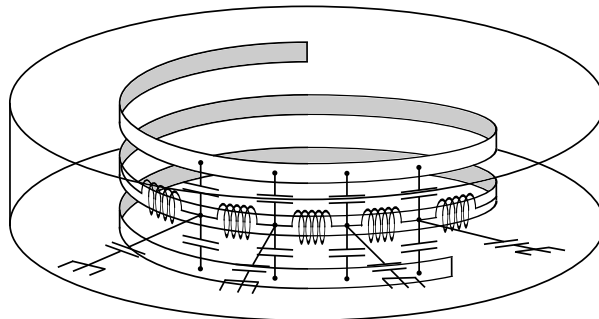


FIG. 3.3 – Couplages au sein d'une structure à onde lente à hélice.

Nous remplaçons les couplages capacitifs par des capacités, et les conducteurs par une résistance en série avec une inductance. Nous obtenons alors un circuit équivalent dont le nombre de composants par tour d'hélice dépend de la discrétisation du fil de l'hélice. Nous utiliserons le circuit équivalent le plus simple, qui correspond à deux points par tour d'hélice.

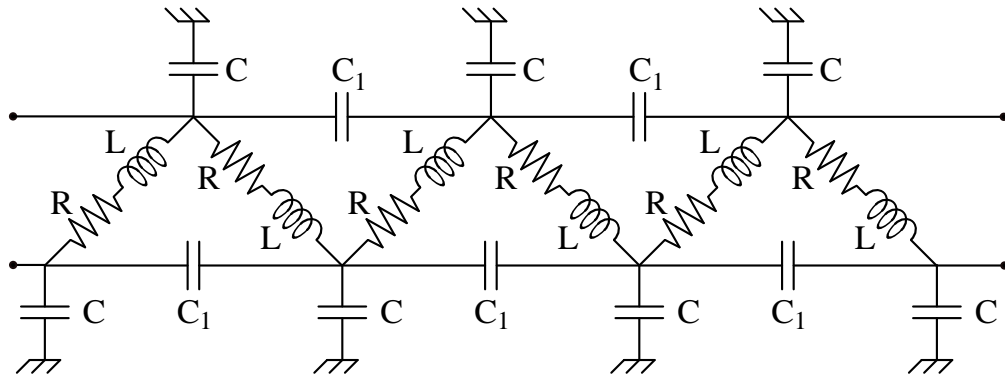


FIG. 3.4 – Circuit équivalent pour la ligne à hélice. L'hélice a été discrétisée en deux portions par tour.

### 3.4 Caractéristiques du circuit équivalent

Le circuit équivalent que nous avons proposé (Fig.3.4) comporte huit composants par période d'hélice, et est déterminé par quatre paramètres :

1. la capacité spire-fourreau  $C$  ;
2. la capacité inter-spires  $C_1$  ;
3. la résistance d'une demi-spire  $R$  ;
4. et l'auto-inductance d'une demi-spire  $L$ .

Pour déterminer ces paramètres, il est possible de les calculer à partir d'expressions analytiques en fonction des dimensions de la structure. Il existe en effet des tables qui donnent la capacitance et l'inductance pour une multitude de configurations de conducteurs [25]. Ce moyen a l'avantage d'être rapide, mais ne donne qu'une approximation qu'il faut ensuite corriger.

Il est aussi possible d'utiliser des codes calculant la capacitance et l'inductance d'une structure à partir de sa représentation en trois dimensions. Cette méthode est précise, mais suppose d'avoir dessiné la structure avec des logiciels adéquats.

Ce que nous avons finalement retenu pour déterminer les capacitances et les inductances, c'est de les ajuster de manière à ce que la courbe de dispersion du circuit équivalent soit le plus proche possible de la courbe de dispersion de la structure à hélice que l'on veut modéliser. Cela suppose que l'on connaisse la courbe de dispersion de la structure réelle soit par une mesure, soit par un calcul plus fiable. Dans notre cas, nous avons la possibilité d'obtenir des courbes de dispersion calculées par le service de calcul de Thales Electron Devices-Vélizy ; ces calculs font appel à du matériel informatique plus puissant car ils font intervenir des modèles en trois dimensions de la structure étudiée.

### 3.5 Courbe de dispersion du circuit équivalent

Lorsqu'un champ harmonique se propage dans une structure donnée, son nombre d'onde ( $k = 2\pi/\lambda$ ) dépend de sa fréquence. La courbe de dispersion représente cette dépendance.

Au lieu d'être considéré et étudié dans sa globalité, un circuit équivalent d'une structure de propagation peut être vu comme une suite de cellules connectées qui se transmettent de proche en proche un signal  $V$  quelconque. Les caractéristiques de la ligne peuvent alors être déterminées à partir du comportement individuel de chaque cellule (Fig.3.5).

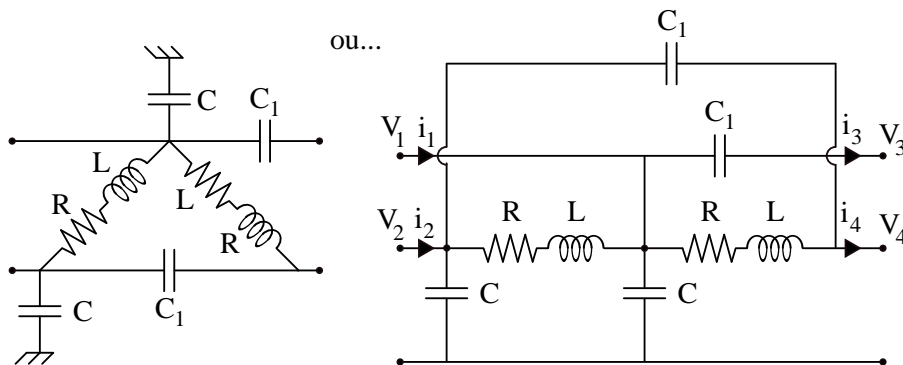


FIG. 3.5 – Schéma d'une période du circuit équivalent proposé et sa transformation sous forme de quadripôle.

Pour tracer la courbe de dispersion d'une ligne, il nous faut déterminer le nombre d'onde du champ propagé par la ligne lorsque la fréquence est fixée. Or, comme la ligne est constituée d'une suite de cellules de longueur *pas*, le nombre d'onde  $k$  s'obtient en déterminant le déphasage  $\Delta\phi$  que fait subir chaque cellule à un signal de fréquence  $f$  donnée :

$$k = \frac{\Delta\phi}{pas}.$$

On peut aussi utiliser directement  $\Delta\phi$  au lieu de  $k$ , parce que plus intuitif : parler de déphasage par tour d'hélice a plus de sens que de parler de nombre d'oscillations par  $2\pi$  unités de longueur.

En régime harmonique, lorsque l'on soumet un signal à l'entrée du quadripôle montré dans la figure 3.5, le signal en sortie en dépend linéairement :

$$\begin{pmatrix} V_3 \\ i_3 \\ V_4 \\ i_4 \end{pmatrix} = P \cdot \begin{pmatrix} V_1 \\ i_1 \\ V_2 \\ i_2 \end{pmatrix}, \quad (3.1)$$

où  $P$  est appelée matrice de passage, et dépend des caractéristiques du circuit  $C$ ,  $C_1$ ,  $L$ ,  $R$ , et de la fréquence  $f$ . D'autre part, les signaux qui sont

spontanément propagés par une structure ont la propriété de rester égaux à eux-mêmes à une constante complexe près lors de leur propagation. Cette propriété, appliquée à une cellule de la structure, se formalise de la manière suivante :

$$\begin{pmatrix} V_3 \\ i_3 \\ V_4 \\ i_4 \end{pmatrix} = G \cdot e^{j\Delta\phi} \cdot \begin{pmatrix} V_1 \\ i_1 \\ V_2 \\ i_2 \end{pmatrix}, \quad (3.2)$$

où  $G$  est le gain réel que subit le signal, et  $\Delta\phi$  le déphasage subi par le signal à son passage par la cellule. En confrontant les relations (3.1) et (3.2), nous voyons que les déphasages  $\Delta\phi$  possibles sont en fait les arguments des valeurs propres de la matrice de passage  $P$ . Dans le cas du circuit équivalent que nous avons proposé, la matrice de passage est une matrice  $4 \times 4$ .

Pour tracer un point de la courbe de dispersion, nous fixons la fréquence et calculons les coefficients de la matrice de passage  $P$  à cette fréquence. On calcule ensuite les arguments des valeurs propres de la matrice  $P$ , que nous traçons comme fonction de la fréquence.

Dans l'exemple qui suit, nous avons ajusté les paramètres du circuit pour approcher au mieux un tube qui est actuellement en production (TH3990), et avons comparé les deux courbes de dispersion. Nous pouvons constater sur la figure 3.6 les choses suivantes :

- le circuit équivalent est capable de propager aussi bien les ondes directes que les ondes inverses dont la vitesse de groupe est négative ;
- le circuit équivalent présente une bande interdite où aucune propagation n'est possible. On fait apparaître cet effet en dissymétrisant les valeurs des capacitances spires-fourreau  $C$  ;
- et enfin le modèle proposé est correct pour les petites vitesses de phase : là où les tubes sont habituellement utilisés. Par exemple, le TH3990 est utilisé autour de  $\Delta\phi = \pi/3$ .

Ajoutons à ces constatations que, puisque le circuit équivalent est composé exclusivement de composants symétriques, il est capable de propager des signaux dont la vitesse de phase est négative.

Le circuit équivalent que nous introduisons présente donc des caractéristiques nouvelles par rapport au circuit LC utilisé habituellement. Une fois trouvées les valeurs des capacitances, inductances et résistances du circuit, il est possible de simuler correctement et en temps réel une multitude de phénomènes sur une grande plage de fréquences. C'est ce que nous allons voir dans la suite.

### 3.6 Évolution temporelle du circuit équivalent

Nous supposons dans cette section que les paramètres du circuit équivalent ont été définis, et nous allons simuler son évolution temporelle intrin-

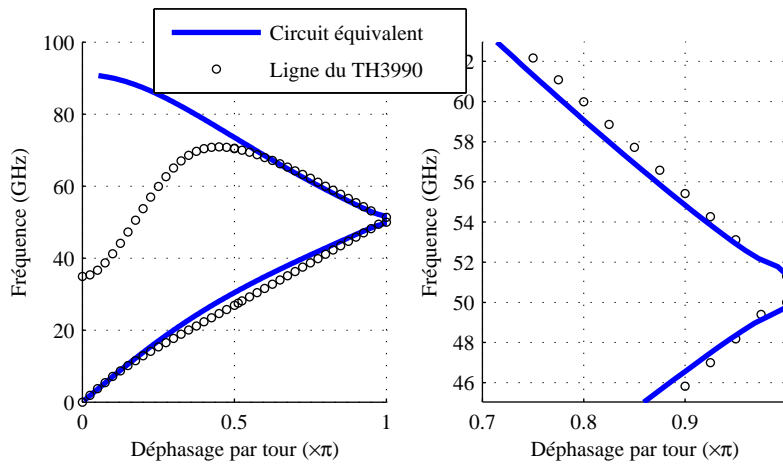


FIG. 3.6 – Comparaison des courbes de dispersion de la ligne à hélice réelle et du circuit équivalent proposé. Le second graphique représente un agrandissement autour de la bande interdite.

sèque, c'est-à-dire lorsqu'il est livré à lui-même.

Les tensions et les courants dans le circuit équivalent sont liés par les lois de Kirchhoff. Et comme le circuit est exclusivement constitué de composants linéaires, l'évolution temporelle des tensions et courants est solution d'équations différentielles linéaires du premier ordre.

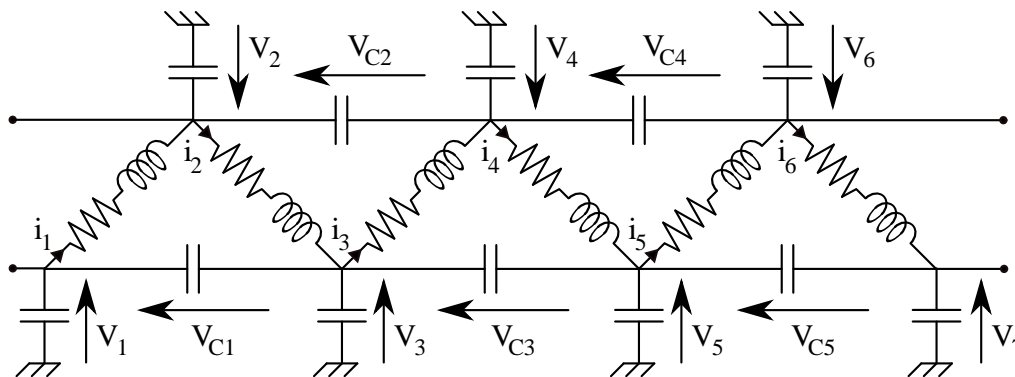


FIG. 3.7 – Définition des tensions et courants dans le circuit équivalent. On a représenté ici trois tours d'hélice.

En nous appuyant sur les notations de la figure 3.7, on pose :

$$U = \begin{pmatrix} V_1 \\ V_2 \\ \vdots \\ V_N \\ V_{N+1} \\ i_1 \\ i_2 \\ \vdots \\ i_N \end{pmatrix} \quad (3.3)$$

où  $N = 2 \times$  nombre de tours d'hélice. L'évolution temporelle du circuit est alors donnée par la résolution de l'équation différentielle suivante :

$$\frac{dU(t)}{dt} = M.U(t) \quad (3.4)$$

où les coefficients de la matrice  $M$  sont déterminés par les lois de Kirchhoff et les relations tension-courant des composants électroniques.

L'équation (3.4) a pour solution analytique la relation suivante :

$$U(t + \Delta t) = e^{M\Delta t}U(t) \quad (3.5)$$

où l'on utilise l'exponentielle de matrice définie par :

$$e^A = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{A^k}{k!}$$

Matlab possède une fonction pour calculer l'exponentielle d'une matrice. Cette fonction s'appuie sur une méthode présentée dans l'ouvrage de Golub et Van Loan [24], et basée sur l'approximation de Padé. Le temps de calcul de cette fonction augmente comme la puissance troisième du rang de la matrice traitée, mais c'est un calcul qui est effectué une fois pour toute et stocké pour chaque circuit particulier.

Pour débiter la simulation,  $U(t = 0)$  doit être fixé. Nous le fixons à zéro, c'est-à-dire qu'il n'y pas de champ dans l'hélice au début de la simulation. La structure à onde lente se remplira progressivement sous l'effet d'un signal d'excitation.

### 3.6.1 Excitation du circuit par un signal

Le circuit équivalent peut être excité par un signal quelconque. Son évolution temporelle est alors solution de l'équation :

$$\frac{dU(t)}{dt} = M.U(t) + F(t) \quad (3.6)$$

où  $F(t)$  est le vecteur d'excitation.

Pour commencer, nous voudrions injecter un signal harmonique dans le circuit. Pour ce faire, nous pouvons exciter la capacitance spire-fourreau la plus à gauche en la remplaçant par un oscillateur LC réglé à la fréquence voulue (Fig.3.8).

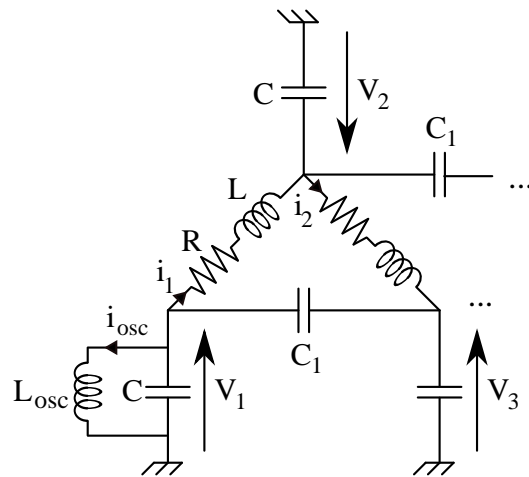


FIG. 3.8 – Afin d’exciter le circuit par un signal harmonique, la première capacitance est remplacée par un oscillateur LC.

Le vecteur d’état est alors modifié : la première capacitance joue aussi le rôle de la capacitance de l’oscillateur, et l’on ajoute le courant dans l’inductance de l’oscillateur parmi les degrés de liberté :

$$U = \begin{pmatrix} V_1 = V_{osc} \\ V_2 \\ \vdots \\ V_N \\ V_{N+1} \\ i_1 \\ i_2 \\ \vdots \\ i_N \\ i_{osc} \end{pmatrix} \quad (3.7)$$

Cela permettra d’intégrer le circuit oscillateur au circuit équivalent, et donc d’avoir à résoudre l’équation (3.4) au lieu de l’équation (3.6). Cela est plus maniable, et nous servira dans la suite.

De plus, nous voudrions non pas exciter la capacitance  $V_1$ , mais la forcer. La différence est que, dans le premier cas, la capacitance excitée va subir l’influence du reste du circuit équivalent en plus de l’influence du circuit

oscillateur ; alors que dans le cas du forçage brutal, la capacitance excitée n'est influencée que par l'oscillateur, et ne voit pas le reste du circuit. Cela permet d'imposer plus fermement un signal d'entrée. Pour y arriver, nous avons modifié dans la matrice  $M$  la ligne qui correspond à la capacitance excitée en y remplaçant par zéro les termes qui la couplent au reste du circuit équivalent. Ainsi, la tension aux bornes de cette capacitance oscille à la fréquence demandée sans être influencée par les soubresauts du reste du circuit.

### 3.6.2 Régime établi

Injecter un signal dans une structure vide de champ lorsque l'on a besoin d'étudier la structure en régime établi pose un problème de temps de calcul. En effet, pour atteindre le régime établi, il nous faut attendre que l'onde injectée se réfléchisse plusieurs fois jusqu'à atteindre l'équilibre, et que les fréquences parasites dues au déclenchement de l'excitation soient complètement amorties. Pour accélérer cette phase transitoire, nous pouvons tirer profit du fait que l'ensemble du circuit, excitation comprise, est régi par l'équation (3.4). Dans ce cas, pour atteindre le régime établi, il suffit d'avancer le système d'un grand nombre de pas de temps en une fois, par exemple :

$$U_{\text{etabli}} \approx U(10^6 \cdot \Delta t) = e^{M \cdot 10^6 \cdot \Delta t} U(0),$$

où tous les termes de  $U(0)$  sont nuls sauf  $V_1$  qui correspond à la tension excitatrice. La figure 3.9 montre clairement l'avantage du fait d'atteindre directement le régime stationnaire. Ensuite, nous pouvons utiliser  $U_{\text{etabli}}$  comme condition initiale pour commencer la simulation. Remarquons pour finir que la matrice  $e^{M \cdot 10^6 \cdot \Delta t}$  peut être calculée et stockée une fois pour toute pour un circuit donné.

## 3.7 Ondes stationnaires

Lorsqu'une onde arrive à la limite d'une structure de propagation, une partie de l'onde est réfléchi. Et lorsque l'onde incidente est en interaction avec un faisceau d'électrons, l'onde réfléchi va aussi interagir avec ces derniers et bouleverser les résultats d'une expérience ou d'un processus industriel. Le même phénomène apparaît lorsque l'on simule le comportement d'un circuit équivalent. Une onde injectée va être réfléchi successivement aux deux extrémités de la ligne jusqu'à former une onde stationnaire qui va complètement fausser la simulation. Pour mener des simulations dans de bonnes conditions, il faut donc minimiser les réflexions en bout de ligne.

Sans entrer dans la théorie des lignes de transmission, nous retiendrons d'un cours sur les lignes de transmissions [26] les deux choses suivantes. Premièrement, une structure de propagation est caractérisée par une impédance

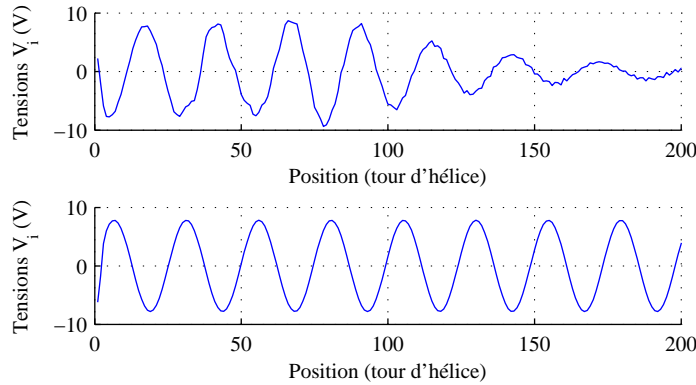


FIG. 3.9 – La figure du dessus montre l'état de la ligne après une centaine de pas de temps. Le régime stationnaire n'est toujours pas atteint : des fréquences élevées se propagent dans la ligne, le signal n'a pas rempli toute la structure, et des réflexions déforment le signal. La figure du dessous montre l'état de la ligne après un « long » pas de temps. Le signal est uniforme en amplitude, et ne contient que la fréquence de l'oscillateur pilote.

caractéristique  $Z_C$  qui est la généralisation de la résistance dans le cas des champs variables, et qui dépend des caractéristiques physiques de la structure, ainsi que de la fréquence. Et deuxièmement, lorsque l'onde rencontre un obstacle d'impédance  $Z_R$ , elle est réfléchiée avec un coefficient (complexe) :

$$\rho = \frac{Z_R - Z_C}{Z_R + Z_C}. \quad (3.8)$$

Nous ne connaissons pas l'impédance caractéristique de la structure à hélice, mais nous pouvons nous baser sur l'équation (3.8) pour minimiser les réflexions de deux manières que nous montrons ci-après.

### 3.7.1 Adaptation à large bande de fréquence

Une première approche pour minimiser les réflexions est de faire en sorte que l'onde n'atteigne jamais la fin du circuit. Il est évident qu'un signal, quelle que soit sa fréquence, sera toujours amorti dans un circuit où les résistances sont non-nulles. Aussi, d'après l'équation (3.8), ce signal ne subira que peu de réflexions si la résistance du circuit, et donc son impédance, varie lentement. L'idée est donc d'ajouter de chaque côté du circuit équivalent un tronçon où les résistances  $R$  augmentent lentement jusqu'à l'amortissement complet du signal (Fig. 3.10).

Cette technique est utilisée pour empêcher les réflexions dans les tubes. Chaque bord de la structure à hélice est recouvert d'une couche de matériau absorbant dont l'épaisseur varie lentement [2].

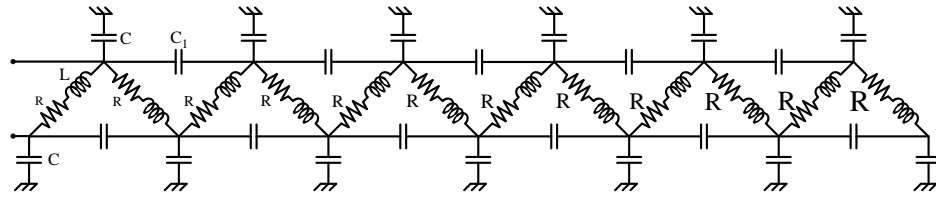


FIG. 3.10 – Fin de ligne adaptée sur une large bande de fréquence.

Cette méthode a l'avantage d'amortir les signaux sur une large bande de fréquence, mais a l'inconvénient de requérir un circuit équivalent plus long, et donc de manipuler de plus grandes matrices. En effet, pour amortir totalement les signaux atteignant les extrémités du circuit équivalent, il nous a fallu ajouter à chaque bout du circuit équivalent « utile » un tronçon à résistance croissante de longueur moitié de la longueur utile ; cela double la taille du circuit réel, ainsi que le nombre de degrés de liberté. C'est donc une approche efficace, mais que nous délaisserons pour des raisons de rapidité.

### 3.7.2 Adaptation autour d'une fréquence

L'équation (3.8) indique que l'on peut supprimer les réflexions en mettant un obstacle dont l'impédance  $Z_R$  est égale à  $Z_C$ . Comme  $Z_C$  dépend de la fréquence, cette approche n'est valable qu'autour de la fréquence à laquelle  $Z_R$  a été déterminé.

Nous proposons de terminer le circuit équivalent par une résistance  $R_b$  à la place de la dernière capacitance spire-fourreau comme montré dans la figure 3.11. Il nous faut alors déterminer la valeur de cette résistance. Nous ne connaissons pas l'impédance de notre ligne, mais sachant que celle du bout de ligne est modifiée lorsque l'on modifie la valeur de la résistance  $R_b$ , nous avons recherché la valeur de  $R_b$  qui minimise le taux de réflexion. Comme celui-ci est lié au taux d'onde stationnaire par la relation :

$$|\rho| = \frac{\text{TOS} - 1}{\text{TOS} + 1},$$

alors  $\rho = 0 \Leftrightarrow \text{TOS} = 1$ . Le TOS est défini comme le rapport :

$$\text{TOS} = V_{\max}/V_{\min},$$

où  $V_{\max}$  est l'amplitude maximale atteinte par une onde stationnaire, et  $V_{\min}$  est l'amplitude minimale atteinte par l'onde stationnaire.

Donc pour déterminer la valeur optimale de  $R_b$  pour un circuit donné, nous avons calculé le TOS en fonction de  $R_b$ . Et nous avons choisi la valeur de  $R_b$  qui fait tendre le TOS vers 1. Pour calculer le TOS, nous commençons par mettre le système en régime établi, puis nous le faisons évoluer pendant quelques périodes du signal excitateur. Pendant ces quelques périodes, on

### 3.8. INTERACTION DE LA STRUCTURE À ONDE LENTE AVEC LE FAISCEAU 41

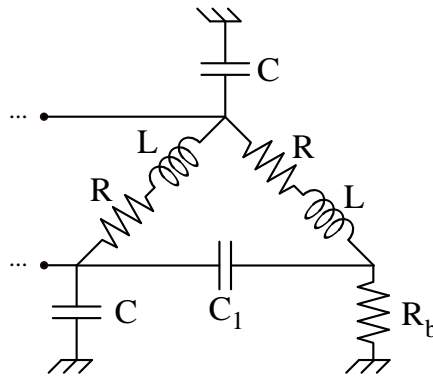


FIG. 3.11 – Fin de ligne adaptée autour de la fréquence de travail.

stocke les valeurs de l'amplitude de l'onde évoluant dans le circuit. Ensuite, nous déterminons les valeurs  $V_{\min}$  et  $V_{\max}$ , d'où l'on déduira la valeur du TOS.

Ainsi, pour un circuit particulier à une fréquence particulière, une valeur de  $R_b$  permet de simuler le comportement du circuit sans être dérangé par des ondes stationnaires. Par contre, comme c'est souvent le cas, si l'interaction entre l'onde harmonique et le faisceau donne naissance à des fréquences éloignées de la fréquence de « travail », alors ces fréquences sont réfléchies à la fin de la ligne et une onde stationnaire se crée. Dans ces cas, il vaut mieux recourir à l'adaptation en large bande.

Dans nos expériences, nous avons opté pour l'adaptation en bande étroite, car nous n'observons pas la création de nouvelles fréquences sur les temps que durent nos simulations.

## 3.8 Interaction de la structure à onde lente avec le faisceau

Nous avons donc construit un circuit équivalent de la structure à hélice qu'on peut exciter par un ou plusieurs signaux harmoniques. Pour compléter le modèle du tube à onde progressive, il nous faut le coupler avec un faisceau d'électrons. Nous avons proposé plus haut un modèle unidimensionnel du faisceau, et nous allons dans cette section le faire interagir avec le champ transporté par le circuit équivalent. Pour obtenir une interaction, il faut prendre en compte l'action de l'hélice sur le faisceau, et l'action du faisceau sur l'hélice.

### 3.8.1 Action de la structure à onde lente sur le faisceau

Il ressort d'une simple analyse (chap. 1.2 de [2]) que le champ électrique agissant sur les faisceaux d'électrons est celui créé entre les spires de l'hélice.

Donc dans notre modèle, le faisceau d'électrons subira le champ électrique créé par les capacités inter-spices, car ce sont elles qui représentent les champs inter-spices dans le circuit équivalent.

Les tubes que nous étudions sont habituellement utilisés dans un mode  $\pi/3$ , c'est-à-dire que le champ électrique est déphasé de  $\pi/3$  à chaque tour d'hélice, donc de  $2\pi$  tous les six tours. D'autre part, nous avons utilisé une représentation du faisceau par sa fonction de distribution, ce qui oblige à discrétiser l'espace, ce que nous n'avons pas encore précisé. Nous choisissons donc de discrétiser l'espace en cellules de longueur :

$$\Delta x = pas.$$

où *pas* est le pas d'hélice. Cette largeur permet de minimiser la quantité de calculs tout en prenant bien en compte la structure du champ d'hélice.

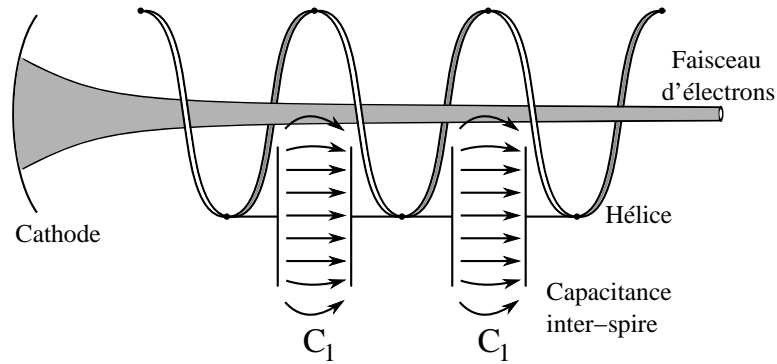


FIG. 3.12 – Dans le modèle proposé, le circuit équivalent agit sur le faisceau d'électrons via les capacités inter-spices  $C_1$ .

Comme nous avons décrit l'hélice avec deux points par tour (Fig. 3.4), nous définissons le champ d'hélice dans une cellule  $i$ , en première approximation, comme le champ régnant dans la capacité inter-spice équivalente d'épaisseur égale à la distance séparant deux spires, c'est-à-dire le pas d'hélice moins deux fois le rayon du fil d'hélice. D'après les notations de la figure 3.7, le champ s'expliciterait de la manière suivante :

$$\begin{aligned} E_h(1) &= \frac{V_3 - V_1}{pas - 2 * r_{fil}}; \\ E_h(2) &= \frac{V_5 - V_3}{pas - 2 * r_{fil}}; \\ E_h(3) &= \frac{V_7 - V_5}{pas - 2 * r_{fil}}; \\ &\vdots \end{aligned} \quad (3.9)$$

où *pas* est le pas d'hélice et  $r_{fil}$  est le rayon du fil constituant l'hélice. Nous n'avons pris en compte qu'une capacité inter-spices sur deux ( $V_1, V_3, V_5, V_7, \dots$ ), car nous avons choisi de considérer une valeur de champ d'hélice par tour d'hélice. Notons enfin que les expressions précédentes peuvent être fusionnées grâce aux capacités de vectorisation du langage Matlab.

### 3.8.2 Action du faisceau sur la structure à onde lente

Lorsqu'une structure électromagnétique exerce un champ électrique sur une particule, celle-ci voit son impulsion et donc son énergie varier. Pour conserver l'énergie de l'ensemble, l'énergie emmagasinée dans la structure électromagnétique ne peut rester inchangée. Heureusement, pendant qu'une particule subit un champ électrique, elle agit sur la structure qui a généré ce champ en y induisant du courant, ce qui est une forme de travail, et donc d'échange d'énergie.

Pour quantifier les courants induits par une particule chargée dans une structure conductrice quelconque, on peut utiliser le théorème de Shockley-Ramo (6.1 de [27]). Ce théorème se démontre, entre autres, à partir du principe de conservation d'énergie [28].

Voici l'énoncé du théorème de Shockley-Ramo trouvé dans [28] : Si une charge  $q$  se trouvant à la position  $\vec{r}_q$  se meut avec une vitesse  $\vec{v}$  au milieu d'électrodes  $1, 2, \dots, k, \dots$  reliées à la masse par des générateurs de tension  $V_k$ , alors le courant  $I_k$  transitant de la masse vers l'électrode  $k$  est donné par l'expression :

$$I_k = q \cdot \vec{v} \cdot \frac{\vec{E}_k(\vec{r}_q)}{V_k}, \quad (3.10)$$

où  $\vec{E}_k$  est le champ existant lorsque l'électrode  $k$  est portée à la tension  $V_k = 1V$ , et toutes les autres électrodes sont mises à la masse.

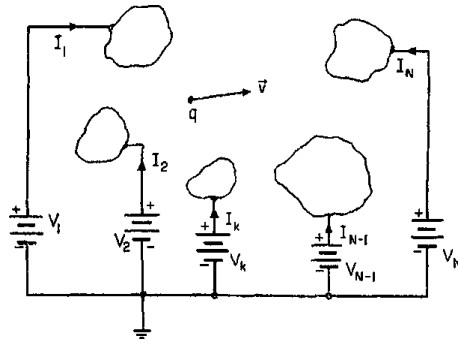


FIG. 3.13 – Reprise de l'illustration de [28]. Une charge  $q$  se meut avec une vitesse  $\vec{v}$  parmi une configuration arbitraire de  $N$  conducteurs maintenus à des potentiels  $V_k$ .

Il est important de noter que le courant induit ne dépend pas de ce qu'il pourrait y avoir entre une électrode et la masse. Quelle que soit l'impédance placée entre l'électrode et la masse, le courant induit ne dépend que du courant du faisceau circulant entre les électrodes (6.2 de [27]).

Appliqué au cas d'un condensateur plan d'épaisseur  $pas - 2 * r_{fil}$  traversé par une charge  $q$  de vitesse parallèle à l'axe  $v_{//}$ , le théorème de Shockley-Ramo se décline en deux propositions simples :

1. Le courant allant de la masse vers la plaque vers laquelle se dirige la charge  $q$  vaut :

$$I_{induit} = -q \cdot \frac{v//}{pas - 2 * r_{fil}};$$

2. et le courant allant de la masse vers la plaque de laquelle s'éloigne la charge  $q$  vaut :

$$I_{induit} = q \cdot \frac{v//}{pas - 2 * r_{fil}}.$$

De ce qui précède nous déduisons que lorsque le condensateur de capacité  $C_1$  est traversé pendant un temps  $\Delta t$  par un faisceau unidimensionnel d'électrons de fonction de distribution  $f(x_i, v_j)$ , la tension entre ses bornes varie d'une quantité :

$$\begin{aligned} \Delta V &= \frac{q \cdot \Delta t}{C_1 \cdot (pas - 2 * r_{fil})} \cdot \int_{x_i - \Delta x/2}^{x_i - \Delta x/2} \int_{-\infty}^{+\infty} v \cdot f(x, v) \cdot dv \cdot dx \\ &= \frac{q \cdot \Delta t \cdot \Delta x \cdot \Delta v}{C_1 \cdot (pas - 2 * r_{fil})} \cdot \sum_{v_j = v_{\min}}^{v_{\max}} v_j \cdot f(x_i, v_j) \end{aligned}$$

où  $q = 1,6 \cdot 10^{-19}$  C est la charge de l'électron,  $\Delta x$  et  $\Delta v$  sont les dimensions des cellules élémentaires constituant l'espace de phase discrétisé, et  $f(x_i, v_j)$  est la moyenne de la fonction de distribution du faisceau sur ces cellules.

Ensuite, comme nous avons choisi dans l'expression (3.7) d'utiliser les tensions spires-fourreau pour décrire la ligne de transmission, nous devons expliciter l'effet du courant induit en fonction de ces tensions. L'idée est de répartir la tension générée par le courant induit sur les capacités spires-fourreau encadrant la capacité inter-spires impliquée. D'après la figure 3.7 :

$$V_{C1} = V_1 - V_3 \Rightarrow \Delta V_3 = \Delta V_1 - \Delta V_{C1}.$$

En prenant  $\Delta V_1 = 0$ , nous choisissons de mettre tout l'effet du courant induit sur  $V_3$ , et nous obtenons alors :

$$\Delta V_3 = \frac{-q \cdot \Delta t \cdot \Delta x \cdot \Delta v}{C_1 \cdot (pas - 2 * r_{fil})} \cdot \sum_{v_j = v_{\min}}^{v_{\max}} v_j \cdot f(x_i, v_j). \quad (3.11)$$

Cette relation, démontrée pour la première capacité inter-spires, est ensuite transposée aux autres capacités inter-spires qui agissent sur le faisceau. Ainsi, un faisceau peut agir sur la structure à onde lente en induisant du courant dans les capacités qui agissent sur lui.

### 3.9 Évolution globale du TOP : *divide et impera*

Dans ce qui précède, nous avons décomposé l'interaction au sein d'un TOP en un ensemble de sous-problèmes que nous avons essayé de résoudre un à un. Ces phénomènes sont au nombre de sept :

1. l'injection du faisceau dans la structure ;
2. le glissement du faisceau d'électrons suivant l'axe du TOP ;
3. le calcul du champ d'hélice ;
4. le calcul du champ de charge d'espace ;
5. l'action des champs électriques sur le faisceau ;
6. l'évolution intrinsèque du champ d'hélice ;
7. et l'induction de courant dans l'hélice par le faisceau.

Comme l'évolution d'un TOP consiste en la réalisation simultanée de ces sept phénomènes, il faudrait donc résoudre simultanément l'ensemble des équations afférentes à ces phénomènes pour prédire l'évolution du TOP.

Pour résoudre ce problème, nous nous sommes inspirés de la démarche suivie par Cheng et Knorr [12] pour résoudre l'équation de Vlasov en utilisant la méthode dite du *Time-splitting*.

Pour résoudre l'équation de Vlasov (2.1), Cheng et Knorr [12] l'ont scindée en deux équations, (2.2) et (2.3), qu'ils ont par la suite résolues tour à tour. Il y a derrière cette procédure l'idée que l'évolution de la fonction de distribution dans l'espace des phases est une superposition d'évolutions dans chacune des directions de l'espace des phases. Ces mouvements se produisent simultanément, mais on peut approximer l'évolution de la fonction de distribution en considérant que ces mouvements se déroulent consécutivement. Cette approximation permet de faciliter la résolution d'un problème, et surtout de pouvoir traiter chaque sous-problème avec la méthode qui lui convient le mieux.

Ainsi, pour faire évoluer l'ensemble du TOP d'un pas de temps  $\Delta t$ , nous avons successivement fait évoluer chacun des sous-problèmes d'un pas de temps  $\Delta t$  :

1. injecter le faisceau avec l'expression (2.7) ;
2. intégrer l'équation (2.2) d'advection suivant  $x$  sur  $\Delta t$  ;
3. calculer le champ d'hélice avec les expressions (3.9) ;
4. calculer le champ de charge d'espace avec l'expression (2.10) ;
5. intégrer l'équation (2.3) d'advection suivant  $v$  sur  $\Delta t$  ;
6. faire évoluer de  $\Delta t$  le circuit équivalent grâce à (3.5) ;
7. et enfin calculer le courant induit dans l'hélice pendant  $\Delta t$  en utilisant (3.11).

Cette séquence simple est correcte au premier ordre, mais vu que nous avons accumulé les approximations au cours de notre raisonnement, cela ne va pas nuire à la précision globale du modèle.

### 3.10 Résultats

Nous présentons maintenant deux simulations effectuées avec le modèle que nous avons proposé. Nous n'apprécierons pas ici la justesse de la simulation, car il est clair qu'elle n'a pas vocation à être juste. C'est pour cela que nous n'exhiberons pas de chiffres. Nous montrerons par contre qu'elle donne des résultats qualitativement corrects.

La structure à onde lente est ici modélisée par le circuit équivalent montré sur la figure 3.4, et défini par :

$$\begin{aligned} C &= 2,6 \cdot 10^{-14} \text{ F} \\ C_1 &= 1,2 \cdot 10^{-13} \text{ F} \\ L &= 1,1 \cdot 10^{-9} \text{ H} \\ R &= 6,6 \cdot 10^{-5} \Omega. \end{aligned}$$

La courbe de dispersion de cette ligne a été tracée sur la figure 3.14.

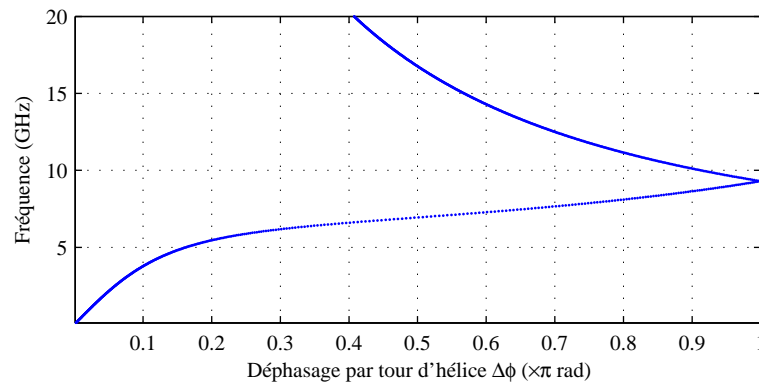


FIG. 3.14 – Courbe de dispersion du circuit équivalent utilisé en exemple.

#### 3.10.1 Interaction d'un faisceau continu avec un signal harmonique

La première simulation montre l'évolution d'un faisceau continu dans une structure à hélice transportant un champ sinusoïdal. L'hélice a un pas de 0,8 mm. Le champ harmonique est injecté en forçant une tension sinusoïdale de 10 V entre le bout de l'hélice et le fourreau. La fréquence de ce signal est de 5 GHz. Quant au faisceau, il est injecté à une vitesse de  $5 \cdot 10^7$  m/s, et son courant à l'injection est de 1 mA.

L'espace des phases est discrétisé en 300 cellules dans la direction des positions, et 70 dans la direction des vitesses. Le temps d'exécution de cette simulation est de 96 s. Un peu moins de 50% de ce temps est consacré aux

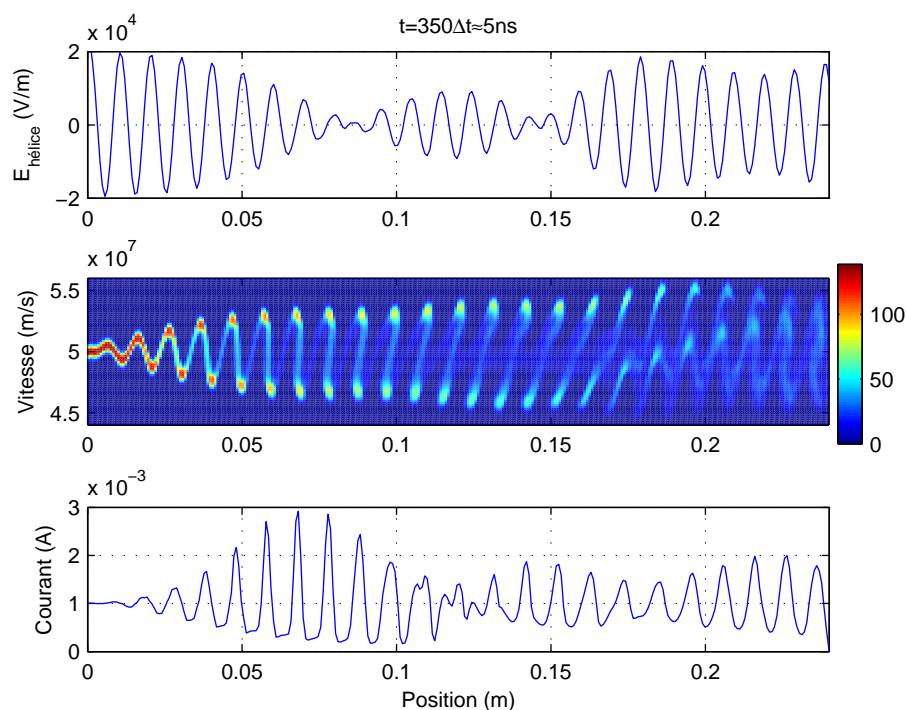


FIG. 3.15 – Interaction d'un faisceau continu avec une onde sinusoïdale. L'injection se fait par la gauche. On a représenté le champ électrique porté par la structure à onde lente (haut), la fonction de distribution du faisceau (milieu), et le courant porté par le faisceau (bas).

calculs préparatoires, et notamment au calcul des matrices d'évolution du circuit équivalent. Pour gagner du temps, ces deux matrices, qui ont une taille de  $1207 \times 1207^2$ , peuvent être calculées une fois pour toute, et stockées pour un circuit particulier. D'autre part, 20% du temps de calcul est utilisé pour afficher les graphiques montrés à chaque pas de temps. Bien qu'apportant une information précieuse sur le déroulement des calculs, cet affichage peut être avantageusement remplacé, en usage intensif, par un traitement automatique et non graphique des grandeurs pertinentes, et cela sans porter atteinte à la qualité des calculs.

Nous observons sur la figure 3.15 plusieurs phénomènes. Tout d'abord, il apparaît sous l'effet de l'onde une *modulation en vitesse* du faisceau ; les électrons sont accélérés ou freinés selon l'endroit où ils se trouvent dans

<sup>2</sup>Puisque l'espace des positions est discrétisé en 300 cellules, le nombre de degrés de liberté pour décrire la ligne est de :  $(300 \times 2 + 2)$  tensions spires-fourreau +  $(300 \times 2 + 1)$  courants dans les inductances +  $(2 \times 2)$  tensions et courants correspondants à deux oscillateurs en début de ligne = 1207.

l'onde. Ensuite, cette modulation en vitesse se transforme en *modulation en courant*, car pendant leur trajet, les électrons les plus rapides rattrapent les plus lents.

On observe ensuite le phénomène d'oscillation des électrons dans le *puits de potentiel* formé par l'onde. En effet, lorsqu'un électron est plus rapide que l'onde, il finit par arriver dans une zone de l'onde où le champ est décélérateur. Cet électron est alors décéléré jusqu'à devenir plus lent que l'onde, et il finit par se retrouver dans la zone où le champ est accélérateur où il redevient plus rapide que l'onde. Ainsi, il se met à osciller autour d'une position d'équilibre dont la vitesse est d'après la figure 3.15 d'environ  $5.10^7$  m/s. En observant la courbe de dispersion de l'hélice (Fig.3.14), on voit que cette vitesse correspond bien à la vitesse de phase d'une onde de 5 GHz :

$$v_\phi = \frac{\omega}{k} = \frac{\omega.pas}{\Delta\phi} = \frac{2\pi.f.pas}{\Delta\phi} \approx \frac{2\pi * 5.10^9 * 0,8.10^{-3}}{0,16.\pi} \approx 5.10^7 \text{ m/s.}$$

Par contre, lorsque des électrons sont trop rapides ou trop lents, l'onde n'est plus capable de les piéger, car la différence de vitesse leur permet de sortir du puits de potentiel formé par l'onde. On parle alors d'*électrons circulants* (Fig.3.16).

Enfin, on observe sur la figure 3.15 une oscillation de l'amplitude de l'onde électrique. L'onde est en effet amortie lorsqu'elle fournit du travail au faisceau, et est amplifiée lorsque le faisceau est ralenti par elle. Nous ne montrerons pas de chiffres concernant l'échange d'énergie, car il n'est pas correctement pris en compte.

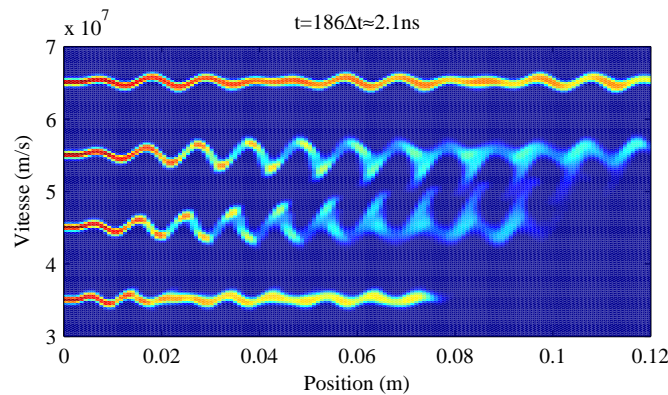


FIG. 3.16 – Quatre faisceaux sont injectés simultanément à différentes vitesses. L'onde électrique se propage à  $\approx 5.10^7$  m/s, et piège les électrons dont la vitesse est proche. On remarquera au passage que les électrons les plus rapides arrivent les premiers à la fin de la ligne.

### 3.10.2 Génération d'un signal par un faisceau modulé

Dans cette seconde simulation, nous montrons que le modèle est capable de prendre en compte l'action du faisceau sur l'hélice. Pour cela, nous simulons qualitativement le fonctionnement d'une twistrode [29]. Une twistrode est un TOP où l'on a remplacé la partie de l'hélice censée moduler le faisceau par une cathode modulée. On divise ainsi la longueur et le poids du tube par un facteur deux.

Nous effectuons cette simulation en injectant un faisceau modulé dans une ligne sans champ. Nous voudrions, par exemple, générer un signal à 5 GHz. Le plus simple à faire est d'injecter un faisceau modulé à la même fréquence. Ensuite, connaissant la courbe de dispersion de cette ligne, nous l'utilisons pour optimiser l'interaction. En effet, un faisceau interagit au mieux avec une onde lorsque qu'ils ont la même vitesse. La figure 3.14 nous indique qu'à 5 GHz, la ligne propage une onde directe à la vitesse d'environ  $5.10^7$  m/s. Nous injectons donc un faisceau à cette vitesse, et nous le modulons par le terme suivant :

$$1/2 + 1/2 \cdot \sin(2\pi \cdot F_{mod} \cdot t),$$

où  $F_{mod} = 5$  GHz.

Comme attendu, nous observons la croissance d'un signal ayant une longueur d'onde de  $\approx 0,01$  m, ce qui d'après la courbe de dispersion à la figure 3.14 correspond bien à une fréquence de 5 GHz :

$$\Delta\phi = \frac{2\pi \cdot pas}{\lambda} \approx \frac{2\pi * 0,8 \cdot 10^{-3}}{0,01} \approx 0,5 \approx 0,16 \times \pi \leftrightarrow 5 \text{ GHz}.$$

De plus, nous observons le phénomène de saturation où l'amplitude de l'onde décroît après avoir crû. Cela tient à trois phénomènes :

1. l'onde a crû par conservation d'énergie et d'impulsion, car elle a en moyenne ralenti le faisceau ;
2. en ralentissant, le faisceau va prendre du retard par rapport à l'onde générée, et une grande partie de celui-ci va se retrouver dans une zone accélératrice de l'onde ;
3. en accélérant une grande partie du faisceau, l'onde cède en moyenne de l'énergie à celui-ci, et par conservation d'énergie se trouve atténuée.

## 3.11 Conclusion

Nous avons donc proposé un modèle pour simuler le tube à onde progressive en domaine temporel, et nous avons montré qu'il décrit qualitativement bien l'interaction au sein du TOP.

Nous avons modélisé le faisceau d'électrons en une dimension en utilisant sa fonction de distribution. Son évolution temporelle a été obtenue en

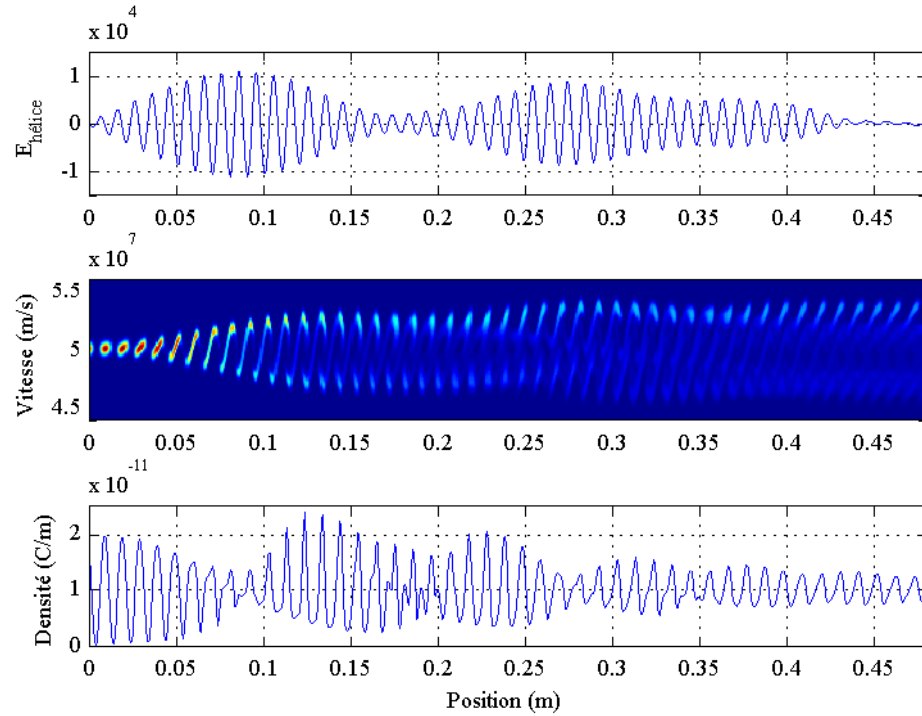


FIG. 3.17 – Représentation du champ électrique porté par la structure à onde lente (haut), de la fonction de distribution du faisceau d'électrons (milieu), et de la densité linéique de charge du faisceau (bas).

résolvant l'équation de Vlasov par la méthode dite PPM qui offre un bon compromis entre exactitude et rapidité.

D'autre part la structure à onde lente a été modélisée par un circuit équivalent simple qui reproduit assez bien la courbe de dispersion de la ligne à hélice pour les basses vitesses de phase. L'évolution temporelle de la ligne est alors donnée par la résolution des équations de Kirchhoff appliquées au circuit équivalent.

Le couplage entre le faisceau et la ligne a été qualitativement décrit : le circuit équivalent agit sur le faisceau via certaines de ses capacitances, et en retour le faisceau induit du courant dans ces mêmes capacitances.

Ce modèle s'avère rapide et léger, et comme nous l'avons montré, il permet de simuler correctement une multitude de configurations de tubes à onde progressive sur un ordinateur de bureau.

Il reste cependant plusieurs points à régler pour aboutir à un code quantitativement juste :

- dans le cadre de cette étude nous avons décrit les signaux propagés sur la ligne par des tensions. Une description des signaux par leur puissance permettrait de prendre en compte les échanges d'énergie de

manière explicite. Cela est plus naturel dans la mesure où les tubes hyperfréquence sont des amplificateurs de puissance.

- une structure à onde lente est caractérisée par son impédance de couplage, qui est sa faculté à concentrer sur l'axe la puissance électromagnétique qu'on lui fournit. Plus cette impédance est grande, plus l'interaction avec le faisceau sera forte. De plus, cette impédance varie avec la fréquence. Nous n'avons pas étudié cet aspect au cours de ce travail, mais bien que l'usage d'un circuit équivalent revienne à faire abstraction de la structure spatiale des champs électromagnétiques, il a été montré qu'il est possible pour un circuit équivalent de prendre en compte la variation de la résistance de couplage avec la fréquence [23].
- le circuit équivalent que nous avons utilisé (Fig. 3.4) est le circuit le plus simple que l'on puisse construire avec le raisonnement que nous avons proposé (Fig. 3.3). Les circuits plus compliqués, construits en discrétisant l'hélice avec plus de points par tour, devraient permettre de mieux prendre en compte les caractéristiques de la structure à hélice. L'on pourra aussi enrichir le modèle en prenant en compte les couplages entre des portions de spires qui ne se trouvent pas face-à-face, ou qui sont séparées par plus d'un tour d'hélice.
- il faudrait utiliser une méthode de *time splitting* d'ordre supérieur pour améliorer la précision de la simulation et pouvoir relâcher la contrainte sur le pas de temps.

Finalement, bien que qualitatif, ce modèle permet de comprendre une multitude de phénomènes ayant lieu dans le TOP en les visualisant.



## Chapitre 4

# Approche par réduction de modèle

Nous avons dans le chapitre précédent proposé de modéliser la structure à hélice par un circuit équivalent. Cette approche légère et rapide fait principalement appel à l'intuition du modélisateur pour sélectionner les couplages dominants au sein de la structure de propagation. Cela se paye par un manque de précision dans les paramètres de couplage du modèle.

Nous allons présenter dans ce chapitre une approche qui laisse de côté l'intuition du modélisateur pour aborder le problème de manière mathématique et systématique. Cette présentation est le résultat d'une recherche dans la littérature qui nous a mené jusque dans les revues d'automatique en passant par la mécanique des structures.

Dans ce chapitre, nous verrons brièvement comment se pose notre problème, et comment il pourrait être résolu si l'on disposait de ressources de calcul suffisantes<sup>1</sup>. Nous présenterons ensuite la méthode de réduction que l'on appellera *méthode des moments*. Puis nous expérimenterons cette méthode sur une structure à onde progressive simple, avant de conclure.

### 4.1 Discrétisation des équations de Maxwell

Nous nous occupons ici principalement de la structure à onde lente. Le faisceau peut être représenté en une dimension par sa fonction de distribution  $f(x, v)$  comme nous le faisons, mais il pourrait l'être différemment sans changer les propos qui suivent.

Considérons la structure à hélice dans sa globalité. Son évolution temporelle est régie par les équations de Maxwell. En notant :

- $\vec{E}$  le champ électrique,
- $\vec{B}$  le champ magnétique,

---

<sup>1</sup> « Il n'y a jamais assez de ressources de calcul ».

- $\rho$  la densité de charge électrique,
- $\vec{j}$  la densité de courant électrique,
- $\epsilon$  la constante diélectrique du milieu considéré,
- $\mu$  la perméabilité magnétique du milieu considéré, les équations de Maxwell s'écrivent :

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{E} = \frac{\rho}{\epsilon} \quad (4.1)$$

$$\vec{\nabla} \times \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \quad (4.2)$$

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{B} = 0 \quad (4.3)$$

$$\vec{\nabla} \times \vec{B} = \mu \cdot \vec{j} + \epsilon \mu \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \quad (4.4)$$

Vu que nous traitons le cas d'électrons non relativistes, l'effet de la composante magnétique du champ électromagnétique est négligeable, et nous manipulerons dans la suite seulement la composante électrique du champ.

À partir des équations (4.2) et (4.4), nous pouvons établir l'équation d'évolution du champ électrique  $\vec{E}$  :

$$\vec{\nabla} \times (\vec{\nabla} \times \vec{E}) = -\frac{\partial}{\partial t} \vec{\nabla} \times \vec{B} \quad (4.5)$$

$$\Rightarrow \vec{\nabla} \times (\vec{\nabla} \times \vec{E}) = -\frac{\partial}{\partial t} \left( \mu \cdot \vec{j} + \epsilon \mu \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \right) \quad (4.6)$$

$$\Rightarrow \vec{\nabla} \times (\vec{\nabla} \times \vec{E}) + \epsilon \mu \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} = -\mu \frac{\partial \vec{j}}{\partial t}, \quad (4.7)$$

où le champ électrique  $\vec{E}$  est excité par la variation du courant  $\vec{j}$ .

Pour résoudre l'équation (4.7), on procède par des méthodes numériques, car sa résolution analytique n'est possible que dans de rares cas simples. Pour traiter des cas concrets, on discrétise l'équation (4.7) sur un maillage représentant la structure étudiée. Sans entrer dans les détails, cela signifie que l'on suppose que le champ  $\vec{E}$  est défini non pas de manière continue, mais sur un ensemble discret de points de l'espace.

La discrétisation de l'équation (4.7) peut être effectuée par différentes méthodes, comme la méthode des différences finies [30], ou, comme dans notre cas, par la méthode des éléments finis [31]. Mais quelle que soit la méthode utilisée, la discrétisation aboutit généralement à un système d'équations différentielles du second ordre de la forme :

$$M \cdot \frac{d^2 U(t)}{dt^2} + D \cdot \frac{dU(t)}{dt} + KU(t) = F(t) \quad (4.8)$$

où :

- $M$  est la matrice de masse qui représente l'inertie du système ;

- $D$  est la matrice d'amortissement qui prend en compte les effets résistifs du système, et est nulle dans le cas de l'équation (4.7) ;
- $K$  est la matrice de raideur qui couple entre eux les différents degrés de liberté du système ;
- et  $F(t)$  est un vecteur contenant l'excitation due aux charges et aux courants.

On retrouve cette forme d'équation en mécanique des structures comme l'évoquent les noms des matrices. C'est aussi dans ce domaine que l'on trouve des méthodes numériques pour résoudre cette forme d'équation.

## 4.2 Évolution temporelle des systèmes linéaires du second ordre

On trouve différents schémas numériques pour intégrer les équations de la forme (4.8). À partir des conditions initiales  $U_0, \dot{U}_0, \ddot{U}_0$ , ces méthodes résolvent l'équation (4.8) pour des temps discrets multiples d'un certain pas de temps  $\Delta t$ . Bathe et Wilson montrent dans leur ouvrage [32] plusieurs méthodes dont ils comparent la stabilité et l'exactitude. Il ressort de leur étude que le meilleur choix est la méthode de Newmark.

La méthode de Newmark est une méthode implicite, c'est-à-dire que la détermination de l'état du système au temps  $t + \Delta t$  ne dépend pas seulement des états du système à des temps antérieurs déjà calculés, mais dépend aussi de l'état du système en  $t + \Delta t$ . Cela implique de résoudre un système matriciel à chaque pas de temps, mais a l'avantage de rendre le schéma d'intégration inconditionnellement stable, c'est-à-dire que sa stabilité n'est pas subordonnée à une condition sur le pas de temps  $\Delta t$ . Voyons en résumé ce schéma d'intégration tel qu'il est présenté au chapitre 8.2.4 de [32].

Pour calculer l'état du système au temps  $t + \Delta t$  à partir de son état au temps  $t$  et de l'excitation au temps  $t + \Delta t$ , la méthode de Newmark suppose d'abord que l'équation (4.8) est vérifiée à  $t + \Delta t$  :

$$M.\ddot{U}_{t+\Delta t} + D.\dot{U}_{t+\Delta t} + K.U_{t+\Delta t} = F_{t+\Delta t} \quad (4.9)$$

Elle lie ensuite le vecteur d'état  $U$  à ses dérivées par les relations suivantes :

$$\dot{U}_{t+\Delta t} = \dot{U}_t + \left[ (1 - \delta)\ddot{U}_t + \delta\ddot{U}_{t+\Delta t} \right] \Delta t \quad (4.10)$$

$$U_{t+\Delta t} = U_t + \dot{U}_t\Delta t + \left[ (1/2 - \alpha)\ddot{U}_t + \alpha\ddot{U}_{t+\Delta t} \right] \Delta t^2 \quad (4.11)$$

où  $\delta = 1/2$  et  $\alpha = 1/4$  sont les valeurs conseillées par Bathe et Wilson. Ces trois hypothèses conduisent alors au schéma numérique suivant :

- Phase préparatoire :
  1. Définir les matrices  $M$ ,  $D$ , et  $K$  ;
  2. Définir les conditions initiales  $U_0, \dot{U}_0$ , et  $\ddot{U}_0$  ;

3. Définir le pas de temps  $\Delta t$ , ainsi que les constantes d'intégration :
    - $\delta \geq 0.5$  ;  $\alpha \geq 0.25(0.5 + \delta)^2$  ;
    - $a_0 = \frac{1}{\alpha \Delta t^2}$  ;
    - $a_1 = \frac{\delta}{\alpha \Delta t}$  ;
    - $a_2 = \frac{1}{\alpha \Delta t}$  ;
    - $a_3 = \frac{1}{2\alpha} - 1$  ;
    - $a_4 = \frac{\delta}{\alpha} - 1$  ;
    - $a_5 = \frac{\Delta t}{2} \left( \frac{\delta}{\alpha} - 2 \right)$  ;
    - $a_6 = \Delta t(1 - \delta)$  ;
    - $a_7 = \delta \Delta t$  ;
  4. Calculer la matrice de raideur effective :  $\hat{K} = K + a_0 M + a_1 D$  ;
  5. Factoriser  $\hat{K}$  en un produit de matrices facilement inversibles (diagonales, triangulaires, ... ) ;
- À chaque pas de temps :

1. Calculer le vecteur de charge effective :

$$\hat{F}_{t+\Delta t} = F_{t+\Delta t} + M(a_0 U_t + a_2 \dot{U}_t + a_2 \ddot{U}_t) + D(a_1 U_t + a_4 \dot{U}_t + a_5 \ddot{U}_t)$$

2. Déterminer  $U_{t+\Delta t}$  en résolvant l'équation :

$$\hat{K} U_{t+\Delta t} = \hat{F}_{t+\Delta t}$$

où l'on mettra à profit la factorisation de  $\hat{K}$  pour accélérer les calculs<sup>2</sup> ;

3. Calculer les nouvelles vitesse et accélération :

$$\ddot{U}_{t+\Delta t} = a_0(U_{t+\Delta t} - U_t) - a_2 \dot{U}_t - a_3 \ddot{U}_t$$

$$\dot{U}_{t+\Delta t} = \dot{U}_t + a_6 \ddot{U}_t + a_7 \ddot{U}_{t+\Delta t}.$$

Ainsi, l'algorithme de Newmark permet de résoudre simplement l'équation (4.8). Cependant une étape risque bien de le ralentir considérablement. En effet, bien que l'on ait mis à profit la factorisation de  $\hat{K}$  pour accélérer son inversion, la quantité de calcul nécessaire à cette inversion reste de l'ordre de  $n^2$ , où  $n$  est la taille de la matrice [24]. Cela est bien inférieur aux  $n^3$  flops<sup>3</sup> nécessaires à l'inversion directe de  $\hat{K}$ , mais reste considérable si l'on doit répéter l'opération à chaque pas de temps pour des systèmes à plusieurs centaines de milliers de degrés de liberté.

L'intégration de l'équation (4.8) n'est donc pas envisageable en l'état, en tout cas pas sur un ordinateur de bureau. On pourrait tout de même étudier

<sup>2</sup>La mise en œuvre de cette technique sera expliquée en page 62.

<sup>3</sup>Un flop, contraction de *floating operation*, est une opération arithmétique élémentaire entre deux nombres à virgule flottante. Il sert d'unité pour la mesure de l'effort calculatoire nécessaire à l'exécution d'un algorithme.

la structure électromagnétique en résolvant cette équation en domaine fréquentiel, mais si l'on insiste pour l'étudier en domaine temporel, il nous faut absolument réduire la taille du système d'équation. C'est ici qu'intervient une méthode développée par les automaticiens depuis les années 1970, et qu'on trouve aujourd'hui sous le nom de *Model Order Reduction*. Voyons ce que contient cette méthode, et comment elle pourrait nous aider à simuler les tubes hyperfréquence en domaine temporel.

### 4.3 Réduction des systèmes dynamiques linéaires du second ordre

Les méthodes de réduction dites *Model Order Reduction* sont nées du besoin des automaticiens d'asservir en temps réel des systèmes dynamiques de plus en plus complexes, ainsi que du besoin des concepteurs de simuler rapidement des dispositifs multiphysiques de plus en plus sophistiqués [33]. Ces deux besoins exigent de disposer de modèles fiables et légers des systèmes étudiés.

Si un problème physique se met sous la forme :

$$\begin{cases} M.\ddot{U}(t) + D.\dot{U}(t) + KU(t) = B.e(t) \\ s(t) = C^T.U(t) \end{cases} \quad (4.12)$$

où :

- $U(t) \in \mathbb{R}^N$  est le vecteur d'état du système ;
- $M, D, K \in \mathbb{R}^{N \times N}$  sont des matrices constantes dites de masse, d'amortissement, et de raideur ;
- $e(t) \in \mathbb{R}^p$  est le vecteur d'entrée ;
- $B \in \mathbb{R}^{N \times p}$  est la matrice d'entrée ;
- $s(t) \in \mathbb{R}^q$  est le vecteur de sortie ;
- $C \in \mathbb{R}^{N \times q}$  est la matrice de sortie ;

alors les méthodes de réduction ont pour but de construire un système réduit de la forme :

$$\begin{cases} M_r.\ddot{U}_r(t) + D_r.\dot{U}_r(t) + K_r U_r(t) = B_r.e(t) \\ s(t) = C_r^T.U_r(t) \end{cases} \quad (4.13)$$

où :

- $U_r(t) \in \mathbb{R}^n$  est le vecteur d'état du système réduit ;
- $M_r, D_r, K_r \in \mathbb{R}^{n \times n}$  ;
- $e(t) \in \mathbb{R}^p$  et  $s(t) \in \mathbb{R}^q$  restent inchangés car il ne font pas partie du système ;
- $B_r \in \mathbb{R}^{n \times p}$  ;  $C_r \in \mathbb{R}^{n \times q}$  ;

tel que  $n \ll N$ , et que les deux systèmes aient le même comportement. On entend par le terme « même comportement » le fait que si les deux systèmes sont soumis à une même excitation (entrée), ils doivent avoir la

même réponse (sortie). Cela peut entre autres se traduire par l'égalité des fonctions de transfert des deux systèmes.

Remarquons que la forme (4.12) est très générale et décrit une multitude de systèmes issus de différents domaines tels que l'électronique [34], la mécanique des structures, l'aéronautique [35], la micro-électromécanique [36], et l'électromagnétisme [37][38].

Les méthodes de réduction de modèles peuvent être classées en deux catégories : des méthodes qui consistent à projeter le système (4.12) sur des sous-espaces convenablement choisis ; et des méthodes qui se basent sur la troncature de la décomposition en valeurs singulières (SVD) du système initial [33].

Les méthodes basées sur la SVD ont l'avantage de déterminer *a priori* l'erreur commise lors du choix d'un système réduit. Par contre, avant d'effectuer la troncature de la SVD, elles requièrent d'effectuer complètement la SVD ce qui implique une quantité de calcul de l'ordre de  $N^3$  même lorsque l'on ne retient finalement qu'un petit nombre de valeurs singulières.

De leur côté, les méthodes basées sur la projection construisent au fur et à mesure et de manière itérative la base de projection. Cela ne permet pas d'estimer *a priori* l'erreur commise par le modèle, mais requiert une quantité de calcul de l'ordre de  $n^2N$ . C'est la méthode que nous retiendrons, car elle est plus appropriée pour les systèmes de grande taille [33].

### 4.3.1 La méthode des moments

La méthode de réduction basée sur la projection vise simultanément deux buts : construire une base de petite taille afin d'y projeter le système à réduire, et préserver les moments du système à réduire.

Le premier but est de construire deux bases de vecteurs :

$$V = [V_1, V_2, \dots, V_n]$$

$$W = [W_1, W_2, \dots, W_n]$$

afin d'y projeter le système original (4.12) et construire le système réduit (4.13) de la manière suivante :

- $U_r(t) = V^T U(t)$  ;
- $M_r = W^T M V$  ;  $D_r = W^T D V$  ;  $K_r = W^T K V$  ;
- $B_r = W^T B$  ;  $C_r = V^T C$  .

Dans le même temps, les bases  $V$  et  $W$  sont construites de manière à ce que les systèmes (4.12) et (4.13) aient approximativement la même fonction de transfert entre l'entrée  $e(t)$  et la sortie  $s(t)$ . Cela est garanti si l'on préserve les moments du système lors de la réduction. En effet, la fonction de transfert du système (4.12) s'écrit :

$$G(s) = C^T (s^2 M + s D + K)^{-1} B$$

où  $s = \sqrt{-1} 2\pi f \in \mathbb{C}$  est la fréquence<sup>4</sup>. Comme toute fonction analytique définie sur le plan complexe,  $G(s)$  admet un développement en série autour de n'importe quel point  $s_0 \in \mathbb{C}$  qui n'est pas un pôle :

$$G(s) = \sum_{i=0}^{+\infty} m^{(i)}(s - s_0)^i$$

où  $m^{(i)}$  est le moment d'ordre  $i$  du système (4.12) autour du point  $s_0$ . De même, la fonction de transfert du système réduit admet aussi un développement en série :

$$G_r(s) = C_r^T (s^2 M_r + s D_r + K_r) B_r = \sum_{i=0}^{+\infty} m_r^{(i)}(s - s_0)^i$$

Les moments sont aux fonctions complexes ce que les dérivées sont aux fonctions réelles, on peut donc considérer dans une certaine mesure que plus deux fonctions ont de moments égaux, plus elles sont équivalentes sur un grand rayon autour d'un point  $s_0$ . Ainsi, si l'on conserve les moments de la fonction de transfert lors de la réduction, on préserve le comportement du système. On trouve parfois cette méthode sous le nom de "*moment matching method*"; nous l'appellerons « méthode des moments ».

Pour appliquer la méthode des moments à notre problème, à savoir réduire un système du second ordre à plusieurs entrées et plusieurs sorties sur une large bande de fréquence, nous allons utiliser des résultats trouvés dans la littérature. Nous commencerons par voir le cas plus simple des systèmes du premier ordre. Ce cas est historiquement le premier à avoir été traité, et est plus facile à appréhender. Il nous permettra d'introduire certaines notions, et nous verrons ensuite le cas des systèmes du second ordre.

### 4.3.2 Cas des systèmes du premier ordre

Dans sa thèse, Grimme démontre un théorème qui permet de réduire des systèmes dynamiques du premier ordre à plusieurs entrées et plusieurs sorties autour de plusieurs fréquences (p.49 de [39]).

Définissons d'abord le cadre. Soit un système dynamique linéaire du premier ordre à  $N$  degrés de liberté et à plusieurs entrées et sorties :

$$\begin{cases} E\dot{U}(t) &= AU(t) + Be(t) \\ s(t) &= C^T U(t) \end{cases} \quad (4.14)$$

où :

- $U(t) \in \mathbb{R}^N$  est le vecteur d'état,
- $E, A \in \mathbb{R}^{N \times N}$ ,

---

<sup>4</sup>Dans la suite, et en vertu d'un abus de langage couramment rencontré dans la littérature, nous appellerons « fréquence » la grandeur  $s \in \mathbb{C}$ .

- $e(t) \in \mathbb{R}^p$  l'entrée du système,
- $s(t) \in \mathbb{R}^q$  la sortie du système,
- $B \in \mathbb{R}^{N \times p}$  et  $C \in \mathbb{R}^{N \times q}$  sont les matrices d'entrée et de sortie.

Soit le système réduit à  $n \ll N$  degrés de liberté obtenu par projection du système 4.14 sur deux bases  $V \in \mathbb{R}^{N \times n}$  et  $W \in \mathbb{R}^{N \times n}$  :

$$\begin{cases} E_r \dot{U}_r(t) &= A_r U_r(t) + B_r e(t) \\ s(t) &= C_r^T U_r(t) \end{cases} \quad (4.15)$$

où :

- $U_r(t) = V^T U(t) \in \mathbb{R}^n$  est le vecteur d'état réduit,
- $E_r = W^T E V$ ,  $A_r = W^T A V \in \mathbb{R}^{n \times n}$ ,
- $e(t) \in \mathbb{R}^p$  et  $s(t) \in \mathbb{R}^q$  restent inchangés car ils ne font pas partie du système,
- $B_r = W^T B \in \mathbb{R}^{n \times p}$  et  $C_r = V^T C \in \mathbb{R}^{n \times q}$ .

Les fonctions de transferts des deux systèmes admettent un développement en série autour d'un point  $s_0 \in \mathbb{C}$ . On appelle les moments d'un système les coefficients du développement en série de la fonction de transfert. Pour le système (4.14) par exemple, la fonction de transfert s'écrit :

$$G(s) = C^T (sE - A)^{-1} B = \sum_{i=0}^{+\infty} m^{(i)} (s - s_0)^i.$$

On définit le sous-espace de Krylov de dimension  $I$  engendré par une matrice carrée  $A$  et la  $i^e$  colonne d'une matrice  $B$  :

$$\mathcal{K}_I(A, B_i) = \text{Vect}\{B_i, AB_i, A^2 B_i, A^3 B_i, \dots, A^{I-1} B_i\}. \quad (4.16)$$

On définit enfin une notation pour la transposée de l'inverse :

$$A^{-T} = (A^{-1})^T.$$

Voici le résultat démontré par Grimme.

**THÉORÈME 1** *Soit des fréquences  $s_1, s_2, \dots, s_K \in \mathbb{C}$ . Si les colonnes de  $V$  forment une base du sous-espace suivant :*

$$\bigcup_{i=1}^p \left\{ \bigcup_{k=1}^K \mathcal{K}_{I_k} \left( (A - s_k E)^{-1} E, (A - s_k E)^{-1} B_i \right) \right\}$$

*et si les colonnes de  $W$  forment une base du sous-espace :*

$$\bigcup_{j=1}^q \left\{ \bigcup_{k=1}^K \mathcal{K}_{I_k} \left( (A - s_k E)^{-T} E^T, (A - s_k E)^{-T} C_j \right) \right\}$$

*alors les systèmes (4.14) et (4.15) ont  $2I_k$  moments égaux autour de chaque fréquence  $s_k$ .*

### 4.3. RÉDUCTION DES SYSTÈMES DYNAMIQUES LINÉAIRES DU SECOND ORDRE 61

Ce théorème réduit ainsi le problème de la réduction de systèmes à un problème de construction d'une base d'un sous-espace de Krylov donné. Pour réduire un système de la forme (4.14), il suffit donc de générer les espaces de Krylov spécifiés par le théorème 1, de générer ensuite deux bases à ces sous-espaces, puis de projeter le système à réduire sur ces bases pour obtenir le système réduit (4.15).

Dans notre cas, comme dans de nombreux problèmes physiques, le système (4.14) est symétrique, c'est-à-dire que  $E = E^T$ ,  $A = A^T$ , et  $B = C$ . Dans ce cas, les deux espaces de Krylov spécifiés par le théorème 1 sont les mêmes, et il suffit alors de calculer seulement  $V$  et poser ensuite  $W = V$ . On divise ainsi par deux la quantité de calcul pour le même résultat.

À propos de résultat, il faut préciser que l'on est incapable actuellement de lier l'erreur commise par le modèle réduit au nombre de moments ajustés autour de chaque fréquence. On sait seulement que plus on égale de moments, plus le modèle réduit se rapproche du modèle initial, sans pouvoir dire de combien. C'est là une faiblesse de la méthode des moments, et plusieurs idées plus ou moins intuitives ont été proposées pour quantifier l'erreur commise (cf chapitre 5 de [39] et [36]). C'est une question à suivre, et en attendant nous avons opté pour le moyen le plus sûr, qui est de comparer à chaque pas les fonctions de transfert du système réduit et du système original. Cela n'a pas la rapidité d'une formule magique, mais est largement compensé par la rapidité de l'algorithme d'Arnoldi que nous allons voir immédiatement.

#### 4.3.3 Algorithme d'Arnoldi et inversion de grandes matrices

Nous avons vu que le théorème 1 transforme le problème de réduction de modèle en un problème de construction d'une base d'un espace de Krylov donné. Comme on peut le voir dans la définition (4.16), la construction d'un sous-espace de Krylov est une opération récursive. En effet, le  $j^e$  vecteur d'un espace de Krylov peut aussi être défini par la relation :

$$\begin{cases} r_1 = B_i \\ r_j = Ar_{j-1}, j > 1. \end{cases}$$

Nul besoin donc de calculer les puissances successives de la matrice  $A$ .

Un algorithme simple et stable pour construire par récurrence une base orthonormée d'un espace de Krylov est l'algorithme d'Arnoldi [33]. Cet algorithme se résume aux quatre étapes suivantes :

1. générer par récurrence un nouveau vecteur du sous-espace de Krylov ;
2. orthogonaliser ce nouveau vecteur par rapport à la base déjà construite ;
3. normaliser le vecteur ;
4. et l'inclure dans la base déjà construite.

Pour orthogonaliser la base de vecteurs, nous utilisons une version modifiée de l'algorithme de Gram-Schmidt [24], car la version usuelle<sup>5</sup> est numériquement instable et est rapidement déstabilisée par les erreurs d'arrondi intrinsèques de l'ordinateur.

Voici un exemple, simplement présenté, de la suite d'opérations nécessaires pour construire la base  $V$  de l'espace de Krylov  $\mathcal{K}_3(A^{-1}, B_i)$  où  $A$  est une matrice carrée inversible :

1.  $V_1 = B_i / \|B_i\|$  ;
2.  $V_2^{(1)} = A^{-1}V_1$  ;
3.  $V_2^{(2)} = V_2^{(1)} - (V_2^{(1)T} \cdot V_1)V_1$  ;
4.  $V_2 = V_2^{(2)} / \|V_2^{(2)}\|$  ;
5.  $V_3^{(1)} = A^{-1}V_2$  ;
6.  $V_3^{(2)} = V_3^{(1)} - (V_3^{(1)T} \cdot V_1)V_1$  ;
7.  $V_3^{(3)} = V_3^{(2)} - (V_3^{(2)T} \cdot V_2)V_2$  ;
8.  $V_3 = V_3^{(3)} / \|V_3^{(3)}\|$  ;

Cette séquence d'opérations, assez représentative des espaces de Krylov indiqués dans le théorème 1, peut être considérablement ralentie si l'on calcule directement  $A^{-1}$  à chaque fois qu'il est demandé, comme dans  $V_2 = A^{-1}V_1$ . Un moyen d'accélérer ce calcul est de résoudre plutôt le système d'équation  $AV_2 = V_1$  en utilisant une factorisation de  $A$  calculée une fois pour toute [24]. Si l'on factorise  $A$  de sorte que  $PA = LU$  où :

- $P$  est une matrice de permutation ;
- $L$  est une matrice triangulaire inférieure ;
- $U$  est une matrice triangulaire supérieure ;

et que l'on sauvegarde ces matrices, alors nous pouvons transformer le problème de l'inversion :

$$\begin{aligned} V_2 &= A^{-1}V_1 \\ \Rightarrow AV_2 &= V_1 \\ \Rightarrow LUV_2 &= PV_1 \end{aligned} \tag{4.17}$$

ce qui revient à résoudre l'équation :

$$LV_{temp} = PV_1$$

puis l'équation :

$$UV_2 = V_{temp}.$$

Ces deux équations se résolvent par substitution, ce qui demande  $n^2$  flops. Cela est plus intéressant que les  $n^3$  flops nécessaires pour inverser directement la matrice  $A$  [24].

---

<sup>5</sup>Celle enseignée en arithmétique exacte.

#### 4.3.4 Réduction des systèmes du second ordre

Revenons à notre problème initial. Pour rappel, il s'agit de réduire un système de la forme (4.12) en le projetant sur deux bases  $V$  et  $W$  pour construire le système réduit (4.13).

Il est possible avec le théorème 1 de réduire des systèmes d'ordre supérieur à un, car tout système se réduit à un système du premier ordre par un changement de variable. Par exemple, le système (4.12) peut être transformé en un système de la forme (4.14) en posant :

$$\hat{U}(t) = \begin{bmatrix} U(t) \\ \dot{U}(t) \end{bmatrix}; E = \begin{bmatrix} I_N & 0 \\ 0 & M \end{bmatrix}; A = \begin{bmatrix} O & I_N \\ -K & -D \end{bmatrix}; \dots$$

où  $I_N$  est la matrice identité.

Cette approche, introduite en 1991 dans [35], a deux inconvénients évidents :

1. la multiplication par deux du nombre de variables à manipuler ;
2. la perte du sens physique des matrices et des vecteurs d'état après projection, ce qui exige un effort supplémentaire pour récrire le système réduit sous la forme initiale du second ordre.

Diverses techniques ont été élaborées pour pallier ces deux défauts, et l'on a procédé ainsi pendant une douzaine d'années (*cf* par exemple [40]).

En 2003, Salimbahrami propose une méthode pour traiter directement les systèmes du second ordre [41]. Pour y arriver, il définit ce qu'il appelle les espaces de Krylov du second ordre :

$$\mathcal{K}_m(A_1, A_2, B) = \text{Vect}\{P_0, P_1, P_2, \dots, P_{m-1}\}$$

où

$$\begin{cases} P_0 = B, \\ P_1 = A_1 P_0, \\ P_i = A_1 P_{i-1} + A_2 P_{i-2}. \end{cases} \quad (4.18)$$

et  $A_1, A_2 \in \mathbb{R}^{N \times N}$ ,  $B \in \mathbb{R}^{N \times p}$ . Les matrices  $P_i$  engendrant l'espace ne doivent pas choquer, ce sont en fait les colonnes de ces matrices qui engendrent l'espace. Cette notation permet simplement d'alléger l'écriture par rapport à celle du théorème 1, et lors de la mise en oeuvre les vecteurs d'entrées/sorties seront traités un à un, comme dans le théorème 1.

Voici le résultat<sup>6</sup> que propose Salimbahrami dans sa thèse (théorème 4.5 de [42]) :

**THÉORÈME 2** *Soit un système dynamique de la forme (4.12), et des fréquences  $s_1, s_2, \dots, s_j, \dots, s_J \in \mathbb{C}$ . On pose  $\hat{K}_j = (K + s_j D + s_j^2 M)$ . Si  $V$  est*

<sup>6</sup>version légèrement particularisée par nous.

une base du sous-espace de Krylov du second ordre :

$$\bigcup_{j=1}^J \mathcal{K}_{I_j} \left( -\hat{K}_j^{-1}(D + 2s_j M), -\hat{K}_j^{-1}M, -\hat{K}_j^{-1}B \right)$$

et si  $W$  est une base du sous-espace de Krylov du second ordre :

$$\bigcup_{j=1}^J \mathcal{K}_{I_j} \left( -\hat{K}_j^{-T}(D + 2s_j M)^T, -\hat{K}_j^{-T}M^T, -\hat{K}_j^{-T}C \right)$$

alors les systèmes (4.12) et (4.13) ont  $2I_j$  moments égaux autour de chaque fréquence  $s_j$ .

Ce théorème traite donc les systèmes du second ordre avec la même simplicité que le théorème 1 pour les systèmes du premier ordre.

On notera que dans le cas d'un système symétrique, où  $M^T = M$ ,  $D^T = D$ ,  $K^T = K$ ,  $B = C$ , il suffit de calculer  $V$  et ensuite poser  $W = V$  pour aboutir au même résultat.

Pour mettre en oeuvre ce théorème, l'algorithme d'Arnoldi constitue un choix simple et robuste. Dans le cas du second ordre, il reste semblable à la version exposée au chapitre 4.3.3, sauf que la génération des nouveaux vecteurs se fait avec la relation (4.18). On pourra le trouver explicité en détail dans le chapitre 5.1 de [42].

### 4.3.5 Optimisation de la base de projection

Lors de la réduction d'un système de la forme (4.12), l'algorithme d'Arnoldi traite les vecteurs du sous-espace de Krylov prescrits par le théorème 2, puis les inclut dans la base  $V$  qu'il construit. Ces vecteurs sont traités et inclus dans l'ordre où ils sont générés sans aucune forme de sélection.

Salimbahrami a proposé l'idée de sélectionner les vecteurs à inclure dans la base  $V$  en choisissant ceux qui apportent le plus d'information à la base déjà construite [43]. Pour quantifier cet apport d'information à la base, il utilise la notion d'orthogonalité du vecteur candidat par rapport à celle-ci. Il est clair qu'un vecteur candidat qui est une combinaison linéaire des vecteurs de la base n'a rien à apporter, et doit de ce fait être éliminé; et cela n'affectera aucunement la base. Aussi, plus un vecteur candidat est orthogonal à la base déjà construite, plus il est susceptible de lui apporter de l'information nouvelle.

L'orthogonalité d'un vecteur par rapport à une base de vecteurs est estimée à partir de l'angle  $\alpha$  que fait celui-ci avec la base. Pour un vecteur candidat  $\vec{v}$ , l'angle  $\alpha$  peut être calculé à partir de la norme du vecteur avant et après son orthogonalisation par rapport aux vecteurs de la base :

$$\sin \alpha = \frac{\|\vec{v}_{\text{après orthogonalisation}}\|}{\|\vec{v}_{\text{avant orthogonalisation}}\|} \quad (4.19)$$

Une analogie avec les cas à une et deux dimensions permet de se convaincre de la précédente relation (Fig. 4.1).

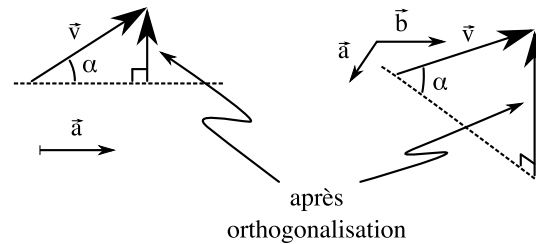


FIG. 4.1 – Exemple en une et deux dimensions du calcul de l’angle que fait un vecteur par rapport à une base. Les vecteurs unitaires de la base sont  $\vec{a}$  et  $\vec{b}$ ; et  $\vec{v}$  est le vecteur candidat.

Pour mettre en oeuvre cette idée, il ne faut pas inclure un vecteur candidat tout de suite après son orthogonalisation, comme édicté par l’algorithme d’Arnoldi. À la place, on calcule l’angle qu’il fait avec la base déjà construite, et on le stocke. Lorsque l’on a accumulé plusieurs vecteurs candidats, on inclut dans la base celui qui fait le plus grand angle avec la base. Le vecteur candidat promu laisse vacante sa place parmi les vecteurs candidats, on introduit donc à sa place un nouveau vecteur candidat, généré comme prévu par le théorème 2.

Ainsi, l’on peut espérer accélérer la convergence du modèle réduit en évitant d’inclure dans les bases  $V$  et  $W$  des vecteurs liés à des degrés de liberté peu importants dans la dynamique du système.

## 4.4 Résultats

Nous avons implémenté la méthode des moments sous la forme proposée par Salimbahrami dans [41], et y avons joint l’optimisation qu’il a proposée dans [43]. Le code obtenu permet de réduire des systèmes du second ordre à plusieurs entrées et plusieurs sorties de la forme (4.12). À partir des matrices du système, et d’une liste de fréquences, le code construit les matrices de projection  $V$  et  $W$  qui serviront à construire le système réduit (4.13).

Après son implémentation, nous avons essayé ce code sur un cas simple pour vérifier son bon fonctionnement, ainsi que l’efficacité de la méthode de réduction.

### 4.4.1 Exemple d’une structure périodique bidimensionnelle

Nous avons utilisé le code implémenté pour trouver un modèle réduit d’une structure électromagnétique fictive simple (Fig.4.2). Il s’agit d’un guide d’onde périodique en deux dimensions. Nous avons ensuite comparé la courbe de dispersion du modèle réduit avec celle du système original.

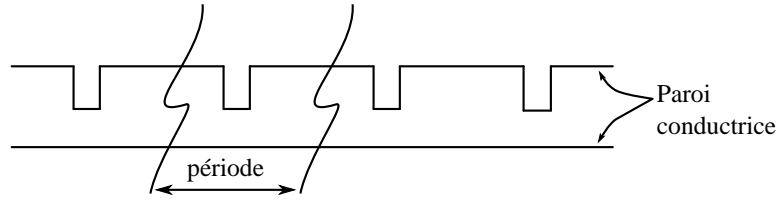


FIG. 4.2 – Guide d’onde en deux dimensions utilisé pour tester la méthode des moments.

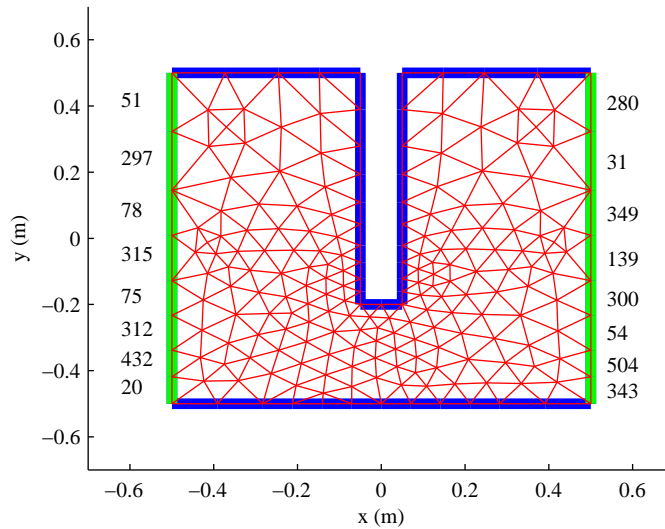


FIG. 4.3 – Une période du guide d’onde discrétisée par un maillage. Les bords gauche et droit sont les ports qui relient le domaine au reste du guide d’onde. On a représenté les numéros des mailles situés sur les ports.

La figure 4.3 montre une période du guide d’onde étudié. En discrétisant les équations de Maxwell par la méthode des éléments finis sur le maillage montré, nous avons obtenu un système de la forme (4.12) où :

- le vecteur d’état  $U(t) \in \mathbb{R}^{575}$  contient les circulations du champ électrique sur les arêtes du maillage ;
- le vecteur d’entrée  $e(t) \in \mathbb{R}^{16}$  contient la circulation du champ électrique sur les arêtes situées sur les deux ports de la structure, car ce sont les seuls degrés de liberté par lesquels on peut exciter cette portion du guide d’onde ;
- et le vecteur de sortie  $s(t) = e(t)$ , car les arêtes situées sur les ports sont les seuls degrés de liberté capables d’agir sur le reste du guide d’onde.

Pour réduire ce système, nous avons utilisé 44 itérations réparties comme il

suit :

Fréquence (rad/s)	Nombre d'itérations
1	9
2	9
3	8
4	9
5	9

Les fréquences utilisées ne sont pas complexes, mais bien réelles. Grimme montre en effet que le fait d'utiliser des points « d'interpolation » réels permet une convergence plus étendue des fonctions de transfert, alors que l'utilisation de fréquences imaginaires conduit à une convergence localisée et bien sûr au doublement de la quantité de calcul nécessaire (partie réelle + partie imaginaire) [39].

Notons aussi que le nombre de vecteurs générés autour de chaque fréquence est inférieur au nombre de ports du système. Alors que le théorème 2 impose implicitement un nombre de vecteurs multiple entier du nombre de ports du système, on est forcé de constater, dans la suite, que le système réduit converge vers le système initial sans le respect de la précédente condition. Cela montre que chaque vecteur ajouté au sous-espace de projection apporte de l'information indépendamment des autres vecteurs. Il est aussi possible que cela soit dû à la sélection sur les vecteurs candidats que nous avons implémentée. Cette optimisation sélectionne les vecteurs les plus pertinents, et il n'est alors pas nécessaire de conserver les vecteurs liés à tous les ports.

Finalement, la matrice de projection

$$V \in \mathbb{R}^{575 \times 44},$$

et nous avons

$$W = V$$

puisque le système est symétrique.

Ainsi, le modèle réduit est 13 fois plus petit que le système original. Pour apprécier la qualité du modèle réduit, nous avons comparé sa courbe de dispersion avec celle du système original (Fig.4.4).

La comparaison des courbes de dispersion indique que le modèle réduit reproduit correctement le comportement du système initial pour une plage de fréquences allant de 0 à  $\approx 5$  rad/s, soit sur la plage que nous avons spécifiée à l'algorithme de réduction. La qualité du modèle réduit peut aussi être appréciée à l'aide des fonctions de transfert des deux systèmes (Fig.4.5) qui, rappelons-le, sont le concept sous-jacent à la méthode des moments. On remarque sur la figure 4.5 que la fonction de transfert du système réduit tend vers celle du système initial lorsque l'on agrandit le sous-espace de projection  $V$ .

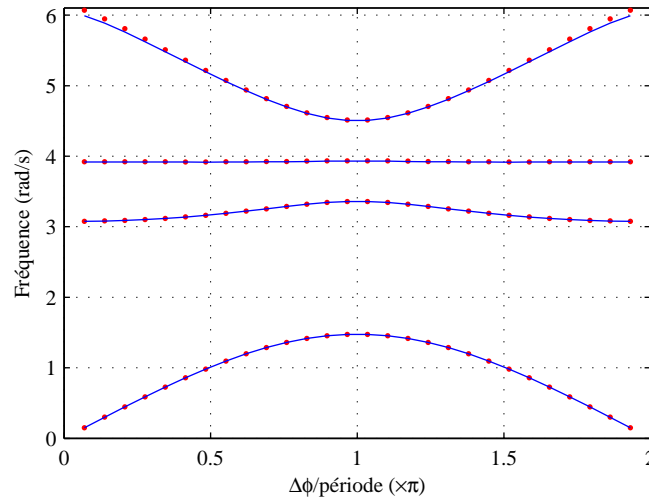


FIG. 4.4 – Graphique présentant la courbe de dispersion du système initial (ligne continue), et celle du système réduit. Un écart est observé vers 6 rad/s.

Le temps nécessaire pour effectuer cette réduction a été de  $\approx 0,3$  s. Le code est exécuté sur un Pentium 4 cadencé à 2,8 GHz et muni de 1 Go de mémoire vive. La factorisation LU de la matrice  $\tilde{K}$  (théorème 2) a été effectuée une fois pour chaque fréquence, soit 5 fois, et a nécessité  $\approx 0,1$  s en tout.

## 4.5 Conclusion et perspectives

Ainsi, le système d'équations différentielles décrivant l'évolution temporelle de la période de guide d'onde montrée dans la figure 4.3 a été réduit d'un facteur 13 grâce à la méthode des moments. Une fois le système réduit, sa résolution directe par la méthode de Newmark (p.55) va requérir  $13^2 \approx 170$  fois moins de temps, car chaque itération de la partie itérative de l'algorithme nécessite  $O(n^2)$  flops, où  $n$  est la taille des matrices.

Quant à la partie préparatoire de l'algorithme de Newmark, qui requiert  $O(n^3)$  flops, elle est réduite d'un facteur  $13^3 \approx 2000$ . Mais attention, l'algorithme d'Arnoldi, dont on se sert dans la procédure de réduction, a aussi une opération préparatoire requérant  $O(n^3)$  flops, ce qui annule le gain en temps sur la partie préparatoire.

Au final, la réduction de système par la méthode des moments implémentée avec l'algorithme d'Arnoldi permet de diviser la quantité de calcul nécessaire à l'intégration temporelle du système (4.12) par un facteur :

$$\text{gain}_{\text{calcul}} = \left(\frac{N}{n}\right)^2$$

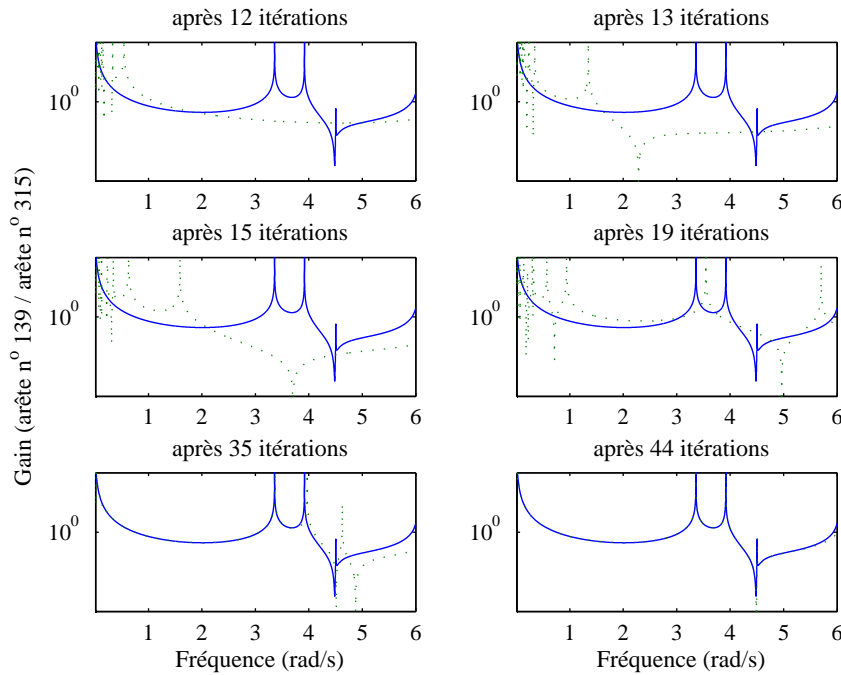


FIG. 4.5 – Graphique présentant la fonction de transfert du système initial (ligne continue), et celle du système réduit (ligne pointillée). La grandeur tracée est le gain du système montré dans la figure 4.3 entre la valeur du champ électrique sur l’arête n° 315 et la valeur du champ électrique sur l’arête n° 139.

où  $N$  est le nombre de degrés de liberté du système à étudier, et  $n$  est le nombre de degrés de liberté du système réduit.

Nous avons ici réduit le système d’un facteur 13, mais il n’est pas absurde de croire que plus le système sera grand, plus le facteur de réduction sera élevé, car les sous-espaces de Krylov que nous avons utilisés sont fortement liés aux modes propres du système [44], et le nombre de modes propres pertinents n’augmente pas systématiquement avec la taille du système étudié.

Par ailleurs, nous avons traité ici une structure à onde lente seule, sans faisceau. Le traitement d’un système avec faisceau n’est pas fondamentalement différent, car l’équation (4.7) décrivant l’évolution du champ électromagnétique en prenant en compte l’excitation par un faisceau entre bien dans le cadre des systèmes du second ordre de la forme (4.12) traités par la méthode des moments. Dans ce cas, le terme d’excitation :

$$-\mu \frac{\partial \vec{j}}{\partial t}$$

viendra s’ajouter aux excitations dans le vecteur d’entrée du système  $e(t)$ .

L'on pourra alors réduire le système comme nous avons procédé dans l'exemple présenté plus haut.

Notons bien qu'une fois que le système « avec faisceau » a été réduit, il ne suffit pas de l'intégrer en temps pour simuler le comportement du système total, car l'équation (4.7) ne renseigne aucunement sur la dynamique propre du faisceau. Celle-ci doit être intégrée parallèlement par une méthode au choix, et une intégration du type *time-splitting* permettra de simuler l'évolution de l'ensemble.

Dans le cas particulier où la dynamique du faisceau est linéarisée, comme lorsque l'on travaille en régime de petit signal, on pourra former un seul vecteur d'état  $U(t)$  décrivant en même temps la structure électromagnétique et le faisceau d'électrons. On obtient alors un seul système de la forme (4.12) décrivant la totalité du dispositif hyperfréquence.

## Chapitre 5

# Conclusion

Nous avons présenté dans cette thèse deux idées pour simuler les tubes à onde progressive en domaine temporel.

La première idée se base sur l'utilisation d'un circuit équivalent en lieu et place de la structure à onde lente. Ce circuit, qui a été construit en tenant compte des couplages au sein de la structure à onde lente, reproduit correctement la dispersion de la structure pour les petites vitesses de phase.

Le faisceau a quant à lui été considéré à une dimension et son évolution a été obtenue en résolvant l'équation de Vlasov avec la méthode dite « *Piece-wise Parabolic Method* » implémentée dans un schéma d'intégration du type « *Time-splitting* ».

L'interaction entre le faisceau et le circuit équivalent a été également décrite. Le circuit équivalent agit sur le faisceau d'électrons via certaines de ces capacitances, alors que le faisceau induit du courant dans ces mêmes capacitances.

Bien que restant à améliorer, ce modèle parvient à décrire qualitativement l'interaction onde-faisceau dans une large bande de fréquence, et cela en des temps de calcul de l'ordre de la minute sur un ordinateur de bureau (2,8 GHz, 1 Go).

Pour améliorer cette première approche, quatre questions doivent être étudiées :

1. Nous avons décrit le circuit équivalent avec des tensions. Quoique facilitant les calculs de l'action du circuit sur le faisceau d'électrons, cette approche ne rend pas compte de l'évolution de la puissance transportée par la ligne. Une prise en compte de la puissance transportée par la ligne devrait faciliter la description du TOP, qui est avant tout un amplificateur de puissance.
2. N'ayant pas pris en compte l'évolution de la puissance sur la ligne, nous n'avons pas étudié l'évolution en fonction de la fréquence de la résistance de couplage qui met en relation le champ agissant sur le faisceau et la puissance propagée par la ligne. Bien que l'usage d'un circuit équivalent

valent revienne à faire abstraction de la structure spatiale des champs électromagnétiques, il a été montré qu'il est possible pour un circuit équivalent de reproduire la variation de la résistance de couplage en fonction de la fréquence [23].

3. Nous avons utilisé ici le circuit équivalent le plus simple que l'on puisse construire avec le raisonnement que nous avons proposé ; il serait intéressant d'étudier l'apport des autres circuits possibles à la qualité du modèle en termes de courbe de dispersion et de résistance de couplage.
4. Enfin, le schéma d'intégration utilisé ici est du premier ordre ; l'utilisation d'un schéma du second ordre devrait rendre le calcul plus précis tout en permettant de relâcher la contrainte sur le pas de temps.

Le second moyen proposé consiste à intégrer directement les équations décrivant la structure électromagnétique après les avoir réduites par la méthode des moments.

Pour réduire la taille d'un système dynamique linéaire quelconque, cette méthode s'appuie sur la projection de ce système sur une base d'un sous-espace de Krylov de taille relativement petite. La méthode tire pleinement profit du caractère itératif des sous-espaces de Krylov grâce à l'utilisation de l'algorithme d'Arnoldi. Ensuite le système réduit peut être intégré par exemple avec la méthode de Newmark. La méthode des moments existe depuis une vingtaine d'année, mais semble peu utilisée dans le domaine de l'électromagnétisme.

Après avoir présenté une version limitée aux systèmes du premier ordre en guise d'introduction, nous avons introduit la version de la méthode des moments qui traite les systèmes du second ordre, qui est plus appropriée à l'équation de propagation du champ électrique. Une méthode pour optimiser la construction de la base de projection a aussi été présentée.

Ensuite, nous avons montré les performances d'un code que nous avons développé en nous basant sur ce qui a été présenté auparavant. Nous avons traité un exemple simple de structure à onde lente sans faisceau : un système à 575 degrés de liberté a été réduit d'un facteur 13 en 0,3 s de calcul sur un ordinateur de bureau (2,8 GHz, 1 Go).

Nous avons ensuite montré que la réduction de la taille d'un système par un facteur  $g$  avec la méthode des moments permet de gagner un facteur  $g^2$  sur la quantité de calcul nécessaire pour intégrer le système, et que le facteur  $g$  augmente généralement avec la taille du système.

Enfin, nous avons montré comment l'on pourrait appliquer la méthode des moments en tenant compte de la présence du faisceau.

Ainsi, nous avons tenté de montrer la faisabilité de deux approches pour simuler les tubes à onde progressive en domaine temporel. Ces approches manquent certes d'exactitude dans leurs prévisions, mais si elles sont suffisamment soutenues et perfectionnées, elles permettraient de simuler les TOP dans des régimes compliqués sans se préoccuper des fréquences à prendre en

compte, car dans certains cas, la recherche des fréquences responsables d'un phénomène parasite devient une rude tâche.



# Bibliographie

- [1] R. J. BARKER, J. H. BOOSKE, N. C. LUHMANN, JR., G. S. NUSINOVICH, *Modern microwave and millimeter-wave power electronics*, John Wiley & Sons, Hoboken (2005).
- [2] A. S. GILMOUR, JR., *Principles of traveling wave tubes*, Artech House, Norwood (1994).
- [3] G. DIMONTE AND J. H. MALMBERG, *Destruction of trapping oscillations*, Phys. Fluids **21**, 1188-1206 (1978);  
S. I. TSUNODA, F. DOVEIL AND J. H. MALMBERG, *Experimental test of quasilinear theory*, Physics of Fluids **B3**, 2747-2757 (1991).
- [4] F. DOVEIL, A. MACOR AND A. AÏSSI, *Observation of hamiltonian chaos and its control in wave-particle interaction*, Plasma Phys. Controlled Fusion **49**, B125-135 (2007).
- [5] J. R. PIERCE, *Traveling-wave tubes*, D. Van Nostrand Company, New York (1950).
- [6] S. J. COOKE, A. A. MONDELLI, B. LEVUSH, T. M. ANTONSEN, D. P. CHERNIN, T. H. MCCLURE, D. R. WHALEY AND M. BASTEN, *CTLSS-An advanced electromagnetic simulation tool for designing high-power microwave sources*, IEEE Transactions on Plasma Science **28**, 841-865 (2000).
- [7] J. E. ROWE, *A large-signal analysis of the traveling-wave amplifier : theory and general results*, IRE Transactions-Electron Devices **28**, 39-56 (1956).
- [8] T. M. ANTONSEN, JR. AND B. LEVUSH, *CHRISTINE : a multifrequency parametric simulation code for traveling wave tube amplifiers*, Rapport du Naval Research Laboratory (1997).
- [9] J. G. WÖHLBIER, J. H. BOOSKE, I. DOBSON, *The multifrequency spectral eulerian (MUSE) model of a traveling-wave tube*, IEEE Transactions on Plasma Science **30**, 1063-1075 (2002).
- [10] C. K. BIRDSALL AND A. B. LANGDON, *Plasma physics via computer simulation*, Institute of Physics Publishing, Bristol (1991).
- [11] PIERRE BERTRAND, *Vlasov code applications*, Proceedings of 7th ISSS (2005).

- [12] C. Z. CHENG, GEORG KNORR, *The integration of the Vlasov equation in configuration space*, Journal of Computational Physics **22**, 330-351 (1976).
- [13] ERIC SONNENDRÜCKER, JEAN ROCHE, PIERRE BERTRAND, ALAIN GHIZZO, *The semi-lagrangian method for the numerical resolution of the Vlasov equation*, Journal of Computational Physics **149**, 201-220 (1999).
- [14] FRANCIS FILBET, ERIC SONNENDRÜCKER, PIERRE BERTRAND, *Conservative numerical schemes for the Vlasov equation*, Journal of Computational Physics **172**, 166-187 (2001).
- [15] ERIC FIJALKOW, *A numerical solution to the Vlasov equation*, Computer Physics Communications **116**, 319-328 (1999).
- [16] FRANCIS FILBET, ERIC SONNENDRÜCKER, *Comparison of eulerian Vlasov solvers*, Computer Physics Communications **150**, 247-266 (2003).
- [17] T. D. ARBER, R. G. L. VANN, *A critical comparison of eulerian-grid-based Vlasov solvers*, Journal of Computational Physics **180**, 339-357 (2002).
- [18] PHILLIP COLELLA, PAUL R. WOODWARD, *The piecewise parabolic method (PPM) for gas-dynamical simulations*, Journal of Computational Physics **54**, 174-201 (1984).
- [19] JOSÉ M. MARTI, EWALD MÜLLER, *Extension of the piecewise parabolic method to one-dimensional relativistic hydrodynamics*, Journal of Computational Physics **123**, 1-14 (1996).
- [20] PIERRE WALLER, *Modélisation numérique de l'interaction et diagnostic expérimental du faisceau d'électrons dans un tube à ondes progressives spatiales*, Thèse de doctorat à l'Université Paris 7 (1999).
- [21] E. DURAND, *Électrostatique, tome II, problèmes généraux, conducteurs*, Masson et Cie, Paris (1966).
- [22] WILLIAM R. SMYTHE, *Static and dynamic electricity*, McGraw-Hill Company, New York(1950).
- [23] D. DIALETIS, DAVID P. CHERNIN, SIMON J. COOKE, THOMAS M. ANTONSEN, JR., CHIA-LIE CHANG, AND BARUSH LEVUSH, *Comparative analysis of the curnow and Malykhin-Konnov-Komarov (MKK) circuits as representations of coupled-cavity slow-wave structures*, IEEE Transactions on Electron Devices **52**, 774-782 (2005).
- [24] GENE H. GOLUB, CHARLES F. VAN LOAN, *Matrix computations*, Johns Hopkins University Press, Baltimore (1983).
- [25] CHESTER SNOW, *Formulas for computing capacitance and inductance*, National Bureau of Standards Circular **544** (1954).

- [26] PAUL FRANÇOIS COMBES, *Micro-ondes*, tome 1, Dunod, Paris (2001).
- [27] J. W. GEWARTOWSKI, H. A. WATSON, *Principles of electron tubes*, D. Van Nostrand Company, Princeton (1965).
- [28] MURRAY D. SIRKIS, NICK HOLONYAK, JR., *Currents induced by moving charges*, American Journal of Physics **34**, 943-946 (1966).
- [29] M. A. KODIS, N. R. VANDERPLAATS, E. G. ZAIDMAN, B. GOPLEN, D. N. SMITHE, H. P. FREUND, *Twystrode experiments with tapered and untapered helices*, Electron Devices Meeting, Technical Digest **11**, 795-798 (1994).
- [30] ALLEN TAFLOVE, SUSAN C. HAGNESS, *Computational electrodynamics : the finite-difference time-domain method*, Artech House, Norwood (2005).
- [31] O. C. ZIENKIEWICZ, R. L. TAYLOR, J. Z. ZHU, *The finite element method : its basis and fundamentals*, Butterworth-Heinemann, Oxford (2005).
- [32] K. J. BATHE, E. L. WILSON, *Numerical methods in finite element analysis*, Prentice-Hall, Englewood Cliffs (1976).
- [33] ATHANASIOS C. ANTOULAS, DAN C. SORENSSEN, *Approximation of large-scale dynamical systems : an overview*, International Journal of Applied Mathematics and Computer Science **11**, 1093-1121 (2001).
- [34] ROLAND W. FREUND, *Krylov-subspace methods for reduced-order modeling in circuit simulation*, Journal of Computational and Applied Mathematics **123**, 395-421 (2000).
- [35] T. J. SU, R. R. CRAIG JR., *Model reduction and control of flexible structures using Krylov vectors*, Journal of Guidance **14**, 260-267 (1991).
- [36] B. SALIMBAHRAMI, B. LOHMANN, T. BECHTOLD, J. G. KORVINK, *Two-sided arnoldi algorithm and its application in order reduction of MEMS*, Proceedings of 4th Mathmod, Vienna (2003).
- [37] TILMANN WITTIG, ROLF SCHUHMAN, THOMAS WEILAND, *Model order reduction for large systems in computational electromagnetism*, Linear Algebra and its Applications **415**, 499-530 (2006).
- [38] HONG WU, ANDREAS C. CANGELLARIS, *Model-order reduction of finite-elements approximations of passive electromagnetic devices including lumped electrical-circuit models*, IEEE Transaction on Microwave Theory and Techniques **52**, 2305-2313 (2004).
- [39] ERIC JAMES GRIMME, *Krylov projection methods for model reduction*, thèse à l'université de l'Illinois (1997).
- [40] ROLAND W. FREUND, *Krylov subspaces associated with higher-order linear dynamical systems*, Bit Numerical Mathematics **45**, 495-516 (2005).

- [41] BEHNAMEH SALIMBAHRAMI, BORIS LOHMANN, *Order reduction of large scale second-order systems using Krylov subspaces methods*, Linear Algebra and its Applications **415**, 385-405 (2006).
- [42] BEHNAMEH SALIMBAHRAMI, *Structure preserving order reduction of large scale second order models*, thèse à l'université technique de Munich (2005).
- [43] B. SALIMBAHRAMI, B. LOHMANN AND B. BECHTOLD, *Two-sided Arnoldi in order reduction of large scale MIMO linear systems*, Technical Report, Institute of Automation, University of Bremen (2002).
- [44] YOUSSEF SAAD, *Numerical methods for large eigenvalue problems*, Manchester University Press, Manchester (1992).