

Une mesure comparative en didactique des mathématiques entre une analyse a priori et la contingence

Filippo Spagnolo *, Régis Gras **, Jean-Claude Régnier***

*G.R.I.M. (Gruppo di Ricerca sull'Insegnamento delle Matematiche),
Department of Mathematics, University of Palermo,
via Archirafi 34, 90123 Palermo (Sicily).
spagnolo@math.unipa.it

** Laboratoire d'Informatique de Nantes Atlantique FRE CNRS 2729
Equipe COD - Connaissances & Décision
Site Ecole Polytechnique de l'Université de Nantes
La Chantrerie BP 60601 44306 Nantes cedex
regisgra@club-internet.fr

*** Université de Lyon
86 Rue Pasteur 69007 Lyon France
jean-claude.regnier@univ-lyon2.fr

Résumé. En didactique des Mathématiques, mais plus généralement en sciences humaines, de nombreuses recherches utilisent des analyses qualitatives pour falsifier expérimentalement des hypothèses formulées a priori, c'est-à-dire en amont de la recherche. Une telle approche méthodologique, appliquée à une enquête, s'avère le plus souvent insuffisante pour analyser toutes les variables en jeu dans des phénomènes contingents d'enseignement/ apprentissage, même si dans certains cas (analyse ponctuelle de protocoles, de vidéos, etc.), elle permet de déceler quelques relations intéressantes. Mais si le nombre de sujets devient trop volumineux, l'analyse qualitative ne réussit plus à extraire toutes les relations existant entre les variables en jeu. Une analyse quantitative sur une base statistique s'imposera et sera complétée par une analyse qualitative, indispensable à une interprétation contextuelle. Cette communication vise à présenter une mesure permettant de confronter statistiquement, l'analyse a priori et la contingence.

1 Données

Les données d'une enquête dans un contexte d'épreuve d'évaluation d'un enseignement se composent généralement des éléments suivants :

- un ensemble d'items ou de variables V en nombre v ,
- un ensemble de sujets E en nombre n ,
- un ensemble W d'attitudes, de conceptions, de comportements généraux attendus au cours de l'épreuve dans laquelle les sujets doivent répondre aux items V .

Sur la base de ces données, les objectifs de recherche de comparaison entre ce qui est attendu et ce qui est observé sont doubles :

- le croisement $W \times V$ qui va permettre d'extraire des relations a priori entre les variables,
- le croisement $E \times V$ qui représente le comportement observé des n sujets selon les v variables.

2 Problématique

L'analyse a priori permet de dégager des relations de similarité et des relations implicatives a priori entre les variables. Ces relations sont, bien entendu, hypothétiques et basées sur la connaissance des apprentissages connus jusqu'alors ou supposés et des conditions d'enseignement. Ici, nous nous intéressons essentiellement aux relations implicatives, à savoir des règles, selon le vocabulaire du « Data mining ». Il s'agit alors de comparer les qualités implicatives des relations du type $a \Rightarrow b$ extraites de l'analyse a priori par exemple de conceptions d'élèves fictifs et de celles rendues par l'analyse a posteriori, que nous préférons appeler ici **analyse de la contingence**, car elle s'appuie directement sur la base des comportements observés dans une épreuve.

Précisons. Dans l'**analyse a priori**, les sujets traditionnellement en ligne sont des conceptions ou des attitudes attendues et non pas les sujets réels (élèves par exemple). Nous établissons a priori des règles dans cette

« population » de « sujets » : si telle variable a est observée alors telle variable b l'est généralement, malgré d'éventuels contre-exemples en nombre acceptable pour le chercheur selon un seuil fixé. Ainsi, l'analyse a priori se fait sur la base de présupposés justifiés par la pratique, les observations anciennes, des résultats obtenus sur d'autres échantillons, etc. En revanche, **dans la contingence**, les sujets sont des individus, hic et nunc. Dans ce cas, on observe des quasi-règles de type $a \Rightarrow b$ entre les mêmes variables dans la mesure où, le plus souvent, les observations sont entachées de contre-exemples.

Lors de l'épreuve a priori, épreuve qui est fictive et pilotée par le chercheur, le nombre de contre-exemples à l'implication $a \Rightarrow b$ peut être nul dès lors que ce chercheur a décidé que l'observation de a conduit inexorablement à celle de b. Ce qui n'est pas le cas réel ou contingent où il peut être observé un nombre faible de tels contre-exemples, sans que soit réfutée l'hypothèse que a implique généralement b. Mais, au contraire, le chercheur peut s'attendre à un nombre important de contre-exemples dans son étude a priori et, par la suite, noter un faible nombre de contre-exemples à $a \Rightarrow b$ dans l'analyse de la contingence. C'est cette distorsion entre ce qui est prévisible et ce qui est observé qui nous intéresse. Pour ce faire, nous procéderons de façon différente de celle

Conduite dans une étude précédente (Spagnolo F, 1997). dans laquelle nous ne nous sommes pas référés à une échelle probabiliste.

3 Formalisation de la comparaison de l'analyse a priori et de l'analyse de la contingence

3.1 Retour sur l'A.S.I.

Pour simplifier et nous appuyer plus aisément sur l'intuition, nous nous plaçons dans le cadre de l'analyse statistique implicative (A.S.I.) dans lequel la qualité de l'implication $a \Rightarrow b$ se mesure par l'intensité d'implication $\varphi(a, \bar{b})$ dite classique.

Rappelons brièvement que $\varphi(a, \bar{b})$ est la probabilité pour que le nombre de contre-exemples observés dans l'épreuve soit inférieur à celui qui serait obtenu par la variable aléatoire égale au nombre de cas où a et non b sont observés simultanément et dans l'hypothèse d'une indépendance a priori entre a et b. Cette probabilité est établie à partir d'un modèle binomial ou d'un modèle de Poisson (Gras et Régner, 2007) dont relèverait la variable aléatoire du nombre de contre-exemples. Le modèle de Poisson est choisi dans cet article. Rappelons que dans de bonnes conditions d'occurrence, il est généralement bien approché par une distribution gaussienne de la variable centrée réduite (Gras et al, 2001) :

$$Q(a, \bar{b}) = \frac{\text{Card}(X \cap \bar{Y}) - \frac{n_a n_{\bar{b}}}{n}}{\sqrt{\frac{n_a n_{\bar{b}}}{n}}}$$

Dans cette expression, n_a et $n_{\bar{b}}$ sont respectivement les nombres d'observations dans l'épreuve de a et de non b, $\text{Card}(X \cap \bar{Y})$ est la variable aléatoire donnant le nombre de contre-exemples dont $n_{a \wedge \bar{b}}$ est une valeur observée.

Supposons l'épreuve contingente réalisée avec n sujets. Il est possible de prendre en compte tous les couples de variables tels que (a,b). A chaque couple, le chercheur associe à la règle $a \Rightarrow b$ une valeur a priori sur la base de ses hypothèses didactiques et des connaissances de la population de sujets en jeu. Notons $\Phi(a, \bar{b})$ cette valeur a priori établie¹, par exemple, sur la base des contre-exemples estimés dans la relation implicative de a vers b. Nous adoptons alors comme critère d'écart entre l'analyse a priori et la contingence, la différence entre

¹ Nous ne détaillons pas ici de protocole explicitant une procédure d'attribution des valeurs d'intensité d'implication a priori

les valeurs attribuées $\Phi(a, \bar{b})$ et les valeurs $\varphi(a, \bar{b})$ observées dans l'épreuve. Mais on peut aussi se contenter de ne prendre en compte qu'un nombre réduit de couples, par exemple, ceux qui figurent dans un chemin du graphe implicatif ou dans une relation implicative entre deux classes de la hiérarchie cohésitive. C'est cet écart dont nous étudierons la significativité qui servira de critère pour affirmer la réfutation ou non de l'adéquation entre les relations émises a priori et celles apparues à travers la contingence. Soit m ce nombre de couples qui est au plus égal à $v(v-1)$.

3.2 Construction d'une mesure comparative

Cette approche de comparaison entre les présupposés et la contingence, a été adoptée une première fois par F. Spagnolo (Spagnolo, 1997) et nous en reprenons ici les grandes lignes.

Supposons connus l'ensemble de relations implicatives entretenues parmi les couples ou un sous-ensemble défini, par exemple, par un chemin du graphe implicatif ou par une classe d'arbre cohésitif. Soit $\{(a_i, b_j)\}_{i,j}$ les couples qui sont retenus pour l'analyse comparative entre les valeurs des intensités d'implication a priori $\Phi_{i,j}$ de la règle $a_i \Rightarrow b_j$ et les valeurs d'intensité réellement observées, dites contingentes, $\varphi_{i,j}$ de la même règle. Il s'agit donc de comparer les deux lignes du tableau ci-dessous.

| | | | | | | |
|---|-----------------|-----------------|-------|-----------------|-------|-----------------|
| Intensités d'implication a priori Φ | $\Phi_{1,1}$ | $\Phi_{1,2}$ | | $\Phi_{i,j}$ | | $\Phi_{k,l}$ |
| Intensités d'implication contingentes φ | $\varphi_{1,1}$ | $\varphi_{1,2}$ | | $\varphi_{i,j}$ | | $\varphi_{k,l}$ |

TAB. I

Il paraît naturel alors de calculer et sommer les écarts entre les deux séries d'intensités. En fait, nous avons choisi de définir une distance du type χ^2 entre elles sous la forme :

$$[\text{Formule 1}] \Delta = \sqrt{\sum_{i,j} \frac{1}{\Phi(a_i, \bar{b}_j)} [\Phi(a_i, \bar{b}_j) - \varphi(a_i, \bar{b}_j)]^2} = \sqrt{\sum E_{i,j}}$$

Le terme normalisateur $\frac{1}{\Phi(a_i, \bar{b}_j)}$ permet de relativiser l'écart observé selon la règle $a_i \Rightarrow b_j$ à la valeur de l'intensité a priori. Sa contribution à la distance est d'autant plus importante que l'intensité a priori l'est, ce qui permet d'accentuer les grandes distorsions entre « l'avant » et « l'après », c'est-à-dire les erreurs éventuelles de jugements a priori de l'expert. Par convention, si $\Phi(a_i, \bar{b}_j) = 0$, on attribuera à l'écart correspondant E_{ij} , la valeur du maximum des écarts observés dans les cas où cette valeur a priori n'est pas nulle.

F. Spagnolo, dans l'article précité (1997) fixait à 0,25 la limite supérieure de l'écart total admissible pour que la distance ne soit pas considérée comme susceptible de réfuter l'adéquation entre les deux séries. Cette décision sur le seul seuil numérique arbitraire, indépendamment du nombre de règles en jeu, nous semble nécessiter une approche statistique différente voire complémentaire qui va elle-même constituer notre deuxième approche.

3.3 Construction d'un test d'hypothèse d'adéquation a priori-a posteriori

Considérons alors l'épreuve aléatoire binomiale où l'on réaliserait plusieurs tirages en nombre égal à l'effectif m , de couples retenus pour l'analyse de type (a_i, b_j) et où la variable aléatoire serait le nombre de tirages conduisant à une différence fixée entre les deux valeurs d'intensités d'implication : a priori et contingente. L'écart $|\Phi(a_i, \bar{b}_j) - \varphi(a_i, \bar{b}_j)|$ est la valeur observée de cette différence aléatoire.

Précisons.

L'espace fondamental Ω est l'espace à partir duquel est définie une variable aléatoire à m composantes $\Theta(a_i, \bar{b}_j)$: les intensités $\varphi(a_i, \bar{b}_j)$ en sont les réalisations respectives dans l'épreuve. A partir de l'espace Ω , supposé probabilisé², on définit une variable aléatoire X_{ij} égale au nombre de cas où les observations telles que $\varphi(a_i, \bar{b}_j)$ diffèrent au plus des intensités a priori correspondantes $\Phi(a_i, \bar{b}_j)$ d'un certain nombre réel ε , $\varepsilon \in [0; 1]$. Ce nombre ε est choisi librement par le chercheur qui se charge d'apprécier l'écart qu'il considère admissible entre les deux mesures associées à la règle $a_i \Rightarrow b_j$. Il peut être modifié à loisir en fonction de son niveau d'exigence de la conformité qu'il veut estimer.

Utilisons ponctuellement par commodité les notations suivantes, en considérant la généralité de cette règle :

$\Phi(a_i, \bar{b}_j)$, valeur a priori, par Φ

$\varphi(a_i, \bar{b}_j)$, valeur observée, par φ

Ainsi, notre intérêt se porte sur la réalisation de l'évènement $A(\varepsilon) = \{ |\Phi - \varphi| \leq \varepsilon \}$. Le critère de décision d'adéquation *a priori-contingence* s'exprime à partir de $n_{A(\varepsilon)}$, nombre de fois où l'écart observé satisfait l'inégalité ci-dessus à un seuil de significativité égal à α , en tant que niveau de risque de 1^{ère} espèce.

Notre démarche s'organise autour du raisonnement suivant. Considérons l'évènement $A(\varepsilon)$, concordance ponctuelle entre *a priori* et *a posteriori*. Notons sa probabilité $\text{Prob}\{A(\varepsilon)\} = \pi$. Cette valeur peut être interprétée comme un indice de confiance en la concordance ponctuelle entre le niveau de confiance (intensité d'implication) attribué à l'implication $a \Rightarrow b$ dans une analyse *a priori* par le chercheur et celui issu de l'observation (intensité d'implication observée)

La probabilité de $A(\varepsilon)$ peut être estimée par $\hat{\pi} = \frac{n_{A(\varepsilon)}}{m}$

Supposons alors que le chercheur émette une hypothèse relative à la valeur de π qu'il juge acceptable, soit π_0 . Cela le conduit alors à réaliser le test unilatéral suivant :

$H_0: \pi \geq \pi_0$

$H_1: \pi < \pi_0$

Le rejet de H_0 traduit le rejet de la tendance à la concordance parce que la probabilité « vraie » de l'évènement « jugement concordant au niveau ε » serait vraisemblablement plus faible que ce que le chercheur s'est donné comme référence.

Nous rappelons un résultat classique. La variable de décision D donnant le nombre de couples favorables au critère et qui est associée à ce test, n'est autre, sous H_0 , que la variable binomiale de paramètres m et π_0 . Le nombre de couples vérifiant le critère $|\Phi - \varphi| \leq \varepsilon$ espéré est alors $m\pi_0$. Pour un niveau de risque α de 1^{ère} espèce fixé, il s'agit de trouver le nombre k , tel que :

$$[\text{Formule 2}] \begin{cases} \text{Prob}\{D \leq k\} = \sum_{i=0}^{i=k} C_m^i \pi_0^i (1-\pi_0)^{m-i} \leq \alpha \\ \text{Prob}\{D \leq k+1\} = \sum_{i=0}^{i=k+1} C_m^i \pi_0^i (1-\pi_0)^{m-i} > \alpha \end{cases}$$

On rejette H_0 si le nombre de couples vérifiant le critère $|\Phi - \varphi| \leq \varepsilon$ est inférieur ou égal à k . En d'autres termes, la région critique est constituée par les nombres entiers de 0 à k .

² Nous avons alors démontré dans (Gras R. et al., 1996) que si $\Theta(a, \bar{b})$ (a, b) est la variable aléatoire dont $\varphi(a, \bar{b})$ est la réalisation dans l'épreuve pour des paramètres donnés et lorsque le modèle asymptotique gaussien est choisi pour modéliser la variable $Q(a, \bar{b})$ construite à partir de $\text{Card}(X \cap \bar{Y})$ alors : $\forall \partial \in [0, 1] : \text{Prob}\{\Theta(a; \bar{b}) \geq 1 - \partial\} \approx \partial$. Cette propriété pourrait permettre une probabilisation explicite de Ω .

4 Exemple

Cet exemple est tiré de travaux de Filippo Spagnolo (« Obstacles épistémologiques: Le Postulat d'Eudoxe-Archimède », Tesi di Dottorato, Quaderni di Ricerca in Didattica, Supplemento al n.5, Palermo, 1995). L'essentiel de cette thèse porte sur le Postulat de Eudoxe-Archimède. Nous donnons en annexe une analyse a priori des comportements attendus des 107 élèves répondant à des questionnaires. Ce sont ces comportements qui constitueront l'ensemble des variables à partir desquelles, on estimera *a priori* puis on observera l'intensité d'implication des règles associées.

Dans une analyse a priori sur l'obstacle épistémologique (Spagnolo 2006), nous pouvons repérer des implications entre groupes des variables.

Les éléments significatifs et décisifs dans le modèle de l'obstacle épistémologique sont :

- 1) la résistance ;
- 2) la persistance ;
- 3) le changement du point de vue ;
- 4) la généralisation.

Les variables de l'analyse a priori sont les mêmes que celles qui sont retenues dans l'analyse a posteriori ou contingence (cf. Annexe). Autrement dit $W=V$. Ici nous examinerons les règles généralisées suivantes :

I_1 : Si l'obstacle résiste et persiste alors on aura un changement du point de vue (Si $(Q_{12}, Q_{13}, Q_{14}, Q_{15})$ alors (Q_8, Q_9, Q_{10})).

I_2 : Si l'obstacle résiste et persiste alors il y aura une généralisation [Si $(Q_{12}, Q_{13}, Q_{14}, Q_{15})$ alors (Q_{11})].

Les élèves relevant d'un modèle d'obstacle qui résiste et persiste peuvent alors changer le point de vue.

Le tableau des intensités d'implication a priori pour 12 couples constituant une R-règle généralisée I_1 de la de la hiérarchie cohésitive est donné ici ³ :

| | | |
|--------------------|--------------------|---------------------|
| $\Phi_{12,8}=0.99$ | $\Phi_{12,9}=0.99$ | $\Phi_{12,10}=1$ |
| $\Phi_{13,8}=0.75$ | $\Phi_{13,9}=0.79$ | $\Phi_{13,10}=0.83$ |
| $\Phi_{14,8}=0.99$ | $\Phi_{14,9}=0.91$ | $\Phi_{14,10}=0.99$ |
| $\Phi_{15,8}=1$ | $\Phi_{15,9}=1$ | $\Phi_{15,10}=1$ |

TAB. 2- Intensités d'implication a priori

Le tableau des intensités d'implication contingentes entre les mêmes couples est alors :

| | | |
|--------------------|--------------------|---------------------|
| $\phi_{12,8}=0.98$ | $\phi_{12,9}=0.88$ | $\phi_{12,10}=0.65$ |
| $\phi_{13,8}=0.75$ | $\phi_{13,9}=0.79$ | $\phi_{13,10}=0.00$ |
| $\phi_{14,8}=0.66$ | $\phi_{14,9}=0.99$ | $\phi_{14,10}=0.65$ |
| $\phi_{15,8}=0.79$ | $\phi_{15,9}=0.82$ | $\phi_{15,10}=0.67$ |

TAB. 3- Intensités d'implication contingentes

³ Nous notons par exemple : $\Phi_{12,8}$ l'implication a priori de la variable Q_{12} sur la variable Q_8 . Les occurrences respectives de ces variables sont 3 et 31.

Par exemple, le couple (12 ; 8) formé des variables 12 et 8, a pour intensité a priori : 0.99 et pour intensité observée : 0.98.

Ici, $m = 12$, couples sont retenus parce qu'ils constituent une classe de la hiérarchie cohésitive.

Si nous appliquons le critère [Formule1] §3.2, nous obtenons $\Delta \approx 1,17$. Si nous appliquons le seuil posé par Spagnolo, nous avons $\Delta > 0,25$ dont on tire la conclusion que l'adéquation entre les deux séries d'intensités a priori/a posteriori n'est pas acceptable.

Appliquons maintenant le test exprimé dans le §3.3. Choisissons pour cela, $\varepsilon = 0,10$ et $\pi_0 = 0,75$, autrement dit, nous acceptons l'adéquation d'autant mieux, si, au cours de notre expérience, nous trouvons au moins $12 \times 0,75 = 9$ règles pour lesquelles l'écart entre l'intensité d'implication a priori et l'intensité observée est inférieure ou égale à 0,10.

Ici l'hypothèse H_0 s'exprime alors ainsi : la probabilité « vraie » π est au moins égale à 0,75.

Par exemple, la règle $Q_{14} \Rightarrow Q_9$ où $|\Phi_{14,9} - \phi_{14,9}| = 0,08$, présente un écart entre l'intensité théorique a priori et celle contingente inférieure à 0,10. En fait, nous dénombrons 4 cas seulement vérifiant l'événement

$$A(0,10) = \{|\Phi - \phi| \leq 0,10\}.$$

La résolution du système d'inéquations [Formule2] associé à la variable binomiale de paramètres (12 ; 0,75), donne $k=5$ et la région critique est $\{0, 1, 2, 3, 4, 5\}$ pour un niveau de $\alpha=0,05$. On constate donc le nombre de couples satisfaisant le critère $A(0,10)$ est dans la zone critique. Nous rejetons H_0 ce qui équivaut à ne pas conserver l'hypothèse d'adéquation entre l'a priori et la contingence.

Revenant au problème de l'obstacle épistémologique identifié par F Spagnolo, on peut dire que se trouve également réfutée l'hypothèse selon laquelle il y a effectivement changement de point de vue face à la résistance et la persistance de l'obstacle.

Supposons que nous nous placions dans le cas où le chercheur accepte un écart de $\varepsilon=0,20$. Il y a alors 6 règles satisfaisant le critère $A(0,20)$. Dans ce cas, nous ne rejetons pas H_0 . Ceci équivaut à conserver l'hypothèse d'adéquation entre l'a priori et la contingence avec un risque 2^{ème} espèce.

Pour évaluer ce risque β , nous supposons que la valeur « vraie » de π est 0,5, c'est à dire 1 chance sur 2 de satisfaire au critère de concordance $A(0,20)$. Nous obtenons :

$$\Pr_{ob_{H_1}} \{D \geq 6\} = \beta = \left(\frac{1}{2}\right)^{12} \sum_{k=6}^{12} \frac{12!}{k!(12-k)!} \approx 0,6127$$

ou encore la puissance du test est de $1-\beta \approx 0,3873$.

5 Conclusion

Dans le cadre de la didactique des disciplines, mais également dans toute recherche qui est dite scientifique, se pose constamment le problème de la question légitime, voire incontournable, de la validation ou de la réfutation d'hypothèses émises par le chercheur. Se donner un moyen d'évaluer l'écart en termes quantitatifs entre les hypothèses a priori et les observations, la contingence, le *a posteriori* est l'objet de cet article. Dans l'autre publication (Spagnolo F., 1997), nous l'avions exprimé au moyen d'une distance de type χ^2 comme il est dit dans le § 3.2, mais sans référence à une échelle de mesure probabiliste. Dans cet article, nous l'exprimons à l'aide d'un test et nous en indiquons la pratique en l'illustrant par un exemple réel.

Références

- Agrawal R. et al. (1993). *Mining association rules between sets of items in large databases*, Proc. of the ACM SIGMOD'93.
- Bodin, A. (1996). *Improving the Diagnostic and Didactic Meaningfulness of Mathematics Assessment in France*, Annual Meeting of the American Educational Research Association AERA - New-York

- Couturier R. (2001). *Traitement de l'analyse statistique implicative dans CHIC*, Actes des Journées sur la « Fouille dans les données par la méthode d'analyse implicative »
- Gras R. (1979). *Contribution à l'étude expérimentale et à l'analyse de certaines acquisitions cognitives et de certains objectifs didactiques en mathématiques*, Thèse d'Etat, Université de Rennes 1.
- Gras R. (2000). Les fondements de l'analyse implicative statistique, *Quaderni di Ricerca in Didattica*, Palermo, <http://dipmat.math.unipa.it/~grim/quaderno9.htm>
- Gras R., Kuntz P. et Briand H. (2003), Hiérarchie orientée de règles généralisées en analyse implicative, *Extraction des Connaissances et apprentissage*, Hermès, p 145-157, ISSN 0992-499X, ISBN 2-7462-0631-5, 2003
- Gras R., Couturier R., Guillet F., Spagnolo F. (2005), Extraction de règles en incertain par la méthode statistique implicative, *Comptes rendus des 12èmes Rencontres de la Société Francophone de Classification*, Montréal 30 mai-1^{er} juin 2005, UQAM, p. 148-151.
- Gras R. et Régnier J.C. (2007), Différents modèle d'indice d'implication en Analyse Statistique Implicative, soumis à *Revue de Statistique Appliquée*.
- Lerman I.C. (1981) *Classification et analyse ordinale des données*, Dunod, Paris
- Lerman I.C., Gras R., Rostam H. (1981). Elaboration et évaluation d'un indice d'implication pour des données binaires, I et II, *Mathématiques et Sciences Humaines* n° 74, p. 5-35 et n° 75, p. 5-47.
- Spagnolo F. et Gras R. (2004), *Fuzzy implication through statistic implication: a new approach in Zadeh's framework*, 23rd International Conference of the North American Fuzzy Information Processing Society, NAFIPS (IEEE), Banff, Canada, Edited by Scott Dick-Lukasz Kurgan-Petr Musilek-Witold Pedrycz-Mark Reformat (IEEE Catalog 04TH8736, ISBN 0-7803-8376-1), pagg 425-429, Vol I.
- Spagnolo F. (1997), L'analisi a priori e l'indice di implicazione statistica di Gras, *Quaderni di Ricerca in Didattica*, n° 7, Palermo, p. 110-117
- Spagnolo F.(2005), L'Analisi Statistica Implicativa : uno dei metodi di analisi dei dati nella ricerca in didattica delle Matematiche, Troisième Rencontre Internationale A.S.I. (Analyse Statistique Implicative), Octobre 2005, Palermo. Supplemento 2 al n.15 *Quaderni di Ricerca in Didattica* http://math.unipa.it/~grim/asi/suppl_quad_15_2.htm .

Summary

In the didactics of mathematics, but more generally in social sciences, numerous pieces of research use qualitative analyses to falsify a priori formulated hypotheses experimentally, that is to say before research. Such a methodological approach, applied to an inquiry, proves to be in most cases insufficient to analyze all variables at stake and at work in contingent phenomena of teaching / learning, even though in some cases (selective analysis of protocols, of videos, etc.), it permits to discover a few interesting relations. But if the number of topics becomes too voluminous, the qualitative analysis doesn't succeed anymore in extracting all the relations existing between the variables at work and at stake. A quantitative analysis on a statistical basis will impose itself and will be completed by a qualitative analysis, essential to a contextual interpretation. This communication aims to present a measure permitting to confront statistically, the a priori analysis and contingency.

Annexe

Voici le tableau des comportements attendus. Ils doivent se révéler à travers des items de questionnaires : par exemple, la réponse positive à la question 9a instancie le comportement Q1.

| | |
|-----------------|---|
| Q1 (9a) | Connaissance du Postulat d'Euclide-Archimède (P.E-A.) en termes opérationnels. Il faut déterminer un n tel que le multiple du segment $na > b$. ($a < b$). Formulation directe du Postulat. La représentation avec des petits tirets donne une liaison avec la mesure. Réponses attendue : $n > 4$. |
| Q2 (10a) | Question semblable à la précédente, mais le segment b est beaucoup plus grand et le segment a a été dessiné plus petit. Réponse attendue : $n > 19$. Formulation directe du Postulat. |
| Q3 (11a) | Répondre affirmativement à l'existence du n tel que $na > b$. Formulation directe du Postulat. |
| Q4 (11b) | Justifier la réponse donnée dans la question précédente. Formulation directe du Postulat. |

| | |
|------------------|---|
| Q5 (12a) | Connaissance du P.E.-A en termes opérationnels. Il faut déterminer un n tel que $(1/n)a < b$. Réponse attendue : $n > 3$. Formulation inverse du Postulat. |
| Q6 (13a) | Répondre affirmativement à l'existence du $n / (1/n)a < b$. Formulation inverse du Postulat. |
| Q7 (14a) | Formulation linguistique différente de la question précédente: "...il est toujours possible...". |
| Q8 (15a) | Changement du point de vue: Modèle du "Véronèse", non-Archimédien, en Géométrie. Réponse attendue: affirmer la non-validité du Postulat. |
| Q9 (18a) | Changement du point de vue, L'élève doit suivre la construction évoquée dans la proposition X.1. ⁴ d'Euclide et conclure à sa validité (angles rectilignes). |
| Q10 (19a) | Changement du point de vue, Validité de la proposition X,1 (angles curvilignes). (la question 17 indique comment confronter des angles curvilignes entre eux).L'élève doit effectuer une construction et conclure à la validité du PEA. |
| Q11 (20a) | Contexte généralisé (comparaison d'angles curviligne et rectiligne). L'élève doit rejeter la validité de la proposition X.1 dans ce cas. |
| Q12 (20b) | Résister aux contradictions avec la contingence: l'élève qui donne une justification de la X,1 (un contexte non Archimédien). |
| Q13 (20c) | Pour réussir, l'élève donne un argument pour le rejet de du procédé de la X,1 dans un contexte non Archimédien. |
| Q14 (21a) | Confirmation: l'obstacle persiste: Affirmer la validité de la proposition X,1, pour un élève, c'est montrer qu'il ne parvient pas à éprouver son modèle interprétatif dans un contexte plus général. |
| Q15 (22a) | Confirmation de la position Q13: 1 = Affirmer la non-validité de la proposition X,1. |
| Q16 (3a) | Les élèves doivent chercher une relation d'ordre entre 3 triangles. |
| Q17 (4a) | Relation d'ordre entre 3 triangles (autres contextes). |
| Q18 (5a) | Relation d'ordre entre 3 triangles (autres contextes). |
| Q19 (6a) | R.O. entre angles rectilignes |
| Q20 (7a) | R.O. entre angles curviligne (paraboles). |
| Q21 (8a) | R.O. entre angles curvilignes (contingence). |
| Q22 (16a) | R.O. inclusion entre angles rectilignes. |
| Q23 (17a) | R.O. inclusion entre angles contingents. |
| Q24 (17b) | R.O. inclusion entre angles curviligne et contingence. |

⁴**Proposition X.1:** Deux grandeurs inégales étant proposées, si l'on retranche de la plus grande une partie plus grande que sa moitié, et si l'on fait toujours la même chose, il restera une certaine grandeur qui sera plus petite que la plus petite des grandeurs proposées.