



Méthodes seminumériques en algèbre différentielle ;  
applications à l'étude des propriétés structurelles  
de systèmes différentiels algébriques en automatique

Alexandre SEDOGLAVIC

Septembre 2001

Version complétée – 26 avril 2006

# THÈSE

présentée à  
l'École polytechnique

pour obtenir le titre de  
DOCTEUR EN SCIENCES  
Spécialités : Mathématique, Informatique et Automatique

par  
**Alexandre Sedoglavic**

**Méthodes seminumériques en algèbre différentielle ;  
applications à l'étude des propriétés structurelles  
de systèmes différentiels algébriques en automatique**

Soutenue le 25 septembre 2001 devant le jury composé de :

|          |            |              |
|----------|------------|--------------|
| Michel   | FLIESS,    | président,   |
| Manuel   | BRONSTEIN, |              |
| Pierre   | ROUCHON,   | rapporteurs, |
| Marc     | GIUSTI,    |              |
| François | OLLIVIER,  |              |
| Michel   | SORINE,    | examineurs.  |



*The algorithms discussed in this book deal directly with numbers ; yet I believe they are properly called seminumerical, because they lie on the borderline between numeric and symbolic calculation.*

---

Donald E. KNUTH.  
The Art of Computer Programming,  
Vol. 2 : Seminumerical Algorithms.  
Addison-Wesley, 1998.



## Remerciements

*Ce mémoire est le résultat de trois années passées au laboratoire GAGE de l'École polytechnique mais il est surtout le fruit des rencontres que j'ai eu la chance de faire au cours de cette période. C'est donc avec plaisir que je voudrais remercier tous ceux qui ont enrichi ces années de formation scientifique tout en espérant que les personnes qui ne sont pas explicitement citées, faute de place, se reconnaîtront en ces quelques lignes.*

*Je voudrais tout d'abord remercier mes directeurs de thèse. En premiers lieu, Marc Giusti qui m'a offert la chance de soutenir cette thèse en m'accueillant chaleureusement au sein de son équipe et en me soutenant scientifiquement et humainement. J'ai ainsi pu bénéficier de sa grande compétence, de son énergie communicative et des conditions de travail remarquables qu'il a su maintenir et développer au prix d'un travail acharné.*

*Je remercie François Ollivier d'avoir assumé avec patience et humour la difficile tâche d'encadrer, guider et supporter mon enthousiasme bruyant. Mon travail doit beaucoup à nos conversations fructueuses et à sa compréhension profonde des problèmes d'algèbre différentielle. Qu'il me soit permis d'ajouter que c'est avec beaucoup de plaisir que j'ai énormément appris de François dans des domaines aussi variés que les mathématiques, l'histoire ou la musique.*

*Je remercie Michel Fliess de m'avoir fait l'honneur de présider mon jury de thèse. Ma recherche personnelle a été profondément influencée par ses travaux et on peut déceler cette influence tout au long de ce mémoire. Je suis heureux d'avoir pu bénéficier de ses lumières et j'ai été particulièrement sensible à son sens de l'humour et à sa très grande gentillesse.*

*Je suis reconnaissant à Manuel Bronstein et Pierre Rouchon d'avoir accepté d'être rapporteurs et je les remercie pour leurs nombreuses remarques, questions et corrections qui ont indéniablement fait progresser ce mémoire. Leurs travaux sont pour moi une source constante d'inspiration et de motivation sur les thèmes abordés dans mes recherches.*

*Je suis heureux de compter Michel Sorine parmi les membres de mon jury et je lui suis reconnaissant pour l'attention aigüe et bienveillante qu'il a portée sur mon travail.*

*Je tiens particulièrement à remercier Nicole Dubois pour sa constante disponibilité, sa bienveillance chaleureuse et son efficacité remarquable. De plus, je suis reconnaissant à tous les « gourous » de l'informatique qui m'ont secouru dans la lutte quotidienne face la machine ; un grand merci à Jean-Luc Bellon, Teresa Gomez-Díaz, Gérard Guillerme, Christian Logé, Joël Marchand et Jirung Albert Shih.*

*Les chercheurs du laboratoire GAGE m'ont fait bénéficier de leurs connaissances, de leurs soutiens et de leurs encouragements. Il m'est très agréable de remercier Antoine Colin, Vincent Cossart, Guillermo Moreno-Sociás, Jean Moulin-Ollagnier, Bruno Salvy et Jacques-Arthur Weil.*

*Mes travaux de recherche sont liés à des thématiques très diverses que ce soit l'algèbre différentielle, l'automatique ou le calcul symbolique. J'ai ainsi eu la chance de rencontrer de nombreux chercheurs de ces disciplines auxquels je voudrais exprimer ma reconnaissance ; merci à Bernd Bank, Georges Bastin, François Boulier, Emmanuel Delaleau, Évelyne Hubert, Philippe Martin, Hugues Mounier, Luis-Miguel Pardo et Brahim Sadik.*

*Je suis heureux de remercier la joyeuse communauté des thésards pour l'ambiance chaleureuse et studieuse que j'ai eu la chance d'apprécier au quotidien ; merci notamment à Alin Bostan, Béatrice Laroche, Grégoire Lecerf, Mireille Fouquet, Anne Fredet, Pierrick Gaudry, Alexandru Oancea, Nicolas Petit, Dominique Poulhalon, Dominique Rossin, Mohab Safey El Din, Éric Schost, Emmanuel Thomé et Jérôme Waldispühl.*

*J'ai eu l'occasion d'assurer des vacances d'enseignement au cours de cette thèse et je tiens à remercier Jean Berstel, Robert Cori, François Morain, Jean-Éric Pin, Jean-Marc Steyaert et tout les enseignants du département d'informatique de l'École polytechnique.*

*Merci à Éric, François, Grégoire, Guillermo et Mohab qui ont relu et commenté les versions préliminaires de ce document. Enfin, puisque les dernières retouches ont été apportées à cette thèse lors d'un séjour à Buenos Aires, j'ai l'opportunité de remercier Leopoldo Kulesz, Joos Heintz, Guillermo Matera et tous leurs compatriotes Argentins qui m'ont si aimablement accueilli.*

# Table des matières

|  |            |
|--|------------|
| <b>Présentation</b>  | <b>iii</b> |
| <b>I Fondements géométriques et algorithmiques</b>   | <b>1</b>   |
| <b>1 Introduction à l’algèbre différentielle</b>   | <b>3</b>   |
| 1.1 Définitions et propriétés . . . . .  | 3          |
| 1.1.1 Anneaux, modules et corps différentiels ordinaires . . . . .   | 3          |
| 1.1.2 Géométrie algébrique différentielle . . . . .  | 5          |
| 1.2 Autour de la notion de dimension . . . . .   | 7          |
| 1.2.1 Fonction et polynôme de transcendance différentiel . . . . .   | 7          |
| 1.2.2 Module des différentielles de Kähler . . . . .   | 8          |
| <b>2 Automatique et corps différentiels</b>  | <b>11</b>  |
| 2.1 Quelques rappels de théorie du contrôle . . . . .  | 11         |
| 2.1.1 Représentation d’état . . . . .  | 12         |
| 2.1.2 Contrôlabilité – Observabilité . . . . .   | 13         |
| 2.2 Une théorie algébrique des systèmes en automatique . . . . .   | 15         |
| 2.2.1 Observabilité algébrique – Systèmes différentiellement plats . . . . .   | 15         |
| 2.2.2 Résultats connus – Planification de trajectoire . . . . .  | 18         |
| <b>3 Méthodes effectives</b>   | <b>21</b>  |
| 3.1 Représentation du radical d’un idéal différentiel finiment engendré . . . . .  | 22         |
| 3.1.1 Ensemble caractéristique – Algorithme Rosenfeld-Gröbner . . . . .  | 23         |
| 3.1.2 Utilisation en automatique . . . . .   | 27         |
| 3.1.3 Résultats de complexité . . . . .  | 29         |
| 3.2 Représentation des données par calculs d’évaluation . . . . .  | 30         |
| 3.2.1 Aspects probabilistes . . . . .  | 31         |
| 3.2.2 Résultats de complexité . . . . .  | 31         |
| <b>II Étude seminumérique de certains idéaux différentiels ordinaires premiers</b>   | <b>33</b>  |
| <b>4 Calcul rapide des invariants d’un système algébrique d’équations différentielles ordinaires avec seconds membres génériques</b> | <b>35</b>  |
| 4.1 Systèmes algébriques d’équations différentielles ordinaires avec seconds membres génériques . . . . .                            | 36         |
| 4.1.1 Idéaux associés à une application rationnelle . . . . .  | 37         |

|            |   |            |
|------------|---|------------|
| 4.2        | Linéarisation d'un processus de complétion dans le cas générique . . . . .  | 39         |
| 4.2.1      | Calcul probabiliste du polynôme de Hilbert différentiel . . . . .   | 42         |
| 4.2.2      | Résultats de complexité . . . . .   | 44         |
| <b>5</b>   | <b>Algorithme probabiliste de complexité polynomiale en la taille de l'entrée pour tester l'observabilité algébrique locale</b>                       | <b>49</b>  |
| 5.1        | Observabilité et identifiabilité algébrique locale . . . . .  | 49         |
| 5.1.1      | Tests basés sur des méthodes de réécriture . . . . .  | 51         |
| 5.1.2      | Utilisation du linéarisé tangent . . . . .  | 53         |
| 5.2        | Calcul rapide du polynôme de Hilbert différentiel . . . . .   | 56         |
| 5.2.1      | Calcul d'une solution générique par un opérateur de Newton . . . . .  | 56         |
| 5.2.2      | Complexité binaire – Aspect probabiliste . . . . .  | 59         |
| <b>III</b> | <b>Approximation par des systèmes différentiels ordinaires plats de certains systèmes commandés décrits par des équations aux dérivées partielles</b> | <b>63</b>  |
| <b>6</b>   | <b>Présentation et illustration dans le cas linéaire</b>  | <b>65</b>  |
| 6.1        | Platitude différentielle – Paramétrisation des trajectoires . . . . .   | 66         |
| 6.1.1      | Énoncé du problème et exemple . . . . .   | 66         |
| 6.1.2      | Paramétrisation et convergence des trajectoires . . . . .   | 67         |
| 6.2        | Approximation par des systèmes plats . . . . .  | 71         |
| 6.2.1      | Méthode des différences finies – Méthode des lignes . . . . .   | 71         |
| 6.2.2      | Paramétrisation des semidiscretisations . . . . .   | 73         |
| 6.2.3      | Convergence des semidiscretisations — Opérateur de Picard . . . . .   | 76         |
| <b>7</b>   | <b>Illustrations dans le cas non linéaire</b>   | <b>81</b>  |
| 7.1        | Illustration par deux exemples académiques de type diffusion . . . . .  | 81         |
| 7.1.1      | Équation semilinéaire de la chaleur . . . . .   | 82         |
| 7.1.2      | Équation de Burger non linéaire avec diffusion . . . . .  | 87         |
| 7.2        | Illustration par un modèle non linéaire de tige flexible . . . . .  | 90         |
| 7.2.1      | Une modélisation de tige flexible non linéaire . . . . .  | 90         |
| 7.2.2      | Calcul d'une loi de commande en boucle ouverte – Simulation numérique . . . . .   | 91         |
| <b>A</b>   | <b>Groupes continus d'automorphismes associés à un système non observable</b>   | <b>95</b>  |
| A.1        | Définition et propriétés . . . . .  | 95         |
| A.2        | Méthode de calcul . . . . .   | 97         |
| <b>B</b>   | <b>Quelques exemples d'utilisation du test d'observabilité</b>  | <b>101</b> |
|            | <b>Index des notations</b>  | <b>108</b> |
|            | <b>Index</b>  | <b>110</b> |
|            | <b>Table des figures</b>  | <b>110</b> |
|            | <b>Bibliographie</b>  | <b>112</b> |
|            | <b>Abstract – Résumé</b>  | <b>1</b>   |

# Présentation

Les travaux présentés dans ce mémoire se basent sur les apports de l'algèbre différentielle et les méthodes du calcul symbolique pour résoudre des problèmes d'automatique non linéaire qui ne se prêtent pas à une résolution numérique directe.

L'algèbre différentielle, issue des travaux de J.F. RITT [118] et de E.R. KOLCHIN [75], peut être considérée comme une généralisation aux équations différentielles des concepts et outils de l'algèbre commutative et de la géométrie algébrique. Nous consacrerons le premier chapitre de ce mémoire à présenter les notions d'algèbre différentielle qui nous seront nécessaires par la suite. Puis dans le second chapitre, en suivant la démarche initiée par M. FLIESS dans [41], nous présenterons à l'aide de ce cadre théorique les définitions de deux propriétés issues de l'automatique : l'observabilité algébrique et la platitude différentielle.

Le troisième chapitre de ce mémoire aborde les méthodes algorithmiques utilisées en algèbre différentielle effective. Ces méthodes construisent une représentation finie des systèmes algébriques d'équations différentielles intervenant dans les problèmes d'automatique. Cette représentation permet en théorie de décider effectivement de l'existence de solutions, d'obtenir des approximations à précision arbitraire et de déterminer des propriétés de l'objet qui sont souvent impossibles à obtenir avec des méthodes purement numériques.

Les bornes supérieures de complexité pour ce type de calcul sont exponentielles en le nombre de variables et les implantations disponibles ne permettent pas en pratique de conclure pour les problèmes considérés dans ce mémoire. Pour remédier à cet état de fait, nous proposons de combiner des méthodes purement formelles et des méthodes numériques afin d'obtenir des algorithmes moins généraux mais de meilleure complexité théorique et pratique.

Les chapitres suivants sont consacrés aux principales contributions de ce mémoire :

- un algorithme permettant le calcul rapide de la fonction de Hilbert différentielle associée à un système algébrique d'équations différentielles ordinaires avec seconds membres génériques ;
- un algorithme probabiliste de complexité polynomiale en la taille de l'entrée permettant de tester l'observabilité algébrique locale ;
- une implantation de cet algorithme à l'aide du logiciel de calcul symbolique *maple*. Cette implantation permet d'étudier l'observabilité de systèmes ne pouvant être autrement traités en pratique ;
- une méthode seminumérique permettant la planification de trajectoire approchée de certains systèmes gouvernés par des équations non linéaires aux dérivées partielles. Cette méthode est basée sur la notion de *système différentiellement plat* introduite en automatique par M. FLIESS, J. LÉVINE, Ph. MARTIN et P. ROUCHON dans [44].

Ces contributions reposent en partie sur la représentation d'un système différentiel par un calcul d'évaluation sans division nécessitant  $L$  opérations arithmétiques. En termes informatiques, l'expression  $e := x^5$  est représentée par la suite d'instructions :  $t_1 := x$ ,  $t_2 := t_1^2$ ,  $t_3 := t_2^2$ ,  $e := t_3 t_1$

et  $L$  vaut ici 3. La *taille* d'un système correspond à sa complexité d'évaluation et aux mesures habituelles comme le nombre de variables, le degré des expressions algébriques et la taille des scalaires intervenant dans ces expressions.

### Calcul rapide des invariants d'un système algébrique d'équations différentielles ordinaires avec seconds membres génériques [93, 130]

Considérons le système suivant emprunté à P. ROUCHON :

$$\begin{cases} \dot{x}_2/\ddot{x}_1 = y_1, \\ (\dot{x}_2/\ddot{x}_1)'x_1 - \dot{x}_1\dot{x}_2/\ddot{x}_1 + x_2 = y_2. \end{cases}$$

Nous cherchons à déterminer le nombre de fonctions et de constantes arbitraires dont dépendent les solutions  $x_1$  et  $x_2$  de ce système différentiel. En dérivant la seconde expression et en manipulant quelque peu les équations, on constate que :

$$x_1 = \frac{\dot{y}_2}{\ddot{y}_1} \quad \text{et} \quad x_2 = \left(\frac{\dot{y}_2}{\ddot{y}_1}\right)'y_1 - \dot{y}_1\frac{\dot{y}_2}{\ddot{y}_1} + y_2.$$

Dans un ouvert où  $\ddot{y}_1 \neq 0$ , les  $x_i$  sont déterminées par la donnée des  $y_i$  sans qu'il soit nécessaire de spécifier des conditions initiales. Nous montrons que ce type de propriétés peut être déterminé par un algorithme de complexité polynomiale en la taille de l'entrée comme l'indique le résultat suivant :

**Théorème 4.5 (page 46)** *Considérons un système différentiel ordinaire  $\Sigma$  de la forme :*

$$\Sigma \quad \begin{cases} f_1(x_1^{(e)}, \dots, x_n^{(e)}, \dots, x_1, \dots, x_n) = y_1, \\ \vdots \\ f_n(x_1^{(e)}, \dots, x_n^{(e)}, \dots, x_1, \dots, x_n) = y_n. \end{cases}$$

avec  $e$  et  $n$  des entiers,  $f_i$  des fractions rationnelles réduites et  $y_i$  des seconds membres génériques. Supposons que les numérateurs et les dénominateurs des  $f_i$  sont représentés par un calcul d'évaluation de complexité  $L$ .

Si on suppose que les seconds membres génériques  $(y_1, \dots, y_n)$  sont connus, la fonction de Hilbert différentielle  $\mathcal{H}$  associée à  $\Sigma$  permet de déterminer le nombre de fonctions et de constantes arbitraires dont dépendent les solutions  $(x_1, \dots, x_n)$  de  $\Sigma$ .

Il existe un algorithme probabiliste qui calcule  $\mathcal{H}$  et dont la complexité est bornée par

$$\mathcal{O}\left(n((L + n^3e^2)\mathcal{M}(ne) + e\mathcal{N}(n^2e))\right)$$

avec  $\mathcal{M}(\nu)$  (resp.  $\mathcal{N}(\nu)$ ), le coût de la multiplication de deux séries à l'ordre  $\nu + 1$  (resp. de deux matrices de taille  $\nu \times \nu$ ).

L'aspect probabiliste de l'algorithme est lié aux choix arbitraires de valeurs de spécialisation dans un ouvert de Zariski.

Les techniques utilisées pour démontrer ce résultat nous ont permis de proposer un algorithme permettant de répondre à un problème pratique d'automatique décrit dans la section suivante.

## Un algorithme probabiliste de complexité polynomiale en la taille de l'entrée permettant de tester l'observabilité algébrique locale [131]

En automatique et en modélisation, le problème de l'observabilité algébrique locale consiste à décider si les variables d'état intervenant dans un modèle peuvent être déterminées en fonction des entrées et des sorties supposées parfaitement connues. L'identifiabilité structurelle est une variante où l'on cherche à savoir si les paramètres d'un modèle sont observables. L'étude de l'observabilité est une étape importante dans la compréhension et l'exploitation d'un modèle. Par exemple, si on considère le système suivant tiré de [144] :

$$\begin{cases} \dot{x}_1 &= \theta_1 x_1^2 + \theta_2 x_1 x_2 + u, \\ \dot{x}_2 &= \theta_3 x_1^2 + \theta_4 x_1 x_2, \\ y &= x_1. \end{cases}$$

Le groupe de transformation paramétré par  $\lambda \{x_2, \theta_2, \theta_3\} \rightarrow \{\lambda x_2, \theta_2/\lambda, \lambda\theta_3\}$  laisse invariant le champ de vecteurs, la sortie  $y$  et la commande  $u$  définies ci-dessus. Ainsi, à un comportement entrée-sortie correspond une infinité de valeurs possibles de la variable  $x_2$  et des paramètres  $\theta_2$  et  $\theta_3$ .

Nous proposons un algorithme qui permet d'étudier l'observabilité et l'identifiabilité de systèmes ne pouvant actuellement être autrement traités en pratique (cf. les exemples de l'Annexe B page 101).

**Théorème 5.2 (page 62)** *Considérons un système différentiel ordinaire de la forme :*

$$\Sigma \quad \begin{cases} \dot{\Theta} &= 0, \\ \dot{X} &= F(X, \Theta, U), \\ Y &= H(X, \Theta, U). \end{cases}$$

*Supposons que ce modèle dépende de  $n$  variables de configuration  $X$ , de  $\ell$  paramètres  $\Theta$ , de  $m$  sorties  $Y$  et de  $r$  commandes  $U$ . De plus, supposons que les degrés des numérateurs et des dénominateurs de  $F$  et  $H$  soient bornés par  $d$  et la taille de leurs coefficients par  $h$ . Enfin, supposons que ce modèle soit représenté par un calcul d'évaluation de complexité  $L$ .*

*Il existe un algorithme probabiliste qui distingue l'ensemble des variables observables du modèle  $\Sigma$ . De plus, il indique le nombre de variables non observables devant être supposées connues pour obtenir un modèle observable. La complexité arithmétique de cet algorithme est bornée par*

$$\mathcal{O}\left(\mathcal{M}(\nu)\left(\mathcal{N}(n+\ell) + (n+m)L\right) + m\nu\mathcal{N}(n+\ell)\right)$$

*avec  $\mathcal{M}(\nu)$  (resp.  $\mathcal{N}(\nu)$ ), le coût de la multiplication de deux séries à l'ordre  $\nu+1$  (resp. de deux matrices de taille  $\nu \times \nu$ ) et  $\nu$  inférieur ou égal à  $n+\ell$  (génériquement  $\nu$  est égal à  $(n+\ell)/m$ ).*

*Soient  $\mu$  un entier positif arbitraire,  $D := 4(n+\ell)^2(n+m)d$  et*

$$D' := (2\ln(n+\ell+r+1) + \ln \mu D)D + 4(n+\ell)^2((n+m)h + \ln 2nD).$$

*Si les calculs sont effectués modulo un nombre premier  $p$  supérieur à  $2D'\mu$  alors la probabilité d'obtenir une réponse correcte est minorée par  $(1 - 1/\mu)^2$ .*

L'aspect probabiliste correspond au choix aléatoire d'un point dans un ouvert de Zariski et à des calculs modulaires destinés à contrôler la taille des rationnels manipulés. Cet algorithme a été implanté à l'aide du logiciel de calcul formel maple. Cette implantation est disponible à l'url [129].

## Planification de trajectoire approchée de certains systèmes gouvernés par des équations non linéaires aux dérivées partielles [106]

Considérons une tige flexible de masse  $m$  et de longueur  $L$  à l'extrémité de laquelle est fixée une masse  $M$  (cf. figure 1). On suppose que la position et l'orientation de l'autre extrémité de cette tige sont commandées dans le plan. Nous dénotons par  $\omega(t, s)$  la flexion de la tige au point d'abscisse  $s$

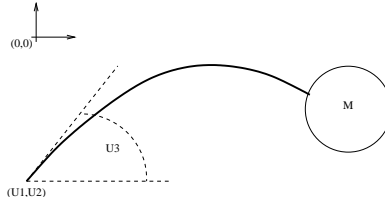


FIG. 1 – Une tige flexible non linéaire.

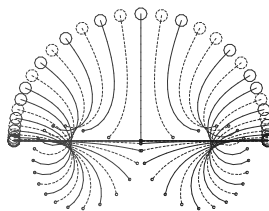
et au temps  $t$ . De plus, nous notons par  $(x(t, s), y(t, s))$  la position d'un point d'abscisse  $s$  sur la tige au temps  $t$ . Le comportement de notre tige sur un intervalle de temps  $[0, T]$  peut être décrit par l'équation non linéaire suivante :

$$\frac{C}{\rho} \frac{\partial^2 \omega}{\partial s^2} - \sin(\omega) \int_0^s \frac{\partial^2 x}{\partial t^2} + \cos(\omega) \int_0^s \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = 0 \quad \text{avec} \quad \begin{aligned} x(t, s) &= x(t, 0) + \int_0^s \cos(\omega(t, \sigma)) d\sigma, \\ y(t, s) &= y(t, 0) + \int_0^s \sin(\omega(t, \sigma)) d\sigma, \end{aligned}$$

où  $C$  représente un coefficient de flexibilité et  $\rho$  la masse linéique  $m/L$ . Ainsi, nous nous plaçons en dehors du domaine de l'approximation linéaire d'Euler–Bernoulli.

Pour un jeu de paramètres adéquats, nous cherchons à approximer des commandes permettant de remplir un objectif fixé. Par exemple, on cherche à faire parcourir à la masse  $M$  un demi-cercle en un temps donné  $T$ . De plus, nous souhaitons garantir l'absence de vibration en début et en fin de mouvement en imposant que la tige parte et arrive à vitesse nulle. Enfin, pour  $t = 0$  et  $t = T$ , la tige est sans flexion et son extrémité  $s = L$  est positionnée en  $(0, 0)$ .

Nous proposons une méthode permettant la planification approchée de trajectoire pour ce type de problème. Pour ce faire, nous utiliserons la méthode classique des différences finies pour remplacer le modèle de dimension infinie considéré par un modèle de dimension finie qui lui est *proche* dans un sens que nous précisons grâce à la méthode des approximations successives de Picard. Si le système de départ est *sous la forme de Cauchy–Kowalewska*, nous verrons que ses approximations de dimension finie sont *différentiellement plates*. Par une manipulation formelle introduite dans le cas linéaire par B. LAROCHE, Ph. MARTIN et P. ROUCHON dans [78], on utilise cette dernière propriété pour résoudre un problème de planification de trajectoire. Ainsi, on approxime la commande à appliquer à l'extrémité libre de la tige pour obtenir le comportement souhaité (représenté ci-dessous) :



Cette méthode s'applique notamment à des systèmes commandés de type parabolique décrits par des équations aux dérivées partielles à une dimension d'espace. Ainsi, en suivant la stratégie adoptée dans l'ensemble de ce mémoire, nous tirons profit de l'utilisation conjointe de calculs symboliques et de méthodes numériques pour résoudre un problème de planification de trajectoire.

**Publications et prépublications.** Les contributions présentées ci-dessus se retrouvent dans les références suivantes qui ont largement inspiré la rédaction des parties deux et trois de ce mémoire :

- [130] SEDOGLAVIC, A. *A Seminumeral Method to Study Prime Ordinary Differential Ideals*. Notes informelles de calcul formel (prépublications du laboratoire GAGE), n° 2000-04, janvier 2000.
- [93] MATERA, G., AND SEDOGLAVIC, A. *The differential Hilbert function of a differential rational mapping can be computed in polynomial time*. Proceedings of the 2002 International Symposium on Symbolic and Algebraic Computation (Lille, France, 7–10 July 2002), T. Mora, Ed., ACM, ACM press, pp. 184–191.
- [131] SEDOGLAVIC, A. *A probabilistic algorithm to test local algebraic observability in polynomial time*. Proceedings of the 2001 International Symposium on Symbolic and Algebraic Computation (London, Canada, July 22–25 2001), B. Mourrain, Ed., ACM press, pp. 309–316.
- [107] OLLIVIER, F. et SEDOGLAVIC, A. *Algorithmes efficaces pour tester l'identifiabilité locale*. Actes de la Conférence Internationale Francophone d'Automatique (Nantes, France, 8–10 juillet 2002), pp. 811–816.
- [106] OLLIVIER, F. et SEDOGLAVIC, A. *A generalization of flatness to nonlinear systems of partial differential equations. Application to the command of a flexible rod*. Proceedings of the 5th IFAC Symposium "Nonlinear Control Systems" (Saint Petersburg, Russia, July 4–6 2001), vol. 1, Elsevier, pp. 196–200.

Afin de compléter les résultats présentés ci-dessus, nous avons regroupé en annexe des exemples d'applications du test d'observabilité. De plus, nous indiquons brièvement une méthode, à notre connaissance nouvelle, qui permet de déterminer un groupe continu de transformations qui agissent sur les variables et les paramètres non observables d'un système et laissent ses trajectoires et ses sorties invariantes.

Alexandre SEDOGLAVIC  
 Laboratoire GAGE  
 École polytechnique  
 F-91128 Palaiseau, France.  
 Alexandre.Sedoglavic@polytechnique.fr  
<http://www.medicis.polytechnique.fr/~sedoglav>



Première partie

**Fondements géométriques et  
algorithmiques**



# Chapitre 1

## Introduction à l'algèbre différentielle

La présentation de l'algèbre différentielle faite dans ce chapitre ne se veut pas exhaustive ; nous privilégions l'exposé des notions utilisées dans la suite de ce mémoire. Pour un exposé complet, nous invitons à la lecture du livre fondateur de J.F. RITT [118] et du livre de référence [75] dû à E.R. KOLCHIN.

### 1.1 Définitions et propriétés

#### 1.1.1 Anneaux, modules et corps différentiels ordinaires

Cette section est consacrée à définir les notions de base de l'algèbre différentielle. Il s'agit d'une transcription des constructions et propriétés élémentaires de l'algèbre commutative non différentielle.

**Définitions 1.1** *Un anneau  $(\mathcal{A}, +, \cdot, \delta)$  (resp. un corps  $(\mathcal{A}, +, \cdot, /, \delta)$ ) différentiel est un anneau (resp. un corps) muni d'au moins une dérivation i.e. d'un endomorphisme additif vérifiant la règle de Leibniz :  $\forall (a, b) \in \mathcal{A}^2, \delta(ab) = \delta(a)b + a\delta(b)$ .*

*Un anneau (resp. un corps) différentiel est un anneau (resp. un corps) de Ritt si, et seulement si, il contient un sous-corps isomorphe au corps des rationnels.*

*Un anneau (resp. un corps) muni d'une seule dérivation est un anneau (resp. un corps) différentiel ordinaire ; dans le cas contraire, c'est un anneau (resp. un corps) différentiel partiel.*

Dans ce mémoire, nous n'utiliserons que des anneaux et des corps de Ritt. Remarquons que, contrairement aux équations aux différences, on ne connaît pas de phénomènes concrets régis par des équations différentielles à coefficients dans un corps de caractéristique non nulle. De plus, pour simplifier la présentation, nous ne nous intéressons dans ce chapitre qu'aux anneaux et corps *ordinaires*. La dernière partie de cette thèse est consacrée à des problèmes aux dérivées partielles mais leurs résolutions ne nécessitent pas le formalisme de l'algèbre différentielle partielle.

**Notations.** Si  $\mathcal{A}$  est une algèbre différentielle sur un anneau  $\mathcal{R}$  et  $\Sigma$  est un sous-ensemble de  $\mathcal{A}$ , la sous-algèbre différentielle de  $\mathcal{A}$  engendrée par  $\Sigma$  est notée  $\mathcal{R}\langle\Sigma\rangle$ . Soient  $\mathcal{G}$  un corps différentiel,  $\mathcal{F}$  un sous-corps différentiel de  $\mathcal{G}$  et une partie  $\Sigma$  de  $\mathcal{G}$ . Le sur-corps de  $\mathcal{F}$  engendré par  $\Sigma$  est noté  $\mathcal{F}\langle\Sigma\rangle$ .

Nous adoptons la notation des fluxions pour désigner les dérivations successives. Ainsi, si  $\eta$  est un élément d'un corps différentiel  $\mathcal{A}$ ,  $\dot{\eta}$  désigne  $\delta(\eta)$  et  $\eta^{(i)}$  désigne  $\delta^i(\eta)$ , etc.

**Proposition 1.1** (§ II.17 dans [153]) *Soit un anneau différentiel intègre  $\mathcal{A}$  et son corps des fractions  $\mathcal{F}$ , alors il existe une unique dérivation sur  $\mathcal{F}$  qui prolonge la dérivation de  $\mathcal{A}$ . Elle vérifie*

$$\forall (a, b) \in \mathcal{A} \times \mathcal{A}^*, \quad \delta\left(\frac{a}{b}\right) = \frac{b\delta(a) - a\delta(b)}{b^2}.$$

*Soit  $\mathcal{F}$  un corps de Ritt, alors pour toute extension algébrique  $\mathcal{G}$  de  $\mathcal{F}$ , il existe une unique dérivation sur  $\mathcal{G}$  qui prolonge la dérivation sur  $\mathcal{F}$ .*

Le corps des constantes d'un corps différentiel  $\mathcal{F}$  est le corps constitué des éléments  $c$  de  $\mathcal{F}$  tel que  $\delta(c) = 0$ ; dans la suite  $k$  désigne un corps de constantes supposé algébriquement clos. Comme dans le cas des corps non différentiels, on définit les propriétés suivantes dans le cadre différentiel :

**Définitions 1.2** *Soient  $\mathcal{F}$  et  $\mathcal{G}$  deux corps différentiels.*

*Une extension de corps différentiels  $\mathcal{G}/\mathcal{F}$  est constituée de deux corps différentiels  $\mathcal{F}$  et  $\mathcal{G}$  tels que  $\mathcal{F} \subset \mathcal{G}$  et que la dérivation de  $\mathcal{F}$  soit la restriction à ce corps de la dérivation de  $\mathcal{G}$ .*

*Un élément  $\eta$  de  $\mathcal{G}$  est différentiellement algébrique sur  $\mathcal{F}$  si, et seulement si, la famille de ses dérivées  $\{\eta^{(i)}, i \in \mathbb{N}\}$  est algébriquement dépendante sur  $\mathcal{F}$ . Ainsi,  $\eta$  satisfait une équation différentielle algébrique  $p(\eta, \dots, \eta^{(i)}) = 0$  avec  $p$  un polynôme à coefficients dans  $\mathcal{F}$ .*

*Si un élément  $\eta$  de  $\mathcal{G}$  n'est pas différentiellement algébrique sur  $\mathcal{F}$  alors il est dit différentiellement transcendant sur  $\mathcal{F}$ .*

*L'extension de corps différentiels  $\mathcal{G}/\mathcal{F}$  est différentiellement algébrique si, et seulement si, tout élément de  $\mathcal{G}$  est différentiellement algébrique sur  $\mathcal{F}$ . Dans le cas contraire, cette extension est différentiellement transcendante.*

*Un ensemble  $\{\eta, \eta \in \Sigma\}$  d'éléments de  $\mathcal{G}$  est différentiellement algébriquement indépendant sur  $\mathcal{F}$  si, et seulement si, l'ensemble  $\{\eta^{(i)}, \eta \in \Sigma, i \in \mathbb{N}\}$  est algébriquement indépendant sur  $\mathcal{F}$ .*

*Un tel ensemble est appelé base de transcendance différentielle de  $\mathcal{G}/\mathcal{F}$  si, et seulement si, il est maximal par rapport à l'inclusion.*

Le théorème suivant permet de s'assurer de la cohérence de ces définitions.

**Théorème 1.1** (§ II.9 dans [75], Th. 4 page 105 et Prop. 13 page 111)

*Considérons une extension de corps différentiels  $\mathcal{G}/\mathcal{F}$ . Deux bases de transcendance différentielles de  $\mathcal{G}/\mathcal{F}$  ont même cardinal; il s'agit du degré de transcendance différentiel de l'extension  $\mathcal{G}/\mathcal{F}$ .*

*L'extension  $\mathcal{G}/\mathcal{F}$  est différentiellement algébrique si, et seulement si, le degré de transcendance non différentiel de  $\mathcal{G}/\mathcal{F}$  est fini.*

L'algèbre différentielle initiée par J.F. RITT ne repose pas sur la théorie des anneaux d'opérateurs différentiels non commutatifs (cf. [30] pour plus de références sur ces questions). Nous introduisons maintenant une notion de module (distincte de celle de  $\mathcal{D}$ -module).

**Définition 1.3** *Soit un anneau différentiel ordinaire  $\mathcal{A}$  de dérivation  $\delta$ ; un module différentiel ordinaire sur  $\mathcal{A}$  est un  $\mathcal{A}$ -module  $\Omega$  muni d'une application additive  $\partial$  interne telle que :*

$$\forall (a, \omega) \in \mathcal{A} \times \Omega, \quad \partial(a\omega) = \delta(a)\omega + a\partial(\omega).$$

On peut ainsi définir toutes les notions dérivées comme celles d'espace vectoriel différentiel et d'idéal différentiel en adaptant les définitions usuelles d'algèbre non différentielle.

**Définitions 1.4** Soit  $\mathcal{A}$  un anneau différentiel. Un idéal différentiel de  $\mathcal{A}$  est un idéal de  $\mathcal{A}$  stable par le morphisme de dérivation. On a les définitions classiques :

Soit  $\Sigma$  un sous-ensemble de  $\mathcal{A}$ , l'idéal différentiel engendré par  $\Sigma$  est le plus petit idéal différentiel contenant  $\Sigma$ . On le note  $[\Sigma]$ .

Un idéal différentiel  $\mathcal{I}$  est premier si, et seulement si,  $pq \in \mathcal{I}$  implique que  $p \in \mathcal{I}$  ou  $q \in \mathcal{I}$ .

L'idéal différentiel radical associé à un idéal différentiel  $\mathcal{I}$  est l'idéal différentiel

$$\sqrt{\mathcal{I}} = \left\{ p \in \mathcal{A} \mid \exists i \in \mathbb{N} \text{ tel que } p^i \in \mathcal{I} \right\}.$$

Cette définition n'est valable que sur un anneau de Ritt. Nous dirons que  $\sqrt{\mathcal{I}}$  est le radical de  $\mathcal{I}$ . Un idéal différentiel  $\mathcal{I}$  est radical si, et seulement si,  $\mathcal{I}$  est son propre radical ( $\sqrt{\mathcal{I}} = \mathcal{I}$ ).

Soient  $\mathcal{I}$  et  $S$  deux idéaux différentiels de  $\mathcal{A}$ , le saturé de  $\mathcal{I}$  par  $S$  est l'idéal différentiel :

$$\mathcal{I} : S^\infty = \left\{ p \in \mathcal{A} \mid \exists (i, q) \in \mathbb{N} \times S \text{ tels que } q^i p \in \mathcal{I} \right\}.$$

Comme dans le cas non différentiel, on associe naturellement à un idéal différentiel premier  $\mathcal{I}$  de  $k\{X\}$  son corps de fractions noté  $\text{Fr}(k\{X\}/\mathcal{I})$ . Cette propriété nous permet d'adopter un point de vue géométrique en introduisant la notion de *solution générique*.

### 1.1.2 Géométrie algébrique différentielle

Comme dans le cadre algébrique non différentiel, si  $\mathcal{F}$  est un corps différentiel ordinaire, on peut construire l'anneau des polynômes différentiels  $\mathcal{F}\{x_1, \dots, x_n\}$  en les indéterminées  $x_1, \dots, x_n$ . Pour cela, on définit l'ensemble infini  $\Gamma = \{\delta^i(x_j), i \in \mathbb{N}, 1 \leq j \leq n\}$ , et on considère l'anneau commutatif de polynômes  $\mathcal{F}[\Gamma]$  noté  $\mathcal{F}\{x_1, \dots, x_n\}$ . Précisons pour mémoire les définitions usuelles :

**Définition 1.5** L'ordre d'un élément  $\delta^i(x_j)$  de  $\Gamma$  est  $i$ .

Un monôme est un produit fini d'éléments de  $\Gamma$ . L'ordre d'un monôme est le maximum des ordres des éléments dans le produit.

L'ordre d'un polynôme dans  $\mathcal{F}\{x_1, \dots, x_n\}$  est le maximum des ordres de ses monômes.

L'ordre d'une fraction rationnelle est le maximum de l'ordre de son dénominateur et de son numérateur.

L'ordre d'une classe dans une algèbre quotient est le minimum des ordres des représentants de cette classe.

L'anneau différentiel  $\mathcal{F}\{x_1, \dots, x_n\}$  peut être considéré comme un anneau non différentiel en une infinité d'indéterminés algébriques. Dans le cadre algébrique non différentiel, il découle du théorème de la base finie de Hilbert que tout idéal admet une base finie. Cette propriété n'est plus valide dans un anneau de polynômes différentiels. Par exemple, l'idéal différentiel  $[x^2, \dot{x}^2, \ddot{x}^2, \dots]$  de  $\mathbb{Q}\{x\}$  n'est pas finiment engendré (voir [52] pour un autre exemple).

Cependant, on dispose tout de même d'une propriété de « noéthérianité » pour l'ensemble des idéaux différentiels radiciels (cf. § III.4 dans [75]). Nous dirons qu'un anneau est *radiciellement noéthérien* si toute chaîne strictement croissante d'idéaux différentiels radiciels emboîtés est finie.

**Théorème 1.2 (Ritt–Raudenbush, §I.12 dans [118])** Soit  $\mathcal{A}$  un anneau de Ritt. Si  $\mathcal{A}$  est radiciellement noéthérien, alors  $\mathcal{A}\{x\}$  est radiciellement noéthérien.

Les résultats effectifs présentés dans la Section 3.1 page 22 reposent en grande partie sur cette propriété. La preuve de théorème présentée par J.F. RITT évite de recourir à l'axiome du choix et on peut trouver une version constructive dans la thèse d'A. PÉLADAN (§ I.4 dans [112], pages 55–59).

**Solutions génériques, extension universelle.** La notion de *solution générique* est fondamentale dans les contributions présentées dans ce mémoire. Cette notion est à la base de la définition des variétés algébriques différentielles.

**Définitions 1.6** Soient  $\mathcal{F}$  un corps différentiel,  $\mathcal{I}$  un idéal différentiel de  $\mathcal{F}\{x_1, \dots, x_n\}$  et  $\mathcal{G}$  une extension différentielle de corps de  $\mathcal{F}$ . Un élément  $\eta = (\eta_1, \dots, \eta_n)$  dans  $\mathcal{G}^n$  est une solution générique de  $\mathcal{I}$  si, et seulement si, on a :

$$\left\{ p \in \mathcal{F}\{x_1, \dots, x_n\} \text{ tel que } p(\eta) = 0 \right\} = \mathcal{I}.$$

Une extension différentielle  $\mathcal{U}$  de  $\mathcal{F}$  est universelle si, et seulement si, pour toute extension finie  $\mathcal{F} \subset \mathcal{G} \subset \mathcal{U}$ , tout entier non nul  $n$  et tout idéal  $\mathcal{I}$  non trivial de  $\mathcal{G}\{x_1, \dots, x_n\}$ , il existe une solution générique de  $\mathcal{I}$  dans  $\mathcal{U}$ .

**Exemples.** Considérons l'idéal différentiel  $[\dot{x} + x^2]$ , les solutions du type  $x = 1/(t - cste)$  sont génériques alors que la solution  $x = 0$  ne l'est pas.

Si on suppose que l'idéal différentiel  $\mathcal{I}$  est premier, alors l'anneau quotient  $\mathcal{F}\{x_1, \dots, x_n\}/\mathcal{I}$  est intègre de corps de fractions  $\mathcal{G}$ . Le morphisme canonique de  $\mathcal{F}\{x_1, \dots, x_n\}$  dans  $\mathcal{G}$  associe un élément  $\eta_i$  à  $x_i$ ;  $(\eta_1, \dots, \eta_n)$  est une solution générique. Ainsi, on a :

**Lemme 1.1** *Tout idéal premier admet une solution générique.*

Notons que cette solution n'est pas nécessairement analytique sur  $\mathbb{C}$ . On remarque que tout idéal différentiel qui admet une solution générique est premier. Plus généralement, on a le résultat suivant :

**Théorème 1.3 (§ III.7 dans [75])** *Une extension universelle est algébriquement close et tout corps différentiel admet une extension universelle.*

Bien que la démonstration de E.R. KOLCHIN construit pour tout corps différentiel une extension universelle définie de manière unique, un corps différentiel peut avoir plusieurs extensions universelles. Ce point n'est pas gênant si on suppose qu'une extension étant choisie, on n'en change pas.

**Remarque 1.** Nous utiliserons dans ce mémoire la notion de solution générique pour améliorer la complexité arithmétique de nos algorithmes. Ainsi, le corps  $\text{Fr}(k\{\tilde{x}\}/[\dot{x} + x^2])$  est isomorphe au corps  $k\langle\eta\rangle$  avec  $\eta$  une série formelle solution de  $\dot{x} + x^2$  à coefficients rationnels. Dans le premier corps, les opérations usuelles — comme la multiplication, la dérivation etc. — nécessitent l'utilisation des techniques de réécritures alors que dans le second, il suffit de disposer de l'arithmétique classique des séries.

**Variétés algébriques différentielles.** La notion d'extension universelle est un analogue de la notion de clôture algébrique, elle nous permet de définir des variétés algébriques différentielles.

**Définitions 1.7** Soit  $\Sigma$  un sous-ensemble de  $\mathcal{F}\{x_1, \dots, x_n\}$ , la variété algébrique différentielle associée à  $\Sigma$  est l'ensemble  $\mathcal{V}(\Sigma)$  des solutions des polynômes de  $\Sigma$  dans une extension universelle de  $\mathcal{F}$ . Ces solutions sont appelées les points de la variété ou les zéros de  $\Sigma$ .

Le résultat suivant établit une correspondance biunivoque entre les variétés définies dans  $\mathcal{U}^n$  et les idéaux radiciels d'un anneau convenable (cf. § IV.2 dans [75]).

**Théorème 1.4 (Nullstellensatz différentiel)** Soit  $\mathcal{V}(\Sigma)$  une variété algébrique différentielle définie par un sous-ensemble  $\Sigma$  de  $\mathcal{F}\{x_1, \dots, x_n\}$ , alors l'ensemble

$$\left\{ p \in \mathcal{F}\{x_1, \dots, x_n\} \text{ tel que } \forall \eta \in \mathcal{V}(\Sigma), p(\eta) = 0 \right\}$$

est un idéal radiciel de  $\mathcal{F}\{x_1, \dots, x_n\}$  égal à  $\sqrt{[\Sigma]}$ . En particulier, si le système  $\Sigma$  n'a pas de solution alors 1 appartient à l'idéal différentiel  $[\Sigma]$ .

Comme dans le cadre non différentiel, tout idéal radiciel admet une représentation comme intersection d'un nombre fini d'idéaux différentiels premiers. On peut ainsi définir une décomposition des variétés différentielles en composantes irréductibles. De plus, on définit une topologie de Zariski différentielle sur  $\mathcal{U}^n$  en considérant comme fermées les variétés algébriques différentielles de  $\mathcal{U}^n$  définies par des sous-ensembles de  $\mathcal{F}\{x_1, \dots, x_n\}$  (cf. § IV.4 dans [75]).

La « différence » ensembliste de deux variétés algébriques différentielles n'est généralement pas une variété algébrique. Or, nous serons amenés à « éviter » certaines solutions qui, typiquement, annulent des dénominateurs (dans ce cas considérés comme des inéquations). Définissons la saturation d'un idéal  $\mathcal{I}$  par une partie  $\Sigma$  :

**Définition 1.8** Si  $\mathcal{I}$  est un idéal différentiel d'un anneau de polynômes  $\mathcal{A}$  et si  $\Sigma$  est un sous-ensemble fini de  $\mathcal{A}$ , on définit l'idéal  $\mathcal{I} : (\Sigma)^\infty$  comme étant l'idéal des polynômes  $p$  de  $\mathcal{A}$  tels qu'il existe un produit  $h$  d'éléments de  $\Sigma$  vérifiant  $hp \in \mathcal{I}$ .

Pour représenter algébriquement une différence ensembliste, on utilise la généralisation d'un résultat bien connu d'algèbre commutative non différentielle (voir par exemple le § IV.4 dans [31] ou la proposition 4 page 45 dans [112])

**Proposition 1.2** Soient deux ensembles de relations  $\Sigma$  et  $\Sigma'$  dans  $\mathcal{F}\{x_1, \dots, x_n\}$  et les variétés algébriques différentielles correspondantes  $\mathcal{V}(\Sigma)$  et  $\mathcal{V}(\Sigma')$ . La clôture de Zariski différentielle de  $\mathcal{V}(\Sigma) \setminus \mathcal{V}(\Sigma')$  est définie par l'idéal différentiel  $[\Sigma] : (\Sigma')^\infty$ .

Dans la suite, nous privilégierons l'étude des propriétés de variétés *irréductibles* qui sont associées à des modèles physiques. Ainsi, nous considérons systématiquement des idéaux différentiels premiers.

## 1.2 Autour de la notion de dimension

### 1.2.1 Fonction et polynôme de transcendance différentiel

Dans le cadre algébrique non différentiel, un idéal premier dispose de deux invariants numériques : la dimension et le degré. Dans le cadre différentiel ordinaire, nous allons présenter les notions de dimension différentielle et d'ordre d'un idéal différentiel premier. L'exposé que nous en donnons est fortement influencé par l'usage qui sera fait de ces notions dans les chapitres suivants ; nous renvoyons à § II.12 dans [75] pour une définition générale notamment dans le cadre des algèbres différentielles partielles.

**Définition 1.9** Soit  $\mathcal{G}/\mathcal{F}$  une extension de corps différentiels de type fini. Considérons la famille de corps non différentiels  $(K_i)_{i \in \mathbb{N}}$  définie par :

$$\forall i \in \mathbb{N}, \quad K_i = \left\{ f \in \mathcal{G} \text{ tels que l'ordre de } f \leq i \right\}.$$

On appelle fonction de transcendance différentielle de  $\mathcal{G}$  sur  $\mathcal{F}$ , la fonction  $\mathcal{H}_{\mathcal{G}/\mathcal{F}}(\cdot)$  telle que pour tout entier  $i$ ,  $\mathcal{H}_{\mathcal{G}/\mathcal{F}}(i)$  est égal au degré de transcendance algébrique du corps non différentiel  $K_i$  sur le corps  $\mathcal{F}$ .

En algèbre différentielle, l'ordre de dérivation permet donc de définir une filtration dont l'analogie non différentielle repose sur la notion de degré et la graduation induite. Ainsi, l'ordre tiendra dans la suite un rôle similaire à celui du degré.

Si on considère un idéal différentiel premier  $\mathcal{I}$ , le corps  $\mathcal{G}$  est le corps des fractions associé à  $\mathcal{I}$  et  $\mathcal{F}$  est un sous-corps de  $\mathcal{G}$  que l'on fixe suivant les besoins (cf. Chapitre 2 page 11). La fonction de transcendance différentielle est aussi appelée *fonction de Hilbert différentielle*. Dans le cadre différentiel ordinaire, on dispose du théorème suivant :

**Théorème 1.5 (§ II.12 dans [75])** *Pour un ordre de dérivation  $r$  assez grand, la fonction de transcendance  $\mathcal{H}_{\mathcal{G}/\mathcal{F}}(\cdot)$  est égale à un polynôme  $\mathcal{P}_{\mathcal{G}/\mathcal{F}}(\cdot)$  tel que*

$$\forall i \in \mathbb{N}, \quad i > r, \quad \mathcal{P}_{\mathcal{G}/\mathcal{F}}(i) = d(i+1) + h.$$

*On appelle ce polynôme, le polynôme de transcendance différentiel. L'entier  $d$  est la dimension de  $\mathcal{G}$  sur  $\mathcal{F}$  i.e. le degré de transcendance différentiel de  $\mathcal{G}$  sur  $\mathcal{F}$  et l'entier  $h$  est l'ordre de cette extension pour la famille  $\eta$ . Si  $d$  est nul,  $h$  ne dépend pas de  $\eta$ .*

**Exemple.** Considérons l'idéal différentiel premier  $[\dot{x} - y]$  dans  $k\{x, y\}$  et notons  $\mathcal{F}$  son corps des fractions. On a :  $\mathcal{P}_{\mathcal{F}/k}(i) = (i+1) + 1$ ,  $\mathcal{P}_{\mathcal{F}/k\langle y \rangle}(i) = 1$  et  $\mathcal{P}_{\mathcal{F}/k\langle x \rangle}(i) = 0$ .

Lorsque l'on évoque la fonction de transcendance différentielle associée à un idéal différentiel premier sans plus de précision, il s'agit de la fonction de Hilbert différentielle de l'extension formée par son corps de fractions rationnelles et du corps des constantes. De plus, la dimension d'un idéal différentiel premier est le degré de transcendance différentiel de son corps de fractions sur le corps des constantes. C'est un invariant d'un l'idéal différentiel premier et s'il est nul alors l'ordre en est un autre invariant.

Plus intuitivement, la dimension d'un idéal différentiel premier est le nombre de fonctions arbitraires intervenant dans l'expression des solutions génériques de cet idéal. Une fois ces fonctions choisies, l'ordre d'un idéal différentiel premier est le nombre de « conditions initiales » intervenant dans l'expression des solutions génériques. La fonction de transcendance différentielle est un indicateur plus fin car elle permet de déterminer le nombre de conditions initiales d'ordre zéro, un, etc.

Dans ce qui précède, nous avons constaté qu'en algèbre différentielle l'ordre d'un idéal différentiel premier est en quelque sorte l'analogie de la notion de degré algébrique. Dans le cas différentiel ordinaire, on dispose d'un analogue différentiel du théorème de Bézout, dû à J.F. RITT.

**Théorème 1.6** *Soit un idéal différentiel ordinaire  $\mathcal{I}$  engendré par un ensemble fini  $(p_1, \dots, p_m)$  de polynômes différentiels. Supposons qu'on se soit fixé un sous-corps  $\mathcal{G}$  du corps des fractions de  $\mathcal{I}$ , que  $\mathcal{I}$  soit un idéal premier de  $\mathcal{G}\{x_1, \dots, x_n\}$  et que  $e_i$  désigne, pour tout  $i$  compris entre 1 et  $m$ , l'ordre de dérivation maximal de  $p_i$  en les  $x_j$  (sans tenir compte des dérivées dans  $\mathcal{G}$ ). Alors l'ordre de l'extension  $\mathcal{F}/\mathcal{G}$  est majoré par  $\sum_{i=1}^m e_i$ .*

### 1.2.2 Module des différentielles de Kähler

La notion de différentielle de Kähler permet la *linéarisation* en géométrie algébrique ; il s'agit d'un analogue de la notion de fibré cotangent en géométrie différentielle et nous renvoyons à [38] pour un exposé complet de cette théorie dans un cadre classique. Précisons tout de même les points suivants :

**Définition 1.10** Soient un anneau  $\mathcal{A}$  et une algèbre  $\mathcal{S}$  sur  $\mathcal{A}$ . Le module des différentielles de Kähler de  $\mathcal{S}$  sur  $\mathcal{A}$  est le  $\mathcal{S}$ -module noté  $\Omega_{\mathcal{S}/\mathcal{A}}$  qui est engendré par les éléments  $\{d_{\mathcal{S}/\mathcal{A}}(f) \mid f \in \mathcal{S}\}$  vérifiant les relations :

$$\forall (f, g) \in \mathcal{S}^2, \quad \forall (a, b) \in \mathcal{A}^2, \quad \begin{aligned} d_{\mathcal{S}/\mathcal{A}}(af + bg) &= a d_{\mathcal{S}/\mathcal{A}}(f) + b d_{\mathcal{S}/\mathcal{A}}(g), \\ d_{\mathcal{S}/\mathcal{A}}(fg) &= d_{\mathcal{S}/\mathcal{A}}(f)g + f d_{\mathcal{S}/\mathcal{A}}(g). \end{aligned}$$

L'application  $d_{\mathcal{S}/\mathcal{A}}$  est donc une dérivation de  $\mathcal{S}$  dans  $\Omega_{\mathcal{S}/\mathcal{A}}$ ; l'anneau  $\mathcal{A}$  est un anneau de constantes pour cette dérivation.

**Exemples.** Le module des différentielles de Kähler d'un anneau de polynômes  $\mathcal{A}[x_1, \dots, x_n]$  noté  $\mathcal{S}$  est le  $\mathcal{S}$ -module libre engendré par les éléments  $d_{\mathcal{S}/\mathcal{A}}(x_i)$ ; on a  $\Omega_{\mathcal{S}/\mathcal{A}} = \bigoplus_{i=1}^n \mathcal{S}d_{\mathcal{S}/\mathcal{A}}(x_i)$ .

Soient  $\mathcal{I}$  un idéal engendré par  $(f_1, \dots, f_m)$  et la  $\mathcal{A}$ -algèbre  $\mathcal{A}[x_1, \dots, x_n]/\mathcal{I}$  désignée par  $\mathcal{S}$ . Le module  $\Omega_{\mathcal{S}/\mathcal{A}}$  est défini par les générateurs du  $\mathcal{S}$ -module libre  $\bigoplus_{i=1}^n \mathcal{S}d_{\mathcal{S}/\mathcal{A}}(x_i)$  et par les relations

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial f_1}{\partial x_n} \\ \vdots & & \vdots \\ \frac{\partial f_m}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial f_m}{\partial x_n} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} d_{\mathcal{S}/\mathcal{A}}(x_1) \\ \vdots \\ d_{\mathcal{S}/\mathcal{A}}(x_n) \end{pmatrix} = 0.$$

Schématiquement, les différentielles de Kähler permettent de formaliser les relations intuitives entre la dimension d'une variété et celle de son espace linéarisé tangent. Nous allons principalement considérer la notion de dimension sous cet angle et nous allons utiliser les différentielles de Kähler pour profiter d'une généralisation de l'analogie suivant du critère jacobien :

**Théorème 1.7** Soient un corps de caractéristique nulle  $\mathcal{G}$  et une extension  $\mathcal{F}$  de  $\mathcal{G}$ . Les éléments  $\{\eta_1, \dots, \eta_m\}$  de  $\mathcal{F}$  sont algébriquement indépendants sur  $\mathcal{G}$  si, et seulement si, les éléments associés  $\{d_{\mathcal{F}/\mathcal{G}}(\eta_1), \dots, d_{\mathcal{F}/\mathcal{G}}(\eta_m)\}$  dans  $\Omega_{\mathcal{F}/\mathcal{G}}$  sont linéairement indépendants sur  $\mathcal{F}$ .

**Définitions et propriétés dans le cadre différentiel.** La notion de module des différentielles de Kähler associé à une extension de corps différentiels a été généralisée au cadre différentiel notamment dans les travaux de J. JOHNSON (cf. [69, 70]). La définition classique se transpose directement dans le cadre différentiel et coïncide bien avec la Définition 1.3 page 4 d'un module différentiel, comme le montre le résultat suivant tiré de [69] :

**Proposition 1.3** Si  $\mathcal{A}$  est un corps différentiel et si  $\mathcal{S}$  est une algèbre différentielle sur  $\mathcal{A}$ , alors le module des différentielles de Kähler  $\Omega_{\mathcal{S}/\mathcal{A}}$  dispose d'une structure canonique de  $\mathcal{S}$ -module différentiel i.e. toute dérivation  $\delta$  sur  $\mathcal{S}$  est définie sur  $\Omega_{\mathcal{S}/\mathcal{A}}$  et on a :

$$\forall f \in \mathcal{S}, \quad \delta(d_{\mathcal{S}/\mathcal{A}}(f)) = d_{\mathcal{S}/\mathcal{A}}(\delta(f)).$$

Le Théorème 1.7 permet d'établir la propriété suivante tirée de [69] :

**Théorème 1.8** Soient une extension de corps différentiels  $\mathcal{F}/\mathcal{G}$  de type fini et le module des différentielles de Kähler  $\Omega_{\mathcal{F}/\mathcal{G}}$  qui lui est associé. Quelle que soit la base de transcendance  $\{\eta_1, \dots, \eta_m\}$  de  $\mathcal{F}$  sur  $\mathcal{G}$ , l'ensemble  $\{d_{\mathcal{F}/\mathcal{G}}(\eta_1), \dots, d_{\mathcal{F}/\mathcal{G}}(\eta_m)\}$  est une base du  $\mathcal{F}$ -espace vectoriel différentiel  $\Omega_{\mathcal{F}/\mathcal{G}}$ .

Ainsi, le degré de transcendance différentiel d'une extension de corps différentiels est égal au rang du module des différentielles de Kähler qui lui est associé.

Les deux prochains chapitres se proposent d'illustrer l'intérêt de ces notions et de montrer qu'elles se prêtent à des calculs effectifs.



## Chapitre 2

# Automatique et corps différentiels

Les mécanismes de régulation sont quasi-incontournables que ce soit dans les phénomènes biologiques ou dans les réalisations d'ingénierie. L'étude et la conception de tels mécanismes nécessitent généralement une mise en équation mathématique conduisant à un *modèle* possible du phénomène en question. Schématiquement, la théorie du contrôle a pour principal objet d'étude les propriétés des ensembles sous-déterminés de relations différentielles représentant des modèles.

Nous aborderons dans ce chapitre deux notions de base de l'automatique : l'observabilité et la contrôlabilité. Ces notions, issues des besoins des sciences de l'ingénieur, présentent de très nombreuses « traductions » dans différents formalismes mathématiques. Dans ce mémoire, nous utilisons une définition de l'observabilité et de la contrôlabilité dans le cadre des corps différentiels présentés dans le chapitre précédent. Nous adoptons ainsi un point de vue qui ne nécessite pas de faire une distinction entre les quantités décrivant l'état, les paramètres et les commandes d'un système comme c'est le cas par exemple dans l'approche « comportementale » de J.C. WILLEMS [150]. Le cadre théorique que nous utilisons a été développé dans les années quatre-vingts, notamment à l'initiative de M. FLIESS (cf. [41]). Précisons que la présentation faite dans ce mémoire de ce très riche sujet n'est en rien exhaustive et que le lecteur intéressé peut consulter avec bénéfices les références suivantes [37, 44, 43, 47, 91, 92].

### 2.1 Quelques rappels de théorie du contrôle

La contrôlabilité et l'observabilité sont des notions centrales en automatique. Pour les modèles linéaires, elles ont été mathématiquement formalisées dans les années soixante par R.E. KALMAN dans le cadre de la théorie algébrique des modules [71]. Cette approche permet de rendre compte et de définir les propriétés des modèles linéaires explicites du type  $\dot{X} = AX + BU$ ,  $Y = CX$  avec  $A$ ,  $B$  et  $C$  des matrices et  $X$ ,  $U$  des vecteurs.

**Exemple 1.** Considérons deux masses  $m_1$  et  $m_2$  reliées par un ressort de raideur  $c$ . On suppose que ces masses évoluent sur une ligne, que leurs positions sont  $x_1$  et  $x_2$  et que l'abscisse  $x_2$  est observée alors que  $x_1$  est contrôlée par une commande  $u$ . Cet objet physique est modélisé par la *représentation d'état* :

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} \ddot{x}_1 \\ \ddot{x}_2 \end{pmatrix} &= c \begin{pmatrix} -1/m_1 & 1/m_1 \\ 1/m_2 & -1/m_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1/m_1 \\ 0 \end{pmatrix} u, \\ y &= x_2. \end{aligned} \quad (2.1)$$

Cet exemple est emprunté à P. ROUCHON. En fin de chapitre, nous présenterons une solution au

problème de contrôle suivant : trouver une commande  $u$  sur  $[0, 1]$  telle que notre objet parte au repos de la position  $(x_1(0) = 0, x_2(0) = 1)$  et arrive à vitesse nulle à la position  $(x_1(1) = 1, x_2(1) = 2)$ .

Depuis les travaux de R.E. KALMAN, une grande partie des travaux en automatique portent sur des généralisations directes de ce type de systèmes, notamment dans le cadre de la géométrie différentielle. Nous précisons dans la section suivante quelques points de terminologie.

### 2.1.1 Représentation d'état

**Définition 2.1** On appelle représentation d'état la donnée d'un modèle de la forme suivante :

$$\Sigma \quad \begin{cases} \dot{\Theta} &= 0, \\ \dot{X} &= F(X, \Theta, U), \\ Y &= H(X, \Theta, U). \end{cases} \quad (2.2)$$

Les lettres majuscules ci-dessus désignent les ensembles d'éléments suivants :

- les commandes  $U = (u_1, \dots, u_r)$  sont des quantités dont l'évolution est supposée être maîtrisable. Il s'agit généralement de l'action exercée par l'utilisateur sur le modèle ;
- le modèle contient des quantités constantes  $\Theta = (\theta_1, \dots, \theta_\ell)$ . Ces paramètres sont ici considérés comme des variables d'état par l'ajout des équations  $\dot{\Theta} = 0$  au modèle ;
- les variables d'état  $X = (x_1, \dots, x_n)$  sont des grandeurs intervenant dans le système mais qui ne sont pas mesurées directement. Leur évolution est déterminée par un champ de vecteurs  $F = (f_1, \dots, f_n)$  que nous supposons être défini par des fractions rationnelles des variables d'état, des paramètres et des commandes ;
- les sorties  $Y = (y_1, \dots, y_m)$  sont des grandeurs qui sont supposées être mesurées, donc connues. Elles s'expriment comme des fractions rationnelles  $H = (h_1, \dots, h_m)$  des variables d'état, des paramètres et des commandes.

Cette définition ne recouvre pas les problèmes les plus généraux possibles. Par exemple, les dynamiques ne sont ni implicitement définies ni soumises à des retards ou modélisées par des automates. De plus, nous nous limitons dans ce mémoire à étudier des propriétés *structurelles* comme l'*observabilité* et la *contrôlabilité* tout en se restreignant au cadre suivant :

- nous supposons que les fonctions utilisées (commandes, sorties) sont des fonctions régulières du temps. Cette hypothèse n'est pas restrictive puisque les commandes de type impulsion peuvent être approximées par des fonctions régulières ;
- les entrées sont supposées pouvoir être arbitrairement choisies. De plus, nous ne prenons pas en compte l'existence de « bruits » i.e. d'incertitudes sur les commandes et les sorties.

Bien que la représentation d'état soit la plus répandue, elle n'est pas unique ; nous allons décrire dans les chapitres suivants des représentations par *ensembles caractéristiques*. Quoi qu'il en soit, toutes les représentations que nous considérons dans ce mémoire ont ceci en commun qu'elles sont associées à un idéal différentiel premier.

**Hypothèse de primalité.** Remarquons qu'un modélisateur intéressé par des solutions annulant les dénominateurs des fractions rationnelles  $F$  et  $H$ , n'aurait probablement pas retenu le système d'équations (2.2) comme modèle. Ainsi, on peut adjoindre au système (2.2) une inéquation  $H_\Sigma \neq 0$  avec  $H_\Sigma$  le produit des dénominateurs des fractions rationnelles  $F$  et  $H$ . D'après la Proposition 1.2 page 7, l'adhérence de Zariski des solutions de ce système d'équations et d'inéquations peut être

représentée par l'idéal différentiel  $[\Sigma] : H_{\Sigma}^{\infty}$ . Le lemme suivant motive le parti pris de nous intéresser aux idéaux différentiels premiers :

**Lemme 2.1** *L'idéal différentiel  $[\Sigma] : H_{\Sigma}^{\infty}$  de  $k\{X, \Theta, Y, U\}$  est premier.*

**Preuve.** Par commodité, on considère les paramètres  $\Theta$  comme des variables d'état en rajoutant des équations du type  $\dot{\theta} = 0$  et les commandes  $U$  dans le corps  $k$  qui est étendu à  $k\langle U \rangle$ . On considère le morphisme additif et multiplicatif défini par :

$$\begin{aligned} \phi : k\{x_1, \dots, x_n, y_1, \dots, y_m\} &\rightarrow k\{x_1, \dots, x_n\} \\ & \quad x_i &\rightarrow x_i, \\ \forall j \geq 1, \quad x_i^{(j)} &\rightarrow f_i^{(j-1)}, \\ \forall j \geq 0, \quad y_i^{(j)} &\rightarrow h_i^{(j)}. \end{aligned}$$

Le noyau de ce morphisme est l'idéal différentiel  $[\Sigma] : H_{\Sigma}^{\infty}$ . Son image étant un sous-anneau de  $k\{x_1, \dots, x_n\}$ , elle est intègre et donc son noyau est un idéal premier.  $\square$

### 2.1.2 Contrôlabilité – Observabilité

Nous présentons brièvement des définitions simples de la contrôlabilité et de l'observabilité dans le cadre théorique de la géométrie différentielle tout en invitant le lecteur intéressé à consulter [68] pour un exposé approfondi.

**Définitions 2.2** *Une trajectoire du modèle (2.2) est une fonction  $t \rightarrow (X(t), U(t))$  qui vérifie le système d'équations différentielles de ce modèle.*

*Le modèle (2.2) est observable pour toute commande, si deux trajectoires partageant la même commande définissent des sorties différentes. Pour être plus précis, une entrée  $U(t)$  définie et régulière sur  $[0, \eta]$  étant fixée, le modèle (2.2) est localement observable si pour tout  $\epsilon > 0$  et pour tout voisinage  $V$  de  $X(t)$  dans  $C^{\infty}([0, \eta], \mathbb{R}^n)$ , il existe  $0 < \eta < \epsilon$  et un voisinage  $W \subset V$  de  $X(t)$  dans  $C^{\infty}([0, \eta], \mathbb{R}^n)$ , tels que pour tout  $\tilde{X}(t)$  dans  $W$  on a :  $Y(X(\eta), U(\eta)) \neq Y(\tilde{X}(\eta), U(\eta))$ .*

*Le modèle (2.2) est contrôlable en boucle ouverte si, et seulement si, pour tout  $(X_0, X_T) \in \mathbb{R}^{2n}$  il existe une fonction  $t \rightarrow U(t)$  telle que le problème de Cauchy*

$$\begin{cases} \dot{X}(t) = F(X(t), U(t)), \\ X(0) = X_0, \end{cases}$$

*a une solution sur  $[0, T]$  vérifiant  $X(T) = X_T$ . Le temps  $T$  est fixé ou arbitraire suivant les cas considérés mais il est fini.*

En pratique, il est fréquent que seule une partie de l'état d'un phénomène soit accessible à la mesure et que l'on doive se contenter des sorties  $Y$  pour déterminer les quantités non mesurées. Ce n'est possible que si le modèle représentant le phénomène est, au moins, localement observable.

**Exemple 2.** Considérons les deux systèmes suivants :

$$(A) \begin{cases} \dot{x}_1 = \theta_1 x_1^2 + \theta_2 x_1 x_2 + u, \\ \dot{x}_2 = \theta_3 x_1^2 + \theta_4 x_1 x_2, \\ y = x_1. \end{cases} \quad (B) \begin{cases} \dot{x}_1 = f(x_1, x_2, x_3, u), \\ \dot{x}_2 = -x_3, \\ \dot{x}_3 = x_2, \end{cases}$$

Le système (A) est tiré de [144]. Le groupe de transformation  $\{x_2, \theta_2, \theta_3\} \rightarrow \{\lambda x_2, \theta_2/\lambda, \lambda \theta_3\}$  (à un paramètre  $\lambda$ ) laisse invariant le champ de vecteurs, la sortie  $y$  et la commande  $u$  définies dans le

modèle de gauche. Ainsi, à une entrée et une sortie fixées correspond une infinité de valeurs possibles de la variable  $x_2$  et des paramètres  $\theta_2$  et  $\theta_3$ . La connaissance seule de l'entrée et de la sortie ne suffit donc pas pour déterminer ces quantités ; elles ne sont donc pas observables en fonction de l'entrée et de la sortie.

La non contrôlabilité locale d'un modèle est liée à l'existence d'intégrales premières non triviales i.e. à l'existence de quantités qui restent constantes le long de toute trajectoire. Par exemple, le système (B) n'est pas contrôlable : les trajectoires sont astreintes à vérifier  $g(x_2^2 + x_3^2) = cste$  et ne peuvent « sortir » des feuilletages ainsi définis.

En toute généralité, les questions relatives à la contrôlabilité et à l'observabilité des systèmes non linéaires ne sont pas résolues et nous renvoyons le lecteur intéressé à [68, 125] pour un exposé plus complet et plus de références sur ce très vaste sujet.

**Remarque 2.** L'utilisation d'une représentation d'état pour décrire un phénomène est une pratique courante en automatique. Toutefois, l'obtention d'une telle représentation peut ne pas être aisée. Afin de préciser notre propos considérons le comportement du circuit d'alimentation et de re-foulement d'une pompe dans un moteur. Ce phénomène est régi par les relations physiques suivantes (cf. page 28 de [108]) :

$$\begin{aligned}
 \dot{m} + L_u(p_2 - p_R) + \frac{C_u}{\rho} m|m| &= 0, & \text{ligne amont,} \\
 K_1 \dot{m} - am^2 - b \frac{\omega}{\omega_0} m - c \left( \frac{\omega}{\omega_0} \right)^2 - \rho K_2 \dot{\omega} + p_3 - p_2 &= 0, & \text{pompe,} \\
 \dot{m} + L_d(p_4 - p_3) + \frac{C_d}{\rho} m|m| &= 0, & \text{ligne aval,} \\
 p_5 - p_4 + \frac{K_{av}}{\rho} m|m| &= 0, & \text{perte de charge,} \\
 p_5 + \theta \dot{p}_5 - \frac{C^*}{A_c} m &= 0, & \text{combustion.}
 \end{aligned} \tag{2.3}$$

Les symboles  $p_R, p_2, p_3, p_4, p_5$  et  $m, \omega$  représentent des quantités variables en fonction du temps (des pressions, un débit et une vitesse de rotation) et on suppose que les autres symboles représentent des constantes. Ces relations ne constituent pas une représentation d'état. Une élimination, simple dans ce cas, est nécessaire pour se ramener à une représentation d'état du type (2.2) page 12 (voir la Section 3.1.2 page 27 et la figure 3.1 incluse). Cette opération n'est pas canonique ; le choix des variables d'état, des commandes et des sorties relève ainsi du savoir faire et des besoins du modélisateur. Dans le même ordre d'idées, indiquons la définition suivante :

**Définition 2.3** *Considérons un système différentiel*

$$\Psi \begin{cases} f_1(\dot{x}_1, \dots, \dot{x}_n, x_1, \dots, x_n) = 0, \\ \vdots \\ f_m(\dot{x}_1, \dots, \dot{x}_n, x_1, \dots, x_n) = 0, \end{cases} \quad \text{et la matrice} \quad \frac{\partial F}{\partial \dot{X}} = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial \dot{x}_1} & \cdots & \frac{\partial f_1}{\partial \dot{x}_n} \\ \vdots & & \vdots \\ \frac{\partial f_m}{\partial \dot{x}_1} & \cdots & \frac{\partial f_m}{\partial \dot{x}_n} \end{pmatrix}.$$

*Le système  $\Psi$  est dit implicite si la matrice  $\partial F / \partial \dot{X}$  est de rang inférieur au nombre de variables  $n$ . Cette matrice est appelée le symbole du système.*

Ainsi, un système est considéré comme implicite lorsque le théorème des fonctions implicites ne peut être utilisé pour définir localement un champ de vecteurs. Pour mémoire, rappelons qu'une simple dérivation permet d'associer à un système non linéaire du type  $f(\dot{x}, x) = 0$ , le système quasilineaire  $(\partial f / \partial \dot{x}) \ddot{x} + (\partial f / \partial x) \dot{x} = 0$ . De plus, tout système peut s'exprimer comme un système du premier ordre. Nous renvoyons le lecteur intéressé par les systèmes implicites à [23, 22, 140] et aux références incluses.

Dans la section suivante, nous présenterons une définition algébrique de l'observabilité et un analogue de la contrôlabilité dans le cadre de l'algèbre différentielle.

## 2.2 Une théorie algébrique des systèmes en automatique

La modélisation d'un phénomène consiste principalement à établir des relations différentielles de nature *algébrique*. En effet, les modèles faisant intervenir des fonctions liouvilliennes (fonctions trigonométriques, exponentielle) peuvent être réécrits sous une forme différentielle algébrique. Plus précisément, un modèle est représenté par les générateurs d'un idéal différentiel qui est le plus souvent premier (cf. Section 2.1.1 page 12). Dans ce cas, le modèle peut être associé à un corps différentiel. Plus généralement, il est intéressant d'utiliser une définition indépendante de toute représentation particulière qui permet en outre de considérer indistinctement des équations différentielles et des équations algébriques. Nous utilisons dans la suite la terminologie introduite par M. FLIESS dans [41].

**Définition 2.4** *Un système est une extension de corps différentiels  $\mathcal{F}/k$  de type fini. Ainsi, il existe une base de transcendance différentielle  $U = (u_1, \dots, u_m)$  de  $\mathcal{F}$  sur  $k$ .*

*L'entrée ou la commande d'un système est un ensemble d'éléments de  $\mathcal{F}$  qui forment une base de transcendance différentielle de  $\mathcal{F}$  sur  $k$ .*

*Une sortie d'un système est un ensemble arbitraire d'éléments du corps différentiel  $\mathcal{F}$ . Par définition, ces sorties sont différentiellement algébriques sur  $k\langle U \rangle$ .*

*Une réalisation du système  $\mathcal{F}/k$  consiste en la donnée de variables d'état  $X = (x_1, \dots, x_m)$  et d'entrées  $U$  telles que le corps  $\mathcal{F}$  soit algébrique (au sens non différentiel) sur  $k\langle U \rangle(X)$ . Ainsi, pour tout élément de  $\mathcal{F}$ , disons  $\hat{x}_1$ , il existe un entier  $i$  et une relation algébrique  $p(\hat{x}_1, X, U, \dots, U^{(i)}) = 0$ .*

Ces définitions précisent des propriétés intuitives. Par exemple, le nombre de commande d'un phénomène (i.e. la notion de degré de liberté) est un invariant numérique correspondant au degré de transcendance différentiel d'un corps par rapport à un corps de constantes. Il ne dépend pas de la réalisation considérée (voir [126] et les références incluses pour plus de précisions sur le problème de la réalisation en automatique). Le Théorème 1.1 page 4 montre qu'un système peut toujours être « réalisé » localement par une représentation d'état. Ce formalisme permet ainsi de présenter l'espace d'état comme indépendant d'un choix arbitraire d'une réalisation (cf. Remarque 2 page 14).

Intuitivement, deux systèmes sont équivalents s'il existe une transformation inversible qui met en relation leurs trajectoires respectives. La définition suivante est l'analogie de cette idée dans le cadre algébrique que nous adoptons.

**Définition 2.5** *Deux systèmes  $\mathcal{F}_1/k$  et  $\mathcal{F}_2/k$  dans une même extension universelle sont algébriquement équivalents si, et seulement si, chaque élément du corps  $\mathcal{F}_1$  est algébrique sur  $\mathcal{F}_2$  et réciproquement.*

Nous considérerons cette notion d'un point de vue plus applicatif dans le chapitre suivant. Pour l'instant, nous présentons les définitions algébriques de l'observabilité et de la platitude différentielle.

### 2.2.1 Observabilité algébrique – Systèmes différentiellement plats

Dans le cadre théorique présenté dans la section précédente, la notion d'observabilité algébrique locale peut être définie intrinsèquement de la manière suivante :

**Définition 2.6** ([84, 37]) *Soient un système  $\mathcal{F}/k$ , une sortie  $Y$  et une commande  $U$  de ce système. Un élément  $\eta$  du système  $\mathcal{F}/k$  est localement observable en fonction de  $Y$  et  $U$  si, et seulement si, cet élément est algébrique sur  $k\langle U, Y \rangle$ . Le système  $\mathcal{F}/k$  est observable si, et seulement si, le corps différentiel  $\mathcal{F}$  est algébrique sur  $k\langle U, Y \rangle$ .*

**Exemple 3.** Illustrons cette définition par le système (sans signification physique) suivant :

$$\begin{cases} \dot{x}_3 &= \theta x_1, \\ \dot{x}_2 &= x_3/x_2, \\ \dot{x}_1 &= x_2/x_1, \\ y &= x_1. \end{cases}$$

En dérivant suffisamment la sortie, on obtient les relations différentielles suivantes :

$$x_1 = y, \quad x_2 = y\dot{y}, \quad x_3 = y\dot{y}(\dot{y}^2 + y\ddot{y}), \quad \theta y = (\dot{y}^2 + y\ddot{y})^2 + y\dot{y}(3\dot{y}\ddot{y} + y\ddot{y}^3).$$

Ainsi, ce modèle est observable d'après la Définition 2.6 ; si la sortie  $y$  est connue, il est théoriquement possible de déterminer les variables d'état et le paramètre. De plus, comme les relations ci-dessus définissent une solution unique sur  $k\langle y \rangle$ , ce modèle est globalement observable (voir [84, 101] et le Chapitre 5 page 49 de ce mémoire).

En utilisant le Lemme 2.1 page 13, on peut associer à la représentation d'état ci-dessus un idéal différentiel premier  $\mathcal{I}$  de  $k\{\theta, x_1, x_2, x_3, y\}$ . Les relations obtenues par dérivations et éliminations montrent que l'extension de corps  $\text{Fr}(k\{\theta, x_1, x_2, x_3, y\}/\mathcal{I})/k\langle y \rangle$  est algébrique et que son polynôme de Hilbert différentiel est nul.

Cette définition algébrique de l'observabilité ne permet pas en l'état de différentier des quantités observables complexes et réelles. Par exemple, le paramètre  $\theta$  du système  $(\theta - y)(\theta^2 + y^2) = 0$  avec  $y$  dans  $\mathbb{R} \setminus \{0\}$  n'est pas globalement observable sur  $\mathbb{C}$  alors qu'il l'est sur  $\mathbb{R}$ . Nous renvoyons à [124] pour plus de référence sur les méthodes algébriques permettant cette distinction.

Dans le Chapitre 5 page 49, nous reviendrons en détails sur la propriété d'observabilité et les calculs nécessaires pour l'établir.

**Système différentiellement plat et contrôlabilité.** Considérons de nouveau l'Exemple 1 page 11 mais cette fois dans le cadre théorique développé ci-dessus. Les relations suivantes sont des éléments de l'idéal différentiel engendré par les équations (2.1) :

$$x_1 = (m_2/c)\ddot{y} + y, \quad x_2 = y, \quad u = (m_1 m_2/c)y^{(4)} + (m_1 + m_2)\ddot{y}. \quad (2.4)$$

Ainsi, on constate intuitivement que la fonction  $y$  et un nombre fini de ses dérivées permettent de paramétrer explicitement l'ensemble des trajectoires du système (2.1). Remarquons que cette paramétrisation ne nécessite pas l'intégration d'un système différentiel.

On ne sait pas caractériser les systèmes sous-déterminés *résolubles* sans intégration comme ci-dessus. La première référence à ce type de problèmes se trouve au début du XX<sup>ème</sup> siècle dans un article de D. HILBERT [64] relativement isolé dans son œuvre. Cet article traite de l'équation de Monge du second ordre  $\ddot{x} = \dot{u}^2$  et l'auteur montre qu'il n'est pas possible d'exprimer les solutions de cette équation sans avoir recours à l'intégration. Dans le cadre théorique des systèmes différentiels extérieurs, É. CARTAN prolonge dans [26] les travaux de D. HILBERT en caractérisant les équations de Monge du second ordre qui admettent une solution générale sans terme intégral.

La notion de platitude des systèmes dynamiques non linéaires de dimension finie a été introduite en automatique dans le début des années quatre-vingt dix par M. FLIESS, J. LÉVINE, Ph. MARTIN et P. ROUCHON dans [44]. Dans le cadre des systèmes algébriques d'équations différentielles ordinaires, on a la définition suivante :

**Définition 2.7** ([44]) *Un système  $\mathcal{F}/k$  est différentiellement plat si, et seulement si, il est équivalent (au sens de la définition 2.5 page 15) à un système purement différentiellement transcendant  $k\langle Y \rangle/k$ . Une base de transcendance différentielle  $Y$  qui engendre l'extension  $\mathcal{F}/k$  est appelée sortie plate du système  $\mathcal{F}/k$ .*

Les systèmes différentiellement plats, bien que cette propriété ne soit pas générique, s'avèrent être très courants en pratique dans les modèles relatifs à la mécanique, au génie chimique, au génie électrique, etc. Nous renvoyons à [44, 48] pour un large catalogue d'applications.

**Exemple 4.** Illustrons la Définition 2.7 par un système emprunté à Ph. MARTIN et N. PETIT :

$$\begin{cases} \dot{x}_1 &= x_3 - x_2 u, \\ \dot{x}_2 &= u - x_2, \\ \dot{x}_3 &= x_2 - x_1 + 2x_2(u - x_2), \\ y &= x_1 + x_2^2/2. \end{cases} \quad (2.5)$$

Quelques manipulations algébriques permettent de montrer que les relations suivantes :

$$u = \frac{y^3 + x_3 + x_2}{x_2 + 1}, \quad x_3 = x_2^2 + \dot{y}, \quad x_2 = x_1 + \ddot{y}, \quad x_1^2 + 2x_1(1 + \ddot{y}) + \ddot{y}^2 - 2y = 0, \quad (2.6)$$

sont dans l'idéal différentiel premier  $\mathcal{I}$  de  $k\{x_1, x_2, x_3, u, y\}$  engendré par le système (2.5). Le chapitre suivant présentera rigoureusement les méthodes algorithmiques employées. En considérant les coordonnées :

$$y_1 = y, \quad y_2 = \dot{y}, \quad y_3 = \ddot{y}, \quad v = y^{(3)},$$

et d'après la Définition 2.5, le système (2.5) est équivalent à la forme (dite de Brunovský) suivante :

$$\begin{pmatrix} \dot{y}_1 \\ \dot{y}_2 \\ \dot{y}_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} v. \quad (2.7)$$

Cette représentation d'état est une réalisation simple du système  $k\langle Y \rangle/k$ . Ainsi, d'après la Définition 2.7, le système (2.5) est plat et  $y$  est une sortie plate. Les relations (2.6) établissent une correspondance locale entre les trajectoires du système (2.5) et les trajectoires du système plus simple à étudier ci-dessus. Nous renvoyons le lecteur intéressé à [18, 125] pour plus de détail sur les formes de Brunovský.

Pour montrer que le système (2.5) est plat de sortie plate  $y$ , on aurait pu se contenter du calcul du polynôme de transcendance différentiel  $\text{Fr}(k\{x_1, x_2, x_3, u, y\}/\mathcal{I})/k\langle y \rangle$  défini dans la Section 1.2.1 page 7. Comme ce polynôme est nul, il n'y a pas de commandes supplémentaires nécessaires pour paramétriser ce système. De plus, l'absence de conditions initiales (i.e. la nullité de l'ordre de l'extension de corps associée au système) indique qu'il n'y a pas non plus d'intégration à effectuer pour paramétriser le système.

**Remarque 3.** Par définition, il n'y a pas unicité de la sortie plate et donc pas de paramétrage privilégié. C'est la physique qui « tranche » sachant que le nombre minimum de sorties plates est égal au nombre de commandes. Enfin, précisons que décider de la platitude d'un système reste un problème ouvert et que la principale difficulté pratique est de trouver des sorties plates adéquates.

### 2.2.2 Résultats connus – Planification de trajectoire

On dispose d'une condition nécessaire simple de nature géométrique de la platitude. Considérons un système  $\dot{X} = f(X, U)$ ; il est possible formellement de lui associer une variété définie dans un espace de coordonnées  $(P, X, U)$  par l'expression  $P = f(X, U)$  et de considérer la projection de cette variété sur le sous-espace de coordonnées  $(P, X)$ . Dans [120], P. ROUCHON établit la condition nécessaire de platitude suivante :

**Théorème 2.1 (Critère de la variété réglée)** *Si le système  $\dot{x} = f(x, u)$  est plat, alors la projection sur le  $(p, x)$ -espace de la sous-variété d'équation  $p = f(x, u)$  définie dans le  $(p, x, u)$ -espace est une sous-variété réglée pour tout  $x$ .*

**Exemple.** Illustrons ce théorème par le système suivant emprunté à P. ROUCHON.

$$\dot{x}_1 = u_1, \quad \dot{x}_2 = u_2, \quad \dot{x}_3 = u_1^2 + u_2^2.$$

Pour appliquer le théorème précédent, il nous faut étudier la variété définie par  $p_3 = p_1^2 + p_2^2$ . Or, il n'existe pas de vecteur  $(a_1, a_2, a_3)$  dans  $\mathbb{R}^3$  non nul, tel que  $p_3 + \lambda a_3 = (p_1 + \lambda a_1)^2 + (p_2 + \lambda a_2)^2$  pour tout réels  $\lambda$ . Cette variété n'est pas réglée sur  $\mathbb{R}$  et donc si le système associé à un sous corps de  $\mathbb{R}$  comme corps des constantes, il n'est pas différentiellement plat. En revanche, ce système est plat s'il est défini sur  $\mathbb{C}$ . En effet, considérons  $z_1 = x_1 + x_2\sqrt{-1}$  et  $z_2 = x_1 - x_2\sqrt{-1}$ ; on a  $\dot{x}_3 = \dot{z}_1\dot{z}_2$  par hypothèse. Posons  $y_1 = z_1$  et  $y_2 = z_3 - \dot{z}_1z_2$ . On a :  $z_2 = -\dot{y}_2/\dot{y}_1$  et  $z_1 = y_1$ . Il est ensuite aisé de déduire que les variables  $x_1, x_2$  et  $x_3$  ainsi que les commandes  $u_1$  et  $u_2$  s'expriment comme des fractions rationnelles sur  $\mathbb{C}$  de  $y_1, y_2$  et de leurs dérivées jusqu'à l'ordre trois.

Le critère de la variété réglée est pour l'instant le seul moyen systématique de montrer que certains systèmes avec plusieurs commandes ne sont pas plats. Nous renvoyons à [91] pour un ensemble de critères de platitude obtenus en imposant des formes bien précises aux modèles considérés.

**Planification de trajectoire.** Rappelons le théorème suivant tiré de [44] qui constitue un des principaux intérêts de la notion de platitude différentielle :

**Théorème 2.2** *Un système non linéaire est différentiellement plat si, et seulement si, il est équivalent par bouclage endogène à un système linéaire contrôlable.*

En général, il est difficile de déterminer une trajectoire résolvant un problème de contrôlabilité général du type de ceux présentés dans la Définition 2.2 page 13. Lorsqu'un modèle contrôlable est linéaire, cette tâche est plus aisée. La paramétrisation des trajectoires permet de ramener le problème de planification de trajectoire à la résolution d'un système algébrique non différentiel dans le cas ordinaire et d'un système différentiel ordinaire dans le cadre des dérivées partielles (cf. la troisième partie de ce mémoire).

**Exemple 1 (suite).** Considérons le problème de planification de trajectoire exposé page 11. Les relations (2.4) permettent de se ramener au problème suivant. Il nous faut déterminer une spécialisation de la sortie plate vérifiant les douze conditions suivantes :

$$\begin{aligned} x_1(\tau) &= (m_2/c)\ddot{y}(\tau) + y(\tau), & x_1(0) &= 0, & x_2(0) &= 1, & \dot{x}_1(\tau) &= 0 = (m_2/c)y(\tau)^{(3)} + \dot{y}(\tau), \\ x_2(\tau) &= y(\tau), & x_1(1) &= 1, & x_2(1) &= 2, & \dot{x}_2(\tau) &= 0 = \dot{y}(\tau), \quad \text{pour } \tau = 0 \text{ et } \tau = 1. \end{aligned}$$

Toute fonction  $y$  qui satisfait ces contraintes fournit une trajectoire du système. En effet, la commande  $u$  du modèle (2.1) est explicitement donnée comme polynôme différentiel dépendant de la

sortie plate. Si on cherche une fonction polynomiale du temps vérifiant ces conditions, on est ramené à résoudre un système en général algébrique et dans notre cas linéaire. Voici une solution possible :

$$y(t) = 1 - (c/2m_2)t^2 + 5(14m_2 + c/2m_2)t^4 - 3(28m_2 + c/m_2)t^5 + (70m_2 + c/m_2)t^6 - 20t^7.$$

Notons que ce choix n'assure pas la nullité des dérivées d'ordre supérieur. Pour ce faire, il faut utiliser des fonctions plateaux (cf. la troisième partie de ce mémoire). De plus, si on voulait résoudre un problème de trajectoire pour le modèle (2.5) page 17, la sortie plate devrait vérifier la condition supplémentaire  $1 + 2(y + \dot{y}) > 0$  (il s'agit du discriminant de la dernière des relations (2.6)). Nous verrons dans la dernière partie de ce mémoire d'autres exemples de dimension infinie.

En utilisant des techniques standard de bouclage, il est possible de s'astreindre à respecter une trajectoire définie à l'avance (voir [44] pour plus de détails). Cette approche est qualifiée de boucle fermée et, contrairement à la planification de trajectoire présentée dans ce mémoire, elle tient compte de perturbations agissant sur les modèles. D'autre part, il est possible d'imposer d'autres contraintes au problème de planification ; les seules limitations sont la possibilité de résoudre le problème équivalent pour la forme de Brunovský et la complexité des calculs nécessaires.

**Formalisme et platitude différentielle.** Schématiquement, la platitude différentielle repose sur une idée géométrique consistant à utiliser l'équivalence des trajectoires des systèmes plats avec celle de systèmes simples à contrôler comme par exemple les formes de Brunovský. Notons que ce point de vue présente des analogies avec la notion de linéarisation exacte par bouclage statique présentée dans [68] et qui est valide dans un cadre restreint à une seule commande.

Il est possible de développer l'étude de la platitude différentielle dans d'autres formalismes comme le cadre de l'algèbre différentielle extérieure [99, 111] ou celui des diffiétés de Vinogradov [46]. Par ailleurs, cette notion a été étendue aux systèmes linéaires décrits par des équations aux dérivées partielles dans [49, 47, 78, 77] par M. FLIESS, J. LÉVINE, Ph. MARTIN, H. MOUNIER, P. ROUCHON. Nous donnons un aperçu de ces travaux dans la Section 6.1.2 page 67. Dans la dernière partie de ce mémoire, nous montrerons comment le point de vue de la platitude différentielle peut être appliqué à certains systèmes non linéaires gouvernés par des équations aux dérivées partielles.

Le formalisme de l'algèbre différentielle est un cadre théorique commode qui a permis d'étendre la notion de platitude différentielle aux modèles linéaires de phénomènes dynamiques avec retards (voir la thèse d'H. MOUNIER [98]). De plus, les méthodes effectives d'algèbre différentielle permettent de mener à bien des calculs difficiles à mettre en œuvre autrement.



## Chapitre 3

# Méthodes effectives

Dans le chapitre précédent, nous avons introduit la représentation d'un modèle par un système i.e. une extension de corps différentiels. En l'état, cette représentation n'est pas algorithmique. Par ailleurs, pour simplifier l'exposé des chapitres précédents, nous avons présenté des calculs utilisant des différentiations et des éliminations successives sans présenter de justifications. Pour se convaincre qu'il est nécessaire d'utiliser des techniques d'algèbre différentielle effective, considérons la situation suivante :

**Exemple 5.** Soit  $\mathcal{I}$  l'idéal différentiel de  $k\{x, y\}$  engendré par le modèle emprunté à [35, 51] :

$$\begin{cases} \dot{x} &= x, \\ y &= x^2 + x. \end{cases} \quad (3.1)$$

Considérons le processus de complétion (*fautif* mais pédagogique) suivant. Par différentiation, on montre que le polynôme<sup>1</sup>  $\dot{y} = 2x\dot{x} + \dot{x}$  est dans  $\mathcal{I}$ . Par élimination, on montre que  $\dot{y} = 2x^2 + x$  et  $x = 2y - \dot{y}$  sont dans  $\mathcal{I}$ . Ainsi, les relations  $y = (2y - \dot{y})(2y - \dot{y} + 1)$  et  $x = 2y - \dot{y}$  sont des éléments de  $\mathcal{I}$ . On pourrait donc penser que le modèle

$$\begin{cases} (2y - \dot{y})(2y - \dot{y} + 1) - y = 0, \\ x = 2y - \dot{y}, \end{cases} \quad (3.2)$$

est équivalent au modèle (3.1). Or,  $(y = -1/4, x = -1/2)$  est une solution de l'idéal différentiel engendré par ces équations et il n'y a pas de trajectoire du modèle (3.1) qui corresponde à cette solution. Ainsi, pour avoir une représentation équivalente au sens de la Définition 2.5 page 15, il nous faut ne pas prendre en compte la solution singulière, et ajouter l'inégalité  $x \neq -1/2$  au modèle (3.2).

Le premier objectif du présent chapitre est d'introduire les notions nécessaires pour représenter et manipuler effectivement un système. Nous présenterons notamment l'algorithme Rosenfeld-Gröbner initié par F. BOULIER et quelques unes des utilisations possibles en automatique. On trouvera des exposés plus détaillés ainsi que d'autres références dans [10, 123, 67] pour l'aspect algorithmique et dans [35, 85, 100] pour l'aspect automatique.

Comme dans le cadre non différentiel, la complexité en *moyenne* des méthodes de réécriture employées en algèbre différentielle effective est très mal connue et les bornes théoriques disponibles sont exponentielles en le nombre de variables. Nous présenterons quelques résultats de complexité

<sup>1</sup>En fait,  $(2x + 1)\dot{x} - \dot{y} = 0$  et il faut considérer un scindage suivant que l'initial  $2x + 1$  est nul ou pas.

relatifs aux problèmes d'élimination différentielle. Par ailleurs, notons que les algorithmes actuellement implantés d'élimination différentielle n'ont pas, en pratique, des performances analogues à ceux de leurs homologues non différentiels de type calculs de base de Gröbner.

Les contributions présentées dans les chapitres suivants reposent sur la représentation des objets algébriques par des calculs d'évaluation i.e. par un programme qui les évalue en un point du corps de base effectif. Dans la Section 3.2 page 30, nous introduisons les définitions, les propriétés nécessaires et notamment les résultats concernant la complexité de la différentiation.

### 3.1 Représentation du radical d'un idéal différentiel finiment engendré

Un théorème de A. TRESSE montre que chaque système infini d'équations *linéaires* aux dérivées partielles, peut être engendré à partir d'un système fini de telles équations en utilisant la différentiation et l'élimination (cf. [142]). Depuis ce résultat datant de 1894, un grand nombre de travaux visent à construire par un algorithme une *représentation* effective des variétés différentielles introduites dans le Chapitre 1 page 3. Cette représentation doit permettre, par exemple, de décider du vide ou de calculer effectivement des invariants numériques comme le polynôme de transcendance différentiel. Schématiquement, les algorithmes proposés sont basés sur un processus de *complétion* mêlant différentiations et éliminations successives.

Pour ce faire, ces algorithmes profitent des résultats obtenus sur le problème de l'élimination effective dans le cadre non différentiel tout en se heurtant à la complexité intrinsèque du problème. En effet, dans [94], E.W. MAYR et A.R. MEYER ont exhibé un système algébrique défini par des relations de bas degrés entre des générateurs libres et qui présente des syzygies de degré élevé.

**Théorème 3.1 ([32])** *Soient un corps  $k$  et deux entiers  $n$  et  $d$  tels que  $n$  soit strictement positif et  $d$  soit supérieur à 3. Soit  $A$  l'anneau de polynômes  $k[x_i, S, F, B]$  à  $r = 8m + 2\lceil(n-1)/(d-2)\rceil + 8$  variables. Il existe un idéal  $J$  engendré par  $r$  polynômes de degrés plus petits que  $d$  tel que :*

- i.  $S - B^N F \in J$  avec  $N = d^{2^n}$  ;*
- ii. soit  $\phi : A \rightarrow k[B]$  l'homomorphisme obtenu en spécialisant à zéro toutes les variables différentielles de  $B$ . Si  $a \in A$  vérifie  $aF \in J$  alors  $\phi(a) = 0$ .*

On obtient ainsi une minoration pour les bornes supérieures des degrés des syzygies entre polynômes de degrés et de nombre de variables donnés. Ceci montre que les phénomènes de croissance *hyper-exponentielle* rencontrés dans les algorithmes utilisés en algèbre effective ne sont pas entièrement dus à l'imperfection des algorithmes connus mais peuvent être quelquefois imputés à la complexité intrinsèque des problèmes considérés. Nous verrons dans la Section 3.1.3 page 29 un analogue de ce résultat dans le cadre différentiel.

**Une généralisation *directe* des méthodes effectives non différentielles ?** La construction algorithmique d'une représentation d'un idéal différentiel rencontre des difficultés qui n'existent pas dans le cadre non différentiel. En effet, nous avons indiqué dans la Section 1.1.2 page 5 que certaines propriétés d'algèbre non différentielle comme le théorème de la base finie de Hilbert ne se transposent pas directement dans le cadre différentiel. Citons comme exemple le résultat suivant de G. GALLO, B. MISHRA et F. OLLIVIER tiré de [54] :

**Théorème 3.2** *Il existe des idéaux différentiels définis par des ensembles non récursifs de générateurs. Il n'y a pas d'algorithme permettant de décider si un polynôme différentiel donné est un élément d'un tel idéal.*

De plus, la possibilité de décider de l'appartenance d'un polynôme différentiel à un idéal différentiel non radical de type fini est un problème encore ouvert à ce jour.

Cet état de fait a des conséquences algorithmiques importantes, notamment l'impossibilité de transposer directement les méthodes effectives développées dans un cadre algébrique non différentiel.

Au milieu des années soixante, H. HIRONAKA a introduit la notion de *base standard* d'un idéal dans un anneau de polynômes. À la suite des travaux fondateurs de B. BUCHBERGER et des améliorations algorithmiques apportées durant ces trente dernières années, le calcul effectif des bases standard est devenu une fonctionnalité importante et courante de la majorité des logiciels de calcul symbolique (cf. [55, 31]).

S'inspirant du cadre algébrique classique, différents auteurs ont proposé des méthodes d'éliminations dans le cadre différentiel et notamment des généralisations de la notion de base standard aux idéaux différentiels (cf. les travaux de G. CARRÀ-FERRO [24, 25], E.L. MANSFIELD [87], F. OLLIVIER [101] et les références incluses). Le théorème de la base finie de Hilbert n'étant pas applicable en l'état, ces travaux présentent deux types d'inconvénients. D'une part, les bases standard différentielles ainsi calculées sont en général de cardinal infini et, dans le cas contraire, on ne peut pas garantir qu'il s'agisse bien d'une base standard (voir [102] pour un état des lieux plus précis). Notons que d'autres approches effectives ne reposant pas sur l'algèbre différentielle ont également été proposées (voir [117] et les références incluses). Ces approches ne sont pas aussi générales que la méthode que nous présentons maintenant.

Face aux difficultés que nous venons juste d'évoquer, une stratégie possible consiste à renforcer les propriétés de l'idéal différentiel que l'on cherche à représenter en imposant qu'il soit premier ou *régulier*. De plus, plutôt que d'utiliser une représentation de type « base standard », il est possible d'utiliser la notion d'*ensemble caractéristique*.

### 3.1.1 Ensemble caractéristique – Algorithme Rosenfeld-Gröbner

Rappelons qu'une solution d'un système différentiel d'équations  $\Sigma = 0$  et d'inéquations  $S \neq 0$  dans un anneau de polynômes différentiels  $k\{x_1, \dots, x_n\}$  est la donnée d'une extension de corps  $\mathcal{F}/k$  et d'un  $n$ -uplets d'éléments de ce corps qui annule tous les éléments de  $\Sigma$  et aucun des éléments de  $S$  (voir la Section 1.1.2 page 6 pour la notion de solution et le modèle (3.2 page 21) pour un exemple).

D'après cette définition, pour représenter les solutions d'un système différentiel, il faut représenter l'idéal différentiel  $[\Sigma] : S^\infty$  qui est associé à la variété algébrique différentielle  $\mathcal{V}(\Sigma) \setminus \mathcal{V}(S)$  (cf. Proposition 1.2 page 7). Il nous reste donc à donner maintenant un sens au terme représenter.

En toute généralité, une représentation doit pouvoir décider de l'existence d'une solution. Ainsi, d'après le Nullstellensatz différentiel (cf. Théorème 1.4 page 7), la représentation de l'idéal différentiel  $[\Sigma] : S^\infty$  doit permettre de décider si 1 est un élément de l'idéal ou pas. Plus généralement, cette représentation doit permettre de tester l'appartenance d'un polynôme différentiel à un idéal différentiel. De plus, si on cherche une représentation effective, ce test ne doit nécessiter que les opérations de base d'un corps effectif. Très schématiquement, pour obtenir une telle représentation, on se fixe un ordre total sur les indéterminées de notre algèbre de polynômes différentiels et un ensemble de règles de réécritures. Nous décrivons cette construction dans la suite de cette section.

**Point de vue combinatoire.** Historiquement, c'est avec les travaux de A. TRESSE, C. RIQUIER et M. JANET au début du XX<sup>ème</sup> siècle que sont introduits en algèbre différentielle les premiers résultats algorithmiques reposant sur la notion de graduation différentielle. Dans la suite, nous

réservons le mot *ordre* pour désigner l'ordre de dérivation et, en suivant l'usage récemment introduit par F. BOULIER, nous utilisons le mot *arrangement* dans le sens suivant :

**Définitions 3.1** *Un arrangement est un ordre total  $\prec$  sur l'ensemble  $\Gamma$  des indéterminées différentielles qui est compatible avec l'action de la dérivation. Ainsi, pour tout couple  $(u, v)$  dans  $\Gamma^2$ , la relation  $u \succ v$  implique que  $\delta(u) \succ \delta(v)$  et on a  $\delta(v) \succ v$ . Un arrangement respecte l'ordre de dérivation si, et seulement si, pour tout couple  $(u, v) \in \Gamma^2$  et deux entiers  $i$  et  $j$ , on a  $i > j \Rightarrow \delta^i(u) \succ \delta^j(v)$ . Un arrangement est dit d'élimination si, et seulement si, pour tout couple  $(u, v)$  dans  $\Gamma^2$  et deux entiers  $i$  et  $j$ , on a  $u \succ v \Rightarrow \delta^i(u) \succ \delta^j(v)$ .*

*Soit  $p$  un polynôme différentiel non constant. La dérivée dominante de  $p$  notée  $Ld(p)$  est le plus grand élément  $\delta^j(u)$  de  $\Gamma$  intervenant dans  $p$ . La variable principale  $Lv(p)$  est dans ce cas la variable  $u$ . Un arrangement peut être étendu en un préordre sur les polynômes différentiels. Un polynôme  $p$  est plus grand qu'un polynôme  $q$  si, et seulement si,  $Ld(p) \succ Ld(q)$  ou si  $Ld(p) = Ld(q) = v$  et  $\deg(p, v) > \deg(q, v)$ . Par abus de notation, on désigne ce préordre par  $\prec$ . Deux polynômes  $p$  et  $q$  peuvent ne pas être plus grand l'un que l'autre ; dans ce cas, on note  $p \sim q$ .*

*Soient  $p$  un polynôme dans  $\mathcal{F}\{X\} \setminus \mathcal{F}$ , son indéterminée principale  $u$  et  $d$  le degré de  $p$  en  $u$ . L'initial  $I_p$  de  $p$  est le coefficient de  $u^d$  dans  $p$ . Le séparant  $S_p$  de  $p$  est le polynôme  $\partial p / \partial u$ . Si  $\Sigma$  est un ensemble fini de polynômes différentiels alors  $H_\Sigma$  désigne le produit des initiaux et des séparants des polynômes de cet ensemble.*

Les notions ci-dessus dépendent d'un choix arbitraire et ne sont en rien intrinsèques. Un arrangement est un bon ordre i.e. il n'existe pas de suite décroissante infinie d'éléments de  $\Gamma$  (cf. page 49 de [75]).

À partir de ces définitions, J.F. RITT a introduit la notion d'ensemble autoréduit dans le cadre différentiel.

**Définitions 3.2** *Un polynôme différentiel  $p$  est réduit par rapport à un polynôme différentiel  $q$  si  $p$  ne possède aucune dérivée de  $Ld(q)$  et si  $\deg(p, Ld(q)) < \deg(q, Ld(q))$ . Soit  $\Sigma$  un ensemble de relations d'un anneau  $\mathcal{F}\{X\}$  de polynômes différentiels, un polynôme  $p$  est réduit par rapport à  $\Sigma$  s'il est réduit par rapport à chaque élément de  $\Sigma$ . L'ensemble  $\Sigma$  est autoréduit si chaque élément  $p$  de  $\Sigma$  est réduit par rapport à  $\Sigma \setminus \{p\}$  et si l'intersection de  $\Sigma$  et  $\mathcal{F}$  est nulle.*

*À partir d'un préordre compatible défini sur un anneau de polynômes différentiels, on définit un préordre  $\triangleleft$  sur les ensembles autoréduits. Soient  $\Sigma_1 = \{p_1, \dots, p_a\}$  et  $\Sigma_2 = \{q_1, \dots, q_b\}$  deux ensembles autoréduits,  $\Sigma_1 \triangleleft \Sigma_2$  si, et seulement si, une des deux conditions suivantes est satisfaite :*

- i. il existe un entier  $j < \inf(a, b)$  tel que  $p_i \sim q_i$  pour  $i < j$  et  $p_j \triangleleft q_j$*
- ii.  $a > b$  et  $p_j \sim q_j$  pour  $j < b$ .*

Un ensemble autoréduit est nécessairement fini et tous les éléments d'un tel ensemble ont des dérivées dominantes distinctes : on parle d'ensemble triangulaire. Par ailleurs, deux ensembles autoréduits  $\Sigma_1$  et  $\Sigma_2$  peuvent être équivalents mais le préordre  $\triangleleft$  est *artinien* (cf. § I.10 dans [75]). Cette propriété permet de définir la notion d'*ensemble caractéristique*.

**Définition 3.3** *Soit  $\Sigma$  un ensemble de relations d'un anneau de polynômes différentiels. Un ensemble caractéristique de  $\Sigma$  est un élément minimal pour l'ordre  $\triangleleft$  de l'ensemble de tous les ensembles autoréduits formés par les éléments de  $\Sigma$ . Cet élément existe car l'ordre  $\triangleleft$  est artinien.*

Dans [118], J.F. RITT a utilisé la notion de réduction d'un polynôme différentiel par un autre. Comme dans le cadre non différentiel, il s'agit d'une opération de type division euclidienne ; si ce n'est que dans le cadre différentiel, il faut parfois différentier les polynômes par lesquels on divise. Nous n'utilisons pas ce type de réécriture dans ce mémoire et nous renvoyons donc à § I.9 dans [75] pour un exposé complet et les démonstrations des assertions suivantes :

**Théorème 3.3** Soient une algèbre de polynômes différentiels  $\mathcal{R} = \mathcal{F}\{X\}$  et  $\Theta$  le monoïde commutatif libre engendré par les dérivations. Considérons un ensemble autoréduit  $\mathcal{A} = \{A_1, \dots, A_r\}$  et  $P$  un polynôme de  $\mathcal{F}\{X\}$ . Il existe un polynôme  $Q$  de  $\mathcal{R}$  réduit par rapport à  $\mathcal{A}$ , des polynômes  $M_1, \dots, M_s$  de  $\mathcal{R}$  et des entiers  $i_1, \dots, i_r, j_1, \dots, j_r$  tels que

$$\left( \prod_{l=1}^r I_{A_l}^{i_l} S_{A_l}^{j_l} \right) P - Q = \sum_{h=1}^s M_h \theta_h A_{k_h}, \quad \text{où } \theta_1 A_{k_1} \leq P \text{ et } \theta_h A_{k_h} \leq \theta_{\bar{h}} A_{k_{\bar{h}}} \text{ si } \bar{h} \leq h.$$

Dans ce cas, on dira que  $P$  se réduit à  $Q$  modulo  $\mathcal{A}$ . Si  $\mathcal{A}$  est un ensemble caractéristique d'un idéal  $\mathcal{I}$ , alors tout polynôme  $P$  dans  $\mathcal{I}$  se réduit à zéro modulo  $\mathcal{A}$ .

Si  $\mathcal{A}$  est un ensemble caractéristique d'un idéal différentiel premier  $\mathcal{I}$  alors tout polynôme  $P$  de  $\mathcal{R}$  se réduit à zéro modulo  $\mathcal{A}$  si, et seulement si,  $P$  est dans  $\mathcal{I}$ .

Cette dernière propriété montre que pour un idéal différentiel premier, un ensemble caractéristique est une représentation adéquate. J.F. RITT a proposé un algorithme permettant de calculer un ensemble caractéristique mais il nécessite la factorisation sur des extensions du corps de base. Cet algorithme partiellement effectif permet la décomposition d'un idéal différentiel ordinaire de type fini en composantes irréductibles associées à des idéaux différentiels premiers.

Remarquons que la notion d'ensemble caractéristique est somme toute naturelle en pratique comme le montre le lemme et l'exemple suivant :

**Lemme 3.1** Une représentation d'état est un ensemble caractéristique pour un arrangement qui respecte l'ordre de dérivation et tel que les variables d'état soient plus grandes que les sorties et les entrées.

**Exemple.** La notion d'ensemble caractéristique est aussi définie pour les algèbres différentielles partielles. L'équation aux dérivées partielles dite de Burger ( $\omega_{xx} - \omega_t - \omega\omega_x = 0$ ) est un ensemble caractéristique pour un arrangement qui respecte l'ordre de dérivation. Cette propriété permet de calculer une solution de cette équation par un développement en séries (voir Proposition 6.1 page 68).

En s'inspirant d'un algorithme d'élimination de A. SEIDENBERG [132], F. BOULIER a obtenu dans [8] un algorithme n'utilisant que les opérations usuelles sur un corps de base effectif.

**Idéaux différentiels réguliers et algorithme Rosenfeld–Gröbner.** Pour circonvenir le problème de factorisation, F. BOULIER a proposé de considérer une décomposition en *idéaux différentiels réguliers*. Ce résultat repose sur un lemme dû à D. LAZARD, la notion de cohérence des ensembles autoréduits et des calculs de base standard. La notion de cohérence d'un ensemble est une notion d'algèbre différentielle partielle liée à la notion de *paire critique*. Dans le cadre différentiel ordinaire que nous utilisons, tout ensemble autoréduit est cohérent ; nous ne donnons pas plus de précisions sur ce point et nous renvoyons à [10] pour un exposé complet.

Un polynôme différentiel peut être considéré comme un polynôme non différentiel. Un ensemble de telles relations peut admettre des solutions algébriques mais pas de solution différentielle. Dans [119], A. ROSENFELD établit un lemme qui relie l'existence de solutions d'un ensemble différentiel algébrique (autoréduit et cohérent) à l'existence de solutions d'un système algébrique non différentiel.

**Théorème 3.4** Soient  $\mathcal{R}$  un anneau de polynômes différentiels,  $\mathcal{A}$  un sous-ensemble autoréduit et cohérent et  $p$  un polynôme de  $\mathcal{R}$  réduit par rapport à  $\mathcal{A}$ . Le polynôme  $p$  est un élément de l'idéal différentiel  $[\mathcal{A}] : H_{\mathcal{A}}^{\infty}$  si, et seulement si, c'est un élément de l'idéal non différentiel  $(\mathcal{A}) : H_{\mathcal{A}}^{\infty}$ .

Rappelons que l'on sait tester effectivement l'appartenance à un idéal non différentiel par l'algorithme de B. BURCHBERGER par exemple. Dans la terminologie de J.F. RITT, une solution d'un ensemble autoréduit  $\mathcal{A}$  est régulière si elle n'annule pas le produit  $H_{\mathcal{A}}$  des initiaux et des séparants de  $\mathcal{A}$ . Ce point de vue induit les définitions suivantes :

**Définitions 3.4** *Considérons un ensemble d'équations  $\Sigma$  et d'inéquations  $S$  dans une algèbre de polynômes. Une solution d'un ensemble autoréduit  $\Sigma$  qui n'annule pas  $H_{\Sigma}$  est dite régulière.*

*Un ensemble  $(\Sigma = 0, S \neq 0)$  est dit régulier si, et seulement si,  $\Sigma$  est un ensemble autoréduit cohérent, les relations  $S$  sont réduites par rapport à  $\Sigma$  et  $S$  contient le produit des initiaux et des séparants de  $\Sigma$ .*

*Un idéal différentiel  $\mathcal{I}$  est régulier si, et seulement si, il existe un ensemble régulier d'équations  $\Sigma$  et d'inéquations  $S$  tel que  $\mathcal{I} = [\Sigma] : H_{\Sigma}^{\infty}$ .*

Pour illustrer cette définition, remarquons que dans l'Exemple 5 page 21, la solution donnée par les relations  $(y = -1/4, x = -1/2)$  n'est pas régulière pour l'arrangement d'élimination  $x \succ y$  qui est utilisé. En effet, elle annule le séparant  $2x + 1$  et il faut donc ajouter une inéquation pour rejeter cette solution. Les propriétés suivantes sont tirées de [10] et permettent de préciser algébriquement la notion d'idéaux différentiels réguliers.

**Proposition 3.1** *Tout idéal différentiel premier est régulier. Tout idéal régulier est radiciel.*

Les idéaux différentiels réguliers peuvent être représentés par un ensemble caractéristique ; nous renvoyons à [11] pour un exposé complet de l'algorithme Rosenfeld-Gröbner et plus de références.

**Théorème 3.5** *Soient  $\Sigma$  un ensemble de relations et  $S$  un ensemble d'inéquations définies dans un anneau de polynôme  $\mathcal{A}$ . Il existe un algorithme qui calcule un nombre fini d'idéaux différentiels réguliers représentés par des ensembles caractéristiques  $C_i$  avec  $i$  compris entre 1 et  $m$  et tels que :*

$$\mathcal{P} = \sqrt{[\Sigma] : S^{\infty}} = \bigcap_{i=1}^m [C_i] : H_{C_i}^{\infty}.$$

*Seuls les opérations usuelles dans le corps de base sont utilisées. Cette décomposition peut être redondante ; elle permet de décider de l'appartenance à  $\mathcal{P}$ .*

Cet algorithme a été implanté et constitue la base du « paquetage » `difalg` [34] dans la bibliothèque standard du logiciel `maple` [96]. Signalons les améliorations théoriques et pratiques suivantes :

**Remarque 4.** Dans [67], É. HUBERT a montré qu'il est possible de découpler les calculs différentiels et algébriques. Une fois calculé un ensemble autoréduit cohérent, on peut décomposer la variété algébrique correspondante sans devoir à nouveau tester la cohérence. Par ailleurs, nous renvoyons au travail d'É. HUBERT [65, 66] pour l'étude des solutions singulières en algèbre différentielle.

En s'inspirant d'un algorithme de changement de base dans le cadre non différentiel (FGLM [40]), F. BOULIER a présenté dans [9] un algorithme permettant, connaissant un ensemble caractéristique, de calculer un autre ensemble caractéristique pour un arrangement différent. Dans [13], les auteurs proposent un autre algorithme pour ce type de calcul en considérant des idéaux différentiels premiers. Nous présentons dans le Théorème 3.9 page 30 un résultat de complexité dû à B. SADIK. Par ailleurs, dans [12], les auteurs clarifient une notion de représentation canonique introduite dans [11].

Malgré de remarquables progrès, certaines questions d'algèbre différentielle ne sont en aucun cas résolues. Ainsi, à ce jour et à une exception près [105], les problèmes ouverts que J.F. RITT a rassemblés à la fin de son ouvrage [118] en 1950 restent tous d'actualité.

**Calcul de séries formelles solutions et du polynôme de Hilbert différentiel.** Le formalisme que nous venons d'introduire suffit à décider effectivement de l'existence de solutions d'un système algébrique différentiel. De plus, il fournit comme sous-produit une représentation permettant de calculer le développement en séries formelles des éventuelles solutions (cf. § I.2 dans [112]).

**Théorème 3.6** *Soit  $\mathcal{A}$  un ensemble autoréduit cohérent dans un anneau de polynômes différentiels  $k\{x_1, \dots, x_m\}$  et un ensemble de conditions initiales n'annulant pas les séparants de  $\mathcal{A}$ . Il existe un unique  $m$ -uplet de séries formelles  $f$  vérifiant des conditions initiales données et tel que  $\mathcal{A}(f) = 0$ . De plus, il existe un algorithme permettant de calculer les coefficients de  $f$ .*

De même, après le calcul d'un ensemble caractéristique il est possible de déterminer la fonction de transcendance différentielle associée à un idéal différentiel premier (cf. Section 1.2.1 page 7, pour sa définition). Si on considère une algèbre différentielle à  $n$  indéterminées et  $m$  dérivations, on a :

**Théorème 3.7 (cf. § II.2 dans [75])** *Soient  $[\mathcal{I}]$  un idéal différentiel premier non trivial de fonction de transcendance  $\mathcal{H}(\cdot)$  et  $\mathcal{A}$  un ensemble caractéristique de  $[\mathcal{I}]$  pour un arrangement qui respecte l'ordre de dérivation. On identifie l'ensemble des indéterminées dérivées avec  $[1, \dots, n] \times \mathbb{N}^m$  et on note  $I$  le complémentaire de l'ensemble des dérivées dominantes des polynômes de  $\mathcal{A}$ .*

*Pour tout entier  $r$ , le nombre de points de  $I \cap [1, \dots, n] \times [0, \dots, r]^m$  est égal à  $\mathcal{H}(r)$ .*

Comme autre exemple d'utilisation des techniques d'élimination signalons que dans [151], Wu Wen-Tsün présente un calcul d'élimination différentielle permettant d'obtenir les lois de Newton à partir des trois lois de Kepler. Dans la section suivante, nous présentons quelques applications possibles de l'algorithme Rosenfeld–Gröbner à la résolution de problèmes d'automatique.

### 3.1.2 Utilisation en automatique

Les méthodes d'algèbre différentielle ont été introduites en automatique au milieu des années quatre-vingt notamment avec les travaux de M. FLIESS [41], T. GLAD et L. LJUNG [84] ; cette approche a été poursuivie sous le point de vue algorithmique notamment par S. DIOP [36], F. OLLIVIER [101] et K. FORSMAN [50]. C'est l'une des motivations du regain d'intérêt pour les méthodes effectives en algèbre différentielle ces dix dernières (voir les travaux [114, 8, 122, 65, 112, 140, 117, 88, 100] et les références incluses) ; nous avons exposé une partie des résultats obtenus dans la section précédente. Nous montrons maintenant quelques applications en automatique. Pour illustrer notre propos, nous considérons le modèle (2.3) page 14 que nous avons modifié à dessein pour le rendre algébrique.

$$\begin{aligned}
 \dot{m} + L_u(p_2 - p_R) + \frac{C_u}{K_{av}}(p_5 - p_4) &= 0, & \text{ligne amont,} \\
 K_1 \dot{m} - am^2 - b \frac{\omega}{\omega_0} m - c \left(\frac{\omega}{\omega_0}\right)^2 - \rho K_2 \dot{\omega} + p_3 - p_2 &= 0, & \text{pompe,} \\
 \dot{m} + L_d(p_4 - p_3) + \frac{C_d}{K_{av}}(p_5 - p_4) &= 0, & \text{ligne aval,} \\
 p_5 + \theta \dot{p}_5 - \frac{C^*}{A_c} m &= 0, & \text{combustion.}
 \end{aligned} \tag{3.3}$$

Les indéterminées  $p_R$ ,  $p_2$ ,  $p_3$ ,  $p_4$ ,  $p_5$  et  $m$ ,  $\omega$  représentent des quantités variables en fonction du temps (des pressions, un débit et une vitesse de rotation) et on suppose que les autres symboles représentent des constantes. Ce modèle est simple et en grande partie linéaire mais le lecteur peut se convaincre en consultant les exemples de l'Annexe B page 101 que très vite les calculs deviennent infaisables à la main. Le schéma 3.1 permet d'illustrer le phénomène modélisé par les équations (3.3). Nous allons montrer que le choix d'un arrangement dépend du problème de contrôle à résoudre et de la nature physique du phénomène en jeu.

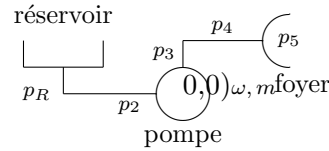


FIG. 3.1 – Schéma simplifié d'une pompe dans un moteur propulsif.

**Réalisation d'un système.** Si on cherche à exprimer une représentation d'état de ce système, considérer  $p_R$  (pression du réservoir),  $p_2$  (pression amont) et  $\omega$  (vitesse de rotation de la pompe) comme des commandes est un choix raisonnable. Le calcul d'un ensemble caractéristique du modèle (3.3) pour l'arrangement  $p_3 \succ p_4 \succ p_5 \succ m \succ \{\omega, p_2, p_R\}$  permet d'obtenir une représentation d'état en considérant  $p_5$  (la pression du foyer),  $m$  (le débit),  $p_3$  (la pression d'aval) et  $p_4$  (la pression d'injection) comme des variables d'état. Elle est composée de deux équations différentielles et de deux paramétrisations non différentielles.

$$\begin{aligned}
G &= w_0^2(L_d K_{av} + L_d C_u K_1 - C_d + C_u), \\
G p_3 &= -w_0^2 K_1 K_{av} L_u p_R L_d + w_0^2 K_1 K_{av} L_u p_2 L_d + w_0 b m C_u + w_0 K_{av} b m L_d + w_0^2 K_{av} a m^2 L_d + K_{av} c w^2 L_d \\
&\quad + w_0^2 K_{av} p_2 L_d + w_0^2 K_{av} \rho K_2 \dot{w} L_d - w_0^2 a m^2 C_d + w_0^2 K_1 L_d C_u p_5 - w_0^2 K_1 C_d L_u p_2 + w_0^2 K_1 C_d L_u p_R \\
&\quad + w_0^2 \rho K_2 \dot{w} C_u + w_0^2 p_2 C_u - w_0^2 \rho K_2 \dot{w} C_d - w_0^2 p_2 C_d + c w^2 C_u - c w^2 C_d + w_0^2 a m^2 C_u - w_0 b m C_d, \\
G p_4 &= K_{av} w_0^2 L_u p_2 + w_0^2 K_1 K_{av} L_u p_2 L_d - w_0^2 K_1 K_{av} L_u p_R L_d - K_{av} w_0^2 L_u p_R + w_0^2 K_{av} \rho K_2 \dot{w} L_d \\
&\quad + w_0^2 K_{av} a m^2 L_d + w_0 K_{av} b m L_d + K_{av} c w^2 L_d + w_0^2 K_{av} p_2 L_d + w_0^2 K_1 L_d C_u p_5 - w_0^2 C_d p_5 + w_0^2 C_u p_5, \\
\theta A_c \dot{p}_5 &= -p_5 A_c - C^* m, \\
G \dot{m} &= w_0^2 C_d L_u p_2 - w_0^2 L_d C_u p_5 + c L_d C_u w^2 + L_d \rho K_2 w_0^2 C_u \dot{w} + a L_d w_0^2 C_u m^2 + L_d w_0^2 C_u p_2 + b L_d w_0 C_u m \\
&\quad - w_0^2 C_d L_u p_R - w_0^2 K_{av} L_u L_d p_2 + w_0^2 K_{av} L_d L_u p_R.
\end{aligned}$$

**Comportement entrée-sortie d'un système.** En gardant le choix ci-dessus des entrées, on peut considérer la pression  $p_5$  du foyer comme une sortie. Il est intéressant de trouver une relation différentielle entre cette sortie et les commandes en excluant de l'expression le débit  $m$  et les pressions d'aval  $p_3$  et d'injection  $p_4$ . C'est ce que l'on appelle une représentation entrée-sortie du modèle. Le calcul d'un ensemble caractéristique du modèle (3.3) pour l'arrangement d'élimination  $\{p_3, p_4, m\} \succ p_5 \succ \{\omega, p_2, p_R\}$  permet d'obtenir la représentation suivante.

$$\begin{aligned}
&C^* w_0^2 \theta A_c (L_d K_{av} - C_d + C_u + C_u L_d K_1) \ddot{p}_5 - C^* C_u L_d p_2 w_0^2 - C_u p_5^2 A_c^2 L_d a w_0^2 - C_u \theta^2 \dot{p}_5^2 A_c^2 L_d a w_0^2 \\
&- 2 C_u p_5 A_c^2 L_d a w_0^2 \theta \dot{p}_5 - C^* C_u L_d \rho K_2 \dot{w} w_0^2 - C^* C_u L_d c w^2 - C^* C_u \theta \dot{p}_5 A_c L_d b w_0 - C^* C_u p_5 A_c L_d b w_0 \\
&+ C^* w_0^2 L_d C_u p_5 - C^* w_0^2 C_d L_u p_2 + C^* w_0^2 C_d L_u p_R - C^* w_0^2 L_d K_{av} L_u p_R + C^* w_0^2 L_d K_{av} L_u p_2 \\
&+ C^* C_u w_0^2 \dot{p}_5 A_c + C^* w_0^2 L_d K_{av} \dot{p}_5 A_c + C^* C_u L_d K_1 w_0^2 \dot{p}_5 A_c - C^* w_0^2 C_d \dot{p}_5 A_c = 0.
\end{aligned}$$

Cette relation est l'occasion de souligner que les méthodes de réécritures ne respectent pas les *structures* du modèle. Ainsi, à partir du modèle (3.3) dont la forme est relativement simple, l'algorithme produit des expressions complexes (le Théorème 3.9 ci-dessous fournit une borne supérieure sur les degrés de ces expressions). Même si les équations de départ s'évaluent bien, cette propriété ne se retrouve pas sur le résultat renvoyé par le programme utilisé (dans notre cas `diffalg` [34]).

**Observabilité algébrique d'un système.** Décider de l'observabilité d'un modèle consiste à décider si un modèle est observable vis-à-vis de ses paramètres au sens de la Définition 2.6 page 15. Il est impossible de mesurer la pression  $p_5$ . Choisir comme sortie la pression aval  $p_3$  de la pompe est plus judicieux. Donc, supposons que l'on puisse la mesurer et que l'on connaisse les commandes. En prenant un arrangement d'élimination  $\gamma \succ \{p_3, \omega, p_2, p_R\}$ , le calcul d'un ensemble caractéristique

du modèle (3.3) permet de déterminer si un paramètre ou une variable  $\gamma$  est observable (voir le Chapitre 5 page 49 pour un exposé plus complet). Les expressions n'étant guère engageantes, nous ne les explicitons pas. Pour des systèmes plus compliqués, elles ne sont plus calculables en pratique.

**Calcul de la fonction de Hilbert différentielle d'un système.** Le nombre de commande est invariant par rapport à la représentation qu'on donne du système. Une question naturelle est de savoir combien de commandes sont nécessaires à l'évolution de ce phénomène. Dans cet exemple simple à quatre équations pour sept variables, on s'attend à obtenir trois commandes. Le calcul d'un ensemble caractéristique pour l'arrangement  $p_R \succ p_2 \succ p_3 \succ p_4 \succ p_5 \succ m \succ \omega$  confirme ce fait. En plus de ces commandes, seulement deux conditions initiales doivent être connues pour simuler le modèle. Nous verrons dans le Chapitre 5 qu'un calcul similaire pour un autre ordre permet de répondre à la question d'observabilité algébrique.

**Remarque 5.** Les techniques de réécritures existantes ne permettent pas de répondre en l'état pour la majorité des exemples d'observabilité traités dans ce mémoire. Ce fait est relatif à la complexité des calculs à effectuer. Nous consacrons la section suivante à présenter les résultats disponibles.

### 3.1.3 Résultats de complexité

En utilisant un analogue différentiel de la construction présenté dans le Théorème 3.1 page 22, B. SADIK a montré dans [122] le résultat suivant dans le cadre algébrique aux dérivées partielles.

**Théorème 3.8** *Soient deux entiers  $m$  et  $d$ . Supposons que  $m$  est strictement positif et que  $d$  est supérieur ou égal à 3. De plus, posons  $r = 8m + 2\lceil(m-1)/(d-2)\rceil + 8$ . Il existe un système linéaire d'équations en  $r$  dérivées partielles tel que :*

- i. ce système est de la forme  $P_i f = u_i$  avec  $i$  compris entre 1 et  $r$  et des opérateurs  $P_i$  d'ordre plus petit que  $d$  ;*
- ii. il existe des polynômes différentiels  $(C_i)_{1 \leq i \leq r}$  tels que  $\sum_{i=1}^r C_i(P_i f - u_i) = 1$  (ce système n'a pas de solution) ;*
- iii. un des  $C_i$  est d'ordre au moins égal à  $d^{2^m}$ .*

*De plus, tout ensemble caractéristique de  $[P_i f - u_i]$  associé à un arrangement qui élimine  $f$  contient un polynôme différentiel dont l'ordre est plus grand ou égal à  $d^{2^m}$ .*

En renforçant les hypothèses sur le modèle à représenter, la borne de complexité du calcul d'un ensemble caractéristique n'est plus doublement exponentielle mais simplement exponentielle.

Les problèmes que nous considérons sont dans le cadre ordinaire. De plus, le Lemme 3.1 page 25 montre que le type de modèle le plus répandu en automatique, i.e. la représentation d'état, est un ensemble caractéristique pour un arrangement adéquat. Ainsi, puisque le calcul d'ensemble caractéristique pour différents arrangements peut être utile en automatique (cf. section précédente), on peut se poser la question de la complexité du calcul d'un ensemble caractéristique à partir d'un autre. Par ailleurs, une représentation d'état est associée à un idéal différentiel premier (cf. Lemme 2.1 page 13) ; il n'est donc pas trop restrictif de supposer que l'idéal différentiel considéré est premier. Dans [123], B. SADIK a étudié cette situation et a démontré le résultat suivant en utilisant un résultat de complexité de G. GALLO et B. MISHRA [53].

**Théorème 3.9** Soient  $\mathcal{I}$  un idéal différentiel premier de  $k\{x_1, \dots, x_n\}$  et  $\mathcal{A} = \{A_1, \dots, A_r\}$  un ensemble caractéristique de  $\mathcal{I}$  pour un arrangement donné. On note  $\mathcal{H}_{\mathcal{A}}$  le produit des initiaux et des séparants de l'ensemble  $\mathcal{A}$  et  $h$  la somme des ordres des polynômes  $A_i$ . Supposons que le degré des polynôme  $A_i$  soit borné par un entier  $d$  et posons par commodité  $N = n(h + 1) + 1$  et  $S = (r - 1)(h + 1)$ . Il est possible de calculer un ensemble caractéristique de  $\mathcal{I}$  pour tout arrangement. De plus,

- i. la complexité de ce calcul est dans  $\mathcal{O}\left(S^{\mathcal{O}(N)}(d + 1)^{\mathcal{O}(N^3)}\right)$  ;
- ii. les polynômes de l'ensemble caractéristique sont de degrés dans  $\mathcal{O}\left(S(d + 1)^{\mathcal{O}(N^2)}\right)$ .

Cette borne supérieure sur les degrés des éléments d'un ensemble caractéristique est exponentielle ; elle se retrouve dans les expressions calculées et constitue un des points de blocage de l'utilisation de ces techniques pour, par exemple, décider en pratique de l'observabilité d'un modèle.

**Remarque 6.** En théorie, la représentation d'un modèle par un ensemble caractéristique permet de déterminer un grand nombre de propriétés de ce modèle. C'est donc une représentation « complète » et la complexité des calculs nécessaires s'en ressent.

Une alternative possible est de ne pas tenter de recourir à une représentation complète du système étudié. En effet, nous n'allons pas représenter toutes les solutions génériques d'un modèle par un ensemble caractéristique mais se servir d'une de ces solutions représentée par des séries formelles pour calculer le polynôme de transcendance différentiel d'un système. Ce point de vue nous permettra de présenter dans la suite un algorithme probabiliste de complexité polynomiale en la taille de l'entrée pour tester l'observabilité algébrique locale de modèle sous forme de représentation d'état.

Par ailleurs, les calculs ne nécessitent plus l'utilisation des méthodes de réécriture et font appels à des méthodes seminumériques. Nous présentons dans la section suivante les outils nécessaires.

## 3.2 Représentation des données par calculs d'évaluation

Dans la section précédente, nous avons donné un aperçu des techniques permettant de représenter un système. Ces techniques reposent en grande partie sur des algorithmes de réécritures inspirés par la division euclidienne. Puisque la complexité de ces algorithmes pose de réels problèmes d'efficacité en pratique, nous sommes amenés à concevoir des algorithmes moins généraux mais de meilleure complexité. Pour ce faire, nous allons utiliser des algorithmes basés sur l'opérateur de Newton.

Pour la commodité du lecteur, nous rassemblons dans cette section des définitions et des résultats de complexité relatifs à la différentiation et aux opérations arithmétiques usuelles des expressions codées par des calculs d'évaluation. Ces résultats sont utilisés dans l'élaboration des algorithmes et les estimations de complexité présentées dans la suite de ce mémoire.

**Définition 3.5** Soient  $k$  un corps de base effectif et  $A$  un ensemble fini d'arguments. Un calcul d'évaluation est une suite finie d'instructions de la forme  $b_i \leftarrow b' \circ_i b''$  avec  $\circ_i$  une opération du corps de base  $\{+, -, \times, \div\}$  et  $\{b', b''\} \subset \bigcup_{j=1}^{i-1} \{b_j\} \cup A \cup k$ . La complexité d'évaluation de ce programme est le nombre d'instructions ; elle est généralement notée  $L$ .

Loin d'être un objet théorique, la notion de calcul d'évaluation est la règle en analyse numérique, on peut penser par exemple à la représentation d'un système dans un programme fortran sans conditionnelle.

**Exemple 6.** Le polynôme  $p = (x + 1)^{32}$  peut être représenté par le calcul d'évaluation de gauche qui prend comme argument  $x$  et évalue  $p$  ou en écriture sur la base monomiale (à droite) :

$$\begin{array}{ll}
 b_0 \leftarrow x + 1, & p = 1 + 32x + 496x^2 + 4960x^3 + 35960x^4 + 201376x^5 + 906192x^6 + 3365856x^7 \\
 b_1 \leftarrow b_0 \cdot b_0, & + 10518300x^8 + 28048800x^9 + 64512240x^{10} + 129024480x^{11} + 225792840x^{12} \\
 b_2 \leftarrow b_1 \cdot b_1, & + 347373600x^{13} + 471435600x^{14} + 565722720x^{15} + 601080390x^{16} + 565722720x^{17} \\
 b_3 \leftarrow b_2 \cdot b_2, & + 471435600x^{18} + 347373600x^{19} + 225792840x^{20} + 129024480x^{21} + 64512240x^{22} \\
 b_4 \leftarrow b_3 \cdot b_3, & + 28048800x^{23} + 10518300x^{24} + 3365856x^{25} + 906192x^{26} + 201376x^{27} + 35960x^{28} \\
 p \leftarrow b_4 \cdot b_4. & + 4960x^{29} + 496x^{30} + 32x^{31} + x^{32}.
 \end{array}$$

Nous renvoyons à [73, 72, 19, 55] pour de plus amples références sur la représentation par calcul d'évaluation et ses conséquences. Notons qu'au cours des dix dernières années, les travaux du groupe TERA [139, 59, 58, 127, 79] ont porté sur des algorithmes d'élimination basés sur la représentation des entrées par des calculs d'évaluation. Cette approche permet d'éviter la représentation des polynômes sur la base monomiale et prend en compte le caractère éventuellement creux des équations de départ; schématiquement, ceci permet de remplacer un terme de l'ordre de  $d^{O(n^2)}$  par  $d^{O(n)}$  dans les estimations de complexité. Nous renvoyons à l'article [27] pour une comparaison entre cette approche et des méthodes utilisées en analyse numérique pour la résolution de systèmes polynomiaux.

### 3.2.1 Aspects probabilistes

Le principal problème de la représentation des données par calcul d'évaluation est le test à zéro ou en d'autres termes, la possibilité de décider si deux calculs d'évaluation représentent le même objet algébrique. R. ZIPPEL et J. SCHWARTZ ont présenté une méthode probabiliste pour tester si un polynôme représenté par un calcul d'évaluation est nul.

**Proposition 3.2** ([154]) *Soient  $p$  un polynôme non trivial en  $n$  indéterminées de degré total  $d$  et  $\Omega$  un ensemble fini de scalaire. La probabilité qu'un point de  $\Omega^n$  soit un zéro du polynôme  $p$  est bornée par  $d/\text{card}(\Omega)$ .*

Ce résultat est à la base de l'étude probabiliste des algorithmes présentés dans le chapitre suivant.

**Remarque 7.** Lorsque l'on considère un calcul d'évaluation utilisant la division, rien n'assure que les calculs intermédiaires ne conduisent à une division par zéro même lorsque l'expression algébrique codée est bien définie pour les arguments d'entrée. Remarquons que, de tout calcul d'évaluation de complexité  $L$  représentant une fraction rationnelle on peut déduire un calcul d'évaluation de complexité au plus  $4L$  représentant un numérateur et un dénominateur de cette fraction (voir [138]). Nous n'aurons pas recours à ce résultat dans la suite et nous verrons que la division ne pose pas de réel problème dans nos applications (cf. Section 5.2.2 page 59).

### 3.2.2 Résultats de complexité

Dans cette section, nous abordons principalement la notion de dérivation dans le contexte de la représentation d'expressions algébriques par calcul d'évaluation amplement utilisée par la suite.

**Exemple 7.** Considérons une matrice  $Z$ , son déterminant et son permanent :

$$Z = \begin{pmatrix} z_{1,1} & \dots & z_{1,n} \\ \vdots & & \vdots \\ z_{n,1} & \dots & z_{n,n} \end{pmatrix}, \quad \text{Det}(Z) = \sum_{\sigma \in S_n} (-1)^{\text{sgn}(\sigma)} \prod_{i=1}^n z_{i,\sigma(i)}, \quad \text{Per}(Z) = \sum_{\sigma \in S_n} \prod_{i=1}^n z_{i,\sigma(i)}.$$

Le déterminant est un polynôme qui nécessite un nombre factoriel de monômes pour être écrit mais qui peut être calculé par un circuit arithmétique de taille polynomiale. On trouve dans [7], le premier résultat en ce sens qui ne dépende pas de l'anneau où sont pris les coefficients de la matrice.

**Proposition 3.3** *Soit  $A$  un anneau. Il existe un calcul d'évaluation de taille dans  $\mathcal{O}(n^5)$  qui prend en argument les coefficients d'une matrice  $n \times n$  et représente les coefficients de son polynôme caractéristique.*

Dans [145], L.G. VALIANT montre que le calcul du permanent d'une matrice  $n \times n$  est un polynôme difficile à évaluer. À ma connaissance, le meilleur résultat de complexité connu correspond à un calcul d'évaluation de taille  $\mathcal{O}(n2^n)$  (voir [121]). Remarquons que les modèles associés à des phénomènes physiques présentent généralement une complexité d'évaluation petite (voir les exemples de l'Annexe B page 101 et le tableau B.1).

**Calcul d'évaluation et différentiation.** La différentiation est une opération essentielle dans les problèmes abordés dans ce mémoire. En utilisant la notion de calcul d'évaluation, nous bénéficions d'un résultat issu de la notion de *dérivation automatique* en analyse numérique. Dans [2], W. BAUR et V. STRASSEN ont borné la complexité d'évaluation du calcul du gradient d'une expression rationnelle codée par un calcul d'évaluation. Cette démarche a été motivée par la résolution parallèle de systèmes linéaires en utilisant un nombre optimal de processeurs. Le lecteur intéressé trouvera une preuve simple et constructive dans [97].

**Théorème 3.10** *De tout calcul d'évaluation codant une expression rationnelle  $f$  dépendant de  $n$  variables  $(x_1, \dots, x_n)$  et de complexité d'évaluation  $L$ , on peut construire un calcul d'évaluation représentant  $f$  et le gradient  $(\partial f / \partial x_1, \dots, \partial f / \partial x_n)$  de complexité d'évaluation inférieure à  $5L$ . Cette inégalité est indépendante du nombre d'arguments  $n$  du calcul d'évaluation.*

**Remarque 8.** Ce théorème ne se généralise probablement pas à des ordres de dérivations supérieurs. Considérons le polynôme suivant qui a été introduit par L.G. VALIANT dans [145] :

$$p(x_1, \dots, x_n, z_{1,1}, \dots, z_{n,n}) = \prod_{i=1}^n \sum_{j=1}^n x_j z_{i,j}.$$

Ce polynôme peut être représenté par un calcul d'évaluation de complexité  $2n^2 - 1$ . De plus, on a la propriété suivante :

$$\frac{\partial^n p}{\partial x_1 \cdots \partial x_n} = \text{Per}(Z).$$

Ainsi, tout algorithme permettant de calculer les dérivées partielles d'ordre supérieur d'un polynôme fournit un algorithme de calcul du permanent. Donc la complexité du calcul des dérivées partielles d'ordre supérieur est probablement exponentielle.

## Deuxième partie

# Étude seminumérique de certains idéaux différentiels ordinaires premiers



## Chapitre 4

# Calcul rapide des invariants d'un système algébrique d'équations différentielles ordinaires avec seconds membres génériques

Les algorithmes élaborés jusqu'à présent en algèbre différentielle sont essentiellement basés sur des méthodes de réécriture. La représentation des idéaux différentiels réguliers ainsi obtenue est une « description complète » qui permet de tester l'appartenance, de calculer des invariants, des séries formelles solutions, etc.

Puisque cette représentation est complète, il n'est pas surprenant que la complexité théorique de ces algorithmes soit, dans le pire des cas, exponentielle en le nombre de variables et qu'il soit difficile en pratique de les appliquer sur des exemples concrets.

Dans ce chapitre, nous nous proposons donc d'étudier une méthode seminumérique qui, loin de fournir une représentation complète d'un idéal différentiel, permet de déterminer la fonction de Hilbert différentielle définie dans la Section 1.2.1 page 7. De plus, nous nous fixons des hypothèses fortes de généricité et de primalité qui se retrouvent dans les applications que nous envisageons dans le chapitre suivant. Ainsi, nous montrons qu'il existe un algorithme de complexité polynomiale en la taille de l'entrée qui calcule la fonction de Hilbert différentielle associée à un système algébrique d'équations différentielles avec seconds membres génériques.

C'est l'occasion pour nous de présenter une stratégie générale qui nous sera utile par la suite. Il s'agit tout d'abord de placer le problème envisagé dans le cadre théorique de l'algèbre différentielle mis en place dans le Chapitre 1 page 3. En particulier, on démontre que les idéaux différentiels considérés sont premiers i.e. qu'il n'y a pas de décomposition en composantes irréductibles à faire. Nous montrons ensuite comment utiliser la notion de module des différentielles de Kähler pour *linéariser* le problème et se ramener à des calculs de rang. Le dernier point consiste à *spécialiser* les calculs en utilisant une solution générique du système de manière à ce que les calculs de rang ne nécessitent que des opérations sur un corps de base effectif. C'est ainsi qu'intervient l'hypothèse de généricité des seconds membres : nous verrons qu'elle permet de se ramener à une situation où on dispose de solutions génériques triviales.

Cette stratégie et les résultats obtenus seront utilisés dans le chapitre suivant pour obtenir un test pratique d'observabilité algébrique locale de complexité polynomiale en la taille de l'entrée.

## 4.1 Systèmes algébriques d'équations différentielles ordinaires avec seconds membres génériques

Dans ce chapitre, à l'instar de [123, 45] nous considérons des systèmes différentiels ordinaires de la forme :

$$\begin{cases} f_1(x_1^{(e)}, \dots, x_n^{(e)}, \dots, x_1, \dots, x_n) = y_1, \\ \vdots \\ f_n(x_1^{(e)}, \dots, x_n^{(e)}, \dots, x_1, \dots, x_n) = y_n. \end{cases} \quad (4.1)$$

avec  $e$  et  $n$  des entiers,  $f_i$  des fractions rationnelles réduites et  $y_i$  des seconds membres génériques i.e. supposés différentiellement algébriquement indépendants. Les seconds membres peuvent être, par exemple, les perturbations ou les commandes d'un système physique. Plus généralement, ces systèmes représentent des graphes d'applications rationnelles.

**Exemple 8.** Le système académique suivant fournit l'expression (des carrés) de la vitesse  $y_1$ , de la courbure  $y_2$  et de la torsion  $y_3$  d'une courbe (suffisamment régulière) dans un espace à trois dimensions de coordonnées cartésiennes  $x_1$ ,  $x_2$  et  $x_3$ .

$$\begin{cases} \dot{x}_1^2 + \dot{x}_2^2 + \dot{x}_3^2 = y_1, \\ \frac{\begin{vmatrix} \dot{x}_1 & \dot{x}_2 \\ \ddot{x}_1 & \ddot{x}_2 \end{vmatrix}^2 + \begin{vmatrix} \dot{x}_2 & \dot{x}_3 \\ \ddot{x}_2 & \ddot{x}_3 \end{vmatrix}^2 + \begin{vmatrix} \dot{x}_3 & \dot{x}_1 \\ \ddot{x}_3 & \ddot{x}_1 \end{vmatrix}^2}{(\dot{x}_1^2 + \dot{x}_2^2 + \dot{x}_3^2)^3} = y_2, \\ \frac{\begin{vmatrix} \dot{x}_1 & \dot{x}_2 & \dot{x}_3 \\ \ddot{x}_1 & \ddot{x}_2 & \ddot{x}_3 \\ x_1^{(3)} & x_2^{(3)} & x_3^{(3)} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} \dot{x}_1 & \dot{x}_2 \\ \ddot{x}_1 & \ddot{x}_2 \end{vmatrix}^2 + \begin{vmatrix} \dot{x}_2 & \dot{x}_3 \\ \ddot{x}_2 & \ddot{x}_3 \end{vmatrix}^2 + \begin{vmatrix} \dot{x}_3 & \dot{x}_1 \\ \ddot{x}_3 & \ddot{x}_1 \end{vmatrix}^2} = y_3. \end{cases} \quad (4.2)$$

Puisque cet exemple est purement illustratif, nous n'utiliserons par la suite ni le trièdre de Frénet ni les résultats de géométrie différentielle relatifs à ce point de vue (voir [6] pour un exposé complet). Notons tout de même que la donnée des seconds membres génériques permet de définir une courbe unique par un système différentiel (en supposant que la vitesse et la courbure ne s'annulent pas). Cette idée se généralise en augmentant la dimension de l'espace ambiant et on peut ainsi définir une famille de systèmes indexée par cette dimension.

Si on associe un idéal différentiel premier  $\Gamma$  au système (4.1) alors le calcul de la fonction de Hilbert différentielle de l'extension de corps  $\text{Fr}(k\{X, Y\}/\Gamma)/k\langle Y \rangle$  permet de décrire cette extension dans le sens suivant : le calcul de la dimension permet de savoir si la donnée des seconds membres est suffisante pour déterminer les  $x_i$ . Dans ce cas, le calcul de l'ordre indique le nombre de conditions initiales nécessaires.

**Exemple 9.** Illustrons ce point avec un exemple pour lequel les calculs sont faisables à la main. Le système suivant a été utilisé dans [103, 104] pour donner une réponse négative à une question posée par J.F. RITT dans [118].

$$\begin{cases} \dot{x}_2/\ddot{x}_1 = y_1, \\ (\dot{x}_2/\ddot{x}_1)'x_1 - \dot{x}_1\dot{x}_2/\ddot{x}_1 + x_2 = y_2. \end{cases} \quad (4.3)$$

Il s'agit d'une transformation involutive dû à P. ROUCHON que nous exprimons sous une forme « compacte » pour simplifier la présentation ; il suffit de dériver la seconde expression et de manipuler quelque peu les équations pour montrer qu'on a :

$$x_1 = \frac{\dot{y}_2}{\ddot{y}_1} \quad \text{et} \quad x_2 = \left( \frac{\dot{y}_2}{\ddot{y}_1} \right)' y_1 - \dot{y}_1 \frac{\dot{y}_2}{\ddot{y}_1} + y_2.$$

On constate que dans l'ouvert  $\ddot{y}_1 \neq 0$ , les  $x_i$  sont déterminées par la donnée des  $y_i$  mais cette fois il n'est pas nécessaire de spécifier des conditions initiales. Dans l'exemple précédent, il fallait indiquer six conditions initiales.

L'algorithme présenté dans ce chapitre prend en entrée un système algébrique d'équations différentielles avec seconds membres génériques et calcule la fonction de Hilbert différentielle associée à ce système lorsque l'on considère les seconds membres dans le corps de base.

#### 4.1.1 Idéaux associés à une application rationnelle

Le formalisme utilisé dans la suite est issu de travaux sur le problème de l'inversibilité d'une application rationnelle ; nous renvoyons à la thèse [101] de F. OLLIVIER pour ces questions. Contrairement à ces travaux, nous n'utilisons pas de méthodes de réécriture et notre objectif premier est de calculer les fonctions de Hilbert différentielles associées à certaines applications rationnelles décrites ci-dessus. Introduisons à présent le formalisme nécessaire à la mise en œuvre de nos calculs.

**Clôture de Zariski d'un graphe.** Les solutions du système (4.1) page 36 peuvent être associées à un graphe ensembliste qui n'est pas un ensemble algébrique. Pour simplifier la présentation, nous supposons que tous les dénominateurs des fractions rationnelles  $f_i$  ne sont pas des scalaires et nous posons  $f_i = p_i/q_i$  pour tout entier  $i$  compris entre 1 et  $n$ . Le système (4.1) peut être défini de manière équivalente par les équations et inéquations polynomiales suivantes :

$$\left\{ \begin{array}{l} p_1(x_1^{(e)}, \dots, x_n^{(e)}, \dots, x_1, \dots, x_n) - q_1(x_1^{(e)}, \dots, x_n^{(e)}, \dots, x_1, \dots, x_n) y_1 = 0, \\ \vdots \\ p_n(x_1^{(e)}, \dots, x_n^{(e)}, \dots, x_1, \dots, x_n) - q_n(x_1^{(e)}, \dots, x_n^{(e)}, \dots, x_1, \dots, x_n) y_n = 0, \\ q_1(x_1^{(e)}, \dots, x_n^{(e)}, \dots, x_1, \dots, x_n) \neq 0, \\ \vdots \\ q_n(x_1^{(e)}, \dots, x_n^{(e)}, \dots, x_1, \dots, x_n) \neq 0. \end{array} \right.$$

Pour nous ramener au cadre algébrique mis en place dans le Chapitre 1, nous utilisons la Proposition 1.2 page 7 et nous considérons l'adhérence de Zariski du graphe. La clôture de Zariski de ce graphe de fonction est représentée par l'idéal différentiel :

$$\Gamma = \left[ p_i(X^{(e)}, \dots, X) - q_i(X^{(e)}, \dots, X) y_i, 1 \leq i \leq n \right] : \left( \prod_{j=1}^n q_j(X^{(e)}, \dots, X) \right)^\infty,$$

en adoptant les notations  $X = (x_1, \dots, x_n)$  et  $Y = (y_1, \dots, y_n)$ . Rappelons que nous avons supposé que les fractions rationnelles  $p_i/q_i$  sont irréductibles et différentiellement algébriquement indépendantes. Comme lorsque nous avons défini la représentation d'état dans la Section 2.1 page 13, nous vérifions maintenant que notre parti pris de privilégier les composantes irréductibles est cohérent avec la représentation que nous donnons du système (4.1).

**Lemme 4.1** *L'idéal différentiel  $\Gamma$  de  $k\{X, Y\}$  est premier.*

**Preuve.** Un graphe est une variété irréductible ; l'argument de la démonstration est le même que celui de la preuve du Lemme 2.1 page 13.  $\square$

**Section générique d'un graphe.** Dans la fin de cette section, nous cherchons à associer au système (4.1) page 36 une solution générique qui nous permettra de calculer la fonction de transcendance différentielle de l'idéal  $\Gamma$ . Schématiquement, il nous suffit dans notre situation de spécialiser les  $x$  pour calculer les  $y$  ; nous allons suivre ce principe en nous passant de ce calcul. Soient  $\tilde{x} = (\tilde{x}_1, \dots, \tilde{x}_n)$  de nouvelles indéterminées et le corps différentiel défini par

$$k\langle F(\tilde{x}) \rangle = k\left\langle p_i(\tilde{x}^{(e)}, \dots, \tilde{x})/q_i(\tilde{x}^{(e)}, \dots, \tilde{x}), 1 \leq i \leq n \right\rangle.$$

Ce corps est isomorphe à l'image du morphisme de  $k\langle Y \rangle$  dans  $k\langle \tilde{x} \rangle$  engendré par  $y_i \rightarrow f_i(\tilde{x}^{(e)}, \dots, \tilde{x})$ . Définissons dans l'anneau différentiel  $k\langle F(\tilde{x}) \rangle\{X\}$  l'idéal différentiel

$$\Delta = \left[ p_i(X^{(e)}, \dots, X) - q_i(X^{(e)}, \dots, X) \frac{p_i(\tilde{x}^{(e)}, \dots, \tilde{x})}{q_i(\tilde{x}^{(e)}, \dots, \tilde{x})}, 1 \leq i \leq n \right] : \left( \prod_{j=1}^n q_j(X^{(e)}, \dots, X) \right)^\infty.$$

**Proposition 4.1** *L'idéal différentiel  $\Delta$  de  $k\langle F(\tilde{x}) \rangle\{X\}$  est premier.*

*La fonction de Hilbert différentielle de l'extension de corps  $\text{Fr}(k\{X, Y\}/\Gamma)/k\langle Y \rangle$  est égale à la fonction de Hilbert différentielle de l'extension de corps  $\text{Fr}(k\langle F(\tilde{x}) \rangle\{X\}/\Delta)/k\langle F(\tilde{x}) \rangle$ .*

*L'élément  $\tilde{x}$  de  $k\langle \tilde{x} \rangle$  est une solution générique de l'idéal différentiel  $\Delta$ .*

**Preuve.** Dans un premier temps, on considère une situation où on s'autorise à « inverser » les éléments  $y$ . Techniquement, on considère le produit tensoriel  $k\langle Y \rangle \otimes_{k\{Y\}} k\{X, Y\}$  qui correspond simplement à l'algèbre  $k\langle Y \rangle\{X\}$ . Dans cette situation l'ensemble  $k\langle Y \rangle \otimes_{k\{Y\}} \Gamma$  noté  $\bar{\Gamma}$  est un idéal premier bien défini. D'une part, on a  $k\{Y\} \cap \Gamma = \{0\}$ . D'autre part, pour tout produit  $(a \otimes b)(c \otimes d)$  dans  $\bar{\Gamma}$ , l'élément  $ac \otimes bd$  est dans  $\bar{\Gamma}$  et comme  $\Gamma$  est un idéal premier,  $ac \otimes b$  ou  $a \otimes cd$  est dans  $\bar{\Gamma}$ . C'est suffisant pour conclure. Considérons maintenant le morphisme différentiel, additif et multiplicatif suivant :

$$\begin{aligned} \psi : k\{X, Y\} &\rightarrow k\langle F(\tilde{x}) \rangle\{X\} \\ x_i &\rightarrow x_i \\ y_i &\rightarrow p_i(\tilde{x})/q_i(\tilde{x}) \end{aligned}$$

Par construction, l'application  $\psi$  est l'identité sur l'ensemble  $\left(\prod_{j=1}^n q_j(X)\right)^\infty$  qui permet de saturer  $\Delta$  et  $\Gamma$ . De plus, les générateurs de  $\Delta$  sont dans l'image par  $\psi$  des générateurs de  $\Gamma$ . Donc, l'image de  $\Gamma$  par ce morphisme est l'idéal  $\Delta$ . De plus, elle est isomorphe, par construction, à  $\bar{\Gamma}$ . Donc, l'idéal  $\Delta$  est premier.

Ceci nous permet de considérer le corps des fractions de  $k\langle F(\tilde{x}) \rangle\{X\}/\Delta$  comme bien défini et isomorphe au corps des fractions de  $k\langle Y \rangle\{X\}/\Gamma$ . Ainsi, d'après ce qui précède, le morphisme  $\psi$  induit un isomorphisme entre les corps des fractions de  $k\{X, Y\}/\Gamma$  et de  $k\langle F(\tilde{x}) \rangle\{X\}/\Delta$  ; ceci prouve la seconde assertion.

En considérant le morphisme de  $k\langle F(\tilde{x}) \rangle\{X\}$  dans  $k\langle \tilde{x} \rangle$  qui associe  $x_i$  à  $\tilde{x}_i$ , on constate que le quotient  $k\langle F(\tilde{x}) \rangle\{X\}/\Delta$  est isomorphe à  $k\langle \tilde{x} \rangle$  ; ceci prouve la dernière assertion.  $\square$

Cette proposition fournit une solution générique de l'idéal  $\Delta$  et montre qu'en calculant la fonction de Hilbert différentielle associée à l'idéal  $\Delta$ , on obtient la fonction de Hilbert associée à l'idéal  $\Gamma$ .

Le Théorème 3.7 page 27 montre que le calcul d'un ensemble caractéristique permet, entre autre, de déterminer la fonction de Hilbert différentielle associée à l'idéal  $\Delta$ . Ce calcul est, dans le pire des cas, de complexité exponentielle en le nombre de variables (cf. Section 3.1.3 page 29). Notre objectif est de calculer le polynôme de transcendance différentielle associé à l'idéal différentiel premier  $\Delta$  sans recourir au calcul d'un ensemble caractéristique.

Pour ce faire, nous allons utiliser la notion de module des différentielles de Kähler introduite dans la Section 1.2.2 page 8. En effet, le Théorème 1.8 page 9 établit un lien entre le degré de transcendance différentielle de l'extension  $\text{Fr}(k\langle F(\bar{x})\rangle\{x\}/\Delta)/k\langle F(\bar{x})\rangle$  et la dimension de l'espace vectoriel  $\Omega_{\text{Fr}(k\langle F(\bar{x})\rangle\{x\}/\Delta)/k}$ . Plutôt que de décrire l'extension de corps, nous nous proposons d'étudier l'espace vectoriel. Ce point de vue nous permettra de présenter dans la section suivante un algorithme probabiliste de complexité polynomiale en la taille de l'entrée qui calcule la fonction de Hilbert différentielle associée à l'idéal  $\Delta$ .

## 4.2 Linéarisation d'un processus de complétion dans le cas générique

Les propriétés liées aux différentielles de Kähler ont déjà été abordées dans le formalisme de l'algèbre différentielle notamment dans [37, 133] mais elles n'ont pas été utilisées de manière à obtenir des algorithmes de complexité polynomiale.

Nous envisageons ce type de module sous un point de vue effectif. F. BOULIER a utilisé une construction similaire dans les sections 3 et 4 de [9] ; l'auteur remarque qu'il est difficile en utilisant des méthodes de réécriture de faire des calculs de complétion différentielle sur ce module. Comme son étude est motivée par le calcul d'ensemble caractéristique, il la poursuit en introduisant une notion nouvelle de forme normale sans utiliser plus avant les différentielles de Kähler.

**Une construction effective du linéarisé tangent.** Considérons  $k\{X\}$  une algèbre différentielle de polynômes munie d'une dérivation  $\delta$ . Formellement, nous pouvons munir cette algèbre de polynômes d'une autre dérivation  $d$  telle que :

- i. le corps  $k$  est dans le corps des constantes de  $d$  ;
- ii. les dérivations  $d$  et  $\delta$  commutent i.e. pour tout  $x$  dans  $k\{X\}$ , on a  $\delta(d(x)) = d(\delta(x))$ .

Par ailleurs, il nous faut ajouter à cette algèbre un jeu de nouvelles indéterminées  $dX$ ,  $d^2X$ , etc. Cette algèbre contient ainsi toutes les dérivées de ces indéterminées  $dX$ ,  $d^2X$ , etc. On obtient ainsi une algèbre  $k\{X, dX\}$  munie de deux dérivations  $\delta$  et  $d$ . Cette construction présente la propriété suivante :

**Lemme 4.2** *Dans l'algèbre que nous venons de construire, les polynômes linéaires homogènes en les indéterminées  $dX$  et leurs dérivées forment un  $k\{X\}$ -module différentiel isomorphe à  $\Omega_{k\{X\}/k}$ .*

Ce n'est pas ce module qui nous intéresse dans la suite mais le module des différentielles de Kähler  $\Omega_{\text{Fr}(k\{X\}/\mathcal{I})/k}$  associé au corps des fractions d'un idéal différentiel premier  $\mathcal{I}$ . Pour étudier cet espace vectoriel, nous allons tout d'abord donner une représentation de l'ensemble  $d\mathcal{I}$  définis dans la suite.

Supposons que l'idéal différentiel  $\mathcal{I}$  est premier. Nous désignons par  $d\mathcal{I}$ , l'image par la dérivation  $d$  de  $\mathcal{I}$  dans le module  $\Omega_{k\{X\}/k}$  que l'on vient de construire. L'ensemble  $d\mathcal{I}$  a une structure naturelle de  $k\{X\}$ -module. Et plus précisément, on a le lemme suivant :

**Lemme 4.3** *Soient  $\mathcal{I}$  un idéal différentiel régulier de  $k\{X\}$  et  $\mathcal{A}$  un ensemble caractéristique de  $\mathcal{I}$  pour un arrangement  $\prec$ . Considérons un arrangement induit par  $\prec$  sur les variables  $dX$ ,  $d\dot{X}$ , etc. Supposons que c'est un arrangement d'élimination tel que tout élément de  $\{dX\}$  est plus grand que tout élément de  $\{X\}$  et que la restriction de cet arrangement à  $k\{X\}$  est l'arrangement  $\prec$ . Si le corps de base  $k$  est le corps des fractions de l'anneau quotient associé à l'idéal  $\mathcal{I}$  alors l'ensemble  $\mathcal{A} \cup d\mathcal{A}$  est un ensemble caractéristique de  $d\mathcal{I}$  pour l'arrangement ainsi défini.*

Cette assertion découle immédiatement des définitions de la Section 3.1.1 page 23 et pour fixer les idées, on peut comparer ce lemme aux exemples présentés page 9. Si  $k$  est le corps des fractions associé à l'idéal  $\mathcal{I}$ , le quotient de  $\Omega_{k\{X\}/k}$  et du  $k\{X\}$ -module  $d\mathcal{I}$  définis ci-dessus est isomorphe au module des différentielles de Kähler que nous considérons (cf. chapitre 16 dans [38]). Dans la Section 4.2.1 page 42, nous allons voir qu'un ensemble caractéristique n'est pas nécessaire pour nos calculs, mais que nous devons considérer un ensemble de générateurs de  $\mathcal{I}$  qui contient un ensemble caractéristique. Pour ce faire, nous considérons un processus de complétion.

**Processus de complétion linéarisé.** Les générateurs d'un idéal différentiel premier peuvent ne pas former ou contenir un ensemble caractéristique permettant le calcul de la fonction de Hilbert différentielle qui nous intéresse. Pour simplifier les notations, nous supposons que les générateurs de l'idéal différentiel  $\mathcal{I}$  sont au plus d'ordre un. On peut toujours se ramener à ce cas par l'ajout de variables et d'équations linéaires. Nous présentons un *processus de complétion* à l'aide de l'exemple suivant :

**Exemple 10.** Le système suivant est tiré de [45] où les auteurs l'utilisent dans le cadre de la théorie des diffiétés.

$$\begin{cases} x_1 & = & y_1, \\ \dot{x}_1 + x_2 & = & y_2, \\ & \vdots & \\ \dot{x}_{n-2} + x_{n-1} & = & y_{n-1}, \\ \dot{x}_n + \dot{x}_{n-1} & = & y_n. \end{cases} \quad (4.4)$$

Ces relations ne constituent pas un ensemble caractéristique de l'idéal différentiel qu'elles engendrent. On ne peut donc pas utiliser le Théorème 3.7 page 27 pour déterminer une fonction de Hilbert différentielle. Si on dérive la première équation du système (4.4), une élimination permet d'exprimer une relation d'ordre zéro sur la variable  $x_2$ . Ainsi, une complétion différentielle simple permet de montrer que ce modèle est décrit par un champ de vecteurs  $\dot{x}_n = y_n - \dot{y}_{n-1} + \dots + (-1)^n y_1^{(n-1)}$ , sur la variété des contraintes définie par les relations suivantes :

$$\begin{cases} x_1 & = & y_1, \\ x_2 & = & y_2 - \dot{y}_1, \\ & \vdots & \\ x_{n-1} & = & y_{n-1} - \dot{y}_{n-2} + \dots + (-1)^{n-2} y_1^{(n-2)}. \end{cases}$$

Après cette complétion, il est facile de déterminer la fonction de Hilbert différentielle associée à ce modèle. Cet exemple montre qu'il peut être nécessaire de considérer des différentiations successives

des équations de départ de manière à obtenir une description explicite. Le nombre de différentiations nécessaires est borné par l'analogie de Ritt du théorème de Bézout (cf. Théorème 1.6 page 8).

De manière similaire, on peut appliquer ce processus de complétion au modèle (4.2) page 36 mais les calculs ne sont en rien aisés. Pour se ramener à un problème d'algèbre linéaire plus simple, on peut suivre la trace de ce processus de complétion sur le module des différentielles de Kähler considéré comme un espace vectoriel différentiel (sans se préoccuper pour l'instant de l'effectivité du corps de base). C'est la raison pour laquelle nous avons présenté une construction effective de ce module au début de cette section. Intéressons-nous maintenant à un critère d'arrêt du processus de complétion qui ne nécessite pas le calcul d'un ensemble caractéristique.

**Une condition d'arrêt de la complétion.** Soit  $P = (p_1, \dots, p_m)$  un ensemble de polynômes différentiels dans  $k\{x_1, \dots, x_n\}$ . Supposons que l'idéal différentiel  $\mathcal{I} = [P]$  est premier et que  $P$  n'est pas un ensemble caractéristique de  $\mathcal{I}$  (c'est le cas pour les modèles présentés dans les exemples 8 et 9 page 36). Nous utilisons les constructions et les notations introduites au début de cette section et, par commodité, nous ne considérons pas  $\Omega_{k\{X\}/k}$  comme un  $k\{X\}$ -module différentiel mais comme un  $k\langle X \rangle$ -espace vectoriel différentiel (en tensorisant par exemple). Dans cette situation, outre le sous-espace vectoriel  $d\mathcal{I}$ , nous pouvons considérer dans cet espace l'ensemble fini  $dP = (dp_1, \dots, dp_m)$  qui est l'image de  $P$  par la dérivation  $d$ .

La notation  $\text{Vect}(f)$  représente le  $k\langle X \rangle$  sous-espace vectoriel (non différentiel) engendré par  $f$  dans l'espace vectoriel différentiel  $\Omega_{k\langle X \rangle/k}$ . Considérons le sous-espace vectoriel (non différentiel) suivant :

$$E_{i,j} = \text{Vect}(dP^{(i)}, \dots, dP) \cap \text{Vect}(dX^{(j)}, \dots, dX) \subset d\mathcal{I} \subset \Omega_{k\langle X \rangle/k}.$$

Par construction, ce sous-espace vectoriel non différentiel est plongé dans un espace de dimension finie ( $\text{Vect}(dX^{(j)}, \dots, dX)$ ).

**Proposition 4.2 (Prop. 2 dans [93])** Notons par  $\varphi(i)$  la dimension de  $E_{i,0}$ . Il existe un entier  $\nu$  tel que la suite  $\varphi(i)$  est strictement croissante pour tout entier  $i$  inférieur à  $\nu$ . Pour tout  $i$  supérieur à  $\nu$ , la suite est stationnaire :  $\varphi(i) = \varphi(\nu)$  et on a  $E_{\nu,1} = E_{\nu+i,1}$ .

**Preuve.** Dans cette preuve, l'image de l'espace  $V$  par la dérivation du corps différentiel est notée  $V'$ . Pour être parfaitement rigoureux, il nous faudrait expliciter la définition de  $V'$  à partir de générateurs de  $V$  i.e. travailler sur des générateurs des espaces vectoriels que nous utilisons. Nous nous contentons par soucis de brièveté de ne donner ici que le principe de la démonstration.

Considérons les familles  $(F_i)_{i \in \mathbb{N}}$  et  $(L_i)_{i \in \mathbb{N}}$  d'espaces vectoriels non différentiels définis par les conditions initiales et la récurrence suivantes :

- i.  $L_0 = E_{0,0}$  et  $F_0 \oplus L_0 = E_{0,1}$  ;
- ii. pour tout entier positif  $i$ ,  $F_{i+1} = F_i + L_i'$  et  $L_{i+1} = F_{i+1} \cap \text{Vect}(dX)$ .

Remarquons que la suite d'espace vectoriel  $(L_i)_{i \in \mathbb{N}}$  est une suite croissante dans l'espace vectoriel de dimension finie  $\text{Vect}(dX)$ , elle est donc stationnaire. De plus, il est aisé de constater que dès que pour un entier  $\nu$  on  $L_\nu = L_{\nu+1}$  alors pour tout entier  $i$ , on a par hypothèse de récurrence  $L_\nu = L_{\nu+i}$  et  $F_\nu = F_{\nu+i}$ . De plus, on peut constater que pour tout entier  $i$ , on a  $L_i = E_{i,0}$  et  $F_i = E_{i,1}$ .  $\square$

L'intérêt principal de cette proposition est de montrer que la suite  $(\varphi(i))_{i \in \mathbb{N}}$  ne peut pas être stationnaire puis de nouveau croissante. Ce résultat ne se déduit pas immédiatement des théorèmes présentés dans la Section 3.1.1 page 23. Par ailleurs, ceci montre que le calcul de la suite  $(\varphi(i))_{i \in \mathbb{N}}$  fournit un critère d'arrêt du processus de complétion. Après  $\nu$  dérivations, l'ensemble constitué des générateurs de  $\mathcal{I}$  et de leurs dérivées contient un ensemble caractéristique.

L'entier  $\nu$  est appelé *indice de différentiation* du modèle  $P$  (voir [23, 113] pour une étude complète sous différents points de vue théoriques). C'est une notion issue de l'analyse numérique qui correspond au nombre de différentiations nécessaires pour pouvoir exprimer une dynamique explicite à partir d'un modèle implicite (cf. Définition 2.3 page 14). Cette notion n'est en rien intrinsèque i.e. elle n'est pas liée à l'idéal différentiel qu'engendre le modèle mais aux générateurs.

Nous venons de voir qu'en considérant le module des différentielles de Kähler d'un idéal différentiel premier  $\mathcal{I}$ , on peut étudier le processus de complétion différentiel en faisant de l'algèbre linéaire sur un  $k\langle X \rangle$ -espace vectoriel différentiel. Plus précisément, si on désire calculer dans  $\text{Vect}(dX^{(j)}, \dots, dX)$  pour un ordre  $j$ , il nous suffit de considérer comme corps des coefficients le corps formé des éléments de  $k\langle X \rangle$  d'ordre inférieur ou égal à  $j$ . Ainsi, à chaque étape de complétion on est amené à travailler dans un cadre algébrique classique sans se préoccuper des dérivations d'ordre supérieur.

Malheureusement, le corps de base que nous considérons est  $\text{Fr}(k\langle X \rangle/\mathcal{I})$ , il n'est pas aisé de calculer dans ce cas. De plus, nous n'avons toujours pas fourni une représentation de l'espace vectoriel  $\Omega_{\text{Fr}(k\langle F(\tilde{X}) \rangle\langle X \rangle/\Delta)/k}$  qui nous intéresse. La section suivante se propose de donner cette représentation. De plus, nous montrons que, pour mener à bien nos calculs, nous pouvons nous contenter de calculs de rang *spécialisés* dans un corps différentiel engendré par une solution générique.

#### 4.2.1 Calcul probabiliste du polynôme de Hilbert différentiel

Le Théorème 1.8 page 9 montre que le calcul du polynôme de Hilbert différentiel consiste à déterminer des dimensions d'espaces vectoriels. La proposition suivante montre que des calculs de rang sont suffisants (nous utilisons les notations de la section précédente et notamment celles de la Proposition 4.2 page 41 ; ainsi les polynômes différentiels  $P = (p_1, \dots, p_n)$  sont des générateurs de l'idéal différentiel étudié). Si on s'autorise à donner une réponse probabiliste, ce problème ne nécessite pas de calculer un ensemble caractéristique.

**Proposition 4.3** *Pour tout entier  $h, i$  et  $j$  inférieur à  $i$ , on désigne par  $J(h, i, j)$  la matrice jacobienne suivante*

$$J(h, i, j) = \begin{pmatrix} \frac{\partial P^{(h)}}{\partial X^{(i)}} & \frac{\partial P^{(h)}}{\partial X^{(i-1)}} & \cdots & \frac{\partial P^{(h)}}{\partial X^{(j)}} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \frac{\partial P}{\partial X^{(i)}} & \frac{\partial P}{\partial X^{(i-1)}} & \cdots & \frac{\partial P}{\partial X^{(j)}} \end{pmatrix} \quad \text{avec} \quad \frac{\partial P^{(h)}}{\partial X^{(i)}} = \begin{pmatrix} \frac{\partial p_1^{(h)}}{\partial x_1^{(i)}} & \cdots & \frac{\partial p_1^{(h)}}{\partial x_n^{(i)}} \\ \vdots & & \vdots \\ \frac{\partial p_n^{(h)}}{\partial x_1^{(i)}} & \cdots & \frac{\partial p_n^{(h)}}{\partial x_n^{(i)}} \end{pmatrix}.$$

La dimension  $\varphi(h)$  de  $E_{h,0}$  est égale à  $\text{Rang } J(h, h+1, 0) - \text{Rang } J(h, h+1, 1)$ . Ces rangs sont calculés sur le corps  $\text{Fr}(k\langle X \rangle/\mathcal{I})$ . De plus, rappelons que cette fonction  $\varphi$  permet de déterminer l'entier  $\nu$  défini dans la Proposition 4.2 page 41.

Pour tout ordre de dérivation  $s$  inférieur à  $\nu$ , la fonction de Hilbert différentielle  $\mathcal{H}_{\text{Fr}(k\langle X \rangle/\mathcal{I})/k}^{(s)}$  est égale à

$$n(s+1) - \text{Rang } J(\nu, \nu+1, 0) + \text{Rang } J(\nu, \nu+1, s).$$

Cette fonction permet de calculer le polynôme de Hilbert différentiel qui est valable pour des ordres de dérivation plus grands que  $\nu$ .

**Preuve.** Notons  $\mathcal{R}$  l'anneau quotient  $k\langle X \rangle/\mathcal{I}$  et  $\mathcal{K}$  le corps des fractions de cet anneau. De plus, on note par  $(A)_j$  l'ensemble des éléments de  $A$  d'ordre inférieur ou égal à  $j$ . Si  $A$  est un corps (resp. anneau, idéal, espace vectoriel),  $(A)_j$  est un corps (resp. anneau, idéal, espace vectoriel).

Pour tout entier  $j$ , considérons la suite conormale  $(\mathcal{I}/\mathcal{I}^2)_j \rightarrow (\Omega_{k\{X\}/k})_j \rightarrow (\Omega_{\mathcal{R}/k})_j \rightarrow 0$ , associée à l'idéal  $\mathcal{I}_j$  (cf. proposition 16.3 dans [38]). Puisque nous considérons une situation avec seconds membres génériques, les générateurs de l'idéal forment une suite régulière. Ainsi, le complexe ci-dessus est exact. De plus,  $\mathcal{K}$  est un  $\mathcal{R}$ -module plat (cf. proposition 2.5 dans [38]); dans cette situation, il nous est possible d'« étendre » le corps des coefficients par tensorisation (à gauche) et obtenir la suite exacte :

$$0 \rightarrow (\mathcal{K} \otimes_{k\{X\}} \mathcal{I}/\mathcal{I}^2)_j \rightarrow (\mathcal{K} \otimes_{k\{X\}} \Omega_{k\{X\}/k})_j \rightarrow (\mathcal{K} \otimes_{k\{X\}} \Omega_{\mathcal{R}/k})_j \rightarrow 0.$$

Il nous faut maintenant constater que le  $\mathcal{K}$ -espace vectoriel  $\mathcal{K} \otimes_{k\{X\}} \Omega_{\mathcal{R}/k}$  est bien isomorphe à l'espace vectoriel  $\Omega_{\mathcal{K}/k}$  que l'on veut représenter. Pour ce faire, il nous suffit de constater que l'image par  $d$  de tout élément  $1/q$  de  $\mathcal{K}$  peut être mis en relation biunivoque avec  $(-1/q^2) \otimes dq$  dans  $\mathcal{K} \otimes_{k\{X\}} \Omega_{\mathcal{R}/k}$ . Ainsi, pour tout ordre  $j$ , on dispose de la suite exacte :

$$0 \rightarrow (\mathcal{K} \otimes_{k\{X\}} \mathcal{I}/\mathcal{I}^2)_j \rightarrow (\mathcal{K} \otimes_{k\{X\}} \Omega_{k\{X\}/k})_j \rightarrow (\Omega_{\mathcal{K}/k})_j \rightarrow 0.$$

La dimension du  $\mathcal{K}$ -espace vectoriel  $(\Omega_{\mathcal{K}/k})_j$  que nous cherchons est égale à la différence des dimensions des  $\mathcal{K}$ -espaces vectoriels  $(\mathcal{K} \otimes_{k\{X\}} \mathcal{I}/\mathcal{I}^2)_j$  et  $(\mathcal{K} \otimes_{k\{X\}} \Omega_{k\{X\}/k})_j$ . La dimension de ce dernier  $\mathcal{K}$ -espace vectoriel est  $n(j+1)$ . Il nous reste donc à montrer comment calculer la dimension de  $(\mathcal{K} \otimes_{k\{X\}} \mathcal{I}/\mathcal{I}^2)_j$ .

Pour ce faire, nous allons exprimer la dimension de  $\mathcal{K} \otimes_{k\{X\}} d\mathcal{I}$  en terme de calculs de rang. Pour toute expression  $f$  dans  $k\{x_1, \dots, x_n\}$ , on a la relation classique  $df = \sum_{i=1}^n \partial f / \partial x_i dx_i$ . Ainsi, les lignes de la matrice  $J(j, j+1, 0)$  que nous considérons correspondent aux coefficients des générateurs de  $d\mathcal{I}$  sur la base  $\{dX, d\dot{X}, \dots\}$  de  $\Omega_{k\{X\}/k}$ . Plus précisément, cette matrice est une représentation des générateurs de l'espace vectoriel  $E_{j, j+1}$  et le calcul d'une base revient donc à triangulariser cette matrice sur le corps de base  $\text{Fr}(k\{X\}/\mathcal{I})$ .

Pour tout entier  $j$ , il existe un sous-espace vectoriel de  $E_{j, j+1}$  noté  $F$  tel que  $E_{j, j+1} = E_{j, 0} \oplus F$ . La dimension de  $F$  est égale à  $\text{Rang } J(j, j+1, 1)$ . On en déduit que la dimension  $\varphi(j)$  est égale à  $\text{Rang } J(j, j+1, 0) - \text{Rang } J(j, j+1, 1)$ . Comme l'indique la Proposition 4.2 page 41, le calcul de la suite des dimensions  $\varphi(j)$  indique l'entier  $\nu$  qui permet de décider de l'arrêt du processus de complétion. Cet entier est le nombre de différentiations des expressions  $P$  nécessaires pour calculer la fonction de Hilbert différentielle.

De plus, nous avons montré  $E_{\nu, s}$  que est égal à  $d\mathcal{I} \cap \text{Vect}(dX, \dots, dX^{(s)})$ . Ce résultat, le Théorème 1.7 page 9 et la Définition 1.9 page 7 impliquent que la fonction de Hilbert différentielle pour tout ordre  $s$  inférieur à  $\nu$  est égale à  $n(s+1) - \dim E_{\nu, s}$ . Le raisonnement précédent permet de conclure.  $\square$

**Remarque 9.** Dans cette proposition, si les calculs de rang se font sur le corps  $\text{Fr}(k\{X\}/\mathcal{I})$  alors le résultat est déterministe mais difficile à mettre en œuvre. Schématiquement, nous sommes amené à calculer des rangs de matrices à coefficients dans une algèbre quotient de polynômes. Pour réduire la complexité du calcul, on peut spécialiser les variables sur des valeurs génériques et ainsi calculer des rangs sur un corps effectif. Ces rangs ne seront égaux aux rangs génériques que si les valeurs de spécialisations sont choisies dans un ouvert de Zariski i.e. ces valeurs n'annulent pas certains déterminants. Dans ce cadre, le résultat est probabiliste.

À partir de cette idée directrice, nous présentons dans le paragraphe suivant une approche dans notre cadre différentiel pour pouvoir mener à bien les calculs de rang en pratique sans « subir » la complexité des calculs liée aux ensembles caractéristiques.

**Spécialisation en une solution générique.** Rappelons que d'après la Définition 3.4 page 26, une solution régulière d'un système d'équations  $\Sigma$  autoréduit est une solution qui n'annule pas le produit des initiaux et des séparants de  $\Sigma$ .

**Lemme 4.4** *Soient un idéal différentiel premier  $\mathcal{I}$  de  $k\{X\}$  et un ensemble caractéristique  $\mathcal{A}$  de  $\mathcal{I}$ . Considérons  $\eta = (\eta_1, \dots, \eta_n)$  une solution régulière de  $\mathcal{I}$  dans un corps différentiel  $\mathcal{G}$  et le morphisme de spécialisation  $\psi$  qui à toutes indéterminées  $x_i$  de  $k\{X\}$  associe  $\eta_i$  dans  $\mathcal{G}$ .*

*L'image par ce morphisme du  $k\{X\}$ -module différentiel  $d\mathcal{I}$  est un  $k\langle\eta\rangle$ -espace vectoriel différentiel. De plus, l'image  $\psi(d\mathcal{A})$  d'un ensemble caractéristique  $\mathcal{A} \cup d\mathcal{A}$  de  $d\mathcal{I}$  est une base de ce  $k\langle\eta\rangle$ -espace vectoriel différentiel.*

**Preuve.** Ce résultat serait faux si les initiaux de l'ensemble caractéristique étaient dans le noyau du morphisme de spécialisation  $\psi$ . Ainsi, pour s'assurer de ce résultat, il faut constater que les initiaux de l'ensemble  $d\mathcal{A}$  sont les séparants de  $\mathcal{A}$ . La solution  $\eta$  étant supposée régulière, elle n'annule pas ces initiaux. L'image  $d\mathcal{A}$  est bien formée par un ensemble autoréduit qui engendre bien le  $k\langle\eta\rangle$ -espace vectoriel différentiel  $d\mathcal{I}$ .  $\square$

Ainsi, il suffit de connaître une solution régulière  $\eta$  pour se ramener à faire nos calculs de complétion dans un  $k\langle\eta\rangle$ -espace vectoriel différentiel.

**Exemple 11.** Considérons l'idéal différentiel  $\mathcal{I} = [\dot{x} + x^2]$  et le morphisme canonique  $\phi$  de  $k\{x\}$  dans une clôture universelle de  $\text{Fr}(k\{\tilde{x}\}/\mathcal{I})$  qui associe  $x$  à  $\tilde{x}$ . Un calcul simple montre qu'on a la relation  $\phi(x^{(h)}) = (-1)^h h! \tilde{x}^{h+1}$  et que la série formelle  $\eta$  telle que  $\eta = \sum_{i \in \mathbb{N}} (-1)^i x_0^{i+1} (t - c)^i$  est une solution de l'idéal différentiel premier  $\mathcal{I}$  (nous renvoyons à [33, 112] pour plus de détails sur les séries solutions de systèmes différentiels algébriques). Ainsi, le corps  $\text{Fr}(k\{\tilde{x}\}/\mathcal{I})$  est isomorphe au corps  $k\langle\eta\rangle$ ; dans le premier corps, les opérations usuelles — comme la multiplication, la dérivation etc. — nécessitent l'utilisation des techniques de réécritures alors que dans le second, il suffit de disposer de l'arithmétique classique des séries.

En général, il n'est pas évident de connaître une série formelle solution sans le calcul d'un ensemble caractéristique (voir les exemples 8 et 9 page 36). Dans ce chapitre, nous considérons des modèles avec seconds membres génériques (cf. expressions 4.1 page 36) et la Proposition 4.1 page 38 nous fournit les informations suivantes (les notations sont celles de la Section 4.1.1 page 37) :

- l'idéal  $\Gamma$  qui représente le modèle avec seconds membres génériques et l'idéal différentiel  $\Delta$  ont la même fonction de Hilbert différentielle ;
- les éléments  $\tilde{X}$  et leurs dérivées dans l'extension différentielle transcendante pure  $k\langle\tilde{X}\rangle$  forment une solution générique de l'idéal  $\Delta$ .

À l'aide de la Proposition 4.5 page 46, nous allons profiter de la représentation des éléments  $\tilde{X}$  et de leurs dérivées dans  $k\langle\tilde{X}\rangle$  par des séries formelles arbitraires pour faire des calculs de rang sur un corps de base effectif.

En utilisant des techniques de réécriture, il est possible de déterminer à partir des générateurs de l'idéal différentiel  $\Delta$  l'expression formelle de la matrice  $J(\nu, \nu + 1, 0)$ . Les calculs de rang que nous voulons entreprendre peuvent être réalisés efficacement avec une grande probabilité de succès après avoir spécialisé les variables.

Nous allons dans la section suivante montrer qu'une spécialisation de la matrice  $J(\nu, \nu + 1, 0)$  peut être directement calculée sans avoir à calculer les expressions formelles qui la composent.

## 4.2.2 Résultats de complexité

Pour établir nos estimations de complexité, nous allons utiliser les résultats que nous venons d'établir et la représentation des objets par des calculs d'évaluation que nous avons présentée dans la

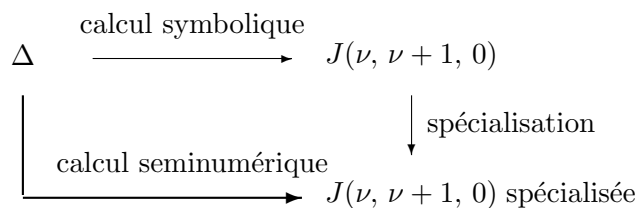


FIG. 4.1 – Une stratégie de calcul de la fonction de Hilbert différentielle associée à une application rationnelle différentielle.

Section 3.2 page 30.

**Proposition 4.4** *Soit une algèbre de polynômes différentiels  $k\{x_1, \dots, x_n\}$ . Comme nous venons de l'indiquer, un élément  $\eta = (\eta_1, \dots, \eta_n)$  et ses dérivées dans  $k\langle x_1, \dots, x_n \rangle$  peuvent être représentée par un  $n$ -uplet de séries formelles. Considérons un système  $P = (p_1, \dots, p_n)$  de polynômes différentiels dans  $k\{x_1, \dots, x_n\}$  représenté par un calcul d'évaluation de complexité  $L$ .*

*Il existe un programme d'évaluation qui prend en entrée des séries  $\eta$  tronquées à l'ordre  $h+2$  et qui renvoie les coefficients de la matrice  $J(h, i, j)$  évalués en  $\eta$ . La complexité de ce calcul d'évaluation est bornée par*

$$\mathcal{O}\left(n(L + nh^2)\mathcal{M}(h)\right)$$

avec  $\mathcal{M}(\tau)$ , la complexité arithmétique de la multiplication de deux séries à l'ordre  $\tau$ .

**Preuve.** Le théorème de Baur & Strassen (Théorème 3.10 page 32) montre que le calcul des coefficients de l'expression

$$dp(\dot{x}_1, \dots, \dot{x}_n, x_1, \dots, x_n) = \frac{\partial p}{\partial \dot{x}_1} d\dot{x}_1 + \dots + \frac{\partial p}{\partial \dot{x}_n} d\dot{x}_n + \frac{\partial p}{\partial x_1} dx_1 + \dots + \frac{\partial p}{\partial x_n} dx_n$$

nécessite au plus  $3L$  opérations. De plus, comme  $d(f') = (df)'$ , remarquons que :

$$\begin{aligned}
 d\left(p(\dot{X}, X)'\right) = & \frac{\partial p}{\partial \dot{x}_1} d\ddot{x}_1 + \dots + \frac{\partial p}{\partial \dot{x}_n} d\ddot{x}_n + \\
 & \left( \left( \frac{\partial p}{\partial \dot{x}_1} \right)' + \frac{\partial p}{\partial x_1} \right) d\dot{x}_1 + \dots + \left( \left( \frac{\partial p}{\partial \dot{x}_n} \right)' + \frac{\partial p}{\partial x_n} \right) d\dot{x}_n + \\
 & \left( \frac{\partial p}{\partial x_1} \right)' dx_1 + \dots + \left( \frac{\partial p}{\partial x_n} \right)' dx_n.
 \end{aligned}$$

En supposant que le nombre d'opérations nécessaires pour évaluer en  $\eta$  les expressions  $(\partial p / \partial x_i)^{(j)}$  et  $(\partial p / \partial \dot{x}_i)^{(j)}$  est nul, on peut borner la complexité d'évaluation de  $dp^{(h)}$  comme suit. Pour calculer  $dp$ ,  $n$  nouvelles additions sont nécessaires; plus généralement pour calculer  $dp^{(h)}$  à partir de  $dp^{(h-1)}$ , la règle de Leibniz impose  $hn$  additions supplémentaires. Au total, la complexité d'évaluation de  $dp^{(h)}$  en  $\eta$  est bornée par  $\mathcal{O}(L + nh^2)$ .

Pour établir le résultat final, il nous reste à justifier que les dérivations  $(\partial p / \partial x_i)^{(j)}$  et  $(\partial p / \partial \dot{x}_i)^{(j)}$  n'induisent pas d'opérations supplémentaires. Le calcul d'évaluation qui code  $dp$  prend en argument  $n$  séries formelles  $(\eta_1, \dots, \eta_n)$  tronquées à l'ordre  $h+1$  et à chaque étape, il calcule le produit ou la somme de séries formelles. Comme le résultat de chaque étape est une série formelle *représentée dans sa base monomiale*, la dérivation de cette série consiste simplement à prendre le coefficient adéquat et ne nécessite pas d'opérations élémentaires. Le résultat final s'obtient en constatant qu'il

il y a  $n$  polynômes  $p$  à considérer et qu'à une opération élémentaire sur les séries correspond au plus  $\mathcal{M}(h+1)$  opérations sur le corps de base.  $\square$

Nous sommes à présent en mesure d'énoncer le résultat principal de ce chapitre que nous annonçons dans la présentation de notre mémoire.

**Proposition 4.5** *Considérons un système différentiel ordinaire  $\Sigma$  de la forme :*

$$\Sigma \quad \begin{cases} f_1(x_1^{(e)}, \dots, x_n^{(e)}, \dots, x_1, \dots, x_n) = y_1, \\ \vdots \\ f_n(x_1^{(e)}, \dots, x_n^{(e)}, \dots, x_1, \dots, x_n) = y_n. \end{cases}$$

avec  $e$  et  $n$  des entiers,  $f_i$  des fractions rationnelles réduites et  $y_i$  des seconds membres génériques. Les numérateurs et les dénominateurs des  $f_i$  sont représentés par un calcul d'évaluation de complexité  $L$ .

Si on suppose que les seconds membres génériques  $(y_1, \dots, y_n)$  sont spécialisés, la fonction de Hilbert différentielle  $\mathcal{H}$  associée à  $\Sigma$  permet de déterminer le nombre de fonctions et de constantes arbitraires dont dépendent les solutions  $(x_1, \dots, x_n)$  de  $\Sigma$ .

Il existe un algorithme probabiliste qui calcule  $\mathcal{H}$  et dont la complexité est bornée par

$$\mathcal{O}\left(n((L + n^3 e^2)\mathcal{M}(ne) + e\mathcal{N}(n^2 e))\right)$$

avec  $\mathcal{M}(\nu)$  (resp.  $\mathcal{N}(\nu)$ ), le coût de la multiplication de deux séries à l'ordre  $\nu+1$  (resp. de deux matrices de taille  $\nu \times \nu$ ).

L'aspect probabiliste de l'algorithme est lié aux choix arbitraires de valeurs de spécialisation dans un ouvert de Zariski.

**Preuve.** Dans les sections précédentes, nous avons considéré des relations d'ordre un pour simplifier la présentation ; les résultats obtenus sont transposables pour des relations d'ordre plus grand. Nous ne reprenons pas en détails tout les énoncés précédents.

La Proposition 4.1 page 38 montre que la fonction de Hilbert différentielle associée à  $\Sigma$  est égale à la fonction de Hilbert associée à l'idéal différentiel  $\Delta$ . De plus,  $\Delta$  admet comme solution générique tout  $n$ -uplet  $\eta$  de séries formelles arbitraires.

Nous avons montré comment déterminer en pratique l'entier  $\nu$  qui est un critère d'arrêt du processus de complétion et l'ordre de dérivation maximal à considérer. Donc, les séries formelles  $\eta$  peuvent être tronquées à l'ordre  $\nu+1$ . Dans le présent résultat de complexité, nous utilisons l'analogie différentiel du théorème de Bézout (Théorème 1.6 page 8) pour borner l'entier  $\nu$  par  $ne$ . La Proposition 4.3 page 42 permet de ramener le calcul de la fonction de Hilbert à des calculs de rang sur la matrice  $J(ne, ne+1, 0)$  obtenue à partir de l'idéal  $\Delta$  et plus précisément des relations du type  $q_i(\tilde{X})dp_i(X) - p_i(\tilde{X})dq_i(X)$ . Cette matrice est de taille  $n^2 e \times (n^2 e + n)$  et le nombre de calculs de rang nécessaires est borné par  $e+1$ . Ainsi, si les coefficients de la matrice  $J(ne, ne+1, 0)$  sont des scalaires, on peut largement borner la complexité des calculs de rang par  $(e+1)\mathcal{N}(n^2 e + n)$  avec  $\mathcal{N}(\tau)$  la complexité du produit de deux matrices  $\tau \times \tau$  utilisé.

La Proposition 4.4 page 45 montre que la complexité d'évaluation de la matrice  $J(ne, ne+1, 0)$  est dans  $\mathcal{O}(n(L + n^3 e^2)\mathcal{M}(ne+2))$ . Il s'agit de la complexité nécessaire pour calculer la matrice  $J(ne, ne+1, 0)$  évaluée sur les séries formelles  $\eta$  à coefficients dans un corps de scalaires effectif.

Génériquement, les rangs calculés sur cette spécialisation de la matrice  $J(ne, ne + 1, 0)$  sont corrects mais le résultat peut être incorrect si ces séries annulent les dénominateurs des fractions rationnelles ou certains déterminants. Ainsi, notre résultat est probabiliste car les séries formelles arbitraires  $\eta$  sont choisies au hasard. La probabilité de succès est élevée car les mauvais choix sont inclus dans un fermé de Zariski défini par les zéros des déterminants et des dénominateurs.  $\square$

Il est possible de raffiner ce résultat en donnant une estimation de probabilité d'erreur en utilisant le résultat de Zippel & Schwartz (cf. Proposition 3.2 page 31). De plus, on peut borner la complexité binaire de l'algorithme. Ce travail sera fait pour l'algorithme présenté dans le chapitre suivant qui s'inspire de la stratégie utilisée dans cette section.



## Chapitre 5

# Algorithme probabiliste de complexité polynomiale en la taille de l'entrée pour tester l'observabilité algébrique locale

Dans ce chapitre, nous considérons des modèles algébriques sous la forme largement répandue d'une représentation d'état :

$$\begin{cases} \dot{x} &= f(x, u), \\ y &= h(x, u). \end{cases}$$

Rappelons qu'une trajectoire de ce modèle est une fonction  $t \rightarrow (x(t), u(t))$  qui vérifie le système d'équations différentielles de ce modèle. Schématiquement, un modèle algébrique est localement observable par rapport à des commandes  $\bar{u}$  et des sorties  $\bar{y}$  s'il n'existe qu'un nombre fini de trajectoires  $(\tilde{x}(t), \bar{u}(t))$  vérifiant  $\bar{y} = h(\tilde{x}, \bar{u})$ . Le problème de l'identifiabilité structurelle consiste à décider de l'observabilité de paramètres  $\theta$  d'un modèle qui peuvent être considérés comme des variables d'état vérifiant  $\dot{\theta} = 0$ . Le test effectif de l'observabilité et de l'identifiabilité structurelle d'un modèle est une étape importante dans sa validation théorique et son utilisation pratique.

Dans la première section de ce chapitre, nous présentons les notions d'observabilité et d'identifiabilité dans le cadre de l'algèbre différentielle en nous basant sur une définition de S. DIOP et de M. FLIESS. Puis, en nous inspirant des méthodes introduites dans le chapitre précédent, nous présentons un algorithme probabiliste de complexité polynomiale en la taille de l'entrée qui permet de tester l'observabilité algébrique locale. Cette approche améliore significativement une méthode de H. POHJANPALO présentée dans [110].

### 5.1 Observabilité et identifiabilité algébrique locale

Nous renvoyons à [63, 68, 125] pour un exposé détaillé de la notion d'observabilité dans le cadre de la géométrie différentielle et plus de références. La première définition algébrique de l'observabilité a été présentée par R.E. KALMAN [71] dans le cadre linéaire de la théorie des modules. Notre approche se base sur la définition introduite pour le cadre non linéaire dans [37] par S. DIOP et M. FLIESS.

Nous supposons que les modèles que nous considérons sont sous la forme d'une représentation d'état.

$$\Sigma \quad \begin{cases} \dot{\Theta} &= 0, \\ \dot{X} &= F(X, \Theta, U), \\ Y &= H(X, \Theta, U). \end{cases} \quad (5.1)$$

**Notations.** Les lettres majuscules représentent des vecteurs et nous supposons qu'il y a :

$$\begin{aligned} \ell \text{ paramètres } \Theta &= (\theta_1, \dots, \theta_\ell), & n \text{ variables d'état } X &= (x_1, \dots, x_n), \\ r \text{ commandes } U &= (u_1, \dots, u_r), & \text{et } m \text{ sorties } Y &= (y_1, \dots, y_m). \end{aligned}$$

De plus, nous utilisons la représentation des expressions algébriques par calcul d'évaluation présentée dans la Section 3.2 page 30. Ainsi, les fractions rationnelles  $F = (f_1, \dots, f_n)$  et  $G = (g_1, \dots, g_m)$  dans  $\mathbb{Q}(X, \Theta, U)$  sont représentées par un calcul d'évaluation qui est de complexité  $L$ .

Par ailleurs, le produit des dénominateurs des fractions rationnelles  $F$  et  $H$  est noté  $H_\Sigma$ . D'après le Lemme 2.1 page 13, l'idéal différentiel  $[\Sigma] : H_\Sigma^\infty$  est premier. Nous pouvons nous placer dans le cadre théorique développé dans la Section 2.2 page 15 et donner une définition algébrique de l'observabilité.

**Définitions 5.1** Soient un système  $\mathcal{F}/k$ , une sortie  $Y$  et une commande  $U$  de ce système. Un élément  $\eta$  du système  $\mathcal{F}/k$  est localement observable en fonction de  $Y$  et  $U$  si, et seulement si, cet élément est algébrique sur  $k\langle U, Y \rangle$ . Le système  $\mathcal{F}/k$  est observable si, et seulement si, le corps différentiel  $\mathcal{F}$  est algébrique sur  $k\langle U, Y \rangle$ .

Un système est localement identifiable par rapport aux commandes  $U$  et aux sorties  $Y$  si, et seulement si, tous ses paramètres sont algébriques sur le corps  $k\langle U, Y \rangle$ .

**Remarque 10.** Cette définition de l'observabilité est valide si les données sont non bruitées et si les temps de mesures ne sont pas imposés. De plus, nous supposons que les entrées et les sorties sont des fonctions régulières du temps et qu'elles sont génériques pour le modèle considéré. Pour illustrer ce dernier point, considérons le modèle  $\ddot{y} + 2\theta\dot{y} + \theta^2y = 0$  tiré de [85]. Le choix de la sortie  $y = 0$  n'est pas générique et le modèle n'est pas identifiable dans ce cas alors que pour toutes sorties  $y \neq 0$ , le paramètre  $\theta$  est identifiable. Pour finir, nous supposons que les commandes  $U$  sont différentiellement algébriquement indépendantes.

Pour simplifier la présentation, nous prenons le parti de considérer un paramètre  $\theta$  comme une variable d'état vérifiant l'équation différentielle  $\dot{\theta} = 0$ . En ce sens, le problème de l'identifiabilité algébrique est une reformulation du problème de l'observabilité algébrique dans le cadre théorique que nous utilisons. Nous renvoyons à [4, 147] pour un exposé des définitions de l'identifiabilité dans d'autres formalismes que celui de l'algèbre différentielle.

Une des motivations de l'étude des notions d'observabilité et d'identifiabilité réside dans l'utilisation de simulations numériques dans la modélisation d'un processus physique.

**Identification paramétrique.** Pour illustrer ce point, remarquons que les conditions initiales et les constantes de réaction d'un processus physique peuvent parfois être très imprécisément connues, voire totalement inconnues.

Dans ce cas de figure, il est possible de chercher à valider un modèle mathématique du processus à partir de la connaissance des commandes  $U(t)$  et des sorties  $Y(t)$  que l'on suppose mesurées.

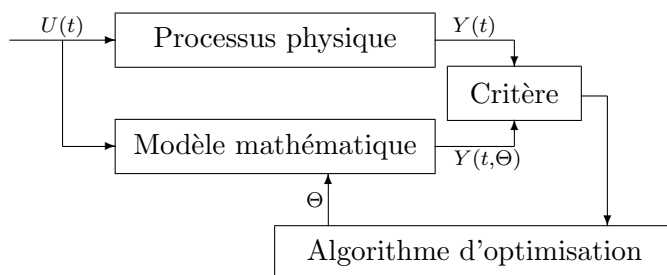


FIG. 5.1 – Description schématique de l'identification paramétrique

Le modèle mathématique décrit l'évolution temporelle ( $\dot{X} = F(X, \Theta, U)$ ) de variables d'état  $X$  en fonction des commandes utilisées  $U$  et de paramètres  $\Theta$  qui peuvent être des conditions initiales et des constantes à déterminer. De plus, un modèle doit permettre de calculer l'évolution de certaines sorties  $Y(t, \Theta)$  judicieusement choisies pour correspondre aux mesures.

Pour valider le modèle, des méthodes numériques d'optimisation sont utilisées. Elles permettent d'« ajuster » les paramètres  $\Theta$  du modèle mathématique de manière à ce que les sorties simulées  $Y(t, \Theta)$  correspondent aux mesures réelles  $Y(t)$  avec une précision suffisante (voir [83, 136, 149] pour un exposé complet). Si c'est le cas, on dit que les paramètres ont été identifiés.

Si le modèle n'est pas observable par rapport aux commandes  $U$  et aux sorties  $Y$  considérées, il peut y avoir une infinité de paramètres  $\Theta$  qui correspondent aux commandes et aux sorties utilisées. En l'état, l'identification paramétrique ne peut être réalisée.

**Test numérique d'observabilité.** R. HERMANN et A.J. KRENER ont proposé dans [63] un test reposant sur des calculs de rang de matrice. Parallèlement, H. POHJANPALO a proposé dans [110] un analogue de ce test à partir de développement en séries pour l'identifiabilité. Dans ces deux cas, l'utilisation du calcul numérique seul pour tester la propriété d'observabilité d'un modèle est difficilement envisageable du fait des incertitudes numériques liées à l'utilisation de nombres flottants. Les déterminants calculés numériquement ne sont pas significativement supérieurs aux incertitudes de calculs et on ne peut pas décider s'ils sont nuls ou pas. De plus, pour les méthodes basées sur les développements en séries, l'ordre nécessaire du développement n'est pas clairement défini. Enfin, la complexité de ces calculs n'est pas précisée dans ces travaux.

À partir des techniques présentées dans les chapitres précédents, nous allons remédier à ces difficultés dans la suite. Donc, bien que l'utilisation de la notion d'observabilité est du ressort du calcul numérique, les techniques nécessaires au test de cette propriété relèvent du calcul symbolique.

### 5.1.1 Tests basés sur des méthodes de réécriture

Nous ne présentons pas dans ce mémoire les méthodes basées sur le calcul du comportement entrée-sortie d'un modèle et les résumés exhaustifs qui en découlent ; nous renvoyons aux travaux [148, 115, 80] de Y. LECOURTIER, A. RAKSANYI et É. WALTER pour une analyse de cette approche. La complexité de ces méthodes est sensiblement équivalente à celle des méthodes basées sur les techniques de réécriture en algèbre différentielle. Dans [84, 36], S. DIOP, M. FLIESS, T. GLAD et L. LJUNG ont proposé une caractérisation effective de l'observabilité basée sur le calcul d'un ensemble caractéristique (cf. Section 3.1 page 22) :

**Proposition 5.1** *Considérons l'idéal différentiel premier  $[\Sigma] : H_{\Sigma}^{\infty}$  dans  $k\{X, \Theta, U, Y\}$  associé à la représentation d'état (5.1) page 50. Désignons par  $\mathcal{A}$  un ensemble caractéristique pour un arrangement d'élimination  $\{X, \Theta\} \succ \{Y, U\}$ . L'élément  $v$  de  $\{X, \Theta\}$  est observable sur  $\{Y, U\}$  si, et seulement si, il existe un polynôme  $p$  dans l'ensemble caractéristique tel que  $v$  soit sa variable principale et que  $p$  soit d'ordre zéro en  $v$ .*

**Exemple.** Nous pouvons appliquer cette proposition à l'exemple 3 page 16 légèrement modifié :

$$\begin{cases} \dot{x}_3 - \theta x_1 - u & = 0, \\ x_2 \dot{x}_2 - x_3 & = 0, \\ x_1 \dot{x}_1 - x_2 & = 0, \\ x_1 - y & = 0. \end{cases} \quad (5.2)$$

Pour un arrangement  $\{x_1, x_2, x_3\} \succ \{y, \theta\}$  qui respecte l'ordre de dérivation, ces expressions constituent l'ensemble caractéristique d'un idéal régulier (les initiaux vérifiant  $x_1 \neq 0$  et  $x_2 \neq 0$ ). En fait, il faudrait substituer  $y$  à  $x_1$  dans les équations pour que l'assertion soit parfaitement correcte.

Pour un arrangement d'élimination  $\{\theta, x_3, x_2, x_1\} \succ y$ , les expressions

$$x_1 = y, \quad x_2 = y\dot{y}, \quad x_3 = y\dot{y}(\dot{y}^2 + y\ddot{y}), \quad \theta y = (\dot{y}^2 + y\ddot{y})^2 + y\dot{y}(3y\ddot{y} + yy^{(3)}) - u, \quad (5.3)$$

constituent un ensemble caractéristique du même idéal. La proposition 5.1 permet de conclure à l'observabilité du modèle. Il est possible d'utiliser d'autres arrangements pour faire ce test ; nous renvoyons à [100] pour un exposé détaillé de ces approches.

**Remarque 11.** En théorie, il est possible de calculer des ensembles caractéristiques qui expriment les variables d'état et les paramètres en fonction des entrées et des sorties. Ces calculs pourraient permettre de tester la propriété d'observabilité ; mais en pratique les calculs sont difficiles voire impraticables. Les bornes supérieures de complexité pour ce type de calcul sont exponentielles (cf. Théorème 3.9 page 30) et, à ma connaissance, les implantations disponibles ne permettent pas de conclure pour la grande majorité des modèles rencontrés en pratique (comme par exemple le modèle (5.4) ci-dessous).

Une question naturelle est de savoir si un ensemble caractéristique calculé pour établir l'observabilité d'un modèle peut être utilisé pour l'estimation paramétrique. Les données disponibles étant *bruitées*, les relations ainsi obtenues ne sont généralement pas utilisables pour l'estimation de paramètres. En effet, elles font intervenir des dérivées temporelles des sorties d'ordre élevé qui sont difficilement mesurables par un processus expérimental (voir l'étude [100] de C. NOIRET).

Ainsi, Il semble malaisé d'« importer » directement des résultats de calcul symbolique dans les méthodes d'estimations numériques. Nous nous proposons de suivre la démarche inverse et d'utiliser des méthodes seminumériques pour obtenir un algorithme probabiliste de complexité polynomiale en la taille de l'entrée. Cette approche est essentiellement de caractère local et contrairement à la méthode suggérée par le Lemme 5.1 page 51, elle ne permet pas en l'état de tester l'observabilité globale. Illustrons par un exemple le type de résultat obtenus.

**Exemple 12.** Le système d'équations suivant est présenté dans [60] par A. GOLDBETER comme un modèle du rythme circadien de production d'une protéine chez la drosophile. Il comporte 17

paramètres, 5 variables d'état et une sortie.

$$\begin{cases} \dot{M} &= \frac{v_s K_I^4}{K_I^4 + P_N^4} - \frac{v_m M}{K_m + M}, \\ \dot{P}_0 &= k_s M - \frac{V_1 P_0}{K_1 + P_0} + \frac{V_2 P_1}{K_2 + P_1}, \\ \dot{P}_1 &= \frac{V_1 P_0}{K_1 + P_0} + \frac{V_4 P_2}{K_4 + P_2} - P_1 \left( \frac{V_2}{K_2 + P_1} + \frac{V_3}{K_3 + P_1} \right), \\ \dot{P}_2 &= \frac{V_3 P_1}{K_3 + P_1} - P_2 \left( \frac{V_4}{K_4 + P_2} + k_1 + \frac{v_d}{K_d + P_2} \right) + k_2 P_N, \\ \dot{P}_N &= k_1 P_2 - k_2 P_N, \\ y &= P_N. \end{cases} \quad (5.4)$$

Le calcul d'un ensemble caractéristique pour un arrangement judicieux permettrait, s'il pouvait être mené à bien, de déterminer les informations suivantes :

- la variable  $M$  et les paramètres  $\{v_s, v_m, K_m, k_s\}$  ne sont pas observables. Les autres paramètres et variables sont observables ;
- si  $M$  ou un seul des paramètres non observables est connu, alors le modèle serait observable (la quantité connue doit tout de même être différente de 0).

De plus, il existe un groupe de transformation qui agit sur  $\{M, v_s, v_m, K_m, k_s\}$  et laisse la sortie et les trajectoires du système invariants. Dans notre exemple, on a :

$$\sigma_\lambda \{M, v_s, v_m, K_m, k_s\} \rightarrow \{\lambda M, \lambda v_s, \lambda v_m, \lambda K_m, k_s/\lambda\}.$$

Le calcul du groupe de transformation  $\sigma_\lambda$  a été grandement facilité par la connaissance préalable des variables non observables et du nombre de paramètres du groupe que permet notre algorithme (cf. Annexe A page 95 pour la description d'une méthode permettant le calcul de ce groupe). Le résultat de notre algorithme et l'existence de ce groupe certifient que la connaissance des différentes protéines  $P_0, P_1, P_2, P_n$  (ou d'une somme quelconque de ces protéines) ne permet pas de déterminer les variables et paramètres non observables.

Les résultats d'observabilités présentés et utilisés ci-dessus ont été obtenus en quelques secondes à partir de la méthode que nous présentons dans la section suivante.

### 5.1.2 Utilisation du linéarisé tangent

Nous reprenons la stratégie développée dans le Chapitre 4 page 35 consistant à utiliser le module des différentielles de Kähler et à spécialiser les calculs sur une solution générique. La linéarisation du problème a déjà été envisagée par de nombreux auteurs mais les calculs ont toujours été basés sur des méthodes de réécriture qui ne permettent pas un gain de complexité théorique (voir [114, 37]). Nous utilisons les notations définies au début de la Section 5.1 page 49.

**Formulation algébrique du problème – Borne sur l'ordre de dérivation.** Comme nous l'avons systématiquement fait jusqu'à présent, nous associons au modèle  $\Sigma$  page 50 un corps différentiel. Pour ce faire, considérons le corps  $k\langle U \rangle(X, \Theta)$  noté  $\mathcal{K}$  et muni de la dérivation de Lie associée au modèle  $\Sigma$  :

$$\mathcal{L} := \frac{\partial}{\partial t} + \sum_{i=1}^n f_i \frac{\partial}{\partial x_i} + \sum_{j \in \mathbb{N}} \sum_{u \in U} u^{(j+1)} \frac{\partial}{\partial u^{(j)}}, \quad \text{on note } \mathcal{L}^j = \underbrace{\mathcal{L} \circ \dots \circ \mathcal{L}}_j.$$

Remarquons que le corps  $k\langle U, Y \rangle$  (où  $Y$  représente les sorties du modèle  $\Sigma$ ) est un sous-corps différentiel de  $\mathcal{K}$ . Les dérivées d'ordre  $j$  des sorties sont donc données par les relations  $\mathcal{L}^j H$ . Notons

que cette présentation ne nécessite pas d'utiliser des idéaux différentiels. Nous allons tout d'abord nous attacher à montrer que :

- le calcul du polynôme de Hilbert différentiel permet de décider de l'observabilité algébrique locale du modèle  $\Sigma$  ;
- l'ordre de dérivation nécessaire pour conclure est inférieur ou égal à  $n + \ell$ .

La Définition 5.1 page 50 de l'observabilité algébrique locale est liée au degré de transcendance algébrique de l'extension  $\mathcal{K}/k\langle U, Y \rangle$ . Si ce degré est nul, le modèle  $\Sigma$  est localement observable par rapports à  $U$  et à  $Y$ . Dans le cas contraire, il existe dans  $\mathcal{K}$  des quantités transcendentes sur  $k\langle U, Y \rangle$  ; ces quantités étant des expressions rationnelles des variables d'état  $X$  et des paramètres  $\Theta$ , ces variables et ces paramètres ne peuvent être tous observables (nous verrons que notre algorithme permet de préciser quels sont les variables d'état et les paramètres non observables).

Le Théorème 1.5 page 8 montre que le calcul du polynôme de Hilbert de l'extension  $\mathcal{K}/k\langle U, Y \rangle$  permet de déterminer le degré de transcendance algébrique et donc de décider de l'observabilité. La proposition suivante permet de montrer que l'ordre de dérivation nécessaire pour mener nos calculs à bien est inférieur ou égal à  $n + \ell$ .

**Proposition 5.2** *Le corps différentiel  $k\langle U, Y \rangle$  est algébrique sur le corps  $k\langle U \rangle(Y, \dots, Y^{(n+\ell)})$ .*

**Preuve.** Le corps  $\mathcal{K}$  est associé à la représentation d'état (5.1) page 50. Comme les commandes  $U$  sont supposées différentiellement indépendantes, le polynôme de Hilbert différentiel de l'extension de corps  $\mathcal{K}/k\langle U \rangle$  est égal à  $n + \ell$ . Comme  $k\langle U, Y \rangle$  est un sous-corps de  $\mathcal{K}$  et un sur-corps de  $k\langle U \rangle$ , le degré de transcendance de l'extension  $k\langle U, Y \rangle/k\langle U \rangle$  est borné par  $n + \ell$ . Ainsi, pour tout  $i = 1 \dots m$ , il existe une relation algébrique  $q_i(y_i, \dots, y_i^{(n+\ell)}) = 0$  à coefficients dans  $k\langle U \rangle$ . La dérivée de cette relation est quasilinéaire en  $y^{(n+\ell+1)}$ , de sorte que cet élément est dans  $k\langle U \rangle(y, \dots, y_i^{(n+\ell)})$ .  $\square$

Cette proposition est une conséquence de l'analogie de Ritt du théorème de Bézout (cf. Théorème 1.6 page 8). Remarquons que la borne  $n + \ell$  est atteinte par exemple pour des modèles observables à une sortie ; s'il y a plusieurs sorties, la borne  $\nu$  est génériquement égale à  $(n + \ell)/m$ , mais elle peut néanmoins atteindre  $n + \ell - m$  dans le pire des cas.

**Linéarisation du problème – calculs de rang.** Nous considérons maintenant l'analogie algébrique de la *linéarisation* en géométrie différentielle. Pour ce faire, notons qu'on peut associer à une extension de corps  $T/S$  les  $T$ -espaces vectoriels suivants :

- l'espace des dérivations  $\text{Der}_S(T, T)$ , composé des dérivations de  $T$  dans  $T$  dont le corps de constantes est  $S$  ( $\partial : T \rightarrow T$ , tel que  $\forall c \in S, \partial c = 0$ ) ;
- l'espace des différentielles de Kähler  $\Omega_{T/S}$  qui peut être défini par la propriété suivante : il existe une dérivation surjective  $d$  de  $T$  dans  $\Omega_{T/S}$  telle que pour toute dérivation  $\partial$  dans le  $T$ -espace vectoriel  $\text{Der}_S(T, T)$ , il existe un unique homomorphisme linéaire  $\delta$  de  $\Omega_{T/S}$  dans  $T$  tel que  $\delta(dz) = \partial z$ . En abrégé, on note  $\text{Der}_S(T, T) = \text{Hom}_T(\Omega_{T/S}, T)$ .

Nous renvoyons le lecteur intéressé à la lecture du chapitre 16 de [38] pour un exposé complet. Ces notions se généralisent dans le cadre différentiel et nous renvoyons à [75, 69, 70] pour plus de détails. Dans notre cas, puisque nous avons borné l'ordre de dérivation nécessaire à nos calculs, nous pouvons représenter le module des différentielles de Kähler  $\Omega_{\mathcal{K}/k\langle U, Y \rangle}$  associé à l'extension de corps  $\mathcal{K}/k\langle U, Y \rangle$ . Nous utiliserons principalement la propriété suivante des différentielles de Kähler :

**Théorème 5.1 (§ 16 dans [38])** *Soient  $S$  un corps de caractéristique zéro,  $T$  une extension de  $S$  finiment engendrée et  $\{x_\lambda\}$  un ensemble d'éléments dans  $T$ . L'ensemble  $\{dx_\lambda\}$  est une base du  $T$ -espace vectoriel  $\Omega_{T/S}$  si, et seulement si, l'ensemble  $\{x_\lambda\}$  est une base de transcendance de  $T$  sur  $S$ .*

Comme dans le chapitre précédent, nous pouvons représenter effectivement ce module. Dans le cas présent, il s'agit du conoyau de la matrice jacobienne :

$$M = \frac{\partial(Y^{(i)})_{0 \leq i \leq \nu}}{\partial(X, \Theta)} = \begin{pmatrix} \frac{\partial y_1}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial y_1}{\partial x_n} & \frac{\partial y_1}{\partial \theta_1} & \cdots & \frac{\partial y_1}{\partial \theta_\ell} \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ \frac{\partial y_m}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial y_m}{\partial x_n} & \frac{\partial y_m}{\partial \theta_1} & \cdots & \frac{\partial y_m}{\partial \theta_\ell} \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ \frac{\partial y_1^{(\nu)}}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial y_1^{(\nu)}}{\partial x_n} & \frac{\partial y_1^{(\nu)}}{\partial \theta_1} & \cdots & \frac{\partial y_1^{(\nu)}}{\partial \theta_\ell} \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ \frac{\partial y_m^{(\nu)}}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial y_m^{(\nu)}}{\partial x_n} & \frac{\partial y_m^{(\nu)}}{\partial \theta_1} & \cdots & \frac{\partial y_m^{(\nu)}}{\partial \theta_\ell} \end{pmatrix}.$$

De même, le  $\mathcal{K}$ -espace vectoriel  $\text{Der}_{k\langle U, Y \rangle}(\mathcal{K}, \mathcal{K})$  est représenté par le noyau de cette matrice. Plus précisément, cet espace est engendré par les solutions du système  $M\mathcal{D} = 0$  avec  $\mathcal{D}$  le vecteur de dérivations canoniques  $(\partial/\partial x_1, \dots, \partial/\partial x_n, \partial/\partial \theta_1, \dots, \partial/\partial \theta_\ell)$ . Pour fixer les idées, nous donnons ci-dessous la matrice  $M$  associée au système (5.2) page 52.

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ -x_2/x_1^2 & 1/x_1 & 0 & 0 \\ \frac{x_3 x_1^2 - 3 x_2^3}{2 x_2 x_1^4} & -\frac{2 x_2^3 + x_3 x_1^2}{2 x_1^3 x_2^2} & \frac{1}{2 x_1 x_2} & 0 \\ \frac{x_1^4 (u x_2^2 + x_3^2) + 9 x_2^3 x_3 x_1^2 - 15 x_2^6}{6 x_1^6 x_2^3} & \frac{x_2^2 ((x_1 \theta - u) x_1^4 - 9 x_2^4) - 3 x_1^4 x_3^2}{6 x_1^5 x_2^4} & \frac{2 x_3 x_1^2 + 3 x_2^3}{6 x_1^3 x_2^3} & \frac{1}{6 x_2} \end{pmatrix}. \quad (5.5)$$

Une conséquence directe de ces constructions permet d'établir une version de la Proposition 4.3 page 42 adaptée à notre cadre. Nous considérons donc  $M$  la matrice dont les lignes sont constituées des coefficients des expressions

$$\begin{aligned} dh_j &= \sum_{i=1}^n \frac{\partial h_j}{\partial x_i} dx_i + \sum_{i=1}^{\ell} \frac{\partial h_j}{\partial \theta_i} d\theta_i \quad \text{et} \\ dh_j^{(v)} &= d\mathcal{L}^v h_j \quad \text{On a } M = \begin{pmatrix} dH \\ \vdots \\ d\mathcal{L}^{n+\ell} H \end{pmatrix}. \\ \text{pour } 1 \leq j \leq m, \quad \text{et } 1 \leq v \leq n + \ell. \end{aligned}$$

**Corollaire 5.1** *Le degré de transcendance algébrique de l'extension de corps  $\mathcal{K}/k\langle U, Y \rangle$  est égal à  $(n + \ell) - \text{Rang } M$ . De plus, le degré de transcendance de cette extension de corps est égal à la dimension du  $\mathcal{K}$ -espace vectoriel  $\text{Der}_{k\langle U, Y \rangle}(\mathcal{K}, \mathcal{K})$ .*

**Remarque 12.** Le corollaire précédent montre que des calculs de rang sont suffisants pour décider de l'observabilité d'un modèle. Nous pouvons statuer sur l'observabilité d'une variable d'état  $\bar{x}$  (ou d'un paramètre) seul par la même méthode. En effet, en utilisant des modules de Kähler, nous pouvons calculer le degré de transcendance des extensions  $\mathcal{K}/k\langle U, Y \rangle$  et  $\mathcal{K}/k\langle U, Y, \bar{x} \rangle$ . Le degré de transcendance de  $k\langle U, Y, \bar{x} \rangle/k\langle U, Y \rangle$  s'en déduit immédiatement par soustraction ; la variable  $\bar{x}$  est observable si, et seulement si, ce degré est nul. Cette constatation permet d'ailleurs de regrouper les variables non observables qui sont algébriques entre elles.

**Remarque 13.** Précisons que la matrice  $\partial(Y^{(j)}, 0 \leq j \leq \nu)/\partial(x, \theta)$  — désignée ici par  $M$  — est utilisée dans les algorithmes d'identification paramétrique basés sur des méthodes d'optimisation par

descente de gradient. Ainsi, si le modèle n'est pas identifiable, cette matrice est singulière et l'identification des paramètres ne peut être menée à bien. Notons qu'il s'agit d'une condition nécessaire mais non suffisante puisque la matrice  $M$  peut être de rang plein mais numériquement mal conditionnée.

Les calculs de rang que nous venons de présenter concernent des matrices à coefficients dans un corps de fractions rationnelles. Si nous spécialisons les variables, nous pouvons nous ramener à des calculs de rang dans un corps de scalaires ; les rang calculés seront génériques si les spécialisations sont choisies dans un ouvert de Zariski i.e. si ces spécialisations n'annulent pas certains déterminants. La section suivante présente un algorithme de complexité polynomiale en la taille de l'entrée permettant le calcul de ces rangs.

## 5.2 Calcul rapide du polynôme de Hilbert différentiel

Les spécialisations en question correspondent aux solutions génériques du modèle considéré. Contrairement à la situation de la Section 4.1 page 36, nous ne pouvons plus choisir une solution générique du modèle sous la forme d'un  $(n + \ell + r)$ -uplet de séries formelles arbitraires pour mener à bien nos calculs. Cette fois, il nous faut calculer une solution générique du modèle permettant le calcul du rang de la matrice  $M$ . La principale difficulté est d'effectuer ces tâches avec un algorithme de complexité polynomiale en la taille de l'entrée ; c'est le sujet de la section suivante.

### 5.2.1 Calcul d'une solution générique par un opérateur de Newton

Le modèle  $\Sigma$  est explicite. En effet, si les commandes  $U$  et suffisamment de conditions initiales sont fournies, ce modèle permet de calculer des solutions sous la forme de séries formelles par un processus incrémental. Généralement, l'opérateur de Picard est utilisé à cette fin ; nous ne considérerons cet opérateur que dans le dernier chapitre de ce mémoire et nous présenterons dans cette section un opérateur de type Newton. Pour l'heure, nous allons montrer que le calcul de certaines séries formelles permet les calculs de rang présentés dans la section précédente.

**Utilisation de séries formelles.** À partir du modèle  $\Sigma$  sous forme de représentation d'état décrit page 50, on peut construire l'ensemble de relations  $P(\dot{X}, X, \Theta, U)$  constitué de numérateurs des expressions  $\dot{X} - F(X, \Theta, U)$  (cf. Section 3.2 page 30). Ainsi, l'entrée de notre algorithme est constituée d'un programme d'évaluation sans division représentant  $P$  et dont la complexité d'évaluation est au plus cinq fois supérieure au modèle de départ. Notons que la sortie reste sous forme rationnelle et qu'il nous faut vérifier que les solutions génériques utilisées n'annulent pas les dénominateurs.

Pour une commande générique  $\bar{U}(t)$  de la forme  $\sum_{i \in \mathbb{N}} U_i t^i / i!$  et des conditions initiales  $X$  et  $\Theta$ , il est possible de déterminer des séries formelles  $\bar{X}(t)$  qui constituent avec  $\Theta$  et  $\bar{U}(t)$  une solution générique du modèle  $\Sigma$  et donc vérifient  $P(\dot{\bar{X}}, \bar{X}, \Theta, \bar{U}) = 0$ . Dans la suite du texte, les variables qui représentent une série formelle seront systématiquement surlignées (par exemple  $\bar{U}(t)$ ).

Illustrons ce point par l'exemple 3 page 16. Pour un jeu de conditions initiales  $x_1, x_2, x_3, \theta$  et une commande générique  $\bar{u}(t)$  de la forme  $u_0 + u_1 t + u_2 t^2/2 + u_3 t^3/3! + \mathcal{O}(t^4)$ , les expressions suivantes constituent des solutions génériques tronquées à l'ordre 4 pour  $x_1$  et  $x_2$  différents de zéro.

$$\begin{aligned} \bar{x}_3(t) &= x_3 + (\theta x_1 - u_0)t - \frac{\theta x_2 + u_1 x_1}{2 x_1} t^2 + \frac{\theta x_3 x_1^2 - \theta x_2^3 - u_2 x_2 x_1^3}{6 x_2 x_1^3} t^3 + \mathcal{O}(t^4), \\ \bar{x}_2(t) &= x_2 + \frac{x_3}{x_2} t + \frac{\theta x_1 x_2^2 - u_0 x_2^2 - x_3^2}{2 x_2^3} t^2 - \frac{-x_2^5 \theta + x_2^4 u_1 x_1 + 3 x_3 x_1^2 \theta x_2^2 - 3 x_3 x_1 u_0 x_2^2 - 3 x_3^3 x_1}{6 x_2^5 x_1} t^3 + \mathcal{O}(t^4), \\ \bar{x}_1(t) &= x_1 + \frac{x_2}{x_1} t + \frac{x_3 x_1^2 - x_2^3}{2 x_2 x_1^3} t^2 + \frac{x_1^5 \theta x_2^2 - x_1^4 u_0 x_2^2 - x_1^4 x_3^2 - 3 x_2^3 x_3 x_1^2 + 3 x_2^6}{6 x_1^5 x_2^3} t^3 + \mathcal{O}(t^4). \end{aligned}$$

Dans la section précédente, nous avons remarqué que le test d'observabilité dépendait des dérivées successives de la sortie  $y = \bar{x}_1(t)$ . Par exemple, on retrouve les éléments de l'ensemble caractéristique (5.3) page 52 à partir des premiers coefficients de la série  $\bar{x}_1(t)$ . Ces relations permettent de tester l'observabilité mais leur calcul nécessite la résolution d'un système algébrique.

Pour circonvier cette difficulté, et puisque nous utilisons le formalisme des extensions de corps, il nous suffit de calculer la matrice  $M$  et donc les expressions  $dH, \dots, dH^{(n+\ell)}$  ou du moins la spécialisation de ces expressions sur une solution générique du système  $\Sigma$ . Le lemme suivant montre comment calculer la matrice  $M$  spécialisée à partir de séries formelles solutions du modèle  $\Sigma$ .

**Lemme 5.1** *Nous précisons ci-dessous quelques notations et nous présentons les matrices  $\Lambda$  et  $\Gamma$ .*

$$\frac{\partial H}{\partial X} = \begin{pmatrix} \frac{\partial h_1}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial h_1}{\partial x_n} \\ \vdots & & \vdots \\ \frac{\partial h_m}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial h_m}{\partial x_n} \end{pmatrix}, \quad \frac{\partial H}{\partial \Theta} = \begin{pmatrix} \frac{\partial h_1}{\partial \theta_1} & \cdots & \frac{\partial h_1}{\partial \theta_\ell} \\ \vdots & & \vdots \\ \frac{\partial h_m}{\partial \theta_1} & \cdots & \frac{\partial h_m}{\partial \theta_\ell} \end{pmatrix},$$

$$\Lambda := \frac{\partial \bar{X}(t)}{\partial \Theta} = \begin{pmatrix} \frac{\partial \bar{x}_1(t)}{\partial \theta_1} & \cdots & \frac{\partial \bar{x}_1(t)}{\partial \theta_\ell} \\ \vdots & & \vdots \\ \frac{\partial \bar{x}_n(t)}{\partial \theta_1} & \cdots & \frac{\partial \bar{x}_n(t)}{\partial \theta_\ell} \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad \Gamma := \frac{\partial \bar{X}(t)}{\partial X} = \begin{pmatrix} \frac{\partial \bar{x}_1(t)}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial \bar{x}_1(t)}{\partial x_n} \\ \vdots & & \vdots \\ \frac{\partial \bar{x}_n(t)}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial \bar{x}_n(t)}{\partial x_n} \end{pmatrix}.$$

Considérons la matrice  $\bar{M}(t)$  de taille  $m \times (n + \ell)$  dont les coefficients sont des séries et qui est définie par

$$\bar{M}(t) = \frac{\partial H(\bar{X}, \Theta, \bar{U})}{\partial (X, \Theta)} = \left( \frac{\partial H}{\partial X}(\bar{X}, \Theta, \bar{U}) \frac{\partial \bar{X}(t)}{\partial X}, \frac{\partial H}{\partial X}(\bar{X}, \Theta, \bar{U}) \frac{\partial \bar{X}(t)}{\partial \Theta} + \frac{\partial H}{\partial \Theta}(\bar{X}, \Theta, \bar{U}) \right).$$

Définissons la suite de matrice  $(M_i)_{i \in \mathbb{N}}$  telle que  $\bar{M}(t) = \sum_{i \in \mathbb{N}} M_i t^i / i!$ . Pour tester l'observabilité du modèle  $\Sigma$ , nous devons déterminer une spécialisation de la matrice  $M$  définie dans le Corollaire 5.1 page 55. On a  $M = (M_0, \dots, M_{n+\ell})$ .

Ainsi, il nous reste à montrer qu'une spécialisation des expressions  $\bar{X}$ ,  $\Lambda$  et  $\Gamma$  peut être calculées par un algorithme de complexité polynomiale en la taille de l'entrée. Comme dans le chapitre précédent, il est possible de construire formellement la matrice  $M$  dont on cherche à calculer le rang. Puis, une stratégie efficace consiste à spécialiser les indéterminées de manière à calculer des rang génériques sur des matrices à coefficients dans un corps effectif comme le montre le schéma suivant.

$$\begin{array}{ccc} \Sigma & \xrightarrow{\text{calcul symbolique}} & \left( \frac{\partial (H^{(i)})_{0 \leq i \leq \nu}}{\partial (X, \Theta)} \right) \\ \downarrow & & \downarrow \begin{array}{l} X \rightarrow X_0 \in \mathbb{Z}^n, \\ \Theta \rightarrow \tilde{\Theta} \in \mathbb{Z}^\ell, \\ U \rightarrow \tilde{U} \in (\mathbb{Z}[t])^r. \end{array} \\ \nabla P & \xrightarrow{\text{calcul seminumérique}} & \left( \frac{\partial (H^{(i)})_{0 \leq i \leq \nu}}{\partial (X, \Theta)} \right) (X_0, \tilde{\Theta}, \tilde{U}) \end{array}$$

FIG. 5.2 – Une stratégie de calcul de la fonction de Hilbert différentielle d'une représentation d'état.

Dans le paragraphe suivant, nous montrons comment calculer directement la spécialisation de la matrice  $M$  sans la construire formellement. Pour ce faire, il nous faut calculer des séries  $\eta$  solutions génériques de  $\Sigma$  puis d'effectuer nos calculs dans  $k\langle \eta \rangle$  comme indiqué dans l'Exemple 4.2.1 page 44.

**Un système variationnel linéaire.** En supposant que le modèle  $\Sigma$  soit représenté par un calcul d'évaluation de complexité  $L$  et en utilisant la méthode de dérivation « rapide » de Baur & Strassen (Théorème 3.10 page 32), on peut construire le système  $\nabla P$  constitué de  $2n + \ell$  équations différentielles

$$\nabla P \begin{cases} P(\dot{X}, X, \Theta, U) & = 0, \\ \frac{\partial P}{\partial \dot{X}}(X, \Theta, U)\dot{\Gamma} + \frac{\partial P}{\partial X}(\dot{X}, X, \Theta, U)\Gamma & = 0, \\ \frac{\partial P}{\partial X}(X, \Theta, U)\dot{\Lambda} + \frac{\partial P}{\partial \dot{X}}(\dot{X}, X, \Theta, U)\Lambda + \frac{\partial P}{\partial \Theta}(\dot{X}, X, \Theta, U) & = 0. \end{cases}$$

En prenant en compte la complexité d'évaluation du gradient des  $m$  sorties  $Y$ , ce système est représenté par un calcul d'évaluation de complexité  $\mathcal{O}(\mathcal{N}(n + \ell) + (n + m)L)$ .

Les  $2n + \ell$  inconnues de ce système sont  $X$ ,  $\Gamma$  et  $\Lambda$  et les conditions initiales sont  $X_0$ ,  $\Theta_0$ ,  $U_0$ ,  $\Gamma_0$  et  $\Lambda_0$  avec  $\Gamma_0$  la matrice identité  $\text{Id}_{n \times n}$  et  $\Lambda_0$  et la matrice nulle  $0_{n \times n}$ . De plus, on suppose que le séparant  $(\partial P / \partial \dot{X})(X_0, \Theta_0, U_0)$  ne s'annule pas. Nous allons utiliser une méthode de Newton pour déterminer des séries formelles solutions du système  $\nabla P$ . Ces solutions permettent de calculer une spécialisation de la matrice  $M$  définie page 55 sans avoir à la construire formellement.

**Un opérateur de Newton.** En utilisant une méthode d'approximation de type Newton, on peut calculer des séries formelles solutions d'un système différentiel ordinaire. Ce faisant, on ramène la résolution d'un système différentiel non linéaire à la résolution d'un système linéaire. Nous présentons cette méthode dans la preuve de la proposition suivante et nous renvoyons à [16, 56, 74] pour plus de détails et de références.

**Proposition 5.3** *Il existe un calcul d'évaluation qui prend en arguments les conditions initiales que nous décrivons ci-dessus et qui calcule une spécialisation de la matrice  $M$  décrite page 55. La complexité arithmétique de ce calcul est bornée par*

$$\mathcal{O}\left(\mathcal{M}(n + \ell)\left(\mathcal{N}(n + \ell) + (n + m)L\right)\right).$$

**Preuve.** Nous dénotons par  $\bar{X}$  (resp.  $\bar{\Lambda}$ ,  $\bar{\Gamma}$ ) les solutions du système  $\nabla P$  et par  $\bar{X}_i$  (resp.  $\bar{\Lambda}_i$ ,  $\bar{\Gamma}_i$ ) les approximations de ces séries à l'ordre  $2^i$ . L'opérateur de Newton que nous considérons est tiré du développement de Taylor de la fonction associée à  $\nabla P$ . En effet, si on dénote par  $E_{i+1}$  le terme « correctif »  $(\bar{X} - \bar{X}_i, \bar{\Gamma} - \bar{\Gamma}_i, \bar{\Lambda} - \bar{\Lambda}_i) \bmod t^{2^{i+1}}$ , on a la relation

$$\nabla P(\bar{X}, \bar{\Lambda}, \bar{\Gamma}) = \nabla P(\bar{X}_i, \bar{\Lambda}_i, \bar{\Gamma}_i) + \frac{\partial \nabla P}{\partial (\dot{X}, \dot{\Gamma}, \dot{\Lambda})} \dot{E}_{i+1} + \frac{\partial \nabla P}{\partial (X, \Gamma, \Lambda)} E_{i+1} + \mathcal{O}\left(t^{2^{i+1}}\right) = 0.$$

Dans le système  $\nabla P$ , nous considérons les variables  $X$  comme des inconnues dans les  $n$  premières équations  $P(\dot{X}, X, \Theta, U) = 0$  et comme des constantes dans le reste des équations. Ainsi, il y a un décalage entre l'ordre des approximations  $\bar{\Lambda}_i$ ,  $\bar{\Gamma}_i$  et  $\bar{X}_i$ . De plus, si on considère les expressions composant  $\nabla P$  comme des relations matricielles, elles ont toutes le même séparant  $\partial P / \partial \dot{X}$ . À chaque étape, on peut calculer le terme correctif  $E_{j+1}$  en résolvant le système linéaire différentiel suivant :

$$\frac{\partial P}{\partial \dot{X}} \dot{E}_{j+1} + \frac{\partial P}{\partial X} E_{j+1} + \nabla P = 0 \bmod t^{2^{j+1}} \quad (5.6)$$

et l'utiliser pour raffiner le résultat  $(\bar{X}_{j+1}, \bar{\Gamma}_{j+1}, \bar{\Lambda}_{j+1}) = (\bar{X}_j, \bar{\Gamma}_j, \bar{\Lambda}_j) + E_{j+1}$  (voir [56] pour une preuve du caractère quadratique de cet opérateur). Ainsi, le calcul des solutions nécessite une résolution itérative du système linéaire différentiel (5.6).

Cette résolution se fait par la méthode de variation de la constante dans un cadre matriciel à partir du système homogène suivant :

$$\frac{\partial P}{\partial \dot{X}} \dot{W}_{j+1} + \frac{\partial P}{\partial X} W_{j+1} = 0 \text{ mod } t^{2^{j+1}}, \quad (5.7)$$

où  $W_{j+1}$  représente une matrice de taille  $n \times n$  avec des séries tronquées à l'ordre  $2^{j+1}$  comme coefficients. Pour résoudre effectivement cette équation, on considère la matrice  $W$  comme une série tronquée à l'ordre  $2^{j+1}$  et dont les coefficients sont des matrices à coefficients rationnels. Ainsi,  $\bar{W} \text{ mod } t^{2^{j+1}}$  est égal à  $W_0 + W_1 t + \dots + W_{2^j} t^{2^j}$ . Il est alors possible d'utiliser l'opérateur de Newton classique sur les séries pour calculer le produit, l'exponentielle et, en supposant que la matrice  $W_0$  soit inversible, l'inverse d'une série. Par exemple, si  $\bar{V}_j$  représente l'inverse de la série  $\bar{W}$  à l'ordre  $2^j$ , le terme  $\bar{V}_{j+1}$  est égal à  $2\bar{V}_j - \bar{V}_j \bar{W} \bar{V}_j$ . La solution du système (5.7) est fournie par les formules classiques

$$W = \exp \left( \int \left( \frac{\partial P}{\partial \dot{X}} \right)^{-1} \frac{\partial P}{\partial X} \right) \quad \text{et} \quad E = W^{-1} \int \left( W \left( \frac{\partial P}{\partial \dot{X}} \right)^{-1} \nabla P \right),$$

où, pour alléger la présentation, nous avons omis d'indiquer l'ordre des expressions manipulées. Nous pouvons prouver notre résultat de complexité. L'évaluation des expressions  $\nabla P$  utilisées sur des séries tronquées à l'ordre  $j$  nécessite au plus  $\mathcal{O}(\mathcal{M}(j)(\mathcal{N}(n+\ell) + (n+m)L))$  opération arithmétiques à chaque étape. La résolution des systèmes différentielles à l'ordre  $j$  requière  $\mathcal{O}(\mathcal{M}(j)\mathcal{N}(n+\ell))$  opérations arithmétiques (voir [16, 74] pour un exposé approfondi). Par ailleurs, l'opérateur que nous venons d'esquisser est quadratique (voir [56]) et on a  $\mathcal{M}(j) + \mathcal{M}(\lfloor j/2 \rfloor) + \dots = \mathcal{O}(\mathcal{M}(j))$ ; ceci nous permet de conclure.  $\square$

**Remarque 14.** La preuve de cette proposition fournit un algorithme permettant de construire une spécialisation générique de la matrice  $M$  et de tester l'observabilité. Nous avons résumé cet algorithme dans la figure 5.3 et nous l'avons implanté dans le système de calcul formel maple [96]; nous présentons dans l'Annexe B page 101 des exemples d'utilisation de cet algorithme.

Nous venons de présenter la complexité arithmétique du calcul de la matrice  $M$ . Il s'agit du nombre d'opérations arithmétiques nécessaires sur le corps de base; de telles opérations nécessitent un temps « d'exécution » proportionnel à la taille de ces opérands. Dans la section suivante, nous présentons une borne sur le degré des expressions manipulées qui nous permet, lorsque les calculs sont fait dans un corps fini, d'estimer la probabilité de succès de notre algorithme.

### 5.2.2 Complexité binaire – Aspect probabiliste

Les estimations suivantes reposent sur la définition formelle de la matrice  $M$  et ne sont pas dépendantes des calculs d'évaluations utilisées. Nous utiliserons dans la suite les notions de degré et de hauteur d'un polynôme (voir [27] pour plus de détails et de références).

**Définition 5.2** Soit  $A$  un sous-ensemble fini de  $\mathbb{Z}$ . La hauteur  $\bar{h}(A)$  (logarithmique) de  $A$  est définie par  $\bar{h}(A) := \log |A|$  avec  $|A| := \max\{|\alpha| + 1, \alpha \in A\}$ . La hauteur d'un polynôme à coefficients entiers est définie comme la hauteur de l'ensemble formé par les coefficients du polynôme.

Pour un entier, cette notion de hauteur correspond schématiquement au nombre de décimales nécessaires à sa représentation. Le lemme suivant résume quelques propriétés de la hauteur utilisées par la suite.

---

**Entrée** :  $\dot{X} - F(X, \Theta, U), Y - G(X, \Theta, U)$   
**Sortie** : EstObservable?, un booléen  
**Précalcul** Construction du calcul d'évaluation représentant  $\frac{\partial P}{\partial \dot{X}}, \frac{\partial P}{\partial X}, \frac{\partial P}{\partial \Theta}$ .  
**Initialisation** Choix d'un nombre premier ;  
 $\Theta \leftarrow$  Entiers arbitraires ;  $X \leftarrow$  Entiers arbitraires ;  
EstObservable?  $\leftarrow$  vrai ;  $\nu \leftarrow 1$  ;  $\Lambda \leftarrow 0_{n \times \ell}$  ;  $\Gamma \leftarrow \text{Id}_{n \times n}$  ;  
**tant que**  $\nu \leq n + \ell + 1$  **faire**  
 $W \leftarrow$  RésolutionHomogène  $\left( \frac{\partial P}{\partial \dot{X}} \dot{W} + \frac{\partial P}{\partial X} W = 0 \right) \bmod t^\nu$  ;  
 $(\Phi, \Lambda, \Gamma) \leftarrow (\Phi, \Lambda, \Gamma) + \text{VariationDeLaConstante}(W, \nabla P) \bmod t^\nu$  ;  
 $\nu \leftarrow 2 \nu$  ; # Doubler l'ordre  
**fin de tant que**  
MatriceJacobienne  $\leftarrow$  Coeffs( $\nabla Y(\Phi, \Gamma, \Lambda), t^j, j = 0, \dots, n + \ell$ ) ;  
**Test** **si**  $n + \ell > \text{Rang}(\text{MatriceJacobienne})$   
**alors** EstObservable?  $\leftarrow$  faux  
**fin de si**

FIG. 5.3 – Test d'observabilité algébrique locale

---

**Lemme 5.2** Soient  $p_1, \dots, p_s$  des polynômes à coefficients entiers dépendant de  $n + \ell + r$  indéterminées,  $\tilde{z}$  une valeur de spécialisation dans  $\mathbb{Z}^{n+\ell+r}$  et  $\partial$  une dérivation. On a les inégalités suivantes :

$$\begin{aligned}
\hbar(\partial p) &\leq \hbar(p) + \ln \deg p, \\
\hbar(p(\tilde{z})) &\leq \hbar(\tilde{z}) \deg p + \hbar(p), \\
\hbar\left(\sum_{i=1}^s p_i\right) &\leq \max_{i=1..s} \hbar(p_i) + \ln s, \\
\hbar(p_1 p_2) &\leq \min\{\deg p_1, \deg p_2\} \ln(n + \ell + r + 1) + \hbar(p_1) + \hbar(p_2).
\end{aligned}$$

En considérant cette notion de hauteur, nous estimons dans la proposition suivante la taille des rationnels nécessaires pour constituer la matrice  $M$ . Cette proposition est technique et nous ne donnons que le principe de la démonstration.

**Proposition 5.4** Soient  $\hbar_\Sigma$  (resp.  $d$ ) le maximum des hauteurs (resp. des degrés) des numérateurs et des dénominateurs formant le système  $\Sigma$  et  $\hbar_0$  le maximum des hauteurs des conditions initiales  $X_0, \Theta$  et des coefficients des séries représentant les commandes  $U$ . On a les bornes supérieures sur les hauteurs des numérateurs et des dénominateurs des dérivées des sorties :

$$\begin{aligned}
\hbar(\text{dénominateur de } H^{(j)}(X_0)) &\leq (2j + 1)(n + m) \left( (2 \ln(n + \ell + r + 1) + \hbar_0) d + \hbar_\Sigma \right), \\
\hbar(\text{numérateur de } H^{(j)}(X_0)) &\leq (2j + 1)(n + m) \left( (2 \ln(n + \ell + r + 1) + \hbar_0) d + \hbar_\Sigma \right) \\
&\quad + (j + 1) \ln 2n(n + m) d + (2j + 1) \ln(2j + 1).
\end{aligned}$$

**Preuve.** Puisque nous cherchons à établir des bornes supérieures, nous supposons que toutes les fonctions rationnelles  $f_i$  et  $g_i$  partagent le même dénominateur  $q$ . Ainsi, les hauteurs (resp. degrés) des numérateurs et des dénominateurs sont bornés par  $(n+m)(\hbar_\Sigma + d + \ln(n+\ell+r+1))$  (resp.  $(n+m)d$ ). Remarquons que les dénominateurs de  $H^{(j)}$  sont tous égaux à  $q^{2j+1}$  par hypothèse. Cette remarque et les inégalités du Lemme 5.2 permettent d'établir la première inégalité.

Nous prouvons la seconde inégalité par récurrence. Soit  $(V_j)_{j \in \mathbb{N}}$  la suite définie par les numérateurs de  $H$  comme conditions initiales  $V_0$  et par la relation  $v_{j+1} = \sum f_i(q\partial_i v_j - (2j+1)v_j\partial_i q)$ . Cette relation est choisie de manière à ce que  $V_j$  corresponde aux numérateurs de  $H^{(j)}$ . Les degrés des éléments  $V_j$  sont bornés par  $(2j+1)(n+m)d - j$  et, à partir des inégalités du Lemme 5.2, on établit la relation de récurrence bornant les hauteurs des éléments  $V_j$  :

$$\hbar(v_{j+1}) \leq 2(n+m)\left(2d \ln(n+\ell+r+1) + \hbar_\Sigma\right) + \hbar(v_j) + \ln 2n(2j+1)(n+m)d.$$

Cette relation permet de conclure en utilisant les inégalités du Lemme 5.2.  $\square$

Cette proposition montre que la taille des coefficients de la spécialisation de la matrice  $M$  dépend linéairement de l'ordre de dérivation à un facteur logarithmique près (voir [134] pour de plus amples développements). Malgré tout, des calculs intermédiaires peuvent nécessiter des entiers dont la hauteur « dépasse » cette borne. Pour circonvenir cette difficulté, nous allons effectuer les calculs dans un corps fini.

**Calcul modulaire – Aspect probabiliste.** Remarquons tout d'abord que la matrice des séparants  $\partial P/\partial X$  doit être inversible au premier ordre dans le corps fini choisi et que les mineurs non nuls de la matrice  $M$  doivent rester non nuls dans ce corps pour que les résultats de notre algorithme soient justes. Le premier point peut être testé au début de notre algorithme et donc, l'estimation de la probabilité de réussite de notre algorithme dépend principalement de la probabilité qu'une spécialisation choisie soit non générique i.e. qu'elle annule le déterminant d'un mineur non nul de la matrice  $M$ .

**Proposition 5.5** *Soit  $\mu$  un entier positif arbitraire. Considérons les constantes*

$$\begin{aligned} D &:= (n+\ell)(2\nu+1)(n+m)d, \\ \hbar_c &:= (2 \ln(n+\ell+r+1) + \ln D)D + (n+\ell)(2\nu+1)((n+m)h + \ln 2nD). \end{aligned}$$

*Supposons que la matrice  $M$  soit de rang générique plein et que les coefficients des spécialisations  $X_0$ ,  $\Theta_0$  et  $\bar{U}$  soient des entiers choisis dans l'ensemble  $\{0, \dots, \mu D\}$ . Le déterminant de cette matrice spécialisée n'est pas divisible par un nombre premier  $p$  supérieur à  $\hbar_c$  avec une probabilité supérieure à  $(1 - 1/\mu)^2$ .*

**Preuve.** Le déterminant  $Q$  de la matrice  $M$  est un polynôme multivarié de degré  $D$  dépendant des variables  $X$ ,  $\Theta$  et des coefficients des dérivées des commandes  $U$ . Le test à zéro probabiliste de Zippel & Schwartz (Proposition 3.2 page 31) indique que, pour tout entier  $\mu_1$ , une spécialisation des variables de  $Q$  en des entiers arbitrairement choisis dans  $\{0, \dots, \mu_1 D\}^{(n+\ell)(r+1)}$  n'est pas un zéro de  $Q$  avec une probabilité supérieure à  $1 - 1/\mu_1$ .

Nous allons utiliser le résultat suivant qui est un analogue dans un corps fini du test à zéro que nous venons d'utiliser (voir le § 18 dans [55]). Pour tout entier  $a$ ,  $b$  et  $c$  tels que  $b < a < c$ , la probabilité qu'un nombre premier  $p$  compris entre  $b+1$  et  $2b$  divise l'entier  $a$  est borné par  $2 \ln c/b$ .

La Proposition 5.4, le Lemme 5.2 et l'inégalité d'Hadamard permettent de borner la hauteur de la spécialisation de  $Q$  par

$$\hbar_c := (2\ln(n + \ell + r + 1) + h_0)D + (n + \ell)(2\nu + 1)((n + m)h + \ln 2nD).$$

Ainsi, si les calculs sont effectués modulo un nombre premier plus grand que  $2\hbar_c\mu_2$ , la probabilité que la spécialisation de  $Q$  ne soit pas divisible par  $p$  est plus grande que  $1 - 1/\mu_2$ . La combinaison de ces deux estimations permet de conclure.  $\square$

Nous résumons dans le théorème suivant l'ensemble des résultats présentés dans ce chapitre.

**Théorème 5.2** *Considérons un modèle dépendant de  $n$  variables de configuration, de  $\ell$  paramètres, de  $m$  sorties et de  $r$  commandes. Supposons que ce modèle soit représenté par un calcul d'évaluation de complexité  $L$ .*

*Il existe un algorithme probabiliste qui distingue l'ensemble des variables observables d'un modèle. De plus, il indique le nombre de variables non observables devant être supposées connues pour obtenir un modèle observable. La complexité arithmétique de cet algorithme est bornée par*

$$\mathcal{O}\left(\mathcal{M}(\nu)\left(\mathcal{N}(n + \ell) + (n + m)L\right) + m\nu\mathcal{N}(n + \ell)\right)$$

*avec  $\mathcal{M}(\nu)$  (resp.  $\mathcal{N}(\nu)$ ), le coût de la multiplication de deux séries à l'ordre  $\nu + 1$  (resp. de deux matrices de taille  $\nu \times \nu$ ) et  $\nu$  inférieur ou égal à  $n + \ell$  (génériquement  $\nu$  est égal à  $(n + \ell)/m$ ).*

*Soient  $\mu$  un entier positif arbitraire,  $D := 4(n + \ell)^2(n + m)d$  et*

$$D' := (2\ln(n + \ell + r + 1) + \ln \mu D)D + 4(n + \ell)^2((n + m)h + \ln 2nD).$$

*Si les calculs sont effectués modulo un nombre premier  $p$  supérieur à  $2D'\mu$  alors la probabilité d'obtenir une réponse correcte est minorée par  $(1 - 1/\mu)^2$ .*

L'aspect probabiliste correspond au choix aléatoire d'un point dans un ouvert de Zariski et à des calculs modulaires destinés à contrôler la taille des rationnels manipulés. Cet algorithme a été implanté à l'aide du logiciel de calcul formel `maple`. Ce code est disponible à l'url [129].

Remarquons pour finir que le test d'observabilité locale que nous présentons est basée sur le calcul générique de rangs de matrices. Si le rang générique de la matrice  $M$  est maximal, le modèle est observable et le résultat fournit par notre algorithme est certifié.

Afin de compléter les résultats présentés ci-dessus, nous avons regroupé en annexe des exemples d'applications du test d'observabilité. De plus, nous indiquons brièvement une méthode, à notre connaissance nouvelle, qui permet de déterminer un groupe continu de transformations qui agissent sur les variables et les paramètres non observables d'un système et laissent ses trajectoires et ses sorties invariantes.

## Troisième partie

# Approximation par des systèmes différentiels ordinaires plats de certains systèmes commandés décrits par des équations aux dérivées partielles



## Chapitre 6

# Présentation et illustration dans le cas linéaire

L'étude des équations aux dérivées partielles intervenant dans les problèmes d'automatique a connu un essor théorique remarquable ces dernières années. Notre intention étant de considérer un type bien particulier de problèmes, nous suggérons la lecture de [82, 20, 5, 29] pour l'exposé de méthodes plus générales et pour plus de références.

La définition des problèmes étudiés dans la dernière partie de cette thèse sera précisée au cours de ce chapitre. Indiquons tout de même que nous considérons des systèmes de type parabolique à une commande décrits par une équation d'évolution aux dérivées partielles à une variable d'espace. Ainsi, l'ordre de dérivation en espace de cette équation est strictement supérieur à son ordre de dérivation en temps. Enfin, ces systèmes peuvent être non linéaires et nous considérons un problème de Cauchy tel que la commande ne s'exerce que sur un bord et la contrainte sur l'autre (voir la Section 6.1.1 page 66). Par exemple, le modèle considéré peut être de la forme  $\omega_{xx} = f(t, x, \omega_x, \omega_t, \omega)$  avec  $\omega_x(t, 0)$  identiquement nulle et  $\omega(t, 1)$  égale à une commande  $u(t)$ .

Pour résoudre le problème de *planification de trajectoire approchée* dans ce cadre, nous proposons une méthode basée sur la notion de *platitude différentielle* introduite par M. FLIESS, J. LÉVINE, Ph. MARTIN et P. ROUCHON dans [44]. Cette notion, issue du cadre différentiel ordinaire, a déjà été utilisée dans [77, 78, 98, 48] pour l'étude de certains systèmes linéaires de dimension infinie et mise en œuvre dans [86] sur un exemple non linéaire de dimension infinie.

La généralisation directe de cette approche dans le cadre non linéaire se heurte à la difficulté de construire une solution *exacte* même lorsque des résultats théoriques d'existence sont obtenus. En revanche, il est généralement possible de construire une solution *approchée* (dans un sens à préciser) du problème d'origine et de ses solutions.

Après avoir brièvement exposé deux extensions de la notion de platitude différentielle aux équations linéaires aux dérivées partielles, nous utiliserons la méthode classique des différences finies pour remplacer le modèle de dimension infinie  $\Sigma$  considéré par des modèles de dimension finie  $\Sigma_i$  qui lui sont *proches* dans un sens que nous préciserons grâce à la méthode des approximations successives de Picard. Cette méthode doit être complétée par l'analyse de la convergence des trajectoires des  $\Sigma_i$  vers une trajectoire *exacte* de  $\Sigma$  dont on se sera assuré de *l'existence*.

Comme dans la partie précédente, nous utilisons une méthode à base de point fixe pour construire ces solutions approchées. Si le système de départ  $\Sigma$  est *sous la forme de Cauchy – Kowalewska*, nous verrons que ses approximations de dimension finie  $\Sigma_i$  sont *différentiellement plates*. On peut profiter

de cette dernière propriété pour résoudre un problème de planification de trajectoire. Nous illustrerons cette approche par un système linéaire basé sur l'équation de la chaleur. Dans le chapitre suivant, nous appliquerons notre point de vue à l'étude de problèmes non linéaires.

## 6.1 Platitude différentielle – Paramétrisation des trajectoires

Bien que nous ayons consacré la Section 2.2.1 page 16 à présenter la notion de platitude différentielle, rappelons tout de même quelques points. La notion de commandabilité a été formalisée par R.E. KALMAN dans le cadre linéaire de dimension finie et fait l'objet de nombreuses généralisations au cadre non linéaire et à la dimension infinie.

La notion de platitude des systèmes dynamiques non linéaire de dimension finie a été introduite en automatique par M. FLIESS, J. LÉVINE, Ph. MARTIN et P. ROUCHON dans [44]. Un système est différentiellement plat si ses solutions peuvent être localement paramétrées bijectivement par des fonctions arbitraires et leurs dérivées (voir la Section 2.2.1 page 16 et la Section 6.1.2 page 67). Dans le cas algébrique, un tel système correspond à une extension de corps différentiels dont la clôture algébrique est isomorphe à celle d'une extension différentiellement transcendante pure.

Pour cette classe de systèmes, la planification et le suivi de trajectoires, deux questions de base de l'automatique, admettent une réponse simple et explicite. Nous rappelons dans la section suivante que la notion de platitude différentielle a été étendue aux systèmes linéaires de dimension infinie.

### 6.1.1 Énoncé du problème et exemple

Dans ce chapitre, nous utiliserons systématiquement l'équation de la chaleur pour illustrer notre propos. Cet exemple type déjà utilisé dans [48, 78, 77] est l'occasion de présenter succinctement dans la Section 6.1.2 page 67 deux méthodes reposant sur la platitude différentielle qui permettent l'étude de certains systèmes linéaires de dimension infinie. Précisons que ce qui suit ne se veut pas une étude exhaustive des propriétés de cette équation.

Ainsi, l'utilisation de cet exemple se justifie par la volonté d'introduire clairement notre approche, et les relations qu'elle entretient avec les travaux antérieurs avant de pouvoir l'appliquer directement à des modèles non linéaires dans le Chapitre 7 page 81.

**Un exemple de tige chauffée.** Considérons une tige de longueur 1 dont la température  $\omega(t, x)$  est commandée en  $x = 1$  et dont l'autre extrémité en  $x = 0$  est supposée parfaitement isolée.

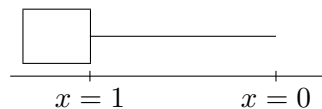


FIG. 6.1 – Tige chauffée à une extrémité et isolée à l'autre.

Ce système physique est modélisé par les équations :

$$\left( \frac{\partial}{\partial t} - \frac{\partial^2}{\partial x^2} \right) \omega(t, x) = 0, \quad (6.1)$$

$$\frac{\partial \omega}{\partial x}(t, 0) = 0, \quad (6.2)$$

$$\omega(t, 1) = u(t). \quad (6.3)$$

où  $x$  appartient à l'intervalle  $[0, 1]$  et  $u(t)$  représente la commande de la température en  $x = 1$ .

Cet exemple est le prototype des systèmes que nous considérons ; ceux-ci peuvent être non linéaires d'ordre plus élevé mais ils doivent être sous la forme de Cauchy – Kowalewska définie ci-dessous.

**Définition 6.1** *Un système est sous forme de Cauchy – Kowalewska si :*

- l'équation de contrainte (du type (6.2)) ne fait intervenir qu'un bord ;
- l'équation de commande (du type (6.3)) ne fait intervenir que l'autre bord ;
- l'ordre de dérivation en espace de l'équation d'évolution (du type (6.1)) est strictement supérieur à son ordre de dérivation en temps ;
- cette équation ne fait pas intervenir la commande.

Dans le chapitre suivant, nous étudierons des systèmes sous forme de Cauchy – Kowalewska où nous prendrons pour équation d'évolution (6.1), des équations non linéaires de type parabolique (comme par exemple  $\omega_t + \omega^3 - \omega_{xx} = 0$  et  $\omega_t + \omega\omega_x - \omega_{xx} = 0$ ) et une équation d'Euler – Lagrange qui décrit le comportement d'une tige flexible.

Nous précisons dans la définition suivante ce que l'on entend dans ce mémoire par *planification de trajectoire approchée*. Obtenir ce type de paramétrisation est le problème auquel nous proposons une solution dans ce chapitre.

**Définition 6.2** *Comme dans le cadre ordinaire (cf. Définition 2.2 page 13), on peut définir une trajectoire d'un système sous forme de Cauchy – Kowalewska comme étant une fonction  $\omega(t, x)$  du temps et de l'espace qui vérifie les équations d'évolution et de contrainte de ce système.*

*Considérons, pour  $x$  dans  $[0, 1]$  deux fonctions de l'espace  $x \rightarrow f(x)$  et  $x \rightarrow g(x)$ . Résoudre le problème de planification de trajectoire approchée défini par un système sous forme de Cauchy – Kowalewska et par les conditions initiales  $\omega(0, \cdot) = f(\cdot)$  et finale  $\omega(1, \cdot) = g(\cdot)$  consiste, pour tout réel positif  $\epsilon$  fixé, à déterminer une solution  $\omega(t, x)$  du système et donc une commande  $\omega(t, 1) = u(t)$  dépendante du temps telle que  $\sup_x |\omega(0, x) - f(x)| \leq \epsilon$  et  $\sup_x |\omega(1, x) - g(x)| \leq \epsilon$ .*

Par exemple, pour le système (6.1) – (6.3), nous supposons que le profil de température initial est  $\omega(0, \cdot) = 0$  ; on cherche à déterminer une loi de commande  $\omega(t, 1) = u(t)$  en boucle ouverte telle qu'à l'instant  $t = 1$ , le profil de température final soit *arbitrairement proche* de  $\omega(1, \cdot) = 1$  (voir figure 6.4 page 74).

**Remarque 15.** Dans ce mémoire, nous utilisons le terme de planification de trajectoire dans une acceptation relativement large. En effet, en toute rigueur il faudrait être capable de caractériser *tous* les états accessibles possibles. Comme nous considérons des équations non linéaires, cela peut s'avérer être une tâche redoutable.

Pour les équations de diffusion, les seuls états *atteignables* sont deux fois continûment dérivables et on ne peut pas atteindre un état arbitraire qui ne vérifie pas cette condition (cf. [81] pour un système linéaire aux dérivées partielles sans solutions et [62] pour une série d'exemples). De plus, des singularités à distance finie peuvent intervenir dans ces modèles.

Ainsi, nous ne prétendons pas faire une étude exhaustive de la contrôlabilité des modèles envisagés mais nous proposons une méthode pratique de résolution.

### 6.1.2 Paramétrisation et convergence des trajectoires

L'étude du problème de planification de trajectoire du système (6.1) – (6.3) page 66 peut se faire en deux étapes : l'obtention de paramétrisations formelles des trajectoires et l'étude de leurs convergences.

### Paramétrisation formelle des trajectoires

Depuis E. HOLMGREN, on sait que les solutions du système (6.1) – (6.3) page 66 sont caractérisées par la proposition suivante (voir [146], page 587) :

**Proposition 6.1** *En désignant par  $y(t)$  la fonction  $w(t, 0)$ , les relations*

$$\omega(t, x) = \sum_{j \in \mathbb{N}} y^{(j)}(t) \frac{x^{2j}}{(2j)!}, \quad (6.4)$$

$$u(t) = \sum_{j \in \mathbb{N}} \frac{y^{(j)}(t)}{(2j)!}, \quad (6.5)$$

*constituent une correspondance entre des fonctions indéfiniment dérivables et arbitrairement choisies  $y(t)$  et les solutions formelles de (6.1) – (6.3) page 66.*

Ainsi, le choix d'une fonction  $y(t)$  convenable permet de paramétriser exactement les trajectoires du système (6.1) – (6.3) puisque l'on obtient l'expression exacte des séries solutions. Cette fonction est appelée sortie plate du modèle.

Ce résultat peut être formulé algébriquement en remarquant que l'équation d'évolution des systèmes considérés est par hypothèse un ensemble caractéristique qui permet de calculer une série formelle solution. Mais cette propriété doit être complétée par l'étude de la convergence des expressions ci-dessus en fonction de la régularité de  $y$  (voir la Proposition 6.2 page 69).

Pour l'instant notre objectif est d'explicitier deux méthodes permettant d'obtenir ces paramétrisations. Schématiquement, ces méthodes consistent à se ramener d'un problème de dimension infinie à un problème de dimension finie. Parmi les autres approches possibles, on peut citer la généralisation de la forme de Brunovský à ce cadre linéaire de dimension infinie, introduite dans la thèse [77] de B. LAROCHE.

**Calcul opérationnel et théorie des modules.** La première approche que nous allons brièvement évoquer est une généralisation de la contrôlabilité linéaire de Kalman aux systèmes linéaires de dimension infinie, que ce soit des systèmes à retard ou des systèmes gouvernés par des équations aux dérivées partielles comme l'équation des ondes [98] ou celle de la chaleur [48].

Le calcul opérationnel usuel permet d'associer aux équations (6.1) – (6.3) le système ordinaire en la variable d'espace :

$$\begin{aligned} \hat{\omega}_{xx} &= s\hat{\omega}, & \hat{\omega}_x(0) &= 0, \\ \hat{\omega}(0) &= \hat{y}, & \hat{\omega}(1) &= \hat{u}, \end{aligned}$$

où  $s$  représente la dérivation par rapport au temps et le symbole  $\hat{\cdot}$  désigne la transformée de Laplace. Pour éviter les difficultés analytiques, on peut suivre l'approche de Mikusiński [95]. Ainsi, dans ce formalisme, la solution du système ci-dessus peut être mise sous la forme  $P\hat{\omega} = Q\hat{u}$  avec la *fonction opérationnelle*  $Q = \cosh(z\sqrt{s})$  et l'*opérateur*  $P = \cosh(\sqrt{s})$ .

Notons que  $P$  et  $Q$  sont  $\mathbb{C}$ -algébriquement indépendants. Considérons un module de générateurs  $\hat{\omega}$  et  $\hat{u}$  avec la relation  $Q\hat{\omega} = P\hat{u}$ . Ce module est défini sur l'anneau  $\mathbb{C}[P, Q]$ , il est sans torsion mais il n'est pas libre (voir [47]). Par contre, le module localisé sur  $\mathbb{C}[P, Q, (PQ)^{-1}]$  est libre de base  $\hat{y}(t) = \hat{\omega}(0)$  et on a :  $\hat{\omega} = P\hat{y}$  et  $\hat{u} = Q\hat{y}$ . Si on explicite l'action de  $P$  et  $Q$  sur la fonction arbitraire  $y(t)$ , on retrouve les paramétrisations de la proposition 6.1. Ce type de calcul se généralise directement à l'équation des ondes et à l'équation d'Euler – Bernoulli (cf. [49]).

**Intégration à la Cauchy – Kowalewska.** Une autre méthode consiste à profiter du fait que le système (6.1)–(6.3) page 66 est sous forme de Cauchy–Kowalewska. Ce point de vue adopté est exposé dans [146] et appliqué à un problème d'automatique par B. LAROCHE, Ph. MARTIN et P. ROUCHON dans [78]. Notons  $y(t)$  la fonction  $w(t, 0)$ ; en suivant la démarche de résolution classique de ce type de problème, on cherche une solution des équations (6.1)–(6.3) sous la forme d'une série formelle

$$\omega(t, x) = \sum_{j \in \mathbb{N}} a_j(t) x^j,$$

où les  $a_j$  sont des fonctions du temps supposées  $C^\infty$  sur  $[0, 1]$ . Une récurrence sur les  $a_j$  obtenue à partir de l'équation de la chaleur (6.1) permet de montrer la Proposition 6.1 page 68.

**Remarque 16.** Dans [78, 77], les auteurs remarquent que cette dernière méthode peut se généraliser à des systèmes dont l'équation d'évolution est non linéaire. Cette approche a été utilisée dans [86] par J. RUDOLPH et A. LYNCH pour une équation d'évolution du type  $\omega_t + \omega_x + \omega^2 - \omega_{xx} = 0$ . Pour ce faire, il faut déterminer dans chaque cas les paramétrisations exactes des trajectoires comme dans la Proposition 6.1 page 68 : il s'agit là de la principale difficulté de cette approche car l'expression de paramétrisations exactes devient rapidement très complexe à déterminer et à manipuler.

Nous proposons dans la Section 6.2 page 71 de combiner l'utilisation de la forme de Cauchy–Kowalewska d'un système non linéaire et l'idée de se ramener au cadre ordinaire. En effet, le fait que le système soit sous forme de Cauchy–Kowalewska permet d'avoir, en un certain sens, un système *chaîné*; ces systèmes sont différentiellement plats (en un sens que nous allons préciser) même lorsqu'ils ne sont pas linéaires. De plus, nous montrons qu'il est possible de se passer de l'expression des paramétrisations exactes des trajectoires. Pour se faire, nous ne pouvons pas uniquement utiliser des méthodes algébriques : il nous faut nous préoccuper de la convergence des objets manipulés.

### Convergence des trajectoires formelles

Le développement de Taylor d'une fonction régulière est convergent si cette fonction est analytique. Ces fonctions ne pouvant être constantes sur un ouvert sans l'être sur leur ensembles de définition, elles peuvent ne pas être adaptées à certains problèmes de planification de trajectoire. Ainsi, on est amené à considérer une classe plus large de fonctions définies comme suit.

**Définition 6.3 ([57])** Une fonction  $y(t)$  définie sur  $[0, 1]$  est de classe Gevrey  $\gamma$  si elle est  $C^\infty$  et si il existe  $M$  et  $R$ , deux réels positifs tels que

$$\forall j \in \mathbb{N}, \quad \sup_{t \in [0, 1]} |y^{(j)}(t)| \leq M \frac{(j!)^\gamma}{R^j}.$$

Ce type de fonction a été introduit par M. GEVREY pour l'étude de certaines équations aux dérivées partielles; c'est une notion maintenant classique qui est notamment utilisée pour l'étude des séries divergentes (voir [116] pour plus de références). En astreignant la sortie  $y(t)$  à être de classe Gevrey convenable, on assure la convergence des paramétrisations obtenues dans la proposition 6.1 comme l'indique la proposition suivante.

**Proposition 6.2 ([146, 78])** Si  $y(t)$  est une fonction de classe Gevrey  $\gamma$  strictement inférieure à 2 et telle que  $R$  soit strictement supérieur à 4, les solutions formelles (6.4) et (6.5) page 68 sont convergentes, analytique en la variable  $x$  et de classe Gevrey  $\gamma$  en la variable  $t$  sur  $[0, 1] \times [0, 1]$ .

La démonstration de cette proposition est similaire à celle du théorème de Cauchy–Kowalewska. On montre que la série formelle (6.4) solution du problème (6.1)–(6.3) page 66 est bien convergente par la méthode des séries majorantes en prenant en compte les propriétés de  $y(t)$ . Nous expliciterons ce point dans les Propositions 7.1 et 7.3 page 82 et 87.

**Exemples de fonctions de classe Gevrey.** L'ensemble des fonctions de classe Gevrey fixée est stable pour l'addition, le produit usuel, la composition, la dérivation et l'intégration (voir [57, 116] pour un exposé détaillé et plus de références). En suivant [116], on définit la famille suivante de fonctions indexées par  $\gamma$  :

$$\phi_\gamma(t) = \begin{cases} 0 & \text{pour } t < 0, \\ \frac{\int_0^t \exp(-1/(\tau(1-\tau))^\gamma) d\tau}{\int_0^1 \exp(-1/(\tau(1-\tau))^\gamma) d\tau} & \text{pour } t \in [0, 1], \\ 1 & \text{pour } t > 1. \end{cases} \quad (6.6)$$

La fonction  $\phi_1$  et ses deux premières dérivées sont représentées dans la figure 6.2. Ces fonctions

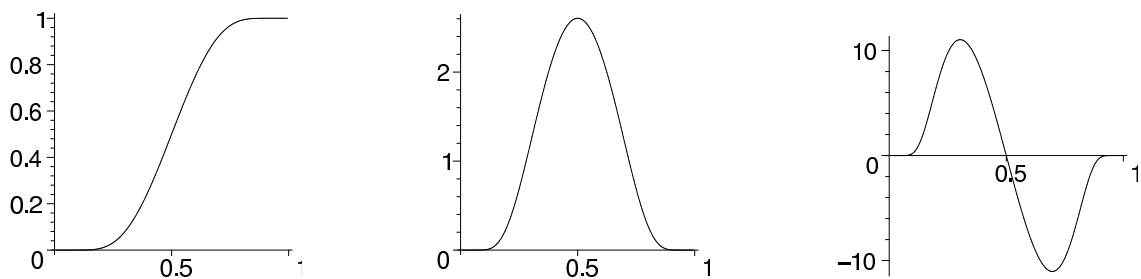


FIG. 6.2 – Les fonctions  $\phi_\gamma$ ,  $\dot{\phi}_\gamma$  et  $\ddot{\phi}_\gamma$ , pour  $\gamma = 1$ .

sont des fonctions Gevrey ; plus précisément, on a les propriétés suivantes :

**Lemme 6.1** *Pour tout  $\gamma$  strictement positif, la fonction  $\phi_\gamma$  vérifie les propriétés suivantes :*

- $\phi_\gamma$  est  $C^\infty$  et ses dérivées sont à support dans  $[0, 1]$  ;
- $\phi_\gamma^{(i)}(0)$  et  $\phi_\gamma^{(i)}(1)$  sont nuls pour tout entier  $i$  positif ;
- $\phi_\gamma$  est de classe Gevrey  $1 + 1/\gamma$ .

D'un point de vue calculatoire, il est intéressant de remarquer que les fonctions  $\phi_\gamma$  vérifient l'équation différentielle :

$$(t(1-t))^{1+\gamma} \ddot{\phi}_\gamma = \gamma(1-2t) \dot{\phi}_\gamma.$$

Nous verrons dans la suite de ce mémoire que, les fonctions  $\phi_\gamma$  sont utilisées dans ce mémoire pour résoudre des problèmes de planification de trajectoire car elles permettent notamment de passer d'un état stationnaire à un autre.

**Planification de trajectoire.** Reprenons maintenant le raisonnement suivi par B. LAROCHE, Ph. MARTIN et P. ROUCHON dans [78]. Nous considérons le système (6.1)–(6.3) page 66 et nous supposons que le profil de température initial est  $\omega(0, \cdot) = 0$  ; on cherche à déterminer une loi de commande  $\omega(t, 1) = u(t)$  en boucle ouverte telle qu'à l'instant  $t = 1$  le profil de température final soit proche de  $\omega(1, \cdot) = 1$ . Le résultat suivant est une conséquence directe de la Proposition 6.2 page 69 et du Lemme 6.1 page 70.

**Lemme 6.2** En désignant par  $y(t)$  la fonction  $\phi_\gamma(t)$  avec  $\gamma$  inférieur à 2, la fonction  $\omega(t, x)$  et la commande  $u(t)$  définies par

$$\omega(t, x) = \sum_{j \in \mathbb{N}} y^{(j)}(t) \frac{x^{2j}}{(2j)!} \quad \text{et} \quad u(t) = \sum_{j \in \mathbb{N}} \frac{y^{(j)}(t)}{(2j)!}$$

forment une solution du système de dimension infinie (6.1) – (6.3) telle que  $\omega(0, \cdot) = 0$  et  $\omega(1, \cdot) = 1$ .

Ainsi, ce lemme donne une solution exacte à notre problème de planification de trajectoire. En pratique, on obtient une solution approchée en ne prenant en compte que les premiers termes des paramétrisations des trajectoires. La figure 6.3 présente l'approximation du profil de température correspondant à 15 termes et à la sortie plate  $\phi_{10/9}(t)$

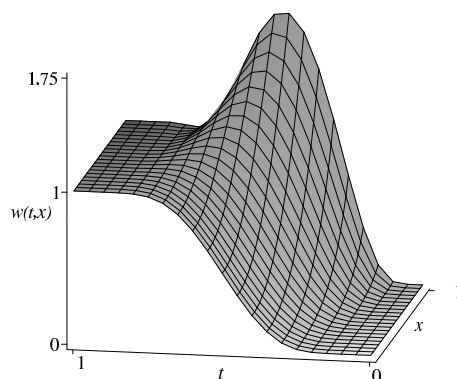


FIG. 6.3 – Profil de température de la tige obtenu par la méthode des séries

Dans la section suivante, nous montrons qu'il n'est pas nécessaire de déterminer les paramétrisations exactes des trajectoire sous forme de séries formelles et nous proposons un schéma numérique différent pour résoudre le problème de planification approchée de trajectoire.

## 6.2 Approximation par des systèmes plats

Le point de vue que nous allons présenter correspond souvent à une approximation de la physique du problème. En ce sens, il se trouve dans les travaux fondateurs de J.B.J. FOURIER concernant l'étude de la conduction de la chaleur dans une tige modélisée par une succession de masses ponctuelles indexés par l'entier  $i$ . Cette démarche consiste à considérer les relations :

$$\frac{\partial w_i}{\partial t} = (w_{i+1} - 2w_i + w_{i-1})cste^2,$$

où  $w_i$  représente la température de la masse  $i$ . En passant à la limite, on retrouve l'équation de la chaleur classique qui régit le modèle étudié (voir [61] pour plus de détails et d'autres exemples).

### 6.2.1 Méthode des différences finies – Méthode des lignes

Cette méthode se base sur le développement de Taylor d'une fonction  $f(t, x)$  que l'on suppose suffisamment régulière et définie sur  $[0, 1] \times [0, 1]$  (voir [152] pour un exposé complet). En se fixant  $x$

dans  $]0, 1[$  et un rationnel  $h$  suffisamment petit, on a clairement :

$$\begin{pmatrix} f(t, x - 2h) \\ f(t, x - h) \\ f(t, x) \\ f(t, x + h) \\ f(t, x + 2h) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -2h & 2h^2 & -4h^3/3 \\ 1 & -h & h^2/2! & -h^3/3! \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & h & h^2/2! & h^3/3! \\ 1 & 2h & 2h^2 & 4h^3/3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} f(t, x) \\ f_x(t, x) \\ f_{x^2}(t, x) \\ f_{x^3}(t, x) \end{pmatrix} + \mathcal{O}(h^4).$$

Représentons par  $\delta_h$  l'opérateur tel que  $\delta_h^j f(t, x) = f(t, x + jh)$ . Ainsi à partir des relations ci-dessus, on obtient les approximations suivantes :

$$\partial_x f(t, x) = \left( \frac{\delta_h - \delta_{-h}}{2h} \right) f(t, x) + \mathcal{O}(h), \quad (6.7)$$

$$\partial_{x^2} f(t, x) = \left( \frac{\delta_h - 2 + \delta_{-h}}{h^2} \right) f(t, x) + \mathcal{O}(h), \quad (6.8)$$

$$\partial_{x^3} f(t, x) = \left( \frac{\delta_h - 3 + 3\delta_{-h} - \delta_{-h}^2}{h^3} \right) f(t, x) + \mathcal{O}(h), \text{ etc.}$$

Dans la suite nous utiliserons le terme de *semidiscretisation* pour désigner ce type d'approximation.

Désignons par  $w_i(t)$  une approximation de la fonction  $\omega(t, i/n)$  avec l'entier  $i$  compris entre 0 et  $n$ . Ainsi pour tout entier positif  $n$ , en approximant le terme  $\omega_{x^2}$  dans l'équation de la chaleur (6.1) page 66 par la différence finie symétrique d'ordre 2 (6.8) page 72 et le terme  $\omega_x$  dans la condition initiale (6.2) par la différence finie progressive d'ordre 1 (6.7), nous pouvons associer à notre modèle la famille de systèmes différentiels ordinaires suivante :

$$\Sigma_n \quad \begin{cases} \dot{w}_i = n^2(w_{i+1} - 2w_i + w_{i-1}), & \text{avec } 1 \leq i \leq n, \\ w_1 = w_0, \\ w_n = u. \end{cases}$$

**Remarque 17.** Ces approximations ne sont pas canoniques. En effet, on peut approximer le terme  $\omega_{x^2}$  dans l'équation de la chaleur (6.1) par la différence finie  $w_i - 2w_{i-1} + w_{i-2}$ . A priori, de nombreux choix sont possibles mais nous verrons dans la Section 6.2.3 page 76 quelle semidiscretisation doit être utilisée dans notre approche.

Les systèmes  $\Sigma_n$  s'écrivent sous la forme matricielle d'une représentation d'état linéaire :

$$\frac{1}{n^2} \begin{pmatrix} \dot{w}_1 \\ \dot{w}_2 \\ \dot{w}_3 \\ \vdots \\ \dot{w}_{n-3} \\ \dot{w}_{n-2} \\ \dot{w}_{n-1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 1 & -2 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & 1 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & \dots & \dots & 0 & 1 & -2 & 1 \\ 0 & \dots & \dots & \dots & 0 & 1 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} w_1 \\ w_2 \\ w_3 \\ \vdots \\ w_{n-3} \\ w_{n-2} \\ w_{n-1} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} u(t). \quad (6.9)$$

**Remarque 18.** Notons qu'une approche possible consisterait à imposer une loi d'évolution  $w_1$  au bout de la tige et à intégrer directement le système implicite ainsi obtenu en utilisant, par exemple,

une méthode numérique à différentiation rétrograde (voir [15, 21] pour un exposé détaillé et plus de références).

Ce point de vue nécessite l'intégration numérique d'un système implicite d'indice de différentiation élevé ce qui est difficilement réalisable en général avec les outils numériques existants (dans le cas présent, l'indice est égal au nombre de points de discrétisation  $n$ ). L'approche présentée dans la section précédente consiste à remplacer l'étape d'intégration numérique par des manipulations formelles qui permettent d'explicitier la paramétrisation des trajectoires du système.

## 6.2.2 Paramétrisation des semidiscretisations

Puisque nous nous sommes ramenés par semidiscretisation à une famille de systèmes linéaires de dimension finie, nous utilisons la théorie des modules pour poursuivre notre étude. Nous renvoyons aux travaux [42, 47] de M. FLIESS pour quelques exemples élégants d'utilisation de la théorie des modules en automatique.

Il est possible d'associer au système (6.9) un  $\mathbb{R}[d/dt]$ -module  $\mathcal{D}$  en considérant que les fonctions  $w_i$  et  $u$  sont des générateurs de ce module qui vérifient les relations données sous la forme de la matrice de présentation :

$$\begin{pmatrix} 1 + \frac{1}{n^2} \frac{d}{dt} & -1 & 0 & \dots & 0 \\ -1 & 2 + \frac{1}{n^2} \frac{d}{dt} & -1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & -1 & 2 + \frac{1}{n^2} \frac{d}{dt} & -1 & 0 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & \dots & 0 & -1 & 2 + \frac{1}{n^2} \frac{d}{dt} & -1 & 0 \\ 0 & \dots & \dots & 0 & -1 & 2 + \frac{1}{n^2} \frac{d}{dt} & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} w_1 \\ w_2 \\ w_3 \\ \vdots \\ w_{n-2} \\ w_{n-1} \\ u \end{pmatrix} = 0.$$

Pour simplifier les notations, désignons par  $s$  la dérivation  $(1/n^2)d/dt$ . Le module  $\mathcal{D}$  est libre de base  $w_1$ . En effet, la matrice de présentation ci-dessus étant triangulaire, les fonctions  $w_i$  vérifient la relation de récurrence linéaire  $w_i = (2 + s)w_{i-1} - w_{i-2}$  pour tout entier  $i$  compris entre 3 et  $n - 1$ . Cette situation est chaînée; plus précisément, on a :

**Lemme 6.3 ([128])** *Considérons la récurrence linéaire  $v_i = (2 + s)v_{i-1} - v_{i-2}$ .*

– *En supposant que  $v_1$  est égal à  $v_0$ , on a :*

$$v_i = \sum_{j=0}^{i-1} \binom{i+j-1}{2j} s^j v_0.$$

– *En supposant que  $v_0$  est nul, on a :*

$$v_i = \sum_{j=0}^{i-1} \binom{i+j+1}{i-j} s^j v_1.$$

En désignant par  $y(t)$  la fonction  $w_1(t)$  et en utilisant les relations du lemme 6.3 nous pouvons, pour tout entier  $i$  compris entre 2 et  $n$ , paramétrer les trajectoires du système (6.9) en fonction de  $y$  :

$$w_i = \sum_{j=0}^{i-1} \binom{i+j-1}{2j} \frac{y^{(j)}}{n^{2j}}.$$

**Planification de trajectoire.** Le résultat suivant est une conséquence directe de la Proposition 6.3 page 73 et du Lemme 6.1 page 70.

**Lemme 6.4** *En notant  $y(t)$  la fonction  $\phi_\gamma(t)$  avec  $\gamma$  inférieur à 2, la fonction  $w(t, x)$  et la commande  $u(t)$  définies par*

$$w_i(t) = \sum_{j=0}^{i-1} \binom{i+j-1}{2j} \frac{y^{(j)}(t)}{n^{2j}} \quad \text{et} \quad u(t) = \sum_{j=0}^{n-1} \binom{n+j-1}{2j} \frac{y^{(j)}(t)}{n^{2j}}$$

*forment une solution du système de dimension finie (6.9) telle que, pour tout entier  $i$  compris entre 1 et  $n$ , les quantités  $w_i(0)$  sont nuls et les quantités  $w_i(1)$  égalent à 1.*

Les semidiscretisations de dimension finie (6.9) sont différentiellement plates puisque nous pouvons les paramétrer par une fonction arbitraire  $y$ . Nous avons vu dans la Section 2.2.2 page 18 comment résoudre un problème de planification de trajectoire plus général pour un système différentiellement plat de dimension finie.

Le Lemme 6.2 page 71 présente une solution du système de dimension infinie (6.1)–(6.3) page 66 qui résout le problème de planification approchée de trajectoire consistant à amener la température de la tige d'un état stationnaire ( $\omega(0, \cdot) = 0$ ) à un autre ( $\omega(1, \cdot) = 1$ ). Nous venons de présenter dans le Lemme 6.4 une solution approchée au même problème de planification de trajectoire. La figure 6.4 présente l'approximation du profil de température ainsi obtenue à partir de 15 points de discrétisations et en prenant  $\phi_{10/9}(t)$  comme sortie plate. La figure 6.5 représente la loi de commande obtenue.

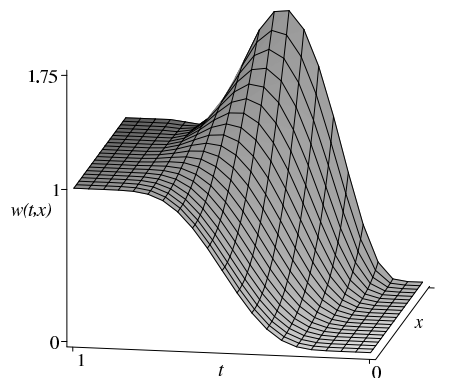


FIG. 6.4 – Profil de température de la tige chauffée obtenu par semidiscretisations.

**Remarque 19.** Pour que le Lemme 6.4 fournisse une approximation des trajectoires exactes (6.4), il nous faut démontrer une propriété de convergence supplémentaire. En effet, une erreur est commise lorsque l'on approxime les trajectoires du système de dimension infinie (6.1)–(6.3) par les trajectoires du système semidiscretisé (6.9) et nous devons montrer que cette erreur tend vers zéro lorsque le nombre de semidiscretisations tend vers l'infini. Ce résultat est présenté dans la section suivante (Section 6.2.3 page 76). Dans le paragraphe suivant, nous donnons un exemple pour lequel on peut résoudre un problème de planification de trajectoire pour les systèmes semidiscretisés sans pour autant que ces approximations convergent vers une trajectoire du système de dimension infinie.

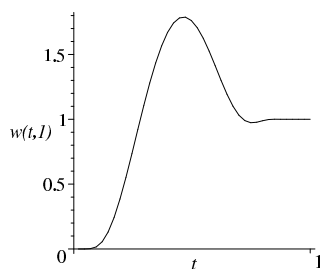


FIG. 6.5 – Commande en boucle ouverte correspondant au problème de la chaleur.

**Limitations de notre approche – équation des ondes.** Nous considérons une corde de longueur 1 contrôlée au bord et modélisée par le système :

$$\begin{aligned} \left( \nu^2 \frac{\partial^2}{\partial x^2} - \frac{\partial^2}{\partial t^2} \right) \omega(t, x) &= 0, \\ \omega(t, 0) &= 0, \\ \omega(t, 1) &= u(t), \end{aligned}$$

où les deux dernières relations représentent des conditions aux bords et  $\nu$  une constante positive correspondant à une vitesse de propagation. Nous invitons le lecteur intéressé par le contrôle de ce système et plus généralement par le contrôle de système à retard à consulter la thèse d'H. MOUNIER [98].

En procédant comme précédemment et avec les mêmes notations, pour tout entiers positifs  $n$ , nous pouvons associer à notre modèle de dimension infinie la famille de systèmes de dimension finie indexés par  $n$  :

$$\frac{1}{(n\nu)^2} \begin{pmatrix} \ddot{w}_1 \\ \ddot{w}_2 \\ \ddot{w}_3 \\ \vdots \\ \ddot{w}_{n-3} \\ \ddot{w}_{n-2} \\ \ddot{w}_{n-1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 1 & -2 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & 1 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & \dots & 0 & 1 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & \dots & 0 & 1 & -2 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} w_1 \\ w_2 \\ w_3 \\ \vdots \\ w_{n-3} \\ w_{n-2} \\ w_{n-1} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} u(t).$$

Seule la première ligne du second membre de ce système diffère du système (6.9) page 72 qui est une approximation du problème de la tige chauffée (6.1)–(6.3) page 66 ; on peut considérer sur ce système l'approche développée dans la Section 6.2.2. Ainsi, en choisissant comme sortie plate  $y(t)$  la fonction  $\omega_x(t, 0)$  et en utilisant le Lemme 6.3 page 73, il est possible d'obtenir la paramétrisation suivante :

$$w_i = \sum_{j=0}^{i-1} \binom{i+j-1}{i-j} \frac{y^{(2j)}}{(n\nu)^{2j}}.$$

Ce résultat n'est pas cohérent avec la physique du problème. En effet, la vitesse de propagation des ondes étant finie, il n'est pas en général possible de commander le système en un temps inférieur à  $2/\nu$ . Or la paramétrisation ci-dessus laisse à penser le contraire. Ce point a déjà été remarqué dans [20, 98] et une simple simulation montre que les paramétrisations sont divergentes i.e. pour

toutes fonctions  $y$  de classe Gevrey  $\gamma$  strictement supérieur à 1, les  $w_i$  tendent en général vers l'infini avec  $n$  le nombre de points de discrétisation.

Notons que le théorème de Cauchy–Kowalewska dont nous nous inspirons ne s'applique pas à cette équation hyperbolique. Cet exemple n'invalide pas notre approche; il montre qu'établir des paramétrisations formelles ne suffit pas. Cette étape doit être complétée par l'étude de la convergence des approximations.

### 6.2.3 Convergence des semidiscretisations — Opérateur de Picard

La Proposition 6.2 page 69 nous assure l'existence d'une fonction  $\omega$  solution du problème (6.1)–(6.3) page 66. Pour montrer la convergence des semidiscretisations que nous considérons, nous allons nous inspirer de l'opérateur intégral de Picard généralement utilisé pour montrer l'existence par approximations successives de solutions des systèmes de dimension finie. Cet opérateur est basé sur la constatation suivante :

**Lemme 6.5** *La fonction  $(t, x) \rightarrow \omega(t, x)$  est une solution du système d'équations aux dérivées partielles (6.1)–(6.3) page 66 si, et seulement si, elle vérifie la relation intégrale*

$$\omega(t, x) = \omega(t, 0) + \int_0^x \int_0^s \frac{\partial \omega}{\partial t}(t, \sigma) d\sigma ds.$$

**Preuve.** Considérons l'équation de la chaleur  $\omega_{x^2} = \omega_t$ . Après deux intégrations, on a :

$$\omega(t, x) = \omega(t, 0) + x\omega_x(t, 0) + \int_0^x \int_0^s \frac{\partial \omega}{\partial t}(t, \sigma) d\sigma ds.$$

La condition initiale  $\omega_x(t, 0) = 0$  et le choix de la sortie plate  $\omega(t, 0) = y(t)$  montrent qu'une solution des équations (6.1)–(6.3) vérifient la relation :

$$\omega(t, x) = y(t) + \int_0^x \int_0^s \frac{\partial \omega}{\partial t}(t, \sigma) d\sigma ds.$$

La réciproque est immédiate par dérivation. □

**Remarque 20.** Cette relation nous permet de définir l'opérateur de Picard dont le point fixe est solution de notre problème. Posons

$$\mathcal{P}v(t, x) = y(t) + \int_0^x \int_0^s \frac{\partial v}{\partial t}(t, \sigma) d\sigma ds.$$

Considérons la suite de fonctions  $(\mathcal{P}^j y)_{j \in \mathbb{N}}$  telles que  $\mathcal{P}^0 y$  est égal à  $y$  et  $\mathcal{P}^2 y$  à  $\mathcal{P}(\mathcal{P}y)$ . Cette suite est constituée des approximations de la solution recherchée (cf. Proposition 6.1 page 68). Un simple calcul montre d'ailleurs que pour tout entier  $i$ , on a :

$$(\mathcal{P}^i y)(t, x) = \sum_{j=0}^i y^{(j)}(t) \frac{x^{2j}}{(2j)!}.$$

Dans le paragraphe suivant, nous remarquons qu'il est possible de montrer l'existence de la solution et déterminer certaines de ses propriétés sans calculer l'expression exacte de la solution.

### Convergence de l'opérateur de Picard dans le cas de l'équation linéaire de la chaleur.

Par la suite, nous utilisons l'intégrale de Riemann dans notre approche car nous considérons un intervalle d'intégration compact et des fonctions bornées. De plus, la notion de convergence utilisée dans la suite est celle de la convergence uniforme.

Pour simplifier les notations, posons  $\psi_i := \mathcal{P}^i y$  pour tout entier  $i$ . Nous allons étudier la convergence uniforme de la suite de fonction  $(\psi_i)_{i \in \mathbb{N}}$ . Pour commencer, sachant que  $(\psi_1 - \psi_0)(t, x)$  est égal à  $\dot{y}(t)x^2/2$  et utilisant les propriétés d'une fonction Gevrey  $y$  explicitées dans la définition 6.3 page 69, on remarque qu'il existe  $M, R$  et  $\gamma$  tels que :

$$\forall j \in \mathbb{N}, \quad \text{Sup}_t \left| \psi_1^{(j)}(t, x) - \psi_0^{(j)}(t, x) \right| \leq \frac{M j!^\gamma x^2}{R^j 2}.$$

La linéarité de l'opérateur de Picard considéré dans notre cas, implique directement l'inégalité :

$$\forall j \in \mathbb{N}, \quad \text{Sup}_t \left| \psi_2^{(j)}(t, x) - \psi_1^{(j)}(t, x) \right| \leq \int_0^x \int_0^s \text{Sup}_t \left| \psi_1^{(j+1)}(t, \chi) - \psi_0^{(j+1)}(t, \chi) \right| d\chi ds.$$

En utilisant les inégalités précédentes, on trouve que :

$$\forall j \in \mathbb{N}, \quad \text{Sup}_t \left| \psi_2^{(j)}(t, x) - \psi_1^{(j)}(t, x) \right| \leq \frac{M(j+1)!^\gamma x^4}{R^j 4!}.$$

Par récurrence, on obtient aisément les inégalités :

$$\forall i \in \mathbb{N}, \quad \forall j \in \mathbb{N}, \quad \text{Sup}_t \left| \psi_{i+1}^{(j)}(t, x) - \psi_i^{(j)}(t, x) \right| \leq \frac{M(j+i)!^\gamma x^{2i}}{R^j (2i)!}.$$

Enfin, classiquement, on considère un élément de la suite  $(\psi_i)_{i \in \mathbb{N}}$  comme une somme des différences de ses prédécesseurs pour obtenir l'inégalité :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad \forall j \in \mathbb{N}, \quad \text{Sup}_t \left| \psi_n^{(j)}(t, x) \right| = \text{Sup}_t \left| \sum_{i=0}^{n-1} \psi_{i+1}^{(j)}(t, x) - \psi_i^{(j)}(t, x) \right| \leq \frac{M}{R^j} \sum_{i=0}^{n-1} \frac{(j+i)!^\gamma x^{2i}}{(2i)!}.$$

En utilisant l'inégalité classique  $(\ell + k)! \leq 2^{\ell+k} \ell! k!$ , on peut majorer les termes de droite ci-dessus :

$$\frac{M(j+i)!^\gamma x^{2i}}{R^j (2i)!} \leq \frac{M j!^\gamma i!^\gamma}{(R/2^\gamma)^j (2i)!} (2^\gamma x^2)^i \quad \text{et} \quad \frac{M}{R^j} \sum_{i=0}^{n-1} \frac{(j+i)!^\gamma x^{2i}}{(2i)!} \leq \frac{M j!^\gamma}{(R/2^\gamma)^j} \sum_{i \in \mathbb{N}} \frac{i!^\gamma}{(2i)!} (2^\gamma x^2)^i.$$

Pour tout  $\gamma$  est strictement inférieur à 2 et tout  $x$  strictement inférieur à  $2^{\gamma/2}$ , les suites de fonctions indéfiniment dérivables  $(\psi_i^{(j)})_{i \in \mathbb{N}}$  vérifie le critère de Cauchy ; elles convergent donc simplement. De plus, elles convergent uniformément vers une fonction  $\psi_\infty$  et ses dérivées. Cette fonction est donc bien définie et indéfiniment dérivable vis-à-vis de  $x$  et de  $t$ . Enfin, cette fonction est de classe Gevrey  $\gamma$  vis-à-vis du temps et analytique vis-à-vis de l'espace.

**Schéma numérique dérivé de la méthode de Picard.** Notre intention est d'utiliser la méthode de Picard pour approximer des solutions dans des situations où l'obtention de formules explicites est difficiles. Nous venons de voir que la solution recherchée  $w$  est point fixe de l'opérateur  $\mathcal{P}$  :

$$\mathcal{P}w(t, x) = y(t) + \int_0^x \int_0^s \frac{\partial w}{\partial t}(t, \sigma) d\sigma ds. \quad (6.10)$$

Cette intégrale peut être approximée par la méthode classique des sommes de Riemann. Ainsi, avec  $n$  points de discrétisations, pour tout  $x$  dans  $[i/n, (i+1)/n]$  et tout entier positif  $i$  strictement inférieur à  $n$ , on approche l'expression (6.10) par la somme :

$$\mathcal{P}_n \omega(t, x) = y(t) + \frac{1}{n^2} \sum_{j=0}^{i-1} \sum_{k=0}^j \frac{\partial \omega}{\partial t} \left( t, \frac{k}{n} \right). \quad (6.11)$$

Pour un entier  $n$  fixé, considérons les fonctions  $(\mathcal{P}_n^j y)_{j \in \mathbb{N}}$  telles que  $\mathcal{P}_n^0 y$  est égal à  $y$  et  $\mathcal{P}_n^2 y$  à  $\mathcal{P}_n(\mathcal{P}_n y)$ . Pour tout entier  $i$  strictement inférieur à  $n$  et pour tout  $x$  compris entre  $i/n$  et  $(i+1)/n$ , on a :

$$(\mathcal{P}_n y)(t, x) = y(t) + \frac{i(i-1)}{2n^2} \dot{y}(t), \quad (\mathcal{P}_n^2 y)(t, x) = y(t) + \frac{i(i-1)}{2n^2} \dot{y}(t) + \frac{(i+1)i(i-1)(i-2)}{12n^4} \ddot{y}(t).$$

Comme l'opérateur  $\mathcal{P}$ , cet opérateur est contractant (il est même stationnaire après  $i$  itérations) mais nous n'avons pas besoin de l'expliciter. En effet, remarquons que les *rappports* entre l'intégration et la dérivation trouvent un analogue dans le cadre des différences finies. Ainsi, on a :

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2} \mathcal{P} \omega(t, x) = \frac{\partial \omega}{\partial t}(t, x) \quad \text{et} \quad \left(1 - 2\delta_{-\frac{1}{n}} + \delta_{-\frac{1}{n}^2}\right) \mathcal{P}_n \omega \left( t, \frac{i}{n} \right) = \frac{1}{n^2} \frac{\partial \omega}{\partial t} \left( t, \frac{i-1}{n} \right),$$

où le terme de gauche correspond à une différence finie d'ordre 2 utilisée dans la méthode des lignes. Le symbole  $\omega$  représente la solution exacte et le symbole  $w$  désigne le point fixe ( $w = \mathcal{P}_n w$ ) de l'opérateur de Picard approximé. De plus, pour tout entier  $i$  compris entre 0 et  $n$ , les symboles  $w_i$  représentent les fonctions  $w(t, i/n)(t)$ . La fonction  $w$  vérifie la relation :

$$w \left( t, \frac{i}{n} \right) = 2w \left( t, \frac{i-1}{n} \right) + \frac{1}{n^2} \frac{\partial w}{\partial t} \left( t, \frac{i-1}{n} \right) - w \left( t, \frac{i-2}{n} \right).$$

Pour tout entier  $n$ , la fonction *en escalier*  $w(t, x)$  est définie par la relation  $w(t, x) = w_i(t)$  avec  $x$  dans  $[i/n, (i+1)/n]$  et l'entier  $i$  compris entre 0 et  $n$ ; les fonctions  $w_i(t)$  vérifient la récurrence linéaire suivante :

$$w_i = 2w_{i-1} + \frac{1}{n^2} \frac{\partial w_{i-1}}{\partial t} - w_{i-2}, \quad w_1 = w_0 = y(t).$$

Cette récurrence linéaire est à la base du Lemme 6.3 page 73 et donc elle permet de calculer les paramétrisations des trajectoires du système de dimension finie (6.9) page 72 qui approxime le système de dimension infinie (6.1)–(6.3) page 66. Nous pouvons maintenant montrer que les solutions approchées que nous calculons par la méthode des semidiscretisations convergent bien vers la solution du problème de planification de trajectoire considéré.

**Proposition 6.3** Soient  $\omega(t, x)$  un point fixe de l'opérateur  $\mathcal{P}$  et, pour tout entier  $n$ , la fonction  $w(t, x)$  définie par  $w(t, x) = w_i(t)$  pour tout  $x$  dans  $[i/n, (i+1)/n]$ . En notant  $y$  la fonction  $\phi_\gamma(t)$  avec  $\gamma$  inférieur ou égal 2, on a les propriétés suivantes :

- i.  $\omega(t, x)$  est une trajectoire du système de dimension infinie (6.1)–(6.3) qui résout le problème de planification de trajectoire  $\omega(0, \cdot) = 0$  et  $\omega(1, \cdot) = 1$  ;
- ii.  $\sup_{(t,x)} |\omega(t, x) - w(t, x)| = \mathcal{O}(1/n)$  ;
- iii.  $w(t, x)$  est une trajectoire du système de dimension finie (6.9) qui résout le problème de planification de trajectoire  $w(0, \cdot) = 0$  et  $w(1, \cdot) = 1$  ;

**Preuve.** L'assertion *i* est une conséquence du Lemme 6.2 page 71 et du Lemme 6.5 page 76. L'assertion *iii* est une conséquence du Lemme 6.4 et du Lemme 6.3 page 73. Il nous reste donc à montrer l'assertion *ii*. Nous ne ferons que donner les grandes lignes de cette démonstration simple mais technique qui repose principalement sur les propriétés du développement de Taylor. Remarquons que la méthode des sommes de Riemann permet l'approximation par une somme finie de l'intégrale d'une fonction  $v$  suffisamment régulière. Pour tout  $x$  dans  $[i/n, (i+1)/n]$ , on a :

$$\sup_{(t,x)} \left| \mathcal{P}v(t, x) - \mathcal{P}_n v(t, x) \right| = \sup_{(t,x)} \left| \int_0^x \int_0^s \frac{\partial v}{\partial t}(t, \sigma) d\sigma ds - \sum_{j=0}^{i-1} \sum_{k=0}^j \frac{\partial v}{\partial t} \left( t, \frac{k}{n} \right) \right| = o(1/n)$$

et  $\sup_{(t,x)} |\mathcal{P}v_t - \mathcal{P}_n v_t| = o(1/n)$ . Par ailleurs, les opérateurs  $\mathcal{P}$  et  $\mathcal{P}_n$  sont des opérateurs contractants (il s'agit d'opérateurs de Picard). Pour une condition initiale  $y(t)$  suffisamment régulière, on a :

$$\sup_{(t,x)} \left| \omega(t, x) - \mathcal{P}^j y(t) \right| = o(1/j) \quad \text{et} \quad \sup_{(t,x)} \left| w(t, x) - \mathcal{P}_n^j y(t) \right| = o(1/j).$$

Nous renvoyons à un traité d'analyse (par exemple [61]) pour les résultats classiques mais techniques concernant les sommes de Riemann. Remarquons que pour toutes fonctions  $f$  et  $g$  suffisamment régulières telles que  $\sup_{(t,x)} |f - g| = o(1/n)$  et  $\sup_{(t,x)} |f_t - g_t| = o(1/n)$ ; on a :

$$\sup_{(t,x)} |\mathcal{P}f - \mathcal{P}_n g| = \sup_{(t,x)} \left| \int_0^x \int_0^s \frac{\partial f - g}{\partial t} + \int_0^x \int_0^s \frac{\partial g}{\partial t} - \sum_{j=0}^{i-1} \sum_{k=0}^j \frac{\partial g}{\partial t} \left( t, \frac{k}{n} \right) \right| = o(1/n).$$

L'inégalité triangulaire permet donc de conclure que l'on a  $\sup_{(t,x)} |\omega(t, x) - w(t, x)| = o(1/n)$ .  $\square$

**Remarque 21.** Les remarques ci-dessus montrent que le choix de la semidiscretisation utilisée dans la méthode des lignes n'est pas arbitraire et ne dépend que du choix de la méthode d'approximation de l'opérateur intégral de Picard.

L'approximation d'une intégrale par la méthode des sommes de Riemann est générale et ne dépend pas de la nature du second membre. Ainsi, cette approche peut être utilisée (sous les réserves d'usages d'existence et de convergence) pour des systèmes plus généraux décrits par une équation d'évolution du type  $\omega_{xx} = f(t, x, \omega_x, \omega_t, \omega)$ . Le chapitre suivant est consacré à expliciter trois exemples.



## Chapitre 7

# Illustrations dans le cas non linéaire

Nous regroupons dans ce chapitre une série de résultats théoriques et expérimentaux relatifs à l'usage de la méthode seminumérique présentée dans le chapitre précédent. C'est l'occasion de montrer sur des exemples concrets comment choisir une sortie plate et un schéma numérique permettant de donner une solution à un problème de planification approchée de trajectoire.

Dans la dernière section, nous présentons un modèle de tige flexible et nous résolvons un problème de planification approchée que nous ne savons pas aborder autrement que par notre méthode. Nous présentons une simulation numérique et nous estimons numériquement la convergence des commandes approchées obtenues lorsque le pas de discrétisation tend vers zéro.

### 7.1 Illustration par deux exemples académiques de type diffusion

Dans cette section, on se propose d'illustrer l'approche développée dans le chapitre précédent sur des problèmes non linéaires de planification approchée de trajectoire. Nous considérons deux problèmes de Cauchy du type suivant

$$\begin{cases} \omega_{xx} - f(\omega, \omega_t, \omega_x) = 0, \\ \omega_x(t, 0) = 0, \\ \omega(t, 1) = u(t), \end{cases}$$

où  $x$  est dans  $[0, 1]$  et  $u(t)$  représente une commande agissant en  $x = 1$ . Loin de traiter le cas général, nous étudions ce problème pour  $f(\omega, \omega_t, \omega_x) = \omega_t + \omega^3$  et  $f(\omega, \omega_t, \omega_x) = \omega_t + \omega\omega_x$  sans faire une étude complète de la contrôlabilité de ces systèmes.

Nous considérons le problème de planification approchée de trajectoire suivant : le profil de température initial est  $\omega(0, \cdot) = 0$  et on cherche à déterminer une loi de commande  $\omega(t, 1) = u(t)$  en boucle ouverte telle qu'à l'instant  $t = 1$  le profil de température final soit *arbitrairement proche* de  $\omega(1, \cdot) = 1$ .

**Un résultat combinatoire.** Dans le chapitre précédent, nous avons utilisé sans démonstration un résultat d'existence et de régularité d'une solution de l'équation de la chaleur (Proposition 6.2 page 69). Ce résultat se distingue du résultat classique de Cauchy & Kowalewska par l'hypothèse de régularité de type Gevrey faite sur la condition initiale.

Nous utiliserons deux résultats similaires dans ce chapitre mais cette fois nous ne ferons pas l'économie des démonstrations pour lesquelles nous n'avons pas trouvé de références adéquates. Ainsi, nous prouvons que les problèmes de Cauchy que nous considérons ont une unique solution régulière

si la condition initiale est une fonction de classe Gevrey convenable. Ces démonstrations reposent sur la méthode des séries majorantes et s'inspirent de la stratégie de démonstration introduite par M. GEVREY dans [57] (voir l'article [86] pour un autre exemple du même type). Cette approche utilise deux inégalités combinatoires que nous regroupons dans le lemme suivant (nous renvoyons à [57] pour leur démonstration).

**Lemme 7.1** *Soient trois entiers positifs  $i$ ,  $j$  et  $l$  ainsi qu'un nombre réel  $\gamma$  supérieur ou égal à 1 et un ensemble de réels  $(c_k)_{0 \leq k \leq l}$ . On a l'égalité et l'inégalité suivantes.*

$$\frac{i!(i+j+l+1)!}{(i+j+1)!} = \sum_{r=0}^l \binom{l}{r} (j+r)!(i+l-r)!,$$

$$\sum_{r=0}^l c_k^\gamma \leq \left( \sum_{r=0}^l c_k \right)^\gamma.$$

### 7.1.1 Équation semilinéaire de la chaleur

Le problème de la commandabilité approchée de l'équation de la chaleur semilinéaire a été étudié dans [39] à l'aide d'un cadre d'analyse fonctionnelle inspiré de la méthode HUM de J.-L. LIONS. Notre étude se propose d'envisager le problème sous un angle plus restreint et calculatoire. Pour ce faire, nous considérons le problème de Cauchy suivant :

$$\begin{cases} \omega_t + \omega^3 - \omega_{xx} = 0, \\ \omega_x(t, 0) = 0, \\ \omega(0, x) = 0, \\ \omega(1, x) = 1, \\ \omega(t, 1) = u(t). \end{cases} \quad (7.1)$$

Remarquons que le système ne peut être stabilisé en pratique autour de l'état final  $\omega(1, x) = 1$  ; le choix de cet état dans notre étude est purement illustratif.

**Existence et régularité d'une solution.** La proposition suivante établit un résultat d'existence et de régularité d'une solution du système (7.1) avec pour condition initiale  $y$  une fonction du temps de classe Gevrey. Remarquons que cette proposition n'assure pas l'existence d'une sortie plate  $y$  permettant d'obtenir  $\omega(0, x) = 0$  et  $\omega(1, x) = 1$  ; ce point sera considéré dans la suite.

**Proposition 7.1** *Soit  $y(t)$  une fonction régulière du temps telle que  $\sup_t |y^{(h)}(t)| \leq mh!^\gamma / r^h$  avec  $\gamma$  inférieur à 2 et strictement supérieur à 1. Considérons le problème de Cauchy suivant*

$$\begin{cases} \omega_t + \omega^3 - \omega_{xx} = 0, \\ \omega_x(t, 0) = 0, \\ \omega(t, 0) = y(t). \end{cases}$$

*Il existe une unique solution  $\omega(t, x)$  de ce système qui soit analytique en  $x$  et Gevrey de classe  $\gamma$  en  $t$ . De plus, le rayon de convergence en  $x$  de cette série est supérieur ou égal à  $1/\sqrt{1/r + m^2/2}$ .*

**Preuve.** Considérons une solution formelle  $\omega(t, a) = \sum_{i \in \mathbb{N}} a_i(t) x^i / i!$  du problème ci-dessus, nous allons montrer que, moyennant une condition sur le rayon de convergence en  $x$ , la solution  $\omega$  a les

propriétés de régularité annoncées. Remarquons tout d'abord que si  $\omega$  est une solution, alors ses coefficients vérifient la relation de récurrence :

$$a_i = a_{i-2}' + \sum_{j+k+l=i-2} a_j a_k a_l. \quad (7.2)$$

Nous cherchons à démontrer la propriété de régularité suivante :

$$\sup_{t \in [0,1]} |a_i^{(h)}| \leq \frac{mR^i (h+i)!^\gamma}{r^h (i!)^{\gamma-1}}.$$

Par hypothèse, cette propriété est vraie pour  $a_0 = y$  et pour  $a_1 = 0$ ; nous allons la démontrer par récurrence. Nous supposons donc que cette propriété est vraie jusqu'à l'ordre  $h-1$ . La relation de récurrence (7.2) montre que pour tout  $t$  on a :

$$|a_i^{(h)}| \leq |a_{i-2}^{(h+1)}| + \left| \sum_{j+k+l=i-2} (a_j a_k a_l)^{(h)} \right|. \quad (7.3)$$

Pour établir notre résultat, il nous faut majorer convenablement le dernier terme de cette inégalité, et pour ce faire, nous allons l'expliciter. Tout d'abord remarquons que

$$\sum_{j+k+l=i-2} a_j a_k a_l = \sum_{j=0}^{i-2} a_j \sum_{k+l=i-2-j} a_k a_l = \sum_{j=0}^{i-2} a_j \sum_{k=0}^{i-2-j} \binom{i-2-j}{k} a_k a_{i-2-j-k}.$$

Nous nous intéressons à la dérivée d'ordre  $h$  de cette expression et aux relations :

$$\begin{aligned} \sum_{j+k+l=i-2} (a_j a_k a_l)^{(h)} &= \sum_{j=0}^{i-2} \sum_{m=0}^h \binom{h}{m} a_j^{(h-m)} \sum_{k=0}^{i-2-j} \binom{i-2-j}{k} (a_k a_{i-2-j-k})^{(m)}, \\ &= \sum_{j=0}^{i-2} \sum_{k=0}^{i-2-j} \sum_{m=0}^h \sum_{n=0}^m \binom{i-2-j}{k} \binom{h}{m} \binom{m}{n} a_j^{(h-m)} a_k^{(m-n)} a_{i-2-j-k}^{(n)}. \end{aligned}$$

Grâce à l'hypothèse de récurrence, nous savons majorer les termes du type  $a_p^{(q)}$  qui interviennent dans cette somme; ainsi, l'expression ci-dessus est majorée par :

$$\frac{m^3 R^{i-2} (h+i)!^\gamma}{r^h i!^{\gamma-1}} \sum_{j=0}^{i-2} \sum_{k=0}^{i-2-j} \sum_{m=0}^h \sum_{n=0}^m \binom{i-2-j}{k} \binom{h}{m} \binom{m}{n} \frac{i!^{\gamma-1} (h-m+j)!^\gamma (m-n+k)!^\gamma (n+i-2-j-k)!^\gamma}{(h+i)!^\gamma j!^{\gamma-1} k!^{\gamma-1} (i-2-j-k)!^{\gamma-1}}.$$

Nous allons à présent utiliser les résultats du Lemme 7.1 page 82 pour majorer les sommes intervenant dans l'expression ci-dessus. En combinant ces majorations, on constate que :

$$\sum_{n=0}^m \binom{m}{n} (m-n+k)!^\gamma (n+i-2-j-k)!^\gamma \leq \frac{(i-j-k-2)!^\gamma k!^\gamma (m+i-j-1)!^\gamma}{(i-j-1)!^\gamma}.$$

Cette relation induit la simplification suivante dans l'expression que nous cherchons à majorer.

$$\frac{m^3 R^{i-2} (h+i)!^\gamma}{r^h i!^{\gamma-1}} \sum_{j=0}^{i-2} \sum_{k=0}^{i-2-j} \sum_{m=0}^h \binom{i-2-j}{k} \binom{h}{m} \frac{i!^{\gamma-1} (i-j-k-2)!^\gamma k!^\gamma (h-m+j)!^\gamma (m+i-j-1)!^\gamma}{(h+i)!^\gamma j!^{\gamma-1} (i-j-1)!^\gamma}.$$

Le Lemme 7.1 permet de montrer la majoration suivante :

$$\sum_{m=0}^h \binom{h}{m} (h-m+j)!^\gamma (m+i-j-1)!^\gamma \leq \frac{(i-j-1)!^\gamma j!^\gamma (h+i)!^\gamma}{i!^\gamma}.$$

Une fois encore, cette relation induit la simplification suivante dans l'expression que nous cherchons à majorer.

$$\frac{m^3 R^{i-2}}{r^h} \frac{(h+i)!^\gamma}{i!^{\gamma-1}} \sum_{j=0}^{i-2} \sum_{k=0}^{i-2-j} \binom{i-2-j}{k} \frac{j! k! (i-j-k-2)!}{i!} = \frac{m^3 R^{i-2}}{r^h} \frac{(h+i)!^\gamma}{i!^{\gamma-1}} \sum_{j=0}^{i-2} \frac{j! (i-j-2)!}{i!}.$$

La relation (7.3) montre que l'on a

$$\left| a_i^{(h)} \right| \leq \frac{m R^i}{r^h} \frac{(h+i)!^\gamma}{(i!)^{\gamma-1}} \left( \frac{(i-1)^{\gamma-1}}{r i R^2} + \left( \frac{m}{R} \right)^2 \sum_{j=0}^{i-2} \frac{j! (i-j-2)!}{i!} \right). \quad (7.4)$$

Rappelons que le terme  $(i-1)^{\gamma-1}/i$  est inférieur à 1 par hypothèse; de plus la somme ci-dessus est inférieure ou égale à  $1/2$ . Ainsi, la série  $\omega$  est de classe Gevrey  $\gamma$  en  $t$  et analytique en  $x$  pour  $R \geq \sqrt{1/r + m^2/2}$ . C'est une conséquence de la formule de Cauchy–Hadamard donnant le rayon de convergence à partir des inégalités (7.4).  $\square$

Remarquons que ce résultat donne une borne inférieure sur le rayon de convergence des solutions et non pas une borne supérieure qui permettrait d'éviter les singularités. Nous allons considérer maintenant l'opérateur de Picard introduit dans la section 6.2.3 page 76 et étudier sa convergence dans le cas présent. Pour commencer, il est commode de prouver la proposition suivante :

**Proposition 7.2** *Soient  $f$  une fonction analytique et  $g$  est une fonction de classe Gevrey  $\gamma$  avec des ensembles de définition adéquates; la fonction  $f \circ g$  est une fonction de classe Gevrey  $\gamma$ .*

**Preuve.** Ce résultat se base sur la formule classique de Faà di Bruno univariée :

$$(f \circ g)^{(n)}(t) = n! \sum \frac{f^{(k)} \circ g(t)}{k_1! \cdots k_n!} \left( \frac{g^{(1)}(t)}{1!} \right)^{k_1} \left( \frac{g^{(2)}(t)}{2!} \right)^{k_2} \cdots \left( \frac{g^{(n)}(t)}{n!} \right)^{k_n}$$

où  $k := k_1 + \cdots + k_n$  et pour laquelle la sommation s'effectue sur l'ensemble des valeurs entières positives des  $k_1, \dots, k_n$  tels que  $n = k_1 + 2k_2 + \cdots + nk_n$ . De plus,

- la fonction  $f$  étant supposée analytique, il existe deux réels  $M_f$  et  $R_f$  tels que, pour tout entier  $j$ , on ait  $\sup_t |f^{(j)}(t)| \leq M_f j! / R_f^j$ .
- la fonction  $g$  étant supposée de classe Gevrey  $\gamma$ , il existe deux réels  $M_g$  et  $R_g$  tels que pour tout entier  $j$ , on ait  $\sup_t |g^{(j)}(t)| \leq M_g j!^\gamma / R_g^j$ .

En utilisant l'inégalité classique  $(\ell + k)! \leq 2^{\ell+k} \ell! k!$ , on peut tenir compte du caractère analytique de la fonction  $f$  pour obtenir à partir de l'inégalité :

$$\sup_t |(f \circ g)^{(n)}(t)| \leq n! \sum 2^k \sup_t \left| \frac{f^{(k)} \circ g(t)}{k!} \right| \sup_t \left| \frac{g^{(1)}(t)}{1!} \right|^{k_1} \sup_t \left| \frac{g^{(2)}(t)}{2!} \right|^{k_2} \cdots \sup_t \left| \frac{g^{(n)}(t)}{n!} \right|^{k_n}$$

la majoration suivante :

$$\sup_t |(f \circ g)^{(n)}(t)| \leq n! M_f \sum \frac{2^k}{R_f^k} \prod_{i=1}^n \sup_t \left| \frac{g^{(i)}(t)}{i!} \right|^{k_i}.$$

De même, la fonction  $g$  étant de classe Gevrey, on obtient la majoration :

$$\sup_t |(f \circ g)^{(n)}(t)| \leq n! M_f \sum \frac{2^k}{R_f^k} \prod_{i=1}^n \frac{i!^{k_i(\gamma-1)} M_g^{k_i}}{R_g^{i k_i}} \leq M_f \frac{n!}{R_g^n} \sum \left( \frac{2M_g}{R_f} \right)^k \prod_{i=1}^n i!^{k_i(\gamma-1)}.$$

Puisque chaque instance de l'entier  $k$  est inférieur ou égal à  $n$ , on obtient l'inégalité :

$$\sup_t \left| (f \circ g)^{(n)}(t) \right| \leq M_f \frac{n!}{\left(\frac{R_g R_f}{2M_g}\right)^n} \sum \prod_{i=1}^n i!^{k_i(\gamma-1)}.$$

Pour finir, constatons que le produit  $\prod_{i=1}^n i!^{k_i(\gamma-1)}/n!^{\gamma-1}$  est inférieur à 1. En effet, chaque  $k_i$  est strictement inférieur à  $n/i$  et la fonction  $\Gamma(x)^{n/x}$  étant strictement croissante sur  $[1, n]$ , chaque terme de ce produit est inférieur à 1. Ce fait justifie cette constatation et le fait que  $\prod_{i=1}^n i!^{k_i(\gamma-1)} \leq n!^{\gamma-1}$ . Pour finir, il nous reste à constater l'existence d'une constante  $C$  telle que le cardinal de l'ensemble des valeurs entières positives des  $k_1, \dots, k_n$  soit inférieur à  $C^n$  (pour s'en convaincre, remarquons de nouveau que chaque  $k_i$  est strictement inférieur à  $n/i$ ; ceci nous permet de majorer le cardinal de l'ensemble des  $k_i$  par le produit  $\prod_{i=1}^n n/i = n^n/n!$ , il ne reste qu'à utiliser la formule de Stirling pour conclure). Ainsi, pour tout entier  $n$ , il existe des constantes telles que :

$$\sup_t \left| (f \circ g)^{(n)}(t) \right| \leq M_f \frac{n!^\gamma}{\left(\frac{R_g R_f}{2CM_g}\right)^n}.$$

Cette dernière majoration permet de conclure la preuve.  $\square$

En utilisant les notations présentées page 77, posons  $\psi_i := \mathcal{P}^i y$  pour tout entier  $i$ . Nous allons étudier la convergence uniforme de la suite de fonction  $(\psi_i)_{i \in \mathbb{N}}$ . Pour commencer, sachant que  $(\psi_1 - \psi_0)(t, x)$  est égal à  $(\dot{y}(t) + y^3(t))x^2/2$  et utilisant les propriétés d'une fonction Gevrey  $y$  explicitées dans la définition 6.3 page 69 et la proposition ci-dessus, on remarque qu'il existe  $M, R$  et  $\gamma$  tels que :

$$\forall j \in \mathbb{N}, \quad \text{Sup}_t \left| \psi_1^{(j)}(t, x) - \psi_0^{(j)}(t, x) \right| \leq \frac{Mj!^\gamma x^2}{R^j 2}.$$

À partir de cette proposition et de la relation (7.2), il est possible d'établir un schéma numérique qui approxime une solution du problème. Mais ce schéma est complexe à déterminer et surtout à mettre en œuvre, nous proposons donc d'utiliser la méthode exposée dans le chapitre précédent.

**Semidiscretisation et schéma numérique.** Comme nous l'avons fait dans la Section 6.2.3 page 76, nous allons approximer la trajectoire  $\omega(t, x)$  solution du problème de Cauchy de dimension infinie (7.1) page 82 par une fonction  $w(t, x)$  telle que

- i. pour tout entier  $n$  et pour tout entier  $i$  compris entre 0 et  $n$ , on pose  $w(t, x) = w_i(t)$  pour tout  $x$  dans  $[i/n, (i+1)/n]$  avec les fonctions  $w_i(t)$  définies par un schéma numérique précisé dans la suite;
- ii.  $\sup_{(t,x)} \left| \omega(t, x) - w(t, x) \right| = o(1/n)$ ;
- iii. on a les contraintes  $w(0, \cdot) = 0$  et  $w(1, \cdot) = 1$ .

Il nous reste à exhiber le schéma numérique qui va nous permettre de faire notre approximation en calculant les  $w_i(t)$ . Le problème de Cauchy (7.1) est équivalent à trouver le point fixe de l'application :

$$\mathcal{P}\omega(t, x) = \omega(t, 0) + \int_0^x \int_0^s \omega^3(t, \sigma) + \frac{\partial \omega}{\partial t}(t, \sigma) d\sigma ds.$$

En utilisant la méthode d'intégration numérique des sommes de Riemann, cette expression peut être approximée par la discrétisation suivante :

$$\mathcal{P}_n w \left( t, \frac{i}{n} \right) = y(t) + \frac{1}{n^2} \sum_{j=0}^{i-1} \sum_{k=0}^j w^3 \left( t, \frac{k}{n} \right) + \frac{\partial w}{\partial t} \left( t, \frac{k}{n} \right).$$

Cette discrétisation vérifie la relation

$$\left(1 - 2\delta_{-\frac{1}{n}} + \delta_{-\frac{1}{n}}^2\right) \mathcal{P}_n w \left(t, \frac{i}{n}\right) = \frac{w^3}{n^2} \left(t, \frac{i-1}{n}\right) + \frac{1}{n^2} \frac{\partial w}{\partial t} \left(t, \frac{i-1}{n}\right),$$

qui induit le schéma numérique suivant ;

$$w_i = 2w_{i-1} + \frac{w_{i-1}^3}{n^2} + \frac{1}{n^2} \frac{\partial w_{i-1}}{\partial t} - w_{i-2}, \quad \text{avec} \quad w_1 = w_0 = y(t). \quad (7.5)$$

Ce schéma permet de calculer les fonctions  $w_i(t)$ . Il nous faut à présent déterminer une sortie plate permettant d'assurer la condition iii.

**Choix de la sortie plate – Planification de trajectoire.** Nous avons établi dans la Proposition 7.1 page 82 une borne inférieure sur le rayon de convergence des solutions du problème (7.1) page 82 en fonction des propriétés de la fonction  $y$  utilisée comme condition initiale. Remarquons que le choix d'une fonction  $\phi_\gamma$  ne convient pas à la résolution de ce problème du fait du terme de « rayonnement »  $\omega^3$  présent dans l'équation d'évolution.

Nous ne disposons pas de paramétrisation exacte des solutions du problème (7.1) mais nous avons des conditions sur la sortie plate  $y$  imposée par le schéma numérique (7.5) et les conditions  $w(0, \cdot)$  et  $w(1, \cdot)$ . Dans notre cadre, une stratégie générale pour déterminer une approximation de la sortie plate  $y$  consiste à trouver deux polynômes  $p = \sum_{i=0}^n p_i t^i / i!$  et  $q = \sum_{i=0}^n q_i t^i / i!$  tels que

$$\begin{aligned} p_0 &= w(0, 0), & p_{j+1} &= \frac{\partial^2 w(0, x)}{\partial x^2}(0) - p_j^3, \\ q_0 &= w(1, 0), & q_{j+1} &= \frac{\partial^2 w(1, x)}{\partial x^2}(0) - q_j^3, \end{aligned} \quad \text{pour } 1 \leq i \leq n.$$

**Lemme 7.2** Avec les notations de la Proposition 6.1 page 70, la sortie plate  $y = q\phi_\gamma + (1 - \phi_\gamma)p$  permet de construire une solution approchée du problème de planification de trajectoire (7.1).

Nous présentons dans la figure 7.1 le profil de la fonction  $w(t, x)$  obtenue en utilisant la sortie  $y$  que nous venons de calculer.

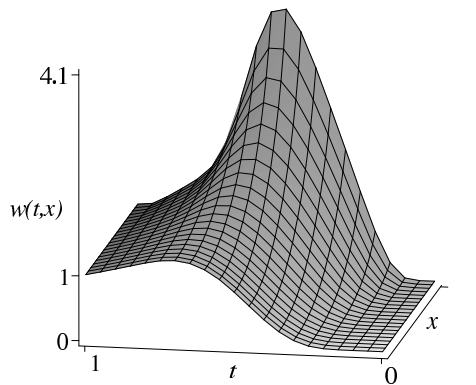


FIG. 7.1 – Profil de température de la tige chauffée semilinéaire au cours du temps.

Dans la section suivante, nous présentons un autre exemple d'application de notre méthode. Cet exemple permet d'illustrer le choix de l'approximation numérique utilisée pour remplacer le problème initial de dimension infinie par un problème de dimension finie.

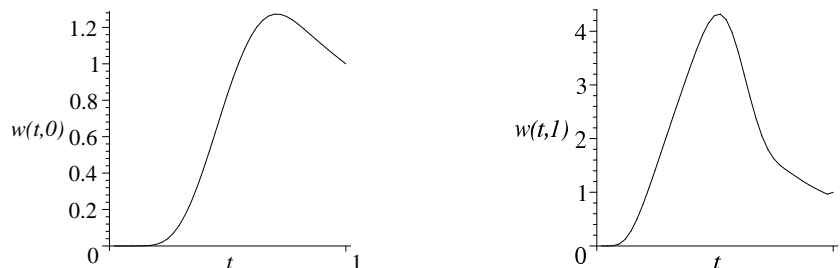


FIG. 7.2 – La sortie plate utilisée et la commande en boucle ouverte obtenue.

### 7.1.2 Équation de Burger non linéaire avec diffusion

L'équation introduite par J.M. BURGER dans les années cinquante est un modèle simple des interactions entre les phénomènes de convection et de diffusion. Bien que la transformation de Cole–Hopf permette de linéariser exactement cette équation, nous allons tout de même lui appliquer la méthode présentée dans ce chapitre à titre d'illustration. En effet, cette transformation utilise un logarithme qui ne nous permet pas de déduire directement la planification de trajectoire pour l'équation de Burger à partir de celle faite pour l'équation de la chaleur. Nous considérons le problème de Cauchy suivant :

$$\begin{cases} \omega_t + \omega\omega_x - \omega_{xx} = 0, \\ \omega_x(t, 0) = 0, \\ \omega(0, x) = 0, \\ \omega(1, x) = 1, \\ \omega(t, 1) = u(t). \end{cases} \quad (7.6)$$

La valeur du coefficient de viscosité qui intervient généralement dans le terme de diffusion ne modifie en rien l'étude qui suit ; nous spécialisons donc arbitrairement ce coefficient à un. Par ailleurs, nous renvoyons à [109] pour l'étude de l'équation de Burger sans terme de diffusion dans le cadre de la platitude différentielle.

**Existence et régularité d'une solution.** La proposition suivante établit un résultat d'existence et de régularité d'une solution du système (7.6). Remarquons que cette proposition n'assure pas l'existence d'une sortie plate  $y$  permettant d'obtenir  $\omega(0, x) = 0$  et  $\omega(1, x) = 1$  ; ce point sera considéré dans la suite.

**Proposition 7.3** *Soit  $y(t)$  une fonction régulière du temps telle que  $\sup_t |y^{(h)}(t)| \leq mh!^\gamma/r^h$  avec  $\gamma$  inférieur à 2 et strictement supérieur à 1. Considérons le problème de Cauchy suivant*

$$\begin{cases} \omega_t + \omega\omega_x - \omega_{xx} = 0, \\ \omega_x(t, 0) = 0, \\ \omega(t, 0) = y(t). \end{cases}$$

*Il existe une unique solution  $\omega$  de ce système qui soit analytique en  $x$  et Gevrey de classe  $\gamma$  en  $t$ . De plus, le rayon de convergence en  $x$  de cette série est supérieur à  $2/(m + \sqrt{m^2 + 4/r})$ .*

**Preuve.** Considérons une solution formelle  $\omega = \sum_{i \in \mathbb{N}} a_i(t) x^i / i!$  du problème ci-dessus, nous allons montrer que, moyennant une condition sur le rayon de convergence en  $x$ , la solution  $\omega$  a les propriétés

de régularités annoncés. Remarquons tout d'abord que si  $\omega$  est une solution, alors ses coefficients vérifient la relation de récurrence :

$$a_i = a_{i-2}' + \sum_{j=0}^{i-2} \binom{i-2}{j} a_j a_{i-j-1}. \quad (7.7)$$

Nous cherchons à démontrer la propriété de régularité suivante :

$$\sup_{t \in [0, T]} |a_i^{(h)}| \leq \frac{mR^i (h+i)!^\gamma}{r^h (i!)^{\gamma-1}}.$$

Par hypothèse, cette propriété est vraie pour  $a_0 = y$  et pour  $a_1 = 0$ ; nous allons la démontrer par récurrence. Nous supposons donc que cette propriété est vraie jusqu'à l'ordre  $h-1$ . La relation de récurrence (7.7) montre que

$$|a_i^{(h)}| \leq |a_{i-2}^{(h+1)}| + \left| \sum_{j=0}^{i-2} \sum_{l=0}^h \binom{i-2}{j} \binom{h}{l} a_j^{(h-l)} a_{i-j-1}^{(l)} \right|. \quad (7.8)$$

Pour établir notre résultat, il nous faut majorer convenablement le dernier terme de cette inégalité, et pour ce faire, nous allons utiliser l'hypothèse de récurrence et les résultats du Lemme 7.1 page 82. En combinant ces majorations, on constate que :

$$\begin{aligned} \sum_{l=0}^h \binom{h}{l} a_j^{(h-l)} a_{i-j-1}^{(l)} &\leq \frac{m^2 R^{i-1}}{r^h} \sum_{l=0}^h \binom{h}{l} \frac{(h+j-l)!^\gamma}{j!^{\gamma-1}} \frac{(i+l-j-1)!^\gamma}{(i-j-1)!^{\gamma-1}}, \\ &\leq \frac{m^2 R^{i-1} j! (i-j-1)! (h+i)!^\gamma}{r^h i!^\gamma}. \end{aligned}$$

Ainsi, cette inégalité et la relation (7.8) montrent que l'on a

$$|a_i^{(h)}| \leq \frac{mR^i (h+i)!^\gamma}{r^h (i!)^{\gamma-1}} \left( \frac{(i-1)^{\gamma-1}}{r i R^2} + \frac{m}{R} \sum_{j=0}^{i-2} \binom{i-2}{j} \frac{j! (i-j-1)!}{i!} \right). \quad (7.9)$$

Rappelons que le terme  $(i-1)^{\gamma-1}/i$  est inférieur à 1 par hypothèse; de plus la somme ci-dessus est égale à  $1/2$ . Ainsi, la série  $\omega$  est de classe Gevrey  $\gamma$  en  $t$  et analytique en  $x$  pour  $R$  positif tel que  $R^2 - mR - 1/r \geq 0$ . Encore une fois, ce résultat est une conséquence de la formule de Cauchy-Hadamard et des inégalités (7.9).  $\square$

**Semidiscretisation.** Comme nous l'avons fait dans la Section 6.2.3 page 76, nous allons approximer la trajectoire  $\omega(t, x)$  solution du problème de Cauchy de dimension infinie (7.6) par une fonction  $w(t, x)$  telle que

- i. pour tout entier  $n$  et pour tout entier  $i$  compris entre 0 et  $n$ , on pose  $w(t, x) = w_i(t)$  pour tout  $x$  dans  $[i/n, (i+1)/n]$  avec les fonctions  $w_i(t)$  définies par un schéma numérique à préciser;
- ii.  $\sup_{(t,x)} |\omega(t, x) - w(t, x)| = o(1/n)$ ;
- iii. on a les contraintes  $w(0, \cdot) = 0$  et  $w(1, \cdot) = 1$ .

Il nous reste à exhiber le schéma numérique qui va nous permettre de faire notre approximation. Le problème de Cauchy (7.6) est équivalent à trouver le point fixe de l'application :

$$\mathcal{P}\omega(t, x) = \omega(t, 0) + \int_0^x \int_0^s \omega(t, \sigma) \omega_x(t, \sigma) + \frac{\partial \omega}{\partial t}(t, \sigma) d\sigma ds.$$

Après une intégration par partie, on obtient :

$$\omega(t, x) = \omega(t, 0) + x \frac{\omega^2(t, 0)}{2} + \int_0^x \frac{\omega^2(t, s)}{2} ds + \int_0^x \int_0^s \frac{\partial \omega}{\partial t}(t, \sigma) d\sigma ds.$$

En utilisant la méthode des sommes de Riemann, cette expression peut être approximée par la discrétisation suivante :

$$\mathcal{P}_n w \left( t, \frac{i}{n} \right) = y(t) + \frac{i}{2n} y^2(t) + \frac{1}{2n} \sum_{j=0}^{i-1} w^2 \left( t, \frac{j}{n} \right) + \frac{1}{n^2} \sum_{j=0}^{i-1} \sum_{k=0}^j \frac{\partial w}{\partial t} \left( t, \frac{k}{n} \right).$$

Cette discrétisation vérifie la relation

$$\left( 1 - 2\delta_{-\frac{1}{n}} + \delta_{-\frac{1}{n}^2} \right) \mathcal{P}_n w \left( t, \frac{i}{n} \right) = \frac{w^2}{2n} \left( t, \frac{i-1}{n} \right) - \frac{w^2}{2n} \left( t, \frac{i-2}{n} \right) + \frac{1}{n^2} \frac{\partial w}{\partial t} \left( t, \frac{i-1}{n} \right),$$

qui induit le schéma numérique suivant permettant de définir les fonctions  $w_i(t)$  :

$$w_i = 2w_{i-1} + \frac{w_{i-1}^2}{2n} + \frac{\dot{w}_{i-1}}{n^2} - w_{i-2} - \frac{w_{i-2}^2}{2n}, \quad \text{avec} \quad w_1 = w_0 = y(t). \quad (7.10)$$

Il nous reste à présent à déterminer une sortie plate convenable.

**Choix de la sortie plate – Planification de trajectoire.** La méthode utilisée dans la sec-

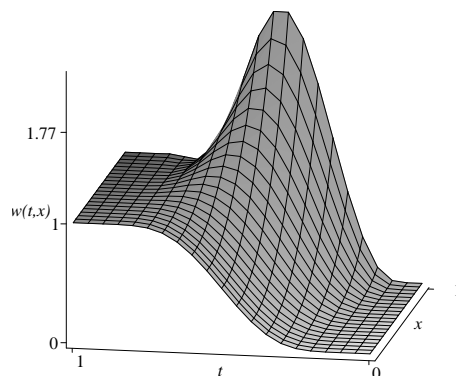


FIG. 7.3 – Profil de vitesse d'un gaz de particule obéissant à l'équation de Burger.

tion précédente s'applique pour déterminer la sortie plate  $y$ . Dans ce cas, il nous suffit de prendre une fonction  $\phi_\gamma$  présentée page 70. Ainsi, on obtient le profil présenté dans la figure (7.3) avec la commande présentée dans la figure 7.4. Cette similitude n'est en rien surprenante puisque la transformation de Cole–Hopf permet de réinterpréter l'équation de Burger sous la forme de l'équation de la chaleur.

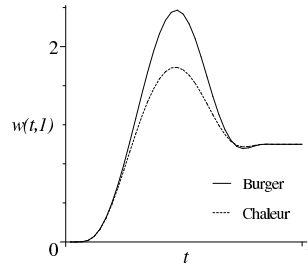


FIG. 7.4 – Comparaison de la commande du problème de la chaleur et de celle de Burger obtenues avec la même sortie plate.

## 7.2 Illustration par un modèle non linéaire de tige flexible

Nous considérons dans ce chapitre le problème de la commande en boucle ouverte d'un modèle non linéaire de tige flexible plane. Par cet exemple académique, nous cherchons à montrer que l'approche développée dans les chapitres précédents permet d'étudier le comportement d'un modèle que nous ne savons pas traiter autrement.

Après avoir présenté l'équation d'Euler–Lagrange qui décrit notre exemple, nous en donnons une semidiscretisation qui permet de résoudre, de manière approchée, un problème de planification de trajectoire. Pour finir, nous présentons une simulation numérique et nous étudions la convergence des commandes approchées obtenues lorsque le pas de discrétisation tend vers zéro.

### 7.2.1 Une modélisation de tige flexible non linéaire

L'étude du contrôle des modèles linéaires de tiges flexibles repose principalement sur les propriétés de l'équation d'Euler–Bernoulli. Pour ce type de problèmes, nous renvoyons le lecteur intéressé à l'article [49] pour plus de références sur ce sujet et pour une solution élégante utilisant la platitude.

**Remarque 22.** Dans la suite, nous ne supposons pas que la flexion de la tige soit faible et nous n'utilisons donc pas une modélisation de type Euler–Bernoulli.

Nous considérons une tige flexible de masse  $m$  et de longueur  $L$ . Nous supposons que la position  $(u_1(t), u_2(t))$  d'une de ces extrémités  $s = L$  est contrôlée dans le plan et que la fonction  $\omega(t, s)$  représente la tangente à la tige à l'abscisse  $s$  et au temps  $t$ .

Pour finir, nous supposons que l'orientation  $\omega(t, L)$  (noté  $u_3(t)$ ) de l'extrémité de la tige  $s = L$  est elle aussi contrôlée et que l'autre extrémité  $s = 0$  est solidaire d'une masse  $M$ . Ces hypothèses sont schématisées dans la figure 7.5.

**Équations d'Euler–Lagrange du modèle.** Fixons nous un référentiel dans le plan. La position  $(x(t, s), y(t, s))$  d'un point d'abscisse  $s$  sur la tige s'obtient par les relations :

$$\begin{aligned} x(t, s) &= x(t, L) + \int_0^s \cos(\omega(t, \sigma)) d\sigma, \\ y(t, s) &= y(t, L) + \int_0^s \sin(\omega(t, \sigma)) d\sigma. \end{aligned} \quad (7.11)$$

Le comportement de notre tige sur un intervalle de temps  $[0, T]$  peut être décrit à partir du Lagrangien classique suivant :

$$\int_0^L C(\partial_s \omega)^2 - \rho((\partial_t x)^2 + (\partial_t y)^2),$$

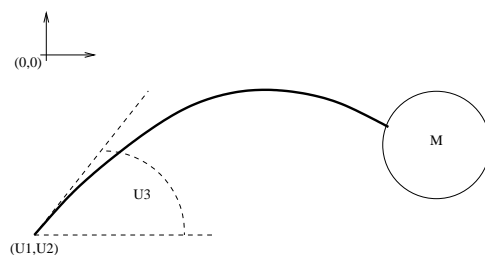


FIG. 7.5 – Description de la tige flexible non linéaire considérée.

où  $C$  représente un coefficient de flexibilité et  $\rho$  la masse linéique  $m/L$ . Après quelques intégrations par partie, on obtient l'équation aux dérivées partielles suivante :

$$\frac{C}{\rho} \partial_s^2 \omega - \sin(\omega) \int_0^s \partial_{t^2} x + \cos(\omega) \int_0^s \partial_{t^2} y = 0, \quad (7.12)$$

ainsi que les conditions aux limites :

$$\omega(t, L) = u_3(t), \quad \partial_s \omega(t, L) = 0 \quad \text{et} \quad C \partial_s \omega(t, 0) = \partial_s^2 \omega(t, 0) + J \partial_{t^2} \omega(t, 0),$$

où  $J$  représente le moment d'inertie de la masse  $M$ . Nous renvoyons à [14] pour plus de précisions sur la modélisation de structures flexibles.

**Comportement souhaité de la tige.** Nous cherchons à faire parcourir à la masse  $M$  un demi-cercle en un temps donné  $T$ . De plus, nous souhaitons garantir l'absence de vibrations en fin de mouvement en imposant que la tige parte et arrive avec une vitesse nulle. Enfin, pour  $t = 0$  et  $t = T$ , la tige est sans flexion et son extrémité  $s = L$  est positionnée en  $(0, 0)$ . Ce mouvement de la masse  $M$  correspond à la trajectoire de l'extrémité  $s = 0$  obtenue en imposant les relations :

$$\omega(t, 0) = \pi \cdot \phi_\gamma(t), \quad x(t, 0) = L \cos(\omega(t, 0)), \quad y(t, 0) = L \sin(\omega(t, 0)), \quad (7.13)$$

où  $\phi_\gamma$  représente la fonction plateau (6.6) introduite page 70. Ce comportement est illustré par la figure 7.6 page 93.

### 7.2.2 Calcul d'une loi de commande en boucle ouverte – Simulation numérique

Pour approximer l'équation aux dérivées partielles (7.12) en suivant la méthode des lignes exposée dans la section 6.2.1 page 71, posons pour tout entier  $i$  compris entre 0 et  $n$  :

$$w_i(t) = w(t, (n-i)L/n), \quad x_i(t) = x(t, (n-i)L/n) \quad \text{et} \quad y_i(t) = y(t, (n-i)L/n).$$

**Remarque 23.** Cette semidiscretisation revient à considérer la tige comme une succession de segments de longueur  $L/n$ . Ainsi, cette approximation physique nous amène à étudier un système différentiel ordinaire chaîné.

**Une semidiscrétisation du modèle.** Dans ce cadre, on a les relations suivantes qui correspondent à l'approximation des équations (7.11) et à la différence finie symétrique d'ordre 2 (6.7) décrites page 72 :

$$\begin{aligned} x_i &= x_n + \frac{L}{n} \sum_{j=i}^{n-1} \cos(\omega_j), & y_i &= y_n + \frac{L}{n} \sum_{j=i}^{n-1} \sin(\omega_j), \\ \Delta_i &= (\omega_i - 2\omega_{i-1} + \omega_{i-2}) (n/L)^2 + \mathcal{O}(n^{-3}). \end{aligned} \quad (7.14)$$

De plus, l'équation (7.12) et les relations ci dessus, permettent de montrer que le comportement de notre système chaîné est décrit par la relation :

$$\frac{C}{\rho} \Delta_i = \cos(\omega_i) \left( M \ddot{y}_n + \frac{m}{n} \sum_{j=i}^n \ddot{y}_j \right) - \sin(\omega_i) \left( M \ddot{x}_n + \frac{m}{n} \sum_{j=i}^n \ddot{x}_j \right). \quad (7.15)$$

À partir des équations (7.14) et (7.15), on montre aisément la propriété suivante :

**Lemme 7.3** *Un entier  $n$  étant fixé, pour tout entier  $i$  positif inférieur à  $n - 2$ , les fonctions du temps  $x_i(t)$ ,  $y_i(t)$  et  $w_i(t)$  sont données par les relations :*

$$x_i = x_n + \frac{L}{n} \sum_{j=i}^{n-1} \cos(\omega_j), \quad (7.16)$$

$$y_i = y_n + \frac{L}{n} \sum_{j=i}^{n-1} \sin(\omega_j), \quad (7.17)$$

$$\omega_{i-2} = 2\omega_{i-1} - \omega_i - \left( \frac{L}{n} \right)^2 \frac{C}{\rho} \Delta_i. \quad (7.18)$$

**Remarque 24.** La planification de la trajectoire de notre tige repose sur les relations ci-dessus. En effet, les équations (7.13) qui décrivent le comportement souhaité de la masse  $M$ , correspondent dans notre approximation à :  $\omega_0(t) = \pi \cdot \phi_\gamma(t)$ ,  $x_0(t) = L \cos(\omega_0(t))$  et  $y_0(t) = L \sin(\omega_0(t))$ . Les relations (7.16)–(7.18) permettent de définir les commandes  $(u_1(t), u_2(t), u_3(t)) = (x_L(t), y_L(t), w_L(t))$  doivent être appliquées à l'extrémité de la tige pour obtenir le comportement souhaité.

**Simulation numérique.** La simulation que nous présentons correspond aux valeurs suivantes des paramètres de la tige :  $M = 2$  kg,  $J = .009375$  kg m<sup>2</sup>,  $L = 1$  m,  $m = 0.5$  kg,  $C = 20$  N m<sup>2</sup>,  $T = 1$  s. La figure 7.6 correspond à la trajectoire de la tige au cours du temps calculée à partir d'une semidiscrétisation de 15 points avec 10 décimales de précisions.

Nous présentons quelques résultats de simulations relatifs à la convergence des approximations. Notons  $U_n(t)$  la commande  $(u_1, u_2, u_3)$  obtenue en utilisant  $n$  points de discrétisation. La figure 7.7 représente les variations  $\|U_{10} - U_5\|$ ,  $\|U_{15} - U_{10}\|$  et  $\|U_{20} - U_{15}\|$  en fonction du temps.

**Remarque 25.** Le modèle considéré dans cette section n'est plus une équation d'évolution (ordre de dérivation en temps égal à 1) mais contrairement à l'équation des ondes notre méthode est utilisable car l'ordre d'intégration en espace est strictement supérieur à l'ordre de dérivation temporel.

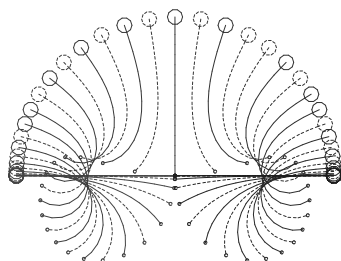


FIG. 7.6 – Position de la tige flexible au cours du temps.

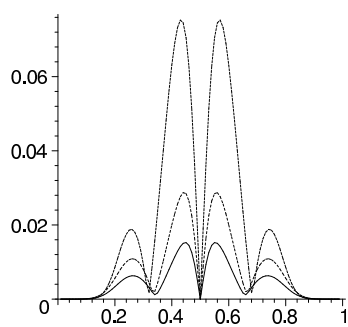


FIG. 7.7 – Convergence *expérimentale* de la commande.



## Annexe A

# Groupes continus d'automorphismes associés à un système non observable

Lorsqu'un modèle n'est pas observable, il existe un groupe continu d'automorphismes agissant sur les variables et les paramètres non observables et qui laisse invariant les trajectoires, les entrées et les sorties du modèle. Nous allons utiliser le système suivant tiré de [144] pour illustrer notre propos.

$$\begin{cases} \dot{x}_1 &= \theta_1 x_1^2 + \theta_2 x_1 x_2 + u, \\ \dot{x}_2 &= \theta_3 x_1^2 + \theta_4 x_1 x_2, \\ y &= x_1. \end{cases} \quad (\text{A.1})$$

### A.1 Définition et propriétés

On associe à un système  $\Sigma$  sous forme de représentation d'état, l'extension de corps  $\mathcal{K}/k\langle U, Y \rangle$  décrite dans la Section 5.1.2 page 53. Pour être plus précis, considérons la définition suivante :

**Définition A.1** *Un groupe  $\sigma_\lambda$  de  $\mathcal{K}$ -automorphismes indexés par  $\lambda$  qui laissent le corps  $k\langle U, Y \rangle$  ponctuellement invariant est tel que :*

- le paramètre  $\lambda$  du groupe est dans le corps des constantes ( $\dot{\lambda} = 0$ ) ;
- $\sigma_1$  est l'identité et on a la loi de groupe  $\sigma_{\lambda\mu}(\cdot) = \sigma_\lambda(\sigma_\mu(\cdot))$  ;
- $\sigma_\lambda$  est un automorphisme différentiel ( $\sigma_\lambda \circ \mathcal{L} = \mathcal{L} \circ \sigma_\lambda$ ) et pour tout  $(a, b)$  dans  $\mathcal{K}^2$ , pour tout  $c$  dans  $k\langle U, Y \rangle$  on a :

$$\sigma_\lambda(c) = c, \quad (\text{A.2})$$

$$\sigma_\lambda(ca) = c\sigma_\lambda(a), \quad (\text{A.3})$$

$$\sigma_\lambda(a + b) = \sigma_\lambda(a) + \sigma_\lambda(b), \quad (\text{A.4})$$

$$\sigma_\lambda(ab) = \sigma_\lambda(a)\sigma_\lambda(b). \quad (\text{A.5})$$

Le groupe  $\sigma_\lambda$  définit par  $\{x_1, x_2, \theta_1, \theta_2, \theta_3, \theta_4, u\} \rightarrow \{x_1, \lambda x_2, \theta_1, \theta_2/\lambda, \lambda\theta_3, \theta_4, u\}$  est un groupe d'automorphismes de l'extension  $\mathcal{K}/k\langle U, Y \rangle$  associée au modèle (A.1) comme le montre les calculs suivants :

$$\begin{aligned} \sigma_\lambda(\dot{x}_1) &= \sigma_\lambda(\theta_1 x_1^2 + \theta_2 x_1 x_2 + u) = \theta_1 x_1^2 + \frac{\theta_2}{\lambda} x_1 \lambda x_2 + u = \dot{x}_1, \\ \sigma_\lambda(\dot{x}_2) &= \sigma_\lambda(\theta_3 x_1^2 + \theta_4 x_1 x_2) = \lambda \theta_3 x_1^2 + \theta_4 x_1 \lambda x_2 = \lambda \dot{x}_2, \\ \Rightarrow \quad \forall i \in \mathbb{N}, \quad \sigma_\lambda(y^{(i)}) &= \sigma_\lambda(x_1^{(i)}) = y^{(i)} \text{ et } \sigma_\lambda(u^{(i)}) = u^{(i)}. \end{aligned}$$

À ce point de vue algébrique, on peut associer l'interprétation géométrique suivante. Considérons l'espace  $\mathcal{E}$  de coordonnées  $(x_1, x_2, \theta_1, \theta_2, \theta_3, \theta_4, u, \tau)$  muni d'une dérivation telle que  $\dot{\tau} = 1$ . Nous avons vu dans la Définition 2.2 page 13 qu'une trajectoire du modèle (A.1) correspond à une solution du système (A.1) paramétrisé par  $u$  et  $\tau$ . Le groupe d'automorphismes  $\sigma_\lambda$  définit un groupe continu de transformations de  $\mathcal{E}$  tel que les trajectoires, les entrées et les sorties du système sont invariantes par ces transformations (voir [144] pour plus de détails).

**Remarque.** Si un élément  $a$  de  $\mathcal{K}$  est algébrique sur  $k\langle U, Y \rangle$  alors  $\sigma_\lambda(a)$  est aussi algébrique sur  $k\langle U, Y \rangle$  et possède le même polynôme minimal. Ainsi, il n'y a qu'un nombre fini d'action possible de  $\sigma_\lambda$  sur  $a$  correspondant aux racines du polynôme minimal de cet élément. Donc, si l'extension de corps  $\mathcal{K}/k\langle U, Y \rangle$  est purement algébrique, il n'y a pas de groupe infini de  $\mathcal{K}$ -automorphismes agissant sur  $\mathcal{K}$  et laissant  $k\langle U, Y \rangle$  ponctuellement invariant. Cette remarque montre que s'il est possible d'exhiber un tel groupe alors on prouve que le modèle est non observable. De plus, ce groupe fournit des informations supplémentaires sur les relations entre les quantités non observables.

**Observabilité et conditions initiales.** Dans la plupart des modèles étudiés, des informations supplémentaires peuvent être disponibles. Ainsi, il n'est pas rare de connaître les conditions initiales portant sur les variables d'état. Ces informations peuvent compléter les résultats d'observabilités. Ainsi, si on dispose de conditions initiales non nulles associées au modèle (A.1), on peut affirmer que ce modèle est observable. En effet, ces conditions initiales permettent de déterminer la trajectoire solution de (A.1) que l'on considère et ainsi de déterminer les paramètres associés. Remarquons que si ces conditions initiales sont nulles, le modèle n'est pas observable. En effet, le groupe de transformation  $\sigma_\lambda$  laisse l'origine invariante tout en transformant une trajectoire en une autre et en laissant l'entrée et la sortie invariante.

**Dérivation associée à un groupe d'automorphisme.** L'expression  $\sigma_\lambda$  peut être considérée comme une application d'un corps des constantes dans un ensemble d'automorphismes. Ainsi, il est possible de considérer l'application suivante :

$$\partial = \left. \frac{\partial \sigma_{1+\lambda}}{\partial \lambda} \right|_{\lambda=0} : k\langle U, Y \rangle(X, \Theta) \rightarrow k\langle U, Y \rangle(X, \Theta).$$

Par construction de  $\sigma_\lambda$ , on a :

- la propriété (A.2) implique que pour tout  $c$  dans  $\bar{k}$ ,  $\partial(c)$  est égal à zéro ;
- les propriétés (A.3) et (A.4) implique que  $\partial$  est  $k\langle U, Y \rangle$ -linéaire ;
- la propriété (A.5) implique que  $\partial$  satisfait aux règles de Leibniz.

Ainsi, l'application  $\partial$  est une dérivation dans  $\text{Der}_{k\langle U, Y \rangle}(\mathcal{K}, \mathcal{K})$  associée au groupe continu d'automorphismes  $\sigma_\lambda$ . Pour le modèle (A.1), on a :

$$\partial = x_2 \frac{\partial}{\partial x_2} - \theta_2 \frac{\partial}{\partial \theta_2} + \theta_3 \frac{\partial}{\partial \theta_3},$$

lorsque  $\text{Der}_{k\langle U, Y \rangle}(\mathcal{K}, \mathcal{K})$  est considéré comme un sous-espace du  $\mathcal{K}$ -espace vectoriel engendré par les dérivations canoniques  $\partial/\partial x_1, \dots, \partial/\partial x_n, \partial/\partial \theta_1, \dots, \partial/\partial \theta_\ell$ .

**Remarque.** La dérivation  $\partial$  commute par construction avec la dérivation de Cartan  $\mathcal{L}$  ( $[\partial, \mathcal{L}] = 0$ ) définie par le système considéré. C'est donc un générateur infinitésimal d'un groupe de symétries

de ce système qui laisse le temps invariant contrairement à des groupes de symétries plus généraux du type  $[\partial, \mathcal{L}] = \lambda \mathcal{L}$ .

Nous allons maintenant considérer la situation inverse sur un exemple. Après avoir utilisé sur un modèle non observable l'algorithme décrit dans le Chapitre 5 page 49, on détermine un ensemble de variables et de paramètres non observables. Plus précisément, on détermine un mineur singulier maximal de la matrice jacobienne  $\partial(Y^{(j)}, 0 \leq j \leq \nu) / \partial(x, \theta)$ . Nous avons vu dans la Section 5.1.2 page 53 que le noyau de cette matrice est constitué de générateurs du  $\mathcal{K}$ -espace vectoriel  $\text{Der}_k\langle U, Y \rangle(\mathcal{K}, \mathcal{K})$ . Nous allons voir dans le paragraphe suivant qu'il est possible d'associer un groupe continu d'automorphismes à chaque générateur.

## A.2 Méthode de calcul

Pour le modèle (A.1) page 95, le test d'observabilité montre que la variable  $x_1$  et les paramètres  $\theta_1$  et  $\theta_4$  sont observables. Ainsi, ils n'influencent pas la suite de notre étude et nous les spécialisons sur des valeurs génériques. Dans notre exemple, nous prenons  $\theta_1 = 16$ ,  $\theta_4 = 7$  et la condition initiale  $x_1(0) = 3$ . La variable  $x_2$  et les paramètres  $\theta_2$  et  $\theta_3$  ne sont pas spécialisés et les calculs à venir sont fait dans le corps  $\mathbb{Q}(x_2, \theta_2, \theta_3)$ . En fait, si on considère la tour d'extensions de corps suivante :

$$k\langle u, y \rangle \hookrightarrow k\langle u \rangle(x_1, \theta_1, \theta_4) \hookrightarrow \mathcal{K}, \quad (\text{A.6})$$

le test d'observabilité évoqué ci-dessus montre que la première extension de corps est algébrique et nous allons nous intéresser à la seconde.

La proposition 5.2 page 54 montre que l'ordre de dérivation nécessaire à nos calculs est 6. Ainsi, nous spécialisons la commande  $u$  sur la série générique suivante

$$1 + 37t + 45t^2 + 13t^3 + 34t^4 + 12t^5 + 67t^6.$$

De plus, les calculs faits dans la suite n'impliqueront que des séries d'ordre au plus 6.

**Système variationnel linéaire.** Ainsi, nous utiliserons le système différentiel ordinaire suivant :

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = 16x_1^2 + \theta_2 x_1 x_2 + 1 + 37t + 45t^2 + 13t^3 + 34t^4 + 12t^5 + 67t^6, \\ \dot{x}_2 = \theta_3 x_1^2 + 7x_1 x_2. \end{cases} \quad (\text{A.7})$$

Avec les notations utilisées dans la Section 5.1.2 page 53, nous associons les systèmes différentiels ordinaires suivants au système (A.7) pour former le système linéaire variationnel.

$$\begin{pmatrix} \dot{\gamma}_{11} & \dot{\gamma}_{12} \\ \dot{\gamma}_{21} & \dot{\gamma}_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 31x_1 + \theta_2 x_2 & \theta_2 x_1 \\ 2\theta_3 x_1 + 7x_2 & 7x_{1x} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \gamma_{11} & \gamma_{12} \\ \gamma_{21} & \gamma_{22} \end{pmatrix}, \quad (\text{A.8})$$

$$\begin{pmatrix} \dot{\lambda}_{11} & \dot{\lambda}_{12} & \dot{\lambda}_{13} & \dot{\lambda}_{14} \\ \dot{\lambda}_{21} & \dot{\lambda}_{22} & \dot{\lambda}_{23} & \dot{\lambda}_{24} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 31x_1 + \theta_2 x_2 & \theta_2 x_1 \\ 2\theta_3 x_1 + 7x_2 & 7x_{1x} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \lambda_{11} & \lambda_{12} & \lambda_{13} & \lambda_{14} \\ \lambda_{21} & \lambda_{22} & \lambda_{23} & \lambda_{24} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} x_1^2 & x_1 x_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & x_1^2 & x_1 x_2 \end{pmatrix}. \quad (\text{A.9})$$

Les séries solutions de ce système peuvent être calculées jusqu'à l'ordre 6 à l'aide de la méthode décrite dans la Section 5.2.1 page 56. Cette fois, les calculs sont effectués dans le corps de base  $\mathbb{Q}(x_2, \theta_2, \theta_3)$ .

**Représentation de  $\text{Der}_{k\langle U, Y \rangle}(\mathcal{K}, \mathcal{K})$ .** Comme il est indiqué dans le Lemme 5.1 page 57, en intégrant le système d'équations différentielles ordinaires défini par (A.7), (A.8) et (A.9) avec les conditions initiales associées, on retrouve une spécialisation de la matrice  $\partial^{(Y^{(j)}, 0 \leq j \leq \nu)} / \partial(x, \theta)$ . Dans notre exemple, le mineur singulier maximal de cette matrice est :

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial \dot{y}}{\partial x_2} & \frac{\partial \dot{y}}{\partial \theta_2} & \frac{\partial \dot{y}}{\partial \theta_3} \\ \frac{\partial \ddot{y}}{\partial x_2} & \frac{\partial \ddot{y}}{\partial \theta_2} & \frac{\partial \ddot{y}}{\partial \theta_3} \\ \frac{\partial y^{(3)}}{\partial x_2} & \frac{\partial y^{(3)}}{\partial \theta_2} & \frac{\partial y^{(3)}}{\partial \theta_3} \end{pmatrix} = \text{coeffs} \left( \frac{\partial y}{\partial x_2}(t), \frac{\partial y}{\partial \theta_2}(t), \frac{\partial y}{\partial \theta_3}(t) \right) = \text{coeffs} \left( \gamma_{12}, \lambda_{12}, \lambda_{13} \right).$$

Plus précisément, le mineur transposé est :

$$\begin{pmatrix} 3\theta_2 & \theta_2(248+3\theta_2 x_2) & \theta_2(99871+(x_2(2522+9\theta_2 x_2)+135\theta_3)\theta_2)/6 \\ 3x_2 & \frac{27}{2}\theta_3+248x_2+3\theta_2 x_2^2 & \left(\frac{99871}{6}+(x_2\left(\frac{1261}{3}+\frac{3}{2}\theta_2 x_2\right)+45\theta_3)\theta_2\right)x_2+\frac{2793}{2}\theta_3 \\ 0 & 27\theta_2/2 & 3\theta_2(15\theta_2 x_2+931)/2 \end{pmatrix}.$$

Le noyau de ce mineur est  $(x_2, -\theta_2, \theta_3)$ . Ainsi, le  $\mathcal{K}$ -espace vectoriel  $\text{Der}_{k\langle U, Y \rangle}(\mathcal{K}, \mathcal{K})$  est engendré par la dérivation  $\partial = x_2\partial/\partial x_2 - \theta_2\partial/\partial \theta_2 + \theta_3\partial/\partial \theta_3$ .

**Calcul du groupe continu d'automorphismes.** Comme indiqué dans la Section 5.1.2 page 53, on peut associer à la dérivation  $\partial$  un champ de vecteurs défini dans l'espace  $\mathcal{E}$ . En effet,  $\partial$  est la dérivation de Lie du champ de vecteurs défini par  $\partial x_2(\tau)/\partial \tau = x_2(\tau)$ ,  $\partial \theta_2(\tau)/\partial \tau = -\theta_2(\tau)$  et  $\partial \theta_3(\tau)/\partial \tau = \theta_3(\tau)$ . Pour les conditions initiales  $x_2(0) = x_2$ ,  $\theta_2(0) = \theta_2$ ,  $\theta_3(0) = \theta_3$ , ce système a une solution sous forme close  $x_2(\tau) = x_2 \exp(\tau)$ ,  $\theta_2(\tau) = \theta_2 \exp(-\tau)$  et  $\theta_3(\tau) = \theta_3 \exp(\tau)$  (cf. [17] pour la résolution sous forme close d'équations différentielles). Cette solution définit un groupe continu à un paramètre de difféomorphismes sur l'espace  $\mathcal{E}$  qui est associé au groupe d'automorphismes que nous cherchons.

Dans le cadre algébrique qui est le notre, nous considérons l'application suivante :

$$\begin{aligned} \sigma : \mathcal{K} &\rightarrow \mathcal{K}[[\tau]] \\ e &\rightarrow e + \sum_{i \in \mathbb{N}^*} \partial^i(e) \tau^i / i!. \end{aligned}$$

Par construction, l'application  $\sigma$  est un morphisme du corps  $\mathcal{K}$  dans le corps des séries en  $\tau$  inversibles et à coefficients dans  $\mathcal{K}$ .

Si la dérivation  $\partial$  est localement nilpotente, alors la somme ci-dessus est finie et l'application  $\sigma$  est un automorphisme du corps  $\mathcal{K}$ . Cette situation n'est pas générique et est relativement exceptionnelle en pratique. Nous ne considérerons donc pas plus avant ce cas.

Si la dérivation  $\partial$  est telle que  $\partial(x_i) = x_i$  pour les variables  $x_i$  non observables et  $\partial(\theta_i) = \theta_i$  pour les paramètres  $\theta_i$  non identifiables, alors on a  $\sigma(x_i) = x_i \exp(\tau)$  où l'exponentielle représente la série dans  $\mathcal{K}[[\tau]]$ . Ainsi, en posant  $\lambda = \exp(\tau)$ , l'application  $\sigma$  est un morphisme de  $\mathcal{K}$  dans  $\mathcal{K}(\lambda)$  et définit un groupe continu à un paramètre d'automorphismes. C'est le cas pour le modèle (A.1) page 95 et cette situation est la plus courante en pratique.

Nous allons maintenant présenter à travers un exemple le dernier cas de figure que l'on rencontre couramment en pratique. La dérivation suivante :

$$\partial = c_1 c_2 \left( \frac{\partial}{\partial c_1} - \frac{\partial}{\partial c_2} \right) - c_3 (c_1 + c_2) \left( \frac{\partial}{\partial c_3} - \frac{\partial}{\partial c_7} \right) + c_1 c_8 \frac{\partial}{\partial c_8} - c_9 c_2 \frac{\partial}{\partial c_9} + x_2 c_2 \frac{\partial}{\partial x_2} - x_3 c_1 \frac{\partial}{\partial x_3} + x_4 c_2 \frac{\partial}{\partial x_4}$$

correspond à un générateur du  $\mathcal{K}$ -espace vectoriel  $\text{Der}_{k\langle U, Y \rangle}(\mathcal{K}, \mathcal{K})$  associé au modèle (B.1) page 102. Nous allons voir comment associer un groupe d'automorphismes à cette dérivation. Pour ce faire,

nous allons considérer la dérivation  $\bar{\partial}$  égale à  $\partial/c_2$ . Cette dernière dérivation est aussi un générateur de  $\text{Der}_{k\langle U, Y \rangle}(\mathcal{K}, \mathcal{K})$  et, en utilisant les notations précédentes, on a  $\bar{\partial}c_1 = c_1\lambda$ .

Supposons que les variables non observables et les paramètres non identifiables sont algébriques sur le corps  $k\langle u, y_1, y_2 \rangle(c_1)$ . Ainsi, puisque  $\sigma$  n'agit pas sur  $k\langle u, y_1, y_2 \rangle$ , il existe pour  $c_2$ , par exemple, un polynôme  $P$  tel que  $P(\sigma(c_2), \sigma(c_1)) = 0$ . Ceci ne montre pas que  $\sigma(c_2)$  est dans  $\mathcal{K}(\lambda)$  mais c'est le cas pour tous les systèmes que nous avons rencontré en pratique. Il nous reste à présent à montrer comment calculer le groupe continu d'automorphismes  $\sigma$ .

Pour ce faire, nous allons utiliser le champ de vecteurs associé à la dérivation  $\bar{\partial}$  définie par les équations suivantes :

$$\left\{ \begin{array}{l} \dot{c}_1(\tau) = c_1(\tau), \\ \dot{c}_2(\tau) = -c_1(\tau), \\ \dot{c}_3(\tau) = -c_3(\tau)(c_1(\tau) + c_2(\tau))/c_2(\tau), \\ \dot{c}_7(\tau) = c_3(\tau)(c_1(\tau) + c_2(\tau))/c_2(\tau), \\ \dot{c}_8(\tau) = c_1(\tau)c_8(\tau)/c_2(\tau), \\ \dot{c}_9(\tau) = -c_9(\tau), \\ \dot{x}_2(\tau) = x_2(\tau), \\ \dot{x}_3(\tau) = x_3(\tau)c_1(\tau)/c_2(\tau), \\ \dot{x}_4(\tau) = x_4(\tau) \end{array} \right. \quad (\text{A.10})$$

et les approximants de Hermite–Padé définis dans le théorème suivant :

**Théorème A.1 ([3])** *Considérons des séries  $s_1, \dots, s_i$  dans  $\mathcal{K}[[\tau]]$ . Les polynômes  $p_1, \dots, p_i$  de degrés  $d_1, \dots, d_i$  en  $\tau$  sont des approximants de Hermite–Padé de  $s_1, \dots, s_i$  du type  $d_1, \dots, d_i$  si, et seulement si, on a*

$$p_1s_1 + \dots + p_is_i = \mathcal{O}\left(\tau^{d_1 + \dots + d_i + i - 1}\right).$$

*La complexité arithmétique du calcul de ces approximants est dans  $\mathcal{O}(i(d_1 + \dots + d_i)^2)$ .*

En utilisant l'algorithme de Newton avec les conditions initiales  $c_i(0) = c_i$  et  $x_i(0) = x_i$ , nous pouvons calculer jusqu'à l'ordre  $n + \ell + 5$  des séries dans  $\mathbb{Q}(c_1, c_2, c_3, c_7, c_8, c_9, x_2, x_3, x_4)[[\tau]]$  qui sont solutions du système (A.10). Puis en utilisant l'algorithme associé au théorème A.1, nous pouvons déterminer des constantes  $p_1, \dots, p_4$  qui sont des approximants de Hermite–Padé des séries  $1, c_i(\tau), \lambda(\tau), \lambda(\tau)c_i(\tau)$  avec  $\lambda(\tau) = \exp(\tau)$ . Puisque les séries  $c_i(\tau)$  sont les images de  $\sigma(c_i)$ , on calcul ainsi les fractions rationnelles (B.2) page 102.

Encore une fois, cette méthode n'est valable que si les numérateurs et les dénominateurs de ces fractions rationnelles sont de degré 1 en  $\lambda$ . Dans le cas contraire, il nous faut chercher les approximants de Hermite–Padé des séries  $1, c_i(\tau), \lambda(\tau), \dots, \lambda(\tau)^j, \lambda(\tau)c_i(\tau), \dots, \lambda(\tau)^j c_i(\tau)$  pour un entier  $j$  suffisant. Notons que le degré  $j$  le plus élevé que nous avons rencontré jusqu'à présent est 2. De plus, signalons que la complexité de la méthode présentée dans cette annexe n'est pas polynomiale en la taille de l'entrée.

Nous avons rassemblé dans l'annexe suivante des exemples d'applications de notre méthode.



## Annexe B

# Quelques exemples d'utilisation du test d'observabilité

Nous explicitons les exemples présentés dans le tableau B.1, la sortie de notre algorithme et quelques calculs supplémentaires. Dans les résultats, lorsque les variables et paramètres non observables sont indiqués alors les autres sont observables (et réciproquement).

| Système | $m$ | $\ell$ | $n$ | $r$ | $L$ | temps en s. |
|---------|-----|--------|-----|-----|-----|-------------|
| V1987   | 2   | 5      | 4   |     | 17  | 0.8         |
| R1986   | 2   | 9      | 4   | 1   | 19  | 1.5         |
| MV1991  | 2   | 8      | 5   | 2   | 59  | 2.4         |
| AW2003  | 2   | 17     | 3   |     | 21  | 5           |
| MW2000  | 3   | 14     | 4   |     | 67  | 5.7         |
| KD1999  | 2   | 14     | 5   | 2   | 34  | 6.          |
| G1995   | 1   | 17     | 5   |     | 46  | 10.         |
| T2002   | 2   | 12     | 6   | 1   | 55  | 10.         |
| SHH1997 | 1   | 13     | 9   |     | 38  | 13.5        |

FIG. B.1 – Récapitulatif des exemples d'utilisation du test d'observabilité.

Dans ce tableau, la lettre  $n$  représente le nombre de variables d'état,  $m$  le nombre de sorties,  $\ell$  le nombre de paramètres,  $r$  le nombre de commandes et  $L$  la complexité d'évaluation du système. Les calculs ont été réalisés sur un ordinateur personnel équipé de 128Mb de mémoire vive et d'un pentium III cadencé à 650Mh. Nous n'indiquons que les temps de calculs de l'algorithme présenté dans le Chapitre 5 page 49. La méthode présentée dans la section précédente n'est pas de complexité polynomiale et les temps de calculs sont fortement liés à l'architecture logiciel et matériel ainsi qu'à l'habileté du programmeur. Nous n'indiquons donc pas de temps tout en précisant que les exemples présentés ont nécessité moins d'une demi-heure de calculs.

### V1987 Modèle d'un réacteur pour la pyrolyse du méthane

Cet exemple est tiré de [143].

$$\begin{cases} \dot{x}_1 &= -x_1(k_1 + k_2x_4) + k_5x_3x_4, \\ \dot{x}_2 &= k_2x_1x_4 - (k_3 + k_4)x_2, \\ \dot{x}_3 &= k_4x_2 - k_5x_3x_4, \\ \dot{x}_4 &= x_1(k_1 + k_2x_4) + 2k_3x_2 - k_5x_3x_4, \\ y_1 &= x_1, \\ y_2 &= x_2. \end{cases}$$

Notre implantation en maple certifie que toutes les variables et tous les paramètres sont observables.

### R1986 Un modèle de pharmacocinétique

Cet exemple est tiré de [114]. La lettre  $u$  représente une commande.

$$\begin{cases} \dot{x}_1 &= u - (c_1 + c_2)x_1, \\ \dot{x}_2 &= c_1x_1 - (c_3 + c_6 + c_7)x_2 + c_5x_4, \\ \dot{x}_3 &= c_2x_1 + c_3x_2 - c_4x_3, \\ \dot{x}_4 &= c_6x_2 - c_5x_4, \\ y_1 &= c_8x_3, \\ y_2 &= c_9x_2. \end{cases} \quad (\text{B.1})$$

Notre implantation en maple fournit les résultats suivants :

- les variables  $\{x_2, x_3, x_4\}$  et les paramètres  $\{c_1, c_2, c_3, c_7, c_8, c_9\}$  ne sont pas observables ;
- le degré de transcendance de l'extension de corps  $k\langle U, Y \rangle \hookrightarrow \mathcal{K}$  est 1.

On peut montrer que le groupe à un paramètre suivant :

$$\begin{array}{ll} x_2 \rightarrow & \lambda x_2, & c_3 \rightarrow & ((1 - \lambda)c_1 + c_2)c_3/\lambda c_2, \\ x_3 \rightarrow & ((1 - \lambda)c_1 + c_2)x_3/c_2, & c_7 \rightarrow & c_7 - c_3(c_1 + c_2)(1 - \lambda)/\lambda c_2, \\ x_4 \rightarrow & \lambda x_4, & c_8 \rightarrow & c_8 c_2 / ((1 - \lambda)c_1 + c_2), \\ c_1 \rightarrow & \lambda c_1, & c_9 \rightarrow & c_9/\lambda, \\ c_2 \rightarrow & (1 - \lambda)c_1 + c_2, & & \end{array} \quad (\text{B.2})$$

est composé de symétries qui laissent les sorties et le champ de vecteurs invariant.

### MV1991 Modèle d'un moteur à induction

Cet exemple est tiré de [90]. Les lettres  $u_x$  et  $u_y$  représentent des commandes.

$$\left\{ \begin{array}{l} \sigma = L_s - \frac{M^2}{L_r}, \quad \gamma_N = \frac{M^2 R_r + L_r^2 R_s}{\sigma L_r^2}, \\ \dot{\omega} = \frac{n_p M}{J L_r} (\Psi_x I_y - \Psi_y I_x) - \frac{T_L}{J}, \\ \dot{\Psi}_x = -\frac{R_r}{L_r} \Psi_x - n_p \omega \Psi_y + \frac{R_r}{L_r} M I_x, \\ \dot{\Psi}_y = n_p \omega \Psi_x - \frac{R_r}{L_r} \Psi_y + \frac{R_r}{L_r} M I_y, \\ \dot{I}_x = \frac{M R_r}{\sigma L_r^2} \Psi_x + \frac{n_p M}{\sigma L_r} \omega \Psi_y - \gamma_N I_x + \frac{u_x}{\sigma}, \\ \dot{I}_y = -\frac{n_p M}{\sigma L_r} \omega \Psi_x + \frac{M R_r}{\sigma L_r^2} \Psi_y - \gamma_N I_y + \frac{u_y}{\sigma}, \\ y_1 = \omega, \\ y_2 = \Psi_x^2 + \Psi_y^2. \end{array} \right.$$

Notre implantation en maple fournit les résultats suivants :

- les variables  $\{I_x, I_y\}$  et les paramètres  $\{M, L_s, R_s, L_r, R_r, J, T_l\}$  ne sont pas observables ;
- le degré de transcendance de l'extension de corps  $k\langle U, Y \rangle \hookrightarrow \mathcal{K}$  est 1.

On peut montrer que le groupe à un paramètre suivant :

$$\{I_x, I_y, M, L_s, R_s, L_r, R_r, J, T_l\} \rightarrow \{\lambda I_x, \lambda I_y, M/\lambda, L_s/\lambda, R_s/\lambda, L_r/\lambda, R_r/\lambda, \lambda J, \lambda T_l\}$$

est composé de symétries qui laissent les sorties et le champ de vecteurs invariant.

### MW2000 Modèle multiespèces de la transmission d'un pathogène

Cet exemple est tiré de [89].

$$\left\{ \begin{array}{l} b = \mu + c_1(y_1 + y_{12}), \\ \lambda_1 = \beta_1(y_1 + y_{12}), \\ \lambda_2 = \beta_2(y_2 + y_{12}) + I_2, \\ \dot{x}_{12} = (1 - \theta_1 - \theta_2)b - (m_1 \lambda_1 + m_2 \lambda_2 + \mu)x_{12} \\ \quad + (\nu_1 + \tau)y_1 + (\nu_2 + \tau)y_2 + \tau y_{12}, \\ \dot{y}_1 = \theta_1 b + m_1 \lambda_1 x_{12} + \nu_2 y_{12} - ((1 - \pi_2)m_2 \lambda_2 + \nu_1 + \mu + c_1 + \tau)y_1, \\ \dot{y}_2 = \theta_2 b + m_2 \lambda_2 x_{12} + \nu_1 y_{12} - ((1 - \pi_1)m_1 \lambda_1 + \nu_2 + \mu + \tau)y_2, \\ \dot{y}_{12} = (1 - \pi_1)m_1 \lambda_1 y_2 + (1 - \pi_2)m_2 \lambda_2 y_1 - (\nu_1 + \nu_2 + \mu + c_1 + \tau)y_{12}, \\ o_1 = x_{12} + y_1 + y_2 + y_{12}, \\ o_2 = y_1 + y_{12}, \\ o_3 = y_2 + y_{12}. \end{array} \right.$$

Notre implantation en maple fournit les résultats suivants :

- à l'exception de  $\{\beta_1, \beta_2, I_2, m_1, m_2\}$ , tous les paramètres sont observables ;
- le degré de transcendance de l'extension de corps  $k\langle U, Y \rangle \hookrightarrow \mathcal{K}$  est 2.

On peut montrer que le groupe à deux paramètres suivant :

$$\{\beta_1, \beta_2, I_2, m_1, m_2\} \rightarrow \{\beta_1/l_1, \beta_2/l_2, I_2/l_2, l_1 m_1, l_2 m_2\}$$

est composé de symétries qui laissent les sorties et le champ de vecteurs invariant.

**Remarque 26.** La sortie  $o_1$  est en fait une contrainte algébrique égale à un 1. Ainsi, les modèles étudiés peuvent être composés de relations d'ordre zéro qui sont considérées comme des sorties supplémentaires ( $o_1 \equiv 0$ ).

### KD1999 Modèle d'un réacteur chimique

Cet exemple est tiré de [76].

$$\begin{cases} \dot{C}_A &= \frac{F_A}{V}(C_{A0} - C_A) - k_0 C_A e^{-E/RT}, \\ \dot{C}_B &= -\frac{F_A}{V}C_B + k_0 C_A e^{-E/RT}, \\ \dot{T} &= \frac{F_A}{V}(T_A - T) - k_0 C_A e^{-E/RT} \frac{\Delta H_r}{\rho c_p} + \frac{U}{\rho c_p} \frac{T_j - T}{V}, \\ \dot{T}_j &= \frac{F_h}{V_h}(T_h - T_j) - \frac{U}{\rho_h c_{ph}} \frac{T_j - T}{V_h}, \\ y_1 &= C_B, \\ y_2 &= T. \end{cases}$$

La lettre  $A$  représente la loi d'Arrhenius  $\exp(-E/RT)$ . Pour exprimer le système ci-dessus sous une forme algébrique, nous ajoutons l'équation différentielle  $\dot{A} = EA\dot{T}/(RT^2)$  au modèle. Notre implantation en maple fournit les résultats suivants :

- la variable  $A$  et les paramètres  $\{E, R, \Delta H_r, U, \rho, c_p, \rho_h, c_{ph}, k_0\}$  ne sont pas observables ;
- le degré de transcendance de l'extension de corps  $k\langle U, Y \rangle \hookrightarrow \mathcal{K}$  est 5.

On peut montrer que le groupe à cinq paramètres suivant :

$$\begin{array}{lll} A & \rightarrow & \lambda_1 A, \\ k_0 & \rightarrow & k_0/\lambda_1, \\ E & \rightarrow & \lambda_2 E, \\ R & \rightarrow & \lambda_2 R, \\ \rho & \rightarrow & \lambda_3 \rho, \\ c_p & \rightarrow & \lambda_4 c_p, \\ \Delta H_r & \rightarrow & \lambda_3 \lambda_4 \Delta H_r, \\ U & \rightarrow & \lambda_3 \lambda_4 U, \\ c_{ph} & \rightarrow & \lambda_5 c_{ph}, \\ \rho_h & \rightarrow & \lambda_3 \lambda_4 \rho_h / \lambda_5, \end{array}$$

est composé de symétries qui laissent les sorties et le champ de vecteurs invariant.

### G1995 Modèle d'oscillations circadienne d'une protéine chez la Drosophile

Cet exemple est décrit page 53 dans le Chapitre 5.

### SHH1997 Modèle d'une partie du mécanisme de coagulation sanguine

Cet exemple est tiré de [137].

$$\begin{array}{lll} r_1 &= \frac{kc_X X \cdot RVV}{km_X + X}, & r_2 = ki_{Xa} Xa, & r_3 = \frac{kc_V V \cdot IIa}{km_V + V}, \\ r_4 &= k_{PT} Va \cdot Xa \cdot PL, & r_5 = k_{PL} PT, & r_6 = \frac{kc_{II} II \cdot PT}{km_{II} + II}, \\ r_7 &= \frac{kc_2 II \cdot Xa}{km_2 + II}, & r_8 = ki_{IIa\alpha_2 M} \cdot IIa, & r_9 = ki_{IIaATIII} \cdot IIa. \end{array}$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \dot{X} = -r_1, \\ \dot{X}a = r_1 - r_2 - r_4 + r_5, \\ \dot{V} = -r_3, \\ \dot{V}a = r_3 - r_4 + r_5, \\ \dot{P}L = -r_4 + r_5, \\ \dot{P}T = r_4 - r_5, \\ \dot{I}I = -r_6 - r_7, \\ \dot{I}Ia = r_6 + r_7 - r_8 - r_9, \\ I Ia \dot{\alpha}_2 M = r_9, \\ y = I Ia + \frac{556}{1000} I Ia \alpha_2 M. \end{array} \right.$$

Notre implantation en `maple` fournit les résultats suivants :

- les paramètres  $\{kc_X, km_X, kc_V, km_V, k_{PT}, kc_{II}, kc_2\}$  et les variables  $\{X, Xa, V, Va, PL, PT\}$  ne sont pas observables ;
- le degré de transcendance de l'extension de corps  $k\langle U, Y \rangle \hookrightarrow \mathcal{K}$  est 1.

On peut montrer que le groupe à un paramètre suivant :

$$\begin{array}{lll} X & \rightarrow & \lambda X, & PL & \rightarrow & \lambda PL, & kc_V & \rightarrow & \lambda kc_V, \\ Xa & \rightarrow & \lambda Xa, & PT & \rightarrow & \lambda PT, & km_V & \rightarrow & \lambda km_V, \\ V & \rightarrow & \lambda V, & kc_X & \rightarrow & \lambda kc_X, & k_{PT} & \rightarrow & k_{PT}/\lambda^2, \\ Va & \rightarrow & \lambda Va, & km_X & \rightarrow & \lambda km_X, & kc_{II} & \rightarrow & kc_{II}/\lambda, \\ & & & & & & kc_2 & \rightarrow & kc_2/\lambda, \end{array}$$

est composé de symétries qui laissent la sortie et le champ de vecteurs invariant.

### CC1993 Modèle d'une partie du mécanisme de régulation hépatique

Cet exemple est tiré de [28]. Les lettres  $u$  et  $g$  représentent des entrées.

$$\left\{ \begin{array}{l} \dot{x}_1 = -(k_p + F_{01}/V_1 g + k_{21})x_1 + k_{12}x_2, \\ \dot{x}_2 = k_{21}x_1 - (k_{02} + x_3 + k_{12})x_2, \\ \dot{x}_3 = -k_b x_3 + k_a u, \\ y = x_1/V_1. \end{array} \right.$$

Notre implantation en `maple` fournit les résultats suivants :

- les paramètres  $\{k_p, F_{01}, V_1, k_{21}, k_{12}, k_{02}\}$  et les variables  $\{x_1, x_2\}$  ne sont pas observables ;
- le degré de transcendance de l'extension de corps  $k\langle U, Y \rangle \hookrightarrow \mathcal{K}$  est 2.

On peut montrer que le groupe à deux paramètres engendré par les groupes :

$$\begin{array}{ll} x_1 & \rightarrow \lambda_1 x_1, \\ k_p & \rightarrow k_p + k_{21}(1 - 1/\lambda_1), & x_2 & \rightarrow \lambda_2 x_2, \\ k_{21} & \rightarrow k_{21}/\lambda_1, & k_p & \rightarrow k_p + k_{21}(1 - \lambda_2), \\ V_1 & \rightarrow \lambda_1 V_1, & k_{21} & \rightarrow \lambda_2 k_{21}, \\ F_{01} & \rightarrow \lambda_1 F_{01}, & k_{12} & \rightarrow k_{12}/\lambda_2, \\ k_{12} & \rightarrow \lambda_1 k_{12}, & k_{02} & \rightarrow k_{02} + (1 - 1/\lambda_2)k_{12}, \\ k_{02} & \rightarrow (1 - \lambda_1)k_{12} + k_{02}, \end{array}$$

est composé de symétries qui laissent la sortie et le champ de vecteurs invariant.

**T2002**

Un exemple dont je ne connais pas l'interprétation physique [141]. La lettre  $u$  représente une commande et les constantes  $c_i$  sont connues.

$$\left\{ \begin{array}{l} \dot{x}_1 = c_2 \frac{\theta_1(x_6 - x_1) + u}{\theta_2 \theta_3}, \\ \dot{x}_2 = \frac{(\theta_1 - \theta_6 \theta_7)(x_1 - x_2) + \theta_5(x_3 - x_2)}{c_3 \theta_3(1 - \theta_2) - \theta_8 \theta_7} - \theta_4 x_2, \\ \dot{x}_3 = \frac{\theta_5(x_2 - x_3)}{c_4 \theta_9}, \\ \dot{x}_4 = \frac{\theta_6(x_1 - x_4) + \theta_{10}(x_5 - x_4)}{\theta_8}, \\ \dot{x}_5 = \frac{\theta_{10}(x_4 - x_5)}{\theta_{11}(1 - \theta_8)}, \\ \dot{x}_6 = \frac{c_1 \theta_6 \theta_7(x_4 - x_2) + \theta_1(x_2 - x_6)}{\theta_2 \theta_3}, \\ y_1 = \frac{55}{100} \theta_{12} x_1, \\ y_2 = \theta_{12} \left( \frac{55}{100} \theta_8 x_4 + \theta_{11}(1 - \theta_8)x_5 \right). \end{array} \right.$$

Notre implantation en `maple` fournit les résultats suivants :

- les paramètres  $\{\theta_1, \theta_3, \theta_5, \theta_7, \theta_9, \theta_{12}\}$  et les variables  $\{x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6\}$  ne sont pas observables ;
- le degré de transcendance de l'extension de corps  $k\langle U, Y \rangle \hookrightarrow \mathcal{K}$  est 1.

On peut montrer que le groupe à un paramètre suivant :

$$\begin{array}{llll} x_1 \rightarrow \lambda x_1, & x_4 \rightarrow \lambda x_4, & \theta_1 \rightarrow \theta_1/\lambda, & \theta_7 \rightarrow \theta_7/\lambda, \\ x_2 \rightarrow \lambda x_2, & x_5 \rightarrow \lambda x_5, & \theta_3 \rightarrow \theta_3/\lambda, & \theta_9 \rightarrow \theta_9/\lambda, \\ x_3 \rightarrow \lambda x_3, & x_6 \rightarrow \lambda x_6, & \theta_5 \rightarrow \theta_5/\lambda, & \theta_{12} \rightarrow \theta_{12}/\lambda, \end{array}$$

est composé de symétries qui laissent la sortie et le champ de vecteurs invariant.

**AW2003**

Un exemple dont je ne connais pas l'interprétation physique [1].

$$\begin{aligned} r_1 &:= p_{11} \frac{x_1 - p_{12} x_2 x_3}{p_{13} + x_1 + p_{14} p_{15} x_3 + p_{16} p_{15} x_2 + p_{17} x_1 x_3 + x_2 x_3 p_{15}}, \\ r_2 &:= p_{21} \frac{x_2 - p_{22} x_3}{p_{23}(1 + p_{24} x_3) + x_2}, \quad r_3 := \frac{p_{31} x_2^5}{p_{33} + x_2^5}, \quad r_4 := \frac{p_{41} x_3^2}{p_{43} + x_3^2}, \end{aligned}$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \dot{x}_1 = p_0 - r_1 - p x_1, \\ \dot{x}_2 = r_1 - r_2 - r_3 - p x_2, \\ \dot{x}_3 = r_1 + r_2 - r_4 - p x_3, \\ y_1 = x_1, \\ y_2 = x_2. \end{array} \right.$$

Notre implantation en `maple` assure que ce système est observable. Par contre, si on prend comme sortie  $y_1 = x_1/p_0$  et  $y_2 = x_2/p_{11}$ , le modèle n'est plus identifiable et on a les résultats suivants :

- seul les paramètres  $p$  et  $p_{22}$  sont observables ;
- le degré de transcendance de l'extension de corps  $k\langle U, Y \rangle \hookrightarrow \mathcal{K}$  est 1.

On peut montrer que le groupe à un paramètre suivant :

$$\begin{array}{llllll}
 x_1 \rightarrow \lambda x_1 & p_{11} \rightarrow \lambda p_{11} & p_{23} \rightarrow \lambda p_{23} & p_{16} \rightarrow \lambda p_{16} & p_{12} \rightarrow p_{12}/\lambda \\
 x_2 \rightarrow \lambda x_2 & p_{13} \rightarrow \lambda p_{13} & p_{21} \rightarrow \lambda p_{21} & p_{17} \rightarrow p_{17}/\lambda & p_{24} \rightarrow p_{24}/\lambda \\
 x_3 \rightarrow \lambda x_3 & p_{31} \rightarrow \lambda p_{31} & p_{14} \rightarrow \lambda p_{14} & p_{15} \rightarrow p_{15}/\lambda & p_{41} \rightarrow \lambda p_{41} \\
 p_0 \rightarrow \lambda p_0 & p_{33} \rightarrow \lambda^5 p_{33} & & & p_{43} \rightarrow \lambda^2 p_{43}
 \end{array}$$

est composé de symétries qui laissent la sortie et le champ de vecteurs invariant.

### SRIS1989 Modèle d'un convertisseur de tension

Dans la Section 2.2.1 page 2.2.1, nous avons présenté la notion de système différentiellement plat en remarquant que la sortie plate peut être une quantité physique connue a priori.

Prenons comme exemple le système suivant qui représente un convertisseur de tension continu en tension continu par modulation de largeur d'impulsion :

$$\begin{cases}
 \dot{x}_1 = (u-1)\frac{x_2}{L} + \frac{E}{L}, \\
 \dot{x}_2 = (1-u)\frac{x_1}{LC} - \frac{x_2}{RC}, \\
 y = \frac{x_1^2}{2C} + \frac{x_2^2}{2L}.
 \end{cases} \quad (\text{B.3})$$

La lettre  $u$  représente la commande et la sortie  $y$  est donnée par l'expression de l'énergie électromagnétique. Dans [135], les auteurs montrent que ce système est exactement linéarisable.

Le test présenté dans le Chapitre 5 page 49 permet de confirmer ou d'infirmer cette intuition physique à moindre coût puisqu'il permet de décider si le modèle est observable par rapport à la sortie  $y$  en considérant la commande comme une série dont les coefficients sont des paramètres.



# Index des notations

- $k$  : sauf mention du contraire, un corps algébriquement clos de caractéristique nulle.  
 $k\{x\}$  : l'algèbre différentielle en la variable  $x$ .  
 $[\Sigma]$  : l'idéal différentiel engendré par un système d'équation  $\Sigma$ .  
 $k\langle x \rangle$  : le corps différentiel des fractions rationnelles en la variable  $x$ .  
 $\text{Fr}(k\{X\}/\mathcal{I})$  : si  $\mathcal{I}$  est un idéal différentiel premier de  $k\{X\}$ , il s'agit du corps des fractions de l'anneau quotient  $k\{X\}/\mathcal{I}$ .  
 $\mathcal{F}/k$  : une extension du corps  $k$  dans le corps  $\mathcal{F}$ .  
 $\mathcal{P}_{\mathcal{F}/k}$  : le polynôme de transcendance différentielle de l'extension de corps  $\mathcal{F}/k$ .  
 $\mathcal{H}_{\mathcal{F}/k}$  : la fonction de transcendance différentielle de l'extension de corps  $\mathcal{F}/k$ .  
 $\Omega_{\mathcal{F}/k}$  : module des différentielles de Kähler associé à l'extension de corps  $\mathcal{F}/k$ .  
 $\text{Der}_{\mathcal{K}}(\mathcal{F}, \mathcal{F})$  : module des dérivations de  $\mathcal{F}$  dans  $\mathcal{F}$  ayant  $\mathcal{K}$  comme corps des constantes.  
 $d_{\mathcal{F}/\mathcal{G}}$  : une dérivation de  $\mathcal{F}$  dans  $\Omega_{\mathcal{F}/\mathcal{G}}$  telle que  $\forall g \in \mathcal{G}$  on a  $d_{\mathcal{F}/\mathcal{G}}(g) = 0$ .  
 $\sigma_\lambda$  : un groupe à un paramètre  $\lambda$  d'automorphismes.
- $\succ$  : un arrangement sur un ensemble d'indéterminées différentielles (cf. Définition 3.1 page 24).  
 $I_p$  : l'initial d'un polynôme différentiel  $p$  (cf. Définition 3.1 page 24).  
 $S_p$  : le séparant d'un polynôme différentiel  $p$  (cf. Définition 3.1 page 24).  
 $H_\Sigma$  : produit des initiaux et des séparants des polynômes différentiels d'un ensemble de relations  $\Sigma$ .
- $\bar{h}(p)$  : la hauteur de  $p$  (cf. Définition 5.2 page 59).  
 $\mathcal{N}(n)$  : complexité arithmétique de la multiplication de deux matrices de taille  $n \times n$ .  
 $\mathcal{M}(n)$  : complexité arithmétique de la multiplication de deux séries à l'ordre  $n$ .
- $\partial^n w / \partial s^n$ ,  $\partial_{s^n} w$ ,  $w_{s^n}$  : dérivée partielle d'ordre  $n$  de la fonction  $w$  par rapport à la variable  $s$ .  
 $\delta_h$  : opérateur tel que  $\delta_h f(x) = f(x + h)$   
 $\phi_\gamma$  : une fonction « plateau » de classe Gevrey  $1 + 1/\gamma$  (cf. Section 6.1.2 page 69).



# Table des figures

|     |   |     |
|-----|---|-----|
| 1   | Une tige flexible non linéaire. . . . .   | vi  |
| 3.1 | Schéma simplifié d'une pompe dans un moteur propulsif. . . . .  | 28  |
| 4.1 | Une stratégie de calcul de la fonction de Hilbert différentielle associée à une application rationnelle différentielle. . . . . | 45  |
| 5.1 | Description schématique de l'identification paramétrique . . . . .  | 51  |
| 5.2 | Une stratégie de calcul de la fonction de Hilbert différentielle d'une représentation d'état. . . . .                           | 57  |
| 5.3 | Test d'observabilité algébrique locale . . . . .  | 60  |
| 6.1 | Tige chauffée à une extrémité et isolée à l'autre. . . . .  | 66  |
| 6.2 | Les fonctions $\phi_\gamma$ , $\dot{\phi}_\gamma$ et $\ddot{\phi}_\gamma$ , pour $\gamma = 1$ . . . . .                         | 70  |
| 6.3 | Profil de température de la tige obtenu par la méthode des séries . . . . .   | 71  |
| 6.4 | Profil de température de la tige chauffée obtenu par semidiscretisations. . . . .   | 74  |
| 6.5 | Commande en boucle ouverte correspondant au problème de la chaleur. . . . .   | 75  |
| 7.1 | Profil de température de la tige chauffée semilinéaire au cours du temps. . . . .   | 86  |
| 7.2 | La sortie plate utilisée et la commande en boucle ouverte obtenue. . . . .  | 87  |
| 7.3 | Profil de vitesse d'un gaz de particule obéissant à l'équation de Burger. . . . .   | 89  |
| 7.4 | Comparaison de la commande du problème de la chaleur et de celle de Burger obtenues avec la même sortie plate. . . . .          | 90  |
| 7.5 | Description de la tige flexible non linéaire considérée. . . . .  | 91  |
| 7.6 | Position de la tige flexible au cours du temps. . . . .   | 93  |
| 7.7 | Convergence <i>expérimentale</i> de la commande. . . . .  | 93  |
| B.1 | Récapitulatif des exemples d'utilisation du test d'observabilité. . . . .   | 101 |



# Bibliographie

- [1] ANGUELOVA, M., AND WENNBORG, B. Communication privée. (cité p. 106)
- [2] BAUR, W., AND STRASSEN, V. The complexity of partial derivatives. *Theoretical computer science* 22, 3 (1983), 317–330. (cité p. 32)
- [3] BECKERMANN, B., AND LABAHN, G. A uniform approach for Hermite Padé and simultaneous Padé approximants and their matrix-type generalizations. *Numerical Algorithms* 3, 1-4 (1992), 45–54. (cité p. 99)
- [4] BELLMAN, R., AND ÅSTRÖM, K. J. On structural identifiability. *Mathematical biosciences* 7 (1970), 329–339. (cité p. 50)
- [5] BENSOUSSAN, A., DA PRATO, G., DELFOUR, M. C., AND MITTER, S. K. *Representation and control of infinite dimensional systems*, vol. 1 & 2. Birkhäuser, 1992 & 1993. (cité p. 65)
- [6] BERGER, M., AND GOSTIAUX, B. *Géométrie différentielle : variété, courbes et surfaces*. Presse universitaire de France, 1987. (cité p. 36)
- [7] BERKOWITZ, S. J. On computing the determinant in small parallel time using a small number of processors. *Information processing letters* 18, 3 (1984), 147–150. (cité p. 32)
- [8] BOULIER, F. *Étude et implantation de quelques algorithmes en algèbre différentielle*. Thèse de doctorat, LIFL, Université Lille I, June 1994. (cité p. 25, 27)
- [9] BOULIER, F. Efficient computation of regular differential systems by change of rankings using Kähler differentials. Prépublication 1999-14, LIFL, Université de Lille I, 1999. <http://www.lifl.fr/~boulie>. (cité p. 26, 39)
- [10] BOULIER, F., LAZARD, D., OLLIVIER, F., AND PETITOT, M. Representation for the radical of a finitely generated differential ideal. In *Proceedings of the 1995 International Symposium on Symbolic and Algebraic Computation* (Montreal, Canada, July 10–12 1995), A. H. M. Levelt, Ed., ACM, ACM Press, pp. 158–166. (cité p. 21, 25, 26)
- [11] BOULIER, F., LAZARD, D., OLLIVIER, F., AND PETITOT, M. Computing representations for radicals of finitely generated differential ideals. Prépublication IT306, LIFL, Université de Lille I, Feb. 1999. <http://www.lifl.fr/~boulie>. (cité p. 26)
- [12] BOULIER, F., AND LEMAIRE, F. Computing canonical representatives of regular differential ideals. In *Proceedings of the 2000 International Symposium on Symbolic and Algebraic Computation* (St Andrews, Scotland, Aug. 7–9 2000), C. Traverso, Ed., ACM, ACM press, pp. 37–46. (cité p. 26)
- [13] BOULIER, F., LEMAIRE, F., AND MORENO MAZA, M. Pardi! In *Proceedings of the 2001 International Symposium on Symbolic and Algebraic Computation* (London, Ontario, Canada, July 22–25 2001), B. Mourrain, Ed., ACM, ACM press, pp. 38–47. (cité p. 26)
- [14] BOYER, F., AND COIFFET, P. Symbolic modeling of a flexible manipulator via assembling of its generalized Newton Euler model. *Mechanism and machine theory* 31, 1 (1996), 45–56. (cité p. 91)
- [15] BRENNAN, K. E., CAMPBELL, S. L., AND PETZOLD, L. R. *Numerical solution of initial-value problems in differential-algebraic equations*, vol. 14 of *Classics in applied Mathematics*. SIAM, 1996. (cité p. 73)
- [16] BRENT, R. P., AND KUNG, H. T. Fast algorithms for manipulating formal power series. *Journal of the Association for Computing Machinery* 25, 4 (Oct. 1978), 581–595. (cité p. 58, 59)

- [17] BRONSTEIN, M. *Symbolic integration I, transcendental function*, vol. 1 of *Algorithms and Computation in Mathematics*. Springer, 1997. (cité p. 98)
- [18] BRUNOVSKÝ, P. A classification of linear controllable systems. *Kybernetika* 6 (1970), 176–188. (cité p. 17)
- [19] BÜRGISSER, P., CLAUSEN, M., AND SHOKROLLAHI, M. A. *Algebraic complexity theory*, vol. 315 of *Grundlehren der mathematischen wissenschaften*. Springer, 1997. (cité p. 31)
- [20] BUTKOVSKIY, A. *Structural theory of distributed systems*. Ellis Horwood, Chichester, 1983. (cité p. 65, 75)
- [21] CAMPBELL, S. L. DAE approximations of PDE modeled control problems. In *IEEE Mediterranean symposium on new directions in control and automation* (Crete, 1994), pp. 407–414. (cité p. 73)
- [22] CAMPBELL, S. L. Higher index differential algebraic equations. *Journal of Mechanics of Structures and Machines* 23, 2 (1995), 199–222. (cité p. 14)
- [23] CAMPBELL, S. L., AND GEAR, C. W. The index of general nonlinear DAE's. *Numerische Mathematik* 72, 2 (1995), 173–196. (cité p. 14, 42)
- [24] CARRÀ-FERRO, G. Gröbner bases and differential ideals. In *Proceedings of the 5th International Applied algebra, algebraic algorithms and error-correcting codes* (Mernoca, Spain, June 1987), L. Huguet and A. Poli, Eds., no. 356 in *Lecture notes in computer science*, Springer-Verlag, pp. 129–140. (cité p. 23)
- [25] CARRÀ-FERRO, G. A resultant theory for the systems of two ordinary algebraic differential equations. *Applicable Algebra in Engineering, Communication and Computing* 8, 6 (1997), 539–561. (cité p. 23)
- [26] CARTAN, É. Sur l'intégration de certains systèmes indéterminés d'équations différentielles. *Journal für die reine und angewandte Mathematik* 145 (1915), 86–91. (cité p. 16)
- [27] CASTRO, D., HÄGELE, K., MORAIS, J., AND PARDO, L. M. Kronecker's and Newton's approaches to solving : a first comparison. *Journal of complexity* 17, 1 (2001), 212–303. (cité p. 31, 59)
- [28] CAUMO, A., AND COBELLI, C. Hepatic glucose production during the labelled IVGTT estimation by the convolution with a new minimal model. *Amer. J. Physiol.* 264 (1993), E829–E841. (cité p. 105)
- [29] CHRISTOFIDES, P. D. *Nonlinear and robust control of PDE systems. Methods and applications to transport-reaction processes*. Systems & control : foundations & applications. Birkhäuser, 2001. (cité p. 65)
- [30] CHYZAK, F. *Fonctions holonomes en calcul formel*. Thèse de doctorat, École polytechnique, May 1998. (cité p. 4)
- [31] COX, D., LITTLE, J., AND O'SHEA, D. *Ideals, varieties and algorithms : an introduction to computational algebraic geometry and commutative algebra*. Undergraduate texts in Mathematics. Springer-Verlag, 1992. (cité p. 7, 23)
- [32] DEMAZURE, M. Le théorème de complexité de Mayr et Meyer. In *Géométrie algébrique et applications, I (La Rabida, 1984)*. Hermann, Paris, 1987, pp. 35–58. (cité p. 22)
- [33] DENEFF, J., AND LIPSHITZ, L. Power series solutions of algebraic differential equations. *Mathematische annalen* 267, 2 (1984), 213–238. (cité p. 44)
- [34] DiffAlg, *The diffalg package*. Adresse URL : <http://www-sop.inria.fr/cafe/Evelyne.Hubert/webdiffalg/>. (Page consultée en septembre 2001). (cité p. 26, 28)
- [35] DIOP, S. Elimination in control theory. *Mathematics of control, signals and systems* 4, 1 (1991), 17–32. (cité p. 21)
- [36] DIOP, S. Differential-algebraic decision methods and some applications to system theory. *Theoretical computer science* 98, 1 (1992), 137–161. (cité p. 27, 51)
- [37] DIOP, S., AND FLIESS, M. On nonlinear observability. In *Proceedings of the first european control conference* (Grenoble, France, July 2–5 1991), C. Commault and coll., Eds., vol. 1, Hermès, pp. 152–157. (cité p. 11, 15, 39, 49, 53)

- [38] EISENBUD, D. *Commutative algebra with a view toward algebraic geometry*. No. 150 in Graduate texts in Mathematics. Springer, 1994. (cité p. 8, 40, 43, 54)
- [39] FABRE, C., PUEL, J.-P., AND ZUAZUA, E. Approximate controllability of the semilinear heat equation. *Proceedings of the Royal Society of Edinburgh. Section A. Mathematics* 125, 1 (1995), 31–61. (cité p. 82)
- [40] FAUGÈRE, J. C., GIANNI, P., LAZARD, D., AND MORA, T. Efficient computation of zero-dimensional Gröbner bases by change of ordering. *Journal of Symbolic Computation* 16, 4 (1993), 329–344. (cité p. 26)
- [41] FLIESS, M. Automatique et corps différentiels. *Forum Mathematicum* 1, 3 (1989), 227–238. (cité p. iii, 11, 15, 27)
- [42] FLIESS, M. Some basic structural properties of generalized linear systems. *Systems and control letters* 15, 5 (1990), 391–396. (cité p. 73)
- [43] FLIESS, M., LÉVINE, J., MARTIN, P., OLLIVIER, F., AND ROUCHON, P. A remark on nonlinear accessibility conditions and infinite prolongations. *Systems and control letters* 31, 2 (1997), 77–83. (cité p. 11)
- [44] FLIESS, M., LÉVINE, J., MARTIN, P., AND ROUCHON, P. Flatness and defect of nonlinear systems : introductory theory and examples. *International journal of control* 61, 6 (1995), 1327–1361. (cité p. iii, 11, 16, 17, 18, 19, 65, 66)
- [45] FLIESS, M., LÉVINE, J., MARTIN, P., AND ROUCHON, P. Implicit differential equations and Lie-Bäcklund mapping. In *Proceedings of 34th conference on decision and control* (New Orleans, USA, Dec. 1995), IEEE. (cité p. 36, 40)
- [46] FLIESS, M., LÉVINE, J., MARTIN, P., AND ROUCHON, P. A Lie-Bäcklund approach to equivalence and flatness of nonlinear systems. *IEEE Transactions on automatic control* 44, 5 (1999), 922–937. (cité p. 19)
- [47] FLIESS, M., AND MOUNIER, H. Controllability and observability of linear delay systems : an algebraic approach. *ESAIM : control optimisation and calculus of variations* 3 (1998), 301–314. (cité p. 11, 19, 68, 73)
- [48] FLIESS, M., AND MOUNIER, H. Tracking control and  $\pi$ -freeness of infinite dimensional linear system. In *Dynamical systems, control coding, computer vision* (1999), G. Picci and D. Gilliam, Eds., Birkhäuser, pp. 45–68. (cité p. 17, 65, 66, 68)
- [49] FLIESS, M., MOUNIER, H., ROUCHON, P., AND RUDOLPH, J. Systèmes linéaires sur les opérateurs de Mikusiński et commande d’une poutre flexible. In *Élasticité, viscoélasticité et contrôle optimal : 8ème entretiens du centre Jacques Cartier* (Lyon, France, Dec. 6–8 1997), J. Blum, A. Raoult, and J. Baranger, Eds., vol. 2, ESAIM : Proceedings, pp. 183–193. <http://www.emath.fr/proc/Vol.2/>. (cité p. 19, 68, 90)
- [50] FORSMAN, K. Applications of Gröbner bases to nonlinear systems. In *Proceedings of first european control conference* (Grenoble, France, July 2–5 1991), C. Commault and coll., Eds., vol. 1, Hermès, pp. 164–169. (cité p. 27)
- [51] FORSMAN, K. Some generic results on algebraic observability and connections with realization theory. In *Proceedings of 2nd european control conference* (Gröningen, Deutchland, July 1996), J. W. Nieuwenhuis, C. Praagman, and H. L. Trentelman, Eds., vol. 3, pp. 1185–1190. (cité p. 21)
- [52] FORSMAN, K., AND JIRSTRAND, M. Some finiteness issues in differential algebraic systems theory. research report 1994-02-24, Departement of electrical engineering, Linköping University, 1994. (cité p. 5)
- [53] GALLO, G., AND MISHRA, B. Efficient algorithms and bounds for Wu-Ritt characteristic sets. In *Effective methods in algebraic geometry (proceedings of MEGA ’90)* (Livorno, Italy, Apr. 17–21 1991), F. Mora and C. Traverso, Eds., vol. 94 of *Progress in Mathematics*, Birkhäuser, pp. 119–142. (cité p. 29)

- [54] GALLO, G., MISHRA, B., AND OLLIVIER, F. Some constructions in rings of differential polynomials. In *Proceedings of the 9th International Applied algebra, algebraic algorithms and error-correcting codes* (New Orleans, USA, 1991), H. Mattson, T. Mora, and T. Rao, Eds., no. 539 in Lecture notes in computer science, Springer-Verlag, pp. 171–182. (cité p. 22)
- [55] GATHEN, VON ZUR, J., AND GERHARD, J. *Modern computer algebra*. Cambridge university press, 1999. (cité p. 23, 31, 61)
- [56] GEDDES, K. Convergence behaviour of the Newton iteration for first order differential equations. In *Symbolic and Algebraic Computation, Proceedings of EUROSAM'79* (Marseille, France, June 1979), E. W. Ng, Ed., no. 72 in Lecture notes in computer science, Springer-Verlag, pp. 189–199. (cité p. 58, 59)
- [57] GEVREY, M. La nature analytique des solutions des équations aux dérivées partielles. *Annales scientifiques de l'École Normale Supérieure* 35 (1918), 129–190. (cité p. 69, 70, 82)
- [58] GIUSTI, M., HÄGELE, K., LECERF, G., MARCHAND, J., AND SALVY, B. The projective Noether maple package : computing the dimension of a projective variety. *Journal of symbolic computation* 30, 3 (Sept. 2000), 291–307. (cité p. 31)
- [59] GIUSTI, M., HEINTZ, J., MORAIS, J. E., MORGENSTERN, J., AND PARDO, L. M. Straight-line programs in geometric elimination theory. *Journal of pure and applied algebra* 124, 1-3 (1998), 101–146. (cité p. 31)
- [60] GOLDBETER, A. A model for circadian oscillations in the Drosophila period protein. *Proceedings of the Royal Society London B*, 261 (1995), 319–324. (cité p. 52)
- [61] HAIRER, E., NØRSETT, S. P., AND WANNER, G. *Solving ordinary differential equations I*, vol. 8 of *Springer Series in Computational Mathematics*. Springer-Verlag, 1993. (cité p. 71, 79)
- [62] HENRY, D. *Geometric theory of semilinear parabolic equations*, vol. 840 of *Lecture notes in Mathematics*. Springer-Verlag, 1981. (cité p. 67)
- [63] HERMANN, R., AND KRENER, A. J. Nonlinear controllability and observability. *IEEE Transactions on automatic control* 22, 5 (1977), 728–740. (cité p. 49, 51)
- [64] HILBERT, D. Über den begriff des klasse von differentialgleichungen. *Mathematischen annalen* 73 (1912), 95–108. (cité p. 16)
- [65] HUBERT, É. *Étude algébrique et algorithmique des singularités des équations différentielles implicites*. Thèse de doctorat, Institut National Polytechnique de Grenoble, Apr. 1997. <http://www-sop.inria.fr/cafe/Evelyne.Hubert/>. (cité p. 26, 27)
- [66] HUBERT, É. Essential components of an algebraic differential equation. *Journal of symbolic computation* 28, 4 & 5 (Oct./Nov. 1999), 657–681. (cité p. 26)
- [67] HUBERT, É. Factorisation free decomposition algorithms in differential algebra. *Journal of symbolic computation* 29, 4 & 5 (Apr./May 2000), 641–662. (cité p. 21, 26)
- [68] ISIDORI, A. *Nonlinear control systems*, 2 ed., vol. 72 of *Communications and control engineering series*. Springer-Verlag, 1989. (cité p. 13, 14, 19, 49)
- [69] JOHNSON, J. Kähler differentials and differential algebra. *Annals of Mathematics* 89, 1 (1969), 92–98. (cité p. 9, 54)
- [70] JOHNSON, J. Kähler differentials and differential algebra in arbitrary characteristic. *Transaction of the American Mathematical Society* 192 (1974), 201–208. (cité p. 9, 54)
- [71] KALMAN, R. E. On the general theory of control systems. In *Proceedings of the first international congress on automatic control* (Moscow, SSSR, 1961), vol. 1, Butterworths, London, pp. 481–492. (cité p. 11, 49)
- [72] KALTOFEN, E. Computational differentiation and algebraic complexity theory. In *Workshop report on first theory institute on computational differentiation* (Argonne, Illinois, USA, Dec. 1993), C. H. Bischo, A. Griewank, and P. M. Khademi, Eds., pp. 28–30. vol. ANL/MCS-TM-183 of tech. rep. Argonne national laboratory. (cité p. 31)

- [73] KALTOFEN, E., AND SINGER, M. F. Size efficient parallel algebraic circuits for partial derivatives. In *IV International conference on computer algebra in physical research* (Singapore, 1991), D. V. Shirkov, V. A. Rostovtsev, and V. P. Gerdt, Eds., World Scientific, pp. 133–145. (cité p. 31)
- [74] KNUTH, D. E. *The art of computer programming : seminumerical algorithms*, third ed., vol. 2. Addison–Wesley, 1998. (cité p. 58, 59)
- [75] KOLCHIN, E. R. *Differential algebra and algebraic groups*, vol. 54 of *Pure and applied Mathematics*. Academic press, New York, 1973. (cité p. iii, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 24, 27, 54)
- [76] KUMAR, A., AND DAOUTIDIS, P. *Control of nonlinear differential algebraic equation systems*. No. 397 in *Research notes in Mathematics*. Chapman and Hall / CRC, 1999. (cité p. 104)
- [77] LAROCHE, B. *Extension de la notion de platitude à des systèmes décrits par des équations aux dérivées partielles linéaires*. Thèse de doctorat, École nationale supérieure des Mines de Paris, Dec. 2000. (cité p. 19, 65, 66, 68, 69)
- [78] LAROCHE, B., MARTIN, P., AND ROUCHON, P. Motion planning for the heat equation. *International journal of robust and nonlinear control* 10, 8 (2000), 629–643. (cité p. vi, 19, 65, 66, 69, 69, 70)
- [79] LECERF, G. *Une alternative aux méthodes de réécriture pour la résolution des systèmes algébriques*. Thèse de doctorat, École polytechnique, Sept. 2001. (cité p. 31)
- [80] LECOURTIER, Y., LAMNABHI-LAGARRIGUE, F., AND WALTER, É. A method to prove that nonlinear models can be unidentifiable. In *Proceedings of the 26th conference on decision and control* (Los Angeles, USA, Dec. 1987), pp. 2144–2145. (cité p. 51)
- [81] LEWY, H. An example of smooth linear partial differential equation without solution. *Annals of Mathematics* 66 (1957), 155–158. (cité p. 67)
- [82] LIONS, J.-L. *Contrôle optimal des systèmes gouvernés par des équations aux dérivées partielles*. Dunod, 1968. (cité p. 65)
- [83] LJUNG, L. *System identification – Theory for the user*. PTR Prentice Hall, 1987. (cité p. 51)
- [84] LJUNG, L., AND GLAD, T. Parametrization of nonlinear model structures as linear regressions. In *11th IFAC word congress* (Tallin, Estonia, Aug. 1990), pp. 67–71. (cité p. 15, 16, 27, 51)
- [85] LJUNG, L., AND GLAD, T. On global identifiability for arbitrary model parametrizations. *Automatica* 30, 2 (Feb. 1994), 265–276. (cité p. 21, 50)
- [86] LYNCH, A. F., AND RUDOLPH, J. Flatness-based boundary control of a nonlinear parabolic equation modelling a tubular reactor. In *Nonlinear control in the year 2000* (London, 2000), A. Isidori, F. Lamnabhi-Lagarrigue, and W. Respondek, Eds., vol. 259 of *Lecture notes in control and information sciences*, Springer, pp. 45–54. (cité p. 65, 69, 82)
- [87] MANSFIELD, ELIZABETH, L. *Differential Gröbner bases*. PhD thesis, Macquarie University, Sydney, 1991. (cité p. 23)
- [88] MARGARIA, G. *Applications of differential algebra to the structural identifiability of non linear models*. PhD thesis, Departement of Mathematics, Politecnico di Torino, 1999. (cité p. 27)
- [89] MARGARIA, G., AND WHITE, L. Multispecies model for the transmission of pathogens. *Communication privée*. (cité p. 103)
- [90] MARINO, R., AND VALIGI, P. Nonlinear control of induction motors : a simulation study. In *Proceedings of first european control conference* (Grenoble, France, July 2–5 1991), C. Commault and coll., Eds., vol. 1, Hermès, pp. 1057–1062. (cité p. 103)
- [91] MARTIN, P., AND ROUCHON, P. Any (controllable) driftless system with 3 inputs and 5 states is flat. *Systems and control letters* 25, 3 (1995), 167–173. (cité p. 11, 18)
- [92] MARTIN, P., AND ROUCHON, P. Systèmes plats : planification et suivi de trajectoires, May 1999. Journée X–UPS, <http://math.polytechnique.fr/xups/>. (cité p. 11)
- [93] MATERA, G., AND SEDOGLAVIC, A. The differential Hilbert function of a differential rational mapping can be computed in polynomial time. In *Proceedings of the 2002 International Symposium on Symbolic and Algebraic Computation* (Lille, France, July 7–10 2002), T. Mora, Ed., ACM, ACM press, pp. 184–191. (cité p. iv, vii, 41)

- [94] MAYR, E. W., AND MEYER, A. R. The complexity of the word problem for commutative semigroups and polynomial ideals. *Advances in Mathematics* 46, 3 (1982), 305–329. (cité p. 22)
- [95] MIKUSIŃSKI, J. *Operational calculus*. Pergamon press, 1959. (cité p. 68)
- [96] MONAGAN, M. B., GEDDES, K. O., HEAL, K. M., LABAHN, G., AND VORKOETTER, S. M. *Maple V programming guide*. Springer-Verlag, 1996. <http://www.maplesoft.com>. (cité p. 26, 59)
- [97] MORGENSTERN, J. How to compute fast a function and all its derivatives : a variation on the theorem of Baur-Strassen. *SIGACT news* 16, 4 (1985), 60–62. (cité p. 32)
- [98] MOUNIER, H. *Propriétés structurelles des systèmes linéaires à retards : aspects théoriques et pratiques*. Thèse de doctorat, Université Paris-Sud, Orsay, Oct. 1995. (cité p. 19, 65, 68, 75, 75)
- [99] NIEUWSTADT, VAN, M., RATHINAM, M., AND MURRAY, R. M. Differential flatness and absolute equivalence of nonlinear control systems. *SIAM Journal on Control and Optimization* 36, 4 (1998), 1225–1239. (cité p. 19)
- [100] NOIRET, C. *Utilisation du calcul formel pour l'identifiabilité de modèles paramétriques et nouveaux algorithmes en estimation de paramètres*. Thèse de doctorat, Université de technologie de Compiègne, Dec. 2000. (cité p. 21, 27, 52)
- [101] OLLIVIER, F. *Le problème de l'identifiabilité structurelle globale : approche théorique, méthodes effectives et bornes de complexité*. Thèse de doctorat, École polytechnique, June 1990. (cité p. 16, 23, 27, 37)
- [102] OLLIVIER, F. Standard bases of differential ideals. In *Proceedings of the 8th International Applied algebra, algebraic algorithms and error-correcting codes* (Tokyo, Japan, Aug. 20–24 1990), S. Sakata, Ed., vol. 508 of *Lecture notes in computer science*, Springer-Verlag, pp. 304–321. (cité p. 23)
- [103] OLLIVIER, F. Une réponse négative au problème de Lüroth différentiel en dimension 2. *Compte rendu de l'Académie des sciences de Paris* 327, Série I (1998), 881–886. (cité p. 36)
- [104] OLLIVIER, F. Une réponse négative au problème de Noether différentiel. *Compte rendu de l'Académie des sciences de Paris* 328, Série I (1999), 99–104. (cité p. 36)
- [105] OLLIVIER, F. Identifiabilité et identification : du calcul formel au calcul numérique? In *Automatique, Biologie et Santé : modélisation et commande de régulations biologiques* (Paris, France, May 2000), vol. 9 of *European Series in Applied and Industrial Mathematics*, EDP Sciences-SMAI, pp. 93–99. <http://www.emath.fr/Maths/Proc/>. (cité p. 26)
- [106] OLLIVIER, F., AND SEDOGLAVIC, A. A generalization of flatness to nonlinear systems of partial differential equations. Application to the command of a flexible rod. In *Proceedings of the 5th IFAC Symposium "Nonlinear Control Systems"* (Saint Petersburg, Russia, July 4–6 2001), vol. 1, Elsevier, pp. 196–200. (cité p. vi, vii)
- [107] OLLIVIER, F., AND SEDOGLAVIC, A. Algorithmes efficaces pour tester l'identifiabilité locale. In *Actes de la Conférence Internationale Francophone d'Automatique 2002* (Nantes, France, July 8–10 2002), IEEE, pp. 811–816. (cité p. vii)
- [108] ORDONNEAU, G. Démarrage d'un moteur à cycle  $\blacksquare$ expand $\blacksquare$  : analyse des temps caractéristiques. Tech. Rep. RT 1/6164 DEFA/Y, Office National d'Études et de Recherches Aérospatiales, Oct. 1999. (cité p. 14)
- [109] PETIT, N., CREFF, Y., AND ROUCHON, P. Motion planning for two classes of nonlinear systems with delays depending on the control. In *Proceeding of the 37th IEEE conference on decision and control* (Tampa, Florida, USA, Dec. 1998), pp. 13–20. (cité p. 87)
- [110] POHJANPALO, H. System identifiability based on the power series expansion of the solution. *Mathematical biosciences* 41, 1–2 (1978), 21–33. (cité p. 49, 51)
- [111] POMET, J. On dynamic feedback linearization of four dimensional affine control systems with two inputs. In *ESAIM : Control optimisation calculus variations* (1997), vol. 2, pp. 151–230. (cité p. 19)
- [112] PÉLADAN, A. *Tests effectifs de nullité dans des extensions d'anneaux différentiels*. Thèse de doctorat, École polytechnique, Jan. 1997. (cité p. 5, 7, 27, 27, 44)

- [113] RABIER, PATRICK, J., AND RHEINBOLDT, WERNER, C. A geometric treatment of differential-algebraic equations. *Journal of Differential Equations* 109, 1 (1994), 110–146. (cité p. 42)
- [114] RAKSANYI, A. *Utilisation du calcul formel pour l'étude des systèmes d'équations polynomiales (applications en modélisation)*. Thèse de doctorat, Université Paris–Dauphine, 1986. (cité p. 27, 53, 102)
- [115] RAKSANYI, A., LECOURTIER, Y., WALTER, É., AND VENOT, A. Identifiability and distinguishability testing via computer algebra. *Mathematical biosciences* 77, 1–2 (1985), 245–266. (cité p. 51)
- [116] RAMIS, J.-P. Dévissage Gevrey. *Astérisque* 59–60 (1978), 173–204. (cité p. 69, 70)
- [117] REID, G. J., LIN, P., AND WITTKOPF, A. D. Differential elimination-completion algorithms for DAE and PDAE. *Studies in Applied Mathematics* 106, 1 (2001), 1–45. (cité p. 23, 27)
- [118] RITT, J. F. *Differential algebra*, vol. 33 of *American Mathematical Society colloquium publications*. Dover publications, 1950. (cité p. iii, 3, 5, 24, 26, 36)
- [119] ROSENFELD, A. Specialization in differential algebra. *Transaction of the American Mathematical Society* 90 (1959), 394–407. (cité p. 25)
- [120] ROUCHON, P. Necessary condition and genericity of dynamic feedback linearization. *Journal of mathematical systems, estimation and control* 5, 3 (1995), 345–358. (cité p. 18)
- [121] RYSER, H. J. *Combinatorial Mathematics*, vol. 14 of *Carus mathematical monographs*. Mathematical Association of America, 1963. (cité p. 32)
- [122] SADIK, B. The complexity of formal resolution of linear partial differential equations. In *Proceedings of 11th International Symposium Applied algebra, algebraic algorithms and error-correcting codes* (Paris, France, July 1995), G. Cohen, M. Giusti, and T. Mora, Eds., no. 948 in *Lecture notes in computer science*, Springer, pp. 408–414. (cité p. 27, 29)
- [123] SADIK, B. A bound for the order of characteristic set elements of an ordinary prime differential ideal and some applications. *Applicable algebra in engineering, communications and computing* 10, 3 (Mar. 2000), 251–268. (cité p. 21, 29, 36)
- [124] SAFEY EL DIN, M. *Résolution réelle des systèmes polynomiaux en dimension positive*. Thèse de doctorat, Université Pierre et Marie Curie–Paris VI, Jan. 2001. (cité p. 16)
- [125] SASTRY, S. *Nonlinear systems : analysis, stability and control*, vol. 10 of *Interdisciplinary applied Mathematics*. Springer Verlag, 1999. (cité p. 14, 17, 49)
- [126] SCHAFT, VAN DER, A. On realization of nonlinear systems described by higher-order differential equations. *Mathematical systems theory* 19, 3 (1987), 239–275. (cité p. 15)
- [127] SCHOST, É. *Sur la résolution des systèmes polynomiaux à paramètres*. Thèse de doctorat, École polytechnique, Dec. 2000. (cité p. 31)
- [128] SEDGEWICK, R., AND FLAJOLET, P. *An introduction to the analysis of algorithms*. Addison–Wesley, 1996. (cité p. 73)
- [129] SEDOGLAVIC, A. *Page personnelle*. Adresse URL : <http://medicis.polytechnique.fr/~sedoglav>, (page consultée en septembre 2001). (cité p. v, 62)
- [130] SEDOGLAVIC, A. A mixed symbolic-numeric method to study prime ordinary differential ideal. Manuscript 2000-04, GAGE laboratory, <http://www.gage.polytechnique.fr/notes/>, Jan. 2000. (cité p. iv, vii)
- [131] SEDOGLAVIC, A. A probabilistic algorithm to test local algebraic observability in polynomial time. In *Proceedings of the 2001 International Symposium on Symbolic and Algebraic Computation* (London, Ontario, Canada, July 22–25 2001), B. Mourrain, Ed., ACM, ACM press, pp. 309–316. (cité p. v, vii)
- [132] SEIDENBERG, A. An elimination theory for differential algebra. *University of California publications in Mathematics* 3, 2 (1956), 31–65. (cité p. 25)
- [133] SEILER, W. M. *Analysis and application of the formal theory of partial differential equations*. Thèse de doctorat, School of Physics and Chemistry at Lancaster University, september 1994. <http://iaks-www.ira.uka.de/iaks-calmet/werner/>. (cité p. 39)
- [134] SIBUYA, Y., AND SPERBER, S. Arithmetic properties of power series solutions of algebraic differential equations. *Annals of Mathematics. Second series* 113, 1 (1981), 111–157. (cité p. 61)

- [135] SIRA-RAMÍREZ, H., AND ILIC-SPONG, M. Exact linearization in switched-mod DC-to-DC power converters. *International journal of control* 50, 2 (1989), 511–524. (cité p. 107)
- [136] SÖDERSTRÖM, T., AND STOICA, P. *System identification*. Prentice-Hall, London, 1989. (cité p. 51)
- [137] STORTELDER, W. J. H., HEMKER, P. W., AND HEMKER, H. C. Mathematical modelling in blood coagulation; simulation and parameter estimation. Tech. Rep. MAS-R9720, Centrum voor Wiskunde en Informatica, <http://www.cwi.nl/>, Sept. 30 1997. (cité p. 104)
- [138] STRASSEN, V. Vermeidung von Divisionen. *Journal für die reine und angewandte Mathematik* 264, 58 (1973), 184–202. (cité p. 31)
- [139] TERA, *Site internet du projet TERA (Turbo Evaluation and Rapid Algorithm)*. Adresse URL : <http://tera.medicis.polytechnique.fr/>. (Page consultée en septembre 2001). (cité p. 31)
- [140] THOMAS, G. *Contributions théoriques et algorithmiques à l'étude des équations différentielles-algébriques; approche par le calcul formel*. Thèse de doctorat, Institut national polytechnique de Grenoble, July 1997. (cité p. 14, 27)
- [141] TÓTH, J. Communication privée. (cité p. 106)
- [142] TRESSE, A. Sur les invariants différentiels des groupes de transformations. *Acta mathematica* 18 (1894), 1–88. (cité p. 22)
- [143] VAJDA, S. Identifiability of polynomial systems : structural and numerical aspect. In *Identifiability of parametric models* (1987), É. Walter, Ed., Pergamon Press, pp. 42–48. (cité p. 102)
- [144] VAJDA, S., GODFREY, K. R., AND RABITZ, H. Similarity transformation approach to identifiability analysis of non linear compartmental models. *Mathematical biosciences* 93, 2 (1989), 217–248. (cité p. v, 13, 95, 96)
- [145] VALIANT, L. G. Reducibility by algebraic projections. *L'enseignement Mathématique. Ite Séries* 28, 3-4 (1982), 253–268. (cité p. 32)
- [146] VALIRON, G. *Équations fonctionnelles : applications*, 2 ed. Masson, Paris, 1950. (cité p. 68, 69)
- [147] WALTER, É. *Identifiability of state space model*, vol. 46 of *Lectures notes in biomathematics*. Springer, New York, 1982. (cité p. 50)
- [148] WALTER, É., AND LECOURTIER, Y. Unidentifiable compartmental models : what to do? *Mathematical biosciences* 56, 1-2 (1981), 1–25. (cité p. 51)
- [149] WALTER, É., AND PRONZATO, L. *Identification des modèles paramétriques*. Masson, 1994. (cité p. 51)
- [150] WILLEMS, J. C. Paradigms and puzzles in the theory of dynamical systems. *IEEE Transactions on automatic control* 36, 3 (1991), 259–294. (cité p. 11)
- [151] WU, W.-T. Automatic derivation of Newton's gravitational law from Kepler's laws. *Academica Sinica Mathematics-Mechanization Research Preprints* (1987). (cité p. 27)
- [152] YANENKO, N. N. *The method of fractional steps*. Springer-Verlag, 1971. (cité p. 71)
- [153] ZARISKI, O., AND SAMUEL, P. *Commutative algebra volume I*, vol. 28 of *Graduate texts in Mathematics*. Springer-Verlag, 1958. (cité p. 4)
- [154] ZIPPEL, R. Probabilistic algorithms for sparse polynomials. In *Symbolic and Algebraic Computation, Proceedings of EUROSAM'79* (Marseille, France, June 1979), E. W. Ng, Ed., vol. 72 of *Lecture notes in computer science*, Springer, pp. 216–226. (cité p. 31)

Cette thèse a été composée avec les logiciels  $\text{T}_{\text{E}}\text{X}$  de D.E. KNUTH,  $\text{L}^{\text{A}}\text{T}_{\text{E}}\text{X}$  de L. LAMPORT et  $\text{BIB}\text{T}_{\text{E}}\text{X}$  de O. PATASHNIK. De plus, elle a profité des remarquables développements du logiciel libre.



## Abstract

The work presented here is based on differential algebra and on the methods of symbolic computation to solve problems of nonlinear control theory which do not lend themselves to a direct numerical resolution.

The problem of local algebraic observability consists in deciding if the model state variables can be deduced from perfectly known inputs and outputs.

We present a probabilistic algorithm of arithmetic complexity polynomial in the size of the input which allows to test local algebraic observability by determining the non observable variables. The use of modular arithmetic enables to obtain a polynomial bit complexity for this test. This complexity depends linearly on the probability of success which can be arbitrarily fixed. An implementation of this algorithm is available and makes it possible to deal with problems unreachable until now.

Taking as a starting point these methods mixing symbolic computation and numerical computation, we propose a generalization of the concept of differential flatness to certain models described by nonlinear partial differential equations. An ordinary differential system is differentially flat if its solutions can locally be parameterized by arbitrary functions.

To study certain nonlinear systems of partial differential equations, one brings back to a system of ordinary differential equations by discretization ; our approach consists in seeking flat discretizations such that the associated parametrization converge when the step of discretization tends towards zero. This method is illustrated by the study of the motion planning problem for three nonlinear models : the semilinear heat equation, the Burger equation with diffusion and a nonlinear model of flexible rod.

**Key words (MSC 2000) :** differential algebra (12H05), finite difference methods (65M06), symbolic computation and algebraic computation (68W30), observability (93B07), nonlinear systems (93C10), systems governed by partial differential equations (93C20), motion planning, seminumerical algorithms.

## Résumé

Les travaux présentés dans ce mémoire se basent sur les apports de l'algèbre différentielle et les méthodes du calcul symbolique pour résoudre des problèmes d'automatique non linéaire qui ne se prêtent pas à une résolution numérique directe.

Le problème de l'observabilité algébrique locale consiste à décider si les variables d'état intervenant dans un modèle peuvent être déterminées en fonction des entrées et des sorties supposées parfaitement connues.

Nous présentons un algorithme probabiliste de complexité arithmétique polynomiale en la taille de l'entrée permettant de tester l'observabilité algébrique locale en déterminant les variables non observables. L'utilisation du calcul modulaire permet d'obtenir pour ce test une complexité binaire elle aussi polynomiale. Cette complexité dépend linéairement de la probabilité de succès qui peut être arbitrairement fixée. Une implantation de cet algorithme permet de traiter des problèmes inaccessibles jusqu'à présent.

À partir de ces méthodes mêlant calcul symbolique et calcul numérique, nous proposons une généralisation de la notion de platitude différentielle à certains modèles non linéaires décrits par des équations aux dérivées partielles. Un système différentiel ordinaire est différentiellement plat si ses solutions peuvent être localement paramétrées bijectivement par des fonctions arbitraires.

Pour étudier certains systèmes d'équations aux dérivées partielles non linéaires, on se ramène à un système d'équations différentielles ordinaires par discrétisation; notre approche consiste à chercher des discrétisations plates telles que les paramétrages associés convergent lorsque le pas de discrétisation tend vers zéro. Cette méthode est illustrée par l'étude du problème de planification de trajectoire réalisée pour trois modèles non linéaires de dimension infinie : l'équation de la chaleur semilinéaire, l'équation de Burger avec diffusion et un modèle non linéaire de tige flexible.

**Mots clés (MSC 2000) :** algèbre différentielle (12H05), méthode des différences finies (65M06), calcul symbolique (68W30), observabilité (93B07), systèmes non linéaires (93C10), systèmes gouvernés par des équations aux dérivées partielles (93C20), planification de trajectoire, algorithmes seminumériques.