ZÉROS DES FONCTIONS L ET FORMES TOROÏDALES

GILLES LACHAUD

Résumé. À partir d'un corps de nombres K de degré n, on définit un tore maximal T de $G = GL_n$. Si χ est un caractère du groupe des classes d'idèles de K, satisfaisant des conditions adéquates, les formes toroïdales pour χ sont les fonctions sur $G(\mathbf{Q})Z(\mathbf{A})\backslash G(\mathbf{A})$, dont le coefficient de Fourier correspondant à χ par rapport au sous-groupe induit par T est nul. L'hypothèse de Riemann pour $L(s, \chi)$ est équivalente à des conditions portant sur certains espaces de formes toroïdales, construits à partir des séries d'Eisenstein. Enfin, on construit un espace de Hilbert et un opérateur auto-adjoint sur cet espace, dont le spectre est égal à l'ensemble des zéros de $L(s, \chi)$ sur la droite critique.

Abstract. An algebraic number field K defines a maximal torus T of the linear group $G = GL_n$. Let χ be a character of the idele class group of K, satisfying suitable assumptions. The χ-toroidal forms are the functions defined on $G(\mathbf{Q})Z(\mathbf{A})\backslash G(\mathbf{A})$ such that the Fourier coefficient corresponding to χ with respect to the subgroup induced by T is zero. The Riemann hypothesis is equivalent to certain conditions concerning some spaces of toroidal forms, constructed from Eisenstein series. Furthermore, we define a Hilbert space and a self-adjoint operator on this space, whose spectrum equals the set of zeroes of $L(s, \chi)$ on the critical line.

Table des matières

1991 *Mathematics Subject Classification.* 11M26, 11M41, 11F03, 11F12, 47A10, 58B34.

Introduction

Pour étudier la répartition des zéros de la fonction zêta de Riemann, George Pólya, et avant lui David Hilbert, d'après certains témoignages, ont suggéré qu'il serait judicieux de trouver un espace de Hilbert $\mathcal{H}$ et un opérateur D dans $\mathcal{H}$, dont le spectre est donné par les zéros non triviaux de cette fonction, ou plus précisément les nombres complexes γ tels que

$$\zeta(\tfrac{1}{2} + i\gamma) = 0, \quad |\mathrm{Im}(\gamma)| \leq \tfrac{1}{2}. \tag{0.1}$$

Par construction, les zéros non triviaux de la fonction zêta seront tous sur la droite critique $\mathrm{Re}(s) = 1/2$ si et seulement si l'opérateur D est auto-adjoint.
Il est facile de donner un exemple simple d'un tel espace : notons $\mathcal{H}_0$ l'espace des sommes de puissances de la forme

$$f(x) = \sum_{\gamma} c_\gamma \, x^{i\gamma}, \tag{0.2}$$

où γ parcourt l'ensemble des nombres vérifiant (0.1), et où les c_γ non nuls sont en nombre fini. C'est un espace préhilbertien, muni de la norme

$$||f||^2 = \sum_{\gamma} |c_\gamma|^2.$$

Si $\mathcal{H}$ est l'espace de Hilbert correspondant, l'opérateur différentiel

$$D = -i\frac{d}{dx}$$

définit un unique opérateur de $\mathcal{H}$, encore noté D, satisfaisant aux conditions requises. Si on remplace $\mathcal{H}$ par le sous-espace engendré par les sommes (0.2), où on exige que γ soit *réel*, l'opérateur différentiel D définit un opérateur auto-adjoint.
Il y a de nombreuses variantes de cette construction : par exemple, pour tenir compte des multiplicités des zéros, il convient d'introduire les dérivées des puissances.
Enfin, on peut évidemment remplacer la fonction zêta de Riemann par la fonction $L(s, \chi)$ définie par un caractère χ du groupe C_K des classes d'idèles d'un corps global K, et cœtera.
Mais ce procédé de construction est *tautologique*, car il utilise explicitement les zéros de la fonction $\zeta(s)$, ou des fonctions $L(s, \chi)$. A. Connes définit dans [8] un « espace de Pólya-Hilbert » comme un couple $(\mathcal{H}, D)$:

- formé d'un espace de Hilbert $\mathcal{H}$ et d'un opérateur D dans $\mathcal{H}$, fermé, non borné, à domaine dense ;
- tel que l'on ait
$$\mathrm{Spec}\, D = \left\{\gamma \in \mathbb{R} \mid L(\tfrac{1}{2} + i\gamma, \chi) = 0\right\} ;$$
- défini *de manière intrinsèque*, autrement dit d'une façon qui n'utilise pas les fonctions $L(s, \chi)$.

Les espaces de Pólya-Hilbert qu'il a construits dans [6], [7], [8] sont des espaces L^2 sur le groupe C_K ; ces constructions ont été généralisées par C. Soulé [18] aux fonctions L automorphes. A. Connes signale qu'il serait souhaitable de clarifier les rapports entre ces espaces de Pólya-Hilbert et *l'espace des formes toroïdales* introduit par Don Zagier [25] ; c'est ce que nous allons faire ici.
Nous construisons un espace de Pólya-Hilbert à partir de formes modulaires, c'est-à-dire de fonctions définies sur l'espace $G(\mathbb{Q})Z(\mathbb{A})\backslash G(\mathbb{A})$, où $G = \mathbf{GL}_n$ est le groupe linéaire général, et où $\mathbb{A}$ est l'anneau des adèles de $\mathbb{Q}$. Les formes modulaires que nous considérons sont des familles de combinaisons linéaires de séries d'Eisenstein, ou *trains d'ondes (wave-packets) d'Eisenstein*, qui s'écrivent

$$F(g) = \sum_s a_s\, E(g, s),$$

et l'ensemble des points s tels que $a_s \neq 0$ est le spectre de F. Ce sont les analogues des polynômes trigonométriques. Étant donné une extension K de degré n d'un corps de nombres algébriques k, nous rappelons dans la section 1 comment une base fondamentale de K définit une représentation algébrique π du schéma $\mathcal{T}_{K/k}$ représentant le groupe multiplicatif de K dans l'espace affine, dont l'image est un tore maximal T défini sur k ; le groupe $\mathbb{A}_K^\times$ des idèles de K s'identifie au sous-groupe $T(\mathbb{A}_k) \subset G(\mathbb{A}_k)$. Dans la théorie des formes modulaires, les formes paraboliques sont celles dont l'intégrale sur l'image $N(k)\backslash N(\mathbb{A}_k)$ d'un sous-groupe unipotent N est nul ; par analogie, si χ est un caractère du groupe $C_K = \mathbb{A}_K^\times / K^\times$des classes d'idèles (*Grössencharaktere de Hecke*), les *formes toroïdales en* χ sont les formes modulaires dont « l'intégrale périodique » sur $T(k)Z(\mathbb{A})\backslash T(\mathbb{A}_k)$ est nulle :

$$\int_{T(k)Z(\mathbb{A})\backslash T(\mathbb{A}_k)} F(hg)\, \chi_\circ \pi^{-1}(h)\, dh = 0 \quad \text{pour } g \in G(\mathbb{A}),$$

Supposons que χ soit non ramifié en toute place de K, constant sur $\mathbb{A}_k^\times$ et sur le sous-groupe compact maximal de $K_\infty^\times$. En nous appuyant sur *la formule de Hecke adélique* pour les séries d'Eisenstein normalisées (énoncée dans la section 2), nous établissons que l'espace des trains d'ondes d'Eisenstein qui sont des formes toroïdales est un espace de Pólya-Hilbert. Plus précisément :
— Dans la section 3, nous montrons (théorème 3.2) qu'un train d'ondes est toroïdal en χ si et seulement si son spectre est contenu dans le lieu des zéros de $L(s, \chi)$. Il s'ensuit (corollaire 3.4) que l'hypothèse de Riemann pour $L(s, \chi)$ est équivalente à l'assertion suivante :
Tout train d'ondes d'Eisenstein toroïdal a un spectre contenu dans la droite critique.
— Dans la section 4, nous donnons une autre condition équivalente si K est quadratique (corollaire 4.6) :
Tout train d'ondes d'Eisenstein toroïdal est de carré intégrable en moyenne.
— Nous construisons dans la section 5 un espace de Hilbert $T_\chi^2(X)$ et un opérateur auto-adjoint D_χ dans $T_\chi^2(X)$ tel que l'on ait (théorème 5.1)

$$\operatorname{Spec} D_\chi = \left\{ \lambda \mid \lambda = \frac{1}{4} + \gamma^2, \quad \gamma \in \mathbb{R}, \quad L(\tfrac{1}{2} + i\gamma, \chi) = 0 \right\}.$$

— Nous exprimons la trace de certains opérateurs intégraux comme une somme sur les zéros de $L(s, \chi)$ (corollaire 5.3).
Enfin, dans l'appendice, nous faisons le lien entre le point de départ de la théorie de Connes, introduite dans [8] et reprise dans le théorème A.4, et les trains d'ondes d'Eisenstein (corollaire A.5).
Les résultats de ce travail ont été annoncés dans [15] et [16]. Les formes toroïdales y sont appelées "formes toriques" ; nous nous sommes ici conformés à l'usage.

1. Intégrales périodiques et formule de Hecke

Représentations algébriques.

Soient k un corps de nombres algébriques, et K une extension de degré n de k. L'« enveloppe algébrique » de K est le k-schéma en k-algèbres $\mathcal{A}_{K/k}$ tel que l'on ait

$$\mathcal{A}_{K/k}(k') = K \otimes_k k'$$

pour toute k-algèbre k'. On dispose de morphismes de norme et de trace

$$\mathrm{N}_{K/k} : \mathcal{A}_{K/k} \longrightarrow \mathbf{A}^1_k, \quad \mathrm{Tr}_{K/k} : \mathcal{A}_{K/k} \longrightarrow \mathbf{A}^1_k.$$

Le k-schéma en groupes représentant le groupe multiplicatif de de $\mathcal{A}_{K/k}$ est

$$\mathcal{T}_{K/k} = \left\{(u,v) \in \mathbf{A}^n_k \times \mathbf{G}_m \mid \mathbf{N}_{K/k}(u) = v\right\}.$$

Si k' est une k-algèbre, on a

$$\mathcal{T}_{K/k}(k') = (K \otimes_k k')^\times,$$

ce qui montre que $\mathcal{T}_{K/k}$ est aussi le k-schéma $R_{K/k}(\mathbf{G}_{m,K})$ obtenu en appliquant le foncteur de Weil $R_{K/k}$ de changement de base par restriction des scalaires au K-groupe multiplicatif $\mathbf{G}_{m,K}$. Le groupe algébrique $\mathcal{T}_{K/k}$ est un tore de dimension n défini sur k. Soient $\mathfrak{o}$ l'anneau des entiers de k, et $\mathfrak{O}$ l'anneau des entiers de K. On suppose qu'il existe une *base fondamentale* de K sur k, c'est-à-dire une base $\boldsymbol{\alpha} = (\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$ du $\mathfrak{o}$-module $\mathfrak{O}$, avec $\alpha_1 = 1$. Si $\mathfrak{o}$ est principal, toute extension de degré fini de k admet une base fondamentale. La base $\boldsymbol{\alpha}$ fournit un isomorphisme $\iota : \mathbf{A}^n_k \longrightarrow \mathcal{A}_{K/k}$ donné par

$$\iota(u_1, \ldots, u_n) = u_1\alpha_1 + \cdots + u_n\alpha_n.$$

Le morphisme ι^{-1} induit un isomorphisme de $\mathcal{T}_{K/k}$ sur un ouvert de $\mathbf{A}^n_k$.
Une *représentation algébrique linéaire* d'un k-schéma en algèbres (resp. en groupes) dans $\mathbf{A}^n_k$ est un k-morphisme d'algèbres (resp. de groupes) de ce schéma dans le k-schéma $\mathbf{M}_n$ des matrices carrées d'ordre n (resp. dans $\mathbf{GL}_n$). On définit la *représentation régulière droite* π de $\mathcal{A}_{K/k}$ dans $\mathbf{A}^n_k$ de la manière suivante. Si k' est une k-algèbre et si ξ est un élément de l'algèbre $\mathcal{A}_{K/k}(k')$, on note $\rho(\xi)$ la multiplication par ξ dans $\mathcal{A}_{K/k}(k')$, et on pose

$${}^t\pi(\xi).u = \iota^{-1} \circ \rho(\xi) \circ \iota(u), \quad u \in k'^n,$$

autrement dit

$$\iota({}^t\pi(\xi).u) = \xi\, \iota(u), \quad u \in k'^n.$$

On a $\det \pi(\xi) = \mathbf{N}_{K/k}(\xi)$. Si e_1 est le premier vecteur de la base canonique de $\mathbf{A}^n_k$, on a

$$\iota^{-1}(\xi) = {}^t\pi(\xi).e_1,$$

ce qui montre que la représentation π est fidèle. Si on note $\boldsymbol{\omega} = (\omega_1, \ldots, \omega_n)$ la *base duale* de la base $\boldsymbol{\alpha}$, on a aussi

$$\iota^{-1}(\xi) = (\mathrm{Tr}_{K/k}(\xi\omega_1), \ldots, \mathrm{Tr}_{K/k}(\xi\omega_n)).$$

On en déduit que les coefficients de π sont donnés par

$$\pi(\xi)_{ij} = \mathrm{Tr}_{K/k}(\xi\alpha_i\omega_j).$$

L'image T de $\mathcal{T}_{K/k}$ par la représentation π est un groupe linéaire algébrique défini sur k, de dimension n, qui est un tore maximal de G. On a donc un isomorphisme

$$\pi : \mathcal{T}_{K/k} \xrightarrow{\sim} T \subset G.$$

Le *groupe projectif de* K est le k-tore $\mathcal{P}_{K/k}$ défini par la suite exacte

$$1 \longrightarrow \mathbf{G}_{m,k} \longrightarrow \mathcal{A}^\times_{K/k} \xrightarrow{N} \mathcal{P}_{K/k} \longrightarrow 1$$

Le morphisme ι^{-1} induit une immersion ouverte de $\mathcal{P}_{K/k}$ dans $\mathbf{P}_k^{n-1}$. D'autre part $\mathcal{P}_{K/k}(k) = k^\times \backslash K^\times$. Le centre Z de G est inclus dans T ; si on pose $S = Z\backslash T$, on a un isomorphisme $\pi : \mathcal{P}_{K/k} \xrightarrow{\sim} S \subset PGL_n$.

Sous-groupes compacts maximaux.

Le groupe $T(\mathfrak{o}) = T(k) \cap GL_n(\mathfrak{o})$ s'appelle le *groupe des unités* de $T(k)$. Puisque $\boldsymbol{\alpha}$ est une base fondamentale de K sur k, on a $T(\mathfrak{o}) = \pi(\mathfrak{O}^\times)$. Soit v une place finie de k. On note $\mathfrak{O}_v$ le sous-anneau compact maximal de $K \otimes k_v$, de telle sorte qu'on a un isomorphisme

$$\mathfrak{O}_v \xrightarrow{\Phi_v} \textstyle\prod_{w|v} \mathfrak{O}_w, \qquad \mathfrak{O}_v = \mathfrak{O} \otimes_{\mathfrak{o}} \mathfrak{o}_v = \alpha_1 \mathfrak{o}_v + \cdots + \alpha_n \mathfrak{o}_v.$$

Le *groupe des unités* de $T(k_v)$ est

$$T(\mathfrak{o}_v) = T(k_v) \cap GL_n(\mathfrak{o}_v).$$

Il est facile de voir que

$$T(\mathfrak{o}_v) = \{g \in T(k_v) \mid g\mathfrak{o}^n = \mathfrak{o}^n\} = \left\{g \in T(k_v) \cap M_n(\mathfrak{o}_v) \mid \det g \in \mathfrak{o}_v^\times \right\}.$$

Le groupe $T(\mathfrak{o}_v)$ est le sous-groupe compact maximal de $T(k_v)$. La représentation π induit un isomorphisme $\mathfrak{O}_v^\times \xrightarrow{\sim} T(\mathfrak{o}_v)$.
Supposons que v soit une place infinie de k. Pour toute place w de K au dessus de v, on pose

$$\xi^{(w)} = \alpha_1^{(w)} u_1 + \cdots + \alpha_n^{(w)} u_n \in K_w \quad \text{si} \quad \xi = \alpha_1 \otimes u_1 + \cdots + \alpha_n \otimes u_n \in K \otimes k_v.$$

On pose $k_\infty = k \otimes \mathbb{R}$. L'unique sous-groupe compact maximal de

$$K_\infty^\times = (K \otimes k_\infty)^\times \cong \prod_{w|\infty} K_w^\times$$

est

$$U_\infty = \prod_{v\ \infty} \left\{\xi \in K_\infty^\times \mid |\xi^{(w)}|_w = 1 \text{ si } w \mid v\right\}$$

Si on note $U_\infty(T)$ le sous-groupe compact maximal de $T(k_\infty)$, la représentation π induit des isomorphismes $K_\infty^\times \xrightarrow{\sim} T(k_\infty)$ et $U_\infty \xrightarrow{\sim} U_\infty(T)$.

1.1. **Lemme.** *Supposons $k = \mathbb{Q}$. Si $\xi \in K \otimes \mathbb{R}$, on a $\pi(\xi) = A\pi_0(\xi)A^{-1}$, où*

$$A = \begin{bmatrix} \alpha_1^{(1)} & \ldots & \alpha_n^{(1)} \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ \alpha_1^{(n)} & \ldots & \alpha_n^{(n)} \end{bmatrix}, \qquad \pi_0(\xi) = \begin{bmatrix} \xi^{(1)} & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & \xi^{(2)} & \ldots & 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 0 & \ldots & 0 & \xi^{(n)} \end{bmatrix},$$

où $\xi^{(1)}, \ldots, \xi^{(n)}$ sont les n isomorphismes distincts de K dans $\bar{\mathbb{Q}}$.

Démonstration. Si $1 \le i \le n$, on pose $a^{(i)} = Ae_i = (\alpha_1^{(i)}, \ldots, \alpha_n^{(i)})$. Si $u \in \mathbb{R}^n$, on a $\iota({}^t\pi(\xi)u) = \xi\, \iota(u)$ et $\iota(u) = {}^t u.a^{(1)}$ par définition, et par conséquent

$$\xi\, {}^t u.a^{(1)} = \xi\, \iota(u) = \iota({}^t\pi(\xi)u) = {}^t u.\pi(\xi)a^{(1)}.$$

On en déduit $\pi(\xi)a^{(i)} = \xi^{(i)}a^{(i)}$. D'autre part

$$\pi(\xi)Ae_i = \pi(\xi)a^{(i)} = \xi^{(i)}\, a^{(i)} = \xi^{(i)}\, Ae_i = A\pi_0(\xi)e_i,$$

ce qui prouve que $\pi(\xi)A = A\pi_0(\xi)$. □

La matrice

$$p_{{}_K} = A.{}^t\bar{A} = \begin{bmatrix} \operatorname{Tr}\alpha_1\overline{\alpha}_1 & \dots & \operatorname{Tr}\alpha_1\overline{\alpha}_n \\ \dots & \dots & \dots \\ \operatorname{Tr}\alpha_n\overline{\alpha}_1 & \dots & \operatorname{Tr}\alpha_n\overline{\alpha}_n \end{bmatrix} \tag{1.1}$$

est symétrique définie positive à coefficients dans $\mathbb{Z}$, de déterminant $\operatorname{disc} K$. On note

$$\mathbf{O}_n(\mathbb{R}) = \left\{ g \in GL_n(\mathbb{R}) \mid {}^tg.g = \mathbf{1}_n \right\}$$

le sous-groupe compact maximal usuel de $GL_n(\mathbb{R})$.

1.2. **Proposition.** *Supposons $k = \mathbb{Q}$. Soit $q_{{}_K} \in G(\mathbb{R})$ telle que $q_{{}_K}.{}^tq_{{}_K} = P$. Alors*

$$U_\infty(T) = T(\mathbb{R}) \cap q_{{}_K}\mathbf{O}_n(\mathbb{R})\, q_{{}_K}^{-1}.$$

et ce groupe est isomorphe à $\{\pm 1\}^{r_1} \times \mathbf{SO}_2(\mathbb{R})^{r_2}$.

Démonstration. Si $\xi \in K \otimes \mathbb{R}$, on a $\pi(\xi).A = A.\pi_0(\xi)$ par le lemme 1.1. On en déduit que ${}^t\bar{A}.{}^t\pi(\xi) = \pi_0(\bar{\xi}).{}^t\bar{A}$ puisque $\pi(\xi) \in G(\mathbb{R})$, et

$$A.\pi_0(\xi\,\bar{\xi}).{}^t\bar{A} = \pi(\xi).P.{}^t\pi(\xi).$$

Posons maintenant $\theta(\xi) = q_{{}_K}^{-1}\pi(\xi)q_{{}_K}$. On a

$$q_{{}_K}.\theta(\xi).{}^t\theta(\xi).{}^tq_{{}_K} = \pi(\xi).P.{}^t\pi(\xi)$$

Le sous-groupe compact maximal U_∞ de $(K \otimes \mathbb{R})^\times$ est isomorphe au produit de groupes de l'énoncé. D'autre part π définit un isomorphisme $U_\infty \to U_\infty(T)$. Puisque $\xi \in U_\infty$ si et seulement si $\pi_0(\xi\,\bar{\xi}) = \mathbf{1}_n$, ceci démontre que $\pi(\xi) \in U_\infty(T)$ si et seulement si $\theta(\xi) \in \mathbf{O}_n(\mathbb{R})$. $\square$

Groupes de classes d'idèles.

On note respectivement $\mathbb{A}_K$ et $\mathbb{A}_K^\times$ l'anneau des adèles et le groupe des idèles de K, et $C_K = K^\times\backslash\mathbb{A}_K^\times$ le *groupe des classes d'idèles* de K. La représentation π induit des isomorphismes

$$C_K \xrightarrow{\ \sim\ } T(k)\backslash T(\mathbb{A}_k), \quad \mathbb{A}_k^\times\backslash\mathbb{A}_K^\times \xrightarrow{\ \sim\ } S(\mathbb{A}_k),$$

et aussi un isomorphisme

$$C_k\backslash C_K \xrightarrow{\ \sim\ } S(k)\backslash S(\mathbb{A}_k).$$

Pour $\xi \in \mathbb{A}_K$, on a

$$|\det\pi(\xi)|_{\mathbb{A}_k} = |N_{K/k}(\xi)|_{\mathbb{A}_k} = |\xi|_{\mathbb{A}_K}.$$

Le groupe $K^\times$ est un sous-groupe discret de

$$\mathbb{A}_K^1 = \left\{ \xi \in \mathbb{A}_K^\times \mid |\xi|_{\mathbb{A}_K} = 1 \right\},$$

et le quotient $C_K^1 = K^\times\backslash\mathbb{A}_K^1$ est compact. Pour tout $x \in \mathbb{R}_+^\times$, on note $\xi(x) = (\xi_v(x))$ l'idèle de $\mathbb{A}_K^\times$ tel que $\xi_v(x) = 1$ pour toute place finie de K et tel que $\xi_v(x) = x$ pour toute place infinie de K. Alors $x \mapsto \xi(x)$ induit un isomorphisme de $\mathbb{R}_+^\times$ sur un sous-groupe N du groupe C_K et C_K est produit direct de N et de C_K^1 [22, Cor. 2, p. 76]. On en déduit que

$$C_k\backslash C_K = C_k^1\backslash C_K^1 = K^\times\mathbb{A}_k^1\backslash\mathbb{A}_K^1,$$

et que $C_k\backslash C_K$ est compact ; il en va de même du groupe $S(k)\backslash S(\mathbb{A}_k)$. La représentation π définit un isomorphisme de $\mathbb{A}_K^1$ sur le sous-groupe fermé

$$T^1(\mathbb{A}_k) = \{ h \in T(\mathbb{A}_k) \mid |\det h|_{\mathbb{A}_k} = 1 \}$$

et de N sur $Z(\mathbb{R})$. Le groupe $T(\mathbb{A}_k)$ est le produit direct de $T^1(\mathbb{A}_k)$ et de $Z(\mathbb{R})$, et $T(k)$ est un sous-groupe discret de $T^1(\mathbb{A}_k)$, à quotient compact. On a un isomorphisme

$$S(k)\backslash S(\mathbb{A}_k) \cong T(k)Z(\mathbb{A})\backslash T(\mathbb{A}) \cong T^1(k)Z^1(\mathbb{A})\backslash T^1(\mathbb{A}).$$

Le *groupe des classes* de K [22, p. 87] est

$$\mathrm{Cl}(K) = K^\times\backslash\mathbb{A}_K^\times/K_\infty^\times\,\widehat{\mathfrak{O}}^\times, \quad \text{où} \quad \widehat{\mathfrak{O}}^\times = \prod_w \mathfrak{O}_w^\times.$$

C'est un groupe fini. La représentation π définit un isomorphisme

$$\mathrm{Cl}(k)\backslash\,\mathrm{Cl}(K) \xrightarrow{\sim} T(k)Z(\mathbb{A})\backslash T(\mathbb{A})/T(k_\infty)T(\widehat{\mathfrak{o}}) \quad \text{où} \quad T(\widehat{\mathfrak{o}}) = \prod_v T(\mathfrak{o}_v).$$

et $S(k)\backslash S(\mathbb{A}_k)$ est extension de $\mathrm{Cl}(k)\backslash\,\mathrm{Cl}(K)$ par le tore réel $T(\mathfrak{o})Z(\mathbb{R})\backslash T(k_\infty)$. Le sous-groupe compact maximal de $\mathbb{A}_K^\times$ est $U = U_\infty\,\widehat{\mathfrak{O}}^\times$, et celui de $T(\mathbb{A})$ est

$$U_{\mathbb{A}}(T) = U_\infty(T)\,T(\widehat{\mathfrak{o}}), \quad \text{où} \quad T(\widehat{\mathfrak{o}}) = \prod_v T(\mathfrak{o}_v).$$

Il y a aussi un isomorphisme

$$K^\times\mathbb{A}_k^\times\backslash\mathbb{A}_K^\times/U \xrightarrow{\sim} T(k)Z(\mathbb{A}_k)\backslash T(\mathbb{A}_k)/U_{\mathbb{A}}(T) =: Q,$$

Si $k=\mathbb{Q}$, le groupe compact Q est extension de $\mathrm{Cl}(K)$ par le *tore de Dirichlet*

$$T(\mathbb{Z})Z(\mathbb{R})\backslash T(\mathbb{R})/U_\infty(T) \cong \mathbf{SO}_2(\mathbb{R})^r,$$

avec $r = r_1+r_2-1$, si K admet r_1 places réelles et r_2 places imaginaires, autrement dit on a une suite exacte

$$1 \longrightarrow \mathbf{SO}_2(\mathbb{R})^r \longrightarrow Q \longrightarrow \mathrm{Cl}(K) \longrightarrow 1.$$

On note $\mathsf{X}(G)$ le groupe des caractères d'un groupe localement compact G. On note simplement X le groupe discret $\mathsf{X}(Q)$; il s'identifie au sous-groupe des caractères de $\mathbb{A}_K^\times/K^\times$ (*Grössencharaktere de Hecke*), qui sont constants sur $\widehat{\mathfrak{O}}^\times$, autrement dit *non ramifiés en toute place de* K, et aussi qui sont constants sur $\mathbb{A}_k^\times$ et sur U_∞. Si $k=\mathbb{Q}$, on a une suite exacte

$$1 \longrightarrow \mathsf{X}(\mathrm{Cl}(K)) \longrightarrow \mathsf{X} \longrightarrow \mathbb{Z}^r \longrightarrow 1,$$

le groupe X est extension de $\mathbb{Z}^r$ par le groupe $\mathsf{X}(\mathrm{Cl}(K))$.

Mesures sur les groupes d'idèles.

On choisit la mesure de Haar suivante sur $C_K = N\times C_K^1$:

$$\int_{C_K^1} d^\times\xi = 1,$$

$$\int_N f(\xi)\,d^\times\xi = n\int_0^\infty f(\xi(x))\,d^\times x = \int_0^\infty f(\xi(x^{1/n}))\,d^\times x.$$

On définit comme suit la mesure de Haar sur $T(k)\backslash T(\mathbb{A})$:

$$\int_{T(k)\backslash T(\mathbb{A})} F(h)\,dh = \int_{C_K} F(\pi(\xi))\,d^\times\xi.$$

La mesure invariante sur $S(k)\backslash S(\mathbb{A}_k)$ est définie par

$$\int_{T(k)\backslash T(\mathbb{A})} F(h)\,dh = \int_{S(k)\backslash S(\mathbb{A}_k)}\int_{Z(k)\backslash Z(\mathbb{A})} F(z\dot{h})\,dz\,d\dot{h}. \tag{1.2}$$

De cette manière, le groupe $S(k)\backslash S(\mathbb{A}_k)$ est de volume 1. Si F est une fonction définie sur $T(\mathbb{A})$, invariante à gauche par $T(k)Z(\mathbb{A})$, et suffisamment régulière, on pose

$$\oint F(h)\,dh = \int_{S(k)\backslash S(\mathbb{A}_k)} F(h)\,dh = \int_{T(k)Z(\mathbb{A})\backslash T(\mathbb{A})} F(h)\,dh.$$

Fonctions L et distribution de Weil.

Si Φ appartient à l'espace $\mathcal{S}(\mathbb{A}_k)$ des fonctions standard sur $\mathbb{A}_k$, si χ est un caractère de C_k, et si $s \in \mathbb{C}$, *l'intégrale de Tate* de Φ est [22, Eq. (4), p. 118] :

$$\Delta_k(\Phi, s, \chi) = \int_{\mathbb{A}_k^\times} \Phi(\xi)\, \chi(\xi)\, |\xi|_{\mathbb{A}_k}^s \, d^\times \xi. \tag{1.3}$$

Soit P l'ensemble des places finies de k où χ n'est pas ramifié. La série L de Hecke attachée à χ est

$$L(s, \chi) = \prod_{\mathfrak{p} \in P} \left(1 - \frac{\chi(\mathfrak{p})}{N(\mathfrak{p})^s}\right)^{-1}$$

[22, Eq.(11), p. 133]. On sait, grâce à A. Weil [22, Eq. (6), p. 128], [8, Lem. 1, p. 76], que la fonction $\Delta_k(\Phi, s, \chi)$ est méromorphe dans $\mathbb{C}$, et on a

$$\Delta_k(\Phi, s, \chi) = c_k^{-1}\, L(s, \chi)\ \Delta'_k(\Phi, s, \chi), \tag{1.4}$$

où $\Delta'_k(\Phi, s, \chi)$ est une forme linéaire sur $\mathcal{S}(\mathbb{A}_k)$ qui est holomorphe pour $\mathrm{Re}(s) > 0$. Enfin, $c_k = 2^{r_1}(2\pi)^{r_2} hR/e$, où r_1 et r_2 sont respectivement le nombre de places réelles et imaginaires de k, où h est son nombre de classes et R son régulateur, et où e est l'ordre du groupe des racines de l'unité dans k [22, p. 128].

Supposons maintenant $\chi \in \mathsf{X}$. On définit une fonction Φ_0 sur $\mathbb{A}_K^\times$ de la manière suivante [22, p. 131] :

- aux places infinies : on suppose que le plongement $\xi \mapsto \xi^{(i)}$ est réel pour $1 \leq i \leq r_1$, qu'il est complexe pour $r_1 + 1 \leq i \leq 2r_2$, et que $\xi^{(r_1+r_2+i)} = \overline{\xi^{(i)}}$ pour $1 \leq i \leq r_2$. On pose

$$F(\xi) = \sum_{i=1}^{r_1} \xi^{(i)2} + 2 \sum_{i=r_1+1}^{r_1+r_2} |\xi^{(i)}|^2.$$

  Si $\xi \in K_\infty$, on prend $\Phi_\infty(\xi) = e^{-F(\xi)}$.
- aux places finies, χ_v est non ramifié. On prend pour Φ_v la fonction caractéristique de $\mathfrak{O}_v$.

Si w est une place infinie de K, on a [22, p. 130]

$$\chi_w(x) = |x|_w^{i\rho_w} \quad \text{pour tout } x \in K_w, \quad \text{où } \rho_w \in \mathbb{R}.$$

On pose [22, Lem. 8, p. 127] :

$$\Gamma_{\mathbb{R}}(s) = \pi^{-s/2}\Gamma(s/2), \quad \Gamma_{\mathbb{C}}(s) = (2\pi)^{1-s}\Gamma(s),$$

et on pose $\Gamma_w = \Gamma_{\mathbb{R}}$ ou $\Gamma_w = \Gamma_{\mathbb{C}}$ suivant que w est réelle ou complexe. On déduit de [22, Eq. (10), p. 133] que l'on a

$$\Delta'_K(\Phi_0, s, \chi) = \Gamma(s, \chi). \tag{1.5}$$

où

$$\Gamma(s, \chi) = \prod_{w\, \infty} \Gamma_w(s + i\rho_w).$$

Intégrales périodiques et séries de Fourier.

L'*intégrale périodique* de fréquence $\chi \in \mathsf{X}$ d'une fonction $F \in C(T(k)Z(\mathbb{A}_k)\backslash G(\mathbb{A}_k))$ est la fonction $\Pi_\chi(F)$ définie par

$$\Pi_\chi(F)(g) = \oint F(hg)\, \chi_\pi(h)\, dh.$$

où on a posé $\chi_\pi(h) = \chi_\circ \pi^{-1}(h)$ pour tout $h \in T(\mathbb{A})$. Puisque

$$\Pi_\chi(F)(g) = \int_Q \chi_\pi(\dot{h})\, d\dot{h} \int_{U_Q} F(\dot{h}\eta g) d\eta,$$

où U_Q est l'image de $U_{\mathbb{A}}(T)$ dans Q, La fonction $\Pi_\chi(F)(g)$ est le coefficient de Fourier de fréquence χ de la fonction

$$\dot{F}(\dot{h}) = \int_{U_Q} F(\dot{h}\eta g) d\eta.$$

On a, dans $L^2(Q)$ tout au moins,

$$\int_{U_Q} F(\dot{h}\eta g) d\eta = \sum_{\chi \in \mathsf{X}} \Pi_{\overline{\chi}}(F)(g)\, \chi_\pi(\dot{h}). \tag{1.6}$$

Le sous-groupe maximal standard de $G(\mathbb{A}_k)$ est

$$\mathbf{K} = \prod_v \mathbf{O}_v(n),$$

où $\mathbf{O}_v(n)$ est le sous-groupe maximal standard de $GL_n(k_v)$ si v est une place infinie et où $\mathbf{O}_v(n) = GL_n(\mathfrak{o}_v)$ si v est une place finie. Supposons $k = \mathbb{Q}$. Considérons la *variété modulaire*

$$X = G(k)Z(\mathbb{A}_k)\backslash G(\mathbb{A}_k)/\mathbf{K}.$$

D'après la proposition 1.2, il existe $q_{_K} \in G(\mathbb{R})$ tel que

$$T(\mathbb{R}) \cap q_{_K} \mathbf{O}_n(\mathbb{R})\, q_{_K}^{-1} = U_\infty(T).$$

Si $g_{_K}$ est la matrice de $G(\mathbb{A})$ telle que $(g_{_K})_\infty = q_{_K}$ et $(g_{_K})_v = 1$ pour toute place finie v de k, on a

$$T(\mathbb{A}) \cap g_{_K} \mathbf{K}\, g_{_K}^{-1} = U_{\mathbb{A}}(T).$$

Si F est une fonction sur X suffisamment régulière, on a

$$F(h\eta g_{_K}) = F(hg_{_K}) \quad \text{pour tout } \eta \in U_{\mathbb{A}}(T),$$

la fonction $h \mapsto F(hg_{_K})$ est définie sur Q, et on a

$$\int_{U_Q} F(h\eta g_{_K}) d\eta = F(hg_{_K}),$$

ce qui implique que pour $\chi \in \mathsf{X}$, on a

$$c_\chi := \Pi_{\overline{\chi}}(F)(g_{_K}) = \int_Q F(\dot{h} g_{_K})\, \overline{\chi}_\pi(\dot{h})\, d\dot{h} = \oint F(hg_{_K})\, \overline{\chi}_\pi(h)\, dh.$$

On déduit alors de (1.6) :

$$F(hg_{_K}) = \sum_{\chi \in \mathsf{X}} c_\chi\, \chi_\pi(h). \tag{1.7}$$

On retrouve une formule de Siegel : voir (2.11).

Séries d'Eisenstein générales et formule de Hecke.

On pose maintenant $\mathbb{A} = \mathbb{A}_k$ et $|x| = |x|_{\mathbb{A}_k}$ pour $x \in \mathbb{A}$. Si $\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{A}^n)$, on pose

$$\theta(\varphi)(g) = |\det g|^{1/2} \sum_{x \in k^n - \{0\}} \varphi({}^t g.x) \quad \text{pour} \quad g \in G(\mathbb{A}),$$

Ces séries sont notées $E(\varphi)$ dans [8] ; il vaut mieux changer les notations à cause des *séries d'Eisenstein générales (de rang relatif un)*, qui sont les fonctions

$$E(\varphi)(g, s, \omega) = \int_{Z(k)\backslash Z(\mathbb{A})} \omega(\det zg)\, |\det zg|_{\mathbb{A}_k}^{s-\frac{1}{2}}\, \theta(\varphi)(zg)\, dz, \tag{1.8}$$

où ω est un caractère de $C_k = k^\times \backslash \mathbb{A}_k^\times$ et où la mesure de Haar est définie par

$$\int_{Z(k)\backslash Z(\mathbb{A})} f(z)\, dz = n \int_{k^\times \backslash \mathbb{A}^\times} f(\lambda.\mathbf{1}_n)\, d^\times\lambda. \tag{1.9}$$

Les séries $\theta(\varphi)$ et $E(\varphi)$ figurent déjà dans [9], [10] lorsque $n = 2$. L'intégrale $E(\varphi)(g,s)$ converge si $\mathrm{Re}(s) > 1$ et définit une fonction sur $G(k)Z(\mathbb{A})\backslash G(\mathbb{A})$. La fonction $s \mapsto E(\varphi)(g,s)$ se prolonge en une fonction méromorphe dans $\mathbb{C}$. On prend comme mesure de Haar sur $\mathbb{A}^n$ la mesure telle que $\mathrm{vol}\, k^n\backslash\mathbb{A}^n = 1$, et on note $\mathcal{F}\varphi$ la transformée de Fourier additive de φ définie par cette mesure. Si $\omega^n \neq 1$, la fonction $s \mapsto E(\varphi)(g,s)$ est entière ; si $\omega^n = 1$, les seuls pôles éventuels de la fonction $s \mapsto E(\varphi)(g,s)$ sont les points 0 et 1. Ces pôles sont simples, de résidus

$$\mathrm{res}_{s=0}\, E(\varphi)(g,s) = -\,\varphi(0)\,\omega(\det g), \quad \mathrm{res}_{s=1}\, E(\varphi)(g,s) = +\,\mathcal{F}\varphi(0)\,\omega(\det g).$$

La fonction $E(\varphi)(g,s)$ satisfait à l'équation fonctionnelle

$$E(\varphi)(g,s,\omega) = E(\mathcal{F}\varphi)({}^t g^{-1}, 1-s, \bar{\omega}). \tag{1.10}$$

La formule de Hecke, sous la forme donnée dans [25] (si $n = 2$) et dans [23], [24] (dans le cas général) dit que le coefficient de Fourier d'une série d'Eisenstein pour un caractère $\chi \in C_k\backslash C_K$ s'exprime à l'aide de la *fonction L de Hecke* associée à χ. On peut l'énoncer ainsi :

1.3. **Proposition.** *Soient χ un caractère de $C_k\backslash C_K$ et ω un caractère de C_k. Si $s \in \mathbb{C}$ n'est pas un pôle de $E(\varphi)(g,s,\omega)$, si $g \in G(\mathbb{A})$, si $a \in k^n - \{0\}$, et si $\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{A}^n)$, on a*

$$\oint E(\varphi)(hg,s,\omega)\,\chi_\pi(h)\,dh = \omega(\det g)\,|\det g|^s_{\mathbb{A}_k}\ \Delta_K(\Phi_{g,a}, s, (\omega_\circ N)\,\chi), \tag{1.11}$$

où la fonction $\Phi_{g,a} \in \mathcal{S}(\mathbb{A}_K)$ est définie par

$$\Phi_{g,a}(\xi) = \varphi({}^t g\, {}^t\pi(\xi).a) \qquad (\xi \in \mathbb{A}_K).$$

Démonstration. Si $\lambda \in \mathbb{A}_k^\times$, posons $\rho(\lambda) = \omega(\lambda)\,|\lambda|^s_{\mathbb{A}_k}$; c'est un quasi-caractère de $\mathbb{A}_k^\times/k^\times$. Si $\alpha = \iota(a)$, on a :

$$\begin{aligned}
&\oint E(\varphi)(hg,s,\omega)\,\chi_\pi(h)\,dh \\
= \ & \int_{T(k)\backslash T(\mathbb{A})} \chi_\pi(h) \sum_{x \in k^n - \{0\}} \varphi({}^t g\, {}^t h.x)\,\rho(\det hg)\,dh \\
= \ & \rho(\det g) \int_{K^\times\backslash\mathbb{A}_K^\times} \chi(\xi) \sum_{q \in K^\times} \varphi({}^t g\, {}^t\pi(\xi).\iota^{-1}(q))\,\rho(N(\xi))\,d^\times\xi \\
= \ & \rho(\det g) \int_{K^\times\backslash\mathbb{A}_K^\times} \chi(\xi) \sum_{q \in K^\times} \varphi({}^t g\, {}^t\pi(\xi).\iota^{-1}(\alpha q))\,\rho(N(\xi))\,d^\times\xi \\
= \ & \rho(\det g) \int_{K^\times\backslash\mathbb{A}_K^\times} \chi(\xi) \sum_{q \in K^\times} \varphi({}^t g\, {}^t\pi(\xi).{}^t\pi(q).a)\,\rho(N(\xi))\,d^\times\xi \\
= \ & \rho(\det g) \int_{K^\times\backslash\mathbb{A}_K^\times} \chi(\xi) \sum_{q \in K^\times} \varphi({}^t g\, {}^t\pi(q\xi).a)\,\rho(N(q\xi))\,d^\times\xi \\
= \ & \rho(\det g) \int_{\mathbb{A}_K^\times} \Phi_{g,a}(\xi)\,\rho(N(\xi))\,\chi(\xi)\,d^\times\xi \\
= \ & \rho(\det g)\ \Delta_K(\Phi_{g,a}, s, (\omega_\circ N)\,\chi),
\end{aligned}$$

ce qui établit le résultat. □

2. Séries d'Eisenstein

Séries d'Eisenstein normalisées.

On suppose maintenant $\omega = 1$ et $k = \mathbb{Q}$.
On note P le sous-groupe parabolique maximal standard de G de type $(n-1,1)$ formé des matrices

$$p = \begin{pmatrix} g' & {}^t x \\ 0 & t \end{pmatrix}$$

où $g' \in \mathbf{GL}_{n-1}$, où $t \in \mathbf{GL}_1$, et où x est une matrice ligne à $n-1$ éléments. Le radical unipotent de P est

$$N = \left\{ \begin{pmatrix} \mathbf{1}_{n-1} & {}^t x \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right\},$$

et P est le produit de N par le sous-groupe de Levi

$$M = \left\{ \begin{pmatrix} g' & 0 \\ 0 & t \end{pmatrix} \right\}.$$

Le centre de M est

$$A = \left\{ \begin{pmatrix} t'.\mathbf{1}_{n-1} & 0 \\ 0 & t \end{pmatrix} \right\},$$

où t et t' sont dans $\mathbf{GL}_1$. Si $p \in P$ est la matrice ci-dessus, on pose $\alpha(p) = t$, de telle sorte que ${}^t e_n.p = \alpha(p).{}^t e_n$. Le module de $P(\mathbb{A})$ est

$$\delta_P(p) = \delta_P \begin{pmatrix} g' & {}^t x \\ 0 & t \end{pmatrix} = \left| \frac{\det p}{\alpha(p)^n} \right| = \left| \frac{\det g'}{t^{n-1}} \right|_{\mathbb{A}}, \quad p \in P(\mathbb{A}).$$

On a $G(\mathbb{A}) = P(\mathbb{A}).\mathbf{K}$, où $\mathbf{K}$ est le sous-groupe maximal standard de $G(\mathbb{A}_k)$. Si $g = p\kappa \in G(\mathbb{A})$, avec $p \in P$ et $\kappa \in \mathbf{K}$, on pose $\delta_P(g) = \delta_P(p)$. Il n'y a pas d'ambiguïté, car si $\kappa \in P(\mathbb{A}) \cap \mathbf{K}$, alors $\alpha(\kappa)$ et $\det \kappa$ sont dans $\mathbb{A}^1$, par suite $\delta_P(\kappa) = 1$. Si $p \in P(\mathbb{A})$, si $g \in G(\mathbb{A})$ et si $\kappa \in \mathbf{K}$, on a

$$\delta_P(pg\kappa) = \delta_P(p)\delta_P(g), \quad \delta_P(p^{-1}) = \delta_P(p)^{-1}.$$

On va s'intéresser aux fonctions satisfaisant aux relations

$$F(\gamma z g \kappa) = F(g), \quad \gamma \in G(k), \quad z \in Z(\mathbb{A}), \quad g \in G(\mathbb{A}), \quad \kappa \in \mathbf{K}, \tag{2.1}$$

autrement dit aux fonctions définies sur la variété modulaire X. *La série d'Eisenstein normalisée* est définie pour $g \in G(\mathbb{A})$ par

$$\mathbf{E}_n(g,s) = \mathbf{E}(g,s) = \sum_{\gamma \in P(k)\backslash G(k)} \delta_P(\gamma g)^s.$$

On note $\mathcal{S}^K(\mathbb{A}^n)$ l'espace des fonctions de $\mathcal{S}(\mathbb{A}^n)$ invariantes par $\mathbf{K}$. Si $\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{A}^n)$, on note $\boldsymbol{\phi}_1$ la fonction de $\mathcal{S}(\mathbb{A}_k)$ définie par

$$\boldsymbol{\phi}_1(\lambda) = \varphi(\lambda e_n) \qquad (\lambda \in \mathbb{A}_k).$$

Si $\phi \in \mathcal{S}(\mathbb{A}_k)$ et si $s \in \mathbb{C}$, on note

$$\Delta_k(\phi, s) = \Delta_k(\phi, s, 1)$$

l'intégrale de Tate (1.3) de ϕ lorsque $\chi = 1$ est le caractère trivial de C_k, de telle sorte que

$$\Delta_k(\boldsymbol{\phi}_1, s) = \int_{\mathbb{A}^\times} \varphi(\lambda e_n)\, |\lambda|^s \, d^\times\lambda.$$

2.1. **Proposition.** *Les propriétés suivantes sont satisfaites :*

(a) *La série* $\mathbf{E}(g,s)$ *converge pour* $\mathrm{Re}(s) > 1$ *et satisfait aux relations* (2.1).

(b) *Si $\varphi \in \mathcal{S}^K(\mathbb{A}^n)$, on a*

(2.2) $$E(\varphi)(g,s) = n\ \Delta_k(\boldsymbol{\phi}_1, ns)\,\mathbf{E}(g,s).$$

(c) *La série $\mathbf{E}(g,s)$ se prolonge en une fonction méromorphe dans $\mathbb{C}$.*

Démonstration. Pour $g \in G(\mathbb{A})$ et pour $\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{A}^n)$, on pose

$$M(\varphi)(g,s) = \int_{Z(\mathbb{A})} \varphi(e_n.zg)\,|\det zg|^s\,dz.$$

Cette intégrale converge si $\mathrm{Re}(s) > 1/n$ et si $\mathrm{Re}(s) > 1$, on a

(2.3) $$E(\varphi)(g,s) = \sum_{\gamma \in P(k)\backslash G(k)} M(\varphi)(\gamma g, s).$$

Si $g \in G(\mathbb{A})$, on a, en vertu de (1.9) :

$$\begin{aligned}
M(\varphi)(pg,s) &= \int_{Z(\mathbb{A})} \varphi(e_n.zpg)\,|\det zpg|^s\,dz \\
&= n\,|\det p|^s \int_{\mathbb{A}^\times} \varphi(\lambda e_n.pg)\,|\lambda^n\ \det g|^s\,d^\times\lambda \\
&= n\,|\det p|^s \int_{\mathbb{A}^\times} \varphi(\lambda\alpha(p)e_n.g)\,|\lambda^n\ \det g|^s\,d^\times\lambda \\
&= n\,|\det p|^s\,|\alpha(p)^{-n}| \int_{\mathbb{A}^\times} \varphi(\lambda e_n.g)\,|\lambda^n\ \det g|^s\,d^\times\lambda \\
&= n\,\delta_P(p)^s \int_{\mathbb{A}^\times} \varphi(\lambda e_n.g)\,|\lambda^n\ \det g|^s\,d^\times\lambda \\
&= \delta_P(p)^s\,M(\varphi)(g,s)
\end{aligned}$$

On a aussi

$$\begin{aligned}
M(\varphi)(g,s) &= \int_{Z(\mathbb{A})} \varphi(e_n.zg)\,|\det zg|^s\,dz \\
&= n \int_{\mathbb{A}^\times} \varphi(\lambda e_n.g)\,|\lambda^n\ \det g|^s\,d^\times\lambda \\
&= n\,|\det g|^s\ \Delta_k(\boldsymbol{\phi}_g, ns).
\end{aligned}$$

Si $\varphi \in \mathcal{S}^K(\mathbb{A}^n)$, et en écrivant $g = p\kappa \in G(\mathbb{A})$, avec $p \in P$ et $\kappa \in \mathbf{K}$, on trouve

(2.4) $$M(\varphi)(g,s) = n\,\delta_P(g)^s\ \Delta_k(\boldsymbol{\phi}_1, ns).$$

On déduit (b) de (2.4) et (2.3), ce qui entraîne (a) et (c) par la même occasion. □

On rappelle que la fonction

(2.5) $$\Lambda(s) = \pi^{-s/2}\Gamma(\frac{s}{2})\zeta(s),$$

est méromorphe dans $\mathbb{C}$, et que $\Lambda(s) = \Lambda(1-s)$. Les seuls pôles de Λ sont en $s = 0$ et $s = 1$. On a $\Lambda(s) \neq 0$ si $\mathrm{Re}(s) \geq 1$ et $s \neq 1$. Pour $n = 2$, on a $2\,\Lambda(2) = \pi/3$. La fonction

$$c_n(s) = c(s) = \frac{\Lambda(n(1-s))}{\Lambda(ns)}$$

est méromorphe dans $\mathbb{C}$, et on a

$$c(s)\,c(1-s) = 1, \quad c(\tfrac{1}{2}) = 1, \quad c(0) = 0, \quad c(\tfrac{1}{n}) = 0 \quad (n \geq 3).$$

Dans le demi-plan fermé $\mathrm{Re}(s) \geq 1/n$, les seuls pôles de la fonction $c(s)$ sont situés en $s = 1$ et aussi en $s = 1 - (1/n)$ si $n \geq 3$. On a

$$\mathrm{res}_{s=1}\,c(s) = \frac{-1}{n\,\Lambda(n)}, \quad \mathrm{res}_{s=1-(1/n)}\,c(s) = \frac{-1}{n\,\Lambda(n-1)} \quad (n \geq 3).$$

On pose
$$\mathcal{R}_n = \{s \in \mathbb{C} \mid \operatorname{Re}(s) > 0 \text{ et } \zeta(ns) = 0\}.$$
L'ensemble $\mathcal{R}_n$ est contenu dans la bande $0 < \operatorname{Re}(s) < 1/n$. Dans cette bande, l'ensemble des pôles de $c(s)$ est égal à $\mathcal{R}_n$. Dans le demi-plan fermé $\operatorname{Re}(s) \geq 1/2$, l'ensemble des zéros de la fonction $c(s)$ est contenu dans la bande ouverte
$$\left\{s \in \mathbb{C} \mid 1 - \tfrac{1}{n} < \operatorname{Re}(s) < 1\right\}.$$

2.2. *Remarque.* On définit une fonction $\tau \in \mathcal{S}^K(\mathbb{A}^n)$ de la manière suivante : on note τ_p la fonction caractéristique du module compact $\mathbb{Z}_p^n$, on pose $\tau_\infty(x) = e^{-\pi||x||^2}$ si $x \in \mathbb{R}^n$, et enfin
$$\tau(x) = \tau_\infty(x_\infty) \prod_p \tau_p(x_p),$$
si $x = (\ldots, x_p, \ldots, x_\infty) \in \mathbb{A}^n$. On vérifie que $\tau \in \mathcal{S}^K(\mathbb{A}^n)$, on a $\mathcal{F}\tau(x) = \tau(x)$ et
$$\Delta_k(\boldsymbol{\tau}_1, s) = \Lambda(s), \tag{2.6}$$
où $\Lambda(s)$ est définie en (2.5) [22, Lem. 8, p. 127]. On déduit de (2.2) :
$$E(\tau)(g, s) = n\,\Lambda(ns)\,\mathbf{E}(g, s), \tag{2.7}$$

2.3. **Proposition.** *La série d'Eisenstein normalisée vérifie les propriétés suivantes :*

(a) *Les seuls pôles de la fonction* $\Lambda(ns)\,\mathbf{E}(g, s)$ *sont les points* $s = 0$ *et* $s = 1$.

(b) *Dans le demi-plan fermé* $\operatorname{Re}(s) \geq 1/n$, *la fonction* $\mathbf{E}(g, s)$ *n'admet qu'un pôle ; il est simple et situé en* $s = 1$. *On a*
$$\operatorname{res}_{s=1} \mathbf{E}(g, s) = \frac{1}{n\,\Lambda(n)}, \quad \mathbf{E}(g, 0) = 1, \quad \mathbf{E}(g, \frac{1}{n}) = 0.$$

(c) *Dans le demi-plan fermé* $\operatorname{Re}(s) \geq 1/n$, *les seuls pôles de la fonction* $c(s)$ *sont situés en* $s = 1$ *et aussi en* $s = 1 - (1/n)$ *si* $n \geq 3$. *On a*
$$\operatorname{res}_{s=1} c(s) = \frac{-1}{n\,\Lambda(n)}, \quad \operatorname{res}_{s=1-(1/n)} c(s) = \frac{-1}{n\,\Lambda(n-1)} \quad (n \geq 3).$$

(d) *On a l'équation fonctionnelle*
$$\mathbf{E}(g, s) = c(s)\,\mathbf{E}({}^t g^{-1}, 1 - s). \tag{2.8}$$
Dans la bande $0 < \operatorname{Re}(s) < 1$, *le lieu des pôles de* $\mathbf{E}(g, s)$ *est égal à* $\mathcal{R}_n$.

(e) *Si* $n = 2$, *on a*
$$\mathbf{E}({}^t g^{-1}, s) = \mathbf{E}(g, s).$$

Démonstration. L'assertion (a) est une conséquence de (2.7). En écrivant
$$\mathbf{E}(g, s) = \frac{E(\tau)(g, s)}{n\,\Lambda(ns)},$$
on voit que la fonction $\mathbf{E}(g, s)$ n'admet qu'un pôle dans le demi-plan $\operatorname{Re}(s) > 1/n$; il est simple et situé en $s = 1$. Puisque
$$\operatorname{res}_{s=1} E(\tau)(g, s) = \int \tau = 1,$$
On en déduit le résidu de $\mathbf{E}(g, s)$ en $s = 1$. D'autre part,
$$\operatorname{res}_{s=0} E(\tau)(g, s) = -\,\tau(0) = -1,$$
et la fonction $\Lambda(ns)$ admet un pôle au point $s = 0$, de résidu
$$\operatorname{res}_{s=0} \Lambda(ns) = \operatorname{res}_{s=0} \Gamma(\frac{ns}{2})\zeta(ns) = -\frac{1}{n},$$
puisque $\zeta(0) = -1/2$. On en déduit que $\mathbf{E}(g, 0) = 1$. Si $\operatorname{Re}(s) = 1/n$ et $s \neq 1/n$, la fonction $\mathbf{E}(g, s)$ n'a pas de pôle, puisque $\Lambda(ns) \neq 0$. Enfin, si $s = 1/n$, la fonction

$\Lambda(ns)$ a un pôle et la fonction $E(\tau)(g,s)$ n'en a pas, ce qui achève de démontrer (b). Les seuls pôles de la fonction $\Lambda(n(1-s))$ sont simples, situés en $s=1$ et en $s=1-(1/n)$; on a $\Lambda(ns)\neq 0$ dans l'ensemble des points s tels que $\mathrm{Re}(s)\geq 1/n$ et $s\neq 1/n$; par conséquent, les seuls pôles de la fonction

$$c(s)=\frac{\Lambda(n(1-s))}{\Lambda(ns)}$$

dans cet ensemble sont simples, situés en $s=1$ et en $s=1-(1/n)$; de plus $c(1/n)=0$. Le calcul de $\mathrm{res}_{s=1}\,c(s)$ est facile. On a

$$\mathrm{res}_{s=1-(1/n)}\,c(s)=\frac{-1}{n}\lim_{s=1}\frac{(s-1)\Lambda(s)}{\Lambda(n-s)}.$$

On a $(s-1)\Lambda(s)=1+o(1)$, d'où le résidu en $s=1-(1/n)$. Si $n=2$, on a

$$\Lambda(2-s)\sim\frac{1}{1-s},$$

et donc $\mathrm{res}_{s=1/2}\,c(s)=0$: la fonction c est holomorphe en $s=1/2$. ce qui implique (c). On déduit de (2.2) et de l'équation fonctionnelle (1.10) :

$$\Lambda(n(1-s))\,\mathbf{E}(g,1-s)=\Lambda(ns)\,\mathbf{E}({}^t g^{-1},s),$$

ce qui implique (d). L'assertion (e) vient de la relation ${}^t g^{-1}=wgw^{-1}$, où w est l'élément du groupe de Weyl de $SL(2,\mathbb{Z})$. □

Opérateurs invariants.

La variété riemanienne $\mathcal{P}_n=G(\mathbb{R})/\,\mathbf{O}_v(n)$ s'identifie à l'espace des matrices symétriques définies positives $Y=(y_{ij})$. On note $\mathbf{D}=\mathbf{D}(\mathcal{P}_n)$ la $\mathbb{C}$-algèbre des opérateurs différentiels sur $\mathcal{P}_n$ qui sont invariants sous l'action de $G(\mathbb{R})$. Posons

$$\frac{\partial}{\partial Y}=\tfrac{1}{2}\left((1+\delta_{ij})\,\frac{\partial}{\partial y_{ij}}\right),$$

où δ_{ij} est le symbole de Kronecker. A. Selberg [17, p. 57] a introduit les éléments suivants de $\mathbf{D}$:

$$Q_h=\mathrm{Tr}\left(\left(Y\frac{\partial}{\partial Y}\right)^h\right)\qquad(1\leq h\leq n)$$

de degrés respectifs $1,2,\ldots,n$; voir aussi [20]. L'opérateur Q_2 est l'image de *l'élément de Casimir* de l'algèbre enveloppante de G, et c'est aussi le Laplacien de $\mathcal{P}_n$. Il a démontré que l'algèbre $\mathbf{D}$ est égale à l'algèbre de polynômes $\mathbb{C}[Q_1,\ldots,Q_n]$. La fonction $\delta_P(g)^s$ est fonction propre simultanée des éléments de $\mathbf{D}$: on a

$$D\,\delta_P^s=\boldsymbol{\gamma}_D(s)\,\delta_P^s,\quad(D\in\mathbf{D},s\in\mathbb{C}),\tag{2.9}$$

avec des polynômes $\boldsymbol{\gamma}_D(s)$ convenables.

2.4. **Proposition.** *Soit* $\mathbf{I}(\mathbb{C})$ *l'image de l'homomorphisme de* $\mathbf{D}$ *dans* $\mathbb{C}[s]$ *qui envoie* D *sur* $\boldsymbol{\gamma}_D(s)$.

(a) *Si* $n=2$, *on a* $\mathbf{I}(\mathbb{C})=\mathbb{C}[s(1-s)]$.

(b) *Si* $n\geq 3$, *on a* $\mathbf{I}(\mathbb{C})=s(1-)\mathbb{C}[s]$.

Cette proposition résulte du lemme suivant :

2.5. **Lemme.** *Posons*

$$D_h=\frac{2^h}{n(n-1)}\,Q_h,\quad\boldsymbol{\gamma}_h(s)=\boldsymbol{\gamma}_{D_h}(s).$$

Alors

$$\boldsymbol{\gamma}_h(s) = s\,(1-s)\left(\frac{((n-1)s)^{h-1}-(1-s)^{h-1}}{(n-1)s-(1-s)}\right).$$

En particulier :

$$\boldsymbol{\gamma}_1(s)=0, \quad \boldsymbol{\gamma}_2(s)=s\,(1-s), \quad \boldsymbol{\gamma}_3(s)=s\,(1-s)\,((n-2)s+1).$$

Démonstration. Voir [20, pp. 44–49]. □

Puisque les éléments de $\mathbf{D}$ sont invariants sous l'action de $G(\mathbb{R})$ à gauche, la relation (2.9) implique :

2.6. **Proposition.** *Si $D \in \mathbf{D}$ et si s n'est pas un pôle de $\mathbf{E}(g,s)$, on a*

$$D\,\mathbf{E}(g,s) = \boldsymbol{\gamma}_D(s)\,\mathbf{E}(g,s). \quad \square$$

Rappelons que le radical unipotent N de P est formé des matrices

$$x = \begin{pmatrix} \mathbf{1}_{n-1} & u \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

où u est un vecteur colonne avec $n-1$ composantes. Si F est une fonction continue sur $G(k)\backslash G(\mathbb{A})$, le *terme constant de F le long de N* est

$$F^0(g) = \int_{N(k)\backslash N(\mathbb{A})} F(ug,s)\,du.$$

Le terme constant des séries d'Eisenstein est le suivant : si

$$p = \begin{pmatrix} g' & {}^t x \\ 0 & t \end{pmatrix} \in P(\mathbb{A}),$$

on a

$$E(\varphi)^0(p,s) = n\,\delta_P(p)^s\,\Delta(\widehat{\varphi''},ns) + \frac{n}{n-1}\,\delta_P(p)^{\frac{1-s}{n-1}}\,E(\varphi')(g',\frac{n-ns}{n-1}),$$

où on a pris $\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{A}^n)$ décomposable :

$$\varphi(x',y) = \varphi'(x')\,\varphi''(y), \quad \varphi'(0)=\varphi''(0)=1, \quad x' \in \mathbb{A}^{n-1},\ y \in \mathbb{A}^1.$$

On en déduit :

2.7. **Proposition.** *Soit $g = p\kappa \in G(\mathbb{A})$ avec p comme ci-dessus. Si s n'est pas un pôle de $\mathbf{E}_n(g,s)$, on a*

$$\mathbf{E}_n^0(g,s) = \delta_P(g)^s + c_n(s)\,\delta_P(g)^{\frac{1-s}{n-1}}\,\mathbf{E}_{n-1}(g',\frac{n-ns}{n-1}),$$

en convenant que $\mathbf{E}_1(g',s)=1$.

Intégrales périodiques des séries d'Eisenstein.

Rappelons que g_K est la matrice de $G(\mathbb{A})$ telle que $(g_K)_\infty = q_K$ et $(g_K)_p = 1$ pour tout nombre premier p, et que $q_K \in G(\mathbb{R})$ est une matrice telle que ${}^t q_K.q_K = p_K$, où p_K est la matrice définie en (1.1). La fonction $\tau \in \mathcal{S}^K(\mathbb{A}^n)$ a été définie dans la remarque 2.2.

2.8. **Lemme.** *Si $\chi \in \mathsf{X}$, on a $\tau({}^t g_K.{}^t\pi(\xi).e_1) = \Phi_0(\xi)$ pour tout $\xi \in \mathbb{A}_K^\times$.*

Démonstration. Les deux fonctions sont décomposables ; posons $(\tau_{g_K})_v = \tau_v$ et $(\Phi_0)_v = \Phi_v$ pour simplifier. Supposons tout d'abord que v soit la place infinie. Si $x=(x_1,\ldots,x_n) \in k^n$, et si $\xi = \iota(x) = x_1\alpha_1 + \cdots + x_n\alpha_n \in K^\times$, on vérifie que

$${}^t x.p_K.x = F(\xi).$$

On a ${}^t\pi(\xi).e_1 = \iota^{-1}(\xi) = x$ d'après (1), et

$$||{}^t e_1.\pi(\xi)g_K||^2 = ||xg_K||^2 = x.p_K.{}^t x = F(\xi).$$

On en déduit que si $\xi_\infty \in K_\infty^\times$, on a

$$\tau_\infty({}^t g_{K}.{}^t\pi(\xi_\infty).e_1) = e^{-F(\xi_\infty)} = \Phi_\infty(\xi_\infty).$$

Soit v une place finie de k ; le caractère χ est non ramifié, on a $(g_{K})_v = 1$, et

$$\tau_v({}^t\pi_v(\xi).e_1) = \tau_v(\iota_v^{-1}(\xi)) \quad \text{si} \quad \xi \in K^\times$$

puisque ι_v induit un isomorphisme de $\mathbb{Z}_p^n$ sur $\mathfrak{O}_v$. En effet le module

$$\mathfrak{R}_v = \mathfrak{O} \otimes_{\mathfrak{o}} \mathfrak{o}_v = \alpha_1 \mathfrak{o}_v + \cdots + \alpha_n \mathfrak{o}_v$$

est un sous-anneau compact de $\mathfrak{O}_v$, et il contient $\mathfrak{O}$. Par le *théorème d'approximation faible*, $\mathfrak{O}$ est dense dans $\prod_{w|v} \mathfrak{O}_w$, et donc dans $\mathfrak{O}_v$, d'où $\tau_v = \Phi_v$. □

2.9. **Lemme.** *Si $\chi \in \mathsf{X}$, on a*

$$\Delta'_K(\tau_{g_K}, s, \chi) = \Gamma(s, \chi).$$

Démonstration. C'est une conséquence du lemme 2.8 et de (1.5). □

2.10. **Proposition.** *Si $\chi \in \mathsf{X}$ et si $g \in G(\mathbb{A})$, la fonction méromorphe*

$$H(g, s, \chi) = L(s, \chi)^{-1} \oint \mathbf{E}(hg, s)\, \chi_\pi(h)\, dh$$

possède les propriétés suivantes :

(a) *Si $h \in T(\mathbb{A})$ et si $\kappa \in \mathbf{K}$, on a*

$$H(hg\kappa, s, \chi) = \overline{\chi}_\pi(h)\, H(g, s, \chi).$$

(b) *La fonction $\Lambda(ns)\, H(g, s, \chi)$ est holomorphe dans le demi-plan* $\mathrm{Re}(s) > 0$.

(c) *La fonction $\Lambda(ns)\, H(g_{K}, s, \chi)$ n'a pas de zéros dans $\mathbb{C}$.*

(d) *Si $n = 2$, la fonction $H(g, s, \chi)\, L(s, \chi)$ est invariante par $s \mapsto 1 - s$.*

Démonstration. Si $\varphi \in \mathcal{S}^K(\mathbb{A}^n)$ et si $g \in G(\mathbb{A})$, notons $\Phi_g \in \mathcal{S}(\mathbb{A}_K)$ la fonction définie par

$$\Phi_g(\xi) = \varphi({}^t g.{}^t\pi(\xi).e_1) \qquad (\xi \in \mathbb{A}_K),$$

et $\boldsymbol{\phi}_1 \in \mathcal{S}(\mathbb{A}_k)$ la fonction définie par

$$\boldsymbol{\phi}_1(\lambda) = \varphi(\lambda e_1) \qquad (\lambda \in \mathbb{A}_k).$$

La relation (2.2) s'écrit

$$n\ \Delta_k(\boldsymbol{\phi}_1, ns)\, \mathbf{E}(g, s) = E(\varphi)(g, s).$$

La formule de Hecke (1.11) implique

$$\oint E(\varphi)(hg, s)\, \chi_\pi(h)\, dh = |\det g|_{\mathbb{A}_k}^s\ \Delta_K(\varphi_g, s, \chi),$$

et la formule de Weil (1.4) donne :

$$\Delta_K(\Phi_g, s, \chi) = c_K^{-1}\, L(s, \chi)\ \Delta'_K(\Phi_g, s, \chi).$$

On en déduit

$$\begin{aligned} n\, \Delta_k(\boldsymbol{\phi}_1, ns) \oint \mathbf{E}(hg, s)\, \chi_\pi(h)\, dh &= |\det g|_{\mathbb{A}_k}^s\ \Delta_K(\Phi_g, s, \chi) \\ &= c_K^{-1}\, |\det g|_{\mathbb{A}_k}^s\, L(s, \chi)\, \Delta'_K(\Phi_g, s, \chi), \end{aligned}$$

ce qui implique

$$H(g, s, \chi) = \frac{|\det g|^s}{n\, c_K}\, \frac{\Delta'_K(\Phi_g, s, \chi)}{\Delta_k(\boldsymbol{\phi}_1, ns)}.$$

Puisque $\Delta'_K(\Phi_g, s)$ est holomorphe pour $\mathrm{Re}(s) > 0$, on voit que $\Lambda(ns)\, H(g, s, \chi)$ est holomorphe pour $\mathrm{Re}(s) > 0$ en prenant $\varphi = \tau$, puisque d'après l'équation (2.6)

$$\Delta_k(\boldsymbol{\tau}_1, ns) = \Lambda(s) = \pi^{-ns/2}\, \Gamma(ns/2)\zeta(ns)$$

Enfin, d'après le lemme 2.9 et l'équation (2.6), on a

$$\begin{aligned} H(g_{_K}, s, \chi) &= \frac{|\det g_{_K}|^s}{n\, c_K} \, \frac{\Delta'_K(\tau_{g_K}, s, \chi)}{\Delta_k(\boldsymbol{\tau}_1, ns)} \\ &= \frac{|\mathrm{disc}\, K|^{s/2}}{n\, c_K} \, \frac{\Gamma(s,\chi)}{\pi^{-ns/2}\, \Gamma(ns/2)\zeta(ns)}\,; \end{aligned}$$

la fonction $\Gamma(s,\chi)$ n'a pas de zéros dans $\mathbb{C}$, ce qui implique la dernière assertion. $\square$

Si $\chi \in \mathsf{X}$, on a

$$\int_Q \mathbf{E}(\dot{h} g_{_K}, s)\, \overline{\chi}_\pi(\dot{h})\, d\dot{h} = \oint F(hg_{_K})\, \overline{\chi}_\pi(h)\, dh = H(g_{_K}, s, \overline{\chi})\, L(s, \overline{\chi})\,;$$

la formule d'inversion de Fourier (1.7) entraîne que si $h \in S$, on a

$$\mathbf{E}(hg_{_K}, s) = \sum_{\chi \in \mathsf{X}} H(g_{_K}, s, \overline{\chi})\, L(s, \overline{\chi})\, \chi_\pi(h).$$

La convergenge est normale car il s'agit du développement en série de Fourier d'une fonction C^∞ sur une somme de produit de cercles. On a donc :

2.11. **Corollaire.** *si $h \in S$, et si $s \neq 0, 1$, on a*

$$n\Lambda(ns)\, \mathbf{E}(hg_{_K}, s) = c_K^{-1}\, |\mathrm{disc}\, K|^{s/2} \sum_{\chi \in \mathsf{X}} \Gamma(s,\chi)\, L(s,\chi)\, \bar{\chi}_\pi(h). \quad \square$$

Cette formule est due à Siegel si K est un corps quadratique réel [19, p. 89].

2.12. **Lemme.** *Si $D \in \mathbf{D}$, on a*

$$DH(g, s, \chi) = \boldsymbol{\gamma}_D(s)\, H(g, s, \chi).$$

Démonstration. Puisque D est invariant à gauche, on a, si $g \in G(\mathbb{A})$ et si F est assez régulière :

$$D_g \oint F(hg)\, \chi_\pi(h)\, dh = \oint D_g[F \circ L(h)](g)\, \chi_\pi(h)\, dh = \oint [DF](hg)\, \chi_\pi(h)\, dh.$$

On en déduit

$$\begin{aligned} DH(g,s,\chi)L(s,\chi) &= D_g \oint \mathbf{E}(hg, s)\, \chi_\pi(h)\, dh = \oint [D\mathbf{E}](hg, s)\, \chi_\pi(h)\, dh \\ &= \boldsymbol{\gamma}_D(s) H(g,s,\chi) L(s,\chi), \end{aligned}$$

d'où le résultat. $\square$

3. Trains d'ondes d'Eisenstein

Trains d'ondes d'Eisenstein.

Un *train d'ondes d'Eisenstein (fini)* est une combinaison linéaire de séries d'Eisenstein. Plus précisément, c'est une fonction définie sur $G(\mathbb{A})$ qui s'écrit

$$\mathsf{W}(\mu)(g) = \int_B \mathbf{E}(g, s)\, d\mu(s),$$

où μ appartient à l'ensemble $\mathcal{M}_n(B)$ des mesures dans la bande ouverte

$$B = \{ s \in \mathbb{C} \mid 0 < \mathrm{Re}(s) < 1 \}\,,$$

et à support fini, disjoint de l'ensemble

$$\mathcal{R}_n = \{ s \in \mathbb{C} \mid \mathrm{Re}(s) > 0 \text{ et } \Lambda(ns) = 0 \}\,,$$

qui est l'ensemble des pôles de $\mathbf{E}(g,s)$ dans B. On parlera aussi de *train d'ondes* pour simplifier. Si

$$\mu = \sum_s a_s \delta_{(s)}, \qquad a_s \in \mathbb{C}, \quad s \in B,$$

on a

$$\mathsf{W}(\mu)(g) = \sum_s a_s \, \mathbf{E}(g,s).$$

Les fonctions $\mathsf{W}(\mu)$ appartiennent à l'espace $C(X)$ des fonctions continues définies sur la *variété modulaire*

$$X = G(k)Z(\mathbb{A})\backslash G(\mathbb{A})/\mathbf{K}.$$

On note $E(X) = \operatorname{Im} \mathsf{W}$ l'espace des trains d'ondes d'Eisenstein. On a

$$\mathsf{W}(\mu)(g) = \int_B c(s)\, \mathbf{E}({}^t g^{-1}, 1-s)\, d\mu(s) = \int_B c(1-s)\, \mathbf{E}({}^t g^{-1}, s)\, d\mu(1-s) \tag{3.1}$$

par l'équation fonctionnelle (2.8) :

$$\mathbf{E}(g,s) = c(s)\, \mathbf{E}({}^t g^{-1}, 1-s).$$

On va maintenant déterminer le noyau de l'application W.
Supposons $n = 2$. On note $\mathcal{M}_2^{\pm}(B)$ le sous-espace de $\mathcal{M}_2(B)$ formé des mesures telles que

$$\mu(1-s) = \pm\, c(s)\, \mu(s).$$

Si $\mu \in \mathcal{M}_2(B)$, on pose

$$\mu^{\pm}(s) = \frac{1}{2}\left(\mu(s) \pm c(1-s)\, \mu(1-s)\right) \in \mathcal{M}_2^{\pm}(B).$$

Puisque $\mu = \mu^+ + \mu^-$, on a

$$\mathcal{M}_2(B) = \mathcal{M}_2^+(B) \oplus \mathcal{M}_2^-(B),$$

et l'équation fonctionnelle (3.1) implique $\mathsf{W}(\mu) = \mathsf{W}(\mu^+)$.

3.1. **Proposition.** *Si $n \geq 3$, l'application $\mathsf{W} : \mathcal{M}_n(B) \longrightarrow C(X)$ est injective. Si $n = 2$, on a $\ker \mathsf{W} = \mathcal{M}_2^-(B)$.*

Autrement dit, les séries d'Eisenstein $\mathbf{E}_n(g,s)$ sont linéairement indépendantes, mis à part la relation $\mathbf{E}_2(g,s) = c(s)\, \mathbf{E}_2(g, 1-s)$ lorsque $n = 2$.
Posons $\mathcal{M}_n^+(B) = \mathcal{M}_n(B)$ pour $n \geq 3$. Si $F \in C(X)$ est un train d'ondes d'Eisenstein, il existe une unique mesure $\mu \in \mathcal{M}_n^+(B)$ telle que $F = \mathsf{W}(\mu)$; on dit que le support de μ est le *spectre* de F, noté $\operatorname{Spec} F$.

Démonstration. Supposons

$$\mu = \sum_{i=1}^n a_i\, \delta_{(s_i)}, \quad a_i \in \mathbb{C}, \quad s_i \in B, \quad s_i \neq s_j \text{ si } i \neq j.$$

Soit $g \in G(\mathbb{A})$, et posons $\nu_g(s) = \mathbf{E}(g,s)\, \mu(s) \in \mathcal{M}_n(B)$. Si $D \in \mathbf{D}$, on a

$$D[W(\mu)](g) = \sum_{i=1}^n a_i\, \boldsymbol{\gamma}_D(s_i) \mathbf{E}(g, s_i) = \int_B \boldsymbol{\gamma}_D(s) d\nu_g(s).$$

Si $W(\mu) = 0$, on a donc

$$\int_B \boldsymbol{\gamma}(s) d\nu_g(s) = 0$$

quel que soit $\boldsymbol{\gamma} \in \mathbf{I}(\mathbb{C})$. Supposons $n \geq 3$. Pour $1 \leq j \leq n$, Le polynôme

$$\boldsymbol{\gamma}_j(s) = \frac{s(1-s)}{s_j(1-s_j)} \prod_{i \neq j} \frac{s - s_j}{s_i - s_j} \tag{3.2}$$

appartient à $\mathbf{I}(\mathbb{C}) = s(1-s)\mathbb{C}[s]$ et

$$\int_B \boldsymbol{\gamma}_j(s) d\nu_g(s) = \sum_{i=1}^n a_i \boldsymbol{\gamma}_j(s_i)\mathbf{E}(g, s_i) = a_i \mathbf{E}(g, s_i) = 0,$$

quel que soit $g \in G(\mathbb{A})$ ce qui implique $a_i = 0$ puisque la fonction $\mathbf{E}(g, s_i)$ n'est pas identiquement nulle. On a donc $\mu = 0$ et l'application W est injective. Supposons $n = 2$, et soit $\mu \in \mathcal{M}_2^+(B)$. La proposition 2.10(d) implique

$$\nu_g(s) = \mathbf{E}(g, s)\,\mu(s) = c(s)\,\mathbf{E}(g, 1-s)\,\mu(s) = \mathbf{E}(g, 1-s)\,\mu(1-s) = \nu_g(1-s)$$

La mesure ν_g est invariante par $s \mapsto 1-s$, et elle est nulle sur $\mathbf{I}(\mathbb{C}) = \mathbb{C}[s(1-s)]$; on a encore $\nu_g = 0$ dans ce cas. On conclut comme précédemment. □

Formes toroïdales.

Les fonctions F définies sur $G(k)Z(\mathbb{A})\backslash G(\mathbb{A})$ telles que

$$\oint F(hg)\,dh = 0 \quad \text{pour} \quad g \in G(\mathbb{A})$$

ont été introduites par Zagier [25]. Plus généralement, si $\chi \in \mathsf{X}$, on dit que $F \in C(X)$ est une *forme toroïdale en* χ si

$$\Pi_\chi(F)(g) = \oint F(hg)\,\chi_\pi(h)\,dh = 0 \quad \text{pour } g \in G(\mathbb{A}), \tag{3.3}$$

On note $T(\chi)$ l'espace des formes toroïdales en χ.

Trains d'ondes toroïdaux.

3.2. **Théorème.** *Soit $F \in E(X)$ un train d'ondes d'Eisenstein et $\chi \in \mathsf{X}$. Les conditions suivantes sont équivalentes :*

(a) *Le train d'ondes F est toroïdal en χ, i. e. $\Pi_\chi(F) = 0$;*

(b) *On a* $\operatorname{Spec} F \subset \mathcal{Z}_\chi$, *où*

$$\mathcal{Z}_\chi = \{s \in B \mid L(s, \chi) = 0\}.$$

La proposition 3.1 et le théorème 3.2 impliquent que l'application W induit un isomorphisme de l'espace

$$\left\{\mu \in \mathcal{M}_n^+(B) \mid \operatorname{Supp}\mu \subset \mathcal{Z}_\chi\right\}$$

sur l'espace $E(X) \cap T(\chi)$ des trains d'ondes qui sont toroïdaux en χ.
En particulier, si $s \in B - \mathcal{R}_n$, *pour que* $\mathbf{E}(g, s)$ *soit toroïdale en* χ, *il faut et il suffit que* $s \in \mathcal{Z}_\chi$.

Démonstration. Ecrivons $F = \mathsf{W}(\mu)$ avec $\mu \in \mathcal{M}_n(B)$ et posons $\Pi(g) = \Pi_\chi(F)(g)$. La formule de Hecke implique

$$\Pi(g) = \oint \mathsf{W}(\mu)(hg)\,\chi_\pi(h)\,dh = \int_B H(g, s, \chi)\,L(s, \chi)\,d\mu(s).$$

Rappelons que pour toute mesure $\mu \in \mathcal{M}_n(B)$, on a $\operatorname{Supp}\mu \subset \mathcal{Z}_\chi$ si et seulement si la mesure $L(s, \chi)\mu(s) = 0$ est nulle.
(b) ⇒ (a) : Si $L(s, \chi)\,\mu(s) = 0$, alors $\mathsf{W}(\mu)$ est toroïdale en χ grâce à l'égalité ci-dessus.
(a) ⇒ (b) : Soit $D \in \mathbf{D}$. Grâce au lemme 2.12, on a

$$\begin{aligned} D\Pi(g) &= \int_B DH(g, s, \chi)\,L(s, \chi)\,d\mu(s) \\ &= \int_B H(g, s, \chi)\,L(s, \chi)\,\boldsymbol{\gamma}_D(s)\,d\mu(s). \end{aligned}$$

si $\mathsf{W}(\mu)$ est toroïdale en χ, alors

$$\int_B \boldsymbol{\gamma}(s)\, d\nu(s) = 0 \quad \text{où } \nu(s) = H(g,s,\chi)\, L(s,\chi)\, \mu(s),$$

quelle que soit $\boldsymbol{\gamma} \in \mathbf{I}(\mathbb{C})$. i) Supposons $n \geq 3$ et posons

$$\mu = \sum_{i=1}^{n} a_i\, \delta_{(s_i)},$$

avec $s_i \neq s_j$ pour $i \neq j$, de telle sorte que

$$\nu = \sum_{i=1}^{n} \nu_i\, \delta_{(s_i)}, \quad \nu(s_i) = a_i\, H(g,s_i,\chi)\, L(s_i,\chi).$$

Il vient

$$\int_B \boldsymbol{\gamma}(s)\, d\nu(s) = \sum_{i=1}^{n} \nu_i\, \boldsymbol{\gamma}(s_i) = 0 \quad (\boldsymbol{\gamma} \in \mathbf{I}(\mathbb{C})).$$

Supposons $n \geq 3$ et reprenons le polynôme $\boldsymbol{\gamma}_j(s) \in \mathbf{I}(\mathbb{C})$ défini par (3.2) ; on a

$$\int_B \boldsymbol{\gamma}_j(s) d\nu(s) = \sum_{i=1}^{n} \nu_i\, \boldsymbol{\gamma}_j(s_i) = \nu_i = 0,$$

et $\nu = 0$. Or la fonction $\Lambda(ns)H(g_{_K}, s, \chi)$ ne s'annule pas dans B d'après la proposition 2.10 ; il s'ensuit que la mesure $L(s,\chi)\,\mu(s)$ est nulle. ii) Supposons $n = 2$, et soit $\mu \in \mathcal{M}_2^+(B)$. La proposition 2.10(d) implique

$$\begin{aligned} \nu(s) &= H(g,s,\chi)\, L(s,\chi)\, \mu(s) = \\ &= H(g,1-s,\chi)\, L(1-s,\chi) c(s)\, \mu(s) \\ &= H(g,1-s,\chi)\, L(1-s,\chi) \mu(1-s) = \nu(1-s). \end{aligned}$$

Ainsi, la mesure ν est invariante par $s \mapsto 1-s$, et elle est nulle sur $\mathbf{I}(\mathbb{C}) = \mathbb{C}[s(1-s)]$; on a encore $\nu = 0$ dans ce cas. On conclut comme précédemment. $\square$

Trains d'ondes principaux.

En théorie du signal, un train d'ondes est représenté par une somme finie d'exponentielles imaginaires

$$\sum_t a_t\, e^{it\omega}.$$

Les exponentielles imaginaires sont les caractères du groupe additif. Les caractères du groupe multiplicatif $\mathbb{R}_+^\times$ sont les fonctions puissances $\psi_t(x) = x^{it}$, où t est réel. On note $E^1(\mathbb{R}_+^\times)$ l'espace des sommes de caractères

$$\psi(x) = \sum_t a_t(\psi)\, e^{it\omega} = \sum_t a_t(\psi)\, x^{it},$$

où l'ensemble $\operatorname{Spec}\psi = \{t \in \mathbb{R} \mid a_t(\psi) \neq 0\}$ est *fini*, de telle sorte que

$$\psi(x) = \int_{\mathbb{R}} x^{it}\, d\widehat{\psi}(t),$$

où $\widehat{\psi}$ est une mesure à support fini sur $\mathbb{R}$:

$$\widehat{\psi} = \sum_{t \in \operatorname{Spec}\psi} a_t(\psi)\, \delta_{(t)}.$$

Si les séries d'Eisenstein $E(g, \frac{1}{2} + it)$ sont l'analogue pour l'espace X des caractères $\psi_t(x)$ pour $\mathbb{R}_+^\times$, les trains d'ondes d'Eisenstein principaux sont l'analogue des sommes de puissances. On dit qu'un train d'ondes F est *principal* si son spectre est contenu dans la *droite critique*

$$D = \left\{ s \in \mathbb{C} \mid \mathrm{Re}(s) = \tfrac{1}{2} \right\}.$$

Il s'écrit donc sous la forme

$$F(g) = \int_{\mathbb{R}} E(g, \tfrac{1}{2} + it)\, d\widehat{\psi}(t),$$

où $\widehat{\psi}$ est comme ci-dessus. On note $E^1(X)$ l'espace des trains d'ondes principaux.

3.3. *Remarque.* On déduit du théorème 3.2 que si $F \in E(X)$, les conditions suivantes sont équivalentes :

(a) On a $F \in E^1(X) \cap T(\chi)$.

(b) On a $\mathrm{Spec}\, F \subset \mathfrak{X}_\chi$, où

$$\mathfrak{X}_\chi = D \cap \mathfrak{Z}_\chi = \left\{ s \in \mathbb{C} \mid L(s, \chi) = 0 \text{ et } \mathrm{Re}(s) = \tfrac{1}{2} \right\}. \quad \square$$

Une condition équivalente à l'hypothèse de Riemann.

3.4. **Corollaire.** *Les conditions suivantes sont équivalentes :*

(a) *Toutes les racines de $L(s, \chi)$ dans la bande B sont situées sur la droite critique D.*

(b) *Tout train d'ondes d'Eisenstein toroïdal en χ est principal.*

(c) *Si $s \in B$ et si $\mathbf{E}(g, s)$ est toroïdale en χ, on a*

$$\mathbf{E}(pg, s) = O(\delta_P(p)^{1/2})$$

pour tout $p \in P(\mathbb{A})$, uniformément lorsque g parcourt un compact de $G(\mathbb{A})$. $\square$

Démonstration. Le théorème 3.2 implique immédiatement l'équivalence des conditions (a) et (b). Puisque

$$F(pg) \sim F^0(pg),$$

La proposition 2.7 implique l'équivalence des conditions (a) et (c). $\square$

4. Relations de Maass-Selberg

L'opérateur de troncature.

On va utiliser l'opérateur d'Arthur pour estimer l'intégrale des séries d'Eisenstein.

4.1. **Proposition.** *pour $m > 0$, il existe un opérateur Λ^m de $C(G(k)\backslash G(\mathbb{A}))$ jouissant des propriétés suivantes.*

(a) *Si F est une fonction continue* à croissance lente *sur $G(k)\backslash G(\mathbb{A})$ et si $m > 0$, la fonction $\Lambda^m F$ est* à décroissance rapide*, et $\Lambda^m F$ tend vers F uniformément sur tout compact lorsque m tend vers l'infini.*

(b) *Supposons $n = 2$. Soient s_1 et s_2 deux points du plan complexe qui ne sont ni des pôles de $\mathbf{E}(g, s)$, ni des pôles de $c(s)$. Si m tend vers l'infini, on a :*

$$\int_{G(k)Z(\mathbb{A})\backslash G(\mathbb{A})} \Lambda^m \mathbf{E}(g, s_1)\, \Lambda^m \mathbf{E}(g, s_2)\, dg \sim v\, \varpi_2^m(s_1, s_2), \tag{4.1}$$

où $v > 0$ et où

$$\begin{aligned} \varpi_2(s_1, s_2) &= \frac{m^{s_1 - s_2} c(s_2) - m^{s_2 - s_1} c(s_1)}{s_1 - s_2} \\ &+ \frac{m^{s_1 + s_2 - 1} - m^{1 - s_2 - s_1} c(s_1) c(s_2)}{s_1 + s_2 - 1}. \end{aligned}$$

(c) *Supposons $n \geq 3$. Si t_1 et t_2 sont réels, et si m tend vers l'infini, on a*

$$\int_{G(k)Z(\mathbb{A})\backslash G(\mathbb{A})} \Lambda^m \mathbf{E}(g, \tfrac{1}{2} + it_1)\, \Lambda^m \mathbf{E}(g, \tfrac{1}{2} + it_2)\, dg \sim v\, M_1(t_1, t_2), \tag{4.2}$$

où v est une constante > 0, et où

$$M_1(t_1, t_2) = \frac{m^{i(t_1+t_2)} - m^{i(t_2+t_1)} c(\frac{1}{2} + it_1) c(\frac{1}{2} + it_2)}{i(t_1 + t_2)}, \quad (t_2 \neq -t_1),$$

et

$$M_1(t, -t) = 2 \log m - \frac{c'}{c}(\tfrac{1}{2} + it).$$

Les relations (4.1) sont les *relations de Maass-Selberg*, et les relations (4.2) sont les *relations de Maass-Selberg généralisées.*

Démonstration. Rappelons les propriétés de *l'opérateur de troncature Λ^T d'Arthur* défini dans [2, p. 270], [3, p. 89], [4, p. 40], où T est un élément *convenablement régulier* de l'algèbre de Lie du tore maximal standard A_0 de G. Si F est une fonction continue *à croissance lente* sur $G(k)\backslash G(\mathbb{A})$ et si $T > 0$, la fonction $\Lambda^T F$ est *à décroissance rapide*, et $\Lambda^T F$ tend vers F uniformément sur tout compact lorsque T tend vers l'infini. Si on note H_ρ l'élément tel que $< \alpha, H_\rho > \; = 1$ pour toute racine simple α de G relative à A_0, et si m est un nombre réel assez grand, l'élément $T(m) = (\log m) H_\rho$ est convenablement régulier (voir la définition en [4, Eq. (9.2), p. 69]. L'opérateur $\Lambda^m = \Lambda^{T(m)}$ satisfait la condition (a). Si $n = 2$, voir [14, Prop. 7.13, p. 401] pour la démonstration de (b). Si $n \geq 3$, on déduit (c) des travaux d'Arthur [2, p. 271], [3, Lem. 4.2, p. 119], [4, Cor. 9.2, p. 70]. □

Signalons en passant que si $n = 2$, on déduit de (4.1) en passant à la limite :

$$\int_{G(k)Z(\mathbb{A})\backslash G(\mathbb{A})} |\Lambda^m 1|^2\, dg = v(2\Lambda(2) - \frac{1}{m}) \sim \operatorname{vol} G(k)Z(\mathbb{A})\backslash G(\mathbb{A}),$$

d'où

$$v = \frac{\operatorname{vol} G(k)Z(\mathbb{A})\backslash G(\mathbb{A})}{2\Lambda(2)} = \frac{3}{\pi} \operatorname{vol} G(k)Z(\mathbb{A})\backslash G(\mathbb{A}).$$

La relation (4.1) et un autre passage à la limite impliquent :

4.2. **Lemme.** *Supposons $n = 2$. Si $s \in \mathbb{C}$ et $\mathrm{Re}(s) > 1/2$, on a*

$$\int_{G(k)Z(\mathbb{A})\backslash G(\mathbb{A})} |\Lambda^m E(g, s)|^2\, dg = v\, \frac{m^{2\sigma - 1}}{2\sigma - 1} + O(1).$$

Fonctions presque périodiques.

Si $\psi \in C(\mathbb{R}_+^\times)$, on définit une semi-norme $||\psi||_2$ en posant

$$||\psi||_2^2 = \lim_{m \to \infty} \frac{1}{2 \log m} \int_{1/m}^m |\psi(x)|^2\, d^\times x.$$

L'espace de Hilbert $B^2(\mathbb{R}_+^\times)$ des *fonctions presque périodiques* au sens de Besicovitch, de carré intégrable en moyenne sur $\mathbb{R}_+^\times$, est le complété de l'espace $E^1(\mathbb{R}_+^\times)$ des sommes de caractères pour cette semi-norme. L'espace $B^2(\mathbb{R}_+^\times)$ s'identifie à l'espace $\ell^2(\mathbb{R}_d)$, où $\mathbb{R}_d$ est le sous-groupe discret sous-jacent à la droite réelle, ou encore à l'espace des séries formelles

$$\psi(x) \sim \sum_t a_t(\psi)\, x^{it}, \quad \text{avec} \quad \sum_t |a_t(\psi)|^2 < +\infty.$$

De la même manière, si $F \in C(X)$, on définit une semi-norme $||F||_2$, à valeurs dans $[0, +\infty]$, en posant

$$(4.3) \qquad ||F||_2^2 = \lim_{m\to\infty} \frac{1}{4\,v\log m} \int_{G(k)Z(\mathbb{A})\backslash G(\mathbb{A})} |\Lambda^m F(g)|^2\, dg,$$

et on dit que F est *de carré intégrable en moyenne* si $||F||_2 < +\infty$. L'espace $\mathcal{A}^2(X)$ des fonctions de carré intégrable en moyenne jouit d'une structure d'espace préhilbertien : si F_1 et F_2 appartiennent à $\mathcal{A}^2(X)$, la limite

$$(F_1, F_2)_2 = \lim_{m\to\infty} \frac{1}{4\,v\log m} \int_{G(k)Z(\mathbb{A})\backslash G(\mathbb{A})} \Lambda^m F_1(g)\, \overline{\Lambda^m F_2(g)}\, dg$$

existe et définit une forme hermitienne sur $\mathcal{A}^2(X)$. On note $A^2(X)$ l'espace de Hilbert séparé complété de $\mathcal{A}^2(X)$ relativement à la semi-norme $||F||_2$. Or on a $E^1(X) \subset A^2(X)$, par la proposition 4.5 ci-dessous ; ceci permet de définir par analogie l'espace de Hilbert $B^2(X)$ des *trains d'ondes presque périodiques* comme étant l'adhérence de $E^1(X)$ dans $A^2(X)$; c'est l'analogue pour la variété modulaire X de l'espace $B^2(\mathbb{R}_+^\times)$. Puisque

$$M_1(t, -t) = 2\log m - \frac{c'}{c}(\tfrac12 + it),$$

On déduit de la proposition 4.1 :

4.3. **Lemme.** *Supposons $n \geq 3$. Soient t_1 et t_2 dans $\mathbb{R}$.*

(a) *Si $t_2 \neq t_1$, on a $(\mathbf{E}(\,.\,, \frac12 + it_1), \mathbf{E}(\,.\,, \frac12 + it_2))_2 = 0$.*

(b) *On a $||\mathbf{E}(\,.\,, \frac12 + it)||_2^2 = \frac12$.* □

On a aussi :

4.4. **Lemme.** *Supposons $n = 2$. Soient t_1 et t_2 dans $\mathbb{R}$.*

(a) *Si $t_2 \neq \pm t_1$, on a $(\mathbf{E}(\,.\,, \frac12 + it_1), \mathbf{E}(\,.\,, \frac12 - it_2))_2 = 0$.*

(b) *Si $t \neq 0$, on a $||\mathbf{E}(\,.\,, \frac12 + it)||_2^2 = \frac12$.*

(c) *On a $||\mathbf{E}(\,.\,, \frac12)||_2^2 = 1$.*

(d) *Si $t \neq 0$, on a $(\mathbf{E}(\,.\,, \frac12 + it), \mathbf{E}(\,.\,, \frac12 - it))_2 = \frac12\, c(\frac12 + it)$.* □

4.5. **Proposition.** *Si F est un train d'ondes principal non nul, on a*

$$0 < ||F||_2 < +\infty,$$

autrement dit, on a $E^1(X) \subset A^2(X)$; si $n = 2$, on a $E^1(X) = E(X) \cap A^2(X)$.

Démonstration. Supposons $F = \mathsf{W}(\mu)$, avec

$$\mu = \sum_s a_s \delta_{(s)}, \quad a_s \in \mathbb{C}, \quad \mathrm{Re}(s) = \tfrac12.$$

Les lemmes 4.3 et 4.4 montrent que $\mathsf{W}(\mu) \in A^2(X)$. Réciproquement, supposons $n = 2$. Le lemme 4.2 montre que

$$\int_{G(k)Z(\mathbb{A})\backslash G(\mathbb{A})} |\mathsf{W}(\mu)(g)|^2\, dg \sim C\, \frac{m^{2\sigma(\mu)-1}}{2\sigma(\mu) - 1}.$$

Si $\operatorname{Supp}\mu \not\subset D$, on n'a donc pas $\mathsf{W}(\mu) \in \mathcal{A}^2$. □

Une autre condition équivalente à l'hypothèse de Riemann ($n = 2$).

On déduit du théorème 3.4 et de la proposition 4.5 :

4.6. **Corollaire.** *Considérons les conditions suivantes :*

(a) *Toutes les racines de $L(s, \chi)$ dans la bande B sont situées sur la droite critique.*

(b) *Tout train d'ondes toroïdal en χ est de carré intégrable en moyenne.*

Alors (a) $\Rightarrow$ (b). *Si $n = 2$, les conditions* (a) *et* (b) *sont équivalentes.* □

La condition (b) du théorème 3.4 signifie que la semi-norme $||F||_2$ est finie sur l'espace $E(X) \cap T(\chi)$; sous cette condition, l'espace $E(X) \cap T(\chi)$, muni de cette semi-norme, est un espace préhilbertien.

5. Un espace de Pólya-Hilbert modulaire

L'espace $T^2(X)$.

L'espace de Hilbert $T^2_\chi(X)$ des *trains d'ondes toroïdaux en χ et presque périodiques* est l'adhérence du sous-espace $E^1(X) \cap T(\chi)$ de $B^2(X)$. On écrit $T^2_\chi(X) = T^2(X)$ pour simplifier.
On note $V(D_\chi)$ le complété de $E^1(X) \cap T(\chi)$ pour la norme $||DF||_2$, où $D = D_2$ est l'opérateur de Casimir de G défini dans la section 2. Puisque $||4DF||_2 \geq ||F||_2$, l'espace $V(D_\chi)$ s'identifie à un sous-espace dense de $T^2(X)$. L'opérateur non borné de $T^2(X)$ défini par D et de domaine $V(D_\chi)$ sera noté D_χ.

5.1. **Théorème.** *L'opérateur D_χ est un opérateur auto-adjoint de $T^2(X)$, et son spectre est discret : on a*

$$\operatorname{Spec} D_\chi = \left\{ \lambda \mid \lambda = \frac{1}{4} + \gamma^2, \quad \gamma \in \mathbb{R}, \quad L(\tfrac{1}{2} + i\gamma, \chi) = 0 \right\}.$$

Si $L(\frac{1}{2}, \chi) = 0$, la valeur propre $\lambda = 1/4$ est simple. Si $n \geq 3$, toute valeur propre $\lambda \neq 1/4$ est double, les fonctions propres correspondantes étant la série d'Eisenstein $\mathbf{E}(g, \frac{1}{2} + i\gamma)$ et sa conjuguée. Si $n = 2$, toute valeur propre est simple.

Autrement dit, le couple $(T^2(X), D_\chi)$ est un espace de Pólya-Hilbert dans le sens expliqué dans l'introduction. Nous décrivons d'abord la structure de $E^1(X)$.

5.2. **Proposition.** *Les propriétés suivantes sont satisfaites.*

(a) *Supposons $n \geq 3$. Si on écrit les éléments de $E^1(X)$ sous la forme*

$$F(g) = \sum_{t \in \mathbb{R}} a_t(F)\, \mathbf{E}(g, \tfrac{1}{2} + it), \tag{5.1}$$

on a

$$(F_1, F_2)_2 = \tfrac{1}{2} \sum_{t \in \mathbb{R}} a_t(F_1)\, \overline{a_t(F_2)}. \tag{5.2}$$

(b) *Supposons $n = 2$. Si on écrit les éléments de $E^1(X)$ sous la forme*

$$F(g) = a_0(F)\, \mathbf{E}(g, \tfrac{1}{2}) + 2 \sum_{t > 0} a_t(F)\, \mathbf{E}(g, \tfrac{1}{2} + it), \tag{5.3}$$

on a

$$(F_1, F_2)_2 = a_0(F_1)\, \overline{a_0(F_2)} + 2 \sum_{t > 0} a_t(F_1)\, \overline{a_t(F_2)}. \tag{5.4}$$

Démonstration. Supposons $n \geq 3$ et posons

$$F_t(g) = \sqrt{2}\,\mathbf{E}(g, \tfrac{1}{2} + it) \qquad (t \in \mathbb{R}).$$

Il découle du lemme 4.3 :

(i) $(F_{t_1}, F_{t_2})_2 = 0$ si t_1 et t_2 sont dans $\mathbb{R}$ et $t_1 \neq t_2$.

(ii) $||F_t||_2^2 = 1$ pour tout $t \in \mathbb{R}$.

On en déduit (a). Supposons $n = 2$ et posons

$$F_t(g) = \sqrt{2}\,\mathbf{E}(g, \tfrac{1}{2} + it)\ (t > 0), \quad F_0(g) = \mathbf{E}(g, \tfrac{1}{2}).$$

Il découle du lemme 4.4 :

(i) $(F_{t_1}, F_{t_2})_2 = 0$ si t_1 et t_2 sont dans $\mathbb{R}_+$ et $t_1 \neq t_2$.

(ii) $||F_t||_2^2 = 1$ pour tout $t \in \mathbb{R}_+$.

Si F s'écrit sous la forme énoncée, on a

$$F(g) = a_0(F)\, F_0(g) + \sqrt{2} \sum_{t>0} a_t(F)\, F_t(g),$$

dont on déduit l'expression du produit scalaire, ce qui démontre (b). □

Remarques. (i) Cette proposition montre que si $n \geq 3$ par exemple, l'application

$$\psi \mapsto \int_{\mathbb{R}} \mathbf{E}(g, \tfrac{1}{2} + it)\, d\widehat{\psi}(t)$$

définit une isométrie surjective de $E^1(\mathbb{R}_+^\times)$ sur $E^1(X)$.

(ii) À la place de l'espace $E^1(X)$, on pourrait prendre l'espace des fonctions

$$\int_{\mathbb{R}} \mathbf{E}(g, \tfrac{1}{2} + it)\, d\mu(t),$$

où μ est une *mesure bornée* : la construction qui suit conduit au même espace de Hilbert, en vertu du théorème taubérien de Wiener.

Démonstration du théorème 5.1. On pose

$$\mathcal{Y} = \left\{ \gamma \in \mathbb{R} \mid L(\frac{1}{2} + i\gamma, \chi) = 0 \right\}, \quad \mathcal{Y}^+ = \mathcal{Y} \cap \mathbb{R}_+^\times.$$

La remarque 3.3 implique que $F \in E^1(X)$ appartient à $T(\chi)$ si et seulement si

$$F(g) = \sum_{\gamma \in \mathcal{Y}} a_\gamma(F)\, \mathbf{E}(g, \tfrac{1}{2} + i\gamma) \quad (n \geq 3), \tag{5.5}$$

$$F(g) = a_0(F)\, \mathbf{E}(g, \tfrac{1}{2}) + 2 \sum_{\gamma \in \mathcal{Y}^+} a_\gamma(F)\, \mathbf{E}(g, \tfrac{1}{2} + i\gamma) \quad (n = 2). \tag{5.6}$$

avec $a_0(F) \neq 0$ si et seulement si $L(\frac{1}{2}, \chi) = 0$.

Si F est donnée par (5.1), resp. (5.3), la proposition 2.6 implique :

$$4DF(g) = \sum_t a_t(F)\, (1 + 4\, t^2)\, \mathbf{E}(g, \tfrac{1}{2} + it) \quad (n \geq 3), \tag{5.7}$$

$$4DF(g) = a_0(F)\, \mathbf{E}(g, \tfrac{1}{2}) + 2 \sum_{t>0} a_t(F)\, (1 + 4\, t^2)\, \mathbf{E}(g, \tfrac{1}{2} + it) \quad (n = 2). \tag{5.8}$$

On déduit des expressions (5.2) et (5.4) du produit scalaire de $E^1(X)$ que l'opérateur différentiel D définit un opérateur symétrique sur $E^1(X)$:

$$(DF, F')_2 = (F, DF')_2 \quad (F, F' \in E^1(X)).$$

On note $V(D_E)$ le complété de $E^1(X)$ pour la norme $||DF||_2$. Cet espace s'identifie au sous-espace des $F \in B^2(X)$ tels que

$$||4DF||_2^2 = \sum_t |a_t(F)|^2 \, (1 + 4\, t^2)^2 < +\infty \quad (n \geq 3),$$

$$||4DF||_2^2 = |a_0(F)|^2 + 2 \sum_{t>0} |a_t(F)|^2 \, (1 + 4\, t^2)^2 < +\infty \quad (n = 2).$$

l'opérateur défini par (5.7) ou (5.8) et de domaine $V(D_E)$ est un opérateur auto-adjoint de $B^2(X)$. Il en va de même pour D_χ, encore donné par (5.8) sur $V(D_\chi)$. Toute fonction $F \in E^1(X) \cap T(\chi)$ s'écrit sous la forme (5.5), resp. (5.6) ; pour ces fonctions, et si $z \neq \frac{1}{4} + \gamma^2$, on a respectivement

$$(D_\chi - z)^{-1} F(g) = \sum_{\gamma \in \mathcal{Y}} \frac{a_\gamma(F)}{\frac{1}{4} + \gamma^2 - z} \, \mathbf{E}(g, \tfrac{1}{2} + i\gamma),$$

$$(D_\chi - z)^{-1} F(g) = \frac{a_0(F)}{\frac{1}{4} - z} \, \mathbf{E}(g, \tfrac{1}{2}) + 2 \sum_{\gamma \in \mathcal{Y}^+} \frac{a_\gamma(F)}{\frac{1}{4} + \gamma^2 - z} \, \mathbf{E}(g, \tfrac{1}{2} + i\gamma).$$

On vérifie que cette résolvante se prolonge à $T^2(X)$. Si $n = 2$, la symétrie $\gamma \mapsto -\gamma$ est une permutation des zéros de $L(\frac{1}{2} + it, \chi)$; on a donc

$$\operatorname{Spec} D_\chi = \left\{ \lambda = \frac{1}{4} + \gamma^2 \ \mid \ \gamma \in \mathcal{Y} \right\},$$

ce qui termine la démonstration de la première partie du théorème. Supposons $n \geq 3$. Pour voir que toute valeur propre $\lambda \neq 1/4$ est double, on remarque que l'expression du terme constant de $\mathbf{E}(g, s)$ implique

$$\mathbf{E}^0(p, \tfrac{1}{2} + it) \sim \delta_P(p)^{\frac{1}{2} + it}$$

Supposons que la série d'Eisenstein et sa conjuguée soient dépendantes :

$$\mathbf{E}(g, \tfrac{1}{2} - it) = \lambda \, \mathbf{E}(g, \tfrac{1}{2} + it), \quad \lambda \in \mathbb{C}.$$

Ceci implique $\delta_P(p)^{-it} = \lambda \, \delta_P(p)^{it}$, et donc $t = 0$. Dans ce cas on a

$$\mathbf{E}(g, \tfrac{1}{2}) = \mathbf{E}({}^t g^{-1}, \tfrac{1}{2}).$$

et la valeur propre $\lambda = 1/4$ est simple si elle est présente. $\square$

Trace de la représentation régulière.

On note $\mathfrak{A}(G)$ l'algèbre auto-adjointe des fonctions continues à support compact sur $Z(\mathbb{A}) \backslash G(\mathbb{A})$ bi-invariantes sous $\mathbf{K}$. On fait opérer $\mathfrak{A}(G)$ sur l'espace des fonctions continues sur $Z(\mathbb{A}) \backslash G(\mathbb{A}) / \mathbf{K}$ par la représentation régulière droite

$$R(u) F(x) = \int_{Z(\mathbb{A}) \backslash G(\mathbb{A})} F(xy) \, u(y) \, dy.$$

Si $u \in \mathfrak{A}(G)$, on a

$$R(u) \delta_P^s = \widetilde{u}(s) \, \delta_P^s, \tag{5.9}$$

où on a introduit la fonction entière

$$\widetilde{u}(s) = \int_{Z(\mathbb{A}) \backslash G(\mathbb{A})} \delta_P(x)^s \, u(x) \, dx.$$

On déduit de (5.9) que

$$R(u) \mathbf{E}(g, s) = \widetilde{u}(s) \mathbf{E}(g, s). \tag{5.10}$$

Si $n = 2$, il s'ensuit

$$\begin{aligned}\widetilde{u}(s)\,\mathbf{E}(g,s) &= R(u)\mathbf{E}(g,s) = c(s)\,R(u)\mathbf{E}(g,1-s)\\ &= c(s)\,\widetilde{u}(1-s)\,\mathbf{E}(g,1-s) = \widetilde{u}(1-s)\,\mathbf{E}(g,s)\end{aligned}$$

Puisque les fonctions $g \mapsto \mathbf{E}(g,s)$ ne sont pas identiquement nulles, comme on le voit en observant $\mathbf{E}^0(g,s)$, il vient

$$\widetilde{u}(1-s) = \widetilde{u}(s).$$

5.3. **Corollaire** (Formule de trace)**.** *L'espace $T^2(X)$ est invariant sous $\mathfrak{A}(G)$. Soit $u \in \mathfrak{A}(G)$. Si $n \geq 3$, on a*

$$\mathrm{Tr}(R(u) \mid T^2(X)) = \sum_{\gamma\in\mathcal{Y}} \widetilde{u}(\tfrac{1}{2}+i\gamma), \tag{5.11}$$

Si $n = 2$, on a

$$\mathrm{Tr}(R(u) \mid T^2(X)) = \varepsilon\,\widetilde{u}(\tfrac{1}{2}) + \sum_{\gamma\in\mathcal{Y}^+} \widetilde{u}(\tfrac{1}{2}+i\gamma), \tag{5.12}$$

avec $\varepsilon = 1$ ou 0 suivant que $L(\frac{1}{2},\chi) = 0$ ou non.

Démonstration. On déduit de (5.10) que l'algèbre $\mathfrak{A}(G)$ opère sur $B^2(X)$. Si $n \geq 3$, les fonctions $\mathbf{E}(g, \frac{1}{2}+i\gamma)$ pour $\gamma \in \mathcal{Y}$ forment une base orthonormale de $T^2(X)$, on en déduit (5.11). Si $n = 2$, les fonctions $\mathbf{E}(g,\frac{1}{2})$ (si $L(\frac{1}{2},\chi) = 0$) et $\sqrt{2}\,\mathbf{E}(g,\frac{1}{2}+i\gamma)$ pour $\gamma \in \mathcal{Y}^+$ forment une base orthonormale de $T^2(X)$, on en déduit (5.12). $\square$

5.4. *Remarque.* Les résultats précédents prennent en compte les zéros des fonctions L avec la même multiplicité. Or ces fonctions ont des racines multiples en général ; toutefois, ce point de vue semble compatible avec les *conjectures de simplicité de Serre* [11, Conj. 8.24.1, p. 324] sur les zéros des fonctions $L(s,\chi)$, lorsque χ est un caractère galoisien. Ce sont les suivantes :
Soit χ un caractère irréductible de $\mathrm{Gal}(\bar{\mathbb{Q}}/\mathbb{Q})$.

(a) *Les zéros non triviaux de $L(s,\chi)$ sont simples.*
(b) *Pour que $L(\frac{1}{2},\chi) = 0$, il faut et il suffit que χ soit réel et que l'équation fonctionnelle de $L(s,\chi)$ comporte un signe moins.*
(c) *Si $\chi \neq \chi'$, les zéros de $L(s,\chi)$ sont distincts des zéros de $L(s,\chi')$ (mis à part éventuellement le point $\frac{1}{2}$).*

Annexe A. L'espace de Connes

Alain Connes a introduit en [8] un espace de distributions qui est le point de départ de la construction de ses espaces de Pólya-Hilbert. Nous allons faire le lien avec les espaces de formes toroïdales. Nous reprenons les calculs de [8, Eq.(14) et (15), p. 83]. On note $P(\mathbb{R}_+^\times)$ l'espace des fonctions continues sur $\mathbb{R}_+^\times$ qui s'écrivent

$$\psi(x) = \int_{\mathbb{R}} x^{it}\,d\widehat{\psi}(t),$$

où $\widehat{\psi}$ appartient à l'espace $\mathcal{E}'(\mathbb{R})$ des distributions à support compact sur $\mathbb{R}$, en notant les distributions comme des mesures ; la distribution $\widehat{\psi}$ est *la transformée de Fourier-Mellin* de ψ. Si ψ et $\widehat{\psi}$ sont des fonctions intégrables, on a

$$\widehat{\psi}(t) = \frac{1}{2\pi}\int_0^\infty x^{-it}\,\psi(x)\,d^\times x,$$

et la formule de Parseval s'écrit

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^\infty \phi(x)\,\psi(x)\,d^\times x = \int_{\mathbb{R}} \widehat{\phi}(-t)\,d\widehat{\psi}(t).$$

Supposons $\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{A}^n)_0$, c'est-à-dire $\varphi(0) = \int \varphi = 0$. La fonction $\theta(\varphi)$ est à décroissance rapide sur $T(\mathbb{A})$ et l'intégrale (1.8) définissant $E(\varphi)(g,s)$ converge pour tout $s \in \mathbb{C}$. Un *train d'ondes d'Eisenstein général* est une fonction définie sur $G(k)\backslash G(\mathbb{A})$ qui s'écrit

$$W(\psi,\varphi)(g) = \int_{\mathbb{R}} E(\varphi)(g, \tfrac{1}{2} + it)\, d\widehat{\psi}(t),$$

où $\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{A}^n)_0$ et où $\psi \in P(\mathbb{R}_+^\times)$. L'équation (2.2) implique

$$W(\psi,\varphi)(g) = n \int_{\mathbb{R}} \mathbf{E}(g, \tfrac{1}{2} + it)\ \Delta_k(\boldsymbol{\phi}_1, n(\tfrac{1}{2} + it))\, d\widehat{\psi}(t),$$

A.1. **Lemme.** *Si $\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{A}^n)_0$, si $\psi \in P(\mathbb{R}_+^\times)$, et si $g \in G(\mathbb{A})$, on a*

$$W(\psi,\varphi)(g) = \int_{Z(k)\backslash Z(\mathbb{A})} \theta(\varphi)(zg)\, \psi(|\det zg|)\, dz.$$

Démonstration. Puisque $\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{A}^n)_0$, le membre de droite est convergent, et on a

$$\begin{aligned} W(\psi,\varphi)(g) &= \int_{\mathbb{R}} E(\varphi)(g, \tfrac{1}{2} + it)\, d\widehat{\psi}(t) \\ &= \int_{Z(k)\backslash Z(\mathbb{A})} \theta(\varphi)(zg)\, dz \int_{\mathbb{R}} |\det zg|^{it}\, d\widehat{\psi}(t) \\ &= \int_{Z(k)\backslash Z(\mathbb{A})} \theta(\varphi)(zg)\, \psi(|\det zg|)\, dz. \end{aligned}$$

□

A.2. **Lemme.** *Si $\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{A}^n)_0$ et si $\psi \in P(\mathbb{R}_+^\times)$, et $\chi \in \mathsf{X}$, on a*

$$\oint W(\psi,\varphi)(h)\, \chi_\pi(h)\, dh = \int_{T(k)\backslash T(\mathbb{A})} \theta(\varphi)(h)\, \psi(|\det h|)\, \chi_\pi(h)\, dh.$$

Démonstration. En vertu de (1.2), on a :

$$\int_{T(k)\backslash T(\mathbb{A})} \theta(\varphi)(h)\, \psi(|\det h|)\, \chi_\pi(h)\, dh$$
$$= \int_{S(k)\backslash S(\mathbb{A})} \int_{Z(k)\backslash Z(\mathbb{A})} \theta(\varphi)(zh)\, \psi(|\det zh|)\, dz\, \chi_\pi(zh)\, dh,$$

et on applique le lemme A.1. □

A.3. **Lemme.** *Si $\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{A}^n)_0$ et si $\psi \in P(\mathbb{R}_+^\times)$, on a*

$$\int_{T(k)\backslash T(\mathbb{A})} \theta(\varphi)(h)\, \psi(|\det h|)\, \chi_\pi(h)\, dh = \int_{\mathbb{R}} \Delta_K(\boldsymbol{\phi}_1, \tfrac{1}{2} + it, \chi)\, d\widehat{\psi}(t).$$

Démonstration. On applique le lemme A.2 et la formule de Hecke (1.11). □

Rappelons que

$$\mathcal{Y} = \left\{ \gamma \in \mathbb{R} \mid L(\tfrac{1}{2} + i\gamma, \chi) = 0 \right\},$$

et notons v_γ l'ordre du zéro de la fonction $L(\frac{1}{2} + it, \chi)$ au point γ. On note $\mathcal{E}'(\mathcal{Y})$ l'espace des distributions à support fini dans $\mathcal{Y}$ de la forme

$$\sum_{\gamma \in \mathcal{Z}} \sum_{j=0}^{v_\gamma - 1} a_{\gamma,j}\, \delta_\gamma^{(j)} \qquad (a_\gamma \in \mathbb{C}).$$

A.4. **Théorème** (Connes). *Soit $\psi \in P(\mathbb{R}_+^\times)$, et posons*

$$\eta(h) = \chi_\pi(h)\,\psi(|\det h|) = \chi_\pi(h) \int_{\mathbb{R}} |\det h|^{it}\, d\widehat{\psi}(t).$$

Les conditions suivantes sont équivalentes :

(a) *Pour toute fonction $\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{A})_0$, on a*

$$\int_{T(k)\backslash T(\mathbb{A})} \theta(\varphi)(h)\,\eta(h)\,dh = 0.$$

(b) *Pour toute fonction $\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{A})_0$, et pour tout $x \in T(\mathbb{A})$, on a*

$$\theta(\varphi) * \eta(x) = \int_{T(k)\backslash T(\mathbb{A})} \theta(\varphi)(x^{-1}h)\,\eta(h)\,dh = 0.$$

(c) *La distribution $\widehat{\psi}$ appartient à $\mathcal{E}'(\mathcal{Y})$.*

Démonstration. Le lemme A.3 et la formule de Weil (1.4) impliquent

$$\int_{T(k)\backslash T(\mathbb{A})} \theta(\varphi)(h)\,\eta(h)\,dh = c_K^{-1} \int_{\mathbb{R}} L(\tfrac{1}{2}+it,\chi)\ \Delta'_K(\boldsymbol{\phi}_1, \tfrac{1}{2}+it,\chi)\,d\widehat{\psi}(t).$$

Si $\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{A})_0$, on a

$$\theta(\varphi) * \eta(x) = \int_{T(k)\backslash T(\mathbb{A})} \theta(\varphi)(x^{-1}h)\,\eta(h)\,dh\,;$$

on en déduit, toujours d'après le lemme A.3 :

$$\theta(\varphi) * \eta(x) = \int_{\mathbb{R}} \Delta_K(\widehat{\varphi}_{x^{-1}}, \tfrac{1}{2}+it,\chi)\,d\widehat{\psi}(t).$$

Mais

$$\Delta_K(\widehat{\varphi}_{x^{-1}}, \tfrac{1}{2}+it,\chi) = \chi_\pi(x)\,|\det x|^{\frac{1}{2}+it}\ \Delta_K(\widehat{\varphi}_1, \tfrac{1}{2}+it,\chi).$$

On a donc

$$\theta(\varphi) * \eta(x) = c_K^{-1}\,\chi_\pi(x)\,|\det x|^{1/2} \int_{\mathbb{R}} |\det x|^{it} L(\tfrac{1}{2}+it,\chi)\ \Delta'_K(\widehat{\varphi}_1, \tfrac{1}{2}+it,\chi)\,d\widehat{\psi}(t).$$

Lorsque φ parcourt $\mathcal{S}(\mathbb{A})_0$, les fonctions $\Delta'_K(\widehat{\varphi}_1, \frac{1}{2}+it,\chi)$ sont denses dans l'espace $C^\infty(\mathbb{R})$: voir [8, Eq. (23), p. 85]. Si on introduit la condition

(d) *La distribution $L(1/2+it,\chi)\,\widehat{\psi}(t)$ est nulle,*

ce qui précède montre que les conditions (a), (b) et (d) sont équivalentes. Enfin, il est bien connu que les conditions (c) et (d) sont équivalentes. □

L'espace que Connes utilise pour construire des espaces de Pólya-Hilbert est l'espace $\mathcal{H}_0$ des fonctions η comme ci-dessus, où $\widehat{\psi}$ appartient à $\mathcal{E}'(\mathcal{Y})$. Le lien que l'on peut faire entre l'espace de Connes et les formes toroïdales est le suivant. Le lemme A.2 et le théorème A.4 entraînent :

A.5. **Corollaire.** *Soit $\psi \in P(\mathbb{R}_+^\times)$. Les conditions suivantes sont équivalentes :*

(a) *Quelle que soit $\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{A}^n)_0$, le train d'ondes $W(\psi,\varphi)$ est toroïdal en χ.*

(b) *La distribution $\widehat{\psi}$ appartient à $\mathcal{E}'(\mathcal{Y})$.* □

Annexe B. Séries orbitales et formes toroïdales

Paraboliques maximaux.

Avec les définitions de la section 1, on a un diagramme

$$\begin{array}{ccc} \mathbf{V} & \xrightarrow{\iota} & \mathcal{T}_{K/k} \\ {\scriptstyle j}\uparrow & & \downarrow \\ \mathbf{A}_k^n & \xrightarrow{\iota} & \mathcal{A}_{K/k} \end{array}$$

o ù $\mathbf{V}$ est un ouvert de Zariski de $\mathbf{A}_k^n$.

On pose ici

$$P = P_0 = \left\{ \begin{bmatrix} t & 0 \\ u & g' \end{bmatrix} \right\}, \quad L = L_0 = \left\{ \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ u & g' \end{bmatrix} \right\},$$

et si $p \in P$ est écrit comme indiqué, on a ${}^t p.e_1 = te_1$. Introduisons le morphisme

$$s : G \longrightarrow \mathbf{A}^n \setminus \{0\}, \quad s(g) = {}^t g^{-1}.e_1.$$

Soit G' l'image du morphisme $T \times L \longrightarrow G$. Le diagramme

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{T}_{K/k} & \xrightarrow{\pi} & G \\ {\scriptstyle \iota}\uparrow & & \downarrow{\scriptstyle s} \\ \mathbf{V} & \xrightarrow{\mathrm{id}} & \mathbf{A}^n \setminus \{0\} = G/L \end{array}$$

montre d'une part que la restriction de s à T est injective, donc $T \cap L = \{1\}$, et d'autre part que $s(T) = \mathbf{V}$, d'où on tire que $s^{-1}(\mathbf{V}) = G'$ est un ouvert de Zariski de G.

Soient ξ un élément primitif de K et $\gamma = \pi(\xi)$. Le morphisme $x \mapsto x^{-1}\gamma x$ de G dans G se factorise en

$$G \xrightarrow{\dot{x}} T\backslash G \xrightarrow{f^\gamma} G$$

où $x \mapsto \dot{x}$ est l'application canonique de G sur $T\backslash G$, et où $f^\gamma(\dot{x}) = \dot{x}^{-1}\gamma\dot{x}$.

B.1. **Lemme.** *Pour toute place v, l'application injective*

$$f^\gamma : T(k_v)\backslash G(k_v) \longrightarrow G(k_v)$$

est propre. Si v est non-archimédienne, on a $(f^\gamma)^{-1}(U_v) \subset \dot{U}_v$ pour toute place v et $(f^\gamma)^{-1}(U_v) = \dot{U}_v$ pour presque toute place v.

Démonstration. D'après le *théorème de compacité de Harish-Chandra*, si ω est une partie compacte de $G(k_v)$, il existe une partie compacte Ω de $T(k_v)\backslash G(k_v)$ telle que

$$x^{-1}\gamma x \in \omega \Longrightarrow \dot{x} \in \Omega.$$

Voir [21, Thm. 8.1.4.1, p. 75] si v est réelle ou complexe et [12, Lem. 19, p. 52] si v est non-archimédienne. Cela signifie que f^γ est propre.

Supposons maintenant v non-archimédienne.

Affirmer que $(f^\gamma)^{-1}(U_v) \subset \dot{U}_v$ revient à dire que si $x \in G(k_v)$ et si $x^{-1}\gamma x \in U_v$, alors $x \in T(k_v).U_v$.

Soit $x \in G(k_v)$. Si $x^{-1}\gamma x \in U_v$, alors $x^{-1}\pi(K)x \subset \mathbf{M}(n, \mathfrak{o}_v)$ car $\pi(K) = k[\gamma]$.

Soit $x = hm \in G'(k_v)$ avec $h \in T(k_v)$ et $m \in L(k_v)$. Soit $u \in \mathfrak{o}^n$, posons $\eta = \iota(u) \in \mathfrak{O}$ et $\kappa = x^{-1}\pi(\eta)x = m^{-1}\pi(\eta)m \in \mathbf{M}(n, \mathfrak{o}_v)$. On a

$${}^t\kappa.e_1 = {}^t m.{}^t\pi(\eta).{}^t m^{-1}.e_1 = {}^t m.{}^t\pi(\eta).e_1 = {}^t m.u,$$

ce qui implique que ${}^t m.u \in \mathfrak{o}^n$ si $u \in \mathfrak{o}^n$, autrement dit $m \in U_v$ et $\dot{x} \in \dot{U}_v$. On a démontré que

$$[(f^\gamma)^{-1}(U_v)] \cap [T(k_v)\backslash G'(k_v)] \subset \dot{U}_v,$$

d'où la première assertion, car $T(k_v)\backslash G'(k_v)$ est dense dans $T(k_v)\backslash G(k_v)$, et ensuite $(f^\gamma)^{-1}(U_v)$ et $\dot{U}_v$ sont compacts. D'autre part $\gamma \in U_v$ et donc $f^\gamma(\dot{U}_v) \subset U_v$ pour presque toute place v. Puisque f^γ est injective, ceci implique $\dot{U}_v \subset (f^\gamma)^{-1}(U_v)$. □

Intégrales orbitales.

Dans ce qui suit, la lettre H désigne le centre Z ou le sous-groupe T de G. Ainsi $H_{\mathbb{A}}\backslash G_{\mathbb{A}} = (H\backslash G)(\mathbb{A})$, et $\operatorname{vol} \dot{U}_v = 1$ pour presque toute place v. On note $C_c^\infty(H_{\mathbb{A}}\backslash G_{\mathbb{A}})$ l'espace des combinaisons linéaires de l'ensemble $B(H_{\mathbb{A}}\backslash G_{\mathbb{A}})$ des fonctions u sur $H_{\mathbb{A}}\backslash G_{\mathbb{A}}$ de la forme

$$u(x) = \prod_v u_v(x_v)$$

où les fonctions u_v sont invariantes à gauche par $H(k_v)$ et satisfont les conditions suivantes.

(a) Si v est archimédienne, la fonction u_v est indéfiniment différentiable sur $G(k_v)$ et à support compact modulo $H(k_v)$.

(b) Si v est non-archimédienne, la fonction u_v est localement constante sur $G(k_v)$ et à support compact modulo $H(k_v)$.

(c) pour presque toute place non-archimédienne v, la fonction u_v est la fonction caractéristique de $H(k_v)U_v$.

B.2. **Proposition.** *Si $u \in C_c^\infty(Z_{\mathbb{A}}\backslash G_{\mathbb{A}})$, alors $u^\gamma = u \circ f^\gamma \in C_c^\infty(T_{\mathbb{A}}\backslash G_{\mathbb{A}})$.*

Démonstration. On a

$$u(x^{-1}\gamma x) = u \circ f^\gamma(\dot{x}) = u^\gamma(\dot{x}).$$

On peut supposer $u \in B(Z_{\mathbb{A}}\backslash G_{\mathbb{A}})$, de telle sorte que

$$u^\gamma(\dot{x}) = \prod_v u_v^\gamma(\dot{x}_v), \quad \text{où } u_v^\gamma = u_v \circ f^\gamma.$$

Puisque $\operatorname{Supp} u_v^\gamma \subset \overline{f^{-1}(\operatorname{Supp} u_v)}$, les propriétés (a), (b), et (c) pour u^γ résultent du lemme B.1. □

Séries orbitales.

Soient K une extension de degré n de k. On note π la représentation algébrique régulière définie par une base fondamentale de K, et T le tore représentant les éléments inversibles de K. Soit ξ un élément primitif de K, et $\gamma = \pi(\xi)$, de telle sorte que $T(k') = k'[\gamma]^\times$ pour toute k-algèbre k'. Le centralisateur de γ est égal à $\mathcal{Z}(T) = T$ [5, p. 175], et l'application $x \mapsto x^{-1}\gamma x$ induit un isomorphisme

$$T_k\backslash G_k \xrightarrow{\sim} \mathfrak{c}(\gamma),$$

où $\mathfrak{c}(\gamma)$ est la *classe de conjugaison* de γ. On note $\mathfrak{C}_K$ l'ensemble des classes de conjugaison des éléments γ comme ci-dessus.

Si $\mathfrak{c} \in \mathfrak{C}_K$, la *série orbitale* de $u \in C_c^\infty(Z_{\mathbb{A}}\backslash G_{\mathbb{A}})$ est :

$$u_{\mathfrak{c}}(x) = \sum_{\eta \in \mathfrak{c}} u(x^{-1}\eta x) = \sum_{\eta \in T_k\backslash G_k} u(x^{-1}\eta^{-1}\gamma\eta x) \quad (\gamma \in \mathfrak{c}).$$

Pour x variant dans un compact fixe, cette somme est finie. Si $\beta \in G_k$, on a

$$u_{\mathfrak{c}}(\beta x) = \sum_{\eta \in \mathfrak{c}} u(x^{-1}\beta^{-1}\eta\beta x) = \sum_{\eta \in \beta^{-1}\mathfrak{c}\beta} u(x^{-1}\eta x) = u_{\mathfrak{c}}(x).$$

B.3. **Proposition.** *Supposons $k = \mathbb{Q}$ et $n = 2$. Si γ est $\mathbb{Q}$-elliptique, et lorsque $u \in C_c(Z_{\mathbb{A}}\backslash G_{\mathbb{A}})$, la fonction $u_{\mathfrak{c}}$ est à support compact sur $G_{\mathbb{Q}}Z_{\mathbb{A}}\backslash G_{\mathbb{A}}$.*

Démonstration. Posons

$$A = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & y \end{pmatrix} \right\} , \quad N = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ * & 1 \end{pmatrix} \right\} .$$

Pour $a \in A$, on pose $H(a) = y$. Pour $t > 0$, on pose

$$A(t) = \{a \in A(\mathbb{R}) \mid H(a) \geq t, \quad y > 0\} .$$

D'après la théorie de la réduction, on sait qu'il existe un compact $\omega_0 \subset N_{\mathbb{A}}$ et un nombre $t_0 > 0$ tels que si $t \leq t_0$, on ait

$$G_{\mathbb{A}} = Z_{\mathbb{A}} G_{\mathbb{Q}} \, \mathfrak{S}(t), \quad \text{où } \mathfrak{S}(t) = \omega_0 A(t)\mathbf{K}.$$

Soit Ω une partie de $G_{\mathbb{A}}$ qui est compacte modulo $Z_{\mathbb{A}}$. Il existe un nombre $t_\omega \geq 1$ avec la propriété suivante : si $x \in \mathfrak{S}(t_\omega)$, si $\gamma \in G_{\mathbb{Q}}$ et si $x^{-1}\gamma x \in \omega$, alors $\gamma \in P_{\mathbb{Q}}$ [1, p. 362]. Soit $x \in \mathfrak{S}(t)$ et posons $\omega = \operatorname{Supp} u$. Puisque γ est elliptique, aucun élément $\eta \in \mathfrak{c}$ n'appartient à $P_{\mathbb{Q}}$. Si $x^{-1}\eta x \in \omega$, ce qui précède implique que $x = na\kappa$, avec $t \leq H(a) \leq t_\omega$, qui est un compact de $\mathfrak{S}(t)$. □

Rappelons que

$$\Pi_1(F)(x) = \int_{T_k Z_{\mathbb{A}} \backslash T_{\mathbb{A}}} F(hx) \, dh \, dx.$$

B.4. **Théorème.** *Soit $\mathfrak{c} \in \mathfrak{C}_K$. Si $F \in C(G_k Z_{\mathbb{A}} \backslash G_{\mathbb{A}})$, et si $u \in C_c^\infty(Z_{\mathbb{A}} \backslash G_{\mathbb{A}})$, l'intégrale*

$$J_{\mathfrak{c}}(u, F) = \int_{G_k Z_{\mathbb{A}} \backslash G_{\mathbb{A}}} u_{\mathfrak{c}}(x) \, F(x) \, dx$$

converge absolument et on a

$$J_{\mathfrak{c}}(u, F) = \int_{T_{\mathbb{A}} \backslash G_{\mathbb{A}}} u(x^{-1}\gamma x) \, \Pi_1(F)(x) \, dx$$

quel que soit $\gamma \in \mathfrak{c}$.

Démonstration. On a

$$\begin{aligned} J_{\mathfrak{c}}(u, F) &= \int_{G_k Z_{\mathbb{A}} \backslash G_{\mathbb{A}}} \sum_{\eta \in T_k \backslash G_k} u(x^{-1}\eta^{-1}\gamma\eta x) \, F(x) \, dx \\ &= \int_{T_k Z_{\mathbb{A}} \backslash G_{\mathbb{A}}} u(x^{-1}\gamma x) \, F(x) \, dx \\ &= \int_{T_{\mathbb{A}} \backslash G_{\mathbb{A}}} \int_{T_k Z_{\mathbb{A}} \backslash T_{\mathbb{A}}} u(x^{-1}\gamma x) \, F(hx) \, dh \, dx. \end{aligned}$$

Mais la fonction $x \mapsto u(x^{-1}\gamma x)$ est invariante à gauche sous $T_{\mathbb{A}}$, donc

$$J_{\mathfrak{c}}(u, F) = \int_{T_{\mathbb{A}} \backslash G_{\mathbb{A}}} u(x^{-1}\gamma x) \int_{T_k Z_{\mathbb{A}} \backslash T_{\mathbb{A}}} F(hx) \, dh \, dx,$$

d'où le résultat, l'intégrale convergeant grâce à la proposition B.2. □

B.5. **Corollaire.** *Pour que $F \in C(X)$ soit toroïdale pour le caractère principal, il faut et il suffit que l'on ait*

$$J_{\mathfrak{c}}(u, F) = \int_{G_k Z_{\mathbb{A}} \backslash G_{\mathbb{A}}} u_{\mathfrak{c}}(x) \, F(x) \, dx = 0 \quad \textit{pour tout } u \in \mathfrak{A}(G).$$

pour tout $u \in \mathfrak{A}(G)$ et pour toute $\mathfrak{c} \in \mathfrak{C}_K$. Autrement dit, si on note $U_{\mathfrak{c}}(X)$ l'espace des fonctions

$$u_{\mathfrak{c}}(x) = \sum_{\eta \in \mathfrak{c}} u(x^{-1}\eta x),$$

où u parcourt $C_c^\infty(Z_{\mathbb{A}} \backslash G_{\mathbb{A}}/\mathbf{K})$, on a $C(X) \cap T(X) = C(X) \cap U_{\mathfrak{c}}(X)^\perp$, la dualité étant celle de $L^2(G_{\mathbb{A}})$.

Démonstration. Si F est toroïdale pour le caractère principal, le théorème B.4 implique $J_{\mathfrak{c}}(u,F)=0$. Réciproquement, si $J_{\mathfrak{c}}(u,F)=0$ pour tout $u\in C_c(Z_{\mathbb{A}}\backslash G_{\mathbb{A}})$, on voit que $\Pi_1(F)=0$ en prenant pour u la mesure de Dirac de γ (sic), de telle sorte que $u(x^{-1}\gamma x)$ est la mesure de Dirac de la classe $T_{\mathbb{A}}$ dans $T_{\mathbb{A}}\backslash G_{\mathbb{A}}$. □

Remarque. Ce corollaire s'applique aux trains d'ondes d'Eisenstein : on a

$$E^1(X)\cap T(X)=E^1(X)\cap U_{\mathfrak{c}}(X)^{\perp}$$

pour toute classe de conjugaison comme ci-dessus.

B.6. **Corollaire.** *Si $\varphi\in\mathcal{S}(\mathbb{A}^n)$, posons*

$$J_{\mathfrak{c}}(\varphi)(u,s)=\int_{G_kZ_{\mathbb{A}}\backslash G_{\mathbb{A}}}u_{\mathfrak{c}}(x)\,E(\varphi)(x,s)\,dx.$$

Alors la fonction $\zeta_K(s)$ divise $J_{\mathfrak{c}}(\varphi)(u,s)$: on a

$$J_{\mathfrak{c}}(\varphi)(u,s)=\zeta_K(s)\int_{T_{\mathbb{A}}\backslash G_{\mathbb{A}}}u(x^{-1}\gamma x)\,|\det x|^s\,\Delta'_K(\Phi_x,s)\,dx,$$

où $\Phi_x(\xi)=\varphi({}^tx{}^t\pi(\xi).e_1)\in\mathcal{S}(\mathbb{A}_K)$. Si $\mathrm{Re}(s)>1$, on a

$$J_{\mathfrak{c}}(\varphi)(u,s)=\int_{G_{\mathbb{A}}}u(x^{-1}\gamma x)\,\varphi({}^tx.e_1)\,|\det x|^s\,dx.$$

Démonstration. Posons $F(x)=E(\varphi)(x,s)$. La formule de Hecke implique

$$\int_{T_kZ_{\mathbb{A}}\backslash T_{\mathbb{A}}}E(\varphi)(hx,s)\,dh=\zeta_K(s)\,|\det x|^s\,\Delta'_K(\Phi_x,s)\,;$$

on applique le théorème B.4. D'autre part, si $\mathrm{Re}(s)>1$, on a

$$E(\varphi)(g,s)=\sum_{\gamma\in P_k\backslash G(k)}M(\varphi)(\gamma x,s).$$

Par conséquent

$$J_{\mathfrak{c}}(\varphi)(u,s)=\int_{P_kZ_{\mathbb{A}}\backslash G_{\mathbb{A}}}u_{\mathfrak{c}}(x)\,M(\varphi)(x,s)\,dx.$$

Mais $L_k=Z_k\backslash P_k$ est un système de représentants de $T_k\backslash G_k$, et on a donc

$$u_{\mathfrak{c}}(x)=\sum_{\eta\in Z_k\backslash P_k}u(x^{-1}\eta^{-1}\gamma\eta x).$$

Puisque $Z_k=P_k\cap Z_{\mathbb{A}}$, on a $(Z_k\backslash P_k)\backslash(Z_{\mathbb{A}}\backslash G_{\mathbb{A}})=P_kZ_{\mathbb{A}}\backslash G_{\mathbb{A}}$, et donc

$$J_{\mathfrak{c}}(\varphi)(u,s)=\int_{Z_{\mathbb{A}}\backslash G_{\mathbb{A}}}u(x^{-1}\gamma x)\,M(\varphi)(x,s)\,dx.$$

Mais

$$M(\varphi)(x,s)=\int_{Z_{\mathbb{A}}}\varphi(z.{}^tx.e_1)\,|\det zx|^sdz$$

d'où le résultat. □

La *transformée d'Eisenstein* de $f\in C(X)$ est

$$\widetilde{f}(s)=\int_{G_kZ_{\mathbb{A}}\backslash G_{\mathbb{A}}}f(x)\,\mathbf{E}(x,s)\,dx,$$

lorsque l'intégrale converge absolument.

B.7. **Corollaire.** *Soit $u \in \mathfrak{A}(G)$. La fonction $\widetilde{u}_{\mathfrak{c}}(s)$ est méromorphe, et $\zeta_K(s)$ divise $\widetilde{u}_{\mathfrak{c}}(s)$: si s n'est pas un pôle de $\mathbf{E}(x,s)$, alors*

$$\widetilde{u}_{\mathfrak{c}}(s) = \zeta_K(s) \int_{T_{\mathbb{A}}\backslash G_{\mathbb{A}}} u(x^{-1}\gamma x)\, H(x,s,1)\, dx.$$

De plus

$$\widetilde{u}_{\mathfrak{c}}(s) = \int_{Z_{\mathbb{A}}\backslash G_{\mathbb{A}}} u(x^{-1}\gamma x)\, \delta_P(x)^s\, dx.$$

Démonstration. On peut déduire ce corollaire du corollaire B.6 ; voici une démonstration directe. La première formule vient du théorème B.4 et de la relation

$$\int_{T_k Z_{\mathbb{A}}\backslash T_{\mathbb{A}}} \mathbf{E}(hx,s)\, dh = \zeta_K(s)\, H(x,s,1).$$

D'autre part, si $\mathrm{Re}(s) > 1$, on a

$$\mathbf{E}(x,s) = \sum_{\gamma \in P_k\backslash G(k)} \delta_P(\gamma x)^s.$$

Par conséquent

$$\widetilde{u}_{\mathfrak{c}}(s) = \int_{P_k Z_{\mathbb{A}}\backslash G_{\mathbb{A}}} u_{\mathfrak{c}}(x)\, \delta_P(x)^s\, dx.$$

Mais $Z_k\backslash P_k$ est un système de représentants de $T_k\backslash G_k$, et on a donc

$$u_{\mathfrak{c}}(x) = \sum_{\eta \in Z_k\backslash P_k} u(x^{-1}\eta^{-1}\gamma\eta x),$$

d'où la deuxième formule, d'abord pour $\mathrm{Re}(s) > 1$ et par prolongement analytique en général. □

Références

[1] Arthur, James. *The Selberg trace formula for groups of F-rank one.* Ann. of Math. 100 (1974), 326–385.

[2] Arthur, J., *Eisenstein Series and the Trace Formula.* Proc. Symp. Pure Math. **33** (1979), 253–274.

[3] Arthur, J., *A Trace Formula for Reductive groups II : Applications of a Truncation Operator.* Compositio Math. **40** (1980), 87-121.

[4] Arthur, J., *On the inner product of truncated Eisenstein series.* Duke Math. J. **49** (1982), 35-70.

[5] Borel, A., *Linear Algebraic Groups*, 2nd ed., Graduate Texts in Math. vol. 126, Springer, Berlin 1991.

[6] Connes, A., *Formule de Trace en géométrie non-commutative et hypothèse de Riemann.* C.R. Acad. Sci. Paris, Sér. I, **323** (1996), 1231-1236.

[7] Connes, A., *Noncommutative geometry and the Riemann zeta function.* Mathematics : frontiers and perspectives, 35–54, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 2000.

[8] Connes, A., *Trace formula in noncommutative geometry and the zeros of the Riemann zeta function.* Sel. Math., New Ser. **5**. No 1 (1999), 29-106.

[9] Godement, R., *Analyse spectrale des fonctions modulaires.* Sém. Bourbaki, Vol. 9, Exp. No 278, 15–40, Soc. Math. France, Paris, 1995.

[10] Godement, R., *The decomposition of $L^2(G/\Gamma)$ for $\Gamma = \mathrm{SL}(2,\mathbb{Z})$.* Proc. Symp. Pure Math. **9** (1966), 211–224.

[11] Goss, D., *Basic Structures of Function Field Arithmetic.* Erg. der Math. und ihrer Grenz., 3.Folge, Vol. 35, Springer, 1996.

[12] Harish-Chandra. Harmonic analysis on reductive p-adic groups. Notes by G. van Dijk. Lecture Notes in Mathematics, Vol. 162. Springer-Verlag, Berlin-New York, 1970

[13] Helgason, Sigurdur. Groups and geometric analysis. Integral geometry, invariant differential operators, and spherical functions. Pure and Applied Mathematics, 113. Academic Press, Orlando, 1984 ; = Mathematical Surveys and Monographs, 83. American Mathematical Society, Providence, 2000.

[14] Knapp, A.W., *Theoretical aspects of the Trace formula for* GL(2). Proc. Symp. Pure Math. **61** (1997), 355-405.

[15] Lachaud, Gilles. *Zéros des fonctions L et formes toriques*. C. R. Math. Acad. Sci. Paris **335** (2002), no. 3, 219–222.

[16] Lachaud, Gilles. *Spectral analysis and the Riemann hypothesis*. Proceedings of the International Conference on Special Functions and their Applications (Chennai, 2002). J. Comput. Appl. Math. **160** (2003), no. 1-2, 175–190.

[17] Selberg, A., *Harmonic analysis and discontinuous groups in weakly symmetric riemannian spaces with applications to Dirichlet Series*. J. Indian Math. Soc., **20** (1956), 47–87 ; = Collected Papers, nr. 27, 423–463.

[18] Soulé, C., *Sur les zéros des fonctions L automorphes*. C. R. Acad. Sci. Paris, Sér. I, **328** (1999), 955–958.

[19] Siegel, C.L., *Advanced analytic number theory*. Studies in Mathematics, Nr. 9. Tata Institute of Fundamental Research, Bombay, 1980.

[20] Terras, A., *Harmonic analysis on symmetric spaces I & II*. Springer-Verlag, New-York, 1985 & 1988.

[21] Warner, Garth. Harmonic analysis on semi-simple Lie groups. II. Die Grundlehren der mathematischen Wissenschaften, Band 189. Springer-Verlag, New York-Heidelberg, 1972

[22] Weil, A., *Basic Number Theory*. Grund. math. Wiss. Einzel., Band 144, Springer, Berlin, 1967.

[23] Wielonsky, F., *Intégrales toroïdales des séries d'Eisenstein et fonctions zêta*. C. R. Acad. Sci. Paris, Sér. I, **299** (1984), 727–730.

[24] Wielonsky, F., *Séries d'Eisenstein, intégrales toroïdales et une formule de Hecke*. Enseign. Math. (2) **31** (1985), 93–135.

[25] Zagier, D., *Eisenstein Series and the Riemann zeta function*. In "Automorphic Forms, representation theory and arithmetic" (Bombay, 1979), 275–301, Tata Inst. Fund. Res. Studies in Math., **10**, T.I.F.R., Bombay, 1981.

Institut de Mathématiques de Luminy
CNRS
Luminy Case 907, 13288 Marseille Cedex 9 - FRANCE
E-mail address: lachaud@univmed.fr