

Du problème du toboggan d'Abel au problème inverse semi-classique

Yves Colin de Verdière* & Jean-Paul Truc†

Résumé

Cet article traite d'un résultat démontré par Niels Henrik Abel, à propos d'un problème de mécanique : la reconstruction de la forme d'un toboggan à partir de la fonction donnant le temps d'arrivée en fonction de la hauteur du lâcher initial. Ce résultat a été publié pour la première fois en allemand dans le Journal de Crellé [1], puis traduit en français en 1881 dans le premier volume des oeuvres complètes de Niels Abel [2].

Nous en donnons la démonstration basée sur la Transformée d'Abel, en étendant le résultat d'Abel au cas de toboggans non monotones, puis nous examinons quelques problèmes connexes classiques comme les courbes tautochrones et les périodes des oscillations des pendules. Enfin, nous montrons en quoi ces méthodes sont utiles et actuelles en donnant une application à la sismologie et en terminant par la résolution d'un problème inverse de mécanique semi-classique.

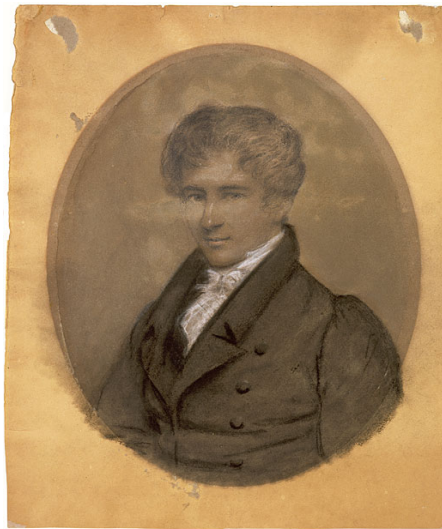


Figure 1: portrait de Niels Henrik Abel par Johan Gørbitz (1826).

©Département de Mathématiques, Université d'Oslo.

*Institut Fourier (Université de Grenoble 1) BP74, 38402-Saint Martin d'Hères Cedex ; yves.colin-de-verdiere@ujf-grenoble.fr

†Ecole des Pupilles de l'Air, 38330-Montbonnot ; jean-paul.truc@prepas.org

1 Le problème du toboggan

Commençons par décrire le problème mécanique d'Abel [1].

Soit $f : [-a, 0]_x \rightarrow \mathbb{R}_z$ une fonction de classe C^1 . On suppose $f(-a) = E_0 > 0$, $f(0) = 0$ et $f'(x) < 0$ pour $-a \leq x \leq 0$. On considère un point pesant de masse m qui se déplace sans frottement sur le graphe de f dans un champ de pesanteur vertical avec $g = 1$ comme sur la figure 2.

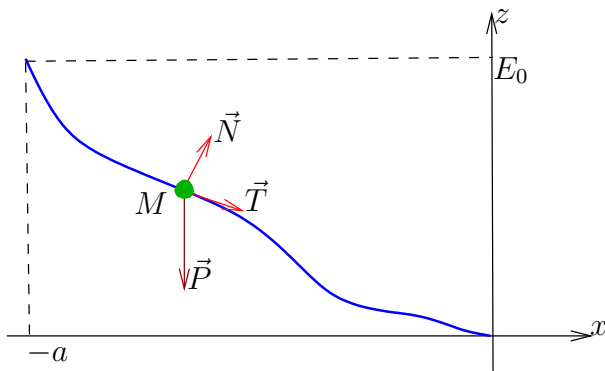


Figure 2: point matériel sur un toboggan

Pour chaque valeur $z_0 \in [0, E_0]$ de z , on considère les conditions initiales : $z(t = 0) = z_0$, $\dot{z}(t = 0) = 0$, ce qui signifie que le point M est placé à l'instant $t = 0$ sur le toboggan au point d'altitude z_0 et lâché sans vitesse initiale. On note par $\tau(z_0)$ la valeur de $t \geq 0$ telle que

$$x(\tau(z_0)) = 0 \quad \text{et} \quad z(\tau(z_0)) = 0. \quad (1)$$

$\tau(z_0)$ est donc le temps de descente du point M de sa position initiale jusqu'au bas du toboggan. La question d'Abel est la suivante :

Est ce que la seule connaissance de la fonction temps d'arrivée $z \rightarrow \tau(z)$ permet de reconstituer le toboggan, i.e. la fonction $f(x)$?

La réponse est OUI ; de plus, on dispose de formules explicites pour effectuer cette reconstruction. Commençons par rattacher le problème du toboggan à une classe de problèmes plus générale.

Nous repérons la position du point M sur la courbe par son abscisse curviligne s calculée à partir du point de départ (la fonction f est momentanément supposée C^2). Nous utilisons le repère de Frenet (\vec{T}, \vec{N}) dans lequel nous projetons la relation fondamentale de la dynamique selon le vecteur \vec{T} . Nous noterons

$\alpha = \widehat{(\vec{i}, \vec{T})}$ l'angle du vecteur tangent \vec{T} avec l'horizontale (sur la figure 2 par exemple $-\frac{\pi}{2} < \alpha < 0$ et $\sin \alpha < 0$). On aura donc en ce qui concerne l'accélération tangentielle : $m\gamma_T = m\ddot{s} = -mg \sin \alpha$ ou encore, en prenant $g = 1$:

$$\ddot{s} = -\sin \alpha \quad (2)$$

Remarque 1.1 L'accélération normale est donnée, en appelant R le rayon courbure, par $\gamma_N = \dot{s}^2/R$ (rappelons nous que dans le plan, le rayon de courbure est algébrique ; sur la figure 2 par exemple, $R > 0$ sur les parties convexes et $R < 0$ sur les parties concaves du toboggan). La réaction unilatérale du support est normale

en l'absence de frottement et s'écrit $R_e \vec{N}$. En projetant sur la normale on obtient

$$R_e = \frac{m\dot{s}^2}{R} + mg \cos \alpha .$$

La conservation de l'énergie nous donne :

$$\frac{m\dot{s}^2}{2} = mg(z_0 - z)$$

En annulant R_e , on voit apparaître une condition nécessaire pour que le point matériel quitte le toboggan au point d'altitude z si la contrainte est unilatérale :

$$\cos \alpha = 2(z - z_0)/R .$$

Cette condition porte essentiellement sur la géométrie du toboggan (une condition supplémentaire du premier ordre est à rajouter pour que le décollage ait lieu effectivement).

A partir de maintenant nous prendrons $m = 2$ comme masse du point matériel, ainsi que $g = 1$; comme M a pour coordonnées $(x(s), z(s))$ et que $\vec{T} = d\vec{M}/ds$, nous avons :

$$z'(s) = \sin \alpha \quad (3)$$

En introduisant le potentiel

$$V(s) = mgz = 2z(s) \quad (4)$$

l'équation (2) se met sous la forme $2\ddot{s} = -V'(s)$. **Nous nous sommes donc ramenés à un problème plus simple et plus général, celui d'une particule de masse 2 dans un potentiel V obéissant à une équation de Newton de la forme :**

$$2\ddot{x} = -V'(x) . \quad (5)$$

Dans notre exemple, la variable $x = s$ est l'abscisse curviligne et le potentiel $V = 2z(s)$ est proportionnel à l'altitude. Bien sûr, une fonction $z(s)$ n'est pas quelconque et doit vérifier $|z'(s)| < 1$ à cause de (3). Le résultat d'Abel permet dans ce type de problèmes de reconstituer le potentiel V si on connaît le temps d'arrivée pour tout niveau d'énergie. Plus précisément :

Théorème 1.1 (Abel, 1826) Soit $V : [-a, 0] \rightarrow [0, +\infty[$, continûment dérivable, avec $V'(x) < 0$ si $-a \leq x \leq 0$ et $V(0) = 0$. Notons $E_0 = V(-a)$. Soit, pour $0 \leq E \leq E_0$, $\tau(E)$ le temps d'arrivée en 0 (i-e : $x(\tau(E)) = 0$) pour le problème de Cauchy :

$$\begin{cases} V(x(0)) &= E \\ \dot{x}(0) &= 0 \\ 2\ddot{x} &= -V'(x) . \end{cases}$$

Alors la fonction $\tau : [0, E_0] \rightarrow [0, +\infty[$ détermine uniquement la fonction V .

Pour démontrer ce théorème, nous aurons besoin d'étudier une transformation intégrale simple introduite par Abel.

2 La transformée d'Abel

Lemme 2.1 (Transformation d'Abel) Soit \mathcal{A} l'opérateur linéaire défini pour toute fonction u continue sur $[0, b]$ à valeurs réelles par :

$$\forall y \in]0, b] : \mathcal{A}u(y) = \int_0^y \frac{u(x)dx}{\sqrt{y-x}}$$

ainsi que $\mathcal{A}(u)(0) = 0$. Alors :

$$\forall y \in [0, b] : \mathcal{A}(\mathcal{A}u)(y) = \pi \int_0^y u(x) dx .$$

Preuve.—

$$\mathcal{A}(\mathcal{A}u)(y) = \int_0^y \frac{1}{\sqrt{y-z}} \left(\int_0^z \frac{u(x) dx}{\sqrt{z-x}} \right) dz .$$

On peut appliquer le théorème de Fubini et on a :

$$\mathcal{A}(\mathcal{A}u)(y) = \int_0^y \left(\int_x^y \frac{dz}{\sqrt{(y-z)(z-x)}} \right) u(x) dx ,$$

et on obtient le résultat à partir de l'identité

$$\int_x^y \frac{dz}{\sqrt{(y-z)(z-x)}} = \pi .$$

□

Nous sommes maintenant en mesure de démontrer le théorème d'Abel :
Preuve.—

On a, par conservation de l'énergie ($m = 2$)

$$\left(\frac{dx}{dt} \right)^2 + V(x) = E ,$$

Le temps de descente s'exprime par l'intégrale :

$$\tau(E) = \int_{x(0)}^0 \frac{dx}{\sqrt{E - V(x)}} ,$$

soit en posant $u = V(x)$, ou encore $x = W(u)$, en notant W la fonction inverse de V :

$$\tau(E) = - \int_0^E \frac{W'(u) du}{\sqrt{E - u}} ,$$

ce qui s'écrit encore : $\tau(E) = -\mathcal{A}W'(E)$. En appliquant de nouveau la transformation d'Abel :

$$\mathcal{A}\tau(E) = -\mathcal{A}^2W'(E) = -\pi \int_0^E W'(u) du = -\pi W(E)$$

d'où :

$$W(E) = -\frac{1}{\pi} \mathcal{A}\tau(E) \tag{6}$$

Il est donc possible de calculer W , donc le potentiel V à partir de la fonction τ .

□

3 Le cas où le toboggan a des parties horizontales

3.1 Valeurs critiques et mesures de Stieljes

Nous avons supposé que la dérivée de V était partout < 0 . On peut s'affranchir de cette propriété. Supposons donc seulement V de classe C^1 avec

$$\forall x \in [-a, 0] : V'(x) \leq 0$$

et toujours $E_0 > 0$. Il est alors clair que le temps $\tau(E)$ est infini si $V'(x(0)) = 0$. Montrons que la fonction τ est alors une fonction intégrable au sens de Lebesgue et que le théorème d'Abel reste vrai.

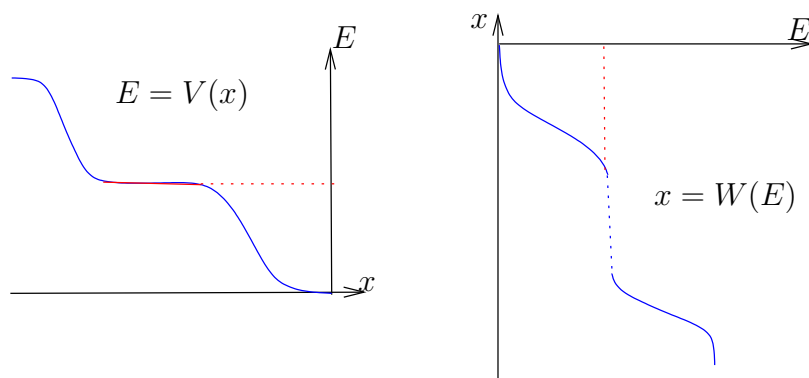


Figure 3: toboggan avec des parties horizontales

Définition 3.1 E est une valeur critique de V s'il existe x tel que $V'(x) = 0$ et $V(x) = E$.

Le théorème de Sard affirme que l'ensemble des valeurs critiques d'une fonction C^1 est de mesure de Lebesgue nulle.

Pour traiter le cas du toboggan avec des parties horizontales nous utiliserons le lemme suivant, dont la démonstration est donnée plus loin :

Lemme 3.1 Supposons $V : [-a, 0] \rightarrow [0, E_0]$ de classe C^1 avec, pour tout $x \in [-a, 0]$, $V'(x) \leq 0$. Si W est la fonction inverse¹ de V (W peut alors avoir des sauts), alors, pour tout E non critique (et donc pour presque tout E !)

$$\tau(E) = - \int_0^E \frac{dW(u)}{\sqrt{E-u}}$$

où dW est la mesure de Stieltjes associée à W .

Avant de poursuivre, rappelons quelques résultats sur les mesures de Stieltjes. Soit I un intervalle ouvert de \mathbb{R} . La mesure de Stieltjes dW associée à une fonction croissante (resp. décroissante) $W : I \rightarrow \mathbb{R}$ est définie, pour une fonction C^1

¹ W est définie presque partout ; plus précisément, W est définie en dehors des paliers de V où W a une discontinuité avec une limite à droite et une limite à gauche

$g : I \rightarrow \mathbb{R}$ à support compact, par²

$$\int_I g(u) dW(u) = - \int_I g'(u) W(u) |du| .$$

Ainsi dW est la dérivée de W au sens des distributions. La distribution dW ainsi définie est positive (resp. négative), et donc, d'après un théorème de Laurent Schwartz, est une mesure de Radon. Par exemple, si $I = \mathbb{R}$ et W est la fonction caractéristique de $]0, +\infty[$, dW est la masse de Dirac en 0 ; si W est C^1 , $dW(u) = W'(u)du$. Si W est C^1 en dehors d'un point u_0 où W a un saut $W(u_0^+) - W(u_0^-) = m$, on a $dW(u) = W'(u)du + m\delta(u_0)$. Remarquons que, dans le cas présent, dW est aussi l'image directe de la mesure de Lebesgue sur $[-a, 0]$ par la fonction V caractérisée par

$$\int_I f(u) dW(u) = \int_{-a}^0 f(V(x)) dx .$$

Théorème 3.1 *La transformation d'Abel s'étend en une application des mesures de Stieltjes à valeur dans les fonctions intégrables et on a, pour presque tout E :*

$$(\mathcal{A} \circ \mathcal{A}(dW))(E_-) = \pi(W(E_-) - W(0_+)) .$$

Preuve.—

On utilise le théorème de Fubini pour des fonctions positives : si $\forall (x, y) \in I \times J : F(x, y) \geq 0$, et si $d\mu$ et $d\nu$ sont deux mesures de Radon positives sur les ouverts I (resp. J), et si

$$K = \int_I \left(\int_J F(x, y) d\nu(y) \right) d\mu(x) < \infty ,$$

alors $\int_I F(x, y) d\mu(x)$ est finie pour presque tout y et on peut permuter les intégrales. On prend $I = J =]0, E[$, $d\mu = dW$, $d\nu = |dy|$, et

$$F(x, y) = 1_{x < y < E} [(E - y)(y - x)]^{-\frac{1}{2}} .$$

On trouve ainsi $K = \pi(W(E_-) - W(0_+))$. □

Le théorème 3.1 nous dit que la fonction $\tau(E)$, bien qu'infinie aux valeurs critiques de V , est intégrable. Combiné au lemme 3.1, il dit aussi que le théorème 1.1 d'Abel s'étend au cas d'un toboggan avec des paliers : un toboggan avec paliers est reconstructible à partir de la fonction intégrable $\tau(E)$ au moyen de la transformation d'Abel.

3.2 Démonstration simplifiée du lemme 3.1

Démontrons le lemme 3.1 sous l'hypothèse simplificatrice d'un nombre fini de paliers. Considérons une subdivision de l'intervalle $[-a, 0]$ correspondant aux paliers du potentiel :

$$-a \leq x_1 \leq y_1 < x_2 \leq y_2 < \dots < x_n \leq y_n \leq 0$$

²Contrairement à l'usage, nous notons $|dx|$ la mesure de Lebesgue sur \mathbb{R} que nous distinguons ainsi de la forme différentielle dx . Nous avons donc pour $a < b$,

$$\int_{[a, b]} f(x) |dx| = \pm \int_a^b f(x) dx$$

suivant que $a < b$ ou $a > b$. Cela rend plus claires les formules de changements de variables avec les valeurs absolues des déterminants jacobiens.

où V' s'annule exactement sur les intervalles $[x_i, y_i]$ avec $i = 1, \dots, n$. Notons $E_i = V(x_i) = V(y_i)$. On part d'une valeur d'énergie $E = V(x(0))$ non critique. $V'(x) \neq 0$ au voisinage de $x(0)$, donc le mobile prend de la vitesse ; examinons comment il traverse un palier $[x_i, y_i]$ pour la valeur d'énergie E_i . Il arrive en $x = x_i$ avec une vitesse v qu'il va conserver pendant toute la traversée du palier. On calcule v par : $v^2 + V(x_i) = v^2 + E_i = E$, ce qui donne :

$$v = \sqrt{E - E_i}$$

et la durée τ_i de la traversée du palier est donc :

$$\tau_i = \frac{y_i - x_i}{\sqrt{E - E_i}}$$

ou encore, en utilisant la fonction inverse W :

$$\tau_i = \frac{W(E_i^-) - W(E_i^+)}{\sqrt{E - E_i}} = -\frac{W(E_i^+) - W(E_i^-)}{\sqrt{E - E_i}}$$

Nous constatons alors que la durée τ_i est égale à l'opposé de l'action d'une masse de Dirac δ_{E_i} appliquée à la fonction $u \rightarrow \frac{1}{\sqrt{E - u}}$ et multipliée par l'amplitude du saut de W . Maintenant examinons comment le mobile se déplace entre deux paliers, pour aller de $V = E$ au premier palier suivant E , ou bien pour se déplacer entre deux paliers de niveaux d'énergie $< E$. Supposons par exemple que y_i est la fin d'un palier et x_{i+1} le début d'un autre palier. On se place sur un segment $[c, d] \subset]y_i, x_{i+1}[$. Le temps $\tau(c, d)$ pour parcourir cet intervalle est donné par :

$$\tau(c, d) = \int_c^d \frac{dx}{\sqrt{E - V(x)}}$$

et sur cet intervalle on dispose d'une fonction réciproque W C^1 donc, par changement de variable :

$$\tau(c, d) = \int_{E_c}^{E_d} \frac{W'(u) du}{\sqrt{E - u}}$$

ou comme $E_c > E_d$ car W est décroissante :

$$\tau(c, d) = - \int_{E_d}^{E_c} \frac{W'(u) du}{\sqrt{E - u}}$$

Quand c tend vers y_i et d vers x_{i+1} cette intégrale converge. En effet, W' est négative, intégrable sur $K_i =]E_{i+1}, E_i[$ $\left(\int_{K_i} W'(u) du = y_i - x_{i+1} \right)$ et d'autre part $\frac{1}{\sqrt{E - u}}$ est bornée sur ce même intervalle. La durée de traversée entre deux paliers $E_{i+1} < E_i$ est donc :

$$t_i = - \int_{E_{i+1}}^{E_i} \frac{W'(u) du}{\sqrt{E - u}}$$

et le temps mis pour arriver au premier palier est :

$$t = - \int_{E_1}^E \frac{W'(u) du}{\sqrt{E - u}}$$

(de même pour aller du dernier palier à l'arrivée). Pour obtenir le temps de descente $\tau(E)$, il ne reste plus qu'à ajouter toutes ces durées et on obtient :

$$\tau(E) = - \int_0^E \frac{W'(u) du}{\sqrt{E-u}} - \sum_{E_i < E} (W(E_i^+) - W(E_i^-)) \delta_{E_i} \left(\frac{1}{\sqrt{E-u}} \right)$$

On retrouve exactement l'action de la mesure de Stieljes, telle qu'elle a été définie (dérivée au sens des distributions de W , avec des masses de Dirac aux valeurs critiques). On a donc bien :

$$\tau(E) = - \int_0^E \frac{dW(u)}{\sqrt{E-u}}$$

pour toute valeur non critique.

4 Le toboggan avec des creux

On considère ici un des cas les plus simples d'un toboggan non monotone.

On suppose que le potentiel $V : [0, a] \rightarrow \mathbb{R}$ satisfait les conditions suivantes :

- V est C^1
- $V'(x) < 0$ si $0 \leq x < b$ et si $c < x < a$
- $V'(x) > 0$ si $b < x < c$

On note $E_0 = V(0)$, $E_1 = V(b)$, $E_2 = V(c)$. On suppose $E_1 < E_2 < E_0$ et $V(a) = 0$.

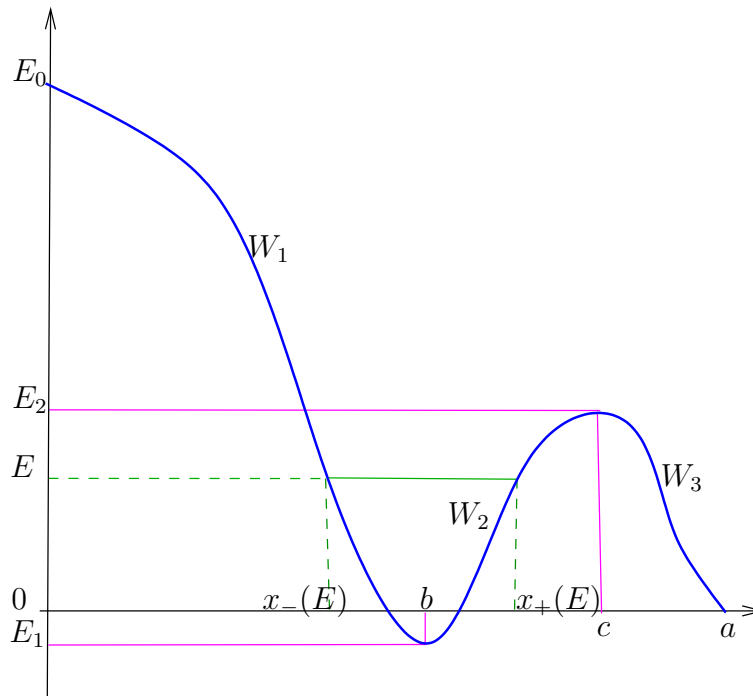


Figure 4: toboggan avec un creux

La fonction $\tau(E)$ est bien définie pour $E \neq E_2$ ($\tau(E_2) = +\infty$) ainsi que pour $E \neq E_1$ ($\tau(E_1) = +\infty$). Si $E_1 < E < E_2$, on note $x_-(E) < x_+(E) < x_0(E)$ les trois solutions de $V(x) = E$. Pour $E < E_2$, on prend $x_0(E)$ comme position de départ. On note $I =]E_1, E_2[$ et, pour $E \in I$, par $T(E)$ la période des oscillations dans l'intervalle $[x_-(E), x_+(E)]$ (situées dans le creux du pendule).

On a alors le :

Théorème 4.1 *La fonction V en dehors de l'intervalle $K :=]x_-(E_2), x_+(E_2)[$ est déterminée par la connaissance des fonctions $E \rightarrow T(E)$ et $E \rightarrow \tau(E)$.*

Preuve.—

On note $W_1 : [E_1, E_0] \rightarrow [0, b]$, $W_2 : [E_1, E_2] \rightarrow [b, c]$ et $W_3 : [0, E_2] \rightarrow [c, a]$ les trois morceaux de fonctions inverses de V . On alors les équations suivantes :

- Si $E_2 < E < E_0$,

$$\tau(E) = - \int_{E_1}^E \frac{W_1'(u) du}{\sqrt{E-u}} + \int_{E_1}^{E_2} \frac{W_2'(u) du}{\sqrt{E-u}} - \int_0^{E_2} \frac{W_3'(u) du}{\sqrt{E-u}} \quad (7)$$

- Si $E_1 < E < E_2$,

$$T(E) = 2 \int_{E_1}^E \frac{(W_2'(u) - W_1'(u)) du}{\sqrt{E-u}} \quad (8)$$

- Si $0 < E < E_2$,

$$\tau(E) = - \int_0^E \frac{W_3'(u) du}{\sqrt{E-u}} \quad (9)$$

De l'équation (9), on tire comme plus haut la fonction W_3 . De l'équation (8) et de la connaissance de $T(E)$, on tire $W_2 - W_1$ sur l'intervalle $[E_1, E_2]$. Et enfin de l'équation (7), de la connaissance de $\tau(E)$ et de $W_2 - W_1$ sur l'intervalle $[E_1, E_2]$, on tire W_1 sur l'intervalle $[E_2, E_0]$. Tout ceci permet de reconstituer V en dehors de K .

□

5 Une autre application de la transformation d'Abel : l'inversion de Wiechert-Herglotz (1907-1910)

La transformée d'Abel a une jolie application en sismologie (voir par exemple [3] Chap. 12) : on suppose, pour simplifier, que la surface de la terre est le plan $z = 0$ et que la vitesse $c(z)$ ($z < 0$) de propagation des ondes sismiques ne dépend que de z . Dans l'approximation de l'optique géométrique, la détermination des trajectoires des ondes (appelées aussi les "rais") peut se ramener à des quadratures ; on peut interpréter les rais comme les géodésiques de la métrique $ds/c(z)$, le temps de parcours étant alors la longueur de la géodésique. Supposons qu'un tremblement de terre ou une explosion a lieu à la surface au point $x = 0, z = 0$. On peut alors mesurer, en chaque point $(x, z = 0)$, le temps $T(x)$ d'arrivée de l'onde. Il s'agit de retrouver le profil $c(z)$ à partir de la connaissance de la fonction $T(x) = \tau(r)$ où $r = |x|$. Cette fonction est déterminée par une expression de la forme :

$$\tau(r) = \int_{(\gamma)} \frac{\sqrt{1 + \left(\frac{dx}{dz}\right)^2}}{c(z)} dz$$

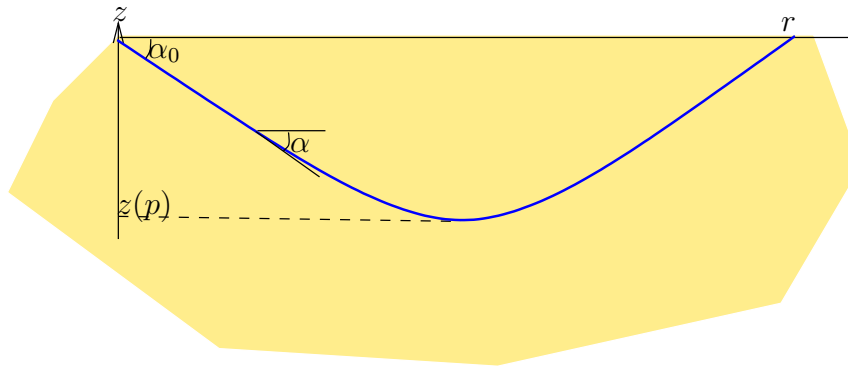


Figure 5: un rai

où (γ) est la géodésique correspondant au minimum de la fonctionnelle. On suppose que c est une fonction strictement décroissante de z (les ondes se déplacent plus vite en profondeur). L'équation des géodésiques est l'équation d'Euler-Lagrange (voir par exemple [4, 8, 12]) associée à

$$\int \sqrt{1+x'^2}/c(z)|dz| ,$$

soit

$$\frac{d}{dz} \left(\frac{x'}{c(z)\sqrt{1+x'^2}} \right) = 0 ,$$

ou encore :

$$\frac{d}{dz} \left(\frac{\cos \alpha}{c(z)} \right) = 0$$

d'où l'on déduit, en définissant α comme l'angle de $\vec{0r}$ avec la géodésique et, en supposant pour simplifier $c(0) = 1$, que : $\cos \alpha = c(z) \cos \alpha_0$. On retrouve ainsi la loi de la réfraction de Snell-Descartes. Posons $p = \cos \alpha_0$ et soit $z(p)$ l'altitude du point où la tangente à la géodésique est horizontale ; on a $c(z(p)) = p^{-1}$. La formule de variation première donne : $\frac{d\tau}{dr} = \cos \alpha_0 = p$. Expriment $r = 2 \int_{z(p)}^0 dz/\tan \alpha$, il vient

$$r = 2p \int_{z(p)}^0 \frac{dz}{\sqrt{c^{-2}(z) - p^2}}$$

où $c^{-2}(z(p)) = p^2$. Cette transformation intégrale s'exprime en terme d'une transformation d'Abel de la fonction c^{-2} .

6 Courbes tautochrones

Une courbe *tautochrone* est une courbe telle que le temps mis par un point matériel se déplaçant sur la courbe (sans frottement, dans un champ de gravitation uniforme) pour atteindre le point le plus bas de la courbe est indépendant de son point de départ. Le problème de déterminer ces courbes a passionné les mathématiciens du dix-septième siècle. C'est Christian Huygens qui l'a résolu en 1659. Dans son ouvrage intitulé "Horologium oscillatorium" paru en 1673, il démontre que ces courbes sont des cycloïdes. On trouve, dans un des cahiers de Niels Abel, écrit probablement avant 1820, des notes sur les courbes tautochrones [10] ; ceci prouve que Niels Abel s'intéressait déjà à ce problème de mécanique alors qu'il était encore

lycéen. Nous abordons ici ce problème par le biais du théorème d'Abel. Cela impose une légère restriction. En effet les potentiels envisagés dans le théorème 1.1 sont décroissants. Nous nous limiterons donc à chercher les courbes tautochrones dont l'altitude décroît. Ces courbes constituent des toboggans pour lesquels le temps d'arrivée $\tau(E)$ est une fonction constante, de valeur τ_0 .

Commençons par calculer la transformée d'Abel de la fonction constante τ_0 :

$$\begin{aligned} \mathcal{A}\tau_0(E) &= \int_0^E \frac{\tau_0}{\sqrt{E-x}} dx \\ &= 2\tau_0\sqrt{E} \end{aligned}$$

En utilisant la relation (6), nous pouvons alors déterminer la fonction inverse du potentiel : $W(E) = -2\tau_0\sqrt{E}/\pi$. Nous en déduisons que le potentiel est :

$$V(x) = \pi^2 x^2 / 4\tau_0^2$$

Il ne nous reste plus maintenant qu'à prouver que la courbe tautochrone associée à ce potentiel, considéré comme fonction de l'abscisse curviligne est une cycloïde. Nous calculons l'abscisse curviligne à partir du point bas O , la courbe étant orientée dans le sens de la descente (voir figure 6). L'abscisse curviligne s varie alors dans un intervalle $[-\mathcal{L}, 0]$ comme la variable x dans le théorème 1.1. Nous supposons toujours que $m = 2$, $g = 1$. D'après (4), l'altitude est donnée par :

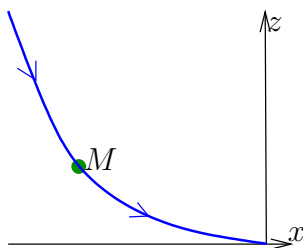


Figure 6: courbe tautochrone

$$z(s) = \frac{1}{2}V(s) = \frac{\pi^2 s^2}{8\tau_0^2}$$

Nous en déduisons, en notant $M(s) = (x(s), y(s))$ le point mobile que $z'(s) = \pi^2 s / 4\tau_0^2$, d'où :

$$x'(s) = \sqrt{1 - z'(s)^2} = \sqrt{1 - \frac{\pi^4 s^2}{16\tau_0^4}}$$

Nous poserons $\pi^2 s / 4\tau_0^2 = \cos(\theta/2)$, avec $\pi \leq \theta \leq 2\pi$ de manière à avoir $\sin \theta < 0$. Pour $\theta = \pi$, le point est en O et $s = 0$, $x = 0$; pour $\theta = 2\pi$, M est en $A(-a, V(-a))$ et $s = -\mathcal{L} < 0$. Nous pouvons alors calculer les coordonnées x et z du point $M(s)$:

$$\begin{aligned} x &= \int_0^s x'(\xi) d\xi \\ &= -\frac{2\tau_0^2}{\pi^2} \int_\pi^\theta \sin^2\left(\frac{u}{2}\right) du \\ &= -\frac{\tau_0^2}{\pi^2} (\theta - \sin \theta) + \frac{\tau_0^2}{\pi} \end{aligned}$$

De même :

$$z = \frac{2\tau_0^2}{\pi^2} \cos^2\left(\frac{\theta}{2}\right) = \frac{\tau_0^2}{\pi^2}(1 + \cos\theta)$$

On retrouve bien la représentation paramétrique d'une cycloïde.

7 Période des pendules

On considère maintenant les oscillations périodiques d'un point matériel dans un potentiel V de classe C^1 présentant un minimum en $x = 0$. On appellera un tel système un *pendule* par référence à l'exemple d'un point matériel suspendu à un bras de longueur L . Dans le cas du pendule pesant de longueur L , l'équation des oscillations s'écrit $\ddot{\alpha} = \frac{g}{L} \sin(\alpha)$, ou encore :

$$\ddot{\alpha} = -V'(\alpha)$$

en prenant comme potentiel $V : V(\alpha) = \cos\left(\frac{g\alpha}{L}\right)$.

Considérons maintenant un pendule régi par l'équation (5), pour un potentiel $V(x)$ défini sur $[-a, c]$, avec $-a < 0 < c$, supposé vérifier :

- $V(x) \geq 0$
- $V(0) = 0$
- $xV'(x) > 0$ si $x \neq 0$
- $V(-a) = V(c)$

On posera : $E_0 = V(-a) = V(c)$.

Pour chaque $E \in]0, E_0]$, on appelle $T(E)$ la période des oscillations d'énergie E du point matériel de masse $m = 2$ dans le potentiel V . On a donc, à tout instant, par conservation de l'énergie : $E = \dot{x}^2 + V(x)$.

Soient $W_{\pm} : [0, E_0] \rightarrow [0, +\infty[$ les fonctions inverses de V sur $[0, c]$ et $[-a, 0[$ respectivement. Nous pouvons alors exprimer la période à l'aide de la transformation d'Abel :

Proposition 7.1 *La période $T(E)$ est donnée par :*

$$T(E) = 2\mathcal{A}(W_+')(E) - 2\mathcal{A}(W_-')(E) .$$

Preuve.—

Par la conservation de l'énergie on a toujours $\dot{x}^2 + V(x) = E$ ce qui permet de calculer

$$\frac{dt}{dx} = \frac{1}{\sqrt{E - V(x)}} .$$

On se place sur un intervalle de temps où x croît de $x_-(E)$ à $x_+(E)$, avec $\{x \mid V(x) \leq E\} = [x_-(E), x_+(E)]$. Cet intervalle à une durée d'une demi-période, ce qui donne :

$$T(E) = 2 \int_{x_-(E)}^{x_+(E)} \frac{dx}{\sqrt{E - V(x)}}$$

Nous coupons l'intégrale en deux parties :

$$T(E) = 2 \int_{x_-(E)}^0 \frac{dx}{\sqrt{E - V(x)}} + 2 \int_0^{x_+(E)} \frac{dx}{\sqrt{E - V(x)}}$$

et nous effectuons dans la première intégrale le changement de variable $x = W_-(u)$ et dans la deuxième le changement $x = W_+(u)$:

$$T(E) = 2 \int_E^0 \frac{W'_-(u) du}{\sqrt{E-u}} + 2 \int_0^E \frac{W'_+(u) du}{\sqrt{E-u}}$$

$$T(E) = -2 \int_0^E \frac{W'_-(u) du}{\sqrt{E-u}} + 2 \int_0^E \frac{W'_+(u) du}{\sqrt{E-u}}$$

ce qui donne bien :

$$T(E) = 2\mathcal{A}(W_+'(E)) - 2\mathcal{A}(W_-'(E)) .$$

□

En particulier, on a :

$$W_+ - W_- = \frac{2}{\pi} \mathcal{A}T .$$

Il existe ainsi de nombreux potentiels distincts ayant la même fonction $T(E)$. Parmi ceux-ci, il en existe un seul qui est pair, i.e. $W_+ + W_- \equiv 0$.

Exemple 7.1 Pour l'oscillateur harmonique nous avons $V(x) = x^2$ et $T(E) = \pi$; mais le potentiel $V(x) = (\sqrt{1+2x} - 1)^2$, défini sur $]-\frac{1}{2}, \frac{3}{2}[$, vérifie aussi $T(E) = \pi$; en effet

$$W_{\pm}(u) = \pm\sqrt{u} + \frac{u}{2} ,$$

et donc $W_+(u) - W_-(u) = 2\sqrt{u}$ a la même valeur que pour le potentiel $V(x) = x^2$.

8 Problème spectral inverse

Soit D un domaine borné connexe à bord du plan et soient

$$0 < \lambda_1 < \lambda_2 \leq \dots \leq \lambda_j \leq \dots$$

la suite des valeurs propres du laplacien dans D avec les conditions au bord de Dirichlet ; pour chacun des λ_j , il existe une fonction $\phi_j : D \rightarrow \mathbb{C}$, non identiquement

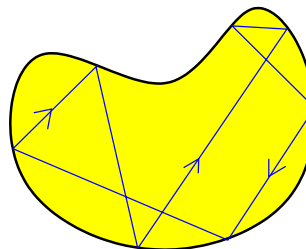


Figure 7: Mark Kac (©Mathematisches Forschungsinstitut Oberwolfach.)

Figure 8: Trajectoire périodique dans un billard

nulle, telle que

$$\begin{cases} \Delta\phi_j + \lambda_j\phi_j = 0 \\ \phi_j(x) = 0 \text{ si } x \in \partial D \end{cases} .$$

On peut choisir les ϕ_j de façon à ce qu'elles forment une base orthonormale de $L^2(D, |dx|)$. La suite des λ_j est appelée *spectre de D* . Du point de vue physique, les $\mu_j = \sqrt{\lambda_j}$ sont les fréquences de modes propres d'oscillations de la membrane vibrante D fixée au bord, d'où le terme *tambour* utilisé par Mark Kac.

Dans son fameux article de 1966 [7], Mark Kac pose le problème suivant : **le domaine D est-il déterminé par la suite des λ_j ?**

Kac montre que l'aire de D ainsi que la longueur du bord ∂D de D sont déterminées par le spectre de D . Le premier auteur a prouvé dans sa thèse en 1973 que, si D_1 et D_2 ont même spectre du laplacien, les billards associés ont des trajectoires périodiques de mêmes longueurs.

On sait maintenant [6] qu'il existe des paires de domaines polygonaux D_1 et D_2 non isométriques ayant même spectres ; les deux domaines de la figure 9 en sont des exemples. On peut voir en particulier qu'ils ont mêmes aires, mêmes longueurs des bords et mêmes angles.

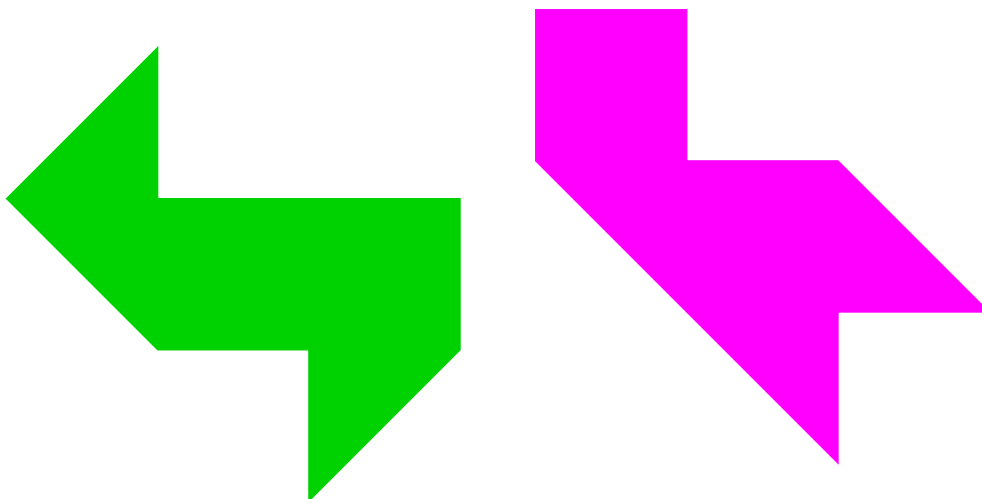


Figure 9: deux domaines isospectraux

9 Le problème inverse semi-classique

Il s'agit d'un problème inverse du type de celui de Kac. On considère, pour chaque valeur de la constante de Planck $\hbar > 0$ (en physique mathématique, et plus particulièrement en analyse semi-classique, il est courant de considérer \hbar comme un paramètre qui tend vers zéro), l'opérateur de Schrödinger

$$\hat{H}_\hbar = -\hbar^2 \frac{d^2}{dx^2} + V(x)$$

où l'on suppose, pour simplifier, que V est une fonction C^∞ sur \mathbb{R} à valeurs ≥ 0 et vérifiant $\lim_{x \rightarrow \infty} V(x) = +\infty$, $xV'(x) > 0$ pour $x \neq 0$ et $V(0) = 0$. L'opérateur \hat{H}_\hbar admet un spectre

$$0 < \lambda_1(\hbar) < \dots < \lambda_j(\hbar) < \dots$$

caractérisé par l'existence d'une base orthonormale $(\varphi_j(\hbar))$ de $L^2(\mathbb{R}, |dx|)$ vérifiant $\hat{H}_\hbar \varphi_j(\hbar) = \lambda_j(\hbar) \varphi_j(\hbar)$. Par exemple, si $V(x) = x^2$ (oscillateur harmonique), les

valeurs propres sont les $\lambda_j(\hbar) = (2j + 1)\hbar$ et les fonctions propres sont les produits de l'exponentielle $\exp(-x^2/2)$ par des polynômes d'Hermite.

Lorsque \hbar tend vers 0, on s'attend à ce que le comportement asymptotique des valeurs propres $\lambda_j(\hbar)$ soit décrit en termes de la mécanique classique d'une particule de masse m dans le potentiel V . Expliciter ce comportement est un des buts de l'analyse semi-classique.

On considère ainsi l'Hamiltonien $H = \xi^2 + V(x)$ défini sur l'espace des phases $\mathbb{R}_{x,\xi}^2$ qui gouverne la dynamique classique à l'aide des équations de Hamilton :

$$\dot{x} = 2\xi, \quad \dot{\xi} = -V'(x) \tag{10}$$

(cette écriture simple du Hamiltonien correspond en fait à $m = \frac{1}{2}$). Un des résultats les plus simples de l'analyse semi-classique est la formule de Weyl [11] (voir aussi [9], Section XIII.15), qui donne une estimation du nombre de valeurs propres inférieures ou égales à un niveau d'énergie donné :

$$N_{\hbar}(E) = \#\{\lambda_j(\hbar) \leq E\} \sim \frac{1}{2\pi\hbar} \text{Aire}(\{(x, \xi) \in \mathbb{R}^2 \mid \xi^2 + V(x) \leq E\}) . \tag{11}$$

Par exemple, pour l'oscillateur harmonique, on a ainsi

$$N_{\hbar}(E) = \#\{j \in \mathbb{N} \mid (2j+1)\hbar \leq E\} \sim \frac{E}{2\hbar} = \frac{1}{2\pi\hbar} \text{Aire}(\{(x, \xi) \in \mathbb{R}^2 \mid \xi^2 + x^2 \leq E\}) .$$

Si on note $A(E)$ l'aire de la formule (11), il est aisé de vérifier que la dérivée de $A(E)$ est la période des oscillations d'énergie E dans le potentiel V .

Dans le cas de l'oscillateur harmonique : $A(E) = \pi E$, $A'(E) = \pi$; mais l'équation de Newton s'écrit alors $\ddot{x} + 4x(t) = 0$, dont les solutions sont justement π périodiques.

On en déduit ainsi que la connaissance de l'équivalent de $N_{\hbar}(E)$ pour tout E détermine la fonction période $T(E)$; mais la connaissance de la fonction période n'est pas suffisante pour déterminer la fonction V .

On a cependant le résultat suivant :

Théorème 9.1 (CdV [5]) *Le potentiel V est déterminé par la connaissance de la suite des $\lambda_j(\hbar)$ modulo $o(\hbar^2)$.*

L'idée est d'essayer d'avoir le terme suivant dans la formule de Weyl. Le comportement asymptotique des $\lambda_j(\hbar)$ n'étant pas toujours très régulier, on le régularise et on considère pour toute fonction $f \in C_0^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ la somme

$$Z_f(\hbar) := \sum_{j=1}^{\infty} f(\lambda_j(\hbar)) .$$

La somme $Z_f(\hbar)$ est finie, mais le nombre de termes tend vers l'infini quand $\hbar \rightarrow 0^+$. On montre ainsi, à l'aide du calcul pseudo-différentiel, que, si f est égale à 1 dans un voisinage de 0, on a :

$$Z_f(\hbar) = \frac{1}{2\pi\hbar} \left(\int_{\mathbb{R}^2} f(H) |dx d\xi| - \frac{\hbar^2}{12} \int_0^\infty f'(E) \frac{d}{dE} \left(\int_{\gamma_E} V''(x) dt \right) dE + O(\hbar^4) \right) ; \tag{12}$$

ici γ_E est la courbe fermée $\xi^2 + V(x) = E$ (la trajectoire de période $T(E)$ dans l'espace des phases) et t est le temps sur la trajectoire γ_E .

L'équation (12) est appelée "formule de traces" : en effet, cette formule identifie la trace de $f(\hat{H}_{\hbar})$ calculée de deux façons : le membre de gauche comme somme des

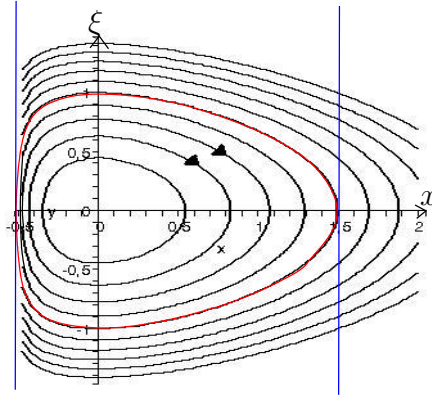


Figure 10: portrait de phases pour l'exemple 7.1

valeurs propres $f(\lambda_j(\hbar))$ de $f(\hat{H}_\hbar)$, le membre de droite calculé à l'aide du calcul pseudo-différentiel et de la formule $\text{Trace}(f(\hat{H}_\hbar)) = \int_{\mathbb{R}} K(x, x) |dx|$ où $K(x, y)$ est le noyau intégral de l'opérateur pseudo-différentiel $f(\hat{H}_\hbar)$ défini par :

$$f(\hat{H}_\hbar)\varphi_j(\hbar) = f(\lambda_j(\hbar))\varphi_j(\hbar)$$

L'information supplémentaire obtenue du terme $\int_{\gamma_E} V''(x) dt$ permet de trouver $W_+ + W_-$ en recourant de nouveau à la transformée d'Abel.

Plutôt que de démontrer la "formule de traces" (12) (voir [5]), on va se contenter ici de la vérifier pour l'oscillateur harmonique ; elle s'écrit alors³

$$\sum f((2j+1)\hbar) = \frac{1}{2\pi\hbar} \int_{\mathbb{R}^2} f(x^2 + \xi^2) |dx d\xi| + O(\hbar^\infty),$$

ou encore, en évaluant l'intégrale de droite par passage en coordonnées polaires :

$$\sum f((2j+1)\hbar) = \frac{1}{2\hbar} \int_0^\infty f(E) dE + O(\hbar^\infty).$$

Rappelons la formule sommatoire de Poisson ; si $F \in C_o^\infty(\mathbb{R})$ et si $\hat{F}(y) = \int_{\mathbb{R}} F(x) e^{-ixy} dy$ est sa transformée de Fourier, on a

$$\sum_{j \in \mathbb{Z}} F(jT + a) = \frac{1}{T} \sum_{k \in \mathbb{Z}} e^{2i\pi ka/T} \hat{F}(2\pi k/T).$$

Le membre de droite est ainsi la série de Fourier du membre de gauche considéré comme une fonction de période T de la variable a : c'est la base de la démonstration de la formule sommatoire de Poisson.

On applique la formule sommatoire de Poisson, avec $T = 2\hbar$, $a = \hbar$ et F la fonction paire dont le restriction aux $x \geq 0$ vaut f . Cela donne le résultat si on se rappelle que \hat{F} est à décroissance rapide, ce qui implique que la somme pour $k \neq 0$ des termes $\hat{F}(\pi k/\hbar)$ est $O(\hbar^\infty)$.

Références

- [1] Niels Abel. Auflösung einer mechanischen Aufgabe, *Journal de Crelle* **1**:153–157 (1826).

³ $O(\hbar^\infty)$ signifie $O(\hbar^N)$ pour tout entier N

- [2] Niels Abel. Solution d'un problème de mécanique. *Oeuvres complètes de Niels Henrik Abel I*, Grøndahl & Søn, Christiania (Norvège) (1881).
- [3] Keiiti Aki & Paul G. Richards. Quantitative Seismology, Theory and Models, Vol. II. *W. H. Freeman & Co* (San Francisco) (1980).
- [4] Jean-Pierre Bourguignon. Calcul variationnel, *Les éditions de l'Ecole Polytechnique* (2007).
- [5] Yves Colin de Verdière. A semi-classical inverse problem II: reconstruction of the potential, [arXiv:0802.1643](https://arxiv.org/abs/0802.1643).
- [6] Carolyn Gordon, David Webb & Scott Wolpert. Isospectral plane domains and surfaces via Riemannian orbifolds, *Invent. Math.* **110**:1–22 (1992).
- [7] Mark Kac. Can one hear the shape of a drum? *Amer. Math. Monthly* **73**:1–23 (1966).
- [8] Yves Meyer. Calcul des variations, *Cours Ecole Polytechnique* (1981).
- [9] Michael Reed & Barry Simon. Methods of modern mathematical physics. IV Analysis of operators. *Academic Press, New York, San Francisco, London* (1978).
- [10] Ludvig Sylow. Les études d'Abel et ses découvertes, dans : Niels Henrik Abel, mémorial publié à l'occasion du centenaire de sa naissance, Kristiania : Dybwad (1902).
- [11] Hermann Weyl. Das asymptotische Verteilungsgesetz der Eigenwerte linearer partieller Differentialgleichungen (mit einer Anwendung auf die Theorie der Hohlraumstrahlung), *Math. Ann.* **71**:441–479 (1912).
- [12] Laurence C. Young. Lectures on the calculus of variations and optimal control theory, *Chelsea Pub. Co. (New York)* (1980).